

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LUÍS FELIPE MAFRA

**AJUSTE DE PARÂMETROS DO MODELO DINÂMICO ESTRUTURAL DE
PLACAS DE COMPÓSITO LAMINADO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS E PSO**

JOINVILLE, SC

2017

LUÍS FELIPE MAFRA

**AJUSTE DE PARÂMETROS DO MODELO DINÂMICO ESTRUTURAL DE
PLACAS DE COMPÓSITO LAMINADO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS E PSO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC0001) do Curso de Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

**JOINVILLE, SC
2017**


LUÍS FELIPE MAFRA

**AJUSTE DE PARÂMETROS DO MODELO DINÂMICO ESTRUTURAL DE
PLACAS DE COMPÓSITO LAMINADO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS E PSO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC0001) do Curso de Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.


Banca Examinadora:

Orientador:

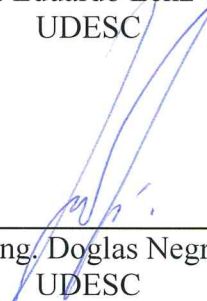


Prof. Dr. Ricardo de Medeiros
UDESC

Membros:



Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso
UDESC



Eng. Douglas Negri
UDESC

Joinville, 07 de julho de 2017.

AGRADECIMENTOS

Aproveito o momento para agradecer às pessoas que contribuíram não só com a elaboração deste trabalho, mas com minha caminhada até aqui.

Gostaria de começar os agradecimentos me referindo às pessoas mais especiais na minha vida: minha mãe Vera, meu pai Luiz e minha irmã Patrícia. Sem vocês me apoiando e me suportando eu não teria conseguido nada em minha vida. Apesar da distância, não muito longa, sei que sempre posso contar com vocês, independente do que aconteça, para toda a vida.

À minha namorada Liane, que apesar de estarmos apenas há um ano juntos, se mostrou ser a parceria ideal. Sempre ao meu lado me apoiando e me suportando nas horas mais difíceis e nas horas em que pensei que não conseguiria superar as dificuldades e nem concluir este trabalho, conseguindo sempre me alegrar somente com sua presença ao meu lado.

Aos meus amigos de curso, que ingressaram na UDESC junto comigo, em especial ao Rafael Andrade (Rafa) e ao Bruno Fogaça (Fumego), que foram as pessoas com quem mais me identifiquei e que sempre me ajudaram, no que fosse preciso. Desejo que suas vidas sejam repletas de alegrias e conquistas, pois vocês merecem.

Aos demais colegas e amigos que fiz durante os anos em que frequentei a universidade, em especial ao João Machado, que me suportou nesse período final da elaboração do trabalho, me ajudando e permitindo que eu usasse o laboratório até nos finais de semana.

A todos os professores que tive durante minha vida, em especial aos professores do CCT/UDESC, que contribuíram de maneira significativa para minha formação profissional e, em especial, ao meu orientador, professor Dr. Ricardo de Medeiros, por todos os ensinamentos transmitidos na disciplina de Vibrações e durante ao longo desse semestre, me ajudando e esclarecendo dúvidas em relação aos conteúdos e procedimentos presentes nessa pesquisa, contribuindo assim para meu crescimento acadêmico.

Por fim, mas não menos importante, ao mestrando Luiz Fernando dos Santos Souza, que se disponibilizou a me ajudar com qualquer dúvida referente à minha pesquisa, principalmente em relação a parte experimental no programa computacional Hyperworks.

A todos vocês, muito obrigado!

RESUMO

A otimização pode ser atrelada a todas as tarefas realizadas atualmente. Todo processo pode ser melhorado até seu ponto ótimo, bem como materiais utilizados e suas respectivas propriedades. Portanto, este trabalho objetiva desenvolver modelos computacionais que melhor refletem os dados experimentais, quando comparados aos modelos iniciais. Nessa pesquisa, a atualização de parâmetros do modelo é realizada através do método de otimização PSO (*Particle Swarm Optimization*). A modificação pode atuar em três vertentes: a modificação direta nas matrizes de massa e rigidez da estrutura, a modificação direta dos parâmetros modais (frequência natural, modos de vibrar e amortecimento) e, as modificações através das FRFs, sendo o último método o adotado. Inicialmente, modelos das placas foram desenvolvidos, a fim de utilizá-los como referência para os processos de otimização que viriam a ser realizados. Comparam-se os modos de vibrar destes modelos com os modos de vibrar das estruturas reais, a fim de se verificar a validade dos modelos projetados inicialmente. A partir dos modelos iniciais, as FRFs dos pontos desejados foram traçadas e comparadas com as FRFs dos pontos experimentais, a fim de analisar o comportamento das mesmas, comparando as diferenças entre as simulações numéricas e os dados experimentais. A próxima etapa realizada foi a otimização das diferenças entre as frequências naturais dos modelos computacionais e às experimentais, através do algoritmo PSO, otimizando por esse processo 10 parâmetros de modelagem, chamados aqui de variáveis de projeto. Após este processo, a próxima análise visa determinar as taxas de amortecimento proporcionais, que compõem o restante das variáveis de projeto otimizadas nessa pesquisa. Estudos adicionais, como uma abordagem diferente do PSO e a influência das taxas de amortecimento proporcionais na amenização dos picos de ressonâncias, foram realizados após a conclusão das primeiras otimizações. Com todos os resultados, traçaram-se as curvas de otimização para ambas as placas a fim de se determinar qual das curvas de otimização teve melhor rendimento. Posteriormente, uma comparação entre as FRFs otimizadas, as simuladas e as experimentais foi efetuada, a fim de se verificar as potencialidades e limitações do método utilizado. Por fim, um estudo sobre a influência da variação das espessuras das placas reais foi realizado com o intuito de esclarecer as limitações encontradas durante o processo de otimização.

Palavras-chave: Atualização de parâmetros do modelo. Otimização. Placas. FRFs. Método dos Elementos Finitos.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Classificação dos materiais compósitos.....	22
Figura 2 - Estrutura de um laminado com diferentes orientações de fibra.....	23
Figura 3 - Forças internas num plano específico que passa por um ponto.....	24
Figura 4 - Elemento diferencial submetido a tensões normais e cisalhantes.....	25
Figura 5 - Representação dos deslocamentos dos pontos A e B e deformação normal sofrida nesse segmento	26
Figura 6 - Representação esquemática da deformação angular.....	28
Figura 7 - Corpos finos submetidos a forças paralelas ao plano	29
Figura 8 - Lâmina ortotrópica representada num plano cartesiano 1-2-3 (esquerda) e planos ortotrópicos (direita).....	30
Figura 9 - Elementos básicos de uma placa conforme a teoria clássica dos laminados.....	34
Figura 10 - Elemento de placa linear (esquerda) e elemento-mestre (direita).....	44
Figura 11 - Modelo de distribuição das funções de interpolação de Lagrange	45
Figura 12 - Elemento de Hermite quadrilátero com quatro nós	45
Figura 13 - Sistema vibratório com um grau de liberdade	55
Figura 14 - Representação completa da FRF para um sistema com um grau de liberdade.....	64
Figura 15 - Exemplo do módulo receptância ($H(\omega)$) para um sistema com quatro graus de liberdade	65
Figura 16 - Variação do ângulo de fase da FRF em relação à frequência.....	65
Figura 17 - Módulo receptância ($H(\omega)$) para um sistema com quatro graus de liberdade representado na base logarítmica dB20	66
Figura 18 - Fluxograma representativo dos processos realizados	71
Figura 19 - Experimento para obtenção das FRFs de determinados pontos da placa	72
Figura 20 - Modelo inicial da placa P09 _{CF}	73
Figura 21 - Pontos para a análise das FRFs simuladas.....	75
Figura 22 - Pontos H_{11} , H_{12} , H_{13} e H_{14} presentes na malha da placa P10 _{CF}	75

Figura 23 - Coletor das taxas de amortecimento da placa P10 _{CF}	76
Figura 24 - Coletor da força dinâmica aplicada aos modelos	77
Figura 25 - Função tabular $B(\omega)=1$ inserida no Hyperworks	78
Figura 26 – Exemplificação dos métodos de otimização.....	80
Figura 277 - Fluxograma representando os algoritmos de otimização	81
Figura 288 – Aparato experimental para medição das espessuras das lâminas das placas.....	86
Figura 29 - Fluxograma do algoritmo utilizado para realizar as simulações e extrair os valores das 5 primeiras frequências naturais simuladas	87
Figura 30 - Fluxograma do algoritmo utilizado para realizar as simulações e extrair os valores das FRFs das partículas.....	88
Figura 31 - Quatro primeiros modos de vibração do modelo inicial elaborado para a placa P09 _{CF} . (a) é o primeiro modo de torção; (b) o primeiro modo de flexão; (c) o segundo modo de torção e (d) segundo modo de flexão.....	93
Figura 32 - Quatro primeiros modos de vibração para as placas de fibra de carbono. (a) é o primeiro modo de torção; (b) o primeiro modo de flexão; (c) o segundo modo de torção e (d) segundo modo de flexão.	94
Figura 33 - Análise de convergência para a malha sem distorção	95
Figura 34 - Análise de convergência para a malha com distorção.....	95
Figura 35 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H ₁₁ da placa P09 _{CF}	99
Figura 36 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H ₁₂ da placa P09 _{CF}	100
Figura 37 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H ₁₃ da placa P10 _{CF}	101
Figura 38 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H ₁₄ da placa P10 _{CF}	102
Figura 39 - Medições numa região do laminado P09 _{CF}	103
Figura 40 - Comparação entre as otimizações realizadas no ponto H ₁₁ para a placa P09 _{CF} ..	108
Figura 41 - Ampliação das diferenças nas regiões das ressonâncias do gráfico de comparações das otimizações, P09 _{CF}	108

Figura 42 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H ₁₁ da placa P09 _{CF}	110
Figura 43 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H ₁₂ da placa P09 _{CF}	111
Figura 44 - Comparação entre as otimizações realizadas no ponto H13 para a placa P10 _{CF} .	112
Figura 45 - Ampliação das diferenças nas regiões das ressonâncias do gráfico de comparações das otimizações, P10 _{CF}	113
Figura 46 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H ₁₃ da placa P10 _{CF}	115
Figura 47 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H ₁₄ da placa P10 _{CF}	116
Figura 48 - Medição das espessuras das placas através da máquina de medir por coordenadas	117
Figura 49 - Espessura da placa P09 _{CF} em cada ponto de sua superfície	118
Figura 50 - Espessura da placa P10 _{CF} em cada ponto de sua superfície	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Medidas iniciais das placas P09 _{CF} e P10 _{CF}	72
Tabela 2 - Propriedades elásticas das placas P09 _{CF} e P10 _{CF}	72
Tabela 3 - Taxas de amortecimento proporcional das placas P09 _{CF} e P10 _{CF}	76
Tabela 4 - Parâmetros do PSO utilizados	82
Tabela 5 - Pontos máximos e mínimos para as variáveis de projeto	85
Tabela 6 - Novos limites das taxas de amortecimento para a placa P10 _{CF}	90
Tabela 7 - Relação entre tamanho de elemento e número de nós.....	95
Tabela 8 – Frequências naturais e diferenças percentuais entre os resultados dos elementos para malha sem distorção	96
Tabela 9 – Frequências naturais e diferenças percentuais entre os resultados dos elementos para malha com distorção	97
Tabela 10 - Cinco primeiras frequências naturais da placa P09 _{CF} para o elemento de 10mm/832 nós.....	97
Tabela 11 - Primeiros resultados da otimização pelo método 1	104
Tabela 12 - Análise das alterações feitas nos limites do espaço solução para a placa P09 _{CF} . 105	
Tabela 13 - Resultados das otimizações para a primeira etapa do método 1 para a placa P09 _{CF}	106
Tabela 14 - Taxas de amortecimento para diferentes otimizações.....	107
Tabela 15 - Variáveis de projeto determinadas através do método 2 de otimização - P09 _{CF} . 107	
Tabela 16 - Taxas de amortecimento proporcional referentes às otimizações efetuadas na placa P10 _{CF}	113

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	19
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1 MATERIAIS COMPÓSITOS	21
2.1.1 Polímero reforçado com fibra de carbono (CFRP)	22
2.1.2 Elasticidade linear	23
2.1.2.1 <i>Tensões</i>	24
2.1.2.2 <i>Deslocamentos e deformações</i>	25
2.1.2.3 <i>Estado Plano de Tensões (EPT)</i>	29
2.1.2.4 <i>Material ortotrópico</i>	30
2.1.2.5 <i>Relações tensão-deformação - Lei de Hooke</i>	30
2.1.3 Teoria clássica dos laminados	33
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	38
2.2.1 História do MEF	39
2.2.2 Utilização do MEF nos casos estudados	39
2.2.2.1 <i>Equacionamento dinâmico para laminados</i>	40
2.2.2.2 <i>Funções de interpolação para placas</i>	42
2.2.2.2.1 <i>Funções de interpolação de Lagrange</i>	43
2.2.2.2.2 <i>Funções de interpolação de Hermite</i>	45
2.2.2.3 <i>Matriz de rigidez, matriz de inércia e vetor de força nodal</i>	46
2.2.2.3.1 <i>Matriz de rigidez</i>	46
2.2.2.3.2 <i>Vetor de força nodal</i>	49
2.2.2.3.3 <i>Matriz de inércia</i>	50
2.2.2.4 <i>Funções de interpolação nas coordenadas globais</i>	51
2.3 VIBRAÇÕES	53
2.3.1 Conceitos Gerais	53
2.3.2 Equação do movimento para estruturas com um grau de liberdade	55
2.3.3 Sistemas com infinitos graus de liberdade – meios contínuos	57
2.3.4 Análise Modal	58
2.3.5 Função de Resposta em Frequência – FRF	62
2.3.5.1 <i>Representação gráfica das FRFs</i>	64
2.4 AJUSTE DE MODELO	67
2.4.1 Otimização por Enxame de Partículas – PSO	68
2.4.2 Aplicação do PSO na otimização das FRFs	69

3 METODOLOGIA.....	71
3.1 ELABORAÇÃO DOS MODELOS INICIAIS.....	71
3.2 ANÁLISE DO TAMANHO DOS ELEMENTOS.....	74
3.3 ELABORAÇÃO DOS MODELOS PARA ANÁLISE FRF.....	75
3.4 COMPARAÇÃO SIMULAÇÃO INICIAL X EXPERIMENTAL.....	78
3.5 APLICAÇÃO DO PSO.....	79
3.5.1 Importação dos dados do problema de otimização.....	81
3.5.2 Definição dos parâmetros do PSO.....	82
3.5.3 Criação das matrizes e vetores nulos.....	82
3.5.4 Criação da matriz de comparação.....	83
3.5.5 Criação da matriz de partículas X.....	84
3.5.6 Limitação dos tamanhos das partículas.....	86
3.5.7 Execução das simulações via Scilab.....	87
3.5.8 Criação e atualização da matriz das normas segundas.....	89
3.5.9 Criação e atualização do vetor de critério.....	89
3.6 COMPARAÇÃO SIMULAÇÃO OTIMIZADA X EXPERIMENTAL.....	90
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	93
4.1 ELABORAÇÃO DOS MODELOS INICIAIS.....	93
4.2 ANÁLISE DO TAMANHO DOS ELEMENTOS.....	94
4.3 COMPARAÇÃO SIMULAÇÃO INICIAL X EXPERIMENTAL.....	98
4.4 MEDIÇÃO DAS ESPESSURAS DAS LÂMINAS.....	103
4.5 RESULTADOS DAS OTIMIZAÇÕES.....	103
5 CONCLUSÕES.....	119
6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	121
REFERÊNCIAS.....	123
APÊNDICES.....	125
APÊNDICE A – IMPORTAÇÃO DOS DADOS DO PROBLEMA P09 _{CF}	125
APÊNDICE B – LIMITAÇÃO DO TAMANHO DOS VALORES DAS PARTÍCULAS.....	127
APÊNDICE C – ROTINA PARA OBTENÇÃO DOS DADOS COMPUTACIONAIS.....	133
APÊNDICE D – ALGORITMO PSO PARA O MÉTODO 2.....	139

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos, atualmente, são aplicados principalmente no segmento de indústrias aeronáuticas e aeroespaciais. Peças de aeronaves como carenagens, *spoilers* e controladores de voo, produzidas de material compósito, foram desenvolvidas durante os anos 60 com intuito de, por serem mais leves, substituir as peças feitas de alumínio (MEDEIROS, 2016). Como sua aplicação está envolvida em equipamentos cuja a falha pode ser catastrófica, faz-se necessário ter o conhecimento pleno do material compósito que está sendo utilizado, bem como do seu comportamento dinâmico.

Com o conhecimento da resposta do material à excitação de forças externas, pode-se projetar o componente de maneira segura. Porém, como se obter essa resposta sem pôr o material em si à prova, gastando em sua fabricação, montagem e processos de acabamento? A resposta para esse questionamento são as simulações computacionais, que efetuam a análise dos mais variados tipos de condições sobre a peça que se deseja projetar. Obviamente, existem limitantes à essas simulações e suas soluções são aproximadas, fazendo com que seja necessário se ter confiabilidade nas respostas das simulações. Entretanto, caso a resposta dinâmica da estrutura real seja conhecida, pode-se elaborar um modelo numérico que tente simular esta estrutura, ou, ainda, tentar otimizar esse modelo de forma que ele se assemelhe da melhor maneira possível à estrutura real.

Essa pesquisa foi elaborada com base na ideia citada no parágrafo anterior. Desenvolver modelos computacionais que simulem estruturas reais de materiais compósitos laminados, neste caso, estruturas do tipo placas retangulares, a fim de buscar modelos que representassem da melhor forma possível os resultados experimentais das placas analisadas.

Esse estudo tem como objetivo geral verificar a qualidade dos resultados obtidos dessas otimizações, verificando-se as potencialidades e limitações dos métodos utilizados. Pode-se ainda mencionar como objetivos específicos: verificar qual abordagem de otimização adotada apresentou os melhores resultados e determinar a influência da variação de certos parâmetros nas respostas das otimizações.

O desenvolvimento dessa pesquisa justifica-se pela crescente utilização destes materiais devido, a suas propriedades mecânicas, nas mais diversas áreas da engenharia. Sendo que estes materiais possuem aplicações mais restritas do que outros materiais, como por exemplo aços, tornando assim relevante a sua caracterização.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem como intuito abordar os fundamentos teóricos necessários para a análise e discussão dos dados apresentados nessa pesquisa. Para melhor compreensão, o mesmo foi dividido em subcapítulos que abrangem os seguintes conceitos: materiais compósitos, método dos elementos finitos, vibrações e ajuste de modelo.

2.1 MATERIAIS COMPÓSITOS

Material compósito é a união de dois ou mais materiais, combinados macroscopicamente, para funcionarem como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta (MENDONÇA, 2005). Seguindo-se este princípio de ação conjunta, tem-se como objetivo moldar materiais cujas combinações sejam as melhores possíveis para o tipo de aplicação desejada.

Os materiais que compõem o compósito podem ser classificados como aglomerante (ou matriz) e reforço. O primeiro tem como função manter os reforços unidos, transmitindo a estes o carregamento aplicado. Já os reforços suportam os carregamentos transmitidos pelo aglomerante (TITA, 2006).

Ainda de acordo com Tita (2006), os materiais compósitos, atualmente, são aplicados principalmente no segmento de indústrias aeronáuticas e aeroespaciais. Peças de aeronaves como carenagens, *spoilers* e controladores de voo, produzidas de material compósito, foram desenvolvidas durante os anos 60 com intuito de, por serem mais leves, substituir as peças feitas de alumínio (MEDEIROS, 2016).

Pode-se classificar os materiais compósitos em três grupos: compostos reforçados por fibras, compostos reforçados por partículas – chamados também de compostos particulados – e outros tipos de compostos (MENDONÇA, 2005). A Figura (1) exhibe esta classificação e indica a classe de materiais aqui estudadas.

Figura 1 - Classificação dos materiais compósitos



Fonte: Adaptado de CALLISTER, 2008.

2.1.1 Polímero reforçado com fibra de carbono (CFRP)

O polímero reforçado com fibra de carbono (CFRP – *Carbon Fiber Reinforced Polymer*) é um tipo de material compósito fibroso, sendo as fibras feitas de carbono e a matriz de resina epóxi. Este material caracteriza-se por ser relativamente leve e possuir de boas a excelentes propriedades mecânicas, dependendo da origem de suas fibras.

A produção da fibra de carbono é feita a partir de filamentos precursores orgânicos. Para isto, três materiais são usados: fibras de poliacrilonitrile (PAN), de raiom ou fibras pitch. Resumidamente, o processo consiste no estiramento da fibra precursora por um período de 24 horas a uma temperatura de aproximadamente 230°C. Depois, acontece a carbonização desta em atmosfera inerte e, por fim, um processo de grafitação (MENDONÇA, 2005). É válido citar que, quanto melhor o precursor melhores as propriedades mecânicas da fibra.

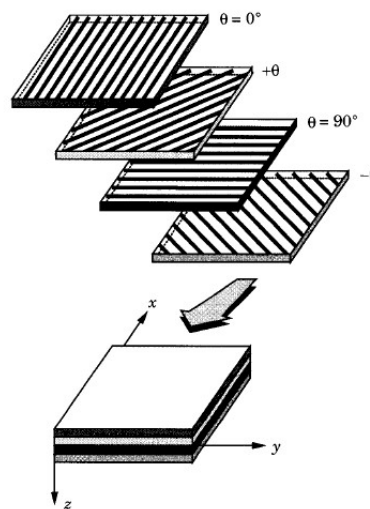
Segundo Callister (2008), existem duas classificações para os polímeros: os termoplásticos e os termofixos. Os polímeros pertencentes à primeira categoria amolecem quando aquecidos e endurecem quando resfriados. Por outro lado, os termofixos se tornam permanentemente duros durante a sua formação e não amolecem com um aquecimento subsequente. O epóxi é um polímero – material plástico constituído de inúmeros componentes químicos idênticos (monômeros) – termofixo.

Usa-se como base dessa pesquisa placas feitas a partir do empilhamento de lâminas de carbono-epóxi, formando assim um laminado. Cada lâmina apresenta um direcionamento específico das fibras, fazendo com que estas possuam diferentes propriedades entre si. Essa variação na direção das fibras garante ao laminado as propriedades mecânicas desejadas

(REDDY, 2004). A Figura (2) exemplifica a formação de um laminado feito a partir de lâminas com diferentes direções de fibra.

Reddy (2004), apresenta duas teorias que regem o comportamento mecânico dos laminados, a teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT – *First-order Shear Deformation Theory*) e a teoria clássica dos laminados (CLPT – *Classical Laminated Plate Theory*) ou (TCL) em português. Por sua simplicidade, a teoria clássica foi adotada nessa pesquisa e, para sua caracterização, faz-se necessário determinar primeiro o comportamento elástico linear de placas laminadas, tema este abordado em sequência.

Figura 2 - Estrutura de um laminado com diferentes orientações de fibra



Fonte: REDDY, 2004.

2.1.2 Elasticidade linear

Uma das primeiras hipóteses usada na teoria dos materiais compósitos é que eles se comportam de forma elástica e linear – são duas definições distintas: o comportamento elástico significa que o corpo não sofrerá alterações permanentes nas suas formas e dimensões originais se um carregamento for aplicado e depois retirado do mesmo. Já o comportamento linear pode ser entendido como uma relação linear entre o carregamento e a resposta da estrutura, ou seja, seu deslocamento (MENDONÇA, 2005).

Como a teoria da elasticidade linear é muito ampla, esse subcapítulo começará com uma abordagem geral de conceitos básicos como a definição do tensor tensão, da relação deformação-deslocamento, da Lei de Hooke para materiais isotrópicos e estado plano de

tensões. A partir daí ela será específica para o caso apresentado nesse estudo, ou seja, a teoria da elasticidade linear aplicada em laminados feitos de matérias compósitos.

2.1.2.1 Tensões

Tensões representam a magnitude das forças internas de um corpo atuantes sobre uma área que passa por um ponto (HIBBELER, 2010). É válido citar que estas forças se originam na estrutura quando a mesma está sob ação de forças externas. Matematicamente, tem-se que:

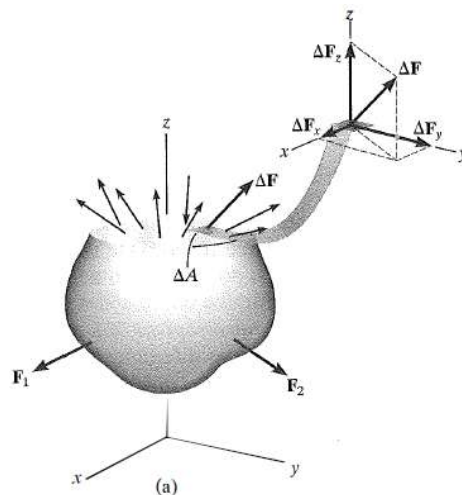
$$\sigma_{ii} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A} \quad (1)$$

e

$$\tau_{ij} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A}, \quad (2)$$

onde σ_{ii} é a tensão normal ao eixo i , ou seja, a força F_i é perpendicular ao plano específico de área ΔA . Já τ_{ij} é a tensão cisalhante ao eixo i , logo, a força F_j é paralela ao plano de área ΔA . Como nas tensões normais os subíndices se repetem, estas são usualmente apresentadas com apenas um subíndice. A Figura (3) ilustra o caso anterior:

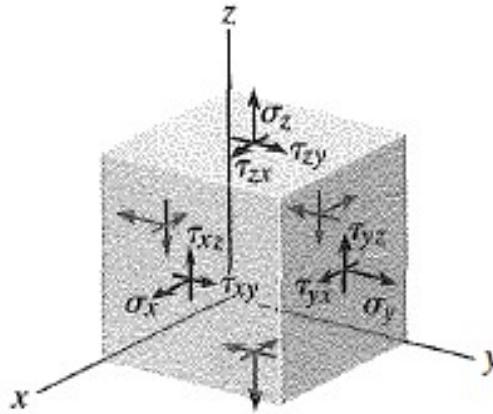
Figura 3 - Forças internas num plano específico que passa por um ponto



Fonte: HIBBELER, 2010.

Analisando-se agora um elemento diferencial que circunda um ponto P ao invés de um plano de área passante, como representado na Figura (4), tem-se:

Figura 4 - Elemento diferencial submetido a tensões normais e cisalhantes



Fonte: HIBBELER, 2010.

Nota-se que, agora, são seis faces com 3 componentes de tensões em cada, definindo um conjunto de 18 componentes no total. Como as tensões em faces opostas tem a mesma denominação, reduz-se o total de tensões no elemento para 9. Essas nove componentes compõem uma entidade matemática denominada tensor de segunda ordem (MENDONÇA, 2005). Elas podem ser organizadas em forma matricial como:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

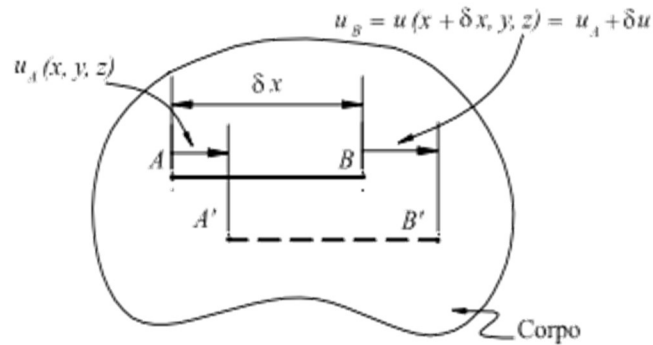
Como o elemento diferencial da Figura (4) deve estar em equilíbrio, ou seja, o somatório das forças e dos momentos atuantes sobre ele deve ser zero, o tensor tensão deve ser simétrico. Essa condição implica que: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Logo, para se determinar o estado de tensões num ponto, deve-se conhecer as seis componentes do tensor tensão em relação a um sistema cartesiano qualquer.

2.1.2.2 Deslocamentos e deformações

Quando um corpo qualquer está sujeito a forças, estas tendem a modificar o formato e o tamanho do mesmo. As mudanças ocorridas no corpo são denominadas deformações (HIBBELER, 2010).

Os deslocamentos, por outro lado, são definidos com a variação da posição de um mesmo ponto do corpo. Para se determinar a relação entre as deformações sofridas por um corpo e os deslocamentos dos pontos que constituem o mesmo, pode-se analisar a Figura (5).

Figura 5 - Representação dos deslocamentos dos pontos A e B e deformação normal sofrida nesse segmento



Fonte: MENDONÇA, 2005.

Todos os equacionamentos apresentados a seguir para definir as equações que definem as deformações do corpo estão de acordo com Mendonça (2005). Pode-se determinar o deslocamento de um ponto qualquer $\{Q\} = \{x + \delta_x, y, z\}$ em relação a um ponto próximo $\{P\} = \{x, y, z\}$, como a expansão em série de Taylor de $u(x, y, z)$, da seguinte forma:

$$u(x + \delta_x, y, z) = u(x, y, z) + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \delta x + \text{Erro}, \quad (4)$$

ou

$$\{Q\} = \{P\} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \delta x + \text{Erro}, \quad (5)$$

onde o *Erro* é proveniente do truncamento da série. Porém, considerando-se deslocamentos pequenos, o erro não ocorrerá, resultando assim numa teoria linear. Definindo agora a variação do comprimento da componente x do segmento \overline{PQ} , tem-se:

$$\delta_u|_x = u(x + \delta_x, y, z) - u(x, y, z). \quad (6)$$

Comparando a relação anterior com a equação (4), sem o termo do erro de truncamento, tem-se que:

$$\delta_u|_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \delta x. \quad (7)$$

Então, define-se como a deformação específica na direção x como:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_u|_x}{\delta x} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}. \quad (8)$$

O termo ε_x da expressão (8) pode ser visto como uma variação do comprimento de um segmento de reta dividido pelo seu comprimento inicial, com esse comprimento possuindo dimensões infinitesimais (MENDONÇA, 2005).

A abordagem de Hibbeler (2010) para determinar ε_x é mais simples. Primeiramente, considera-se que o segmento formado pelos pontos A e B da Figura (5) são paralelos ao eixo x na sua configuração inicial e final. Pela Figura (5), nota-se que o comprimento inicial do segmento \overline{AB} é δ_x e seu comprimento final é $\delta_x + \delta_u$, com $\delta_x = u_A - u_B$. Pode-se definir a deformação média, como:

$$\varepsilon_{méd} = \frac{\delta_x + \delta_u}{\delta_x} - \frac{\delta_x}{\delta_x}. \quad (9)$$

Aplicando o conceito de limite na equação anterior, com $\delta_x \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\varepsilon_x = \lim_{\delta_x \rightarrow 0} \frac{\delta_u}{\delta_x} = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}. \quad (10)$$

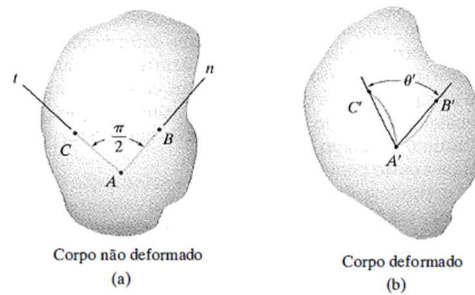
Repetindo-se o procedimento anterior, define-se as componentes de deformações específicas normais como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}, \quad (11)$$

onde $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ são as funções dos deslocamentos nos eixos y e z, respectivamente.

Para a caracterização completa do estado de deformações de um ponto, precisa-se determinar ainda as três deformações angulares do mesmo. Estas são definidas, segundo Hibbeler (2010), como a mudança que ocorre no ângulo entre dois segmentos de reta que eram originalmente perpendiculares. A Figura (6) expressa melhor essa relação.

Figura 6 - Representação esquemática da deformação angular



Fonte: HIBBELER, 2010.

Considerando que $t = y$, $n = x$ e deslocamentos suficientemente pequenos, as deformações dos segmentos AC e AB em relação aos eixos perpendiculares serão: $\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} dy$ para AC e $\varepsilon_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} dx$ para AB.

Como se trata de deslocamentos pequenos, pode-se considerar que: $s = \theta \cdot r$, onde s são as deformações apresentadas anteriormente, r são os comprimentos diferenciais e θ as rotações dos segmentos. Ou seja, os ângulos de variações podem ser aproximados por $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$, para o segmento AC e AB, respectivamente. Logo, o segmento AC rotacionou $\frac{\partial u}{\partial y}$ e o segmento AB $\frac{\partial v}{\partial x}$. Portanto, a deformação angular γ_{xy} será a variação angular total sofrida pelos segmentos, dada por:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (12)$$

Analogamente, define-se as outras duas deformações angulares faltantes, γ_{xz} e γ_{yz} . Assim, o conjunto completo das relações deformações-deslocamentos lineares é:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad e \quad (13)$$

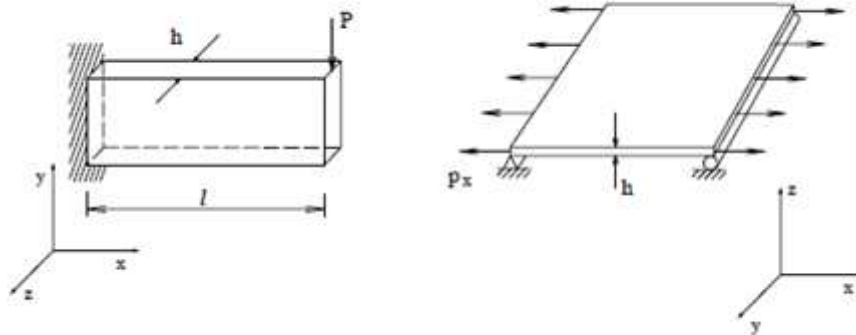
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (14)$$

Definidos os conceitos de tensão e deformação, necessita-se determinar como estas componentes se relacionam. Para isto, a Lei de Hooke será abordada em sequência.

2.1.2.3 Estado Plano de Tensões (EPT)

Se um corpo plano de espessura h bem menor que qualquer uma das dimensões do plano for carregado por forças paralelas ao plano e distribuídas uniformemente ao longo da espessura, as componentes transversais de tensão são nulas em ambas as faces do corpo (MENDONÇA, 2005). A Figura (7) mostra exemplos de corpos que podem ser considerados em EPT.

Figura 7 - Corpos finos submetidos a forças paralelas ao plano



Fonte: Adaptado de FONSECA, 2002.

De acordo com Fonseca (2002), as condições citadas permitem o uso da aproximação segundo a qual não ocorre variação das tensões na direção z , podendo-se desconsiderar as tensões σ_{zz} , τ_{xz} e τ_{yz} , ou seja,

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (15)$$

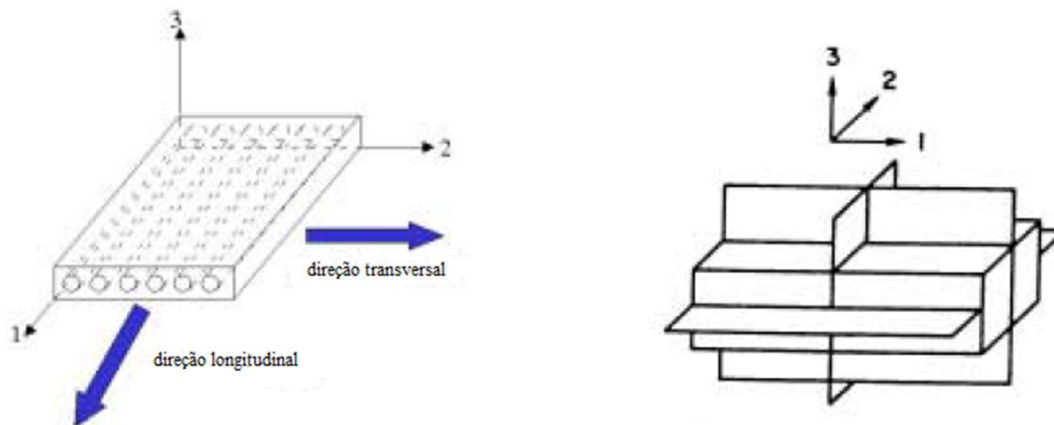
Assim, o tensor tensão, apresentado pela equação (3) terá apenas 3 componentes a serem determinadas, σ_x , σ_y e τ_{xy} . Como estas tensões são funções de x e y , isto implica que a deformação ε_z também será função das componentes de deformação em x e y .

