



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE
CONTORNO NA ANÁLISE MODAL DE
UMA PLACA DE AÇO**

MURILO FABRO

**JOINVILLE, SC
2018**

MURILO FABRO

**INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO NA ANÁLISE MODAL DE UMA
PLACA DE AÇO**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

JOINVILLE, SC

2018

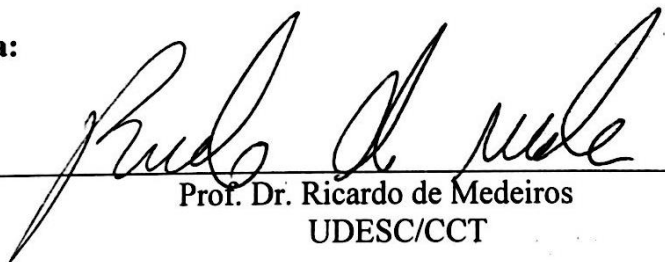
MURILO FABRO

**INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO NA ANÁLISE MODAL DE UMA
PLACA DE AÇO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC0001) do Curso de Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.


Banca Examinadora:

Orientador:

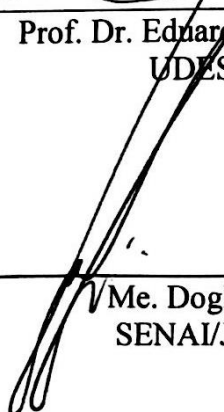


Prof. Dr. Ricardo de Medeiros
UDESC/CCT

Membros:



Prof. Dr. Ednardo Lenz Cardoso
UDESC/CCT



Me. Douglas Negri
SENAI/Joinville

Joinville, 03 de julho de 2018.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer àqueles que tornaram toda essa caminhada possível, que sempre me apoiaram e fizeram tudo o que podiam por mim: meu pai Ricardo e minha mãe Rejane.

À Equipe Albatroz, por tudo que aprendi e cresci lá dentro, sou muito grato a oportunidade que tive. Também, por todas as amizades que fiz, criei amigos que tenho certeza que levarei para toda vida.

Ao professor Lafratta, que acabou se tornando um segundo pai para mim dentro desta universidade.

Ao meu professor orientador Dr. Ricardo de Medeiros, por toda ajuda, apoio e a confiança depositada em mim.

Ao Douglas Negri, por ter me ensinado muito referente a parte experimental e que sempre se disponibilizou em ajudar com qualquer dúvida que eu tivesse.

A todos vocês, meu muito obrigado!

RESUMO

Nas últimas décadas, a análise modal se tornou a principal tecnologia na questão de determinar, melhorar e otimizar as características dinâmicas de estruturas mecânicas. Quando se faz a validação de algum modelo através da análise modal experimental, a condição livre-livre é frequentemente aproximada em laboratório para posterior comparação com resultados obtidos analiticamente ou através de *softwares* de simulação. Esta condição é comumente utilizada devido a sua maior facilidade, tanto na obtenção de resultados analíticos ou numéricos, quanto na aplicação prática experimental. Entretanto, esta condição pode ser somente aplicada à testes realizados em laboratórios, uma vez que o modelo precisa ser suportado por alguma maneira. Neste estudo buscou-se investigar a influência de determinadas condições de contorno nas frequências naturais de ressonância da estrutura através de comparações diretas e métodos de correlação. Os parâmetros para essa comparação foram retirados através de uma análise modal numérica. Tendo os resultados dessas análises, quantificou-se a real influência de cada condição de contorno estudada e assim pode-se discutir as variações na resposta da estrutura, que cada uma obteve sobre a estrutura. De forma geral, tais condições de contorno tiveram uma influência menor que 2,0 % na característica dinâmica da placa. Portanto, a utilização de qualquer das condições de contorno estudadas seria adequada para a obtenção das características dinâmicas do modelo que está sendo estudado.

Palavras-chave: Análise modal. Condições de contorno. Vibrações. Livre-Livre.

ABSTRACT

In the past decades, modal analysis has become a major technology in the quest for determining, improving and optimizing dynamic characteristics of engineering structures. When modal testing a structure for model validation, free boundary conditions are frequently approximated in the lab to compare with analytical or numerical results. Free conditions are used because they are normally easy to simulate analytically and to approximate experimentally. However, the free conditions can only be approximated in the laboratory because the structure must be supported in some manner. This research investigates the effects of support conditions on natural resonance frequencies through direct comparison and correlation methods. The parameters for this comparison were carried out using modal numerical analysis. Taking the results of these analyzes, the real influence of each boundary condition was quantified, and the structural variations were discussed. In general, these boundary conditions had an influence of less than 2.0% on the dynamic characteristic of the plate. Therefore, the use of the boundary conditions studied would be adequate to describe the dynamic characteristics of the model being studied.

Key-words: Modal analysis. Boundary conditions. Vibrations. Free boundary.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Desastre da ponte Tacoma Narrows	19
Figura 2 – Sistema com um grau de liberdade (a) e digrama de corpo livre (b)	22
Figura 3 – Gráfico tridimensional de uma FRF	28
Figura 4 – Representação gráfica da parte real \times frequência	28
Figura 5 – Representação gráfica da parte imaginária \times frequência	29
Figura 6 – Frequência de amostragem maior que o dobro da frequência amostrada	32
Figura 7 – Frequência de amostragem igual ao dobro da frequência amostrada	32
Figura 8 – Frequência de amostragem menor que o dobro da frequência amostrada	32
Figura 9 – Sinal não periódico sem uso da função de janelamento	33
Figura 10 – Sinal não periódico com o uso da função de janelamento	34
Figura 11 – Fluxograma do estudo	37
Figura 12 – Placa de estudo esquematizada	38
Figura 13 – Condições de contorno analisadas (a) borracha de látex e (b) espuma de baixa densidade	39
Figura 14 – Influência no material da ponteira na faixa de frequência	39
Figura 15 – Aparato experimental	40
Figura 16 – Análise de refino de malha	41
Figura 17 – Erro relativo ao número de elementos	41
Figura 18 – Malha numérica	42
Figura 19 – Décimo sexto modo de vibração	43
Figura 20 – Deslocamento modal no sentido longitudinal da placa	43
Figura 21 – Deslocamento modal no sentido transversal da placa	44
Figura 22 – Malha experimental	44
Figura 23 – Placa real de estudo com os pontos experimentais	45
Figura 24 – Janelamento martelo	46
Figura 25 – Janelamento acelerômetro	47
Figura 26 – Placa na posição vertical	47
Figura 27 – Placa na posição horizontal	48
Figura 28 – Placa sobre a espuma	48

Figura 29 – Pontos de análise das FRFs	49
Figura 30 – Modos de corpo rígido da placa	52
Figura 31 – Primeiro e segundo modos de vibração numéricos	52
Figura 32 – Terceiro e quarto modos de vibração numéricos.....	52
Figura 33 – Primeiro e segundo modos de vibração experimentais	53
Figura 34 – Terceiro e quarto modos de vibração experimentais.....	53
Figura 35 – MAC entre as mesmas CC para a placa sobre a espuma.....	56
Figura 36 – MAC entre as mesmas CC para a placa na horizontal	56
Figura 37 – MAC entre as mesmas CC para a placa na vertical.....	57
Figura 38 – MAC entre distintas CC para a placa sobre a espuma e a placa na horizontal....	57
Figura 39 – MAC entre distintas CC para a placa sobre a espuma e para a placa na vertical	58
Figura 40 – MAC entre distintas CC para a placa na vertical e para a placa na horizontal....	58
Figura 41 - FRF (H) em relação à entrada (X) e saída (Y)	59
Figura 42 – Coerência experimental	60
Figura 43 – FRF dos 3 pontos experimentais	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades mecânicas - SAE 1045	38
Tabela 2 – Ordenação dos nós experimentais	45
Tabela 3 – Frequências experimentais da placa sobre a espuma.....	54
Tabela 4 – Frequências experimentais da placa na vertical.....	54
Tabela 5 – Frequências experimentais da placa na horizontal	54
Tabela 6 – Erro relativo às frequências (placa sobre a espuma).....	55
Tabela 7 – Erro relativo às frequências (placa na vertical)	55
Tabela 8 – Erro relativo às frequências (placa na horizontal)	55
Tabela 9 – Diferenças relativas à cada condição de contorno	55

SUMÁRIO

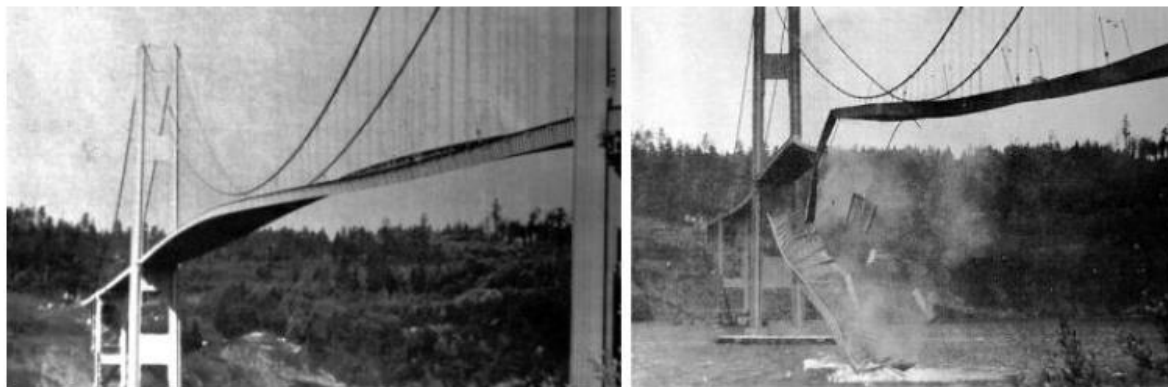
1	INTRODUÇÃO.....	19
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	VIBRAÇÕES	21
2.1.1	Sistema com um grau de liberdade	22
2.1.2	Sistema com múltiplos graus de liberdade	23
2.2	ANÁLISE MODAL.....	24
2.2.1	Função de Resposta em Frequência (FRF).....	26
2.2.2	Representação gráfica da FRF	27
2.3	ANÁLISE MODAL NUMÉRICA	29
2.3.1	Pré-processamento	29
2.3.2	Análise do software	30
2.3.3	Pós-processamento	31
2.4	ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	31
2.4.1	Critérios de correlação	34
3	MATERIAIS E MÉTODOS	37
3.1	MATERIAIS E EQUIPAMENTOS	38
3.2	ANÁLISE MODAL.....	40
3.2.1	Análise modal numérica	40
3.2.2	Análise modal experimental.....	42
3.3	FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	48
3.3.1	Análise experimental	48
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	51
4.1	ANÁLISE MODAL.....	51
4.1.1	Análise modal numérica	51
4.1.2	Análise modal experimental.....	53
4.1.3	Comparação entre os resultados computacionais e experimentais	54
4.2	COERÊNCIA.....	59
4.3	FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	60

5 CONCLUSÕES	63
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65

1 INTRODUÇÃO

A análise modal é o estudo das propriedades dinâmicas de estruturas lineares no domínio da frequência. Através dela é possível avaliar as frequências de ressonância, fatores de amortecimento e modos de vibração. As propriedades dinâmicas dependem da distribuição de massa, rigidez e amortecimento na estrutura e determinam o comportamento da vibração estrutural quando expostas a cargas operacionais. Cada deslocamento de um sistema estrutural linear pode ser expressa como uma combinação linear dos modos estruturais, que formam uma base vetorial ortonormal. Portanto, é de extrema importância conhecer essas características em uma estrutura, a fim de realizar um projeto adequado da mesma. Assim, caso um componente ou sistema mecânicos sofra uma excitação correspondente a um modo de vibração, a estrutura pode sofrer danos parciais ou permanentes, acarretando em falhas no sistema que provocam grandes prejuízos. O desastre da ponte Tacoma Narrows é um exemplo típico deste fenômeno (cf. Figura 1). Ela desmoronou devido à vibração induzida pelo vento.

Figura 1 – Desastre da ponte Tacoma Narrows



Fonte: Guillaume, 2000.

As formas comumente usadas para encontrar tais características dinâmicas são através de cálculos analíticos, numéricos (pela utilização do método de elementos finitos por exemplo), ou ainda através de ensaios experimentais. O ambiente de teste livre é facilmente alcançado em cálculos teóricos, mas geralmente é comprometido quando simulado experimentalmente devido à necessidade de suportar a estrutura contra forças de gravidade. Além disso, a aplicação de conceitos de subestruturação requerem o uso de Funções de Reposta em Frequência (FRF) livres para descrever o item de teste. Experimentalmente, esta condição pode ser somente

aproximada através do uso de suportes que possuam baixa rigidez, entretanto, ainda que pouco, tais suportes afetarão nas características dinâmicas reais da estrutura.

O desenvolvimento desta pesquisa tem grande importância para futuros trabalhos, visto que, após os resultados obtidos, buscar-se-á desenvolver subsídios para determinar a melhor forma de “fixar” a estrutura, com o intuito de melhor representar a condição livre-livre, buscando identificar a menor influência nas características dinâmicas reais da estrutura. Diante do exposto, este estudo tem como objetivo principal investigar e quantificar, através de comparações com o modelo numérico e o uso de alguns critérios de correlação, a influência das diferentes condições de contorno na análise modal de uma placa de aço, considerando a estrutura na condição “livre-livre”.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 VIBRAÇÕES

Vibrações são movimentos oscilatórios de corpos em resposta às forças que lhes são aplicadas (THOMSON, 1978). Desta forma, pode-se denominar um sistema vibratório, ao qual é composto de um meio para armazenar energia cinética (massas ou inércias), um meio para armazenar energia potencial (molas ou elasticidades) e um meio de perda gradual de energia (amortecedores). Assim, a vibração consiste na transferência alternada da sua energia potencial em energia cinética e vice-versa. Se o sistema for amortecido, há uma dissipação de energia a cada ciclo de vibração (RAO, 2009).

Ainda, segundo (RAO, 2009), as principais vibrações que ocorrem nos sistemas mecânicos podem ser classificadas como:

- **Livres ou forçadas:** vibrações livres ocorrem quando, após uma perturbação inicial, o sistema continua a vibrar por conta própria, sendo que nenhuma força externa atue sobre o sistema. Quando há uma existência de força externa, a vibração é dita forçada.
- **Amortecidas ou não amortecidas:** vibrações não amortecidas ocorrem quando nenhuma energia for dissipada durante a oscilação. Entretanto, quando ocorre qualquer tipo de perda, ela é denominada de vibração amortecida. Vale ressaltar que, por menor que seja, sistemas reais sempre apresentam amortecimento.
- **Lineares e não lineares:** se todos os componentes do sistema vibratório se comportarem linearmente, a vibração é dita linear. Caso contrário é dita vibração não linear. Para o primeiro caso as técnicas matemáticas são bem desenvolvidas e o princípio da superposição é válido.
- **Determinística e aleatória:** Se a magnitude da excitação que está agindo sobre um sistema vibratório for conhecida a qualquer dado instante, a excitação é denominada determinística e a vibração resultante como vibração determinística. Caso isso não ocorra, a vibração é conhecida como aleatória.

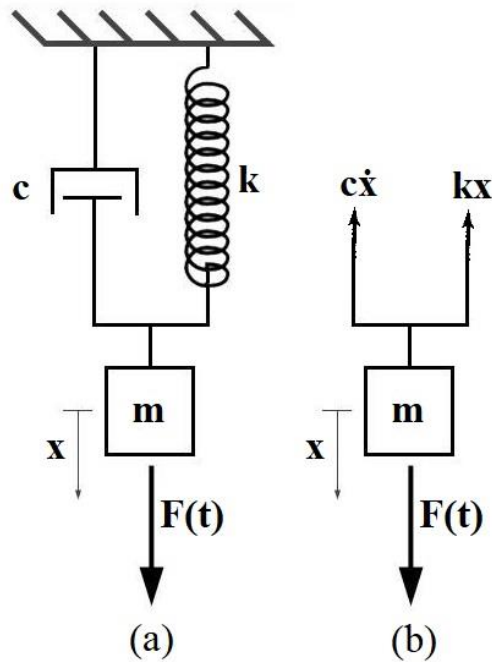
Tendo os conceitos básicos definidos e classificados, pode-se então trabalhar com as formulações matemáticas necessárias para o estudo de vibrações. Partiu-se inicialmente de uma

análise mais básica através de sistema vibratório linear com um grau de liberdade e estendeu-se para um sistema com vários graus de liberdade utilizando o princípio da superposição.

