

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM**

JOÃO ROSSO NETO

**INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE MANUFATURA NA RESPOSTA DINÂMICA
DE PLACAS DE POLÍMERO REFORÇADO COM FIBRA DE VIDRO**

JOINVILLE

2024

JOÃO ROSSO NETO

**INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE MANUFATURA NA RESPOSTA DINÂMICA
DE PLACAS DE POLÍMERO REFORÇADO COM FIBRA DE VIDRO**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo De Medeiros

JOINVILLE

2024

JOÃO ROSSO NETO

**INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE MANUFATURA NA RESPOSTA DINÂMICA
DE PLACAS DE POLÍMERO REFORÇADO COM FIBRA DE VIDRO**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo De Medeiros

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Ricardo De Medeiros
Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC

Membros:

Prof. Me. Rafael Beck
Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC

Me. Eng. Kelvin Masakazu Kuroki Iwasaki
Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC

Joinville, 15 de dezembro de 2024

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais, Eusébio e Lidiane, por todo o esforço e sacrifício para poder me proporcionar a oportunidade de chegar aonde estou hoje. Serei eternamente grato por toda a confiança depositada em mim, pela educação e pelo amor incondicional que me foram dados.

À Equipe Albatroz Aerodesign, onde pude ter contato com diversos conhecimentos novos.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação de Santa Catarina pelo suporte financeiro (FAPESC - 2017TR1747, 2019TR779, 2021TR843 e 2023TR563).

Ao professor orientador Dr. Ricardo de Medeiros, por ter me dado a primeira oportunidade de contato com o meio acadêmico com uma bolsa de iniciação científica, e pela motivação, confiança e principalmente pela inesgotável paciência que teve comigo nessa longa jornada, mesmo nos momentos em que eu não merecia.

Finalmente, a todos os meus amigos e familiares que, direta ou indiretamente se fizeram presentes durante a minha longa caminhada dentro da universidade.

Muito obrigado!

RESUMO

Atualmente, os materiais compósitos vêm sendo amplamente usados em diversos tipos de indústria, principalmente as de alta tecnologia, como a aeronáutica e bioengenharia. Os laminados são estruturas feitas de um conjunto de camadas de material compósito, ou lâminas, empilhadas em uma sequência que maximize a resistência e rigidez, enquanto minimizam o peso. Porém, um dos problemas dos materiais compósitos são as incertezas associadas ao processo de fabricação, por isso é importante entender qual parâmetro tem mais influência no comportamento do laminado. Para avaliar a influência dos parâmetros, este trabalho usa a metodologia Plackett-Burman para montar os casos a serem estudados, e realiza um estudo do comportamento dinâmico do laminado, usando a teoria clássica dos laminados e análise modal computacional, através do *software ABAQUS*. As frequências naturais são usadas como parâmetros de saída e a influência de cada parâmetro de entrada nas frequências é calculada, e é feito o ranking de influência dos parâmetros. Finalmente, o envelope de falha é calculado usando as FRFs resultantes. Os resultados foram coerentes para o ranqueamento em ambos os casos, porém na comparação com os dados experimentais, o caso bidimensional apresentou inconsistências.

Palavras-chave: Materiais Compósitos. Laminados. Análise Modal. Simulação computacional. Design of Experiments.

ABSTRACT

Currently, composite materials have been widely used in various types of industry, especially high technology, such as aeronautics and bioengineering. Laminates are structures made from a set of layers of composite material, or laminas, stacked in a sequence that maximizes strength and stiffness while minimizing weight. However, one of the problems with composite materials are the uncertainties associated with the manufacturing process, therefore it is important to understand which parameter has the most influence on the behavior of the laminate. To evaluate the influence of the parameters, this work uses the Plackett-Burman to assemble the cases to be studied, and carries out a study of the dynamic behavior of the laminate, using classical laminate theory and computational modal analysis, through of the *ABAQUS* software. The natural frequencies are then used as output parameters and the influence of each input parameter on the frequencies is calculated, then the influence ranking of the parameters is made. Finally, the failure envelope is calculated using the resulting FRFs. The results were consistent for ranking in both cases, however, when compared with experimental data, the two-dimensional case showed inconsistencies.