2.1.2.4 Material ortotrópico

Tita (2006) cita que lâminas de material compósito polimérico com reforços fibrosos caracterizam-se como materiais ortotrópicos. De acordo com essa definição, conclui-se que as placas estudadas pertencem à esta classe de materiais. Os materiais ortotrópicos possuem dois planos ortogonais de simetria de propriedades que são, necessariamente, relativamente simétricos ao terceiro plano mutuamente ortogonal a estes dois. (MENDONÇA, 2005).

Estes planos simétricos caracterizam relações específicas entre as propriedades de engenharia e entre as tensões e deformações normais e cisalhantes de cada direção (direções genéricas 1-2-3 num sistema cartesiano). A Figura (8) a seguir representa uma lâmina de um material ortotrópico e os planos simétricos ortotrópicos.

Figura 8 - Lâmina ortotrópica representada num plano cartesiano 1-2-3 (esquerda) e planos ortotrópicos (direita)



Fonte: TITA, 2006.

2.1.2.5 Relações tensão-deformação - Lei de Hooke

As relações entre as componentes de tensão e as de deformação dependem do tipo de material e em geral só podem ser obtidas experimentalmente (MENDONÇA, 2005). Conhecidas também como Lei de Hooke, estas relações são definidas, para um material genérico com comportamento linear definido num plano cartesiano 1-2-3, conforme a Figura (8).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = [C]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}, \quad (16)$$

com a matriz $[C]$ sendo a matriz de rigidez do material. Para um material ortotrópico, a relação tensão-deformação é simplificada, a matriz $[C]$ passa a possuir somente os termos da diagonal principal e C_{12} , C_{13} , C_{23} , C_{21} , C_{31} , C_{32} (MENDONÇA, 2005). Os outros termos da matriz são nulos.

Pode-se simplificar ainda mais a matriz de rigidez $[C]$ do material. Para isto, deve-se considerar que as placas estão sob estado plano de tensões. Com esta consideração, as relações tensão-deformação que restam são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

com Q_{ij} sendo definidos como:

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 \cdot E_2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 \cdot E_2}, \quad Q_{22} = \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 \cdot E_2} \text{ e } Q_{66} = G_{12}. \quad (18)$$

Nota-se que os termos C_{ij} foram renomeados para Q_{ij} , nomenclatura comumente usada para laminados. Os termos presentes nos termos Q_{ij} são:

- E_1 : Módulo de Young na direção longitudinal das lâminas;
- E_2 : Módulo de Young na direção transversal das lâminas, mas no mesmo plano da lâmina;
- G_{12} : Módulo de elasticidade cisalhante, paralelo ao plano da lâmina, medido no plano 1-2;
- ν_{12} : Coeficiente de Poisson longitudinal, paralelo ao plano da lâmina, medido no plano 1-2.

Para uma lâmina ortotrópica no EPT, além das quatro relações apresentadas na equação (18), ainda se tem a relação de reciprocidade, dada por:

$$v_{21} = v_{12} \frac{E_2}{E_1}. \quad (19)$$

Para um melhor entendimento das propriedades de engenharia presentes nas relações (18) e (19), aconselha-se a consulta à Mendonça (2005) e Tita (2006), nos capítulos 3 e 2, respectivamente.

Como as placas são constituídas de lâminas com diferentes orientações de fibras, faz-se necessário definir a relação de tensão-deformação para lâminas com orientação diferente da direção principal 1. Para isto, o sistema deve ser rotacionado em relação ao ângulo θ das fibras. Dito isto, pode-se definir as tensões na direção θ em função das direções principais (1-2-3), como sendo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

onde $[T]$ é a matriz de transformação, dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2.\sin\theta.\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2.\sin\theta.\cos\theta \\ -\sin\theta.\cos\theta & \sin\theta.\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (21)$$

De acordo com Mendonça (2005), as deformações transformam-se de forma similar às tensões, porém, deve-se considerar somente a metade da deformação angular, como representado na equação (22) a seguir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Após alguns arranjos algébricos, que podem ser encontrados no capítulo 4 de Mendonça (2005), tem-se finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

com as componentes da matriz $[\bar{Q}]$ sendo:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta, \quad (24)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta, \quad (25)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta), \quad (26)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta), \quad (27)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta, \quad (28)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta. \quad (29)$$

Apesar dos subíndices numéricos, os termos \bar{Q}_{ij} referem-se aos eixos do sistema x-y-z, orientado de acordo com θ .

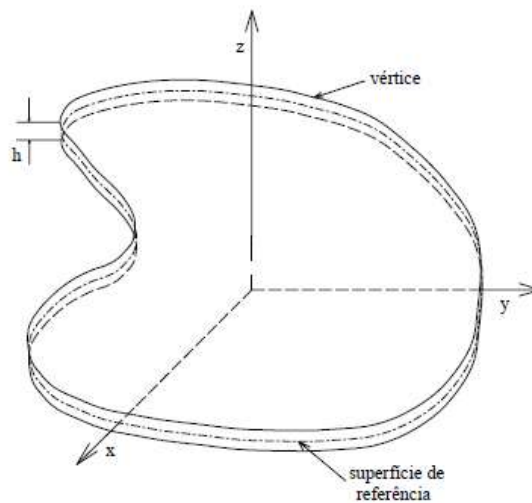
Finalmente, com a matriz $[\bar{Q}]$ definida, pode-se entrar na teoria clássica dos laminados, que rege as relações da placa como um conjunto de lâminas com diferentes ângulos de fibras.

2.1.3 Teoria clássica dos laminados

Pode-se separar as diversas teorias existentes para placas em duas categorias: teorias baseadas em camada equivalente única e em camadas equivalentes discretas (FARIA, 2006). Dentre estas, utilizou-se nesse estudo a teoria clássica dos laminados (TCL) como base, que se enquadra na primeira categoria citada.

Na TCL, uma placa é formada por três elementos básicos: superfície de referência, vértices e espessura, conforme representado na Figura (9).

Figura 9 - Elementos básicos de uma placa conforme a teoria clássica dos laminados



Fonte: FONSECA, 2002.

A TCL baseia-se nas hipóteses cinemáticas de Kirchhoff empregadas no estudo de placas (FARIA, 2006). Fonseca (2002), lista em seu trabalho quatro hipóteses de Kirchhoff, sendo elas:

1. A placa é considerada fina e sua espessura é constante;
2. As deflexões da placa são pequenas, comparadas com sua espessura;
3. A tensão normal transversal σ_{zz} é desprezada;
4. As normais à superfície de referência indeformada da placa permanecem normais à superfície de referência deformada e não sofrem variações de comprimento.

normais à superfície de referência deformada e não sofrem variações de comprimento.

Faria (2006), lista ainda mais cinco hipóteses. Estas agora relacionadas à materiais compósitos laminados de fato:

5. As lâminas são perfeitamente coladas umas nas outras, isto é, não ocorre deslizamento ou descolamento entre elas;
6. Os deslocamentos são contínuos através das lâminas;
7. O material de cada camada exibe comportamento linearmente elástico;
8. O laminado é considerado delgado, ou seja, as camadas da placa composta são relativamente finas em relação às suas dimensões superficiais.
9. O material de cada lâmina tem dois planos de simetria (material ortotrópico).

De acordo com Fonseca (2002), as equações (30), (31) e (32) a seguir representam os deslocamentos aproximados dos pontos da placa. Estas equações são decorrentes da hipótese número quatro e são representadas por:

$$u_x(x, y, z, t) \cong u^o(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t), \quad (30)$$

$$u_y(x, y, z, t) \cong v^o(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t), \quad (31)$$

$$u_z(x, y, z, t) \cong w(x, y, t), \quad (32)$$

onde u_x , u_y e u_z são os deslocamentos nos respectivos eixos de um ponto genérico da placa. Já u^o e v^o são as coordenadas de um ponto qualquer sobre a superfície de referência. $z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ e $z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$ são os deslocamentos coplanares, variáveis com z , associados à flexão. Por fim, a última equação é consequência da inextensividade do segmento normal.

Considerando agora a hipótese de que as deformações e rotações são relativamente pequenas, tem-se que as relações deformação-deslocamento são dadas pelas equações (13) e (14). Substituindo-se então os deslocamentos das equações (30), (31) e (32) em (13) e (14) obtém-se:

$$\varepsilon_x(x, y, z, t) = \frac{\partial u^o(x, y, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2}, \quad (33)$$

$$\varepsilon_y(x, y, z, t) = \frac{\partial v^o(x, y, t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad (34)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z, t) = \frac{\partial u^o(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v^o(x, y, t)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (35)$$

Mendonça (2005) afirma que os termos que envolvem as derivadas parciais de w possuem significados físicos diferentes dos outros termos presentes do lado direito das três equações anteriores. Desta forma, define-se como as deformações da membrana $\{\varepsilon^o\}$ as deformações coplanares da superfície de referência, sendo elas:

$$\{\varepsilon^o\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^o}{\partial x} \\ \frac{\partial v^o}{\partial y} \\ \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

Feito isto, pode-se definir as curvaturas da superfície de referência $\{\kappa\}$ com os termos restantes das equações, determinando assim a flexão da superfície de referência, da forma:

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (37)$$

Dessa forma, pode-se escrever as equações (33), (34) e (35) da maneira:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon^o\} + z\{\kappa\}. \quad (38)$$

Substituindo o vetor $\{\varepsilon\}$ na relação tensão-deformação definida por (23) e considerando um conjunto com k lâminas, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{lk} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{61}} & \overline{Q_{62}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (39)$$

Nota-se que os valores de $\{\varepsilon^o\}$ e $\{\kappa\}$ são constantes ao longo da espessura do laminado, sendo, portanto, independentes do número k de ordem da lâmina. Entretanto, cada lâmina possui suas propriedades elásticas próprias representadas por $[Q_{ij}^k]$ (MENDONÇA, 2005). Dessa forma, cada lâmina pertencente ao laminado produz tensões que diferem das geradas em outras lâminas.

Calculando-se agora os esforços normais e de momentos por unidade de comprimento ($\{N\}$ e $\{M\}$, respectivamente) para cada lâmina, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{lk} dz \left[\frac{N}{m} \right], \quad (40)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{lk} z dz \left[\frac{N \cdot m}{m} \right], \quad (41)$$

onde N é o número de lâminas e z_k é a distância da superfície média da lâmina em questão até a superfície de referência do laminado. Substituindo nas relações anteriores a equação (39) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{61}} & \overline{Q_{62}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \right], \quad (42)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{61}} & \overline{Q_{62}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \right]. \quad (43)$$

Realizando-se as interações e os somatórios, e acoplando os dois vetores, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{3 \times 3} & B_{3 \times 3} \\ B_{3 \times 3} & D_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} = [E]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}, \quad (44)$$

com A, B e D sendo definidos como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}}^k h_k, \quad (45)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}}^k h_k \overline{z}_k, \quad (46)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}}^k \left(h_k \overline{z}_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right), \quad (47)$$

com h_k sendo a espessura da lâmina k e \overline{z}_k sendo a cota da superfície média da lâmina, dado por:

$$\overline{z}_k = \frac{(z_{k-1} + z_k)}{2}. \quad (48)$$

Segundo Mendonça (2005), a matriz [A] é chamada de matriz de rigidez extensional, [B] é a matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e extensão e [D] é a matriz de rigidez à

flexão. A matriz $[E]$ é a matriz completa de rigidez do laminado. $[A]$, $[B]$ e $[D]$ são simétricas. Vale ressaltar que as unidades envolvidas nos termos apresentados são:

- $\{N\}$ e $[A]$ estão em N/m;
- $\{M\}$ e $[B]$ estão em N.m/m;
- $[D]$ está em N.m;
- $\{\varepsilon^o\}$ está em m/m e;
- $\{\kappa\}$ está em 1/m.

Os materiais utilizados nessa pesquisa constituem laminados simétricos. Essa condição garante a ausência do acoplamento extensão-flexão, $[B] = [0]$ (MENDONÇA, 2005). Logo, a matriz $[E]$ é dada por:

$$[E]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Será partindo desta matriz que o programa Altair Hyperworks irá solucionar as análises presentes nessa pesquisa, através do método dos elementos finitos, que será apresentado no subcapítulo 2.2.

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Análise de elementos finitos (AEF) - ou método dos elementos finitos (MEF) - é um procedimento numérico para determinar soluções de problemas de campo. Neste tipo de problema necessita-se que se determine a distribuição espacial das variáveis dependentes. Matematicamente, um problema de campo é descrito por equações diferenciais ou por uma expressão integral (COOK *et al.*, 2002).

No ramo da engenharia, o MEF é amplamente aplicado para a solução de variados tipos de problemas, relacionados à: elasticidade, transferência de calor, escoamento de fluidos, dentre outros (BARKANOV, 2001). Para essa pesquisa, utilizou-se a análise de elementos finitos para determinar os modos de vibração e as funções de resposta em frequência de placas retangulares feitas de carbono-epóxi.

O princípio do método dos elementos finitos é discretizar as estruturas simuladas em partes menores, os elementos, podendo estes possuírem as mais variadas formas geométricas.

Esta divisão, que transforma a estrutura contínua num sistema discreto, gera uma malha destes elementos e tem como objetivo, de acordo com Fonseca (2002), obter componentes cujas soluções são mais simples e, depois, unir essas soluções parciais para obter a solução do conjunto completo.

A determinação do tipo de elemento bem como o seu tamanho está diretamente vinculada à geometria da estrutura real simulada. Cabe à pessoa que fará a análise determinar qual melhor elemento se aplica à sua necessidade. É importante citar também que os elementos possuem uma certa quantidade de nós e, que são os valores de deslocamentos e angulações destes, que serão utilizados na aplicação do método sobre uma estrutura.

2.2.1 História do MEF

Os fundamentos matemáticos do método dos elementos finitos foram desenvolvidos ao longo dos séculos, porém, vale ressaltar a contribuição de Ritz, que desenvolveu um método efetivo para a solução aproximada de problemas na mecânica de sólidos deformáveis (BARKANOV, 2001).

Alguns anos depois, por volta de 1955, Argyris e Kelsey publicaram uma série de trabalhos nos quais a formulação desenvolvida por Ritz se tornou definitiva e foi aplicada para analisar, principalmente, fuselagens e asas de aviões, simulando-as como constituídas por barras e painéis (ASSAN, 2003).

Logo após a publicação do trabalho de Argyris e Kelsey, a formulação atual do MEF foi estabelecida, segundo Assan (2003), com a publicação do trabalho de Turner, Clough, Martin e Topp, em 1956.

Apesar dos fundamentos matemáticos do MEF já serem conhecidos nos anos 50, sua aplicação era inviável, pois não existiam ferramentas de cálculo adequadas para resolver os equacionamentos matemáticos do método até o surgimento dos primeiros computadores.

Atualmente, existem diversos programas computacionais onde o usuário pode utilizar o método dos elementos finitos para efetuar simulações no campo da engenharia. Nessa pesquisa, o programa computacional utilizado foi o Altair – Hyperworks, versão 14.

2.2.2 Utilização do MEF nos casos estudados

Nesse subcapítulo serão apresentadas as formulações para o movimento dinâmico de laminados e dos elementos de placa de Lagrange e Hermite. Também serão mostrados os

detalhes para a obtenção da equação da placa quando a mesma for discretizada, partindo-se das funções de interpolação dos elementos até a obtenção das matrizes de massa, rigidez e força externa nodal.

2.2.2.1 Equacionamento dinâmico para laminados

Antes de abordar o equacionamento para os modelos simulados, apresenta-se a seguir o funcionamento genérico do MEF. O passo-a-passo a seguir foi adaptado de Reddy (2004, p.488).

1. Integral ponderada ou formulação “fracá” da equação diferencial sobre um elemento finito típico;
2. Desenvolvimento do modelo de elementos finitos do problema usando a integral ponderada ou a formulação “fracá”. Consiste num conjunto de equações algébricas entre os parâmetros desconhecidos do elemento;
3. Discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos. (Geração da malha);
4. Junção dos elementos finitos para obter o sistema global de equações algébricas;
5. Imposição das condições de contorno;
6. Solução das equações;
7. Pós-processamento da solução a fim de se obter os parâmetros desejados.

Seguindo-se a recomendação anterior, deve-se determinar as equações sobre o elemento finito típico, nesse caso, o elemento de placa linear isoparamétrico, para que se possa desenvolver o modelo do problema pela junção dos elementos em que as placas foram discretizadas, obtendo assim o conjunto de equações que rege o problema.

Para isto, o ponto de partida será a equação do movimento de Kirchhoff, apresentado por Mendonça (2005, p.407) como:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_o \frac{d^2 u^o}{dt^2}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho_o \frac{d^2 v^o}{dt^2}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + q = \rho_o \frac{d^2 w}{dt^2}, \quad (52)$$

onde N e M são os esforços definidos no subcapítulo 2.1.3 e ρ_o é a densidade do laminado. Aplicando as hipóteses de elasticidade linear, ou seja, considerando pequenos deslocamentos, pode-se ignorar o termo entre colchetes da equação acima (MENDONÇA, 2005).

Como no MEF as equações diferenciais que regem o problema devem ser descritas por equações aproximadas, aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) nas equações (50), (51) e (52) a fim de se obter a formulação fraca do problema. A diferença entre esta nova formulação e a anterior é que a formulação fraca possui restrições e sua solução só será igual à solução das equações anteriores sob determinadas condições.

A aplicação do PTV consiste em multiplicar o conjunto de equações acima por funções peso $\hat{u}(x, y)$ na primeira linha, $\hat{v}(x, y)$ na segunda linha e $\hat{w}(x, y)$ na terceira, adicionar umas às outras e integrar no domínio Ω da placa, formando a função escalar V , descrita pela equação (53) (MENDONÇA, 2005).

$$V = \int_{\Omega} \left\{ \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \{-q\hat{w} + F_x\hat{u} + F_y\hat{v} + F_z\hat{w}\} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \{\bar{X}\hat{u} + \bar{Y}\hat{v} + \bar{V}_n^*\hat{w} - \bar{M}_n \frac{\partial \hat{w}}{\partial n}\} d\Gamma = 0, \quad (53)$$

onde os termos \hat{u} , \hat{v} e \hat{w} também são conhecidos como deslocamentos virtuais. Já o vetor $\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}$ representa as deformações virtuais.

Desconsiderando-se os termos referentes aos carregamentos coplanares e isolando o termo $-q \cdot \hat{w}$ da segunda integral, reescreve-se a equação (53) como:

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \{F_x\hat{u} + F_y\hat{v} + F_z\hat{w}\} d\Omega = \int_{\Omega} q\hat{w} d\Omega. \quad (54)$$

Os termos F_i são as forças de inércia por unidade de área e são escritas conforme a equação (55).

$$F_x = \rho_o \frac{d^2 u^o}{dt^2}, \quad F_y = \rho_o \frac{d^2 v^o}{dt^2}, \quad F_z = \rho_o \frac{d^2 w}{dt^2}. \quad (55)$$

Escrevendo-se a integral I dos termos de inércia em função dos deslocamentos virtuais da superfície de referência da placa:

$$I = \int_{\Omega} [\rho_o(\hat{u}^o\ddot{u}^o + \hat{v}^o\ddot{v}^o + \hat{w}\ddot{w})] d\Omega. \quad (56)$$

De forma compacta, pode-se escrever I como

$$I = \int_{\Omega} \{\hat{u}\}^t [m] \{\ddot{u}\} d\Omega. \quad (57)$$

Substituindo a relação dos esforços N e M do laminado, tem-se

$$\int_{\Omega} \left\{ \left\{ [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} \right\}^t \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \{\hat{u}\}^t [m] \{\ddot{u}\} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{w} q(x, y, t) d\Omega. \quad (58)$$

Transpondo o vetor das deformações virtuais $\begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}$, passando-o pré-multiplicando a matriz $[E]$, escrita agora em função dos seus componentes, tem-se a forma final da formulação fraca.

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \{\hat{u}\}^t [m] \{\ddot{u}\} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{w} q(x, y, t) d\Omega. \quad (59)$$

Definida a formulação fraca para placa delgada sob a TCL, para carregamentos dinâmicos, pode-se agora deduzir todo o equacionamento utilizado no MEF para a resolução da mesma. Para uma dedução mais completa do equacionamento apresentado neste subcapítulo, aconselha-se a consulta ao Capítulo 11 de Mendonça (2005).

2.2.2.2 Funções de interpolação para placas

Encontrada a equação que rege o problema, pode-se agora discretizar o mesmo em elementos finitos a fim de facilitar sua solução. O objetivo é escrever esta equação em função dos nós dos elementos. Para isto, primeiramente subdivide-se o domínio da superfície da placa Ω em ne elementos, cada um com seu domínio da superfície Ω^e (MENDONÇA, 2005).

A seguir, deve-se estipular funções aproximadas para os deslocamentos da superfície de referência da placa, u^o , v^o e w , em função dos deslocamentos e rotações dos nós do elemento.

De acordo com Reddy (2004), para os dois primeiros, usa-se as funções de interpolação de Lagrange, que relacionam u^o, v^o de qualquer ponto do elemento em função dos deslocamentos u_{no} e v_{no} , respectivamente. Já para w , deve-se usar as funções de interpolação de Hermite, que relaciona w de qualquer ponto do elemento em função não só dos deslocamentos w_{no} , mas também das rotações $\frac{\partial w_{no}}{\partial x}$ e $\frac{\partial w_{no}}{\partial y}$, nos eixos x e y , respectivamente. De maneira geral, tem-se:

$$u^o(x, y, t) \cong \sum_{j=1}^m u_j^e(t) \psi_j^e(x, y), \quad (60)$$

$$v^o(x, y, t) \cong \sum_{j=1}^m v_j^e(t) \psi_j^e(x, y), \quad (61)$$

$$w(x, y, t) \cong \sum_{k=1}^m \Delta_k^e(t) \varphi_k^e(x, y), \quad (62)$$

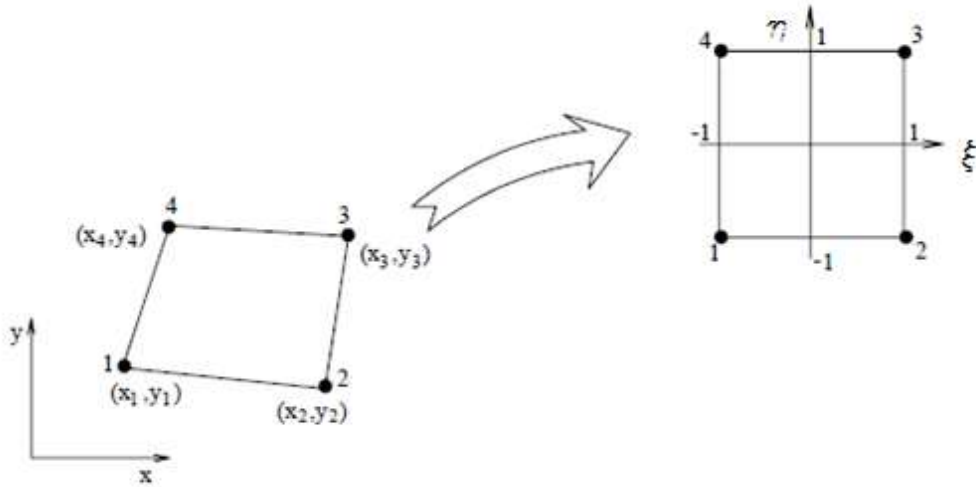
onde (u_j^e, v_j^e) são os valores nodais do j -ésimo nó dos elementos de Lagrange, Δ_k^e é o valor de w e suas derivadas em relação à x e y do k -ésimo nó, e ψ_j^e e φ_k^e são as funções de interpolação de Lagrange e Hermite, respectivamente (REDDY, 2004). É válido citar que as funções de interpolação têm como característica serem iguais a 1 no grau de liberdade em que atuam e 0 nos demais.

O elemento de placa utilizado nessa pesquisa é retangular e possui 4 nós, logo, tanto para as funções de Lagrange como para as de Hermite este será o elemento base, cada um com suas características, obviamente.

2.2.2.2.1 Funções de interpolação de Lagrange

Para se determinar as funções de interpolação de Lagrange, usa-se como base a Figura (10), que representa o elemento utilizado e seu mapeamento para o respectivo elemento mestre.

Figura 10 - Elemento de placa linear (esquerda) e elemento-mestre (direita)



Fonte: Adaptado de FONSECA, 2002.

Para este elemento, as funções de interpolação têm a forma:

$$\psi_j^e(x, y) = a_j + b_j x + c_j y + d_j x \cdot y, \quad (63)$$

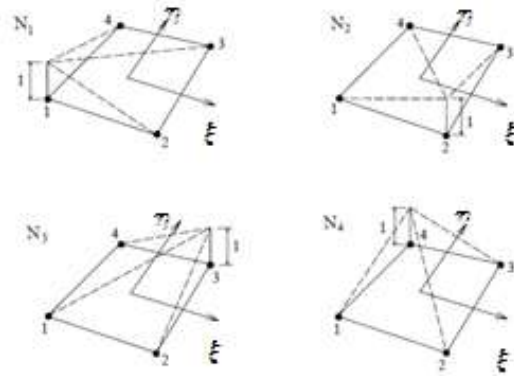
com $j=1, 2, 3$ ou 4 .

Para uma abordagem inicial mais clara, faz-se necessário mapear as funções de interpolação em termos do elemento-mestre. Reescrevendo então $\psi_j^e(x, y)$ em termos de η e ξ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \\ \psi_3^e \\ \psi_4^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \end{Bmatrix}. \quad (64)$$

A Figura (11) exemplifica o comportamento dessas funções de interpolação.

Figura 11 - Modelo de distribuição das funções de interpolação de Lagrange



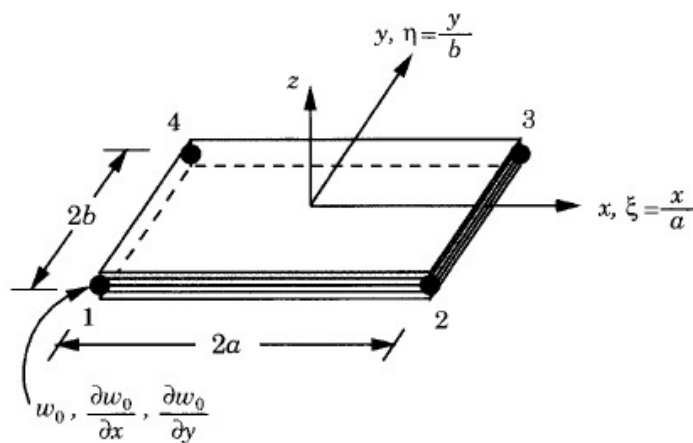
Fonte: Adaptado de FONSECA, 2002.

Determinadas as funções de Lagrange em termos do elemento-mestre, deve-se agora realizar um procedimento análogo para a determinação das funções de Hermite.

2.2.2.2.2 Funções de interpolação de Hermite

Há dois tipos de elementos de placas, os conformes e os não-conformes. No primeiro caso, a continuidade entre elementos é satisfeita para w , $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$. Já os elementos não-conformes essa continuidade não é cumprida. (REDDY, 2004). O elemento base não-conforme utilizado para a determinação de $\varphi_k^e(x, y)$ é representado na Figura (12).

Figura 12 - Elemento de Hermite quadrilátero com quatro nós



Fonte: REDDY, 2004.

Este elemento apresenta como variáveis nodais w , θ_x e θ_y , onde os dois últimos representam as derivadas parciais de w em relação a x e y , respectivamente. De maneira geral, pode-se escrever $\varphi_k^e(x, y)$ em função das coordenadas do elemento-mestre e , também, pode-se separar as funções pelos graus de liberdade do elemento, ou seja, representar as funções que representam w , θ_x e θ_y separadamente, da seguinte forma:

$$\varphi_i^e = g_{i1}(i = 1,4,7,10), \quad \varphi_i^e = g_{i2}(i = 2,5,8,11), \quad \varphi_i^e = g_{i3}(i = 3,6,9,12), \quad (65)$$

onde:

$$g_{i1} = \frac{1}{8}(1 + \xi_o)(1 + \eta_o)(2 + \xi_o + \eta_o - \xi^2 - \eta^2), \quad (66)$$

$$g_{i2} = \frac{1}{8}\xi_i(\xi_o - 1)(1 + \eta_o)(1 + \xi_o)^2, \quad (67)$$

$$g_{i3} = \frac{1}{8}\eta_i(\eta_o - 1)(1 + \xi_o)(1 + \eta_o)^2, \quad (68)$$

com $\xi = \frac{x-x_c}{2a}$, $\eta = \frac{y-y_c}{2b}$, $\xi_o = \xi \cdot \xi_i$ e $\eta_o = \eta \cdot \eta_i$, onde $2a$ e $2b$ são os lados do elemento e (x_c, y_c) são as coordenadas globais do centro do elemento. Ainda, tem-se que g_{i1} refere-se à w , g_{i2} à θ_x e g_{i3} à θ_y .

2.2.2.3 Matriz de rigidez, matriz de inércia e vetor de força nodal

2.2.2.3.1 Matriz de rigidez

Estabelecidas as funções de interpolação para o elemento, pode-se agora escrever as deformações ε^o e κ em termos dos deslocamentos nodais. Porém, como as mesmas foram obtidas em termos do elemento-mestre, faz-se necessário obtê-las em função das coordenadas globais x e y . Esta conversão será abordada em breve, porém, assume-se por ora que as funções em termos das coordenadas x e y já são conhecidas.

Substituindo as formulações aproximadas de u^o e v^o , dadas pelas equações (60) e (61), nas relações de deformação ε^o , definidas no subcapítulo 2.1.3 pela fórmula (36), obtém-se:

$$\varepsilon_x^o = \frac{\partial u^o}{\partial x} = \sum_{j=1}^4 u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial x}, \quad (69)$$

$$\varepsilon_y^o = \frac{\partial v^o}{\partial y} = \sum_{j=1}^4 v_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial y}, \quad (70)$$

$$\gamma_{xy}^o = \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} = \sum_{j=1}^4 \left[u_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial y} + v_j^e(t) \frac{\partial \psi_j^e(x, y)}{\partial x} \right]. \quad (71)$$

Escrevendo as relações anteriores na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & 0 & \psi_{2,x} & 0 & \psi_{3,x} & 0 & \psi_{4,x} & 0 \\ 0 & \psi_{1,y} & 0 & \psi_{2,y} & 0 & \psi_{3,y} & 0 & \psi_{4,y} \\ \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & \psi_{2,y} & \psi_{2,x} & \psi_{3,y} & \psi_{3,x} & \psi_{4,y} & \psi_{4,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \quad (72)$$

onde os termos $\psi_{j,a}$ são as derivadas parciais da função de interpolação referente ao nó j em relação ao eixo a .

Trabalhando agora com as deformações definidas por κ , substitui-se a equação aproximada de w nas relações presentes neste vetor a fim de se obter um equacionamento parecido com o anterior.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^4 \Delta_k^e(t) \frac{\partial^2 \varphi_k^e(x, y)}{\partial x^2}, \quad (73)$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_{k=1}^4 \Delta_k^e(t) \frac{\partial^2 \varphi_k^e(x, y)}{\partial y^2}, \quad (74)$$

$$\kappa_{xy} = -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2 \cdot \sum_{k=1}^4 \Delta_k^e(t) \frac{\partial^2 \varphi_k^e(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (75)$$

Antes de se escrever as relações anteriores na forma matricial, optou-se por renomear as funções de interpolação de Hermite com o intuito de simplificar a construção da matriz. As

novas nomenclaturas foram separadas pelo grau de liberdade que atuam e são apresentadas na sequência.

$$\varphi_{wi} = \mu_i, \quad \varphi_{\theta xi} = \phi_i, \quad \varphi_{\theta yi} = \chi_i, \quad (76)$$

onde $i=1,2,3$ ou 4 , φ_w representa as funções relacionadas aos graus de liberdade de w , $\varphi_{\theta x}$ representa as funções relacionadas à $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\varphi_{\theta y}$ representa as funções relacionadas à $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Montando então, as equações (73), (74) e (75) matricialmente.

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mu_{1,xx} & \phi_{1,xx} & \chi_{1,xx} & \mu_{2,xx} & \phi_{2,xx} & \chi_{2,xx} & \mu_{3,xx} & \phi_{3,xx} & \chi_{3,xx} & \mu_{4,xx} & \phi_{4,xx} & \chi_{4,xx} \\ \mu_{1,yx} & \phi_{1,yx} & \chi_{1,yx} & \mu_{2,yx} & \phi_{2,yx} & \chi_{2,yx} & \mu_{3,yx} & \phi_{3,yx} & \chi_{3,yx} & \mu_{4,yx} & \phi_{4,yx} & \chi_{4,yx} \\ 2\mu_{1,xy} & 2\phi_{1,xy} & 2\chi_{1,xy} & 2\mu_{2,xy} & 2\phi_{2,xy} & 2\chi_{2,xy} & 2\mu_{3,xy} & 2\phi_{3,xy} & 2\chi_{3,xy} & 2\mu_{4,xy} & 2\phi_{4,xy} & 2\chi_{4,xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}, \quad (77)$$

com $\Delta_i = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^t$, $i = 1,2,3$ ou 4 .

Finalmente, pode-se unir as duas matrizes a fim de se obter a matriz de deformação membrana-flexão $[B_f^e]_{6 \times 20}$. Obviamente, para ocorrer essa união deve-se acrescentar o restante dos graus de liberdade em ambas as formulações, para que ambas as matrizes tenham 20 colunas. O vetor final dos graus de liberdade dos nós do elemento tem a forma:

$$\{U^e(t)\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ u_4 \ v_4 \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^t. \quad (78)$$

Por fim, pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = [B_f^e]_{6 \times 20} \{U^e(t)\}_{20 \times 1}. \quad (79)$$

Analogamente, pode-se obter as relações para as deformações virtuais $\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}$, obtendo-se então:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = [B_f^e]_{6 \times 20} \{\hat{U}^e(t)\}_{20 \times 1}. \quad (80)$$

2.2.2.3.2 Vetor de força nodal

Considerando agora a integral que envolve o carregamento aplicado ao elemento q , substitui-se o descolamento virtual \hat{w} , pela aproximação dada pela equação (62), obtendo:

$$\hat{w}(x, y, t) = \sum_{k=1}^4 \hat{w}_k(t) \varphi_k(x, y). \quad (81)$$

Escrevendo o somatório anterior em relação ao vetor virtual completo dos graus de liberdade:

$$\hat{w}(x, y, t) = \{0 \ 0 \ \mu_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu_4 \ 0 \ 0\} \cdot \{\hat{U}^e(t)\}, \quad (82)$$

ou

$$\hat{w}(x, y, t) = \{\mu^e\} \{\hat{U}^e(t)\}. \quad (83)$$

Substituindo as equações (79), (80) e (83) na formulação fraca indicada por (59), e considerando ao invés do domínio total da placa Ω o domínio do elemento Ω^e , obtém-se:

$$\{\hat{U}^e\}^t \left[\int_{\Omega^e} [B_f^e]^t \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} [B_f^e] \cdot d\Omega^e \right] \{U^e\} + \int_{\Omega^e} \{\hat{u}\}^t [m] \{\ddot{u}\} d\Omega^e = \{\hat{U}^e\}^t \int_{\Omega^e} \{\mu^e\} q(x, y, t) d\Omega^e. \quad (84)$$

Reescrevendo de forma compacta:

$$\{\hat{U}^e\}^t [K^e] \{U^e\} + \int_{\Omega^e} \{\hat{u}^e\}^t [m^e] \{\ddot{u}^e\} d\Omega^e = \{\hat{U}^e\}^t [F^e], \quad (85)$$

onde $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elemento e $[F^e]$ é o vetor de força nodal do elemento.