2.1.1 Sistema com um grau de liberdade

O estudo da vibração de sistemas com um grau de liberdade, amortecidos e não amortecidos, é fundamental para o entendimento de questões mais avançadas de vibrações. Vários sistemas mecânicos podem ser idealizados como sistemas com um grau de liberdade (RAO, 2009). A Figura 2 representa um sistema vibratório massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade.

Figura 2 – Sistema com um grau de liberdade (a) e digrama de corpo livre (b)



Fonte: Produção do próprio autor.

Desta forma, pode-se definir: m a massa do sistema, k a rigidez, c o amortecimento, $F(t)$ a força em função do tempo e x o deslocamento. Para determinar a equação do movimento do sistema vibratório pode-se aplicar a segunda lei de Newton, através do somatório de forças. Portanto,

$$\sum F = m\ddot{x}, \quad (1)$$

onde, \ddot{x} representa a aceleração do sistema no sentido do deslocamento x . Definindo assim,

$$F = -F_{mola} - F_{amortecedor} + F(t), \quad (2)$$

onde

$$F_{mola} = kx, \quad (3)$$

e

$$F_{amortecedor} = c\dot{x}, \quad (4)$$

tal que, a Eq. (1) pode ser rescrita como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (5)$$

Desta forma, tem-se a equação básica do movimento para um sistema vibratório com um grau de liberdade. Ainda, se aplicado algumas hipóteses, é possível ter quatro problemas de vibração distintos:

- Vibração livre não amortecida: $m\ddot{x} + kx = 0$
- Vibração livre amortecida: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$
- Vibração forçada não amortecida: $m\ddot{x} + kx = F(t)$
- Vibração forçada amortecida: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

2.1.2 Sistema com múltiplos graus de liberdade

Para um sistema com vários graus de liberdade, a equação do movimento é similar ao já demonstrado anteriormente na Eq. (5), porém, os termos de inércia, amortecimento e rigidez são matrizes. As acelerações, velocidades, deslocamentos e forças externas são vetores, de tal forma que

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

onde n representa o número de graus de liberdade do sistema. Esta equação pode ser escrita de maneira mais simplificada,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t). \quad (7)$$

2.2 ANÁLISE MODAL

Nas últimas duas décadas, a análise modal se tornou a principal tecnologia na questão de determinar, melhorar e otimizar as características dinâmicas de estruturas mecânicas. A análise modal é o processo de determinação das características dinâmicas pertencentes a um sistema em formas de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos normais, buscando formular um modelo matemático para seu comportamento dinâmico e assim, minimizar vibrações não desejadas (HE; FU, 2001).

Segundo a teoria proposta por (RAO, 2009), busca-se encontrar o modelo modal de um sistema com vários graus de liberdade desacoplando-o em vários sistemas com um grau de liberdade, onde o modelo matemático é mais bem conhecido e desenvolvido. Para um estudo inicial, a matriz de amortecimento (\mathbf{C}) e o vetor de forças ($\mathbf{F}(t)$) são desconsiderados da Eq. (7), logo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \vec{\mathbf{0}}. \quad (8)$$

Assim, se o sistema for perturbado com um dado $\vec{\mathbf{U}}_0$, a resposta desse pode ser escrita na forma

$$\vec{\mathbf{U}}(t) = \vec{\mathbf{U}}_0 \cos(\omega_n t), \quad (9)$$

$$\vec{\ddot{\mathbf{U}}}(t) = -\vec{\mathbf{U}}_0 \omega_n^2 \cos(\omega_n t). \quad (10)$$

Substituindo as Eqs. (9) e (10) em (8) e evidenciando $\vec{\mathbf{U}}_0 \cos(\omega_n t)$,

$$(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_n^2)\vec{\mathbf{U}}_0 = \vec{\mathbf{0}}. \quad (11)$$

Definindo $\lambda = \omega_n^2$, na Eq. (11), obtemos

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \vec{U}_0 = \vec{0}. \quad (12)$$

A solução trivial para esta equação seria $\vec{U}_0 = \vec{0}$, porém como a perturbação inicial é um valor diferente de zero, a condição matemática equivalente é:

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0. \quad (13)$$

A Equação (13) é dita como equação característica, sendo λ os autovalores, de tal forma que a frequência natural de cada modo é a raiz quadrada de cada autovalor. Tendo definido os autovalores, retorna-se à Eq. (12) e determina-se cada autovetor \vec{U}_0 , correspondente. Assim, tem-se o modelo modal acoplado do sistema.

Agora, pode-se desacoplar o sistema, para isto monta-se a matriz Φ , composta pelos autovetores \vec{U}_0 de tal forma que:

$$\Phi_{m \times n} = \begin{bmatrix} \vec{U}_{01} & \vec{U}_{0n} \end{bmatrix}.$$

Como os autovetores são linearmente independentes, pode-se dizer que Φ é uma matriz de mudança de base, de tal maneira que

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{M}^*, \quad (14)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{K}^*. \quad (15)$$

Serão sempre matrizes diagonais. A relação entre um elemento \vec{X} no espaço diagonalizado e \vec{U} no espaço cartesiano é dado por,

$$\vec{U} = \Phi \vec{X}. \quad (16)$$

Substituindo Eq. (16) na equação diferencial de vibração forçada não amortecida para vários graus de liberdade,

$$\mathbf{M} \Phi \vec{X} + \mathbf{K} \Phi \vec{X} = \vec{F}(t) . \quad (17)$$

Multiplicando a Eq. (17) por Φ^T ,

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \vec{X} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \vec{X} = \Phi^T \vec{F}(t) , \quad (18)$$

ou,

$$\mathbf{M}^* \vec{X} + \mathbf{K}^* \vec{X} = \vec{P}(t) . \quad (19)$$

Por fim, a Eq. (19) é formulada por matrizes diagonais e pode ser escrita em n problemas independentes, sendo assim, pode-se dizer que esta equação é o sistema inicial desacoplado em n sistemas com um grau de liberdade.

2.2.1 Função de Resposta em Frequência (FRF)

A equação do movimento pode, também, ser escrita no domínio da frequência, para isso é necessário transformá-la do domínio do tempo. Inicialmente, supõe-se que o sistema é excitado por uma força harmônica em forma complexa como $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ de tal forma que:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} . \quad (32)$$

Tal equação admite uma solução particular,

$$x(t) = X e^{i\omega t} . \quad (33)$$

assim,

$$\dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t} , \quad (34)$$

e

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X e^{i\omega t} . \quad (35)$$

Substituindo as Eq. (33), (34) e (35) em (32), e relacionando o deslocamento com a força, determinada por $H(\omega)$, tem-se

$$H(\omega) = \frac{Xe^{i\omega t}}{F_0 e^{i\omega t}} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + i(c\omega)}. \quad (36)$$

De forma análoga, a Eq. (36), considerando múltiplos graus de liberdade pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}}. \quad (37)$$

Vale ressaltar também que Eq. (36) é a FRF conhecida como receptância, tendo como resposta a razão entre o deslocamento e a força. Porém, segundo He e Fu (2001), a equação também pode ser escrita em função da velocidade (conhecida como mobilidade ($M(\omega)$)) ou da aceleração (conhecida como aceleração ($A(\omega)$)), ou seja

$$\text{Receptância} = H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \left[\frac{m}{N} \right], \quad (38)$$

$$\text{Mobilidade} = M(\omega) = \frac{\dot{X}(\omega)}{F(\omega)} = i\omega H(\omega) \left[\frac{\frac{m}{s}}{N} \right], \quad (39)$$

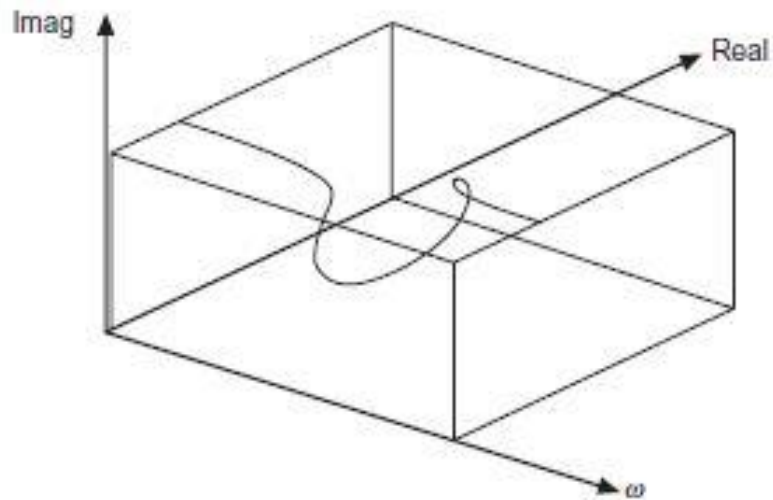
e

$$\text{Aceleração} = A(\omega) = \frac{\ddot{X}(\omega)}{F(\omega)} = -\omega^2 H(\omega) \left[\frac{\frac{m}{s^2}}{N} \right]. \quad (40)$$

2.2.2 Representação gráfica da FRF

Mesmo para um sistema analiticamente mais simples, como o de um grau de liberdade, nota-se que, através da Eq. (36), a representação gráfica de uma FRF se dá tanto no eixo real quanto no imaginário. A Figura 3 representa um gráfico tridimensional de uma FRF de receptância para um sistema com um grau de liberdade.

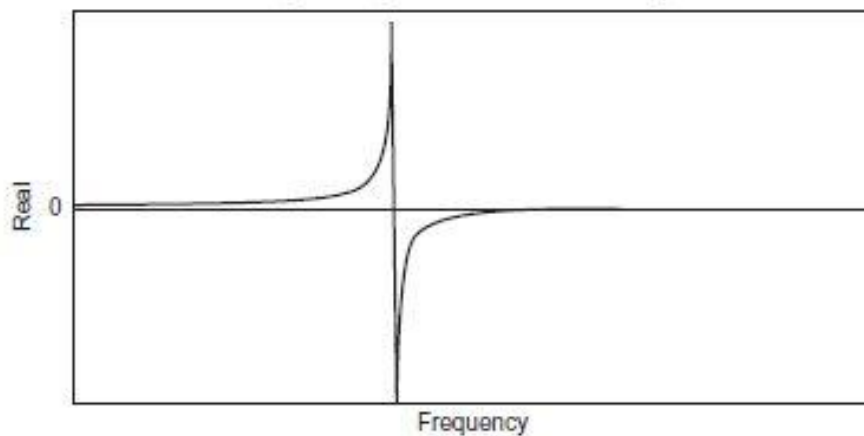
Figura 3 – Gráfico tridimensional de uma FRF



Fonte: HE; FU, 2001.

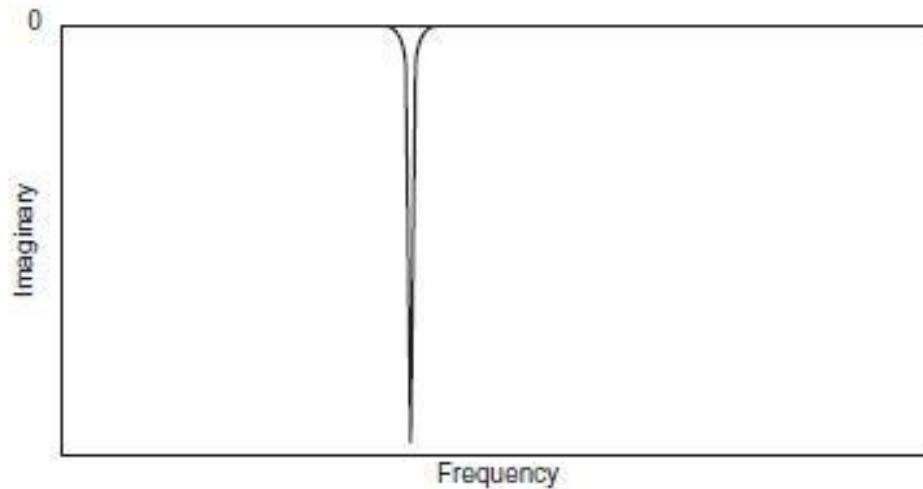
O gráfico em três dimensões apresentado na Figura 3, apesar de representar uma FRF por completo, é dificilmente utilizado na análise modal devido dificuldade de se visualizar as características básicas (como as frequências naturais) de forma clara (HE; FU, 2001). Portanto, as formas mais comuns de representar a FRF são através de gráficos bidimensionais. A projeção da *frequência x parte real*, *frequência x parte imaginária* e *parte real x imaginária* (diagrama de Nyquist), são exemplos disso. A representação dos gráficos *frequência x parte real* e *frequência x parte imaginária* para um sistema com um grau de liberdade podem ser visualizadas nas Figuras 4-5.

Figura 4 – Representação gráfica da parte real × frequência



Fonte: HE; FU, 2001.

Figura 5 – Representação gráfica da parte imaginária \times frequência



Fonte: HE; FU, 2001.

2.3 ANÁLISE MODAL NUMÉRICA

A análise modal numérica utiliza, através de cálculos numéricos como o método dos elementos finitos, determinar a resposta dinâmica de estruturas de uma maneira rápida e eficiente através de soluções aproximadas de equações diferenciais.

De forma geral os softwares seguem uma sequência de:

- *Pré-processamento*, onde se definem as características da estrutura, tais como sua geometria, materiais, propriedades, malha, condições de contorno e forças.
- *Análise do software*, onde são criadas as matrizes de rigidez e massa e solucionadas as equações diferenciais pertinentes.
- *Pós-processamento*, onde são avaliados os resultados obtidos e o modelo é validado.

2.3.1 Pré-processamento

Esta é a parte inicial de qualquer software de simulação. Inicialmente, é definida a geometria da estrutura, a qual pode ser modelada no próprio *software* ou feita externamente em um *software* de CAD e posteriormente importada por ele. Com isso, define-se as propriedades físicas do material da estrutura (densidade, módulo de elasticidade, Poisson).

Agora, tendo definido as propriedades à estrutura, pode-se criar a malha que consiste em dividir a estrutura em vários elementos. Para discretizá-la por completo, o ideal é dividi-la em infinitos elementos, mas, dado ao fato de quanto maior é esse número maior é o tempo computacional, utiliza-se a análise de refinamento de malha, que será melhor explicada na Seção 3.2.1.

Com isso, aplica-se as condições de contorno na estrutura, restringindo os movimentos ao qual a estrutura está submetida. Porém, na análise modal na condição livre-livre, esta etapa não é necessária no modelamento computacional.

Por fim, a última etapa do pré-processamento é a aplicação das forças externas atuantes na estrutura, da mesma maneira, na análise modal na condição livre-livre, esta etapa não é necessária.

Vale ressaltar que esta etapa é crucial para a validação dos resultados. Uma vez que o modelamento computacional não esteja de acordo com a estrutura real, os resultados obtidos não serão coerentes com o experimental.

2.3.2 Análise do software

Este é o segundo passo na realização de uma análise modal computacional e nele não há qualquer interação com o usuário. Uma vez que as condições no passo anterior estão bem definidas, o software realiza os cálculos matemáticos para a aproximação computacional da estrutura real.

O tempo de solução computacional está relacionado ao número de graus de liberdade do sistema, definido através do tipo de elemento. Para isto, faz-se necessário uma convergência de malha, onde o tamanho de elemento é minimizado a cada iteração e um valor é estimado como padrão para análise. O valor encontrado em uma iteração é comparado com a anterior e, assume-se que se o erro for menor que 1%, o tamanho do elemento é definido.

De forma geral, o procedimento realizado pelo software é:

- Montar as matrizes de massa e rigidez de cada elemento da malha;
- Montar as matrizes de massa e rigidez global;
- Solução das equações descritas na Seção 2.1.