Keywords: Composite materials. Laminates. Modal Analysis. Computer simulation. Design of Experiments.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Uso de materiais compósitos na indústria aeronáutica ao longo dos anos.	10
Figura 2 – Composição e distribuição de materiais para um Boeing 787.	11
Figura 3 – Representações esquemáticas das várias características geométricas e espaciais das partículas da fase dispersa que podem influenciar as propriedades dos compósitos: (a) concentração, (b) tamanho, (c) forma, (d) distribuição e (e) orientação.	13
Figura 4 – Esquema de classificação para os materiais compósitos.	13
Figura 5 – O empilhamento (diagrama esquemático) em compósitos laminados. (a) Unidirecional; (b) cruzado; (c) camada em ângulo; e (d) multidirecional.	14
Figura 6 – Esquema completo de um sistema de infusão a vácuo.	16
Figura 7 – Esquema das incertezas nos processos de fabricação de compósitos.	17
Figura 8 – Elemento diferencial e suas tensões.	18
Figura 9 – Sistemas locais e globais de coordenadas	21
Figura 10 – Deformações no plano xz	23
Figura 11 – Elemento retangular com 9 nós.	30
Figura 12 – Plackett-Burman para $N=12$ e $k=11$	33
Figura 13 – Fluxograma do estudo.	34
Figura 14 – Placa de estudo BD esquematizada.	34
Figura 15 – Espécimes de fibra de vidro com resina epóxi.	37
Figura 16 – Pontos de medição.	37
Figura 17 – Convergência de malha.	38
Figura 18 – Malha e condição de contorno.	39
Figura 19 – Modos de corpo rígido.	40
Figura 20 – Modos de vibração.	41
Figura 21 – Frequências naturais resultantes das análises modais para o caso UD.	42
Figura 22 – Frequências naturais resultantes das análises modais para o caso BD.	42
Figura 23 – ME de cada parâmetro por modo para o caso UD.	44
Figura 24 – ME de cada parâmetro por modo para o caso BD.	44
Figura 25 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 2 no caso UD.	45
Figura 26 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 3 no caso UD.	46
Figura 27 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 2 no caso BD.	46
Figura 28 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 3 no caso BD.	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades das camadas de fibra de vidro e epóxi.	35
Tabela 2 – Dimensões dos laminados.	35
Tabela 3 – Médias e desvios padrão das dimensões dos laminados.	35
Tabela 4 – Parâmetros e seus valores máximos e mínimos para o caso unidirecional. . .	36
Tabela 5 – Parâmetros e seus valores máximos e mínimos para o caso bidirecional. . .	36
Tabela 6 – Resultados do ME para o caso UD.	43
Tabela 7 – Resultados do ME para o caso BD.	43

LISTA DE SÍMBOLOS

ME	<i>Main Effect</i>
GPa	Giga Pascal
°	Grau
kg	Kilograma
m	Metro
PB	Plackett-Burman
UD	Unidimensional
BD	Bidimensional
FRF	Função de resposta em frequência
N	Newton
A.C.	Antes de Cristo
DoE	<i>Design of Experiments</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	OBJETIVO GERAL:	11
1.2	OBJETIVO ESPECÍFICOS:	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1	MATERIAIS COMPÓSITOS	12
2.1.1	Compósitos laminados	14
2.1.2	Processo de fabricação	15
2.1.3	Incertezas no processo de fabricação	16
2.2	ANÁLISE MACROMECAÂNICA	17
2.2.1	Relação tensão-deformação para materiais elástico lineares	17
2.2.2	Constantes de engenharia e Lei de Hooke para materiais ortotrópicos em estado plano de tensões	20
2.2.3	Relação tensão-deformação para uma lâmina de orientação arbitrária	20
2.3	TEORIA CLÁSSICA DOS LAMINADOS	22
2.4	FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E ANÁLISE MODAL	27
2.5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	28
2.5.1	Carregamentos dinâmicos	29
2.6	DESIGN OF EXPERIMENTS	32
2.6.1	Plackett-Burman	33
3	MATERIAIS E MÉTODOS	34
3.1	PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	34
3.2	ANÁLISE MODAL COMPUTACIONAL	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	40
4.1	ANÁLISE MODAL	40
4.2	FRFS	45
5	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49