2.2.2.3.3 Matriz de inércia

Por fim, deve-se modificar a integral restante, que envolve os termos dinâmicos do problema. Para isto, deriva-se duas vezes o vetor global dos deslocamentos $\{u\}$ em função do tempo, onde $\{u\}$ tem a forma:

$$\{u\} = \{u(x, y, t)\} = \begin{Bmatrix} u^o(x, y, t) \\ v^o(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix}. \quad (86)$$

Pode-se escrever $\{u\}$ usando as funções de interpolação de Lagrange e Hermite, e o vetor dos graus de liberdade do elemento $\{U^e(t)\}$.

$$\{u(x, y, t)\}^e = [N^e]\{U^e(t)\}, \quad (87)$$

com $[N^e]$ sendo a matriz das funções de interpolação utilizadas, similar à matriz $[B_f^e]$, porém sem envolver as derivadas das funções. Calculando-se então as acelerações do elemento, tem-se:

$$\{\ddot{u}(x, y, t)\}^e = [N^e]\{\ddot{U}^e(t)\}. \quad (88)$$

Pode-se então reescrever a integral de inércia como:

$$\int_{\Omega^e} \{\hat{u}^e\}^t [m^e] \{\ddot{u}^e\} d\Omega^e = \{\hat{U}^e\}^t \left[\int_{\Omega^e} [N^e]^t [m^e] [N^e] d\Omega^e \right] \{\ddot{U}^e(t)\}. \quad (89)$$

Substituindo-se a integral entre colchetes na equação (85):

$$\{\hat{U}^e(t)\}^t [K^e] \{U^e(t)\} + \{\hat{U}^e(t)\}^t [M^e] \{\ddot{U}^e(t)\} = \{\hat{U}^e\}^t [F^e(t)]. \quad (90)$$

A integral entre colchetes na relação (89) representa a matriz massa ou de inércia do elemento $[M^e]$. Aplicando, por fim, o princípio do PTV que afirma que a solução da expressão (59) deve se anular quaisquer que sejam as funções peso usadas, pode-se considerar que essas funções sejam $\{\hat{U}^e\} = \{1 \ 0 \ \dots \ 0\}^t$ para a primeira linha da equação (90), $\{\hat{U}^e\} = \{0 \ 1 \ \dots \ 0\}^t$

para a segunda linha e assim sucessivamente para as outras linhas (MENDONÇA, 2005). Isto produzirá o conjunto de equações finais relacionadas ao elemento, que têm a forma:

$$[M^e]\{\ddot{U}^e(t)\} + [K^e]\{U^e(t)\} = \{F^e(t)\}. \quad (91)$$

De acordo com Mendonça (2005), pode-se obter a equação do movimento global para o modelo aplicando-se o processo de sobreposição das matrizes, obtendo-se então a relação apresentada em (92).

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F(t)\}. \quad (92)$$

As matrizes presentes na equação anterior são singulares, ou seja, não se pode resolver o sistema linear proposto pela equação (92). Fisicamente, a razão para tal fato é de não se ter imposto ao modelo sua vinculação, ou seja, é como se a placa estivesse livre no espaço. (FONSECA, 2002). Para isto, deve-se impor condições de contorno sobre o sistema para possibilitar a solução do mesmo. Por fim, o subcapítulo a seguir mostrará como obter as funções de interpolação nas coordenadas globais x e y .

2.2.2.4 Funções de interpolação nas coordenadas globais

Como as equações (60), (61) e (62) são funções das variáveis globais x e y , faz-se necessário mapear as funções de interpolação de Lagrange e Hermite para este sistema de coordenadas. Para isto, primeiramente deve-se determinar as relações entre as coordenadas dos dois sistemas em termos das funções de interpolação ψ_j^e e φ_k^e . Os procedimentos a seguir serão apresentados usando as funções de Lagrange como base, mas podem ser estendidos para as funções de Hermite. Para os elementos apresentados no subcapítulo anterior, tem-se que:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 x_j^e \psi_j^e(\xi, \eta), \quad (93)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 y_j^e \psi_j^e(\xi, \eta). \quad (94)$$

As relações anteriores indicam que, para um ponto nas coordenadas (ξ, η) , obtém-se suas coordenadas reais (x, y) (MENDONÇA, 2005). Usando as relações anteriores e aplicando a regra da cadeia, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (95)$$

A matriz entre colchetes é chamada de matriz jacobiana $[J]$. Em cada ponto das coordenadas (ξ, η) a matriz $[J(\xi, \eta)]$ pode ser calculada usando-se a relação dada em (95). Invertendo-se $[J]$ e pré-multiplicando na relação anterior:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (96)$$

Escrevendo-se as funções de interpolação em ambas as coordenadas na forma matricial:

$$\{\psi_j^e(x, y)\} = \{\psi_1^e(x, y), \psi_2^e(x, y), \psi_3^e(x, y), \psi_4^e(x, y)\}, \quad (97)$$

$$\{\psi_j^e(\xi, \eta)\} = \{\psi_1^e(\xi, \eta), \psi_2^e(\xi, \eta), \psi_3^e(\xi, \eta), \psi_4^e(\xi, \eta)\}. \quad (98)$$

Derivando-se as equações anteriores:

$$[\psi_j^e(x, y)] = \begin{bmatrix} \psi_{1,x}^e & \psi_{2,x}^e & \psi_{3,x}^e & \psi_{4,x}^e \\ \psi_{1,y}^e & \psi_{2,y}^e & \psi_{3,y}^e & \psi_{4,y}^e \end{bmatrix}, \quad (99)$$

$$[\psi_j^e(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \psi_{1,\xi}^e & \psi_{2,\xi}^e & \psi_{3,\xi}^e & \psi_{4,\xi}^e \\ \psi_{1,\eta}^e & \psi_{2,\eta}^e & \psi_{3,\eta}^e & \psi_{4,\eta}^e \end{bmatrix}. \quad (100)$$

Nos termos $\psi_{j,a}^e$, j é o número de nós e a representa a coordenada cuja função foi derivada parcialmente. A relação entre as duas funções anteriores é representada por (96), logo, reescreve-se a mesma da forma:

$$\begin{bmatrix} \psi_{1,x}^e & \psi_{2,x}^e & \psi_{3,x}^e & \psi_{4,x}^e \\ \psi_{1,y}^e & \psi_{2,y}^e & \psi_{3,y}^e & \psi_{4,y}^e \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \psi_{1,\xi}^e & \psi_{2,\xi}^e & \psi_{3,\xi}^e & \psi_{4,\xi}^e \\ \psi_{1,\eta}^e & \psi_{2,\eta}^e & \psi_{3,\eta}^e & \psi_{4,\eta}^e \end{bmatrix}. \quad (101)$$

De maneira compacta:

$$[\psi_j^e(x, y)] = [J]^{-1}[\psi_j^e(\xi, \eta)]. \quad (102)$$

Isto significa que se obteve as derivadas das funções de interpolação em relação a x e y num dado ponto de coordenadas (ξ, η) do elemento. Estes valores foram usados na definição da matriz de deformação $[B_f^e]$ no ponto (ξ, η) (MENDONÇA, 2005).

2.3 VIBRAÇÕES

Nesse subcapítulo serão abordados definições e terminologias sobre vibrações em geral, em meios contínuos, discretização destes meios, análise modal e função de resposta em frequência.

2.3.1 Conceitos Gerais

O estudo da vibração é caracterizado pelos movimentos oscilatórios de corpos e às forças que lhes são associadas (THOMSON, 1973). Estes corpos, também tratados como sistemas vibratórios, são compostos de meios que armazenam de energia cinética (massas ou inércias), energia potencial (molas ou elasticidades) e meios que geram perda gradual de energia (amortecedores) (RAO, 2008).

As vibrações que ocorrem em sistemas mecânicos podem ser classificadas da seguinte maneira:

1. *Livres ou forçadas*: vibrações livres ocorrem em sistemas que não estão submetidos à aplicação de forças após o início da sua movimentação. Já sistemas onde há forças externas atuando mesmo após o início das oscilações estão sujeitos a vibrações forçadas.
2. *Amortecidas ou não amortecidas*: vibrações que ocorrem em sistemas que apresentam meios que dissipam energia são ditas amortecidas. Todavia, se o sistema em questão não apresentar amortecimento, ou seja, meios de dissipar a

energia das oscilações, a vibração é considerada não amortecida. É válido citar que sistemas reais sempre apresentam amortecimento, por menor que seja o mesmo.

3. *Lineares e não lineares*: se os componentes que constituem o sistema vibratório se comportam de maneira linear a vibração é linear. Caso contrário, a vibração é caracterizada como não linear. Para o primeiro caso as técnicas matemáticas são bem desenvolvidas e o princípio de superposição é válido (RAO, 2008).
4. *Determinística e aleatória*: se a magnitude da excitação sobre um sistema oscilatório for conhecida a um dado instante, a excitação é dita determinística. Caso isto não ocorra, a vibração é conhecida como aleatória.

Classificadas as vibrações, faz-se necessário, para o melhor entendimento do tema abordado nessa pesquisa, listar algumas definições e terminologias referentes a sistemas oscilatórios e seu comportamento em função do tempo. É válido salientar que as nomenclaturas apresentadas estão de acordo com Rao (2008).

- *Ciclo*: O movimento de um corpo vibratório de sua posição de repouso ou equilíbrio até sua posição extrema em um sentido, então até a posição de equilíbrio, daí até sua posição extrema no outro sentido e de volta à posição de equilíbrio é denominada um ciclo de vibração.
- *Amplitude*: O máximo deslocamento de um corpo vibratório em relação à sua posição de equilíbrio é denominado amplitude de vibração.
- *Período de oscilação*: É o tempo que leva para concluir um ciclo de movimento. É denotado por τ e definido pela fórmula $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, onde ω é a frequência circular.
- *Frequência de oscilação*: É o número de ciclos por unidade de tempo, denotado por f e tem por fórmula $f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$.
- *Grau de liberdade*: Número de coordenadas independentes requeridas para a descrição do movimento do sistema oscilatório.
- *Frequência natural*: Se, após uma perturbação inicial, um sistema continuar a vibrar por si próprio sem a ação de forças externas, a frequência com que ele oscila é conhecida como sua frequência natural. Caso o sistema apresente amortecimento, essa frequência é conhecida então como frequência natural

amortecida. Para um sistema com n graus de liberdade, existirão n frequências naturais distintas.

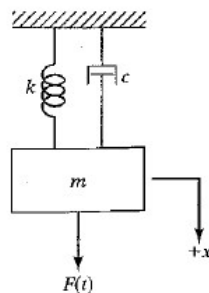
- *Modos de vibração*: Deslocamento característico da estrutura quando a mesma for excitada na sua frequência natural. Para sistemas com n frequências naturais haverá n modos de vibração.
- *Ângulo de fase*: Diferença angular entre a origem da curva de *deslocamento x tempo* e o primeiro pico da mesma.
- *Ressonância*: Ocorre quando o sistema é excitado em suas frequências de ressonância. A amplitude da vibração nesse caso é muito elevada e deve ser evitada para que não haja falha do sistema mecânico.

A seguir, serão apresentadas as formulações para sistemas vibratórios com um grau de liberdade lineares, que podem ser estendidas para sistemas com vários graus de liberdade, através do princípio da superposição.

2.3.2 Equação do movimento para estruturas com um grau de liberdade

A Figura (13) exhibe um sistema massa-mola-amortecedor, que pode ser considerado como um sistema vibratório de um grau de liberdade, pois somente a variável x é necessária para determinar o movimento do mesmo.

Figura 13 - Sistema vibratório com um grau de liberdade



Fonte: RAO, 2008.

O termo $F(t)$ é a força aplicada à massa do sistema e o termo x representa o deslocamento do mesmo em função do tempo. As constantes m , k e c representam a massa, a rigidez e o amortecimento do sistema, respectivamente.

Para se determinar a equação diferencial do movimento do sistema oscilatório anterior, aplica-se a segunda lei de Newton ao sistema, assumindo-se a direção x representada como sendo positiva, resultando então:

$$\sum F_x = m\ddot{x}(t), \quad (103)$$

$$F_x = -F_k - F_c + F(t), \quad (104)$$

onde F_k e F_c são as forças que a mola e o amortecedor exercem sobre a massa, respectivamente. O sinal negativo se deve ao fato de que essas forças atuam contra o movimento do sistema. Estas forças podem ser escritas em função da variável $x(t)$ (considerando que o amortecimento é viscoso) através das relações:

$$F_k = kx \text{ e } F_c = c\dot{x}. \quad (105)$$

Substituindo as equações anteriores na formulação (104) e a mesma em (103), obtém-se:

$$F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}. \quad (106)$$

Isolando a força $F(t)$ na relação anterior, tem-se como resultado a equação do movimento que rege o problema representado pela Figura (13).

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (107)$$

Se $F(t)$ for zero, a vibração é caracterizada como livre. Se a constante de amortecimento c for zero, a oscilação é definida como não amortecida.

A equação do movimento de sistemas com mais de um grau de liberdade é similar à anterior, porém os termos de inércia, amortecimento e rigidez são apresentados em matrizes; as acelerações, velocidades e deslocamentos em vetores bem como as forças externas existentes. Exemplificando:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}, \quad (108)$$

com n sendo o número de graus de liberdade do sistema.

É importante frisar que a força gravitacional não foi incluída no somatório de forças pois considera-se o sistema equilibrado inicialmente. Neste estado, as forças da mola e do amortecedor suportarão o peso da massa. Portanto, se a mesma for incluída no somatório, ela será anulada pelas componentes iniciais de força da mola e do amortecedor.

2.3.3 Sistemas com infinitos graus de liberdade – meios contínuos

Estruturas reais são meios contínuos, ou seja, possuem infinitos graus de liberdade. Neste tipo de meio massas, amortecedores ou molas discretas não são identificáveis. Se um sistema for modelado como contínuo, as equações que regem seu movimento são equações diferenciais parciais, que têm como característica serem mais complexas que as equações diferenciais que regem os problemas discretos (RAO, 2008).

As equações diferenciais que regem os problemas de placas de Kirchhoff são apresentadas no subcapítulo 2.2.2.1, bem como todo o equacionamento para discretizar a mesma num sistema com número de graus de liberdade finito, que, para o caso da discretização através do MEF, será o número de nós que o modelo apresentar multiplicado pela quantidade de graus de liberdade presente em um único nó do modelo.

A transformação da estrutura contínua numa estrutura discreta implica na obtenção de uma solução aproximada, que será mais precisa quanto maior o número de graus de liberdade que o modelo apresentar.

Partindo-se então da equação dinâmica obtida da divisão da estrutura em elementos finitos, representada por (92), pode-se determinar os modos de vibração da placa simulada e as funções de resposta em frequência dos graus de liberdade da mesma.

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F(t)\}, \quad (109)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa dos elementos, $[K]$ a matriz de rigidez, $\{U(t)\}$ o vetor de deslocamentos dos graus de liberdade, $\{\ddot{U}(t)\}$ o vetor de acelerações dos graus de liberdade e $\{F(t)\}$ o vetor de forças externas agindo sobre cada grau de liberdade da estrutura.

Nota-se que, diferentemente da equação (108), a equação (109) não apresenta o termo de amortecimento, ou seja, não é verificada a existência de uma matriz $[C]$ de amortecedores. Esta diferença existe, pois, nas estruturas simuladas não haviam amortecedores externos,

somente o amortecimento intrínseco da estrutura. Este tipo de amortecimento é conhecido como amortecimento proporcional e sua determinação será apresentada a seguir.

2.3.4 Análise Modal

A análise modal é o processo de determinação das características dinâmicas inerentes de um sistema em formas de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos normais, usando-os para formular um modelo matemático para seu comportamento dinâmico (FU; HE, 2001).

A análise modal visa desacoplar um sistema com n graus de liberdade em n sistemas com um grau de liberdade, através da determinação das frequências naturais da estrutura e dos seus modos vibração (RAO, 2008). Para isto, primeiramente deve-se solucionar a equação matricial apresentada anteriormente, porém, sem considerar os efeitos de forças externas presentes na estrutura. Logo, a equação a ser resolvida se torna:

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \vec{0}. \quad (110)$$

Considerando que a solução da equação anterior tem a forma:

$$u_i(t) = U_i T(t), \text{ com } i = 1, 2, 3 \dots n, \quad (111)$$

com U_i sendo constante e determinado como amplitude e T é uma função do tempo t . Pode-se então escrever um vetor \vec{U} que contenha todas as amplitudes e substituir na equação (110), resultando em:

$$[M]\{\vec{U} \cdot \ddot{T}(t)\} + [K]\{\vec{U} \cdot T(t)\} = \vec{0}. \quad (112)$$

Reescrevendo em forma escalar:

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} U_j \right) \ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} U_j \right) T(t) = 0. \quad (113)$$

Isolando os termos em função do tempo:

$$\frac{(\sum_{j=1}^n k_{ij} U_j)}{(\sum_{j=1}^n m_{ij} U_j)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}. \quad (114)$$

Como o lado direito é independente de i e o lado esquerdo é independente de t , ambos têm que ser iguais à uma constante λ . Portanto, tem-se:

$$\frac{(\sum_{j=1}^n k_{ij} U_j)}{(\sum_{j=1}^n m_{ij} U_j)} = \lambda. \quad (115)$$

Voltando à forma matricial e passando a matriz de massas para o lado esquerdo, obtém-se:

$$\{[K] - \lambda[M]\}\vec{U} = 0. \quad (116)$$

A equação (116) representa um conjunto de n equações lineares homogêneas nas incógnitas U . Para se evitar a solução trivial ($\vec{U} = \vec{0}$), o determinante da matriz resultante da operação entre colchetes deve ser zero (RAO, 2008).

$$\Delta = |[K] - \lambda[M]| = 0. \quad (117)$$

A equação (116) representa um problema de autovalor e a equação (117) é denominada equação característica e λ são os autovalores, que são definidos como:

$$\lambda_j = \omega_{nj}^2, \quad (118)$$

logo, os autovalores são as frequências naturais do sistema elevadas ao quadrado.

Determinados os valores de λ pode-se voltar à equação (116), substituir esses números e determinar assim as componentes do vetor \vec{U} para cada valor de λ encontrado. Cada vetor \vec{U} é definido por Rao (2008) como o modo normal do sistema.

Com os modos de vibrar do sistema e suas frequências naturais, pode-se agora desacoplar o mesmo. É válido citar que cada equação desacoplada terá como frequência natural uma das frequências naturais do sistema acoplado.

Para efetuar o desacoplamento, primeiro normaliza-se os modos de vibração, chamados agora de \vec{U}_j , com $j = 1, 2, 3 \dots n$, da seguinte forma:

$$\vec{U}_{norm,j} = \frac{\vec{U}_j}{|\vec{U}_j|}, \quad (119)$$

com $|\vec{U}_j|$ definido como:

$$|\vec{U}_j| = \sqrt{(U_1^2 + U_2^2 \dots + U_n^2)}. \quad (120)$$

Normalizados os vetores, pode-se criar a matriz $[\Phi]$, constituída da forma:

$$[\Phi_{n \times n}] = [\vec{U}_{norm,1} \vec{U}_{norm,2} \dots \vec{U}_{norm,n}]. \quad (121)$$

Como os autovetores são linearmente independentes, $[\Phi]$ é a matriz de mudança de base, criando assim um espaço diagonalizado \vec{X} . Pré e pós-multiplicando as matrizes de massa $[M]$ e rigidez $[K]$ por $[\Phi^T]$ e $[\Phi]$, respectivamente, obtém-se:

$$[M]^* = [\Phi]^T [M] [\Phi], \quad (122)$$

$$[K]^* = [\Phi]^T [K] [\Phi]. \quad (123)$$

A relação entre um elemento no espaço cartesiano \vec{U} e um no diagonalizado \vec{X} é dado por:

$$\vec{U} = [\Phi] \vec{X}. \quad (124)$$

Substituindo a relação anterior na equação (109) e pré-multiplicando a mesma por $[\Phi^T]$, chega-se em:

$$[\Phi^T][M][\Phi]\vec{X} + [\Phi^T][K][\Phi]\vec{X} = [\Phi^T]\vec{P}(t), \quad (125)$$

$$[M]^*\vec{X} + [K]^*\vec{X} = \vec{P}(t). \quad (126)$$

As matrizes presentes nas equações (122) e (123) são diagonais, ou seja, o problema representado por esta equação equivale a n problemas independentes. Assim, o problema apresentado em (126) é o sistema desacoplado do sistema inicial com n graus de liberdade.

Apesar de que o desacoplamento do sistema já foi efetuado, essa formulação só é válida se todas as formas de amortecimento forem desconsideradas. Porém, como as estruturas simuladas apresentam amortecimento estrutural, deve-se adicionar uma matriz $[C]$ à formulação (109), proveniente do MEF, resultando na equação (127) a seguir.

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [C]\{\dot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F(t)\}. \quad (127)$$

É importante citar que, apesar de que a aplicação do MEF no subcapítulo anterior não resultou numa matriz $[C]$, os programas computacionais a calculam através das matrizes de massa e rigidez. Logo, pode-se escrever a matriz $[C]$ de amortecimento como função das matrizes $[M]$ e $[K]$, sendo este tipo de amortecimento conhecido como amortecimento proporcional e explicitado como:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]. \quad (128)$$

Para desvincular esse sistema faz-se necessário, para simplificação das equações que serão obtidas, transformar a matriz de massa $[M]$ na matriz identidade $[I]$. Para isto, primeiramente deve-se normalizar a matriz $[\Phi]$ pelas massas presentes na matriz $[M]^*$, da seguinte maneira:

$$[\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \frac{\vec{U}_{norm,1}}{\sqrt{m_{11}^*}} & \frac{\vec{U}_{norm,2}}{\sqrt{m_{22}^*}} & \dots & \frac{\vec{U}_{norm,n}}{\sqrt{m_{nn}^*}} \end{bmatrix}. \quad (129)$$

Realizando então o mesmo procedimento feito em (122) e (123), porém, adicionalmente para a matriz $[C]$, obtém-se:

$$[\hat{\Phi}]^T [M][\hat{\Phi}] = [I], \quad (130)$$

$$[\hat{\Phi}]^T [K][\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (131)$$

$$[\hat{\Phi}]^T [C][\hat{\Phi}] = \alpha[\hat{\Phi}]^T [M][\hat{\Phi}] + \beta[\hat{\Phi}]^T [K][\hat{\Phi}] = \alpha[I] + \beta[\lambda]. \quad (132)$$

De maneira similar ao primeiro procedimento, pode-se escrever um elemento no espaço cartesiano \vec{U} em relação ao espaço diagonalizado, também chamado de \vec{X} , como:

$$\vec{U} = [\hat{\Phi}]\vec{X}. \quad (133)$$

Substituindo a equação (133) em (127) e realizando o mesmo processo para a obtenção de (125), pode-se obter como equação final:

$$\ddot{x}_j + (\alpha + \beta\lambda_j)\dot{x}_j + \lambda_j x_j = \hat{P}_j(t). \quad (134)$$

Dessa maneira, expressa-se o sistema em n equações com um grau de liberdade e massa unitária. Reescrevendo a equação anterior em termos da taxa de amortecimento e das frequências naturais:

$$\ddot{x}_j + 2\zeta_j\omega_{nj}\dot{x}_j + \omega_{nj}^2 x_j = \hat{P}_j(t), \quad (135)$$

com ζ_j e ω_{nj} sendo definidos como:

$$\zeta_j = \frac{c_j}{2\sqrt{K_j m_j}} = \frac{\alpha + \beta\lambda_j}{2\omega_{nj}} \quad e \quad \omega_{nj} = \sqrt{\frac{K_j}{m_j}} = \sqrt{\lambda_j^2}. \quad (136)$$

Finalmente, a equação (135) representa o sistema desacoplado em n equações com um grau de liberdade, simplificando assim a análise e determinação de parâmetros do mesmo.

2.3.5 Função de Resposta em Frequência – FRF

O conceito de FRF está nos fundamentos da análise experimental moderna de sistemas vibratórios. A função de resposta em frequência descreve o comportamento de um sistema oscilatório como uma relação entre a saída e a entrada do mesmo.

Considerando-se então um sistema linear, com um ou mais graus de liberdade, sujeito a uma excitação senoidal, sua resposta será uma onda senoidal com a mesma frequência ω que foi excitado, de acordo com as seguintes relações:

$$x_{jp}(t) = X e^{i\omega t}, \quad (137)$$

$$\hat{P}_j(t) = P e^{i\omega t}, \quad (138)$$

onde X e P são amplitudes e o subíndice p em x_j indica solução particular, que tem como definição ser a solução do sistema vibratório no regime permanente (RAO, 2008). Derivando-se a equação (137) até o termo da aceleração:

$$\dot{x}_{jp}(t) = i\omega X e^{i\omega t}, \quad (139)$$

$$\ddot{x}_{jp}(t) = i^2 \omega^2 X e^{i\omega t} = -\omega^2 X e^{i\omega t}. \quad (140)$$

Substituindo as relações (137), (138), (139) e (140) na equação (135):

$$-\omega^2 X e^{i\omega t} + 2\zeta_j \omega_{nj} i \omega X e^{i\omega t} + \omega_{nj}^2 X e^{i\omega t} = P e^{i\omega t}. \quad (141)$$

Escrevendo a equação $H_j(\omega)$ como sendo a relação entre o deslocamento e a força, tem-se:

$$H_j(\omega) = \frac{X e^{i\omega t}}{P e^{i\omega t}} = \frac{1}{(\omega_{nj}^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} \omega i - \omega^2)}. \quad (142)$$

Neste caso, $H_j(\omega)$ é conhecido como receptância e é dado como a relação entre a entrada e a saída do sistema.

De acordo com Medeiros (2016), a resposta de uma estrutura pode ser descrita pelo deslocamento, velocidade ou aceleração da mesma. As FRFs correspondentes são chamadas de receptância, mobilidade e acelerância, respectivamente, e são definidas como

$$\text{Receptância: } H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \left[\frac{m}{N} \right], \quad (143)$$

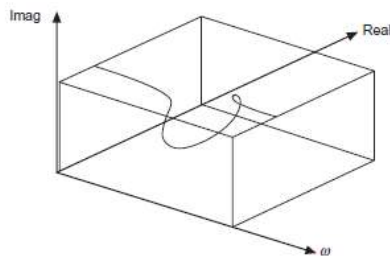
$$\text{Mobilidade: } M(\omega) = \frac{\dot{X}(\omega)}{F(\omega)} = i\omega H(\omega) \left[\frac{m/s}{N} \right], \quad (144)$$

$$\text{Aceleração: } A(\omega) = \frac{\ddot{X}(\omega)}{F(\omega)} = -\omega^2 H(\omega) \left[\frac{m/s^2}{N} \right]. \quad (145)$$

2.3.5.1 Representação gráfica das FRFs

Nota-se, pela observação da equação (142), que a mesma está presente tanto no eixo real quanto no imaginário. Este fato faz com que sua representação gráfica completa tenha a forma representada pela Figura (14).

Figura 14 - Representação completa da FRF para um sistema com um grau de liberdade



Fonte: FU e HE, 2001.

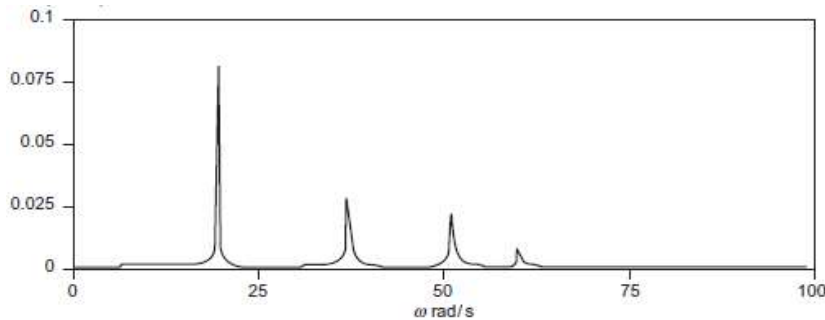
Este gráfico tridimensional exibe a verdadeira forma de uma FRF, porém, é difícil seu uso pois as características da FRF são pouco visíveis (FU; HE, 2001).

Para contornar este problema, Ewins (2000, p.37), lista quatro formas de representar a FRF em gráficos bidimensionais, sendo elas:

1. *Módulo (ou magnitude) da FRF x Frequência e Ângulo de Fase x Frequência.*
Esta aplicação é conhecida como o diagrama de Bode;
2. *Parte real da FRF x Frequência e Parte imaginária da FRF x Frequência;*
3. *Parte real da recíproca da FRF x Frequência ou Frequência² e Parte imaginário da recíproca da FRF x Frequência;*
4. *Parte real da FRF x Parte imaginária da FRF.* Esta representação é conhecida como o gráfico de Nyquist

Para a primeira forma, o módulo da FRF tem o comportamento apresentado na Figura (15).

Figura 15 - Exemplo do módulo receptância ($H(\omega)$) para um sistema com quatro graus de liberdade

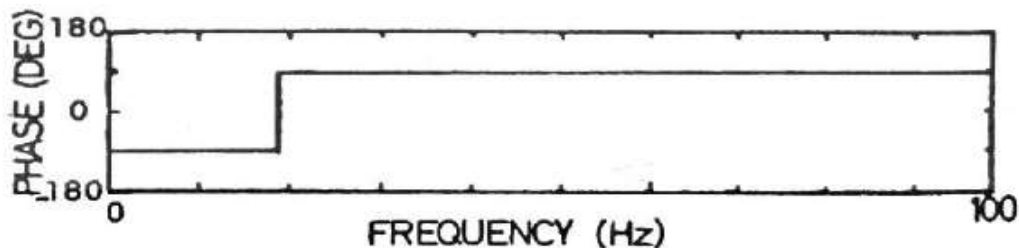


Fonte: FU e HE, 2001.

Pela observação da curva anterior pode-se definir facilmente as quatro frequências naturais do sistema representado. Estes valores serão os pontos ω_i onde ocorrem os picos do gráfico.

Em relação ao segundo gráfico, que relaciona o ângulo de fase e a frequência, a Figura (16) representa este comportamento de maneira genérica, para um sistema com um grau de liberdade sem amortecimento. É válido citar que a presença de amortecimento mantém o comportamento da curva, porém ameniza alguns valores e fornece à mesma um caráter não tão linear quanto o apresentado na Figura (16).

Figura 16 - Variação do ângulo de fase da FRF em relação à frequência



Fonte: EWINS, 2000.

Pode-se relacionar a segunda representação listada por Ewins com a primeira através das equações (146) e (147) a seguir.

$$\text{Módulo} = \sqrt{\text{Real}^2 + \text{Imaginário}^2}, \quad (146)$$

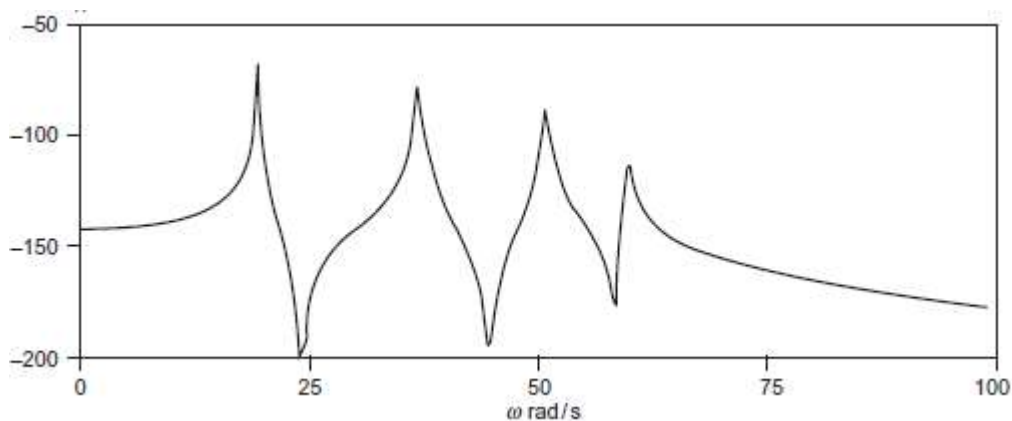
$$\text{Ângulo de fase} = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Imaginário}}{\text{Real}}\right). \quad (147)$$

Usualmente, representa-se a curva do módulo em um sistema cartesiano com eixo horizontal com escala linear e eixo vertical com escala logarítmica. Desta maneira, minimiza-se os valores de módulo, permitindo uma visualização mais clara do comportamento da curva. A conversão para a base logarítmica é feita através da equação (148) em sequência.

$$dBn = n \log_{10}(\text{Módulo}), \quad (148)$$

onde n determina a base a ser utilizada. As mais comuns são dB10 e dB20, logo, para estas duas o valor de n que multiplica a função logarítmica será 10 e 20, respectivamente. O gráfico resultante desta mudança de base, aplicado à ilustração (15) anterior, é representado pela Figura (17) a seguir.

Figura 17 - Módulo receptância ($H(\omega)$) para um sistema com quatro graus de liberdade representado na base logarítmica dB20



Fonte: FU e HE, 2001.

Os picos superiores da curva são chamados de ressonância e os picos inferiores de antirressonância.

As ressonâncias de um sistema são parâmetros globais, ou seja, as mesmas ressonâncias devem aparecer em qualquer ponto do sistema. Por outro lado, as antirressonâncias são locais, dependendo do ponto onde a FRF é traçada. Diferentes FRFs possuem diferentes antirressonâncias, ou não as possuem (FU; HE, 2001).

Por fim, o intuito de se trabalhar com as FRFs é de se ter uma fácil visualização destes pontos para uma melhor compreensão do comportamento do sistema oscilante.

Ewins (2000) e Fu e He (2001) apresentam os assuntos abordados nesse subcapítulo de maneira mais completa e aconselha-se a consulta aos mesmos para um melhor entendimento dos assuntos apresentados. Por fim, as representações restantes citadas por Ewins (2000) não foram utilizadas na elaboração da pesquisa, justificando assim a ausência de informações sobre as mesmas.

2.4 AJUSTE DE MODELO

O ajuste de modelo aplicado a modelos estruturados pelo método dos elementos finitos pode ser empregado como uma ferramenta importante para calibrar o mesmo, mitigando o erro de modelagem e fazendo com que o mesmo apresente um comportamento tão próximo quanto o possível da estrutura real modelada (WANG; WANG; ZHAO, 2016).