Agora, as formas modais da estrutura, bem como os deslocamentos e frequências naturais estão definidos e podem ser descritos no próximo procedimento.

2.3.3 Pós-processamento

Após ter a forma modal descrita, há diversas formas nas quais o operador pode visualizar os resultados. Os principais meios de visualização são através da plotagem de gráficos (das FRFs nesse caso), de tabelas (vetores de deslocamento e frequências naturais) e animações gráficas para visualizar as formas modais. Com isso, o usuário é capaz de analisar as informações adquiridas, verificar se estão conforme o esperado e por fim, comparar com os dados obtidos experimentalmente.

2.4 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Segundo Ewins (2000), o estudo de vibrações em estruturas através da análise experimental tem como principais objetivos:

- Determinar a natureza e os níveis de vibração do experimento;
- Verificar e validar modelos teóricos e numéricos;
- Determinar as propriedades de materiais sob efeitos de cargas dinâmicas como por exemplo o seu amortecimento;

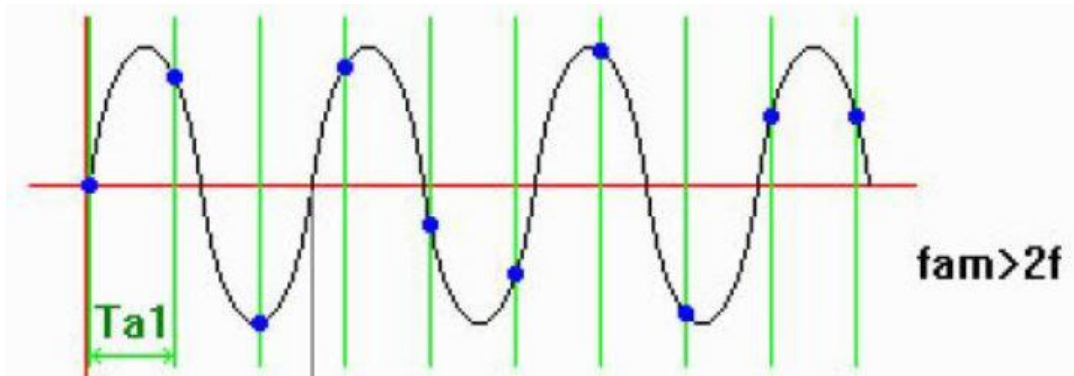
Na prática, a análise modal experimental envolve três partes básicas: preparação do ensaio, medição das FRFs e a identificação do parâmetro modal. A preparação do ensaio é composta pela seleção das condições de contorno, tipos de forças de excitação, localização dos pontos de excitação, *hardware* para aplicação da força e as respostas e por fim os pontos experimentais onde se deseja saber a resposta dada pelo impulso. Durante o ensaio, os dados das FRFs são mensurados e arquivados para a posterior análise da identificação dos parâmetros modais da estrutura de teste. Esta medição pode ser feita com a utilização de um martelo de impacto e um acelerômetro, onde submete-se a estrutura a um impulso em um determinado ponto fixo e mede-se a resposta nos demais, ou vice-versa.

Para realizar tal medição, alguns conceitos necessitam ser explicitados quando se trata de dados experimentais: Sub-amostragem ou *Aliasing*, Vazamento ou *Leakage*, Janelamento ou *Window*, e o Teorema da Reciprocidade de Maxwell-Betti.

- *Aliasing*: Ocorre na conversão do sinal analógico para o digital. Caso a frequência de amostragem não seja suficientemente alta para representar o fenômeno, ocorre a sobreposição do espectro, acarretando em uma espécie de batimento entre as duas frequências, não representando corretamente o fenômeno envolvido. De acordo com o

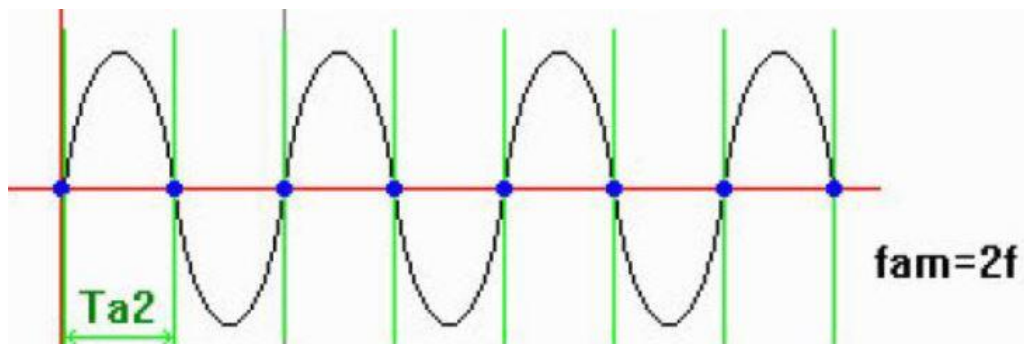
Teorema de Nyquist, a quantidade de amostras por unidade de tempo de um sinal, deve ser maior que o dobro da maior frequência contida no sinal a ser amostrado, evitando assim o surgimento do *aliasing*. As Figuras 6-8, representam graficamente o fenômeno de *aliasing*.

Figura 6 – Frequência de amostragem maior que o dobro da frequência amostrada



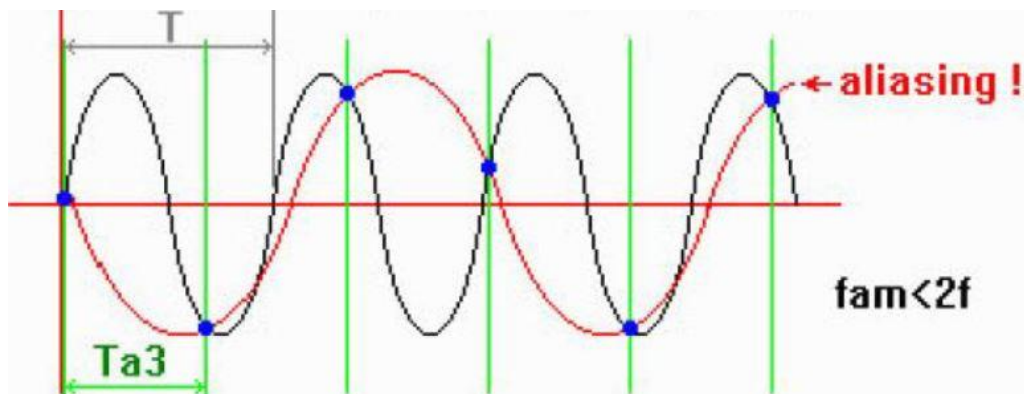
Fonte: <<http://qsl.net/py4zbx/teoria/digitaliz>> Acesso em junho de 2018.

Figura 7 – Frequência de amostragem igual ao dobro da frequência amostrada



Fonte: <<http://qsl.net/py4zbx/teoria/digitaliz>> Acesso em junho de 2018.

Figura 8 – Frequência de amostragem menor que o dobro da frequência amostrada



Fonte: <<http://qsl.net/py4zbx/teoria/digitaliz>> Acesso em junho de 2018.

- *Leakage*: É um problema que surge no processamento digital de sinais durante a transformação dos dados de tempo para o domínio da frequência através da Transformada Rápida de Fourier (FFT). O vazamento faz com que os níveis de sinal sejam reduzidos e redistribuídos em uma ampla faixa de frequência. Os efeitos de *leakage* não podem ser totalmente eliminados, porém o correto janelamento reduz consideravelmente este efeito.
- *Window*: Para reduzir o vazamento, uma função matemática chamada janelamento é aplicada aos dados. Tal função é projetada para reduzir o transiente agudo no sinal recriado, tanto quanto possível. Por fim, o sinal capturado é multiplicado por este janelamento. As Figuras 9 e 10 representam o efeito do janelamento, pode-se notar que o sinal capturado não é perfeitamente replicado, porém, o vazamento agora está confinado em uma faixa de frequência muito menor.
- *Teorema da Reciprocidade de Maxwell-Betti*: Devido ao fato das matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema serem matrizes simétricas, a sua Função de Resposta em Frequência também será. Desta maneira, não é necessário obter-se todos os termos da matriz FRF, ou seja $H_{ij} = H_{ji}$. Portanto quando se trata de análise dinâmica, este teorema possibilita uma simplificação no número de impactações, sendo necessário ter apenas a resposta de uma parcela desta matriz.

Figura 9 – Sinal não periódico sem uso da função de janelamento

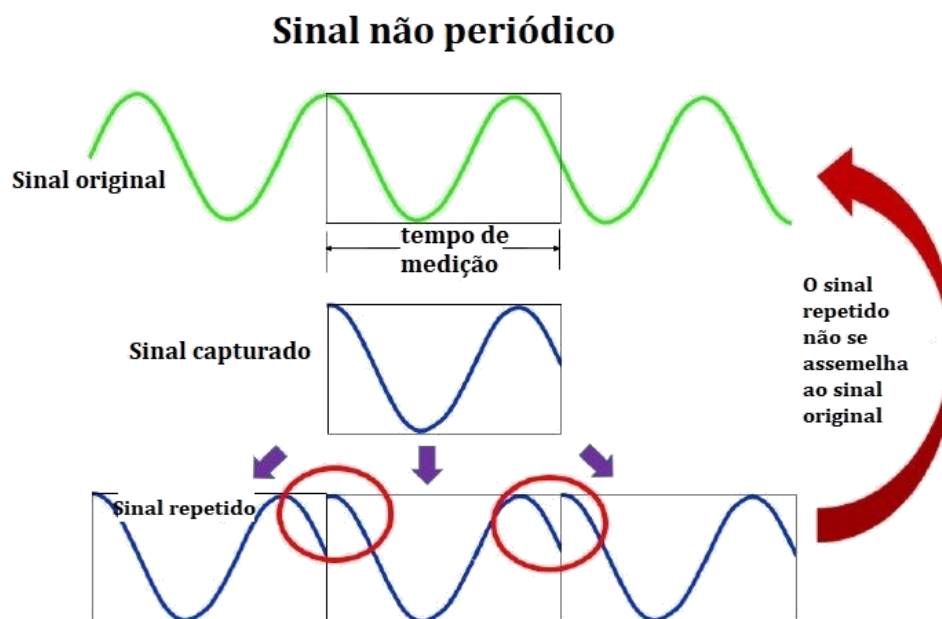
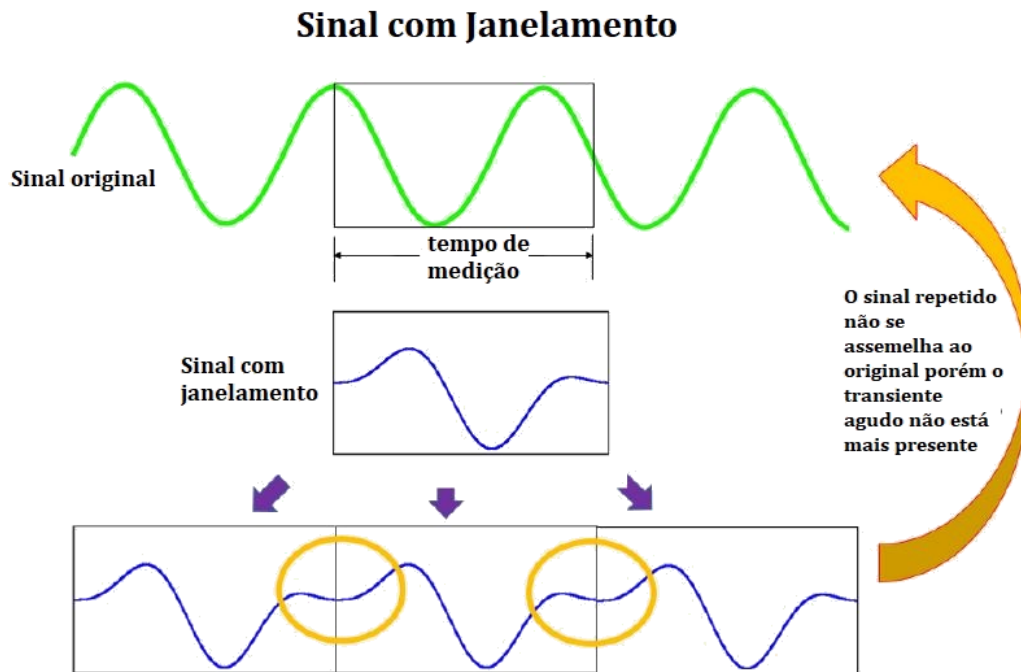


Figura 10 – Sinal não periódico com o uso da função de janelamento



Fonte: <<https://community.plm.automation.siemens.com/t5/Testing-Knowledge-Base/Windows-and-Spectral-Leakage/ta-p/432760>> Acesso em junho de 2018.

2.4.1 Critérios de correlação

A forma mais comum de validar os resultados obtidos em um teste dinâmico modal, seja ele numérico ou experimental, é correlacioná-los através de algumas funções ou coeficientes. O critério mais comumente utilizado é o Critério de Correlação Modal (*MAC – Modal Assurance Criterion*).

O MAC é um critério que visa comparar pares de vetores modais provenientes de diferentes vias aplicadas à mesma estrutura. Seu resultado é um valor escalar dentro de um intervalo entre 0 e 1.

$$MAC_{ABm} = \frac{|\Phi_{Am}^T \Phi_{Bm}^*|^2}{(\Phi_{Bm}^T \Phi_{Bm}^*)(\Phi_{Am}^T \Phi_{Am}^*)}, \quad (41)$$

onde A e B representam os vetores de obtenção dos dados modais, o índice m o *m-ésimo* modo de vibração, Φ os autovetores associados ao modo *m* e *T* a transposta do vetor. Se o valor de

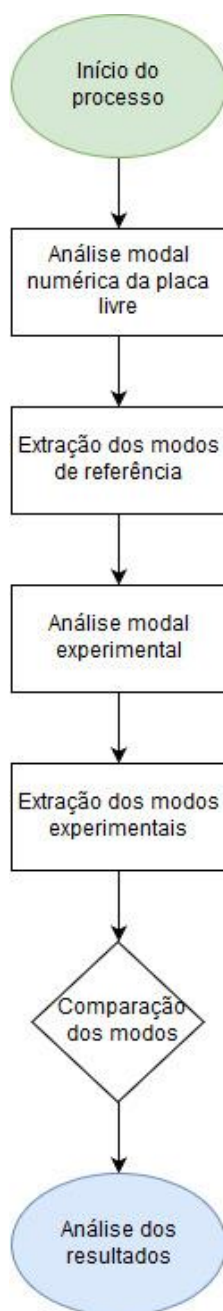
MAC estiver presente na faixa de 0,9 a 1,0 (ou acima de 90%), pode-se dizer que há uma boa proximidade entre os modos. Caso este valor seja menor que 0,1 (ou 10%) indica-se que não há correlação entre os modos. Ainda, se este valor estiver abaixo da faixa esperada, esta dispersão pode ser causada devido a

- a) Não-linearidade na estrutura de teste;
- b) Ruído nos dados medidos;
- c) Fraca análise modal dos dados medidos;
- d) Escolha inadequada dos graus de liberdade incluídos na correlação.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção serão descritos os materiais e equipamentos utilizados, também, como foram realizados a análise numérica e o procedimento experimental. A Figura 11 representa a esquematização deste estudo.