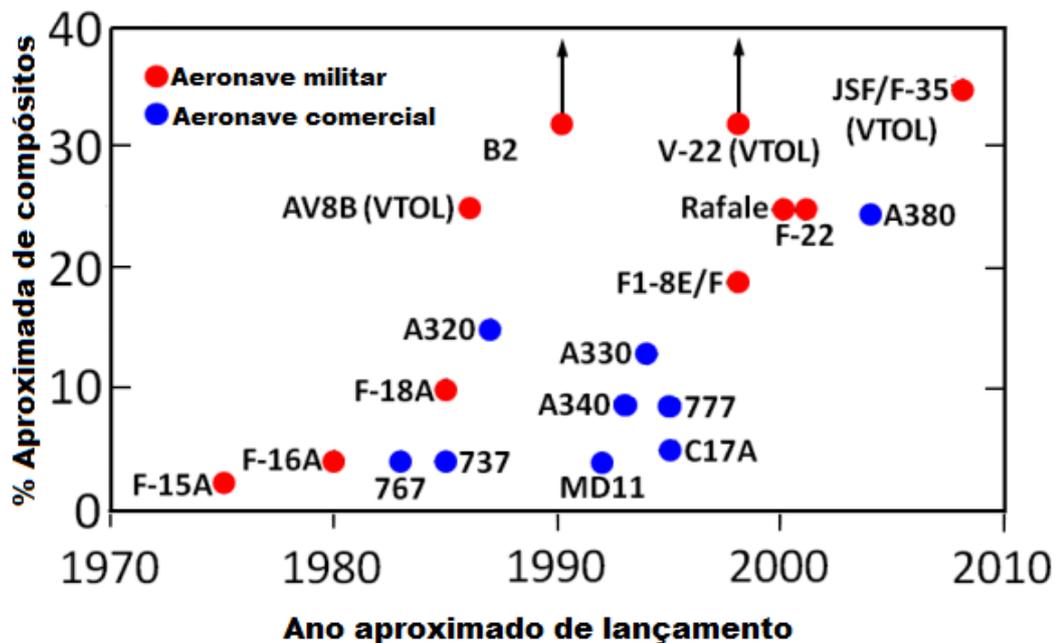
1 INTRODUÇÃO

A busca por materiais mais resistentes sempre foi uma característica da humanidade. Antigamente, ter armas e ferramentas feitas com um material mais resistente e durável podia representar a sobrevivência de um grupo, sendo que uma das principais divisões das eras humanas é feita pelo tipo de material que a nossa espécie conseguia manipular: idade da pedra, idade do cobre, idade do bronze e idade do ferro. Porém, esses são materiais monolíticos, que apresentam limitações naturais, onde geralmente um ganho de resistência está associado a um ganho de massa. Então, uma solução lógica é trabalhar com a união dos materiais, tentando explorar a interação entre eles, maximizando os pontos fortes e minimizando os pontos fracos de cada um.

Os materiais compósitos são exatamente isso: um conjunto de materiais unidos de certa forma a obter-se propriedades que nenhum deles conseguiria sozinho. Estes materiais vêm sendo usado de forma rudimentar e intuitiva há milênios, como por exemplo os Sumérios, que em 4000 A.C. (Antes de Cristo) já adicionavam palha ao barro, com o objetivo de aumentar a resistência de seus tijolos. Porém, foi só no século XX que os materiais compósitos foram reconhecidos como uma classe específica de materiais, sendo desenvolvidas teorias e métodos de fabricação.