Existem duas classificações principais para os métodos de ajuste de modelo de estruturas dinâmicas; os métodos sensitivos e os diretos. Os sensitivos dependem de um modelo paramétrico da estrutura e da minimização de alguma função de penalidade baseada no erro entre os dados medidos e as previsões do modelo. Esses métodos oferecem uma ampla variedade de parâmetros físicos a serem melhorados e que permitem certo grau de controle sobre a otimização. Já os processos diretos, mudam completamente as matrizes de massa e/ou rigidez do modelo, gerando modelos atualizados de difícil interpretação (FRISWELL, 2007).

Os métodos sensitivos de ajuste de modelo baseados nas FRFs utilizam simultaneamente a resposta estrutural obtida através do método dos elementos finitos e a resposta estrutural medida para calibrar o modelo matemático (SHADAN *et. al.*, 2016).

Estes métodos apresentam algumas vantagens em relação aos métodos diretos, como por exemplo: podem ser usados diretamente sem transformação de dados; as FRFs podem ser medidas em vários pontos da estrutura, fornecendo assim mais dados para a otimização (WANG; WANG; ZHAO, 2016).

Como citado anteriormente, o ajuste de modelo baseado nas FRFs faz uma comparação entre os dados da simulação e os dados experimentais e ajusta certos parâmetros para que a diferença relativa entre as FRFs simuladas e as FRFs experimentais seja o menor possível. Para isto, faz-se necessário a implementação de um algoritmo capaz de alterar os parâmetros, simular as FRFs, fazer a comparação e então otimizar as propriedades, num processo iterativo, atingindo assim o menor erro possível.

Em sua pesquisa, Boulkaibet *et al.* (2015), utilizou uma variação da família de algoritmos de *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) para realizar o ajuste de modelo. Esta

variação parte de uma combinação dos fundamentos e ideias dos algoritmos genéticos, *simulated annealing* e técnicas do MCMC clássico.

Todavia, optou-se por utilizar, nessa pesquisa, o algoritmo conhecido como Otimização por Enxame de Partículas, ou *Particle Swarm Optimization*, definido simplesmente por PSO. A seguir, então, considerações sobre o PSO serão apresentadas, porém, é importante citar que o algoritmo utilizado foi adaptado dos apêndices presentes em Montero (2013), desenvolvido no programa computacional Scilab.

2.4.1 Otimização por Enxame de Partículas – PSO

O PSO é um método de otimização baseado em populações, onde cada indivíduo é chamado de “partícula” por não possuir características como massa ou volume. Cada partícula da população do PSO se movimenta por um espaço n-dimensional, onde n é o número de variáveis de projeto e cada ponto desse espaço representa uma solução do problema (MONTERO, 2013).

As partículas se deslocam de uma posição inicial aleatória para uma localização onde a função a ser minimizada apresenta um valor menor do que para a posição inicial. Segundo Montero (2013), essa movimentação das partículas é baseada na mesma lei de velocidades, que é atualizada em funções de informações da partícula e do grupo, a cada iteração no intervalo de tempo. A atualização das velocidades depende de parâmetros como valores aleatórios, inércia da partícula e constantes referentes a cada partícula e sua vizinhança.

As equações que descrevem o movimento das partículas, para um espaço de tempo unitário, são dadas por:

$$x_{k+1}^i = x_k^i + v_{k+1}^i, \quad (149)$$

e

$$v_{k+1}^i = wR1v_k^i + C1R2(x_{pbk}^i - x_k^i) + C2R2(x_{gbk} - x_k^i), \quad (150)$$

onde x_{k+1}^i é a próxima posição da partícula; x_k^i é a posição anterior; v_{k+1}^i é a próxima velocidade da partícula; v_k^i é a velocidade anterior da partícula; x_{pbk}^i é a melhor posição que a partícula esteve até o momento; x_{gbk} é a melhor posição entre todas as melhores posições das partículas até o momento; w é a constante de inércia das partículas; $C1$ e $C2$ são as constantes

de “confiança” que a partícula possui em si e no grupo, respectivamente (PEREZ; BEHDINAN, 2007); $R1$, $R2$ e $R3$ são valores gerados aleatoriamente entre 0 e 1.

O objetivo é encontrar o x_{gbk} dentro dos limites do espaço n dimensional. Para isto, deve-se ter cuidado com as escolhas dos parâmetros w , $C1$ e $C2$. Valores mal escolhidos podem fazer com que as partículas fiquem estagnadas dentro de uma região deste espaço, informando assim os valores errados de x_{gbk} . O ideal é fazer com que as partículas explorem o máximo possível do espaço e, que a cada iteração, vão convergindo para a melhor posição do espaço. Métodos de escolha desses parâmetros, bem como um estudo aprofundado de suas influências sobre a convergência dos resultados do PSO estão presentes em Montero (2013).

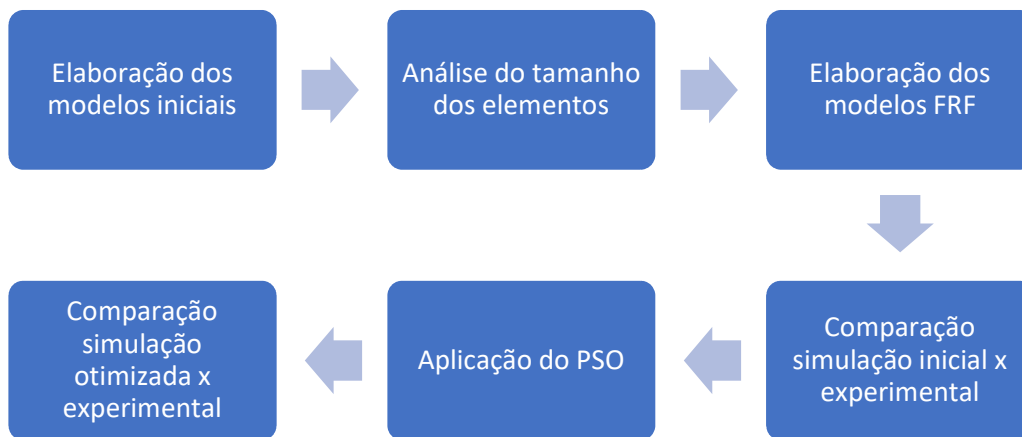
2.4.2 Aplicação do PSO na otimização das FRFs

O PSO foi implementado de maneira similar à apresentada no capítulo 6 de Montero (2013). Esta implementação consiste em usar o método para gerar o conjunto de variáveis de projeto, dentro do espaço solução estipulado, rodar a análise por MEF para todas as partículas geradas, e, para cada uma delas, calcular as cinco primeiras frequências naturais e compará-las com às frequências experimentais, determinando assim qual partícula possui o melhor conjunto de propriedades que minimiza essa diferença. Após isto, aplica-se uma nova rotina do PSO, agora para minimizar as diferenças das FRFs entre os picos de ressonância experimentais e simulados. Faz-se esse procedimento iterativamente, a fim de obter o melhor conjunto de propriedades possível dentro do espaço solução. No capítulo 3 a seguir uma descrição mais detalhada deste processo será apresentada.

3 METODOLOGIA

Com base no conteúdo apresentado no capítulo anterior, foram realizadas análises pelo programa de análise computacional (Hyperworks) para essa pesquisa. O programa realiza todo o procedimento descrito para a obtenção dos resultados desejados. Este capítulo, no entanto, tem como finalidade explicar os processos efetuados para a realização desse trabalho, que foram organizados de acordo com o fluxograma da Figura (18), para uma melhor visualização da estrutura da pesquisa.

Figura 18 - Fluxograma representativo dos processos realizados



Fonte: Elaborado pelo autor, 2017.

3.1 ELABORAÇÃO DOS MODELOS INICIAIS

As placas aqui estudadas foram utilizadas por Medeiros (2016) em sua tese de doutorado e serão nomeadas aqui de acordo com o mesmo, sendo elas $P09_{CF}$ e $P10_{CF}$, onde o subíndice CF significa *carbon fiber*.

A primeira etapa realizada nessa pesquisa foi a elaboração dos modelos iniciais no Hyperworks. Esta etapa constituiu na construção dos modelos matemáticos das placas $P09_{CF}$ e $P10_{CF}$ baseados nas propriedades e medidas apresentadas em Medeiros (2016, p.29 e 30), mostradas nas Tabelas (1) e (2).

Tabela 1 - Medidas iniciais das placas $P09_{CF}$ e $P10_{CF}$

	Comprimento [mm]	Largura [mm]	Espessura [mm]	Sequência de Empilhamento [°]
$P09_{CF}$	306,64	247,45	3,331	[0/15/-15/0/15-15] _s
$P10_{CF}$	305,52	246,19	3,336	[0/15/-15/0/15-15] _s

Fonte: MEDEIROS, 2016.

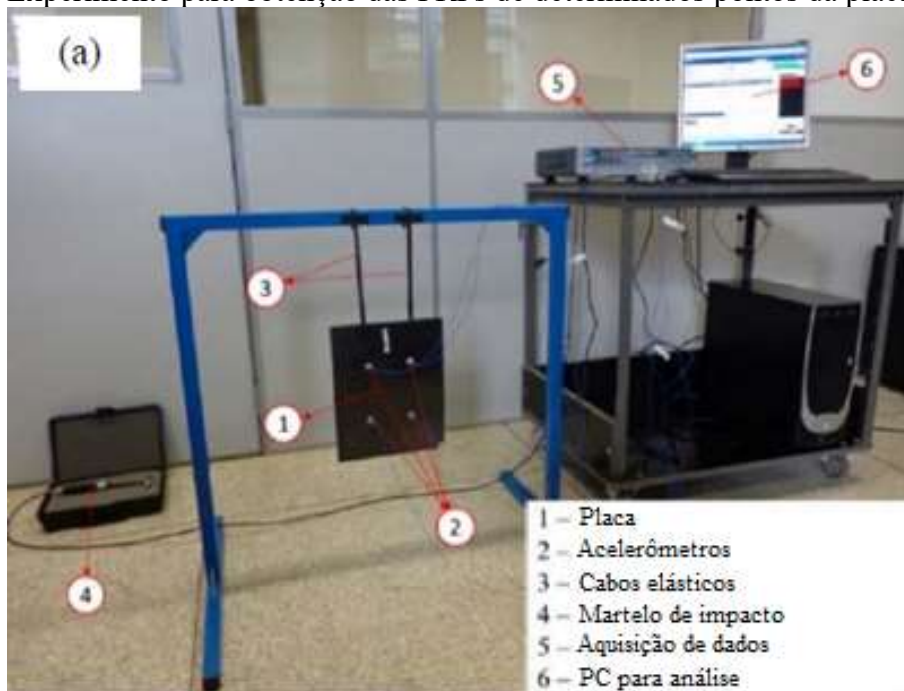
Tabela 2 - Propriedades elásticas das placas $P09_{CF}$ e $P10_{CF}$

E_1	127 GPa
$E_2 = E_3$	10 GPa
$G_{12} = G_{13}$	5,44 GPa
G_{23}	3,050 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,34
ν_{23}	0,306
ρ	1580 kg/m ³

Fonte: MEDEIROS, 2016.

Os modelos foram desenvolvidos para simular o ensaio experimental representado pela Figura (19).

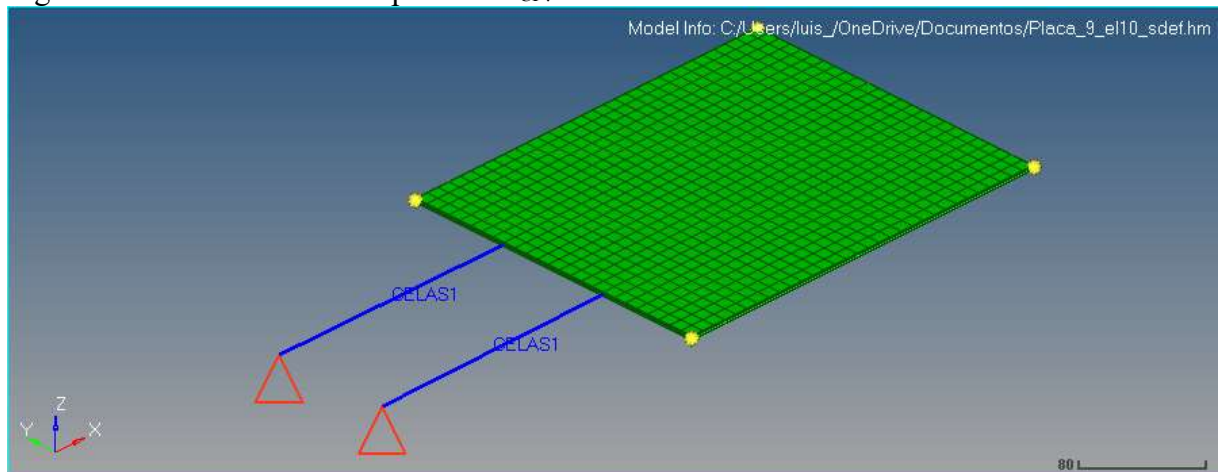
Figura 19 - Experimento para obtenção das FRFs de determinados pontos da placa



Fonte: Adaptado de MEDEIROS, 2016.

Como as placas são constituídas de 12 lâminas de material compósito, fez-se necessário dividir a espessura presente na tabela (1) por 12, a fim de obter a espessura de cada lâmina e criar assim os laminados. Para isso, foi desenvolvido um modelo inicial utilizando a condição de simetria e através do empilhamento de 6 lâminas para a placa $P09_{CF}$, conforme a Figura (20).

Figura 20 - Modelo inicial da placa $P09_{CF}$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Os componentes em azul são molas e representam o item 3 na Figura (19). Estas molas possuem rigidez elástica $k = 0.01$ N/mm cada e, têm como objetivo possibilitar a simulação da placa no estado livre, ou seja, sem qualquer tipo de restrição ao seu movimento. Sua adição não influencia na rigidez da placa, visto que seus valores de rigidez elástica são baixos. Os triângulos vermelhos representam as condições de contorno para o modelo, onde todos os deslocamentos e rotações são zero, ou seja, as extremidades das molas estão engastadas, assim como as extremidades dos componentes 3 na Figura (19). Por fim, a placa em verde representa a malha do laminado gerado.

Para realizar este tipo de análise no Hyperworks, faz-se necessário inserir dois coletores após a inserção dos parâmetros de modelamento. O primeiro é o coletor das restrições, discutido anteriormente e representado pelos triângulos vermelhos na Figura (20). O segundo é o coletor que determina como a análise modal vai ser resolvida pelo *solver*. Neste coletor pode-se estipular a faixa de frequência a ser analisada, calculando assim a quantidade de modos presentes nessa faixa, ou o número de modos que se deseja. No Hyperworks, este coletor é denotado por EIGRL, que significa extração dos dados reais dos autovalores, método de Lanczos (*Real Eigenvalue Extraction Data, Lanczos Method*).

As primeiras simulações executadas nos modelos iniciais foram para a obtenção dos modos de vibração e das frequências naturais dos mesmos, a fim de averiguar se os modelos elaborados estavam condizentes com os modelos experimentais. Verificadas as validades dos modelos elaborados, fez-se então necessário um estudo de convergência da malha para determinar o tamanho de elemento/número de nós que seria utilizado nas etapas seguintes.

3.2 ANÁLISE DO TAMANHO DOS ELEMENTOS

A segunda etapa a ser realizada nesse estudo foi a análise para verificar o tamanho de elemento que seria usado nas simulações dinâmicas. Este procedimento faz-se necessário, pois elementos muito grandes afetam a confiabilidade dos resultados e, elementos muito pequenos consomem demasiado tempo computacional, resultando em simulações demoradas e custosas computacionalmente.

A análise foi realizada através da comparação das cinco primeiras frequências naturais resultantes de diferentes simulações da placa $P09_{CF}$, assim, para cada simulação selecionou-se diferentes tamanhos de elementos, sendo os tamanhos: 65, 40, 25, 10 e 5 mm. É importante citar que foram solicitados como resposta os 30 primeiros modos de vibração para cada análise realizada.

Em seguida, foram extraídas as frequências naturais e elaborou-se um gráfico *frequências x número de nós*. Avaliou-se o ponto em que as curvas apresentaram caráter constante. É válido citar que o número de nós dos modelos está diretamente vinculado ao tamanho de elemento utilizado.

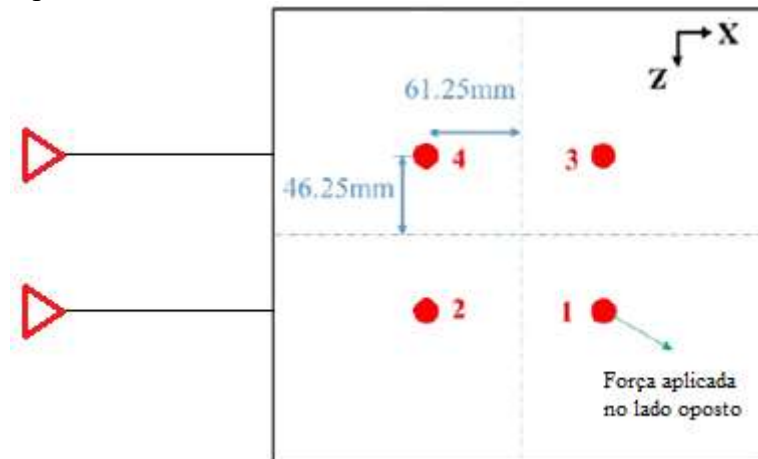
Devido ao fato que os pontos analisados (Figura (21)) não estavam coincidentes com a malha de elementos finitos, fez-se necessário adicioná-los à malha, gerando distorções na mesma nas regiões próximas desses nós. Posteriormente à essa adição, realizou-se um estudo de convergência para a malha distorcida e comparou-se os resultados obtidos com os da malha sem distorção, para definir se a distorção da mesma afetaria nas simulações.

Por fim, calculou-se os erros percentuais entre as respectivas frequências para dois tamanhos de malha, considerando como referência o resultado do menor elemento.

3.3 ELABORAÇÃO DOS MODELOS PARA ANÁLISE FRF

As análises das FRFs experimentais foram realizadas em quatro pontos das placas, representados na Figura (19). Com o objetivo de comparar as FRFs destes pontos, os mesmos foram adicionados aos modelos computacionais e são apresentados na Figura (21).

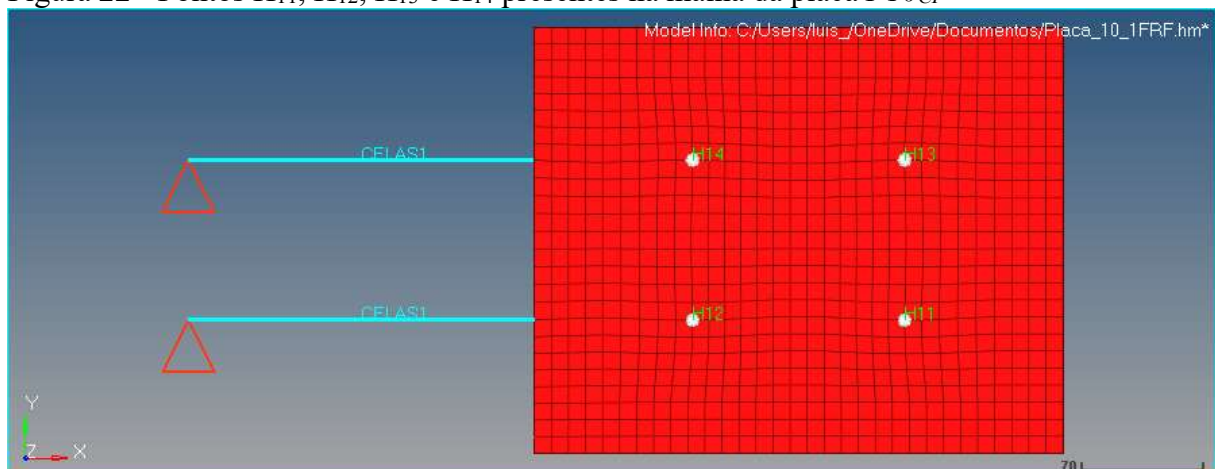
Figura 21 - Pontos para a análise das FRFs simuladas



Fonte: Adaptado de MEDEIROS, 2016.

Os pontos foram nomeados de H_{11} , H_{12} , H_{13} e H_{14} , respectivamente. A força foi aplicada no Ponto 1 da Figura (21). A Figura (22) exibe um modelo elaborado com a adição destes pontos e suas identificações.

Figura 22 - Pontos H_{11} , H_{12} , H_{13} e H_{14} presentes na malha da placa $P10_{CF}$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2017.

Após identificados os pontos de monitoramento e definido o tamanho do elemento, fez-se necessário inserir alguns parâmetros no Hyperworks, como amortecimento e força externa, além dos parâmetros presentes na etapa inicial da pesquisa, para a realização das análises de FRF das placas.

O amortecimento foi adicionado através de um coletor baseado nas primeiras 5 frequências naturais dos modelos simulados e, das respectivas taxas de amortecimento estrutural, retiradas de Medeiros (2016, p.89), sendo os mesmos apresentados na Tabela (3).

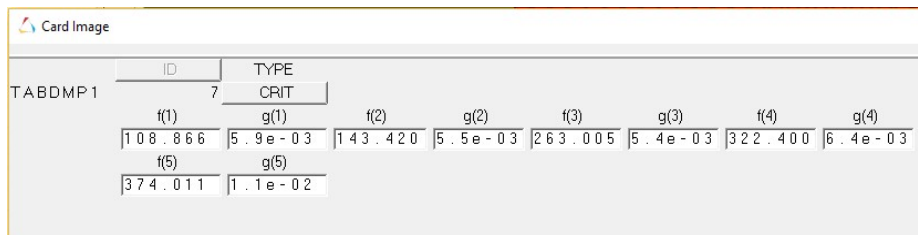
Tabela 3 - Taxas de amortecimento pico-à-pico das placas $P09_{CF}$ e $P10_{CF}$

	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
$P09_{CF}$	0.61%	0.58%	0.57%	0.60%	1.10%
$P10_{CF}$	0.59%	0.55%	0.54%	0.64%	1.05%

Fonte: MEDEIROS, 2016.

O coletor das taxas de amortecimento pode ser visualizado na Figura (23).

Figura 23 - Coletor das taxas de amortecimento da placa $P10_{CF}$



The screenshot shows a window titled 'Card Image' with a table containing the following data:

ID	TYPE										
TABDMP1	7	CRIT									
f(1)	g(1)	f(2)	g(2)	f(3)	g(3)	f(4)	g(4)				
108.866	5.9e-03	143.420	5.5e-03	263.005	5.4e-03	322.400	6.4e-03				
f(5)	g(5)										
374.011	1.1e-02										

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Onde $f(i)$ são as frequências naturais do modelo inicial para a placa $P10_{CF}$ e $g(i)$ são as taxas de amortecimento retiradas da Tabela (3).

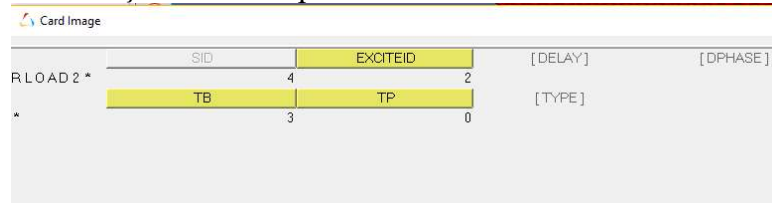
O segundo parâmetro adicionado foi a força externa dinâmica. Para simplificação dos resultados, fez-se com que essa força fosse igual à unidade, para que os valores das FRFs dos nós apresentados pelo Hyperworks já estivessem normalizados e condizentes com a equação (145), porém, com unidade [mm/s²/N].

Para a adição dessa força dinâmica unitária aos modelos iniciais, fez-se necessário inserir mais três coletores nos modelos. O primeiro destes coletores foi o da força propriamente dita, que pode ser representada pela equação (151).

$$f(\omega) = AB(\omega)e^{i(\varphi(\omega)+\theta-2\pi\omega\tau)}. \quad (151)$$

Para inserir a força unitária, faz-se necessário que $A = 1$, $B(\omega) = 1$ e $e^0 = 1$. A Figura (24) exibe a ilustração desse coletor dentro do Hyperworks. É importante citar que a constante A da equação (151) é o termo EXCITEID da Figura (24) e a função $B(\omega)$ é o termo TB. Os termos $\varphi(\omega)$, θ e τ presentes na exponencial são as variáveis TP, DPHASE e DELAY, respectivamente, presentes na Figura (24) e não foram incluídas, logo, atribuiu-se o valor igual a 0, fazendo com o termo exponencial valha 1. Por fim, o termo TYPE indica o tipo de excitação externa, podendo ser forças, deslocamentos, velocidades ou acelerações. Quando não selecionado, este termo se refere ao padrão, que são excitações por forças externas. Por fim, os números 2 e 3 presentes na figura (24) para os termos EXCITEID e TB, respectivamente, referem-se ao número desses coletores no Hyperworks e não aos valores estabelecidos para os mesmos.

Figura 24 - Coletor da força dinâmica aplicada aos modelos



Parameter	Value
SID	4
EXCITEID	2
[DELAY]	[DELAY]
[DPHASE]	[DPHASE]
TB	3
TP	0
[TYPE]	[TYPE]

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Os outros dois coletores que determinam a força aplicada à estrutura simulada são o EXCITEID e o TB presentes na Figura (24). O primeiro é um coletor aplicado a estrutura, na seção de restrições, porém apresenta condições diferentes das mesmas. Este coletor pode ser interpretado como a representação física da carga dinâmica na estrutura, ou simplesmente sua amplitude. Este termo foi aplicado ao ponto H_{11} , com intensidade unitária na direção z positiva.

O termo TB presente na Figura (24) é o último coletor envolvido para a criação de uma força dinâmica e tem como característica ser uma função tabular. Este coletor cria uma função de magnitude em função da frequência ω e, como citado anteriormente, essa função deve ser constante e igual a 1 em toda a faixa de frequência ($B(\omega) = 1$). Para isto, utilizou-se como função tabular uma função linear conforme a equação (152).

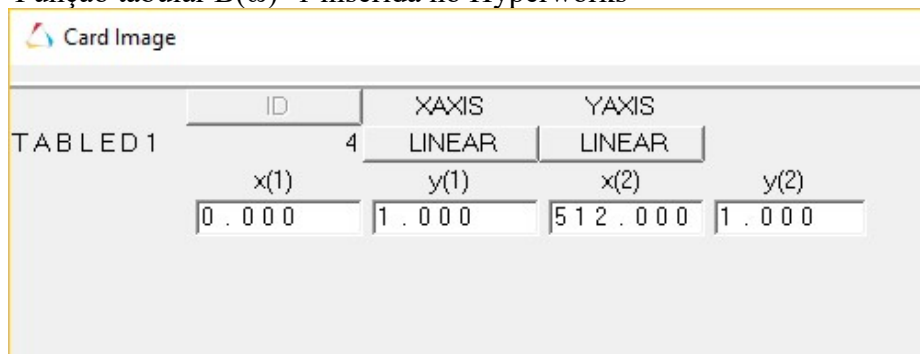
$$y = \frac{y_2x_2 - y_1x_2}{x_2(x_2 - x_1)}x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}, \quad (152)$$

com y sendo a força determinada por B e x o domínio da frequência ω . Os pontos x_1 , y_1 , x_2 e y_2 são pontos conhecidos da função. Pela análise da equação (152), pode-se verificar que se $y_1 = y_2$, o termo que multiplica a variável x se anula, sobrando somente o segundo, da forma:

$$y = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1. \quad (153)$$

Portanto, determinou-se que $y_1 = y_2 = 1$ e que a faixa de frequência analisada seria de 0 a 512 Hz. O coletor de TB pode ser visualizado na Figura (25).

Figura 25 - Função tabular $B(\omega)=1$ inserida no Hyperworks



ID	XAXIS	YAXIS
TABLED1	4	LINEAR
	LINEAR	LINEAR
	x(1)	y(1)
	0.000	1.000
	x(2)	y(2)
	512.000	1.000

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Determinados o coletor de amortecimentos e os componentes do coletor de força dinâmica, faz-se necessário ainda a adição de um coletor contendo a faixa de frequência onde as FRFs serão analisadas. Assim, como o domínio da função tabular, essa faixa foi de 0 a 512 Hz. É importante citar que a resolução deste coletor foi de 0.25 Hz, ou seja, a frequência foi incrementada em 0.25 Hz, de 0 até 512 Hz, gerando assim 2049 pontos, mesma discretização utilizada na análise experimental.

Inserindo estes coletores aos modelos iniciais elaborados, pode-se realizar a análise das FRFs dos pontos H_{11} , H_{12} , H_{13} e H_{14} e compará-las com os resultados experimentais presentes em Medeiros (2016), que será o próximo assunto abordado nesse capítulo.

3.4 COMPARAÇÃO SIMULAÇÃO INICIAL X EXPERIMENTAL

Os dados experimentais das placas $P09_{CF}$ e $P10_{CF}$ foram obtidos através de acelerômetros posicionados nos pontos exibidos na Figura (21), como já mencionado anteriormente. Esses dados foram apresentados em termos das componentes reais e imaginárias

dos pontos, para cada frequência de excitação - que possui a mesma resolução de 0.25 Hz presente nas simulações - em unidades [g/N], onde g refere-se à constante gravitacional.

Para uma melhor visualização através de figuras similares à Figura (17), fez-se necessário o tratamento desses dados através da transformação dos mesmos em termos da magnitude e do ângulo de fase das FRFs, através das equações (146) e (147). Ainda, para realizar a mudança de base linear para logarítmica, aplicou-se no módulo resultante a equação (148).

Para os dados simulados, os resultados disponíveis pelo Hyperworks estavam em termos do módulo e do ângulo de fase, porém, nas unidades de entrada, [mm/s²/ N]. Logo, fez-se necessário converter estes dados para a mesma unidade dos resultados experimentais, [g/N], a fim de se poder compará-los. Para esta conversão, utilizou-se a equação (154).

$$Módulo_{g/N} = \frac{1}{9810} Módulo_{\frac{mm/s^2}{N}}, \quad (154)$$

onde a constante presente, 1/9810, é o inverso da constante gravitacional g em [mm/s²]. Realizada essa conversão, aplicou-se então a equação (148) no módulo resultante. Para os ângulos de fase, tanto experimentais quanto simulados, fez-se necessário modifica-los para que se apresentassem na faixa de -180 a 180 graus.

De posse dos dados computacionais e experimentais, na mesma base e unidade, pode-se traçar gráficos de comparação. Estes gráficos foram separados por pontos (H_{11} , H_{12} , H_{13} e H_{14}) e são constituídos pelas curvas de módulo e ângulo de fase. É importante citar que estes gráficos foram o ponto de partida do problema de ajuste de modelo tratado nessa pesquisa, mais especificamente a diferença entre as frequências naturais experimentais e simuladas e os módulos experimentais e simulados nos pontos de ressonância.

3.5 APLICAÇÃO DO PSO

Neste trabalho, duas abordagens de otimização através do PSO foram utilizadas, chamadas de método 1 e método 2. O método 1 é realizado em duas etapas, onde a primeira tem como objetivo minimizar a diferença entre as frequências naturais experimentais e às resultantes das análises modais numéricas, através das propriedades presentes nas partículas, obtendo-se assim o primeiro conjunto de propriedades, que será utilizado na segunda etapa dessa otimização. Este procedimento, por sua vez, consiste na minimização da diferença entre

as magnitudes dos picos de ressonância das FRFs experimentais e numéricas. O fluxograma presente na Figura (27) foi elaborado a fim de se exemplificar melhor estas etapas da otimização.

O método 2, utilizado somente para a placa $P09_{CF}$, constitui na junção das etapas anteriores num único algoritmo. Nessa forma o objetivo era minimizar a distância entre os picos das FRFs, calculado através do Teorema de Pitágoras, onde os catetos eram as diferenças entre as frequências naturais e a diferença entre as magnitudes dos picos de ressonâncias das FRFs.

Apesar de serem parecidos, o método 2 apresenta um número maior de variáveis de projeto, aumentando assim a dificuldade do PSO em achar uma solução adequada ao problema no espaço n -dimensional das variáveis de projeto. Por outro lado, o método 1 exige a elaboração de duas rotinas, uma para cada conjunto de variáveis de projeto, bem como de execuções separadas das mesmas. Por fim, é válido citar que o método 2 foi desenvolvido para tentar melhorar os resultados das otimizações obtidas pelo método 1, uma vez que este método estava apresentando dificuldades em minimizar as diferenças entre as frequências naturais da placa $P09_{CF}$.

A Figura (26) exibe de forma gráfica as abordagens de otimização utilizadas nesse trabalho.