Figura 11 – Fluxograma do estudo



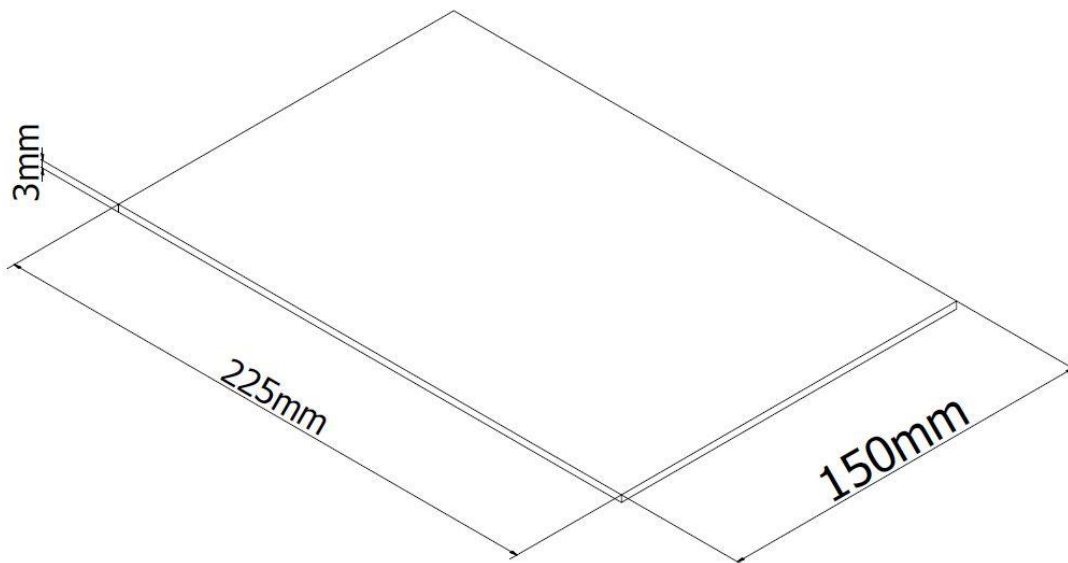
Fonte: Produção do próprio autor.

A primeira etapa consiste em, tendo as propriedades da placa e sua geometria, analisar numericamente as frequências naturais e os modos de vibração. Os resultados encontrados servirão como uma base para verificar a qualidade dos ensaios experimentais. Na parte experimental, buscou-se analisar 3 condições de contorno diferentes e repetir cada ensaio 3 vezes. Com os resultados coletados experimentalmente, os mesmos são comparados com os obtidos via cálculo numérico e entre si. As análises serão discutidas na Seção 4.

3.1 MATERIAIS E EQUIPAMENTOS

A estrutura de estudo trata-se de uma placa de aço SAE 1045 de 225mm de comprimento, 150mm de largura e 3mm de espessura, conforme representada na Figura 12. Para a análise numérica, adotou-se as propriedades do material segundo a Tabela 1.

Figura 12 – Placa de estudo esquematizada



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 1 – Propriedades mecânicas - SAE 1045

Característica	Valor	Unidade
Módulo de Young (E)	200	GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0.3	-
Densidade (ρ)	7850	kg/m ³

Fonte: Adaptado de HIBBLER, 2009

A fim de se obter a condição livre-livre foram analisados dois materiais de baixa rigidez para representar esta condição de contorno: tubos de látex (Figura 13(a)) e espuma de baixa densidade (Figura 13(b)).

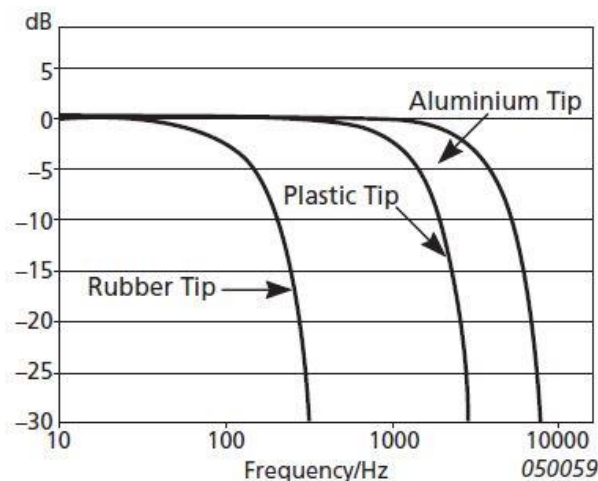
Figura 13 – Condições de contorno analisadas (a) borracha de látex e (b) espuma de baixa densidade



Fonte: Produção do próprio autor.

Toda a análise numérica foi realizada através do *software Hypermesh*. Já para a análise experimental, os ensaios foram realizados por meio de testes de impulso em pontos discretizados na estrutura. Utilizou-se o martelo de impacto *Brüel & Kjør* modelo 8206-003 com sensibilidade de $1,1 \text{ mV/N}$ com uma ponteira de alumínio, selecionada em função da faixa de frequência de interesse, conforme mostrada na Figura 14.

Figura 14 – Influência no material da ponteira na faixa de frequência

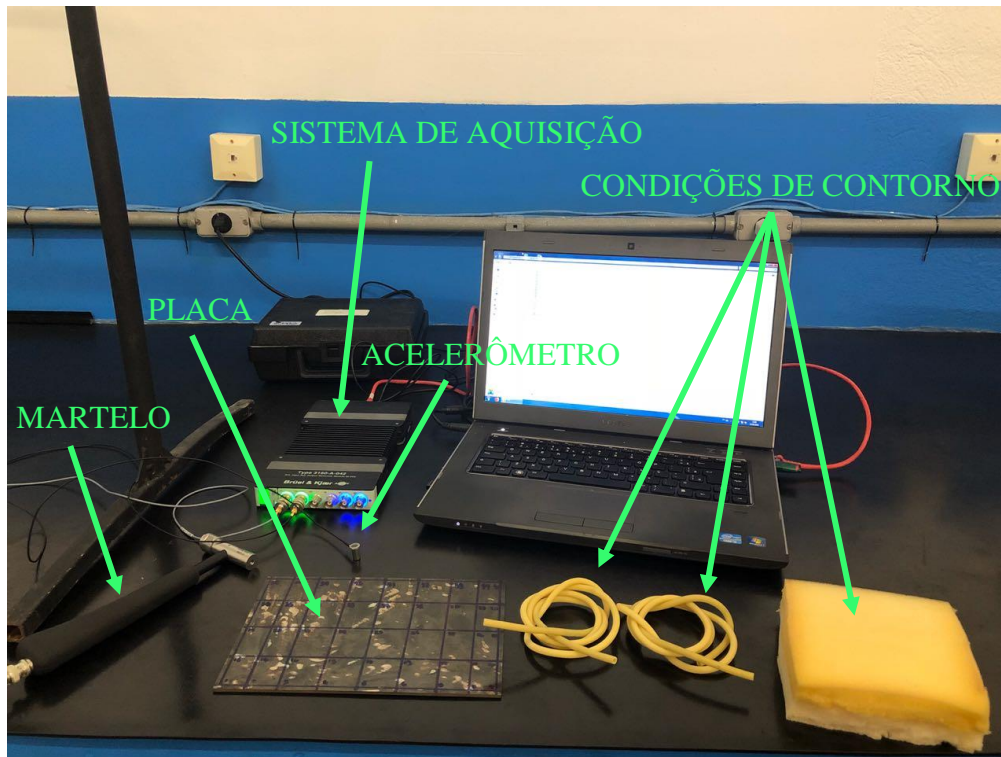


Fonte: <<https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2078.ashx>> Acesso em junho de 2018.

Também, utilizou-se um acelerômetro piezelétrico da mesma marca, modelo 4397, com sensibilidade de $0,9931 \text{ mV/ms}^{-2}$ para a medição da resposta da estrutura. A fixação do acelerômetro foi feita através de contato magnético. O martelo e o acelerômetro foram

conectados a um sistema de aquisição de sinal modelo 3160-A-042 da *Briuel & Kjaer* e a aquisição de dados através do *software Pulse Labshop* também da *Briuel & Kjaer*. A Figura 15 apresenta o aparato experimental do ensaio.

Figura 15 – Aparato experimental



Fonte: Produção do próprio autor.

3.2 ANÁLISE MODAL

3.2.1 Análise modal numérica

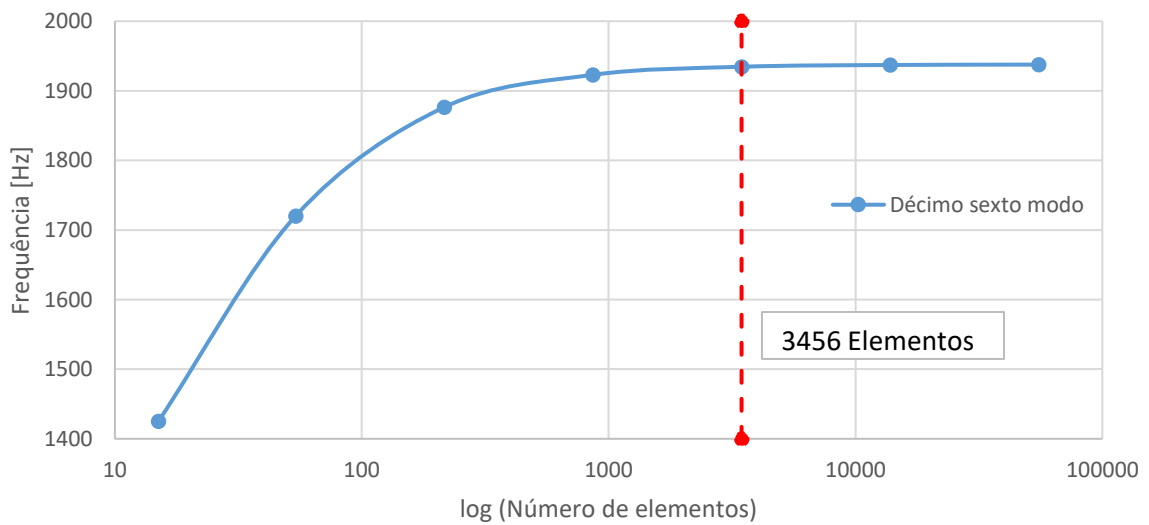
A modelagem e análise numérica foi realizada no *software Hypermesh*. A primeira etapa é discretizar a malha através do tamanho do elemento. Para isso, faz-se necessário uma análise de refino de malha, onde o comportamento da frequência do modo de interesse (décimo sexto modo) é analisado em função do número de elementos (Figura 16). Vale ressaltar que o modo escolhido para análise numérica se deu com base no modo desejado experimentalmente. Com isso, como se deseja o quarto modo experimental, pelo Teorema de Nyquist, deveria ser analisado numericamente até o oitavo modo, entretanto, através desse modo não seria possível adquirir um número suficiente de pontos experimentais. Portanto, optou-se por analisar numericamente até o décimo sexto modo.

Assim, o número de elementos então é definido através do erro relativo, definido pela Eq. (42), o qual assumiu-se que deve ter um valor menor que 1%.

$$\text{Erro relativo} = \frac{f^{n_m} - f^{n_{m-1}}}{f^{n_{m-1}}} * 100, \quad (42)$$

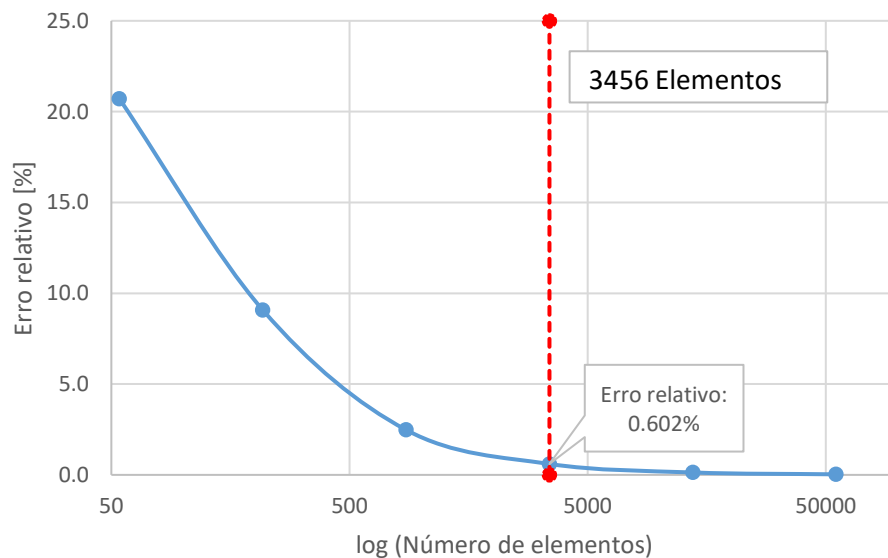
Onde m é relativo à malha em análise. A Figura 17 representa o erro relativo à quantidade de elementos da malha.

Figura 16 – Análise de refino de malha



Fonte: Produção do próprio autor.

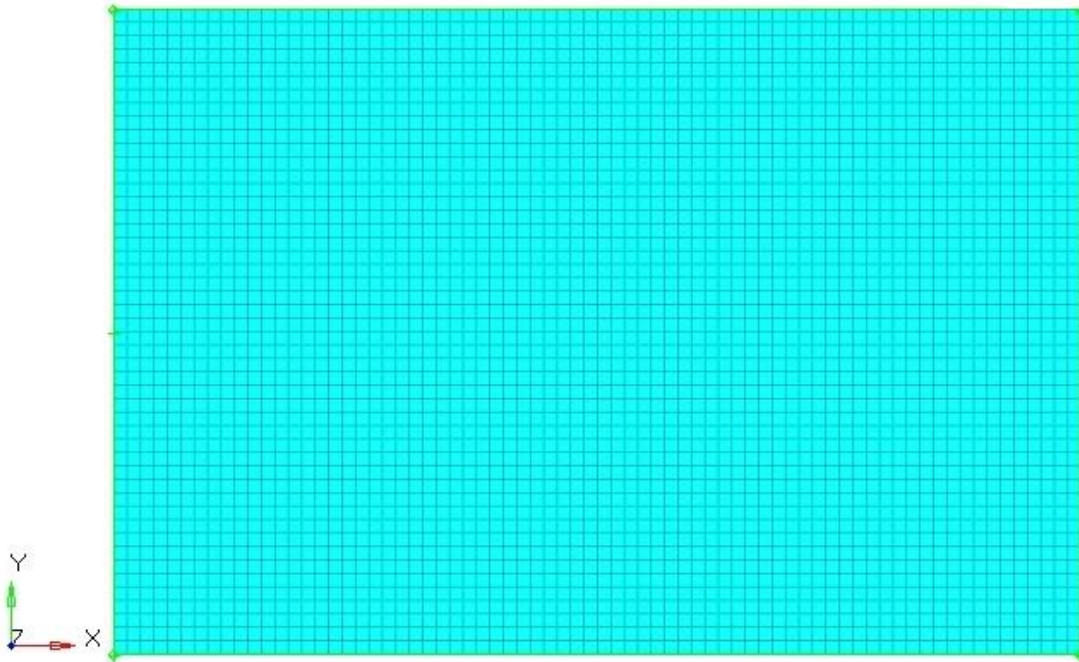
Figura 17 – Erro relativo ao número de elementos



Fonte: Produção do próprio autor.

Por fim, foi possível selecionar a malha com um total de 3456 elementos do tipo Quad4, sendo 72 nós na direção x e 48 nós na direção y, tendo assim, 21462 graus de liberdade. A Figura 18 representa a malha final selecionada após a análise de refinamento.

Figura 18 – Malha numérica



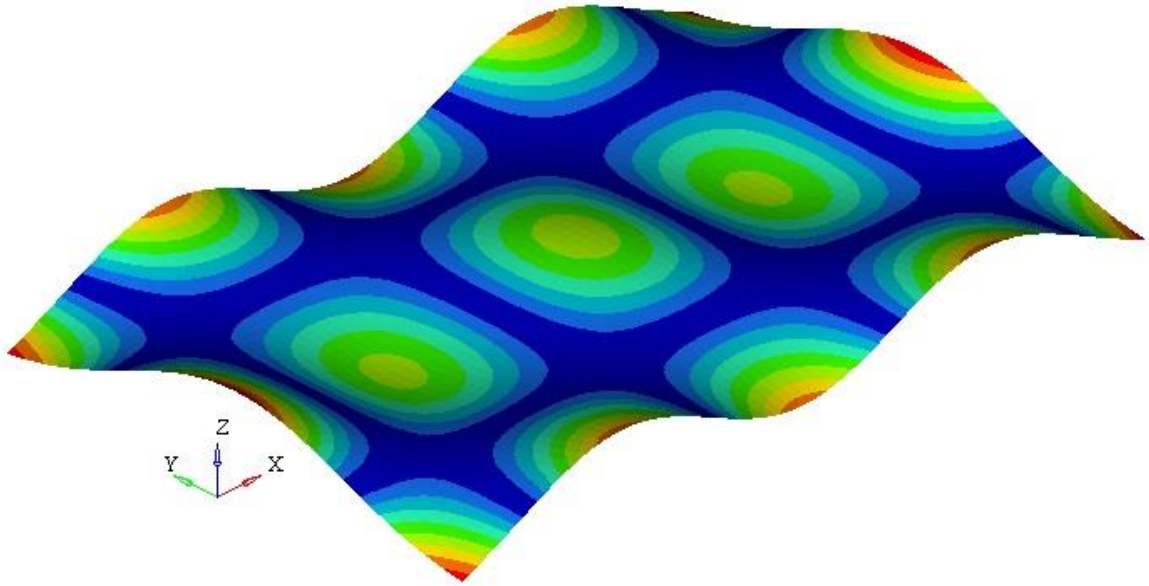
Fonte: Produção do próprio autor.