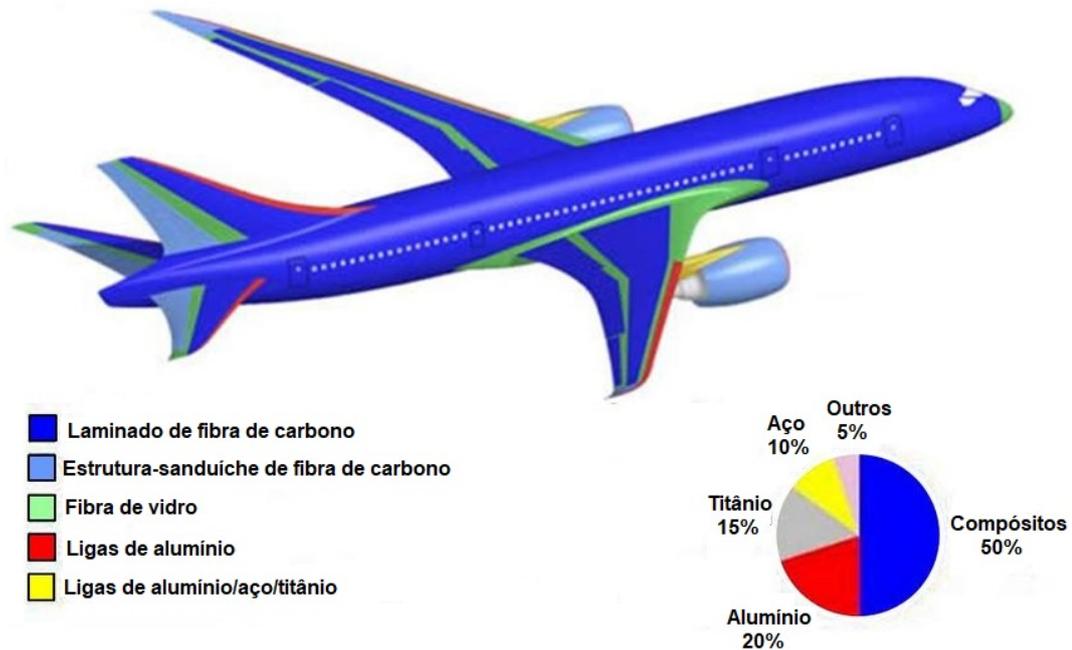
Desde então, os materiais compósitos vêm ganhando espaço na indústria, principalmente nas de alta tecnologia, como a aeronáutica, aeroespacial e bioengenharia, onde a necessidade de componentes resistentes e leves é elevada, como ilustrado nas figuras 1 e 2:

Figura 1 – Uso de materiais compósitos na indústria aeronáutica ao longo dos anos.



Fonte: Prasad e Wanhill (2017), adaptado pelo autor (2023)

Figura 2 – Composição e distribuição de materiais para um Boeing 787.



Fonte: (Prasad e Wanhill (2017), Adaptado pelo autor, 2023)

Porém, apesar da sua elevada resistência específica, os compósitos não são livres de desafios. Um dos principais é que não é trivial controlar suas propriedades durante o processo de fabricação, o que resulta num nível elevado de incertezas quando comparados com materiais metálicos.

Essas incertezas quanto às propriedades dificultam o projeto, portanto é importante o uso de metodologias que levem em consideração essas incertezas tanto nas propriedades geométricas quanto nas mecânicas, auxiliando no projeto e oferecendo um controle do processo de fabricação.

1.1 OBJETIVO GERAL:

Analisar a influência de parâmetros do processo de fabricação (propriedades geométricas e mecânicas) na resposta modal de placas de fibra de vidro com resina epóxi através de análises modais computacionais e metodologia de *Design of Experiments*.