Figura 26 – Exemplificação dos métodos de otimização

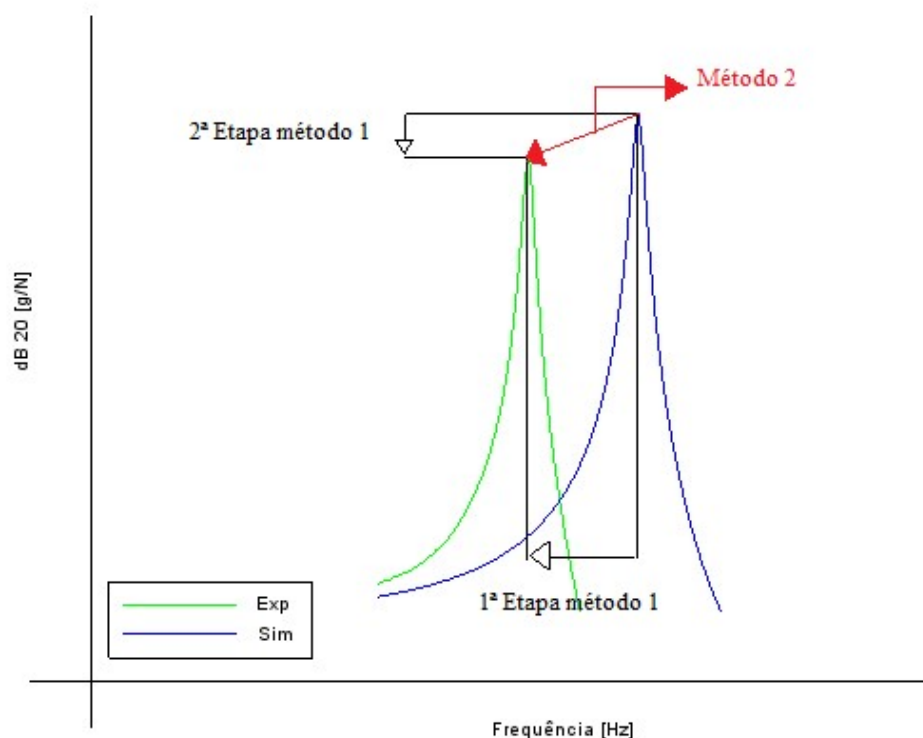
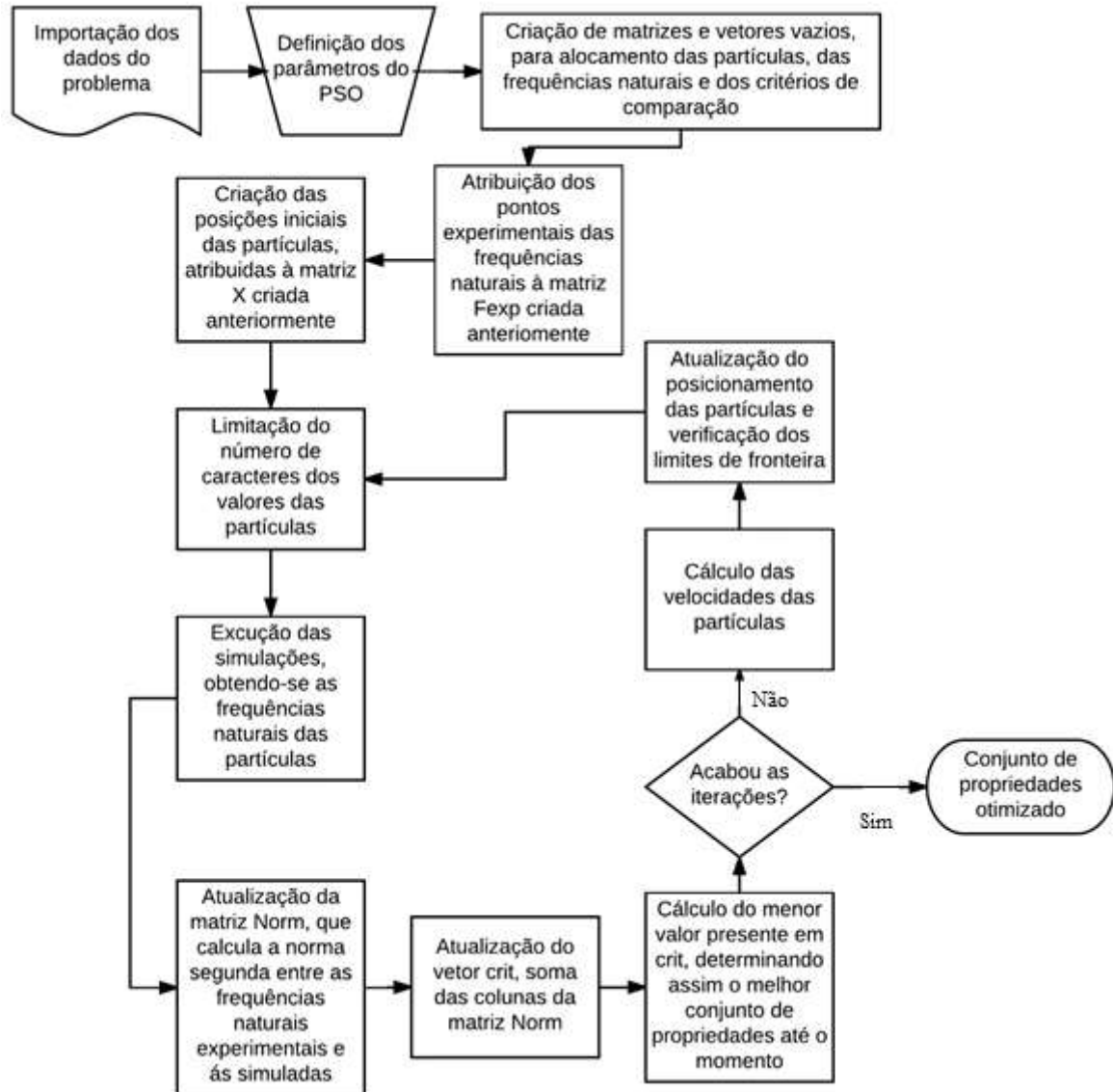


Figura 277 - Fluxograma representando os algoritmos de otimização



Fonte: Elaborado pelo autor, 2017.

O fluxograma da Figura (26) pode também representar a segunda etapa do método 1, bastando substituir “frequências naturais” por “magnitude dos picos das FRFs”. Contudo, para representar o método 2 de otimização deve-se unir os fluxogramas do método 1.

3.5.1 Importação dos dados do problema de otimização

Na primeira etapa presente na Figura (26) ocorre a importação dos dados do problema. Esses dados correspondem aos valores inferiores e superiores que definem o espaço n dimensional das propriedades a serem otimizadas, as frequências naturais analisadas e, em alguns casos, os pontos experimentais das FRFs que serão usados como referência para a

otimização. É importante citar que as frequências naturais presentes nas otimizações que envolvem FRFs são aproximadas para a resolução de 0.25 Hz e não são os verdadeiros valores de frequência natural obtidos na primeira etapa do primeiro método.

3.5.2 Definição dos parâmetros do PSO

A segunda etapa consiste em estipular o número de partículas NP que serão geradas; o número de iterações NI que o algoritmo irá realizar; as constantes w , $C1$ e $C2$, apresentadas na equação (150), retiradas de MONTERO (2013). A Tabela (4) exibe os parâmetros do PSO utilizados nessa pesquisa. É válido salientar que NP e NI foram alterados em algumas otimizações, porém, na maioria dos casos estes parâmetros foram utilizados com os valores apresentados na Tabela (4).

Tabela 4 - Parâmetros do PSO utilizados

NI	30
NP	50
w	0.9
C1	2.0
C2	2.0

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

3.5.3 Criação das matrizes e vetores nulos

A terceira etapa exibida na Figura (26) consiste na criação das matrizes e vetores nulos (todos os termos são zeros), sendo estes:

- *Matriz X*: esta matriz aloca as posições das NP partículas utilizadas no PSO e seu tamanho é $(nvar, NP)$;
- *Matriz XPB*: esta matriz comporta as melhores posições das NP partículas e seu tamanho é $(nvar, NP)$;
- *Vetor XGB*: os valores presentes neste vetor são as propriedades presentes na partícula que obteve o melhor resultado do PSO e tem tamanho $(nvar, 1)$;
- *Matriz Fexp*: esta matriz aloca as 5 primeiras frequências naturais experimentais para a primeira etapa do método 1 ou os valores das 5 primeiras magnitudes dos picos de ressonância experimentais para o ponto escolhido, caso seja a segunda

etapa do método 1. Para o método 2 foram criadas as matrizes FN e FRF, que têm a mesma finalidade da matriz F_{exp} para a primeira e segunda etapa do método 1, respectivamente. Essas matrizes têm tamanho ($nfreq$, NP);

- *Matrizes Fno e Fcom*: estas matrizes comportam os valores das 5 primeiras frequências naturais computacionais para cada partícula e os valores das 5 primeiras magnitudes dos picos de ressonância computacionais para o ponto escolhido, respectivamente. Para o método 2 de otimização as duas matrizes foram utilizadas simultaneamente. Essas matrizes têm tamanho ($nfreq$, NP);
- *Matriz Norm*: esta matriz possui os valores da norma segunda entre as diferenças das frequências naturais experimentais e computacionais para a primeira etapa do método 1. Para a segunda etapa deste método, ela possui os valores da norma segunda entre as diferenças das magnitudes dos picos de ressonância experimentais e computacionais. Para o método 2 foram criadas as matrizes NormFN e NormFRF, que possuem a mesma finalidade da matriz Norm para a primeira e a segunda etapa do método 1, respectivamente. Essas matrizes têm tamanho ($nfreq$, NP);
- *Matriz D*: matriz presente somente no método 2 de otimização. Esta matriz contém os valores das distâncias entre os picos de ressonância experimentais e computacionais, obtidos através da extração da raiz quadrada da soma das matrizes NormFN e NormFRF. Essa matriz tem tamanho ($nfreq$, NP);
- *Vetores crit e critn*: O vetor *crit* é a função objetivo do PSO. Para o método 1, este vetor é a soma dos valores presentes em cada coluna da matriz Norm, tanto para a primeira etapa quanto para a segunda. Para o método 2, este vetor é a soma dos valores presentes em cada coluna da matriz D. O vetor *critn* tem a mesma função que o *crit*, porém é modificado em cada iteração e é usado para atualizar o vetor *crit* com os melhores valores para cada partícula até a presente iteração. Estes vetores têm tamanho (1, NP).

Os valores de $nvar$ e $nfreq$ são 15 e 5, respectivamente, e significam número de variáveis de projeto e número de frequências analisadas.

3.5.4 Criação da matriz de comparação

O próximo passo do algoritmo é alocar os valores experimentais das frequências naturais/FRF do ponto em questão na matriz F_{exp} , criando assim a matriz com os valores de

comparação. Para o método por Pitágoras esta etapa aloca as frequências naturais experimentais na matriz FN e os pontos experimentais da FRF do ponto escolhido na matriz FRF.

3.5.5 Criação da matriz de partículas X

A quinta etapa é a criação das posições iniciais das partículas no espaço definido pelas variáveis de projeto. Esse processo é realizado através da equação (155).

$$X(i, j) = xl(i) + R. (xu(i) - xl(i)) \quad (155)$$

Com $i=1,2\dots n$ e $j=1,2\dots NP$. Tem-se também que $xl(i)$ é o menor valor do espaço para a variável de projeto i e $xu(i)$ o maior valor. A constante R é um valor randômico entre 0 e 1.

Escolheu-se utilizar quinze variáveis de projeto nessa pesquisa, sendo elas:

1. Constantes de engenharia: E_1, E_2, G_{12} e ν_{12} ;
2. Espessuras das lâminas: h_0, h_{15} e h_{-15} , referentes à angulação das lâminas a 0, 15 e -15 graus, respectivamente;
3. Ângulo de empilhamento das lâminas: θ_0, θ_{15} e θ_{-15} ;
4. Taxas de amortecimento pico-à-pico referentes as cinco primeiras frequências naturais: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ e ζ_5

Para a primeira etapa do método 1 de otimização, as variáveis de projeto foram as 10 primeiras apresentadas anteriormente, ou seja, todas exceto as taxas de amortecimento pico-à-pico. Estas taxas foram definidas como as variáveis de projeto da segunda etapa método 1 de otimização. Já para o método 2 de otimização, todas as 15 variáveis de projeto foram utilizadas.

A Tabela (5) exhibe os valores extremos das variáveis de projeto. É importante citar que os valores mínimo e máximo apresentados foram calculados a partir de 10% dos valores utilizados nas simulações iniciais para todas as variáveis de projeto, exceto para as espessuras das lâminas. Para estas, utilizou-se métodos estatísticos para a determinação dos limitantes. A abordagem destes métodos será apresentada em sequência.

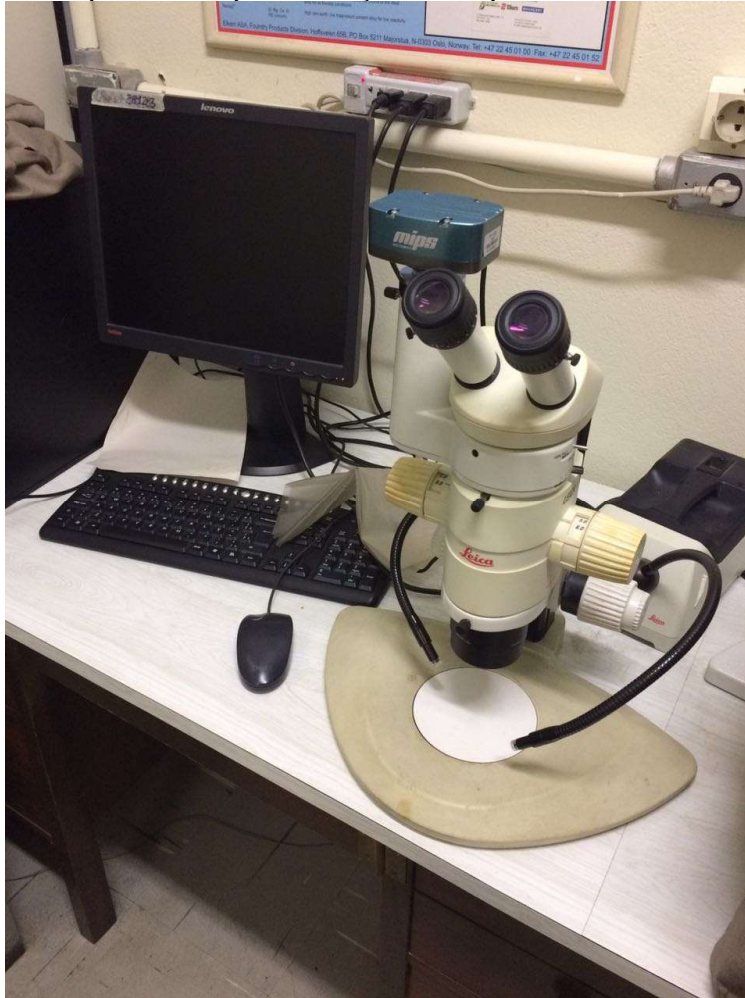
Tabela 5 - Pontos máximos e mínimos para as variáveis de projeto

Variáveis	$P09_{CF}$			$P10_{CF}$		
	Inicial	Mínimo	Máximo	Inicial	Mínimo	Máximo
E_1 [Mpa]	127000	114300	139700	127000	114300	139700
E_2 [Mpa]	10000	9000	11000	10000	9000	11000
G_{12} [Mpa]	5440	4896	5984	5440	4896	5984
ν_{12}	0.340	0.306	0.374	0.340	0.306	0.374
h_0 [mm]	0.271	0.147	0.395	0.248	0.097	0.399
h_{15} [mm]	0.253	0.125	0.380	0.279	0.145	0.413
h_{-15} [mm]	0.263	0.160	0.365	0.278	0.164	0.391
θ_0 [°]	0	-1.5	1.5	0	-1.5	1.5
θ_{15} [°]	15	13.5	16.5	15	13.5	16.5
θ_{-15} [°]	-15	-13.5	-16.5	-15	-13.5	-16.5
ζ_1	0.0061	0.0055	0.0067	0.0059	0.0053	0.0065
ζ_2	0.0058	0.0052	0.0064	0.0055	0.0050	0.0061
ζ_3	0.0057	0.0051	0.0063	0.0054	0.0049	0.0059
ζ_4	0.0060	0.0054	0.0066	0.0064	0.0058	0.0070
ζ_5	0.0110	0.0099	0.0121	0.0105	0.0095	0.0116

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Para as espessuras das lâminas fez-se uma medição individual em regiões das placas. Foram utilizadas 4 regiões em cada placa e medidas as espessuras de cada lâmina em 3 posições diferentes por região, totalizando 33 medidas por região e 132 medidas por placa. O valor correto seria 36 por região, porém, não foi possível distinguir os limites das lâminas à -15 graus na região de simetria. Fez-se então uma única medição para as duas e, posteriormente, dividiu-se esse resultado por 2, a fim de se caracterizar a espessura individual para elas. A Figura (28) exhibe o aparato experimental onde foram feitas as medições das espessuras das lâminas.

Figura 288 – Aparato experimental para medição das espessuras das lâminas das placas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Os resultados das medições realizadas serão apresentados no capítulo seguinte. É importante comentar que se efetuou uma abordagem diferente para a determinação dos limites das espessuras das lâminas pois estas variáveis são as que mais têm influência sobre as frequências naturais dos laminados.

Por fim, é importante citar que, durante as iterações o posicionamento das partículas é alterado através das fórmulas apresentadas nas equações (149) e (150).

3.5.6 Limitação dos tamanhos das partículas

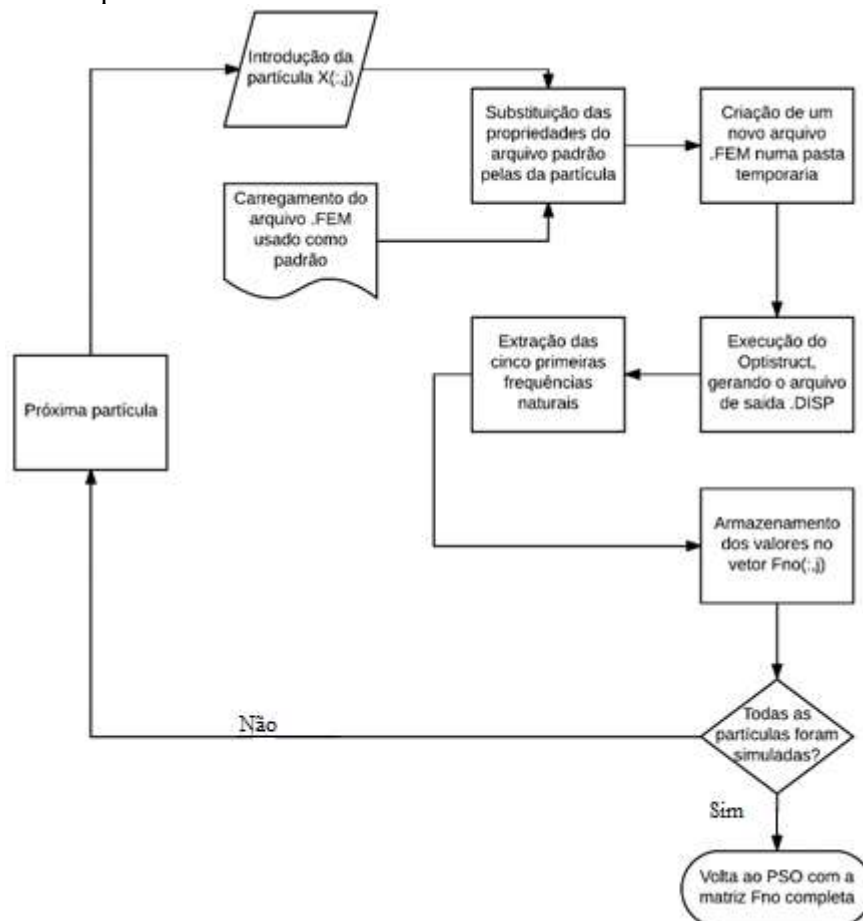
Como a criação destas partículas está vinculada à geração de números aleatórios, com várias casas decimais, e devido aos arquivos .FEM possuírem colunas com número de caracteres limitados, fez-se necessário adicionar um passo, antes da execução das simulações, que limita o tamanho das partículas criadas para que não haja problemas na substituição destes

valores no arquivo base. É importante citar que, assim como a execução das simulações, esse processo é realizado tanto no início quanto nas iterações do PSO.

3.5.7 Execução das simulações via Scilab

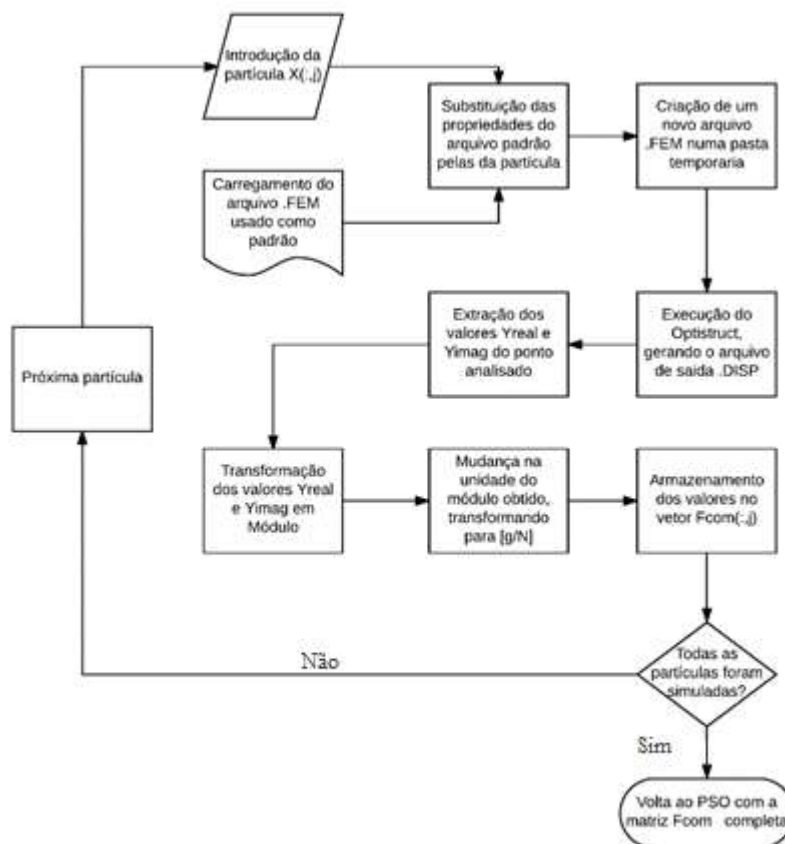
Com a matriz X agora contendo os valores do tamanho adequado, pode-se realizar as simulações pelo Scilab, que foi efetuada num algoritmo diferente. O funcionamento deste algoritmo, para a primeira e para a segunda etapa do método 1 de otimização, pode ser visualizado através dos fluxogramas representados pelas Figuras (29) e (30) a seguir.

Figura 29 - Fluxograma do algoritmo utilizado para realizar as simulações e extrair os valores das 5 primeiras frequências naturais simuladas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2017.

Figura 30 - Fluxograma do algoritmo utilizado para realizar as simulações e extrair os valores das FRFs das partículas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2017.

A finalidade desta etapa é construir a matriz $Fno/Fcom$ para cada partícula inserida no processo. Para o método 2, as duas matrizes são construídas simultaneamente, como citado anteriormente.

Para isto, fez-se necessário elaborar quatro arquivos .FEM para serem utilizados como base, dois para cada placa e um para cada etapa da otimização. Os arquivos da primeira etapa são iguais aos arquivos gerados nas simulações vistas no subcapítulo 3.1, com a diferença que estes geram o arquivo .DISP de saída de dados. Entretanto, para os arquivos da segunda etapa, que se assemelham aos arquivos gerados pelas simulações presentes no subcapítulo 3.3, as frequências naturais usadas no coletor de amortecimento foram alteradas. Assim, estas frequências foram as frequências naturais experimentais da placa, ao invés das frequências naturais providas das simulações.

Realizando o *link* desses arquivos na rotina, pode-se modificar as variáveis de projeto presentes nele para às variáveis presentes na partícula. Esse processo cria um novo arquivo .FEM, que será executado pelo *solver* Optistruct, resultando nos valores das 5 primeiras

frequências naturais/magnitudes dos 5 primeiros picos de ressonâncias da FRF do ponto escolhido para análise. Para as frequências naturais não se faz necessário nenhuma alteração pois as mesmas já se encontram na unidade desejada. No entanto, para os valores da FRF deve-se realizar os procedimentos exemplificados na Figura (29).

A partir do momento em que todas as partículas forem substituídas no arquivo base e, realizados todos os processos posteriores, as matrizes F_{no}/F_{com} estarão completas, com a coluna j de F_{no}/F_{com} , com $j = 1, 2, 3, \dots, NP$, correspondendo a partícula $X(:, j)$.

Por fim, este processo é realizado em duas partes do PSO, uma inicial onde as partículas ainda não sofreram qualquer alteração de posicionamento e outra no laço das iterações, onde as partículas começam a se mover dentro do domínio n dimensional.

3.5.8 Criação e atualização da matriz das normas segundas

O critério para otimização escolhido para este trabalho foi a minimização dos pontos através da norma segunda. Esse critério pode ser definido através da equação (156).

$$Norm = (F_{exp} - F_{com})^2 \quad (156)$$

A matriz $Norm$ foi construída através da formulação mostrada anteriormente e apresenta a mesma dimensão das matrizes F_{exp} e F_{no}/F_{com} . É importante citar que cada coluna dessa matriz corresponde a uma partícula da matriz X .

3.5.9 Criação e atualização do vetor de critério

Como a matriz $Norm$ gerada na etapa anterior contém $nfreq$ linhas, fez-se necessário criar um critério que resumisse os valores presentes em $Norm$ para uma única linha, resultando em uma comparação mais simples entre os resultados de cada partícula. Sendo então esse critério definido como a função objetivo do PSO.

Para isto, criaram-se os vetores $crit$ e $critn$. O primeiro abriga em cada coluna a soma simples dos valores da coluna da matriz $Norm$. Já o segundo, é utilizado para atualizar o primeiro, se conter melhores resultados para a mesma partícula. O objetivo, no final das iterações do PSO, é que o vetor $crit$ tenha os menores valores possíveis e que, para o menor valor dentre estes, o conjunto de variáveis respectivo represente a FRF simulada com os menores erros possíveis em relação à FRF experimental.

O procedimento anterior é utilizado para o método 1 de otimização. Para o método 2, o vetor $crit$ é a soma das distâncias entre os 5 primeiros picos das FRFs experimental e computacional. Estas distâncias são armazenadas em uma matriz D , que é definida como a raiz quadrada da soma das matrizes $NormFRF$ e $NormFN$. O vetor $critn$ possui a mesma finalidade, atualizar o primeiro caso possua algum valor melhor que $crit$. As equações (157) e (158) exibem as funções objetivos dos métodos de otimização 1 e 2, respectivamente.

$$crit(j) = \sum_{i=1}^{nfreq=5} Norm(i, j), \quad (157)$$

$$crit(j) = \sum_{i=1}^{nfreq=5} D(i, j), \quad (158)$$

com $j = 1, 2, \dots NP$.

3.6 COMPARAÇÃO SIMULAÇÃO OTIMIZADA X EXPERIMENTAL

Como o método 2 de otimização foi utilizado somente para o laminado $P09_{CF}$, decidiu-se fazer para o outro laminado um estudo da influência dos valores das taxas de amortecimento pico-à-pico na amplitude dos picos das magnitudes das FRFs. Para isto, modificaram-se as faixas das taxas de amortecimento presentes na Tabela (5) para os valores presentes na Tabela (6).

Tabela 6 - Novos limites das taxas de amortecimento para a placa $P10_{CF}$

	Inicial	Mínimo	Máximo
ζ_1	0.0059	0.0030	0.0089
ζ_2	0.0055	0.0030	0.0089
ζ_3	0.0054	0.0030	0.0089
ζ_4	0.0064	0.0030	0.0089
ζ_5	0.0105	0.0070	0.0130

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Selecionou-se, arbitrariamente, os pontos H_{11} e H_{12} para a placa $P09_{CF}$ e os pontos H_{13} e H_{14} para a placa $P10_{CF}$. Para cada placa fizeram-se quatro otimizações, duas para cada ponto.

Para a placa $P09_{CF}$ foram realizadas duas otimizações através do método 1 e duas através do método 2. Já para a placa $P10_{CF}$ quatro otimizações foram realizadas através do método 1, porém, duas foram com as taxas de amortecimento presentes na Tabela (5) e duas com as taxas da Tabela (6).

Realizadas todas as otimizações, traçaram-se as FRFs dos pontos escolhidos para cada placa e para cada otimização, juntamente com a FRF experimental daquele ponto, a fim de compará-las e definir qual foi a melhor abordagem e quais foram os melhores conjuntos de propriedades para as placas $P09_{CF}$ $P10_{CF}$. Definidas as melhores otimizações, para ambas as placas, traçaram-se as curvas otimizadas escolhidas juntamente com as experimentais e as simuladas inicialmente, com o intuito de averiguar potencialidades e limitações na representação das FRFs com as propriedades otimizadas.

Por fim, fez-se uma análise com o objetivo de identificar e justificar as dificuldades encontradas pelo PSO em minimizar certas diferenças nas rotinas elaboradas.

Os algoritmos desenvolvidos para o método 2 de otimização estão presentes nos apêndices, no fim desse trabalho. Para a obtenção dos algoritmos para o método 1 basta particionar os algoritmos presentes nos apêndices em duas partes: a primeira é a análise das frequências e a segunda a amenização das magnitudes dos picos de ressonância. Obviamente, algumas alterações devem ser feitas e as mesmas são comentadas ao decorrer das rotinas, para ambas as partes do método 1 de otimização.

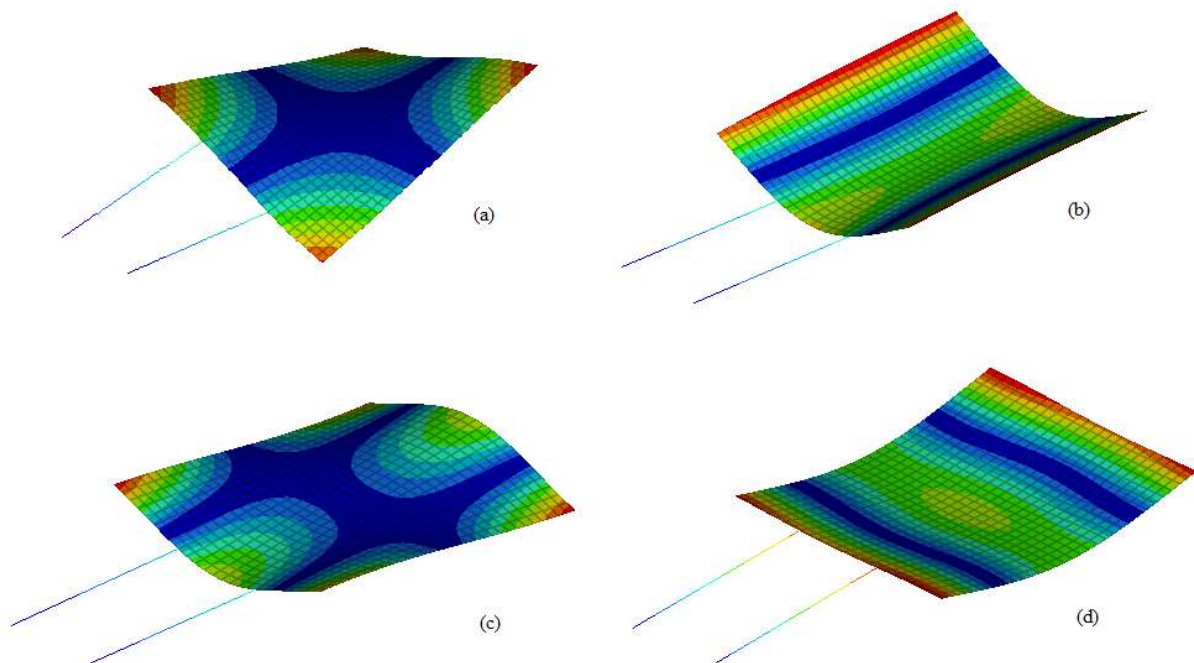
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados das análises realizados no capítulo anterior e, portanto, o mesmo será particionado de maneira similar ao anterior.

4.1 ELABORAÇÃO DOS MODELOS INICIAIS

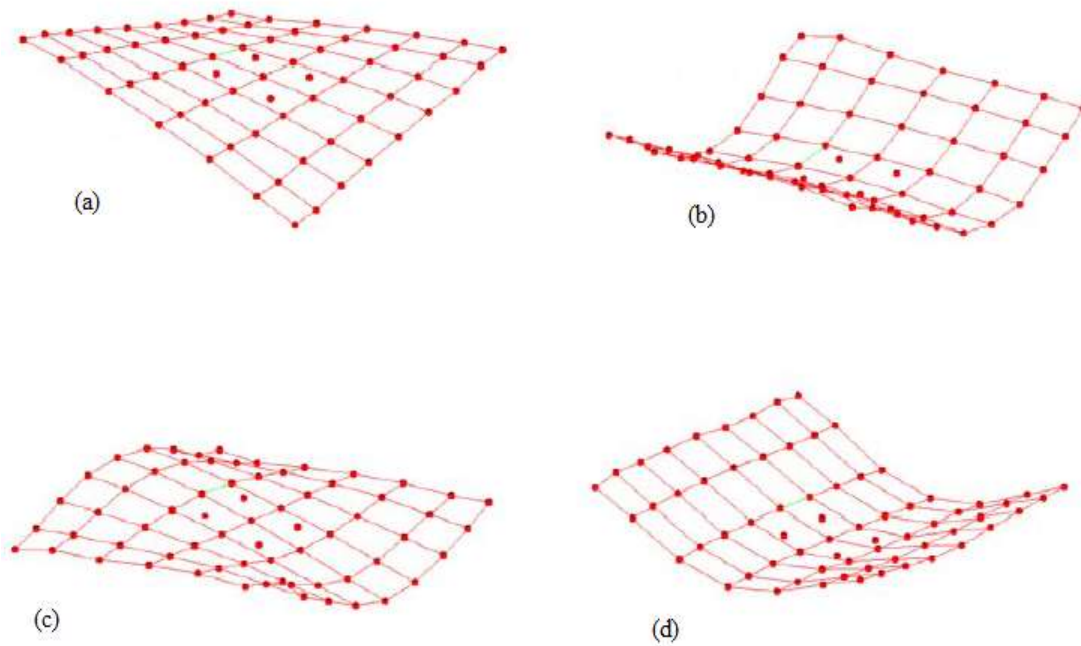
Como citado no capítulo 3, a primeira análise realizada foi a elaboração de um modelo inicial, para averiguar o comportamento da estrutura simulada em relação ao comportamento da estrutura real (analisada experimentalmente). Para isto, realizou-se uma simulação modal a fim de determinar os modos de vibração e compará-los com os modos presentes em MEDEIROS (2016). A Figura (31) exhibe os resultados da análise modal realizada e a Figura (32) apresenta os modos de vibração das placas de fibra de carbono retiradas de MEDEIROS (2016, p.83).

Figura 31 - Quatro primeiros modos de vibração do modelo inicial elaborado para a placa *P09CF*. (a) é o primeiro modo de torção; (b) o primeiro modo de flexão; (c) o segundo modo de torção e (d) segundo modo de flexão.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 32 - Quatro primeiros modos de vibração para as placas de fibra de carbono. (a) é o primeiro modo de torção; (b) o primeiro modo de flexão; (c) o segundo modo de torção e (d) segundo modo de flexão.



Fonte: MEDEIROS, 2016.

Percebe-se que as estruturas apresentam os mesmos modos de vibração, logo, conclui-se que o comportamento do modelo inicial está de acordo com o comportamento da estrutura, fazendo com que a modelagem inicial das placas feitas no Hyperworks esteja correta.

4.2 ANÁLISE DO TAMANHO DOS ELEMENTOS

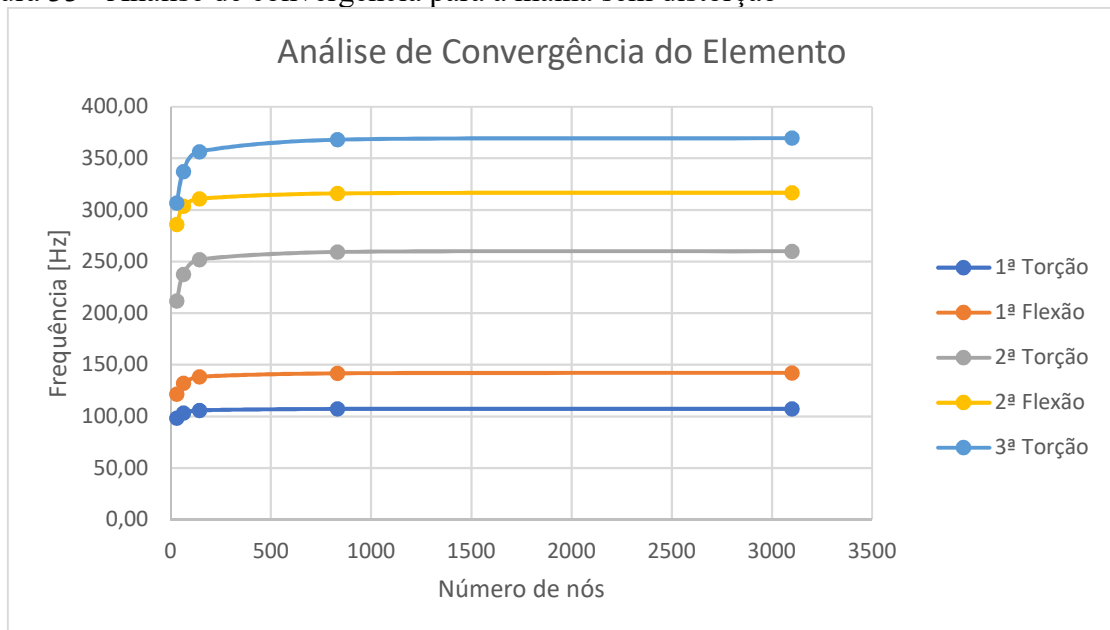
Determinados os parâmetros de modelagem, pode-se então determinar o tamanho do elemento que será utilizado nas análises das FRFs. Como já mencionado no capítulo 3, os tamanhos dos elementos escolhidos foram 65, 40, 25, 10 e 5 mm e, a análise foi realizada sem e com a adição dos pontos H_{11} , H_{12} , H_{13} e H_{14} , que geram distorções na malha. A relação entre o tamanho do elemento e o número de nós é apresentada pela Tabela (7) e os resultados do teste de convergência para as duas condições anteriores são mostrados nas Figuras (33) e (34).