Agora, tendo sido definida a malha e juntamente com as propriedades dos materiais, definidos na Tabela 1, é possível solucionar os autovalores e autovetores para identificar as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura.

3.2.2 Análise modal experimental

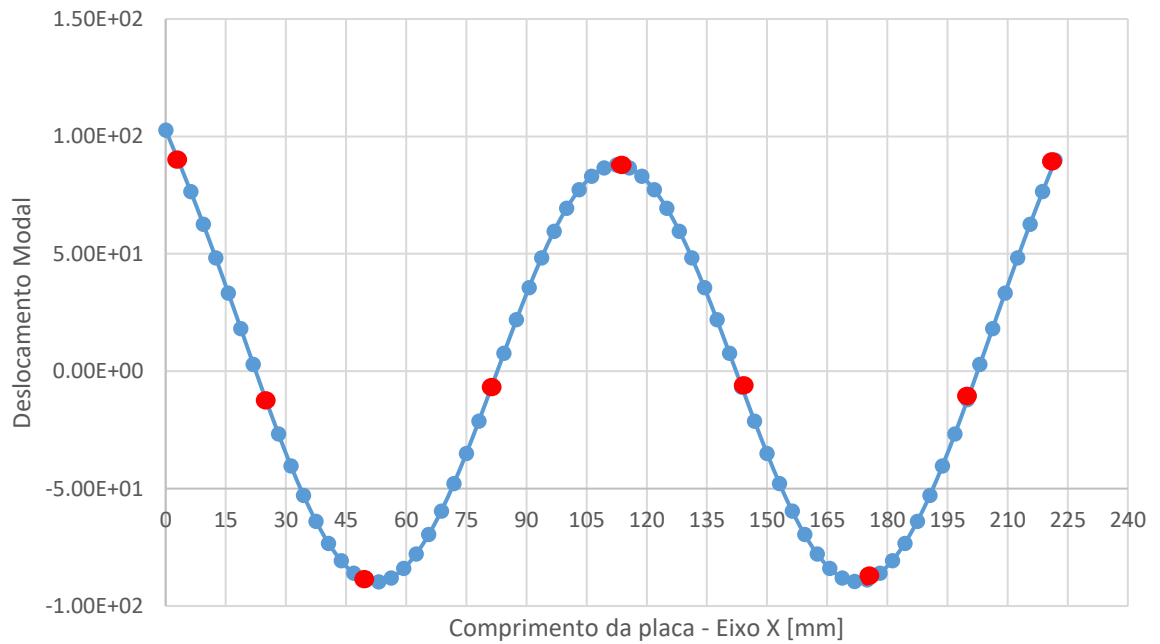
A malha experimental pode ser determinada após a análise modal numérica, onde foram traçados os deslocamentos modais das coordenadas x e y da décima sexta forma modal, possibilitando assim a escolha da posição e do número de pontos capazes de representar adequadamente os picos e vales da forma modal de interesse. A Figura 19 representa o décimo sexto modo de vibrar da estrutura, já as Figuras 20 e 21 mostram os deslocamentos modais nas coordenadas x e y desse mesmo modo. Os pontos em vermelho são os pontos utilizados para discretizar a malha na análise modal experimental.

Figura 19 – Décimo sexto modo de vibração



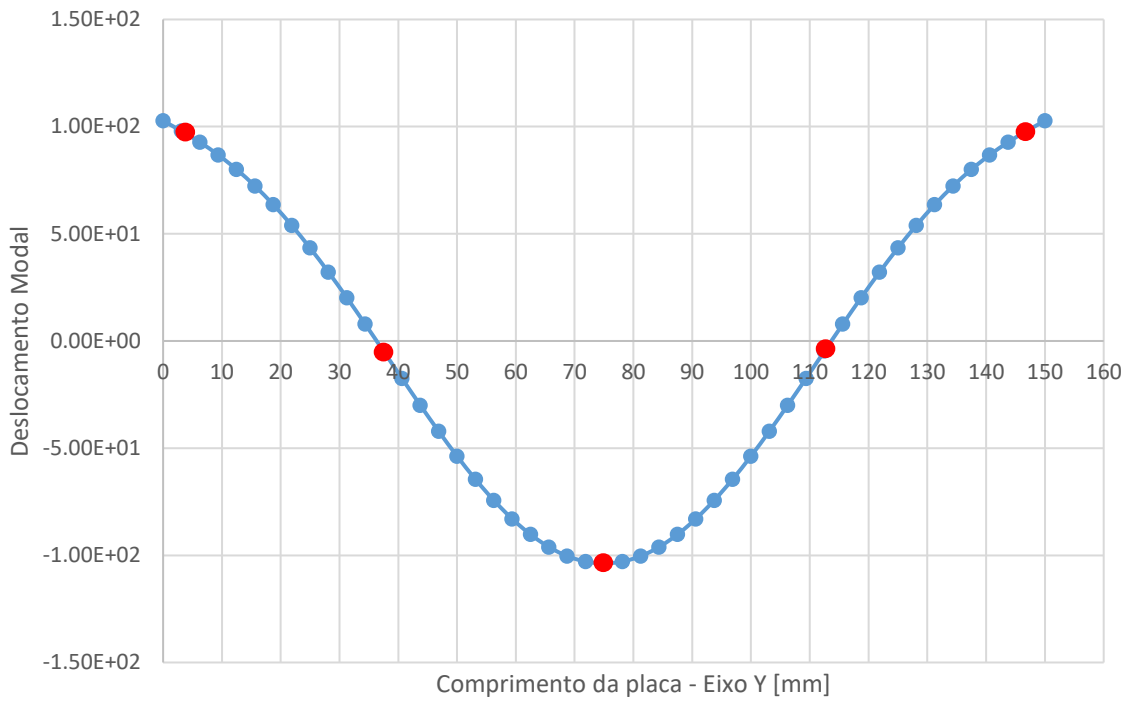
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 20 – Deslocamento modal no sentido longitudinal da placa

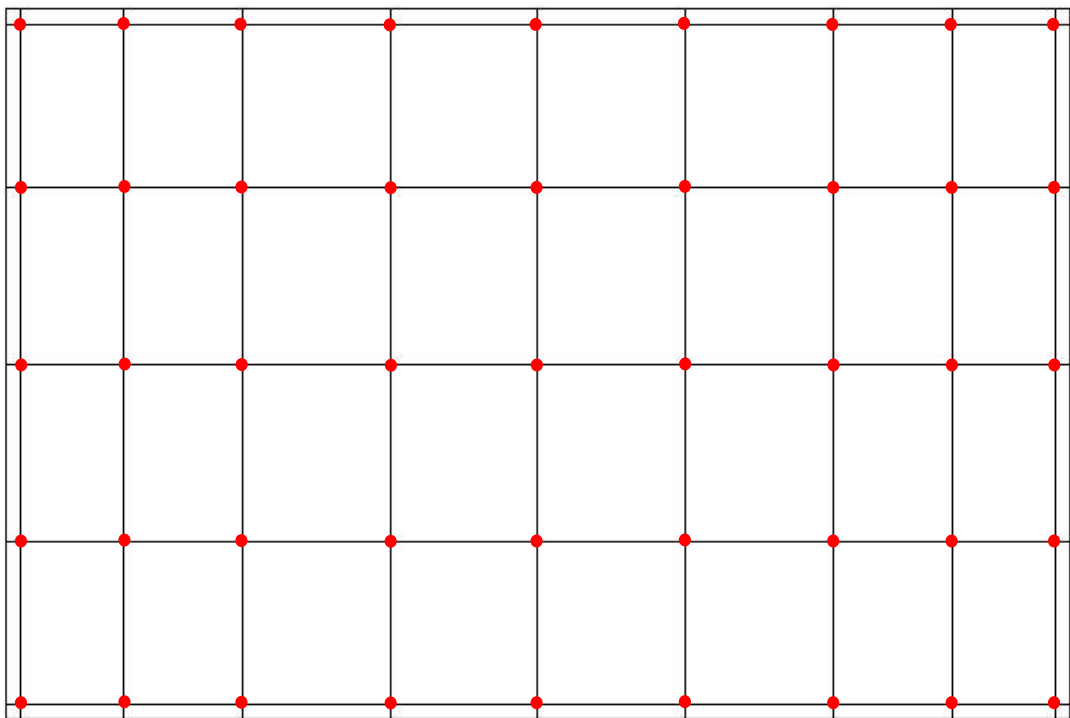


Fonte: Produção do próprio autor.

Assim, foi possível criar a malha experimental com 9 pontos no eixo x e 5 pontos no eixo y, resultando em 45 pontos de análise, destacados em vermelho, conforme retrata a Figura 22

Figura 21 – Deslocamento modal no sentido transversal da placa

Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 22 – Malha experimental

Fonte: Produção do próprio autor.

A Tabela 2 indica a ordenação dos nós experimentais seguindo a Figura 22.

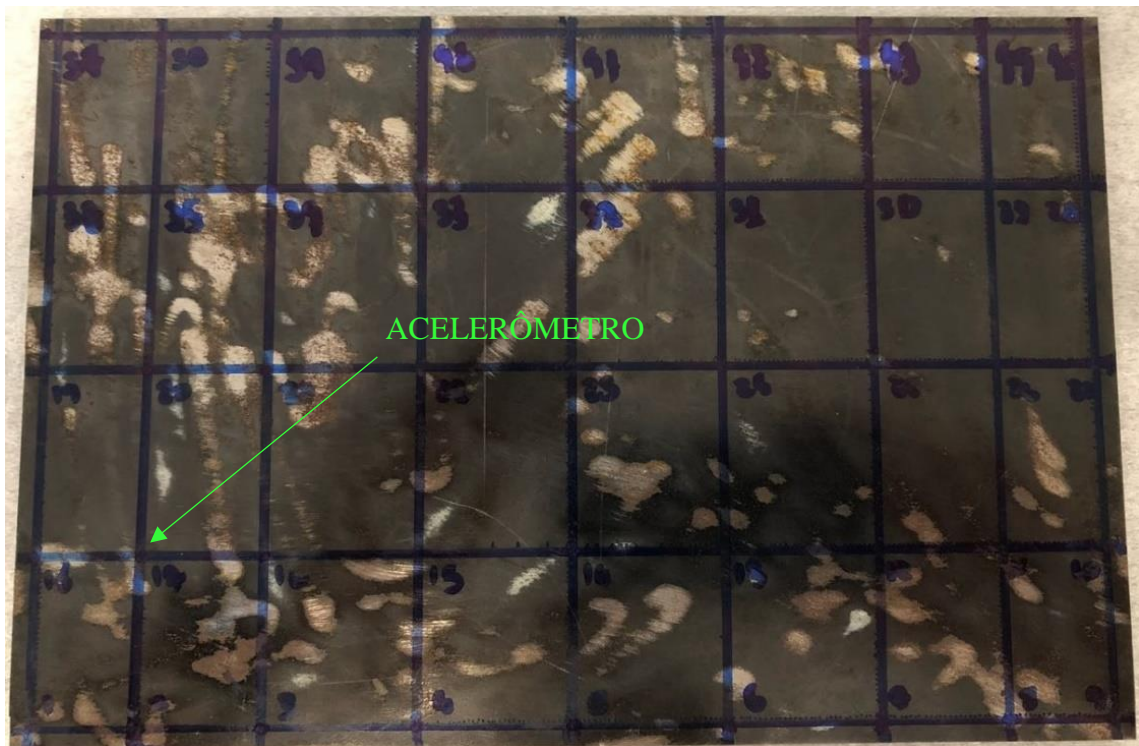
Tabela 2 – Ordenação dos nós experimentais

		Posição em relação ao Eixo X [mm]								
		3.125	25	50	81.25	112.5	143.75	175	200	221.875
Posição em relação ao Eixo Y [mm]	146.875	37	38	39	40	41	42	43	44	45
	112.5	36	35	34	33	32	31	30	29	28
	75	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	37.5	18	17	16	15	14	13	12	11	10
	3.125	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Produção do próprio autor

Já a Figura 23 representa os pontos marcados da Tabela 2 na placa real de estudo.

Figura 23 – Placa real de estudo com os pontos experimentais



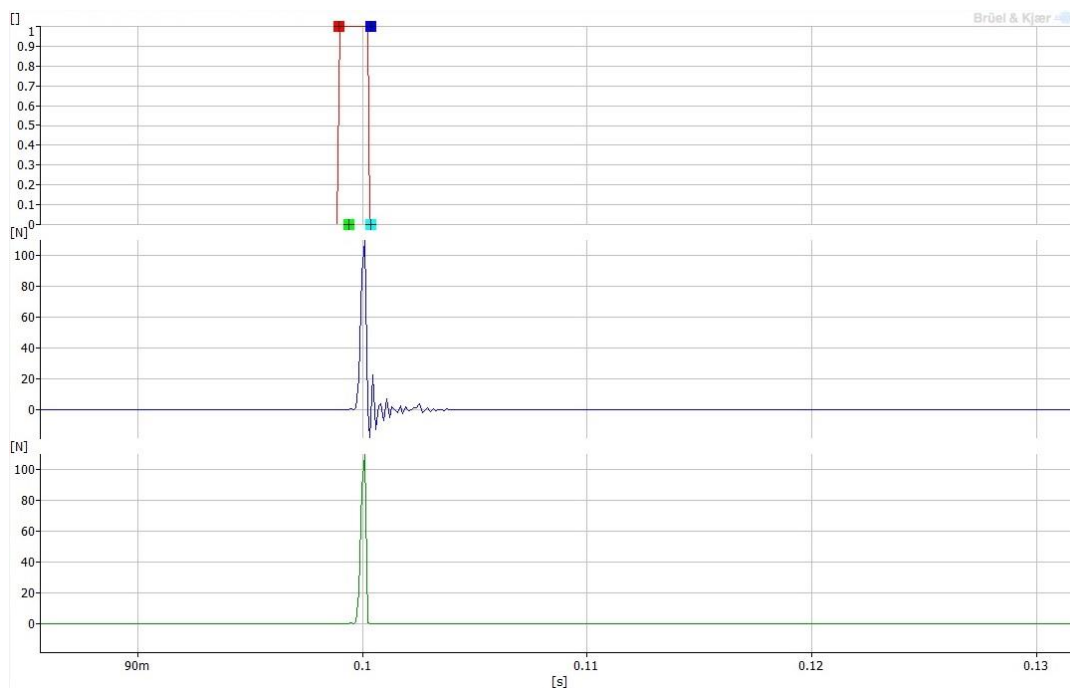
Fonte: Produção do próprio autor.

Com os pontos de análise definidos, fixou-se o acelerômetro no ponto 17, na parte inferior oposta ao impulso e realizou-se as medições. Foram realizados 3 impulsos por ponto na sequência numerada, mostrada na Tabela 2. Através do *software Pulse Labshop* realizou-se o janelamento do tipo retangular para o martelo e exponencial para o acelerômetro (Figuras 24 e 25, respectivamente), a faixa de frequências de 1 Hz a 3,2 kHz com um incremento de 1 Hz.