Tabela 7 - Relação entre tamanho de elemento e número de nós

Tamanho do Elemento [mm]	Número de nós
5	3100
10	832
25	143
40	63
65	30

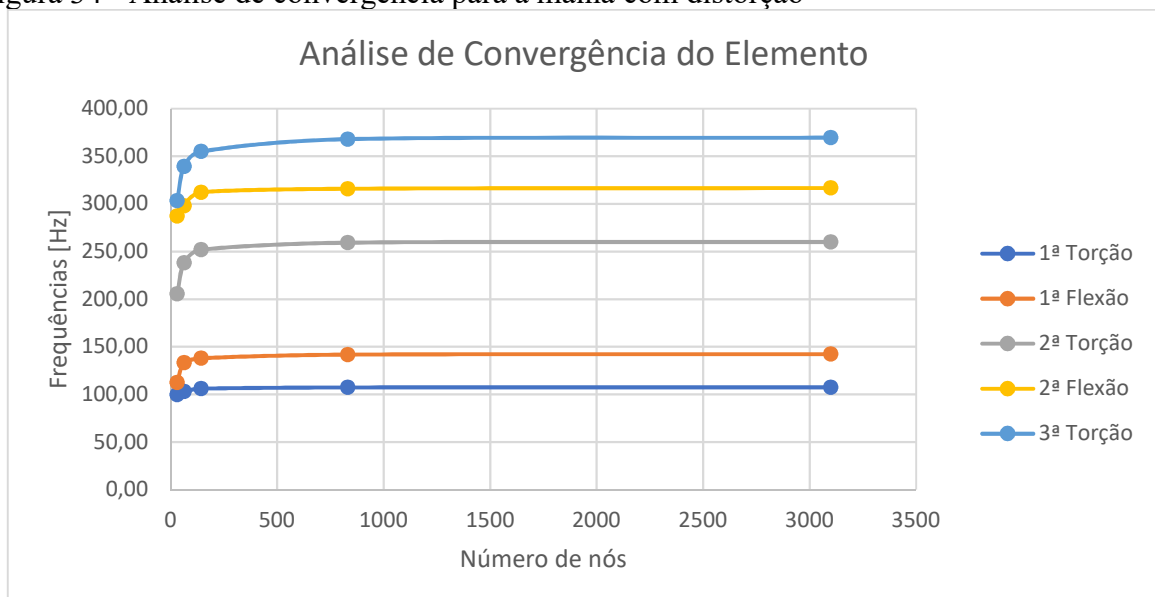
Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 33 - Análise de convergência para a malha sem distorção



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 34 - Análise de convergência para a malha com distorção



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

É importante comentar que, cada ponto nas curvas representam um tamanho de elemento, iniciando-se com 65 mm até 5 mm, da esquerda para direita, ou seja, o ponto da extrema direita do gráfico representa os resultados para a malha com elementos de 5 mm.

Percebe-se, para ambos os casos, que a quinta frequência natural é a que sofre mais influência do tamanho de elemento da malha, pois são as curvas que necessitam de um refinamento maior para apresentar o comportamento constante. Dito isto, determinou-se o tamanho de elemento baseado na convergência desta curva em específico. Nota-se também que as curvas referentes à quinta frequência natural começam a apresentar um comportamento constante num ponto próximo ao ponto referente à malha com tamanho de elemento 10 mm. Logo, assumiu-se este tamanho para a realização das análises posteriores. Pode-se concluir este fato também através da análise das Tabelas (8) e (9), que exibem as diferenças percentuais entre as frequências naturais dos elementos consecutivos, assumindo como base a frequência do menor elemento.

Tabela 8 – Frequências naturais e diferenças percentuais entre os resultados dos elementos para malha sem distorção

Frequências Naturais [Hz]				
<i>5 mm</i>	<i>10 mm</i>	<i>25 mm</i>	<i>40 mm</i>	<i>65 mm</i>
107.3358	107.2338	105.8825	103.3920	98.4180
142.1819	141.6964	138.3617	131.9659	121.6603
260.0302	259.2617	251.8906	237.5791	211.9259
316.6918	316.0118	310.8795	303.7325	285.8643
369.6020	368.0436	356.4955	337.0842	306.6000
Diferenças Percentuais				
<i>Frequências</i>	<i>Entre 5 e 10</i>	<i>Entre 10 e 25</i>	<i>Entre 25 e 40</i>	<i>Entre 40 e 65</i>
F1	0.10%	1.26%	2.35%	4.81%
F2	0.34%	2.35%	4.62%	7.81%
F3	0.30%	2.84%	5.68%	10.80%
F4	0.21%	1.62%	2.30%	5.88%
F5	0.42%	3.14%	5.45%	9.04%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Tabela 9 – Frequências naturais e diferenças percentuais entre os resultados dos elementos para malha com distorção

Frequências Naturais [Hz]				
<i>5 mm</i>	<i>10 mm</i>	<i>25 mm</i>	<i>40 mm</i>	<i>65 mm</i>
107.3372	107.2258	105.9683	102.9107	99.54444
142.1898	141.7193	137.9270	133.3702	112.5407
260.0369	259.2838	251.8426	238.0630	205.7224
316.6892	315.9581	312.2039	297.9683	287.3007
369.6198	368.0674	355.0337	339.3892	303.5102
Diferenças Percentuais				
<i>Frequências</i>	<i>Entre 5 e 10</i>	<i>Entre 10 e 25</i>	<i>Entre 25 e 40</i>	<i>Entre 40 e 65</i>
F1	0.10%	1.17%	2.89%	3.27%
F2	0.33%	2.68%	3.30%	15.62%
F3	0.29%	2.87%	5.47%	13.58%
F4	0.23%	1.19%	4.56%	3.58%
F5	0.42%	3.54%	4.41%	10.57%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Analisando os resultados das primeiras colunas das Tabelas (8) e (9), percebe-se que as diferenças percentuais entre os resultados do elemento de 5 mm e o de 10 mm são pequenas, em ambos os casos, não justificando a escolha de um elemento menor que 10 mm. Por outro lado, as mesmas sobem na comparação entre 10 mm e 25 mm e tendem a aumentar ainda mais nas outras colunas, podendo assim influenciar nos resultados obtidos nas análises posteriores.

Por fim, a tabela (10) apresenta a diferença percentual entre as frequências naturais do elemento escolhido para as malhas com e sem distorção.

Tabela 10 - Cinco primeiras frequências naturais da placa $P09_{CF}$ para o elemento de 10mm/832 nós

Diferença percentual elemento 10 mm			
<i>Frequências [Hz]</i>	<i>Sem dist.</i>	<i>Com dist.</i>	<i>Diferença %</i>
F1	107.2338	107.2258	0.0075%
F2	141.6964	141.7193	0.0162%
F3	259.2617	259.2838	0.0085%
F4	316.0118	315.9581	0.0170%
F5	368.0436	368.0674	0.0065%

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Pode-se notar através da análise dos resultados presentes na Tabela (10) que a distorção presente na placa simulada com o elemento de 10 mm e com 832 nós tem pouca influência nos resultados. Logo, a utilização da malha distorcida para as análises seguintes não proporcionará erros provenientes da distorção da mesma.

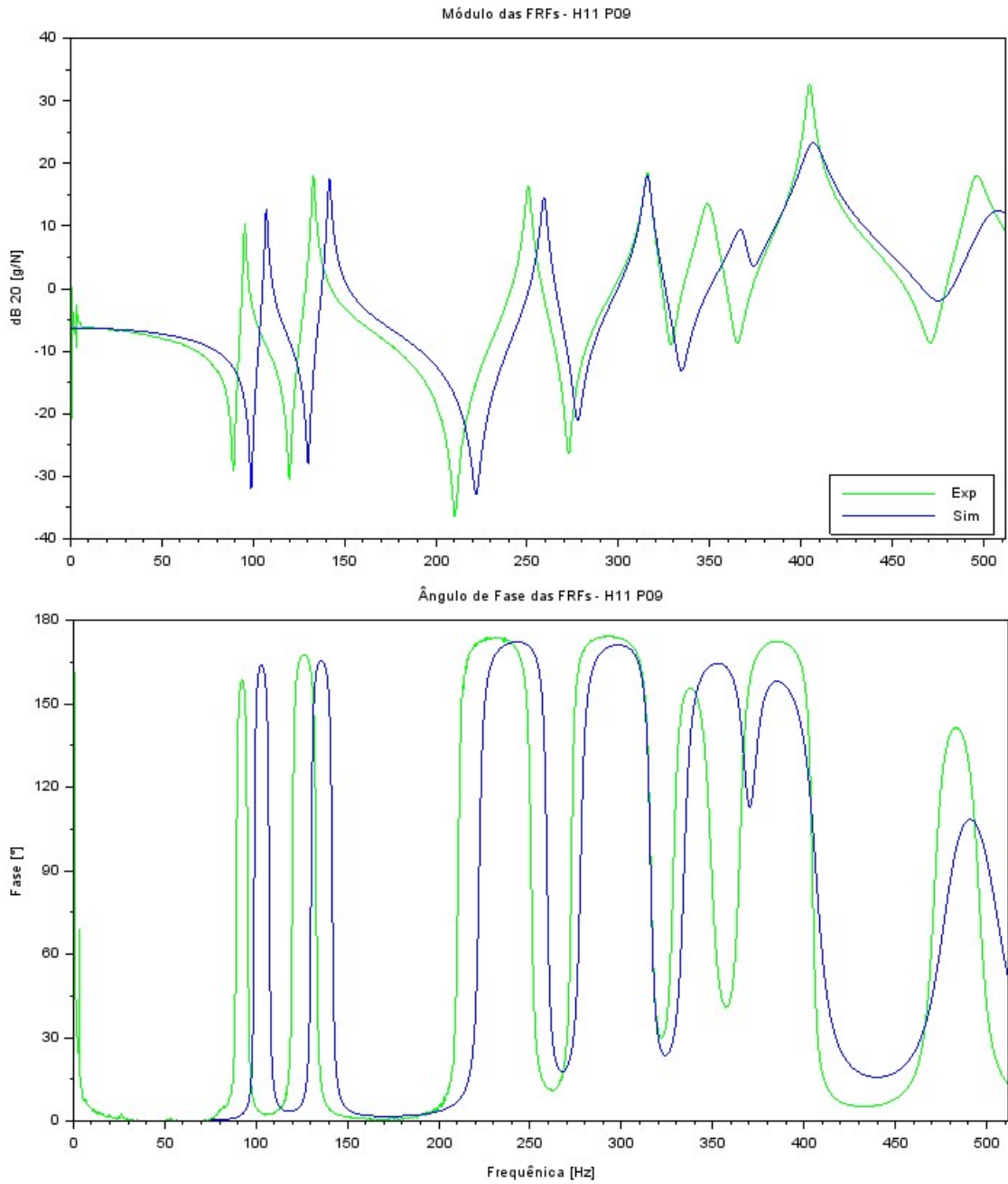
4.3 COMPARAÇÃO SIMULAÇÃO INICIAL X EXPERIMENTAL

Realizadas as análises descritas nos subcapítulos 3.3 e 3.4, obteve-se os gráficos representados pelas Figuras (35), (36) para as FRFs dos pontos H_{11} e H_{12} da placa $P09_{CF}$ e Figuras (37) e (38) para as FRFs dos pontos H_{13} e H_{14} da placa $P10_{CF}$. Optou-se por não utilizar todos os pontos de cada placa para as comparações, pois não se faz necessário comparar todas as FRFs experimentais e computacionais, tornando assim desnecessária a adição de todos os gráficos.

Nota-se, nas Figuras (35) e (36), que as FRFs experimentais e computacionais apresentam o mesmo comportamento, ou seja, as estruturas reagem aos estímulos de maneira similar. Porém, percebe-se também que existe uma diferença entre as frequências naturais das estruturas, bem como na amplitude das curvas de magnitude. Estas defasagens são provenientes das diferenças entre as propriedades assumidas no modelamento inicial e as propriedades reais da estrutura. Por fim, alguns pontos iniciais das curvas do ângulo de fase experimentais oscilaram entre -180° e 180° muito rapidamente, fazendo com que surgissem barras verticais no gráfico, que não influenciam na análise do comportamento da curva do ângulo de fase experimental e que podem ter sido geradas por alguma interferência externa.

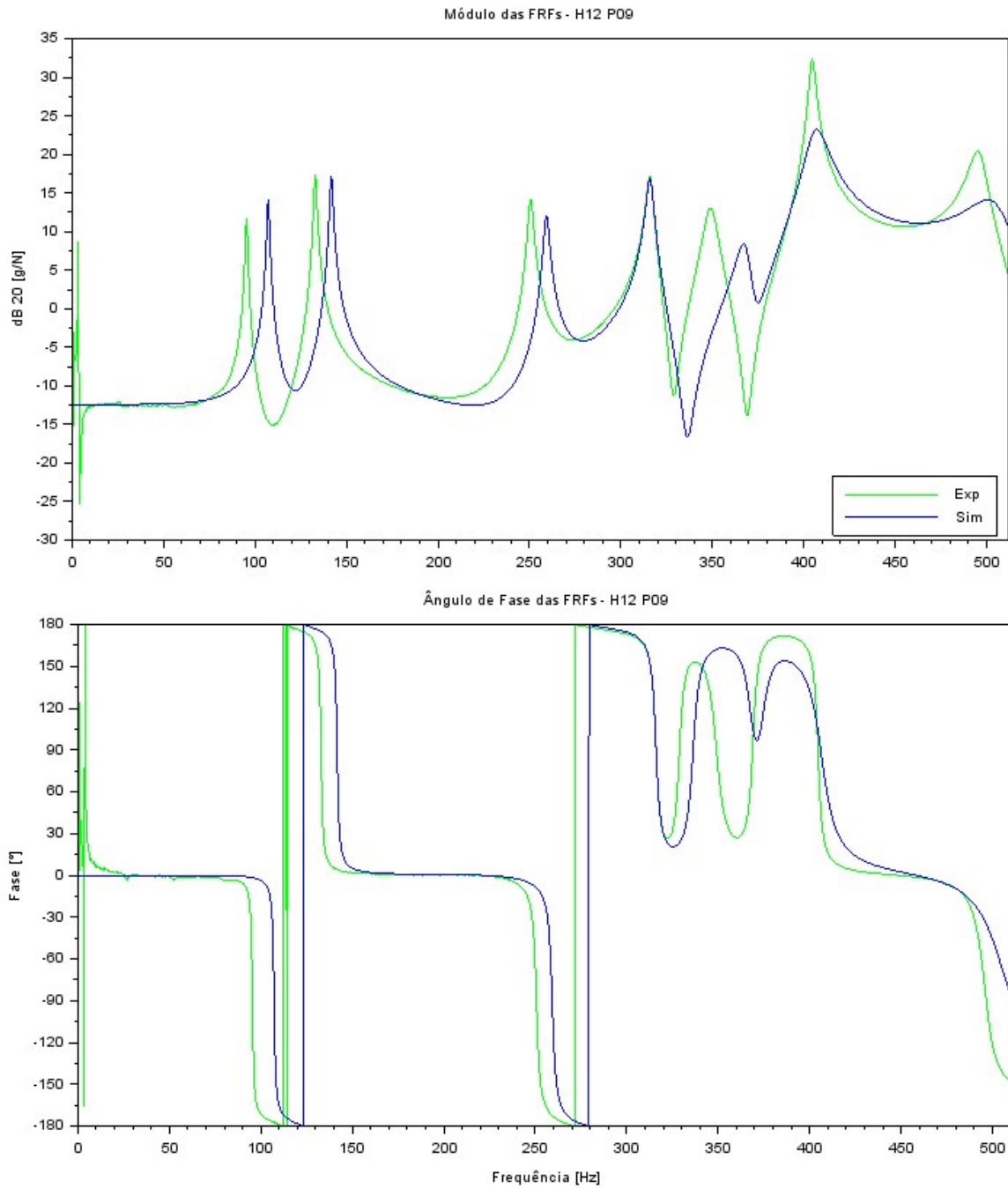
Através da análise das Figuras (37) e (38), percebe-se que o modelo elaborado inicialmente para a placa $P10_{CF}$, da mesma forma que o elaborado para a placa $P09_{CF}$, apresenta o mesmo comportamento que a estrutura experimental. Neste modelo, porém, as defasagens presentes entre as frequências naturais experimentais e computacionais, as amplitudes das curvas de magnitude e ângulo de fase são menores. Pode-se concluir desta observação que as propriedades assumidas no modelamento se adequam melhor à placa $P10_{CF}$ quando comparadas à placa $P09_{CF}$, ou seja, as propriedades iniciais são mais próximas das propriedades reais da estrutura. Por fim, nota-se na Figura (38) oscilações nas curvas para frequências baixas. Não se sabe ao certo a causa deste comportamento, podendo o mesmo ter sido gerado por alguma perturbação externa durante a aquisição de dados.

Figura 35 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H₁₁ da placa P09_{CF}



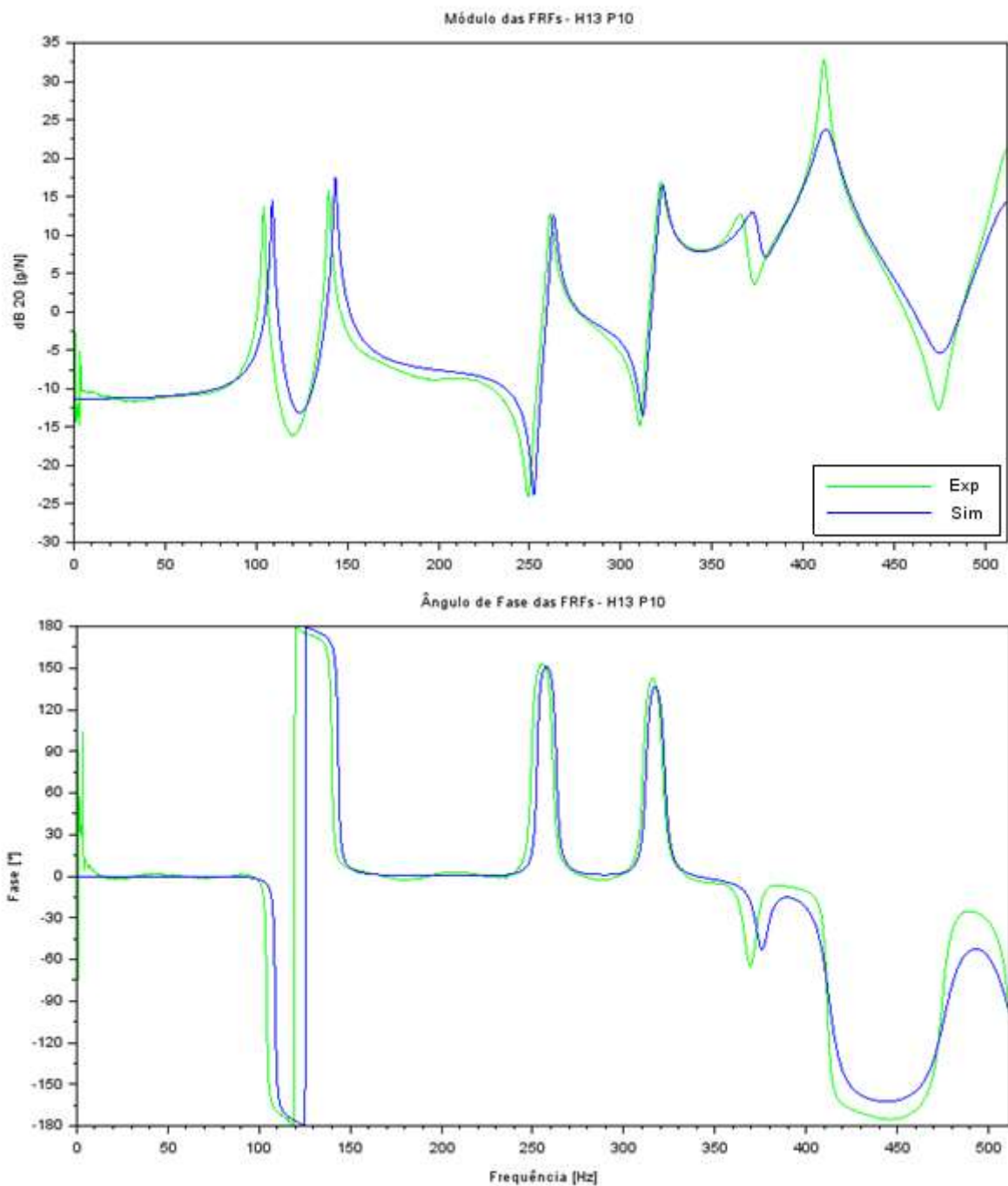
Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 36 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H₁₂ da placa P09_{CF}



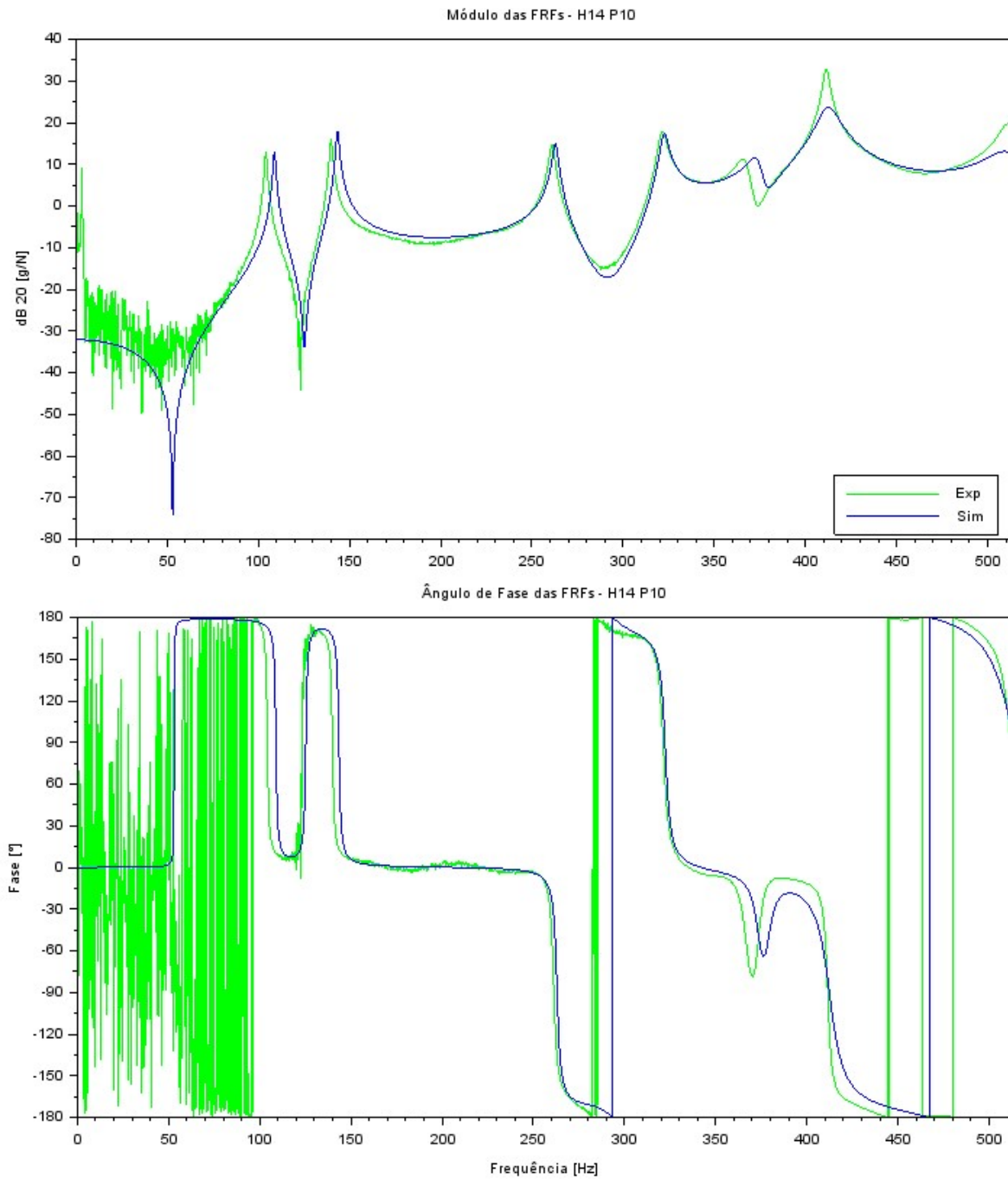
Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 37 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H₁₃ da placa P10_{CF}



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 38 - Comparação entre a FRF experimental e a FRF simulada do ponto H₁₄ da placa P10_{CF}



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

4.4 MEDIÇÃO DAS ESPESSURAS DAS LÂMINAS

A Figura (39) exibe uma das medições realizadas para se determinar as faixas de espessura das lâminas, de acordo com sua orientação de fibra.

Figura 39 - Medições numa região do laminado $P09_{CF}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Realizadas todas as medições, estipulou-se a média das espessuras, separadas pela orientação das lâminas. Estes valores estão dispostos na Tabela (5) nas colunas identificadas como Inicial. Para se determinar então os limites inferiores e superiores, calculou-se os desvios-padrão das medidas. Segundo Correa (2003), 99.73% dos valores de uma distribuição normal encontram-se dentro da faixa de três desvios-padrão, para mais e para menos. Dito isto, subtraiu-se e somou-se da média 3 desvios-padrão para cada orientação de lâmina, a fim de se determinar os limites superiores e inferiores destas variáveis de projeto.

4.5 RESULTADOS DAS OTIMIZAÇÕES

Após a comparação entre os modelos computacionais iniciais e experimentais, pode-se então realizar o ajuste de modelo das placas. Como já exemplificado nos capítulos anteriores, as otimizações foram realizadas através do PSO. Para a placa $P09_{CF}$ fez-se uma comparação entre duas abordagens diferentes do PSO e para a placa $P10_{CF}$ estudou-se a influência dos valores das taxas de amortecimento na minimização dos picos de ressonância das FRFs.

Primeiramente, utilizou-se o PSO para minimizar as diferenças das frequências naturais para ambas as placas, ou seja, utilizou-se a primeira etapa do método 1 de otimização, gerando a Tabela (11).

Tabela 11 - Primeiros resultados da otimização pelo método 1

	<i>P09_{CF}</i>		<i>P10_{CF}</i>			
Var:	1^a Oti	2^a Oti	1^a Oti	2^a Oti	3^a Oti	4^a Oti
	[150]	[40]	[150]	[30]	[30]	[30]
E_1 [Mpa]	139684	137016	123241	130491	127130	132448
E_2 [Mpa]	9274	9206	9020	9668	9497	9904
ν_{12}	0.306	0.374	0.374	0.351	0.362	0.341
G_{12} [Mpa]	5066	5029	4965	5434	4906	4896
h_0 [mm]	0.329	0.306	0.279	0.293	0.284	0.246
h_{15} [mm]	0.221	0.212	0.413	0.191	0.232	0.241
h_{-15} [mm]	0.245	0.284	0.164	0.342	0.322	0.336
θ_0 [°]	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	1.5	0.2
θ_{15} [°]	16.5	16.5	15.8	16.1	14.4	13.5
θ_{-15} [°]	-16.5	-14.5	-16.5	-13.5	-16.5	-16.5
Vb :	82.09418	75.92813	20.60861	16.86929	14.89855	14.54129

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Os números entre colchetes representam a quantidade de iterações realizadas em cada simulação e os valores Vb são os menores valores presentes no vetor *crit* ao final da execução do PSO, ou seja, é o valor vinculado ao melhor conjunto de propriedades daquela otimização e, é definido como o somatório das diferenças entre as frequências naturais experimentais e computacionais ao quadrado.

A primeira análise que pode ser feita através da Tabela (11) é que o número de iterações não apresentou muita influência nos resultados, pois as primeiras otimizações efetuadas para ambas as placas foram as que apresentaram o maior valor de Vb . Pode-se concluir deste fato que os parâmetros w , $C1$ e $C2$ do PSO escolhidos possivelmente estão impedindo que as partículas explorem de maneira adequada o espaço de solução do problema, restringindo o movimento delas em torno de um mínimo local encontrado nas primeiras iterações. Este fato

pôde ser observado a partir das análises seguintes, onde as partículas tiveram um melhor início e, conseqüentemente, resultaram no final das iterações em um valor de Vb menor.

Comparando-se os valores de Vb para as otimizações realizadas para a placa $P09_{CF}$ com os valores para a placa $P10_{CF}$ nota-se uma diferença entre os mesmos. Devido à esta diferença, foram realizadas algumas análises alterando os limitantes das variáveis de projeto, para a placa $P09_{CF}$, a fim de obter resultados melhores, sendo estes apresentados na Tabela (12).

Tabela 12 - Análise das alterações feitas nos limites do espaço solução para a placa $P09_{CF}$

	Coef. de Poisson e Angulações		Espessuras		Propriedades de Engenharia e Ângulos	
	1ª Oti [30]	2ª Oti [30]	1ª Oti [30]	2ª Oti [30]	1ª Oti [30]	2ª Oti [30]
Vb :	72.008638	71.324972	80.070859	76.653835	69.694015	62.098991

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

A primeira alteração foi aumentar em 20% as limitações do espaço solução para o coeficiente de Poisson e para as angulações de fibra; a segunda alteração realizada foi o aumento na faixa das espessuras das lâminas para 0.100 a 0.500 mm e, a terceira mudança foi um aumento em aproximadamente 25% nas propriedades de engenharia E_1 , G_{12} e ν_{12} e, de aproximadamente 20% para os ângulos de fibra. Nota-se que a última alteração realizada apresentou os melhores conjuntos de Vb para a placa em questão. Contudo, apesar de os resultados obtidos na Tabela (12) terem sido melhores que os apresentados na Tabela (11), optou-se por não se trabalhar com eles, uma vez que estes materiais podem apresentar propriedades diferentes das encontradas experimentalmente. A melhora presente na terceira coluna da Tabela (11) pode representar simplesmente um resultado matemático melhor que os obtidos com o espaço solução inicial, resultando num conjunto de propriedades que não convêm ao material compósito utilizado.

Determinada a inviabilidade da alteração do espaço solução, optou-se por realizar o PSO com o espaço solução inicial, que resultou nos dados da Tabela (11), porém, fez-se dessa vez cinco otimizações a fim de obter o menor valor de Vb . Os resultados destas otimizações podem ser verificados a partir da análise da Tabela (13).

Tabela 13 - Resultados das otimizações para a primeira etapa do método 1 para a placa $P09_{CF}$

Var:	1ª Oti [30]	2ª Oti [30]	3ª Oti [30]	4ª Oti [30]	5ª Oti [30]
E_1 [Mpa]	136867	133007	139700	139700	133146
E_2 [Mpa]	9110	9000	9490	9508	9000
ν_{12}	0.306	0.374	0.374	0.349	0.374
G_{12} [Mpa]	4896	4896	4896	5585	5539
h_0 [mm]	0.257	0.305	0.278	0.245	0.341
h_{15} [mm]	0.386	0.145	0.252	0.308	0.293
h_{-15} [mm]	0.164	0.363	0.265	0.239	0.175
θ_0 [°]	-1.9	1.5	-1.5	-1.5	-1.5
θ_{15} [°]	15.3	16.5	16.5	13.9	16.5
θ_{-15} [°]	-16.2	-14.7	-13.5	-13.5	-13.5
Vb:	87.279507	76.275593	74.929437	84.759482	84.185254

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Pela análise da Tabela (13) percebe-se que a terceira otimização gerou o melhor conjunto de propriedades para a placa $P09_{CF}$, pois foi a otimização que gerou menor Vb .

Como os valores Vb são somatórios ao quadrado, concluiu-se que os valores obtidos para a placa $P10_{CF}$, apresentados na Tabela (11), eram aceitáveis e concluiu-se que as variáveis de projeto exibidas na coluna da 4ª otimização seriam o resultado da primeira etapa do PSO para esta placa.

Definidas as 10 primeiras variáveis de projeto para ambas as placas, pode-se então dar continuidade à otimização, através da execução da segunda etapa para este método de otimização. Nesta etapa, como já mencionado, busca-se minimizar as diferenças entre as magnitudes dos picos de ressonância da FRF experimental e os picos da FRF computacional, através da alteração das 5 primeiras taxas de amortecimento. A Tabela (14) exhibe os resultados obtidos para esta segunda parte da otimização.

Os termos H_{13}^* e H_{14}^* referem-se às otimizações realizadas com as novas faixas de amortecimento estabelecidas na Tabela (6) apresentadas no capítulo anterior.

Tabela 14 - Taxas de amortecimento para diferentes otimizações

	$P09_{CF}$		$P10_{CF}$			
Var:	H₁₁	H₁₂	H₁₃	H₁₄	H₁₃*	H₁₄*
ζ_1	0.0065	0.0061	0.0053	0.0047	0.0055	0.0056
ζ_2	0.0052	0.0052	0.0065	0.0063	0.0061	0.0062
ζ_3	0.0052	0.0051	0.0055	0.0052	0.0049	0.0031
ζ_4	0.0055	0.0058	0.0076	0.0072	0.0059	0.0058
ζ_5	0.0128	0.0128	0.0116	0.0119	0.0116	0.0118

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Para o método de otimização que utiliza o Teorema de Pitágoras para determinação da distância entre os picos das FRFs fez-se duas otimizações, a primeira com 90 e a segunda com 30 iterações, com os dados da placa $P09_{CF}$, sendo estes apresentados na Tabela (15).