O janelamento tem como finalidade melhorar a aquisição de dados, ele atua como um filtro para que possam ser coletados os dados da maneira correta. Com a utilização desta técnica é possível restringir a faixa de informações, obtendo-se assim apenas os sinais desejados.

No caso do impacto, restringiu-se a janela a fim de se obter apenas a amplitude do impacto, excluindo assim os demais sinais presentes no resultado provenientes de ruído. De forma análoga, para o acelerômetro foi utilizado o janelamento exponencial uma vez que a resposta da estrutura pode ser representada por uma função exponencial.

Figura 24 – Janelamento martelo



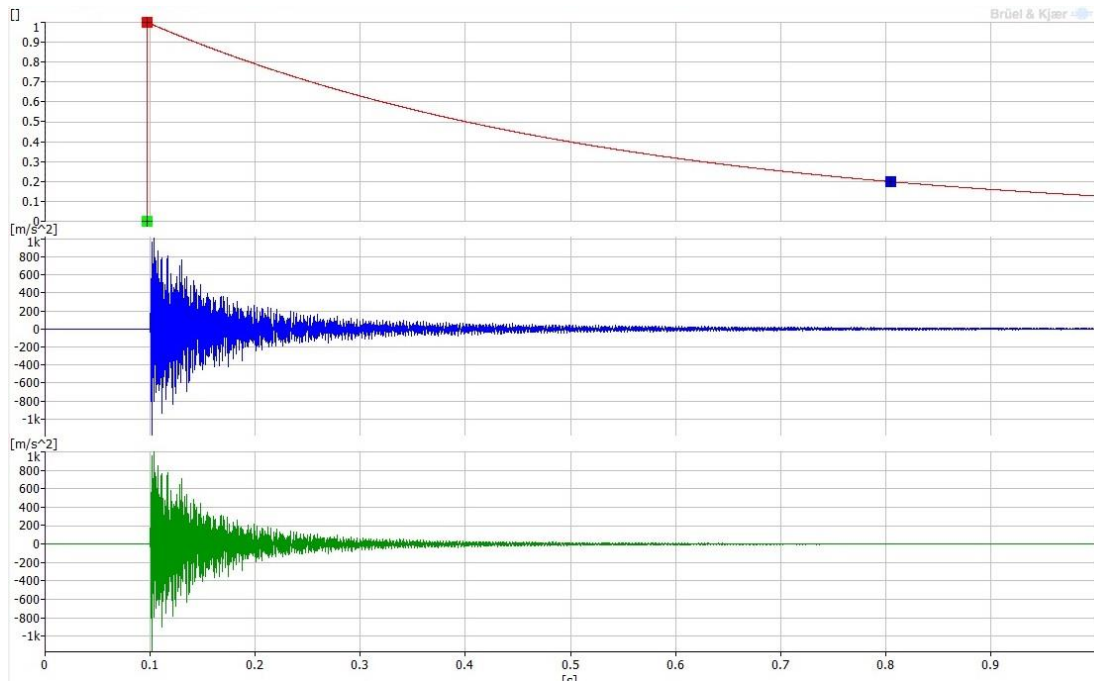
Fonte: Produção do próprio autor.

Com isso, realizaram-se 3 tipos diferentes de ensaios:

- Placa fixada à estrutura com tubos de látex na posição vertical, conforme Figura 26;
- Placa fixada à estrutura com tubos de látex na posição horizontal, conforme Figura 27;
- Placa sobre a espuma, conforme Figura 28;

Vale ressaltar que cada um dos ensaios foi repetido 3 vezes a fim de obter-se um maior número de amostragens.

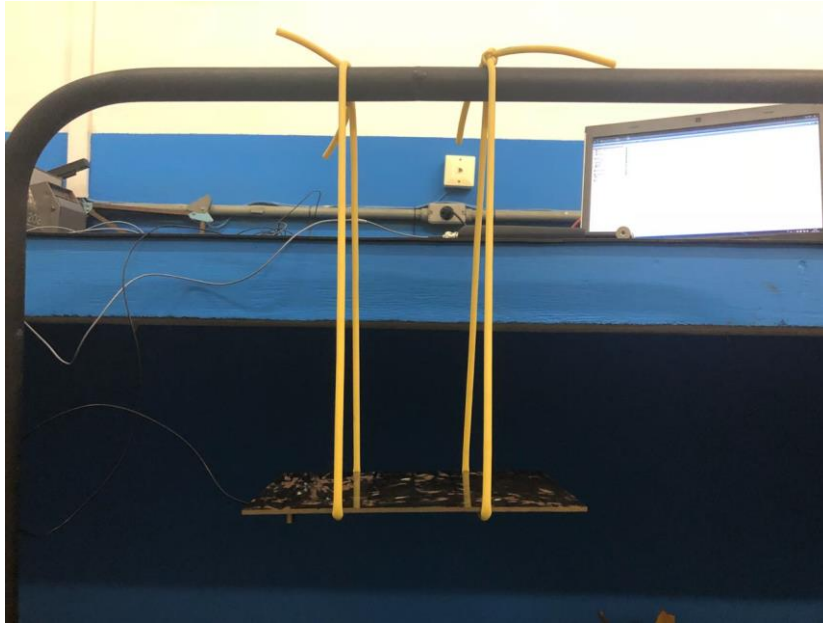
A princípio o que se espera dos ensaios é que a placa na posição horizontal tenha uma interferência maior do tubo de látex em suas características dinâmicas, devido ao fato da impactação ser contrária ao sentido de maior rigidez do tubo. Também, espera-se que a placa sobre a espuma sofra alguma variação nessas características, uma vez que esse tipo de material possui um grande amortecimento. Os resultados de cada ensaio serão mostrados na Seção 4

Figura 25 – Janelamento acelerômetro

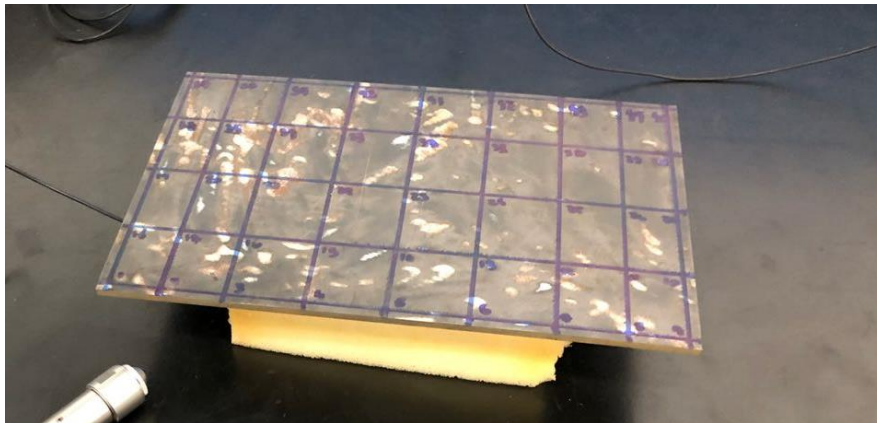
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 26 – Placa na posição vertical

Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 27 – Placa na posição horizontal

Fonte: Produção do próprio autor.

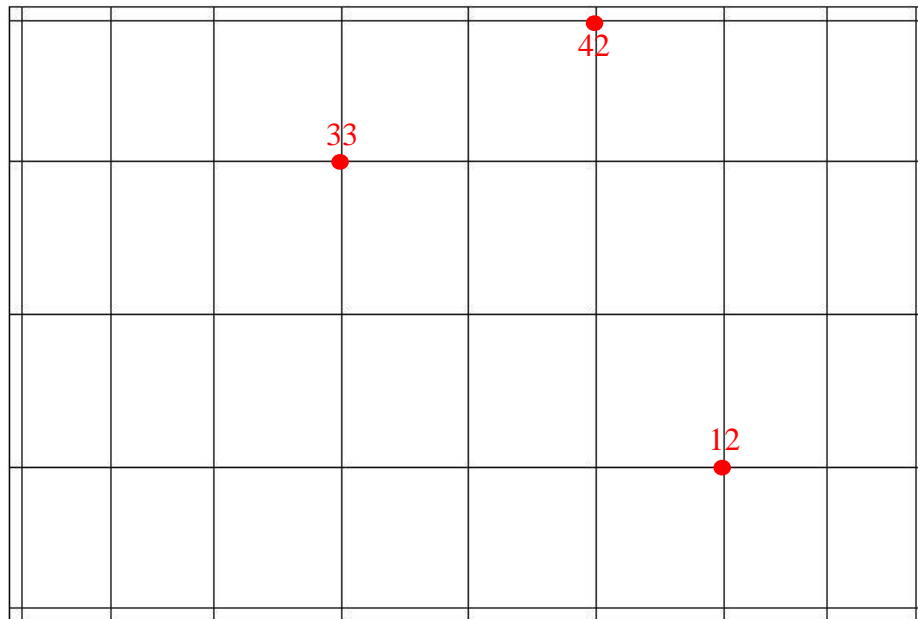
Figura 28 – Placa sobre a espuma

Fonte: Produção do próprio autor.

3.3 FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

3.3.1 Análise experimental

Para a obtenção das FRFs experimentais, baseou-se na malha experimental já descrita na Seção 3.2.2. Por questões de praticidade, foram escolhidos apenas 3, dos 45 pontos de análise, estes são os nós 12, 33 e 42, segundo a numeração utilizada na Tabela 2. A Figura 29 ilustra os pontos escolhidos, sendo que suas coordenadas espaciais podem ser vistas na Tabela 2.

Figura 29 – Pontos de análise das FRFs

Fonte: Produção do próprio autor.

Como já descrito anteriormente, foram realizados 3 impulsos por ponto, repetidas por 3 vezes para cada tipo de ensaio. Desta maneira, obteve-se 3 FRFs (uma para cada ponto) para a placa na posição vertical, 3 para a placa na posição horizontal e mais 3 para a placa sobre a espuma, totalizando assim, 27 FRFs experimentais.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos após a realização dos procedimentos computacionais e experimentais. As discussões foram subdivididas em análise modal e análise das FRFs. Os parâmetros serão comparados entre os resultados obtidos através do *Hypermesh* com os obtidos em ensaios no laboratório, também, através da utilização dos critérios de correlação já descritos na Seção 2.4.1.

4.1 ANÁLISE MODAL

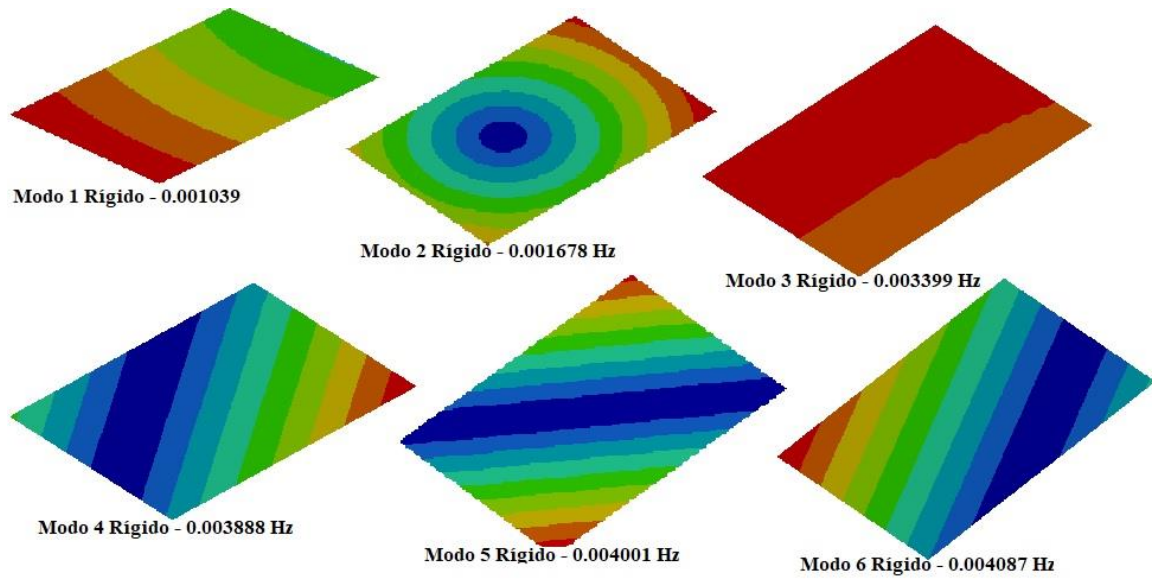
Inicialmente serão expostos os dados coletados através do *software* e, posteriormente os resultados obtidos experimentalmente. Por fim, será feita uma análise comparativa entre esses dados.

4.1.1 Análise modal numérica

Após a realização dos procedimentos descritos na Seção 3.2.1, foi possível obter as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura. Vale ressaltar que neste estudo, como a intenção era analisar as influências das condições de contorno sob a análise modal da placa, os modos foram extraídos considerando a placa livre no espaço.

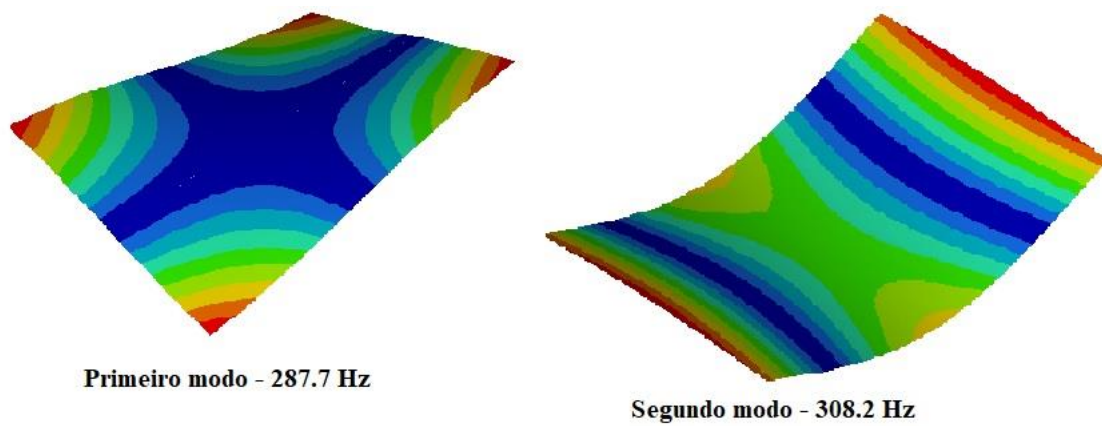
Tendo isso em vista, a Figura 30 representa os seis modos de corpo rígido da placa e as Figuras 31 e 32 os quatro primeiros modos de vibração da placa, bem como a frequência de excitação em que elas ocorrem. Os valores obtidos aqui serão utilizados como padrão para a comparação com os resultados experimentais.

Figura 30 – Modos de corpo rígido da placa



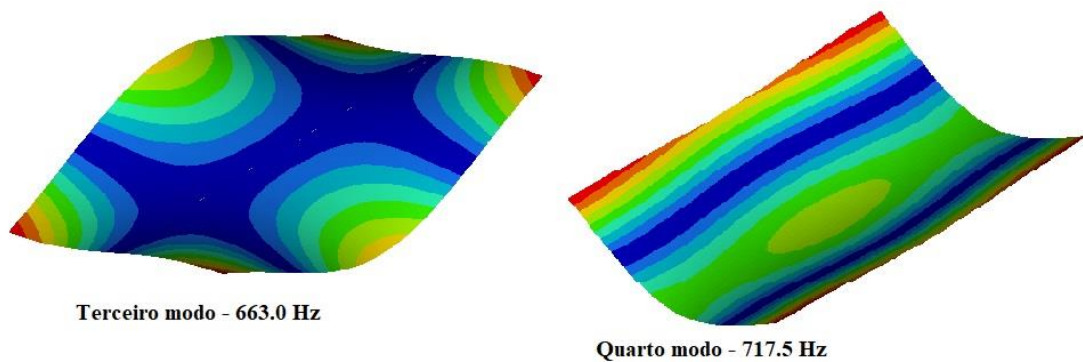
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 31 – Primeiro e segundo modos de vibração numéricos



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 32 – Terceiro e quarto modos de vibração numéricos

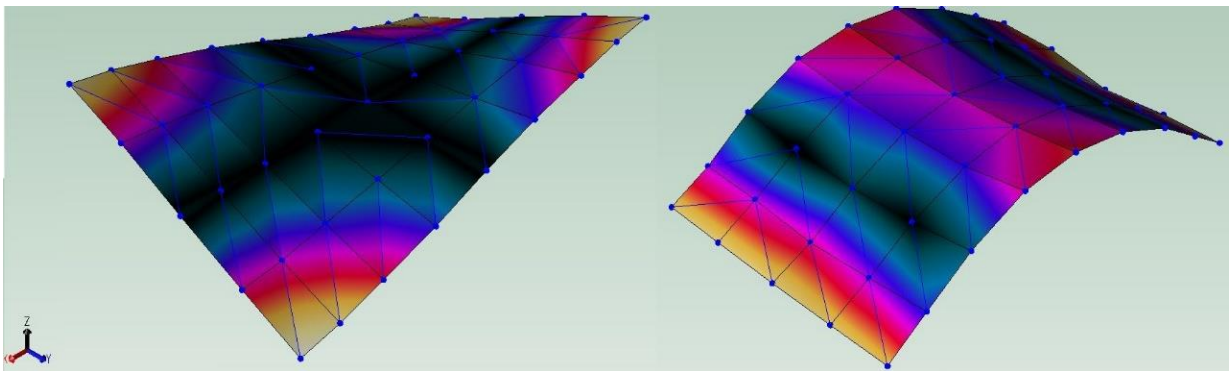


Fonte: Produção do próprio autor

4.1.2 Análise modal experimental

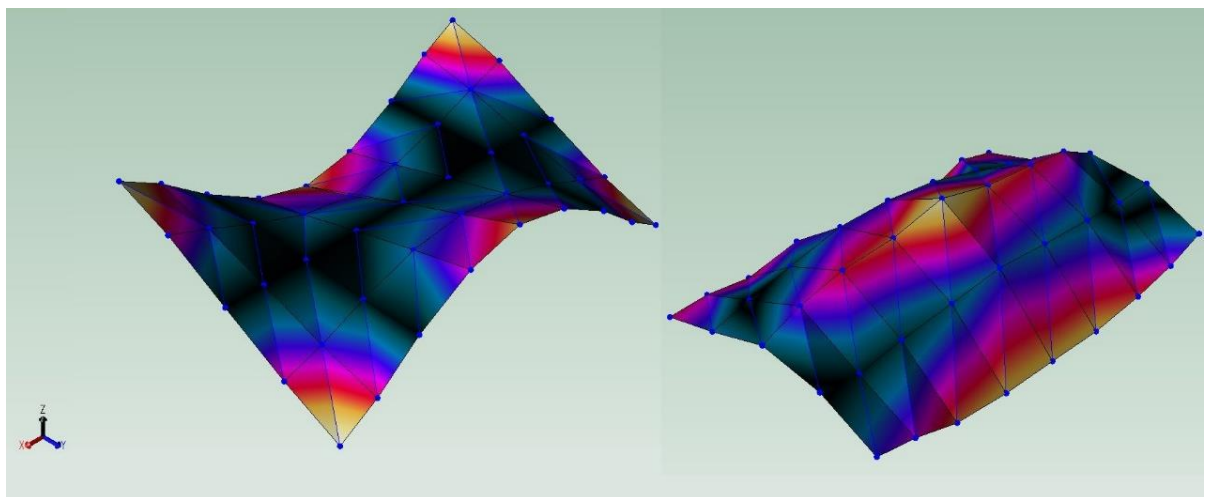
Após o procedimento descrito na Seção 3.2.2, os resultados da análise modal experimental foram extraídos. As Figuras 33 e 34 representam os modos de vibração da estrutura. Vale destacar que esses modos são uma representação de apenas um dos ensaios realizados, entretanto, os outros 8 ensaios apresentaram resposta similar.

Figura 33 – Primeiro e segundo modos de vibração experimentais



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 34 – Terceiro e quarto modos de vibração experimentais



Fonte: Produção do próprio autor

Em relação as frequências de ressonância experimentais em que são encontrados esses modos de vibração, as Tabela 3-5 representam os valores encontrados para cada ensaio em cada variação da condição de contorno. Tais valores, foram coletados através do *software Pulse Reflex*, o qual foi utilizado o método *polymax* para a extração dos mesmos.

Tabela 3 – Frequências experimentais da placa sobre a espuma

	E1 - Espuma	E2 - Espuma	E3 - Espuma	Média dos ensaios	Desvio padrão
f_{n1} [Hz]	296,03	296,12	296,16	296,10	0,07
f_{n2} [Hz]	317,01	316,58	316,37	316,66	0,32
f_{n3} [Hz]	682,29	682,21	682,31	682,27	0,06
f_{n4} [Hz]	741,40	741,16	741,00	741,19	0,20

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 4 – Frequências experimentais da placa na vertical

	E1 - Vertical	E2 - Vertical	E3 - Vertical	Média dos ensaios	Desvio padrão
f_{n1} [Hz]	295,88	295,76	295,78	295,81	0,06
f_{n2} [Hz]	316,68	316,63	316,81	316,71	0,09
f_{n3} [Hz]	681,62	682,28	682,38	682,09	0,41
f_{n4} [Hz]	741,30	740,04	738,66	740,00	1,32

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 5 – Frequências experimentais da placa na horizontal

	E1 - Horizontal	E2 - Horizontal	E3 - Horizontal	Média dos ensaios	Desvio padrão
f_{n1} [Hz]	295,35	295,29	295,80	295,48	0,28
f_{n2} [Hz]	316,67	316,65	316,32	316,54	0,20
f_{n3} [Hz]	682,25	682,34	682,39	682,33	0,07
f_{n4} [Hz]	740,83	740,85	741,27	740,98	0,25

Fonte: Produção do próprio autor

4.1.3 Comparação entre os resultados computacionais e experimentais

Inicialmente comparou-se, de forma direta, as frequências de ressonância obtidas experimentalmente com as coletadas através do *software*. Tirou-se uma média aritmética dos 3 ensaios realizados e calculou-se a diferença relativa ao experimento. Foi utilizado como valor padrão as frequências obtidas numericamente. As Tabela 6-8 apresentam esses dados.

Também foi calculada a diferença relativa à cada condição de contorno, buscando comparar os valores obtidos experimentalmente entre si. Tais dados estão representados na Tabela 9.

Tabela 6 – Erro relativo às frequências (placa sobre a espuma)

	Média dos ensaios Placa sobre a espuma	Numérico	Diferença relativa [%]
f_{n1} [Hz]	296,10	287,70	2.92
f_{n2} [Hz]	316,66	308,20	2.74
f_{n3} [Hz]	682,27	663,00	2.91
f_{n4} [Hz]	741,19	717,50	3.30

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 7 – Erro relativo às frequências (placa na vertical)

	Média dos ensaios Placa na vertical	Numérico	Diferença relativa [%]
f_{n1} [Hz]	295,81	287,70	2.82
f_{n2} [Hz]	316,71	308,20	2.76
f_{n3} [Hz]	682,09	663,00	2.88
f_{n4} [Hz]	740,00	717,50	3.14

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 8 – Erro relativo às frequências (placa na horizontal)

	Média dos ensaios Placa na horizontal	Numérico	Diferença relativa [%]
f_{n1} [Hz]	295,48	287,70	2.70
f_{n2} [Hz]	316,54	308,20	2.71
f_{n3} [Hz]	682,33	663,00	2.92
f_{n4} [Hz]	740,98	717,50	3.27

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 9 – Diferenças relativas à cada condição de contorno

Modo	Média ensaios Espuma [Hz]	Média ensaios Placa na vertical [Hz]	Média ensaios Placa na horizontal [Hz]	Diferença Espuma- PV [%]	Diferença Espuma- PH [%]	Diferença PV-PH [%]
f_{n1} [Hz]	296,10	295,81	295,48	0,10	0,21	0,11
f_{n2} [Hz]	316,66	316,71	316,54	0,02	0,03	0,05
f_{n3} [Hz]	682,27	682,09	682,33	0,03	0,01	0,03
f_{n4} [Hz]	741,19	740,00	740,98	0,16	0,03	0,13

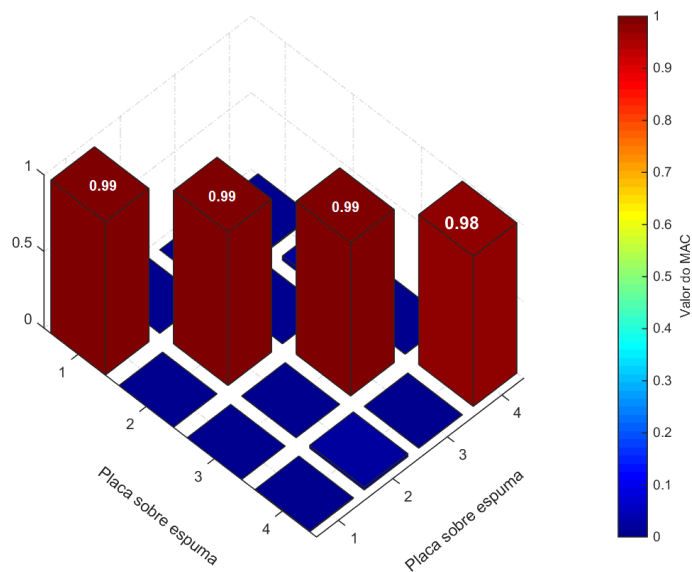
Fonte: Produção do próprio autor

Em seguida, calculou-se o Critério de Correlação Modal (*MAC – Modal Assurance Criterion*) para verificar a correlação entre as formas modais entre as diferentes condições de contorno analisadas. Tal critério foi utilizado de 2 maneiras distintas:

- Correlação entre dois ensaios da mesma condição de contorno;
- Correlação entre dois ensaios de duas condições de contorno diferentes;

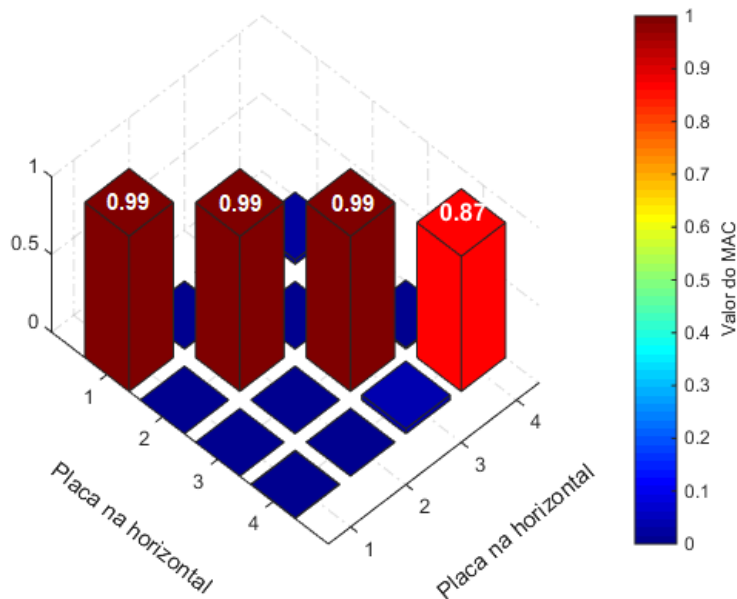
Portanto, as Figuras 35-40 representam os resultados obtidos através das análises dessas duas características.

Figura 35 – MAC entre as mesmas CC para a placa sobre a espuma



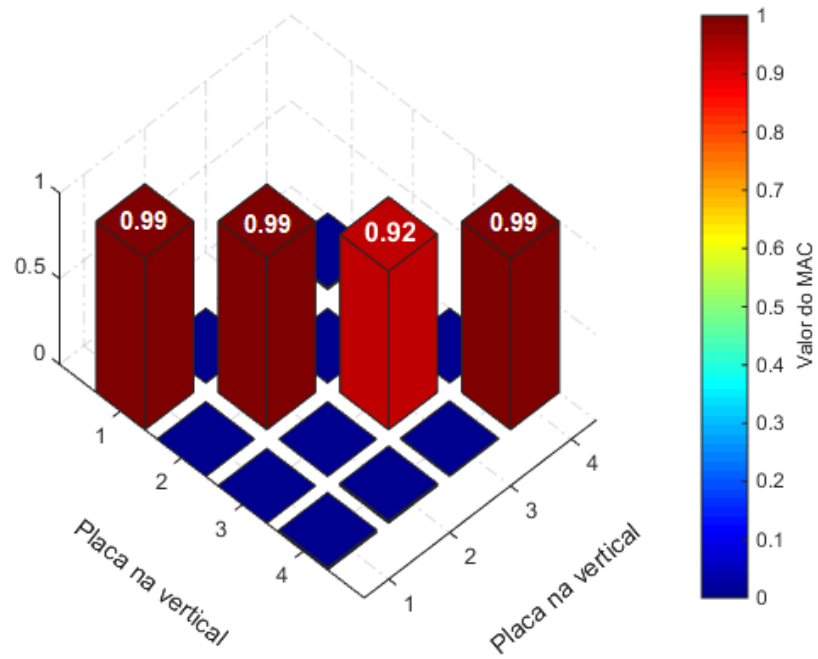
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 36 – MAC entre as mesmas CC para a placa na horizontal



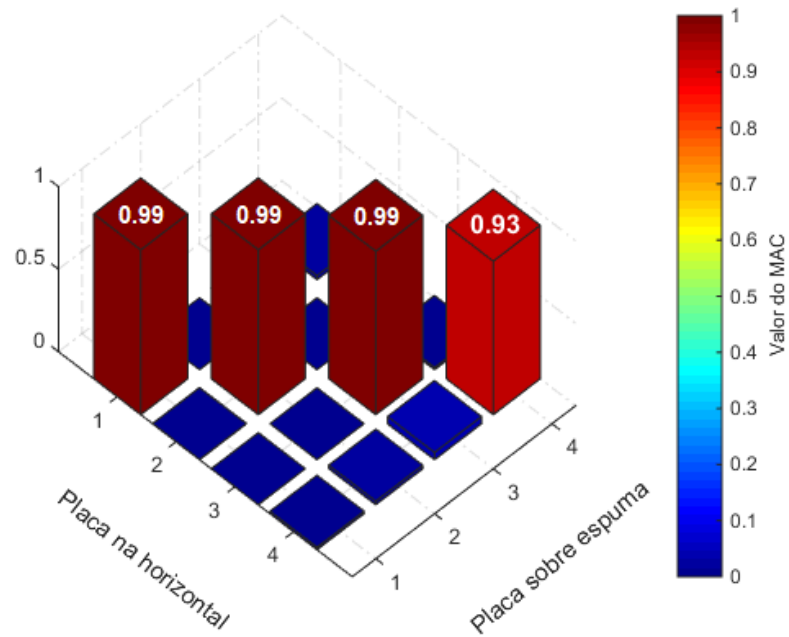
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 37 – MAC entre as mesmas CC para a placa na vertical



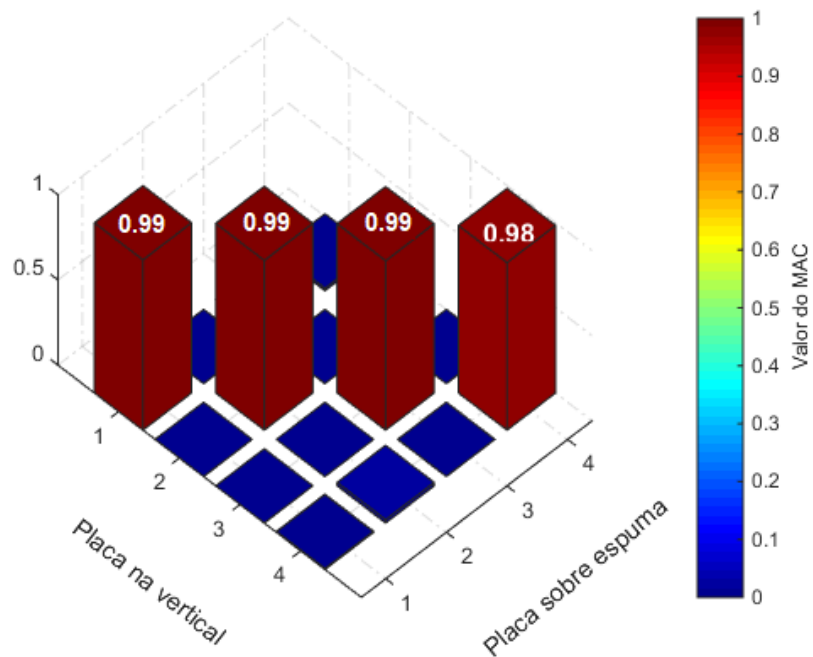
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 38 – MAC entre distintas CC para a placa sobre a espuma e a placa na horizontal