Tabela 15 - Variáveis de projeto determinadas através do método 2 de otimização - $P09_{CF}$

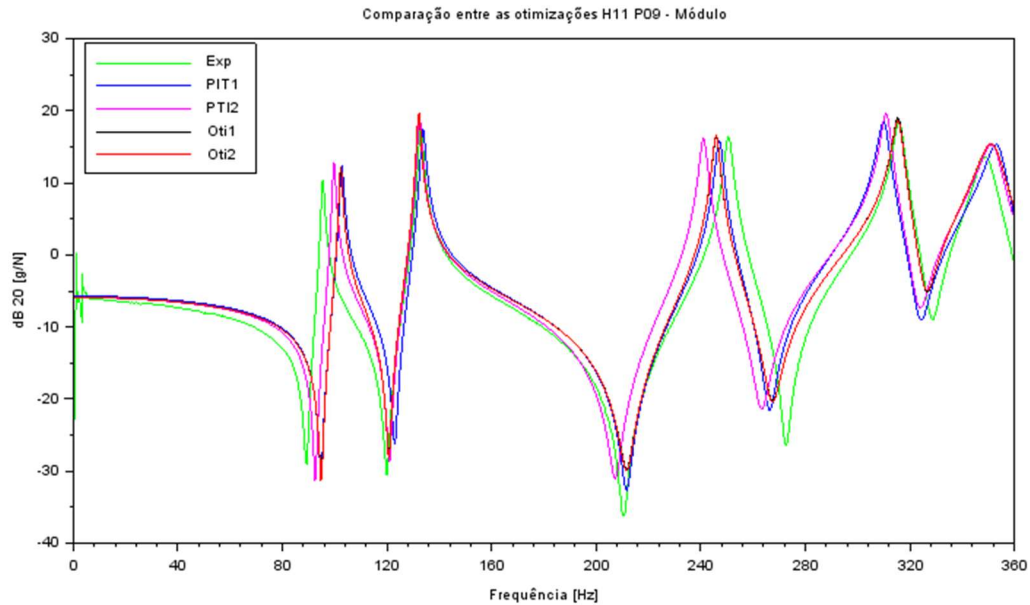
Var	PIT1	PIT2	Var	PIT1	PIT2	Var	PIT1	PIT2
E ₁ [Mpa]	139700	132821	h ₁₅ [mm]	0.266	0.234	ζ_1	0.0067	0.0057
E ₂ [Mpa]	10222	9464	h ₋₁₅ [mm]	0.284	0.167	ζ_2	0.0064	0.0054
ν_{12}	0.374	0.368	θ_0 [°]	1.5	1.4	ζ_3	0.0054	0.0056
G ₁₂ [Mpa]	5984	5776	θ_{15} [°]	13.5	16.4	ζ_4	0.0066	0.0056
h ₀ [mm]	0.227	0.395	θ_{-15} [°]	-13.5	-16.5	ζ_5	0.0099	0.0113

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Determinados então todas as variáveis de projeto, considerando as otimizações realizadas, traçaram-se as FRFs para os pontos H₁₁, H₁₂, H₁₃ e H₁₄ das placas, juntamente com o gráfico experimental, a fim de determinar qual otimização apresentou os melhores resultados, ou seja, qual curva gerada (conjunto de parâmetros) que mais se aproxima do comportamento real da estrutura. Para a placa $P09_{CF}$ os pontos de estudo foram novamente H₁₁ e H₁₂ e para a placa $P10_{CF}$ os pontos H₁₃ e H₁₄.

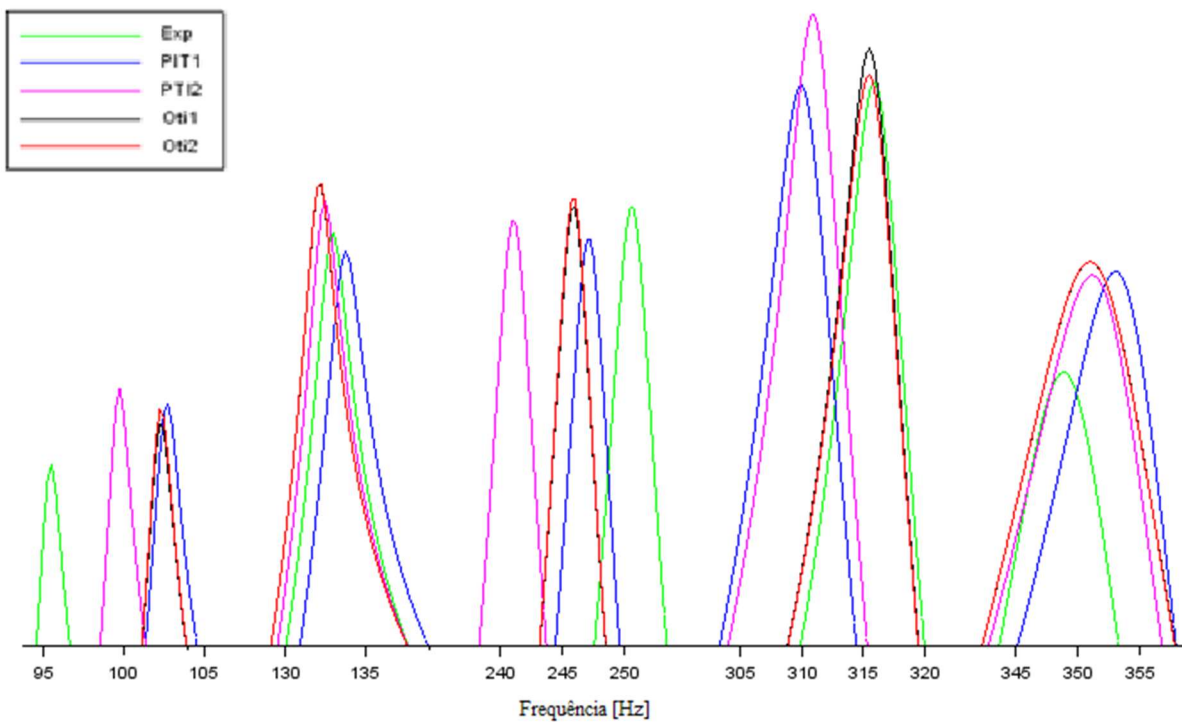
Para a placa $P09_{CF}$ pode-se determinar qual otimização apresentou os melhores resultados através da análise das Figuras (40) e (41).

Figura 40 - Comparação entre as otimizações realizadas no ponto H_{11} para a placa $P09_{CF}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 41 - Ampliação das diferenças nas regiões das ressonâncias do gráfico de comparações das otimizações, $P09_{CF}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Comparando-se primeiro as diferenças entre as frequências naturais experimentais e as frequências naturais otimizadas, percebe-se que, individualmente, cada otimização representa

melhor uma determinada frequência, por exemplo, a segunda otimização realizada através do método 2 (curva rosa) é a que melhor representa a primeira frequência natural experimental (curva verde). No entanto, sua representação da terceira frequência natural é a pior entre todas as outras.

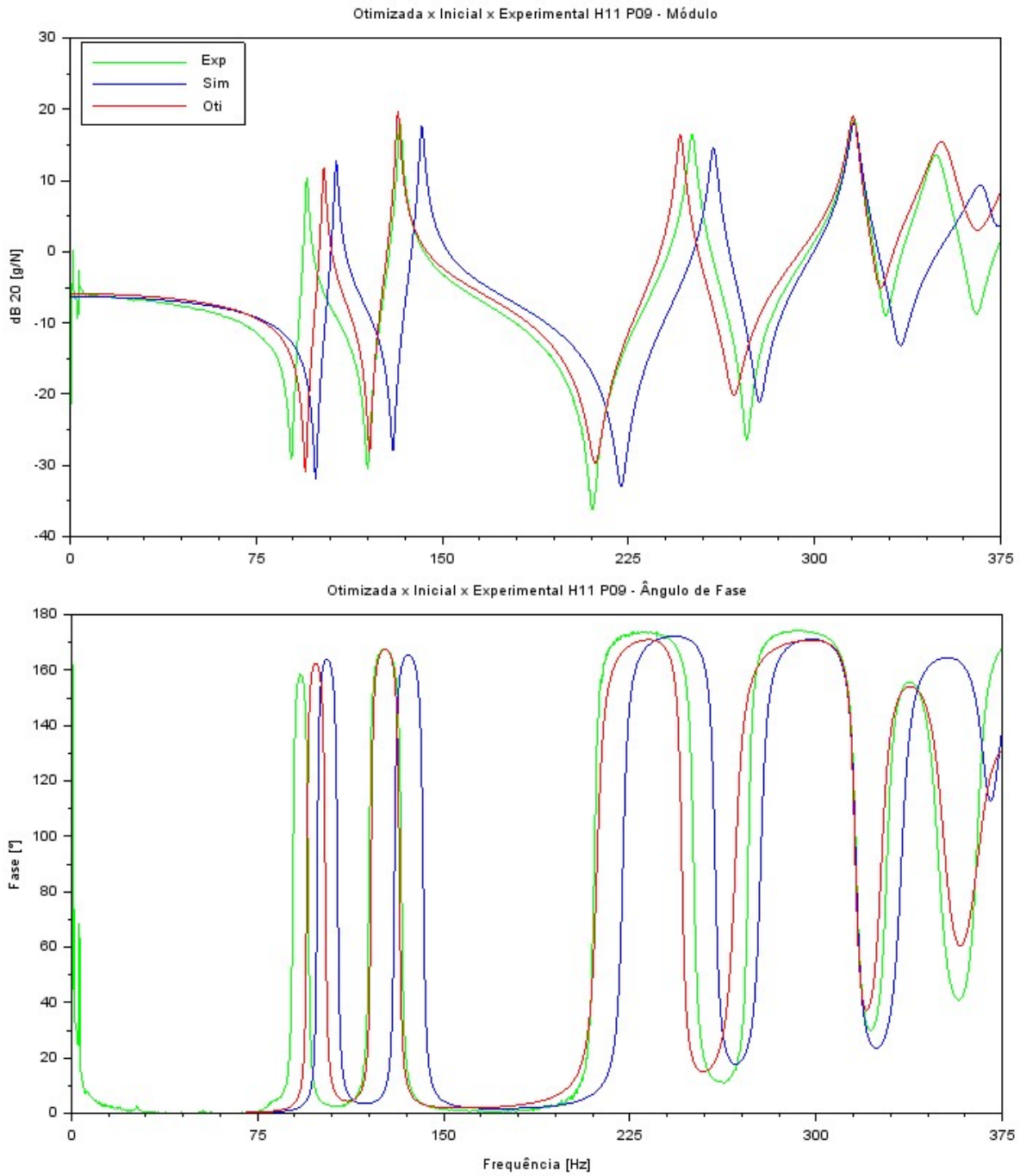
Logo, para a determinação da melhor representação entre as curvas presentes na Figura (40) optou-se por escolher a curva que apresenta os melhores resultados para o conjunto de frequências analisadas e não para uma frequência em específico. Dito isto, pela análise da Figura (41) pode-se concluir que tanto a curva preta, quanto a vermelha apresentam os melhores resultados, se comparadas somente as distâncias entre as frequências naturais das otimizações e as frequências experimentais. Isto deve-se ao fato de a única diferença entre as mesmas são as taxas de amortecimento pico-à-pico e, como as mesmas não influenciam no cálculo das frequências naturais realizadas pelo Hyperworks, ambas as curvas possuem as mesmas frequências naturais, possuindo assim as mesmas distâncias entre as frequências naturais experimentais e suas frequências naturais computacionais.

Para determinar qual a melhor otimização, compara-se qual das curvas apresenta os picos das FRFs mais próximos em altura dos picos experimentais. Na segunda e na quinta frequências naturais as curvas preta e vermelha são praticamente coincidentes, não apresentando assim uma diferença relevante à esta comparação. No entanto, para a primeira e terceira frequências naturais a curva preta apresenta valores de pico mais próximos aos valores experimentais. Somente na quarta frequência natural a curva vermelha apresenta um valor de pico mais próximo do experimental do que a curva preta, logo, optou-se por escolher a curva preta, gerada através da primeira otimização, realizada com o método 1, como a melhor curva dentre todas as outras curvas de otimização presentes na Figura (40). É importante citar que mesmo a curva preta tenha sido considerada a melhor, a diferença entre esta curva e a vermelha é muito pequena, fazendo com que caso a curva vermelha fosse escolhida, essa escolha não ocasionaria uma grande diferença nos resultados.

Pôde-se concluir que o método 2 de otimização apresentou resultados piores que o método 1. Este desempenho se deve ao fato que este método apresenta as 15 variáveis de projeto, tornando o espaço de solução maior, dificultando assim o PSO encontrar o melhor conjunto de propriedades de uma só vez. Vale ressaltar que, talvez um estudo detalhado dos parâmetros do PSO possa resultar em melhores resultados, como por exemplo através da alteração dos valores dos termos de inércia w , $C1$ e $C2$.

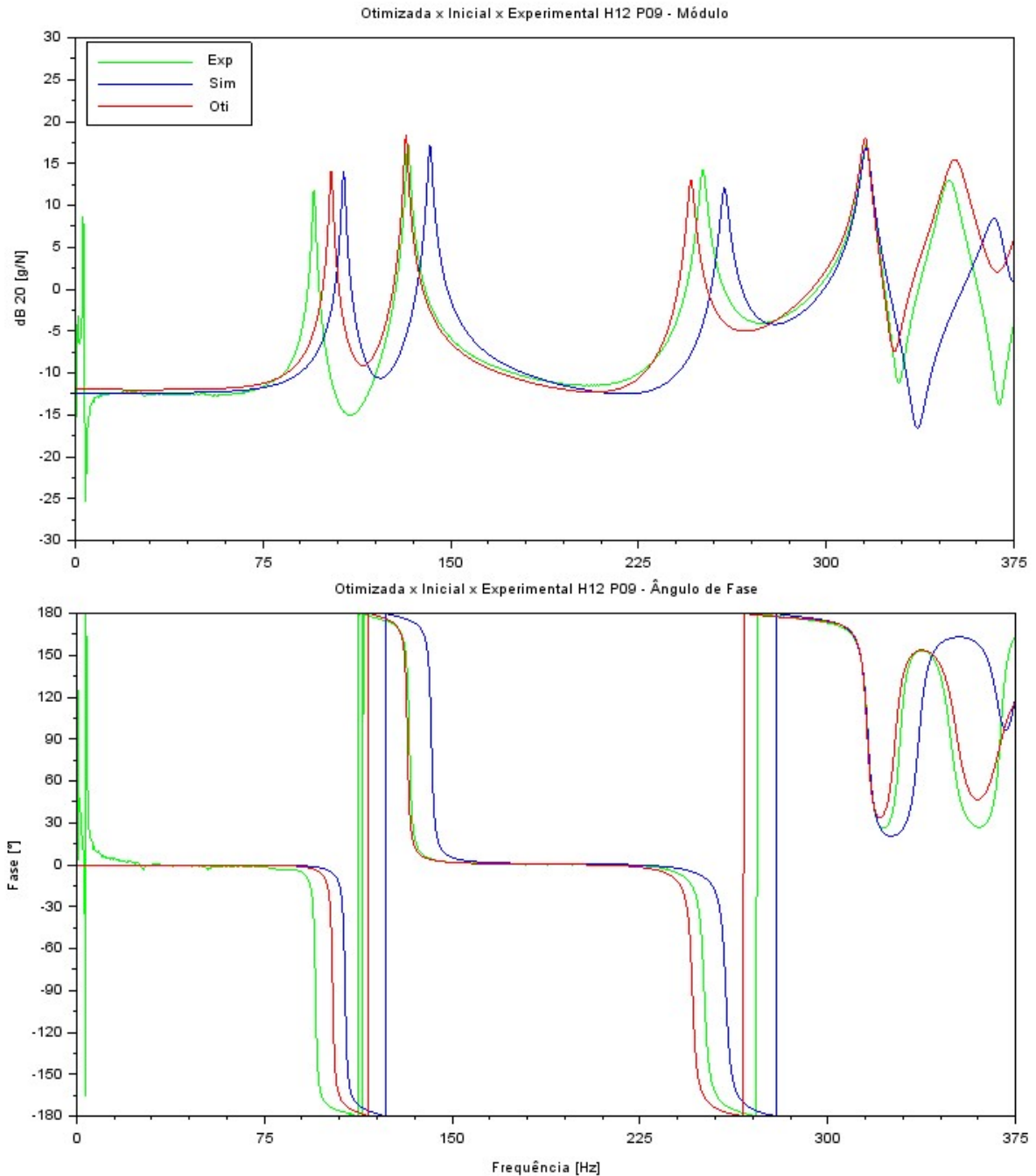
As Figuras (42) e (43) apresentam as FRFs experimentais, das simulações iniciais e da melhor otimização, definida anteriormente, para os pontos H_{11} e H_{12} da placa $P09_{CF}$.

Figura 42 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H_{11} da placa $P09_{CF}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 43 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H_{12} da placa $P09_{CF}$



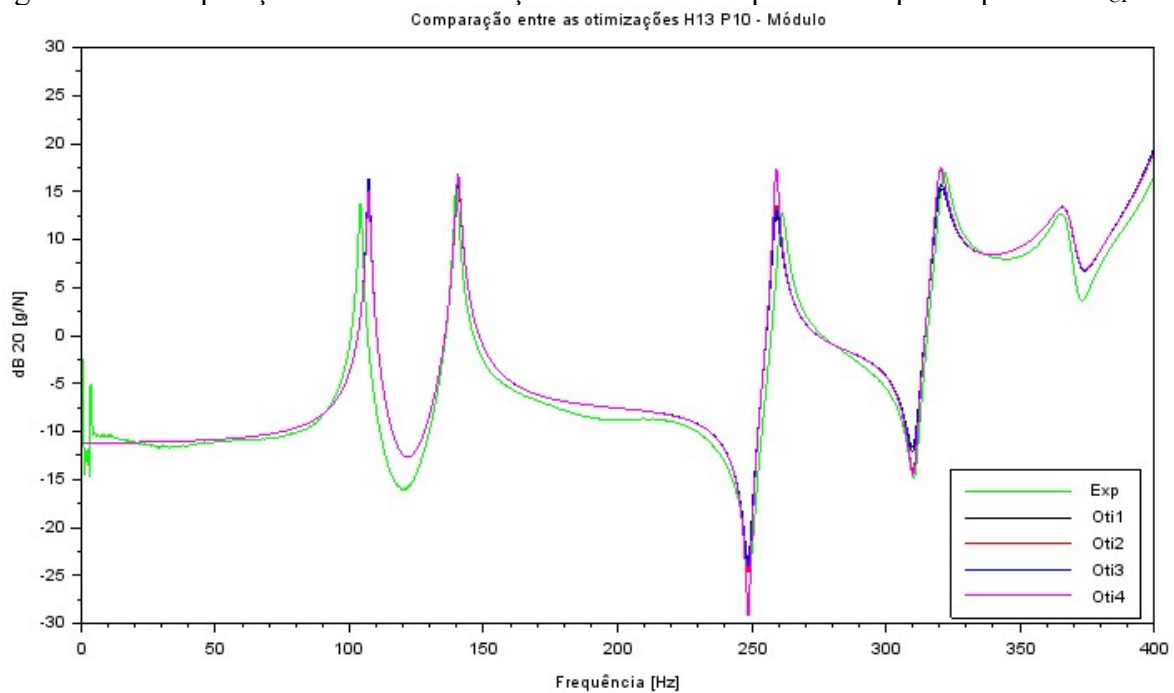
Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Percebe-se, pela análise das Figuras (42) e (43), que as curvas de otimização apresentam resultados melhores que as curvas simuladas inicialmente. As diferenças entre as frequências naturais foram diminuídas para todas as frequências naturais, exceto a quarta, que permaneceu inalterada, praticamente. As diferenças entre os picos de ressonância também foram reduzidas e, alguns picos apresentaram uma boa correlação, não somente nas amplitudes, mas também nas frequências naturais. Por fim, pode-se notar que a otimização apresentou dificuldades em

melhorar as frequências naturais que representam os modos de torção (primeira, terceira e quinta frequências naturais), não tendo nenhuma das frequências otimizadas coincidindo com as frequências experimentais. Para os modos de flexão (segunda e quarta frequências naturais), a otimização se aproximou de maneira excelente da curva experimental. A explicação para tal comportamento será abordada após a discussão dos resultados das otimizações para a placa $P10_{CF}$, pois a mesma também apresentou tal comportamento.

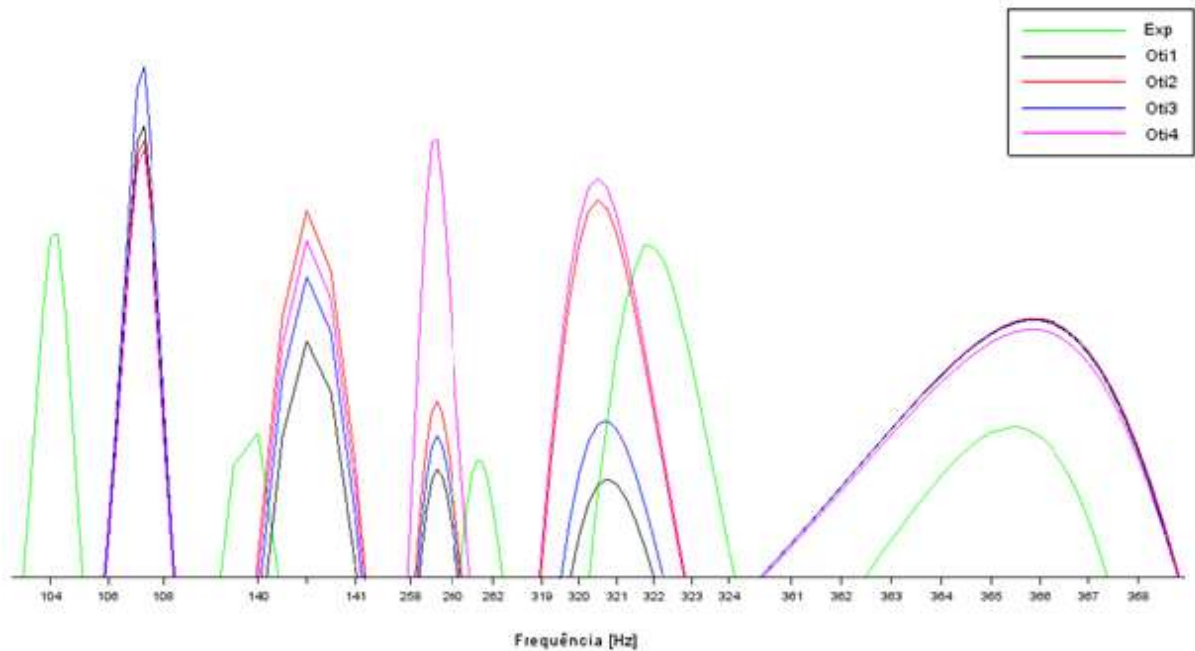
Para a placa $P10_{CF}$ o procedimento para se determinar a melhor otimização realizada será análogo ao realizado para a placa anterior. Logo, as Figuras (44) e (45) apresentam todas as curvas de otimização e as ampliações nas regiões de ressonância, respectivamente.

Figura 44 - Comparação entre as otimizações realizadas no ponto H13 para a placa $P10_{CF}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 45 - Ampliação das diferenças nas regiões das ressonâncias do gráfico de comparações das otimizações, $P10_{CF}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Antes de determinar a melhor curva de otimização presente na Figura (44), será discutida a influência das taxas de amortecimento pico-à-pico nas regiões de ressonância das FRFs. Para isto, pode-se analisar, juntamente com a Figura (44), a Tabela (16) a seguir, que exhibe os valores de taxa de amortecimento resultantes das otimizações para esta placa.

Tabela 16 - Taxas de amortecimento pico-à-pico referentes às otimizações efetuadas na placa $P10_{CF}$

	Oti1	Oti2	Oti3	Oti4
ζ_1	0.0053	0.0055	0.0047	0.0056
ζ_2	0.0065	0.0061	0.0063	0.0062
ζ_3	0.0055	0.0049	0.0052	0.0031
ζ_4	0.0076	0.0059	0.0072	0.0058
ζ_5	0.0116	0.0116	0.0119	0.0118

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Pode-se observar na Figura (45) que o valor mais discrepante entre os picos de ressonância é o pico gerado pela curva rosa para a terceira frequência natural. Percebe-se que a taxa de amortecimento para este pico e para esta curva é 0.31%, enquanto que para as outras os valores ficam em torno de 0.5%. Outro ponto que chama a atenção é a quarta frequência natural, sendo que para as curvas rosa e vermelha as taxas de amortecimento apresentam valores próximos a 0.6%, enquanto que para as curvas preta e azul estes valores estão na faixa de 0.7%.

Pode-se concluir, então, que diferenças de 0.1% entre as taxas de amortecimento tornam-se evidentes no gráfico e, que a mínima variação nas taxas pode ajustar os valores dos picos das FRFs para o valor desejado.

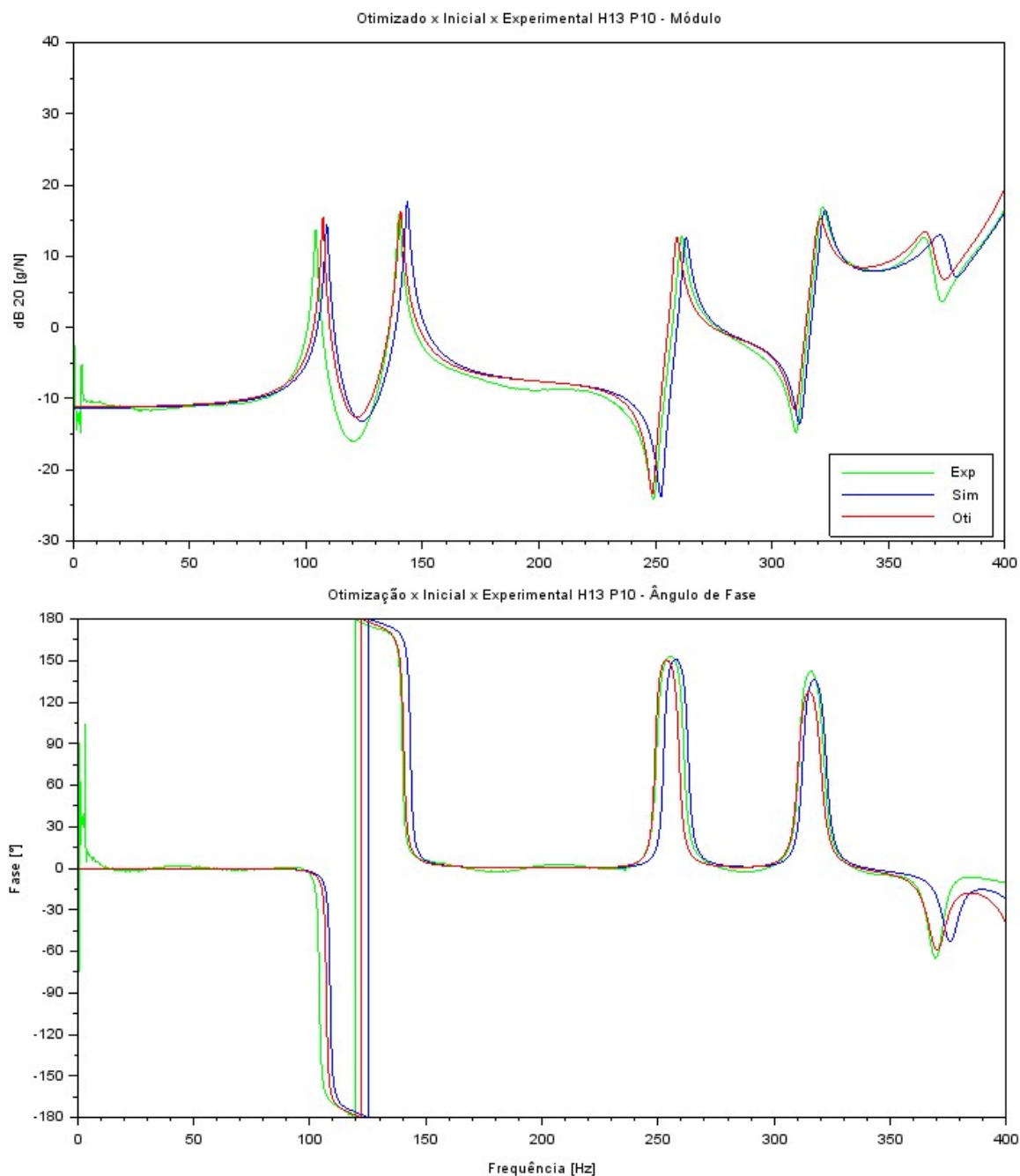
Para esta placa não se faz necessária a análise da curva que possui as frequências naturais mais próximas às frequências naturais experimentais, como realizado para a placa $P09_{CF}$, pois todas as curvas de otimização apresentam as mesmas frequências naturais. Como no caso para a placa $P09_{CF}$, entre as curvas vermelha e preta, neste caso, a única diferença entre todas as curvas de otimização presentes na Figura (44) são as taxas de amortecimento pico-à-pico, que como já explicado, não influenciam na determinação das frequências naturais. Dito isto, a única comparação que deve ser feita para determinar qual a melhor curva de otimização presente na Figura (44) é verificar qual curva apresenta seus picos de ressonância mais próximos aos experimentais. Através da comparação simples entre os picos para todas as cinco frequências presentes na Figura (45), nota-se que tanto a curva rosa quanto a curva preta representam muito bem todas as frequências, com exceção da terceira frequência natural para a curva rosa e da quarta para a curva preta. Como a diferença entre a magnitude do pico de ressonância da curva rosa e a magnitude do pico de ressonância experimental para a terceira frequência natural é maior do que a diferença entre a magnitude do pico de ressonância da curva preta e a magnitude do pico de ressonância experimental para a quarta frequência natural, decidiu-se por determinar a otimização caracterizada pela curva preta como a melhor das quatro otimizações.

As Figuras (46) e (47) apresentam as FRFs experimentais, das simulações iniciais e da melhor otimização, definida anteriormente, para os pontos H_{13} e H_{14} da placa $P10_{CF}$.

Nota-se, através da análise das Figuras (46) e (47), que as curvas otimizadas apresentam resultados melhores que às simuladas inicialmente, com exceção da quarta frequência natural para o ponto H_{13} , e da terceira e da quarta frequências naturais para o ponto H_{14} . Como o pico de ressonância da FRF otimizada para a terceira frequência natural tem a mesma magnitude que o pico da FRF experimental na Figura (46), acredita-se que a diferença que surgiu entre esses picos na Figura (47) provém de limitações da simulação. Ademais, o fato de que a otimização não apresentou bons resultados para a quarta frequência natural não é surpreendente, visto que a curva escolhida como melhor otimização apresentou resultados ruins para esta frequência na análise feita com base na observação das Figuras (44) e (45). No entanto, com relação às demais frequências a otimização apresentou resultados melhores, com ênfase para a quinta frequência natural, onde a correção foi mais acentuada, tanto na amplitude do pico de ressonância como a discrepância entre a frequência natural simulada inicialmente e à experimental. Por fim,

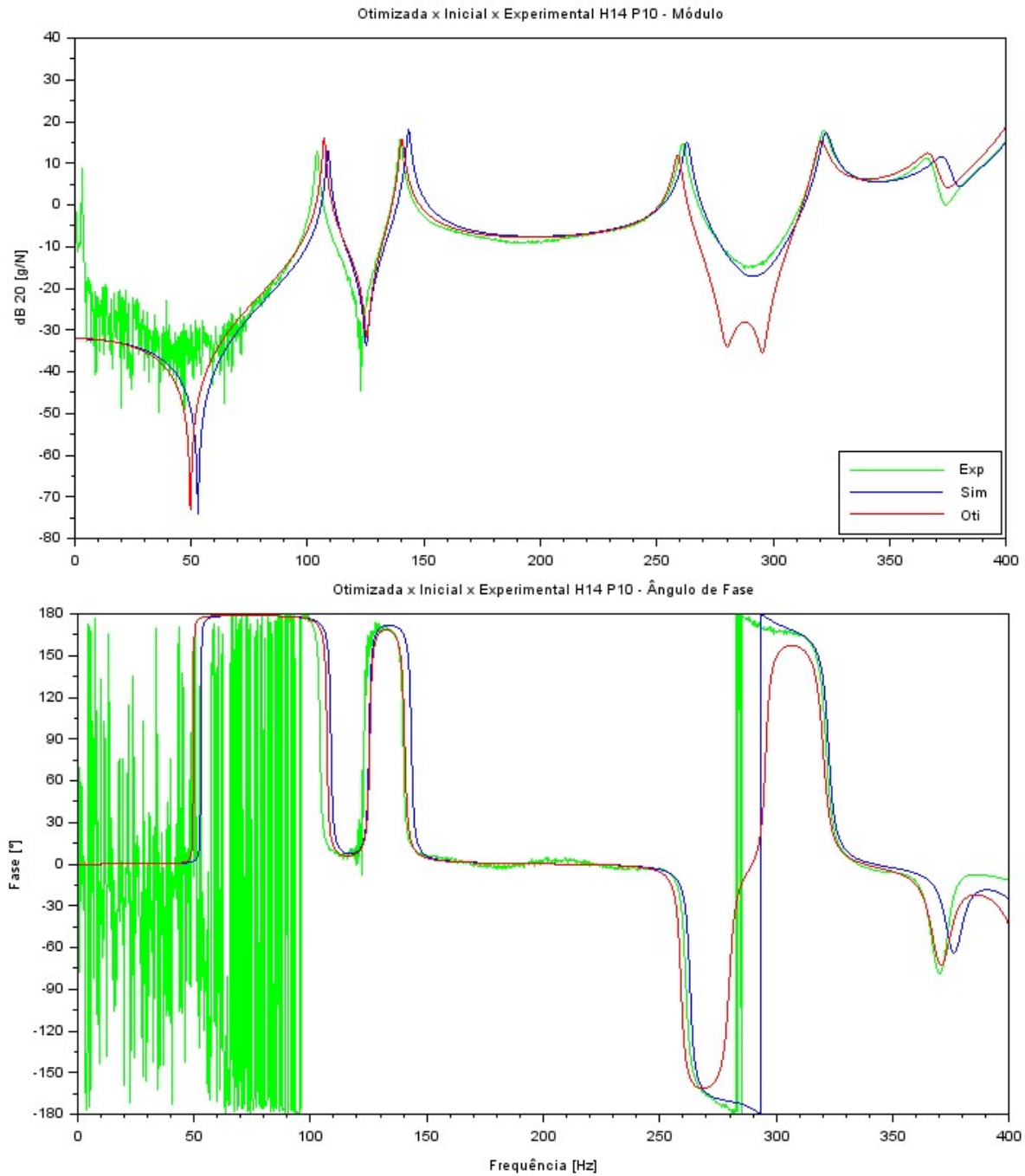
observa-se que a otimização também apresentou dificuldades para melhorar os pontos referentes aos modos de torção, porém, de maneira mais amena que para o caso da placa $P09_{CF}$.

Figura 46 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H_{13} da placa $P10_{CF}$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 47 - Comparação entre as FRFs experimental, simulada inicialmente e otimizada para o ponto H₁₄ da placa P10_{CF}



Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

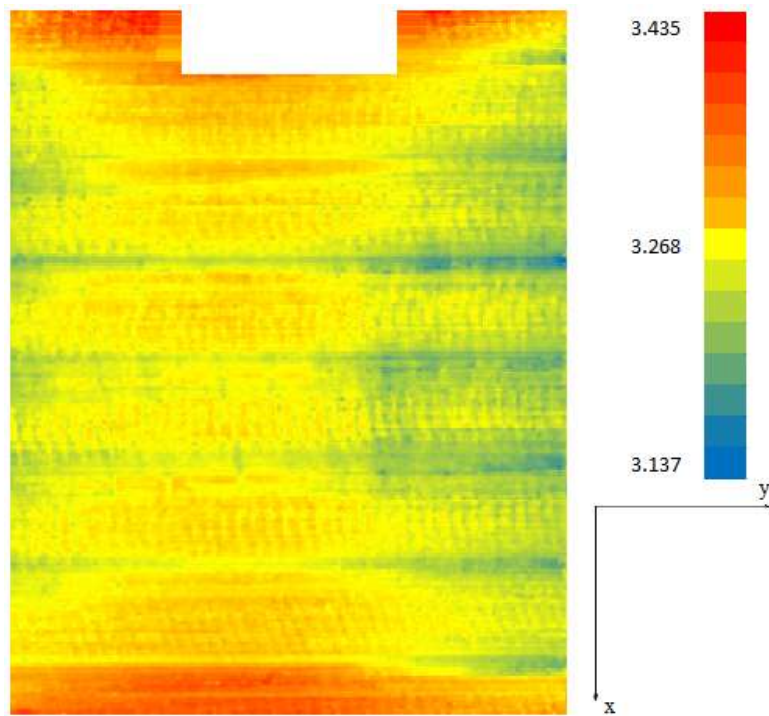
Para explicar o fato de as otimizações não terem sido muito eficientes para minimizar as diferenças entre os modos de torção, pode-se observar as Figuras (49) e (50), que exibem a espessura das placas em cada ponto de sua superfície. Estas espessuras foram medidas através de uma máquina de medir por coordenadas, que pode ser visualizada na Figura (48).

Figura 48 - Medição das espessuras das placas através da máquina de medir por coordenadas

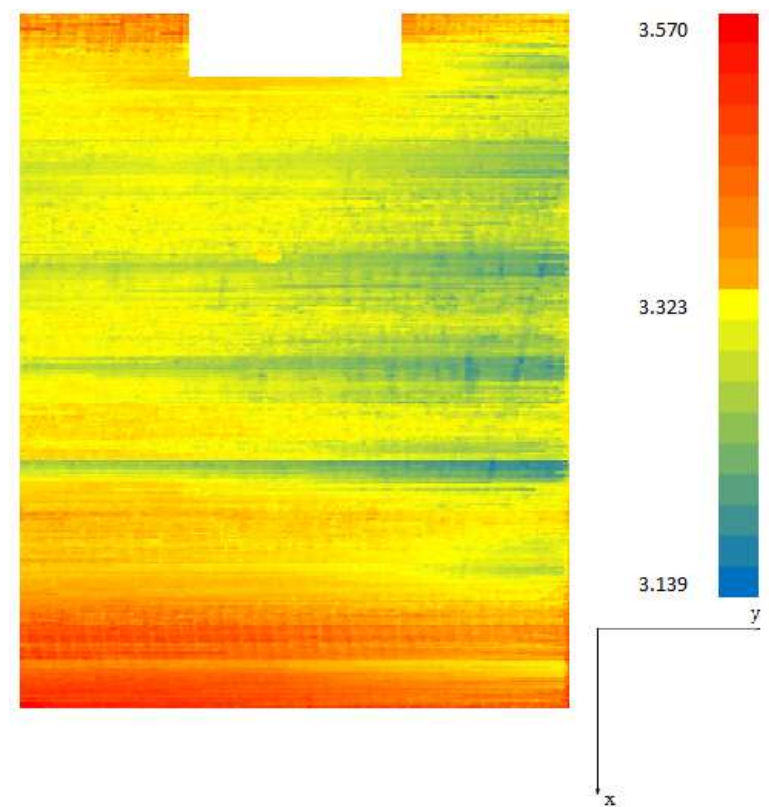


Fonte: MEDEIROS, 2016.

Pode-se verificar que, ao contrário das simulações, onde cada lâmina tem uma espessura constante, resultando num laminado com a mesma espessura em toda sua extensão, este fato não ocorre nas placas reais. Para estas, a espessura varia ao longo de sua superfície e apresenta valores maiores nas suas extremidades, dados pelas regiões vermelhas nas Figuras (49) e (50). Contudo, as regiões centrais das placas apresentam os menores valores de espessura, regiões azuis nas Figuras (49) e (50). Esta discrepância entre as espessuras das regiões centrais e das bordas faz com que os modos de torção não sejam representados de maneira adequada pela simulação, pois as regiões centrais das placas reais sofrem mais o efeito da torção do que as extremidades, não sendo representadas de maneira verdadeira pelos perfis de torção apresentados nas Figuras (31) e (32). Para os modos de flexão, esta discrepância entre as espessuras não gera uma diferença relativa entre o modelo computacional e o real pois, existe uma certa simetria na distribuição das espessuras presentes nas Figuras (49) e (50) em relação aos eixos x e y das figuras. Por fim, é válido lembrar que as escalas presentes nas Figuras (49) e (50) estão em milímetros.

Figura 49 - Espessura da placa $P09_{CF}$ em cada ponto de sua superfície

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

Figura 50 - Espessura da placa $P10_{CF}$ em cada ponto de sua superfície

Fonte: Elaborada pelo autor, 2017.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo geral verificar a qualidade dos resultados obtidos das otimizações, verificando-se as potencialidades e limitações dos métodos utilizados. Ainda, analisou-se qual das abordagens de otimização adotadas apresentou os melhores resultados e, também, determinou-se a influência das taxas de amortecimento na variação da amplitude dos picos de ressonância. Dito isto, pode-se concluir, com base nos resultados apresentados no capítulo anterior, que:

- A elaboração inicial dos modelos matemáticos foi condizente com os modelos reais, visto que os modos de vibração dos modelos computacionais foram iguais aos modos das estruturas reais;
- A escolha do elemento para a realização das análises que resultariam nas FRFs dos pontos escolhidos para estudo foi adequada, visto que o mesmo apresentou poucos erros em relação às distorções na malha e em relação ao elemento de menor tamanho escolhido para comparação;
- As FRFs simuladas inicialmente apresentaram o mesmo comportamento das FRFs experimentais, validando assim a elaboração dos modelos computacionais para este tipo de análise, porém, com defasagens entre as frequências naturais experimentais e simuladas e, entre as magnitudes dos picos de ressonância, apresentando assim discrepâncias entre as propriedades reais das placas e às simuladas inicialmente;
- A abordagem pelo método de otimização em duas etapas apresentou dificuldades em minimizar a diferença entre as frequências naturais experimentais e as frequências naturais geradas pela otimização para a placa $P09_{CF}$, porém, como a alteração do espaço solução era fisicamente inviável, optou-se por trabalhar com o melhor resultado proveniente desta análise;
- O método de otimização que utilizou como função objetivo a equação (158) (método 2) apresentou resultados piores que o método 1 de otimização, que utiliza a equação (157) como função objetivo. Este fato pode ser relacionado ao tamanho do espaço solução do método, gerando dificuldades ao PSO em encontrar o melhor conjunto de propriedades;
- As variações efetuadas no espaço solução das taxas de amortecimento para a placa $P10_{CF}$ acabou evidenciando que apesar de as taxas serem na faixa de 0.5% para as quatro primeiras frequências naturais e 1% para a quinta, sua variação

em aproximadamente 0.2% modifica de maneira considerável a amplitude dos picos de ressonância das FRFs;

- As curvas otimizadas, no geral, para ambas as placas apresentaram resultados melhores que os provenientes das simulações iniciais. Porém, notou-se que as otimizações apresentaram dificuldades em minimizar as diferenças entre os modos de torção simulados e os experimentais;
- As limitações provenientes da simulação, como espessura constante das lâminas, gerando um laminado também com espessura constante, acarretou na discrepância existente entre os modos de torção experimentais e otimizados, visto que as espessuras das placas reais não são constantes, sendo maiores nas extremidades e menores na região do centro, influenciando assim na torção das placas. Para os modos de flexão o efeito desta diferença entre as espessuras reais não é tão evidente, pois estas espessuras estão simetricamente distribuídas nos eixos x e y.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se como indicações para trabalhos futuros:

- A elaboração de um estudo baseado na alteração dos parâmetros do PSO, a fim de se encontrar qual o melhor conjunto de constantes de inércia w , $C1$ e $C2$ representam melhor o problema aqui apresentado. Pode-se também incluir nesta análise o estudo do número de partículas e número de iterações (NP e NI), bem como métodos de decremento das constantes de inércia, a fim de se evitar que o PSO fique atrelado a um valor de mínimo local muito rapidamente;
- A comparação entre diferentes algoritmos de otimização, a fim de se determinar qual resultaria nos melhores resultados para a propriedades das placas estudadas;
- A realização de um estudo com o intuito de comparar diferentes abordagens do ajuste de modelo, como por exemplo, alterando as matrizes de massa e rigidez diretamente.

REFERÊNCIAS

- ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2.ed. Campinas, SP: Ed. da Unicamp, 2003.
- BARKANOV, E. **Introduction to the finite element method**. Riga Technical University, Riga, 2001.
- BOULKAIKET, I. et. al. **Finite Element Model Updating Using an Evolutionary Markov Chain Monte Carlo algorithm**. Universidade de Joanesburgo, África do Sul e Universidade de Swansea, Reino Unido, 2015.
- CALLISTER, W. D. **Ciência e engenharia dos materiais: uma introdução**. 7.ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2008. Disponível em: <<http://site.ebrary.com/lib/bibliotecaudesc/Doc?id=10687271>>. Acesso em: 15 junho 2017.
- COOK, R. D et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4.ed. Danvers, MA, EUA: John Wiley & Sons Inc, 2002.
- CORREA, S. M. B. B. **Probabilidade e estatística**. 2.ed. Belo Horizonte, MG: PUC Minas Virtual. 2003.
- EWINS, D. J. **Modal testing: theory, practice and application**. 2.ed. Londres, Inglaterra: Research Studies Press, 2000.
- FARIA, A. W. **Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica**. Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em engenharia mecânica, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2006.
- FONSECA, J. **Ferramentas de simulação em mecânica: elementos finitos**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.
- FRISWELL, M. I. Damage identification using inverse methods. **The Royal Society**, Bristol, Reino Unido. Publicado em 12/2006. Disponível em: <<http://www.rsta.royalsocietypublishing.org>>
- FU, Z.; HE, J. **Modal analysis**. 1.ed. Woburn, Massachusetts, EUA: Butterworth-Heinemann, 2001.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7.ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil. 2010.
- MEDEIROS, R. de. **Development of a criterion for predicting residual strength of composite structures damaged by impact loading**. Tese apresentada a Faculdade de Ciência da Engenharia como requisito para obtenção do título de doutor. Universidade de São Paulo e Katholieke Universiteit Leuven, São Carlos, 2016.

- MEDEIROS, R. de. **Vibrações**. 2016. 5 p. Notas de aula.
- MENDONÇA, P.de T. R. **Materiais compostos & estruturas-sanduiche: projeto e análise**. 1.ed. Barueri, SP: Manole, 2005.
- MONTERO, D. S. **Otimização por enxame de partículas em treliças**: Estudo de parâmetros e integração com programa comercial de elementos finitos. Trabalho apresentado ao curso de engenharia mecânica como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel. Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013.
- PEREZ, R. E; BEHDINAN, K. Particle swarm approach for structural design optimization. **Computers and Structures** **87**, março de 2007.
- RAO, S. **Vibrações mecânicas**. 4.ed. São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2008.
- REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. 2. ed. Boca Raton, Flórida, EUA: CRC Press, 2004.
- SHADAN, F. et. al. **Experimental validation of a FRF-based model updating method**. Universidade de tecnologia Amirkabir, Tehran, Iran e Universidade de Michigan, Miami, EUA, 2016.
- TITA, V. **Projeto e fabricação de estruturas em material compósito polimérico**. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- THOMSON, W. T. **Teoria da vibração com aplicações**. 1.ed. Rio de Janeiro, RJ: Interciência. 1978.
- WANG, J. T; WANG, C. J; ZHAO, J.P. **Frequency response function-based model updating using Kriging model**. Universidade de Pequim, Pequim, China, 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A – IMPORTAÇÃO DOS DADOS DO PROBLEMA $P09_{CF}$

//Variáveis de projeto: $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, h_0, h_{15}, h_{-15}, \theta_0, \theta_{15}, \theta_{-15}, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ e ζ_5

//Número de frequências a serem analisadas

`nfreq = 5;`

//Frequências naturais experimentais aproximadas para resolução 0.25 Hz

//Para a primeira etapa do método 1, Fn possui os valores das 5 primeiras frequências naturais medidas, não aproximadas para a resolução de 0.25 Hz

`Fn = [95.50; 133.00; 250.75; 316.25; 349.50]`

//Pontos experimentais das FRFs para as frequências acima

// Para a primeira etapa do método 1 não se faz necessário a inserção dos dados abaixo

`H11 = [10.38562597382590; 18.04062231315230; 16.37529682780260; 18.30556583097610;
13.47156115009820]`

`H12 = [11.66878829584890; 17.36288001564530; 14.21947832141460; 17.00293835789460;
12.98233543927070]`

`H13 = [11.83987388312160; 16.02996791443110; 12.38265865593730; 18.37219312272580;
11.18555290115420]`

`H14 = [11.67909297270160; 15.78279577229660; 14.48453259272640; 19.31745685122750;
10.13450985268820]`

//Limitações inferiores (xl) e superiores (xu) das variáveis de projeto segundo ordem mostrada acima

`xl = [114300;9000;0.306;4896;0.147;0.125;0.160;-1.5;13.5;-
16.5;0.0055;0.0052;0.0051;0.0054;0.0099]`

`xu = [139700;11000;0.374;5984;0.395;0.380;0.365;1.5;16.5;-
13.5;0.0067;0.0064;0.0063;0.0066;0.0121]`

//Número de variáveis de projeto

// Para a primeira etapa do método 1, nvar = 10. Para a segunda etapa, nvar = 5

`nvar = 15`

APÊNDICE B – LIMITAÇÃO DO TAMANHO DOS VALORES DAS PARTÍCULAS

```
function [X]=limitante(X)
```

```
for p=1:NP
```

// Para a primeira etapa do método 1, o algoritmo abaixo é realizado somente para as 10 primeiras variáveis. Para a segunda parte o algoritmo é utilizado para as 5 variáveis restantes

//Trasnformação pra string

```
for k=1:15
```

```
    s3dec(k) = string(X(k,p))
```

```
end
```

//Particionamento das strings

//E₁, E₂ e G₁₂

```
S3DEC(1) = part(s3dec(1),1:6)
```

```
if X(2,p)<10000
```

```
    S3DEC(2) = part(s3dec(2),1:4)
```

```
end
```

```
if X(2,p)>=10000
```

```
    S3DEC(2) = part(s3dec(2),1:5)
```

```
end
```

```
S3DEC(4) = part(s3dec(4),1:4)
```

//v₁₂, h₀, h₁₅, h₋₁₅

```
S3DEC(3) = part(s3dec(3),1:5)
```

```
for k=5:7
```

```
    S3DEC(k) = part(s3dec(k),1:5)
```

```
end
```

//θ₀, θ₁₅, θ₋₁₅

```
if X(8,p)< 0
```

```
    S3DEC(8) = part(s3dec(8),1:4)
```

```
end
```

```
if X(8,p)>=0
```

```
    S3DEC(8) = part(s3dec(8),1:3)
```

```
end
```

```
S3DEC(9) = part(s3dec(9),1:4)
```

```
S3DEC(10) = part(s3dec(10),1:5)
```

//ζ₁, ζ₂, ζ₃, ζ₄ e ζ₅

```
for k = 11:15
```

```
S3DEC(k) = part(s3dec(k),1:6)
end
```

//Limitações

//Strings com 3 casas decimais v₁₂, h₀, h₁₅, h₋₁₅

//Para v₁₂

```
gen3 = string('e.fgh')
e = part(S3DEC(3),1:1)
f = part(S3DEC(3),3:3)
g = part(S3DEC(3),4:4)
h = part(S3DEC(3),5:5)
if h <> '1' & h <> '2' & h <> '3' & h <> '4' & h <> '5' & h <> '6' & h <> '7' & h
<> '8' & h <> '9'
    i = fix(9*rand()+1)
    if i==0
        i = 1
    end
    h = string(i)
end
gen3 = strsubst(gen3,"e",e)
gen3 = strsubst(gen3,"f",f)
gen3 = strsubst(gen3,"g",g)
gen3 = strsubst(gen3,"h",h)
S3DEC(3) = gen3
```

//Para h₀, h₁₅, h₋₁₅

```
for k=5:7
    gen3 = string('e.fgh')
    e = part(S3DEC(k),1:1)
    f = part(S3DEC(k),3:3)
    g = part(S3DEC(k),4:4)
    h = part(S3DEC(k),5:5)
    if h <> '1' & h <> '2' & h <> '3' & h <> '4' & h <> '5' & h <> '6' & h <> '7' & h
    <> '8' & h <> '9'
        i = fix(9*rand()+1)
        if i==0
            i = 1
        end
        h = string(i)
    end
    gen3 = strsubst(gen3,"e",e)
    gen3 = strsubst(gen3,"f",f)
    gen3 = strsubst(gen3,"g",g)
    gen3 = strsubst(gen3,"h",h)
    S3DEC(k) = gen3
end
```


end

//Strings com 1 casa decima $\theta_0, \theta_{15}, \theta_{-15}$

//Para θ_0

```

if X(8,p)<0
gen1 = string('-f.h')
f = part(S3DEC(8),2:2)
h = part(S3DEC(8),4:4)
if h <> '1' & h <> '2' & h <> '3' & h <> '4' & h <> '5' & h <> '6' & h <> '7' & h <> '8' &
h <> '9'
    i = fix(9*rand()+1)
    if i==0
        i = 1
    end
h = string(i)
end
gen1 = strsubst(gen1,"f",f)
gen1 = strsubst(gen1,"h",h)
S3DEC(8) = gen1
end
if X(8,p)>=0
gen1 = string('f.h')
f = part(S3DEC(8),1:1)
h = part(S3DEC(8),3:3)
if h <> '1' & h <> '2' & h <> '3' & h <> '4' & h <> '5' & h <> '6' & h <> '7' & h <> '8' &
h <> '9'
    i = fix(9*rand()+1)
    if i==0
        i = 1
    end
h = string(i)
end
gen1 = strsubst(gen1,"f",f)
gen1 = strsubst(gen1,"h",h)
S3DEC(8) = gen1
end

```

//Para θ_{15}

```

gen1 = string('fg.h')
f = part(S3DEC(9),1:1)
g = part(S3DEC(9),2:2)
h = part(S3DEC(9),4:4)
if h <> '1' & h <> '2' & h <> '3' & h <> '4' & h <> '5' & h <> '6' & h <> '7' & h <> '8' &
h <> '9'
    i = fix(9*rand()+1)
    if i==0
        i = 1
    end

```

```

        end
    h = string(i)
    end
    gen1 = strsubst(gen1,"f",f)
    gen1 = strsubst(gen1,"g",g)
    gen1 = strsubst(gen1,"h",h)
    S3DEC(9) = gen1

//Para  $\theta_{-15}$ 

gen1 = string('-fg.h')
f = part(S3DEC(10),2:2)
g = part(S3DEC(10),3:3)
h = part(S3DEC(10),5:5)
if h <> '1' & h <> '2' & h <> '3' & h <> '4' & h <> '5' & h <> '6' & h <> '7' & h <> '8' &
h <> '9'
    i = fix(9*rand()+1)
    if i==0
        i = 1
    end
end
h = string(i)
end
gen1 = strsubst(gen1,"f",f)
gen1 = strsubst(gen1,"g",g)
gen1 = strsubst(gen1,"h",h)
S3DEC(10) = gen1

//Para  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$  e  $\zeta_5$ 

for k=11:15
    gen4 = string('e.fgmh')
    e = part(S3DEC(k),1:1)
    f = part(S3DEC(k),3:3)
    g = part(S3DEC(k),4:4)
    m = part(S3DEC(k),5:5)
    h = part(S3DEC(k),6:6)
    if h <> '1' & h <> '2' & h <> '3' & h <> '4' & h <> '5' & h <> '6' & h <> '7' & h <> '8' &
h <> '9'
        i = fix(9*rand()+1)
        if i==0
            i = 1
        end
    end
    h = string(i)
    end
    gen4 = strsubst(gen4,"e",e)
    gen4 = strsubst(gen4,"f",f)
    gen4 = strsubst(gen4,"g",g)
    gen4 = strsubst(gen4,"m",m)
    gen4 = strsubst(gen4,"h",h)
    S3DEC(k) = gen4
end

```

```
end

    //Voltando aos números

    for k=1:15
        X(k,p) = strtod(S3DEC(k))
    end

end

endfunction
```


APÊNDICE C – ROTINA PARA OBTENÇÃO DOS DADOS COMPUTACIONAIS

```
function [Fcom, Fno]= Opti(X)
```

//Para a primeira etapa do método 1, a saída da função terá somente Fno. Já para a segunda etapa a saída da função será Fcom e o algoritmo é semelhante, porém só com alterações nas linhas das taxas de amortecimento

```
for p=1:NP
```

```
    //Escreve X em string
```

```
    for k=1:15
```

```
        s(k) = string(X(k,p));
```

```
    end
```

```
    //Abre o arquivo .FEM do modelo computacional
```

//Para cada algoritmo de otimização utilizado existe um arquivo de entrada padrão, incluindo para as duas partes do método 1.

```
    text = mgetl('C:\Temp\Placa_9_PSOdispmenor.fem',-1);
```

```
    //Escreve as linhas das lâminas em função das variáveis de espessura e angulação
```

//Para a primeira etapa do método 1 não são existe linha8 e linha9. Para a segunda etapa somente essas linhas estão presentes e são modificadas

```
    linha1 = string("PLY  1  1  h0 θ0  YES");
```

```
    linha2 = string("PLY  2  1  h15 θ15  YES");
```

```
    linha3 = string("PLY  3  1  h-15 θ-15  YES");
```

```
    linha4 = string("PLY  4  1  h0 θ0  YES");
```

```
    linha5 = string("PLY  5  1  h15 θ15  YES");
```

```
    linha6 = string("PLY  6  1  h-15 θ-15  YES");
```

```
    //Escreve a linha de material em função das constantes de engenharia E1, E2, ν12 e G12
```

//O segundo termo G₁₂ é na realidade G₁₃, mas assumiu-se que G₁₂ = G₁₃ desde o início das análises computacionais

```
    if X(2,p) < 10000
```

```
        linha7 = string("MAT8      1E1 E2  ν12 G12  G12  3050.0 1.58E-9");
```

```
    else
```

```
        linha7 = string("MAT8      1E1 E2  ν12 G12  G12  3050.0 1.58E-9");
```

```
    end
```

```
    //Escreve o coletor de amortecimento em função das taxas de amortecimento
```

```
    linha8 = string("+ 95.379 ζ1 132.911 ζ2 250.645 ζ3 316.229 ζ4");
```

```
    linha9 = string("+ 349.436 ζ5 ENDT")
```

//Substitui as variáveis pelas propriedades da partícula analisada

```

linha1 = strsubst(linha1,"h0",s(5));
linha1 = strsubst(linha1,"theta0",s(8));
linha2 = strsubst(linha2,"h15",s(6));
linha2 = strsubst(linha2,"theta15",s(9));
linha3 = strsubst(linha3,"h155",s(7));
linha3 = strsubst(linha3,"theta155",s(10));
linha4 = strsubst(linha4,"h0",s(5));
linha4 = strsubst(linha4,"theta0",s(8));
linha5 = strsubst(linha5,"h15",s(6));
linha5 = strsubst(linha5,"theta15",s(9));
linha6 = strsubst(linha6,"h155",s(7));
linha6 = strsubst(linha6,"theta155",s(10));
linha7 = strsubst(linha7,"E1",s(1));
linha7 = strsubst(linha7,"E2",s(2));
linha7 = strsubst(linha7,"v12",s(3));
linha7 = strsubst(linha7,"G12",s(4));
linha8 = strsubst(linha8,"ksi1",s(11));
linha8 = strsubst(linha8,"ksi2",s(12));
linha8 = strsubst(linha8,"ksi3",s(13));
linha8 = strsubst(linha8,"ksi4",s(14));
linha9 = strsubst(linha9,"ksi5",s(15));

```

//Substitui no arquivo .FEM as linhas antigas pelas novas

```

text(44) = linha1
text(49) = linha2
text(54) = linha3
text(59) = linha4
text(64) = linha5
text(69) = linha6
text(2342) = linha7
text(2388) = linha8
text(2389) = linha9

```

//Salva o novo arquivo .FEM a ser executado pelo OptiStruct

```

fid = mopen('C:\Temp\Input_Opti.fem','w');
mfprintf(fid,'%s\n',text);
mclose(fid);

```

//Execução Optistruct

```

line3      =      ""C:\Program      Files\Altair\2017\hwsolvers\scripts\optistruct.bat""
C:\Temp\Input_Opti.fem ';
line4      =      ""C:\Program      Files\Altair\14.0\hwsolvers\scripts\optistruct.bat""
C:\Temp\Input_Opti.fem ';
unix(line4)

```

```

//Importação dos resultados da Análise Modal
//Para a primeira etapa do método 1, saidaf tem o formado .DISP e não .OUT

saidaf = mgetl('C:\Temp\Input_Opti.out',-1)

//Vetor das 5 primeiras frequências naturais

Fnop = zeros(nfreq,1)

// Retirada das frequências em string

j=208;
for k=1:5
a = part(saidaf(j),16:33)
Fnop(k) = strtod(a)
j = j + 1
end

//Arredondamento para a resolução 0.25 Hz

for k=1:5
if modulo(Fnop(k),int(Fnop(k)))<0.125
Fnop(k) = int(Fnop(k))
end
if modulo(Fnop(k),int(Fnop(k)))<0.375
Fnop(k) = int(Fnop(k))+0.25
end
if modulo(Fnop(k),int(Fnop(k)))<0.625
Fnop(k) = int(Fnop(k))+0.50
end
if modulo(Fnop(k),int(Fnop(k)))<0.875
Fnop(k) = int(Fnop(k))+0.75
end
if modulo(Fnop(k),int(Fnop(k)))>=0.875
Fnop(k) = round(Fnop(k))
end
end

Fno(:,p) = Fnop

//Saida do vetor Fcomp, já em g/N

//Vetor para alocar os resultados da partícula analisada

F = zeros(nfreq,1)

//Importação do arquivo com os módulos da FRF da partícula analisada

saida = mgetl('C:\Temp\Input_Opti.disp',-1);

```

```

if ponto == 'H11'
    //Armazena as linhas referentes ao Yreal do nó 829 num vetor de strings
    j = 3;
    k = 1;
    for f=0:0.25:512
        r(k) = saida(j);
        j = j + 9;
        k = k+1;
    end

    //Armazena as linhas referentes ao Yimg do nó 829 num vetor de strings
    j = 4;
    k = 1;
    for f=0:0.25:512
        i(k) = saida(j);
        j = j+9;
        k = k+1
    end
end

if ponto == 'H12'
    //Armazena as linhas referentes ao Yreal do nó 832 num vetor de strings
    j = 9;
    k = 1;
    for f=0:0.25:512
        r(k) = saida(j);
        j = j + 9;
        k = k+1;
    end

    //Armazena as linhas referentes ao Yimg do nó 832 num vetor de strings
    j = 10;
    k = 1;
    for f=0:0.25:512
        i(k) = saida(j);
        j = j+9;
        k = k+1
    end
end

if ponto == 'H13'
    //Armazena as linhas referentes ao Yreal do nó 830 num vetor de strings
    j = 5;
    k = 1;
    for f=0:0.25:512
        r(k) = saida(j);
        j = j + 9;
        k = k+1;
    end

    //Armazena as linhas referentes ao Yimg do nó 830 num vetor de strings
    j = 6;

```



```

k = 1;
for f=0:0.25:512
    i(k) = saida(j);
    j = j+9;
    k = k+1
end
end

if ponto == 'H14'
    //Armazena as linhas referentes ao Yreal do nó 831 num vetor de strings
    j = 7;
    k = 1;
    for f=0:0.25:512
        r(k) = saida(j);
        j = j + 9;
        k = k+1;
    end
    //Armazena as linhas referentes ao Yimg do nó 831 num vetor de strings
    j = 8;
    k = 1;
    for f=0:0.25:512
        i(k) = saida(j);
        j = j+9;
        k = k+1
    end
end

//Armazena somente os valores necessários dos vetores anteriores ainda em forma de string

k=1;
for f=0:0.25:512
    R(k) = part(r(k),35:46);
    I(k) = part(i(k),35:46);
    k = k+1;
end

//Transforma as strings de R e I em valores reais

YREAL = strtod(R);
YIMG = strtod(I);

//Determina a magnitude dos pontos

MAG = sqrt(YREAL^2 + YIMG^2);

//Preenchimento do vetor F

k=1;
z=1;
for f=0:0.25:512

```

```
if f==Fno(z)
    F(z) = MAG(k);
    z = z+1;
end
if z>5
    z = 5;
end
k = k+1;
end

//Transformando as unidades de F
//Como os resultados estão em mm/(N.s²), deve-se transforma-los para g/N (g = gravidade)

F = (1/9810)*F;

// Os resultados são expressos em 20 dB, tem-se

F = 20*log10(F);

//Preenchendo a coluna de Fcom

Fcom(:,p) = F;

//Deleta alguns arquivos gerados na simulação

deletefile('C:\Temp\Input_Opti.stat')
deletefile('C:\Temp\Input_Opti.out')

end
endfunction
```

APÊNDICE D – ALGORITMO PSO PARA O MÉTODO 2

```

printf("Digite qual o ponto a ser analisado: H11, H12, H13 ou H14: ");
ponto = input("'",'s');

//Para a primeira etapa do metodo 1 não existe a inserção do ponto a ser analisado
// PSO - Particle Swarm Optimization

//Carrega o problema de otimização
exec('C:\Temp\problema_placa9.sce',-1)

//PSO para otimização da FRF da Placa 9

//Número de partículas e iterações

NP = 50
NI = 30

//Constantes do PSO

w = 0.9
C1 = 2
C2 = 2

//Matrizes de pontos computacionais, de comparação e de pontos experimentais

FRF = zeros(nfreq,NP)
FN = zeros(nfreq,NP)

Fcom = zeros(nfreq,NP)
Fno = zeros(nfreq,NP)

NormFRF = zeros(nfreq,NP)
NormFN = zeros(nfreq,NP)

D = zeros(nfreq,NP)

//Para a primeira etapa do método 1 as matrizes FRF, NormFRF, Fcom e D não existem, e FN
e NormFN são chamadas de Fexp e Norm, respectivamente. Para a segunda etapa não existem
as matrizes FN, NormFN e D, e FRF e NormFRF são chamadas de Fexp e Norm,
respectivamente.

//Vetores de comparação

crit = zeros(1,NP)
critn = zeros(1,NP)

```

//Vetores de análise de convergência

```
mini = zeros(1,NI+1)
maxi = zeros(1,NI+1)
```

//Geração da Matriz dos pontos experimentais

```
if ponto == 'H11'
    for i=1:NP
        FRF(:,i) = H11
    end
end
```

```
if ponto == 'H12'
    for i=1:NP
        FRF(:,i) = H12
    end
end
```

```
if ponto == 'H13'
    for i=1:NP
        FRF(:,i) = H13
    end
end
```

```
if ponto == 'H14'
    for i=1:NP
        FRF(:,i) = H14
    end
end
```

```
for p=1:NP
    FN(:,p) = Fn
end
```

//Matriz de posições das partículas (X) e das melhores posições das partículas (XPB)

```
X = zeros(nvar,NP)
XPB = zeros(nvar,NP)
```

//Vetor da melhor posição (XGB) (melhores propriedades)

```
XGB = zeros(nvar,1)
```

//Cria a matriz com as partículas iniciais

```
for i=1:nvar
    for j=1:NP
        X(i,j) = xl(i) + rand()*(xu(i) - xl(i))
    end
end
```

//Limitação do tamanho das partículas

```
exec('C:\Temp\limitantes_P09.sce',-1)
[X]=limitante(X)
```

//Para as posições iniciais, os melhores pontos das partículas (XPB) são iguais aos pontos iniciais das mesmas (X)

XPB = X

//Considerando que não se tem XGB, roda-se a simulação no Hyperworks para a matriz X gerada inicialmente, a fim de se determinar XGB dentre elas
//Rodada a simulação, armazena-se os valores computacionais

```
exec('C:\Temp\Loop_Optistruct_P9_dispmenor.sce',-1)
[Fcom, Fno]=Opti(X)
```

//Armazenando os valores da norma segunda

```
for j=1:NP
    NormFRF(:,j) = ((FRF(:,j)-Fcom(:,j))^2)
    NormFN(:,j) = ((FN(:,j)-Fno(:,j))^2)
end
```

//Distâncias

D = sqrt(NormFRF+NormFN)

//Criando o vetor de comparação

//Para o método 1, cada coluna dos vetores crit e critn é a soma dos valores presentes na respectiva coluna de Norm

```
for j=1:NP
    for i=1:nfreq
        crit(j) = crit(j) + D(i,j)
    end
end
```

//Exibição no console dos Vetores de convergência

```
mini(1,1) = min(crit)
disp(mini(1,1))
maxi(1,1) = max(crit)
disp(maxi(1,1))
```

//Achando XGB para o posicionamento inicial as partículas
//valor_best é a variável de controle de XGB

```
valor_best = 255E255;
for j=1:NP
    if crit(j)<valor_best
        valor_best = crit(j)
        XGB(:,1) = X(:,j)
    end
end
```

//Achando XGB, pode-se aplicar o método, variando as partículas de posição

//Para isso, determina-se a matriz de "velocidades" das partículas

```
V = zeros(nvar, NP)
```

//Começando as iterações, onde a primeira iteração será o segundo posicionamento de cada partícula

```
for i=1:NI
```

//Velocidade de cada partícula

```
    for p=1:NP
        V(:,p) = w*rand()*V(:,p) + C1*rand()*(XPB(:,p) - X(:,p)) + C2*rand()*(XGB - X(:,p))
    end
```

//Atualiza a posição de cada partícula

```
    for p=1:NP
        X(:,p) = X(:,p) + V(:,p)
    end
```

//Verifica as restrições laterais

```
    for j=1:nvar
        for p=1:NP
            X(j,p) = max(xl(j), min(X(j,p), xu(j)))
        end
    end
```

//Zera as matrizes para que se possa armazenar novos valores a elas, sem que haja algum tipo de problema

//No método 1 somente as matrizes utilizadas são zeradas

```
for p=1:NP
    Fcom(:,p) = 0
    Fno(:,p) = 0
    NormFRF(:,p) = 0
    NormFN(:,p) = 0
end
```

//Limitação do tamanho das partículas

```
exec('C:\Temp\limitantes_P09.sce',-1)
[X]=limitante(X)
```

//Roda-se a simulação com as novas partículas e armazena-se os novos valores nas matrizes computacionais

```
exec('C:\Temp\Loop_Optistruct_P9_dispmenor.sce',-1)
[Fcom, Fno]=Opti(X)
```

//Calcula-se a norma segunda entre as matrizes

```
for j=1:NP
    NormFRF(:,j) = ((FRF(:,j)-Fcom(:,j))^2)
    NormFN(:,j) = ((FN(:,j)-Fno(:,j))^2)
end
```

//Distâncias

```
D = sqrt(NormFRF+NormFN)
```

//Agora que se tem mais de uma simulação por partícula, pode-se calcular o XPB delas

//Primeiro, aplica-se o critério para essa iteração

```
for p=1:NP
    for j=1:nfreq
        critn(p) = critn(p) + D(j,p)
    end
end
```

//Com critn definido, compara-se esse vetor com o crit e atualiza-se o segundo, guardando assim as melhores posições de cada partícula

```
for p=1:NP
    if critn(p)<crit(p)
        crit(p) = critn(p)
        XPB(:,p) = X(:,p)
    end
end
```

//Vetores de convergência

```
mini(1,i+1) = min(crit)
disp(mini(1,i+1))
maxi(1,i+1) = max(crit)
disp(maxi(1,i+1))
disp(i)
```

//Agora crit tem os melhores resultados até agora, pode-se então zerar critn para que não haja problemas na próxima iteração

```
for p=1:NP
    critn(p) = 0
end
```

//Finalmente, define-se o novo melhor posicionamento global (XGB) que é o melhor conjunto de propriedades até agora

```
for p=1:NP
    if crit(p)<valor_best
        valor_best = crit(p)
        XGB(:,1) = X(:,p)
    end
end
```

end //iter

//Exibição do melhor conjunto de propriedades encontrado pelo PSO

```
printf("\n O melhor conjunto de propriedades e: ")
disp(XGB)
```