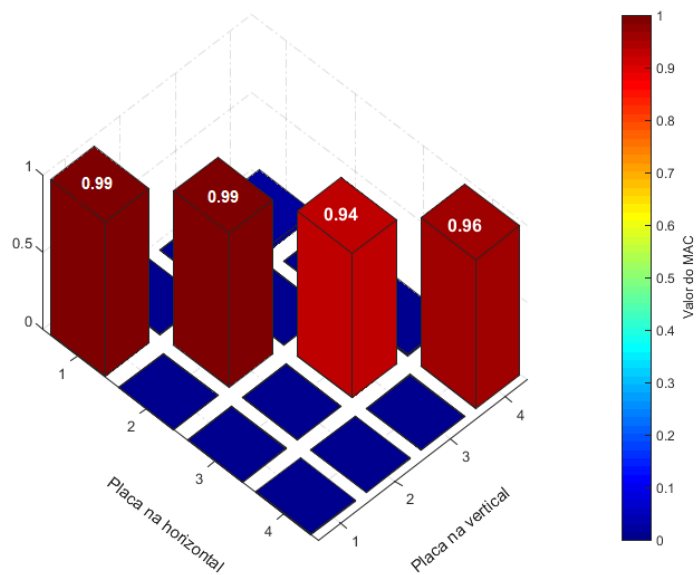
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 39 – MAC entre distintas CC para a placa sobre a espuma e para a placa na vertical



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 40 – MAC entre distintas CC para a placa na vertical e para a placa na horizontal



Fonte: Produção do próprio autor

Inicialmente é possível analisar que, pelos valores das diferenças relativas à cada condição de contorno (Tabela 9), os resultados da frequência experimental pouco se alteraram conforme tais mudanças, sendo a maior diferença observada na faixa de 0,2%. Nota-se também que os valores das frequências dos modos de corpo rígido (Figura 30) da placa são bem inferiores se comparado ao primeiro modo de vibração (Figura 31) da mesma, o que desta maneira, atende aos parâmetros já bem estabelecidos por He e Fu (2001). Além disso, todos os ensaios tiveram o mesmo comportamento, tendo uma diferença relativa máximo de 3,3% se comparados aos resultados numéricos. Portanto, pode-se afirmar que os resultados experimentais são satisfatórios devido à baixa diferença encontrada entre eles. Da mesma forma, é possível perceber que a condição livre-livre foi estabelecida e que as condições de contorno pouco alteraram nas frequências naturais da placa, quando comparada com os resultados coletados através do *software*. Vale ressaltar também, que parte deste erro está associado às propriedades empregadas na análise numérica, visto que foram utilizados valores tabelados segundo a bibliografia e não obtidos através de ensaios ou afins.

Da mesma maneira, os valores de MAC mostraram-se dentro da faixa esperada (maiores que 0,9 para modos próximos e menores que 0,1 para modos distintos), com exceção de apenas o quarto modo na correlação entre dois ensaios da placa fixa na posição horizontal (Figura 36) que foi de 0,87, o que nesse estudo, entretanto, foi considerado um valor razoável. Com isso, pode-se dizer novamente que os modos apresentam excelente correlação entre os mais variados ensaios, reiterando assim, que os resultados experimentais são satisfatórios e que a condição da placa livre-livre foi estabelecida.

4.2 COERÊNCIA

Uma outra maneira utilizada para verificar a qualidade dos dados experimentais é através da correlação entre os impulsos. A coerência trata de uma função versus frequência que indica quanto da saída é devido à entrada na FRF, ela avalia a consistência da FRF a ser medida de ser repetida através da mesma medição e pode ser calcula pela Eq. (43) abaixo.

Figura 41 - FRF (H) em relação à entrada (X) e saída (Y)



Fonte: <<https://community.plm.automation.siemens.com/t5/Testing-Knowledge-Base/What-is-a-Frequency-Response-Function-FRF/ta-p/354778>> Acesso em julho de 2018.

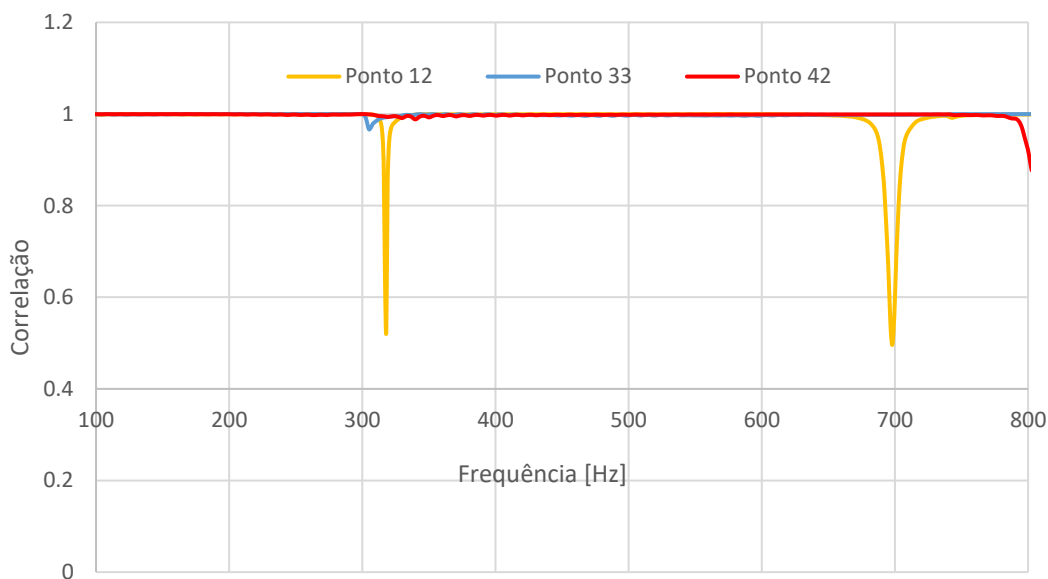
Onde,

$$H = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}. \quad (43)$$

De tal forma que a coerência será uma relação entre os vetores de entrada (X) e saída (Y) e os vetores de entrada (X).

Assim, quanto mais próximo de 1, mais próximos foram os impulsos (em relação a força aplicada e ao ponto de impulso) e melhor é o resultado obtido. A Figura 42 representa a correlação obtida nos 3 pontos de análise das FRFs, conforme destacado na Seção 3.3.1. O resultado obtido é de apenas de um dos ensaios, mas vale ressaltar que buscou-se manter esse mesmo padrão para os outros 42 pontos analisados nos outras condições e contornos. No ponto 12 houve duas quedas no valor desta correlação, mas isso ocorre justamente nos pontos de antirressonância da FRF, isso devido ao fato do sinal ser muito fraco nesses pontos.

Figura 42 – Coerência experimental



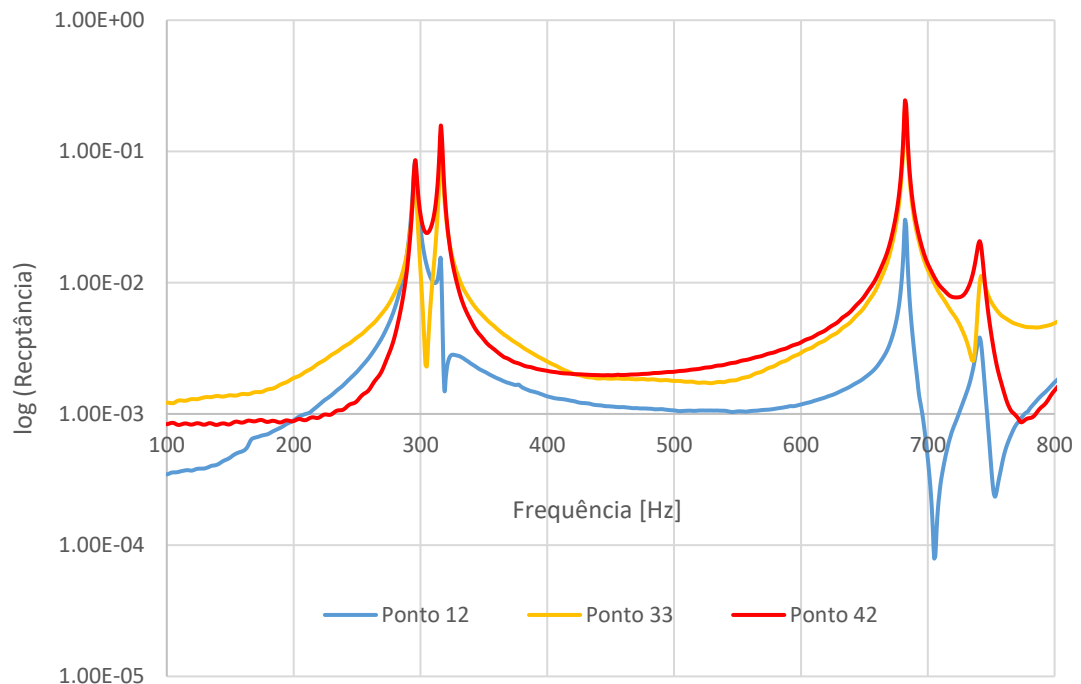
Fonte: Produção do próprio autor

4.3 FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A próxima etapa do estudo consiste em analisar o comportamento observado experimentalmente das funções de resposta em frequência dos nós já mencionados na Seção

3.3. Após os mesmos procedimentos experimentais já mencionados anteriormente, foi possível obter a FRF dos nós 12, 33 e 42, já destacados na Seção 3.3.1. Os deslocamentos modais foram normalizados e a faixa de frequência considerada foi de 100Hz à 800Hz, cobrindo a faixa de interesse dos quatro primeiros modos de vibração. Os resultados são mostrados na Figura 42. Vale ressaltar que a FRF (Figura 42) foi extraída de apenas um dos nove ensaios realizados, entretanto, as FRFs desses outros ensaios apresentaram resposta similar.

Figura 43 – FRF dos 3 pontos experimentais



Fonte: Produção do próprio autor

É possível perceber que a FRF de cada ponto possui o máximo deslocamento modal para o mesmo valor de frequência, portanto, pela análise de cada FRF é possível extrair os 4 primeiros modos de vibração da placa.

5 CONCLUSÕES

O objetivo geral deste trabalho consiste em investigar e quantificar as influências das condições de contorno utilizadas para modelar a análise modal de uma placa livre-livre. Utilizou-se de algumas comparações diretas entre os resultados experimentais e computacionais, bem como o uso de critérios de correlação entre os resultados obtidos em cada ensaio.

Pode-se observar que os ensaios experimentais atenderam às expectativas, uma vez que os modos de vibração tiveram comportamento semelhante ao obtido de maneira numérica. Entretanto, as frequências naturais de ressonância tiveram uma variação, em torno de 3,3%, se comparado ao método numérico, o que mesmo assim, pode ser considerado um valor baixo. Uma parcela responsável por uma parte da diferença entre o modelo numérico e experimental, como mencionado anteriormente, está relacionada ao fato de que as propriedades utilizadas no *software* foram retiradas da literatura e não de dados reais.

É possível notar também que os resultados obtidos experimentalmente em todos os ensaios e em todas as variações das condições de contorno foram bastante próximos, uma vez que a maior diferença relativa entre os valores das frequências naturais foi em torno de 0,2%.

De forma similar, através da correlação (MAC) entre os modos dos ensaios, nota-se que os mesmos obtiveram um comportamento muito semelhante, onde esta correlação estava maior que 90% na grande maioria dos casos, o que evidencia o fato de que a análise experimental foi realizada de maneira adequada, de tal forma que a condição livre-livre foi estabelecida.

Portanto, pode-se afirmar que o fato dos resultados coletados experimentalmente serem muito semelhantes indica que cada condição de contorno analisada teve uma baixa influência nas características dinâmicas reais da placa. Assim, a utilização de qualquer uma das condições de contorno estudadas seria adequada para a obtenção das características dinâmicas do modelo que está sendo estudado. Por questões de praticidade do ensaio experimental, a condição de contorno que obteve a maior “facilidade” de se retirar dados práticos foi da placa sobre a espuma, uma vez que os fios elásticos, em determinados pontos, acabavam interferindo no impulso do martelo.

Para trabalhos futuros que seguem a mesma linha de estudo, é recomendado estudar novas condições de contorno para se ter uma base de dados maior, com um maior número de suportes que trariam a condição livre-livre. Também, recomenda-se fazer um maior número de impulsos na placa, para diminuir o erro associado. Recomenda-se um maior número de ensaios

a fim de se verificar a repetitividade dos experimentos. Em relação a parte numérica, é recomendado fazer uma análise das propriedades reais do material de estudo, buscando assim, minimizar ainda mais o erro relativo às comparações práticas e computacionais.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AVITABILE, P. **Modal Space Articles**, University of Massachusetts Lowell, 2014.
- BLEVINS, R. D.; PLUNKETT, R. **Formulas for natural frequency and mode shape**. Journal of Applied Mechanics, v. 47, p. 461, 1980.
- CARNE, T. G.; GRIFFITH, D. T.; CASIAS, M. E. **Support conditions for experimental modal analysis**, Sandia National Laboratories, Albuquerque, 2007.
- DE SOUSA, B.H.F. **Detecção de dano em viga de alumínio através de um método baseado em vibrações**. 2017. TCC (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Curso de Engenharia Mecânica, Joinville, 2017.
- EWINS, D. J. **Modal testing**. New York: Wiley, 1984.
- HE, J.; FU, Z-F. **Modal Analysis**. Oxford: Butterworth Heinemann, 2001. 304 p.
- HYPERMESH TUTORIAL. **Modal analysis with Altair OptiStruct/Hypermesh**.
- HYPERMESH TUTORIAL. **Modal Frequency response analysis of a flat plate**.
- KLOUTSEY, A. E. H.; DINIZ, A.C.G.C.; VILLA, C. V. S. **Influência das condições de contorno na análise modal experimental de vigas**. Universidade Federal de Uberlândia, 2006.
- MAFRA, L.F. **Ajuste de parâmetros do modelo dinâmico estrutural de placas de compósito laminado usando o método dos elementos finitos e PSO**. 2017. 142f. TCC (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Curso de Engenharia Mecânica, Joinville, 2017.
- MAIA, N. N. M.; SILVA, J. M. M. **Theoretical and experimental modal analysis**. Taunton: Research Studies Press, 1997.
- MEDEIROS, R. de. **Análise Modal**. 2018. Notas de aula.
- MEDEIROS, R. de; CARDOSO, E.L. **Vibrações**. 2018. Notas de aula.

NEGRI, D. **Previsão no domínio da frequência do comportamento dinâmico de peças de parede fina utilizando redução de ordem de modelo e mudança estrutural.**

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em engenharia mecânica, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2018.

GUILLAUME, P. **Modal Analysis**, Technical Notes Research Groups Acoustics and Vibration, Vrije, Universiteit Brussel, Brussel, Belgium, 2000.

RAO, S.S. **Vibrações Mecânicas**, 4ª Ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

R.C. HIBBELER, **Resistência dos Materiais**, Terceira Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2000.

SILVA, J. M. M.; MAIA, N. N. M. **Modal analysis and testing**. Sesimbra: Springer Science Business Media, 1999.

THOMSON, W. T. **Teoria da vibração com aplicações**. 1.ed. Rio de Janeiro, RJ: Interciência. 1978.