1.2 OBJETIVO ESPECÍFICOS:

- Realizar um estudo detalhado da mecânica de materiais compósitos e do modelo de elementos finitos para tais materiais.
- Desenvolver de um modelo computacional e posterior análise modal computacional de placas de compósitos.
- Analisar a influência dos parâmetros na resposta modal com uso da metodologia de Plackett-Burman.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MATERIAIS COMPÓSITOS

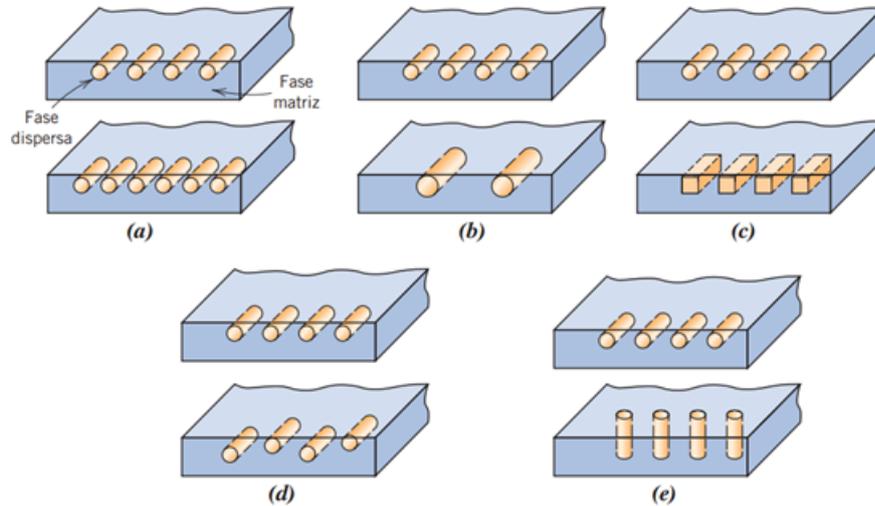
Um material compósito (ou composto) pode ser definido como um conjunto de dois ou mais materiais diferentes, que quando combinados em escala macroscópica, objetivam funcionar como uma unidade, obtendo assim propriedades que nenhum dos componentes conseguiria apresentar de forma isolada. É uma definição muito similar à das ligas, por exemplo, que também combinam dois materiais diferentes, como o ferro e o manganês no aço, mas em escala atômica. A escala de dimensões das inclusões, nos materiais compósitos, normalmente é de um micrometro ou maior (MENDONCA, 2005).

A necessidade desses materiais geralmente se dá em indústrias de alta tecnologia, como a aeronáutica, aeroespacial, submarina e de bioengenharia. Na engenharia aeronáutica, por exemplo, cada vez mais se fazem necessários materiais que possuam baixa massa específica, sejam rígidos, e tenham resistência à abrasão e ao impacto, além de não serem corroídos com facilidade. Essa é uma combinação de propriedades muito específicas e não usuais, que é bastante difícil de se encontrar em materiais monolíticos. Esses materiais têm dificuldade de maximizar todos os parâmetros simultaneamente, por exemplo, geralmente materiais resistentes acabam sendo relativamente densos, e o aumento da resistência ou da rigidez geralmente resulta em uma redução da tenacidade (CALLISTER; RETHWISCH, 2016).

Os materiais que formam o compósito podem ser classificados como matriz (aglomerante) ou reforço (fase dispersa). A matriz é uma fase contínua de material aglomerante, cuja função é proteger e manter a geometria e orientação dos reforços, ao mesmo tempo em que transmite aos mesmos os esforços externos. Pode ser polimérica, metálica, cerâmica, cimentosa ou de outro tipo. Já os reforços geralmente têm as melhores propriedades mecânicas, e têm a função estrutural de suportar os carregamentos a ele transmitidos pela matriz. Há ainda uma terceira fase, que é a interface fibra/resina. Ela quantifica o grau de interação da matriz com o reforço, e é função tanto da compatibilidade inerente aos materiais, quanto do processo de fabricação (CHITA, 2012; TITA, 2006).

De acordo com Callister e Rethwisch (2016), as propriedades do material compósito resultante são função das propriedades das fases constituintes, da quantidade relativa de cada fase, bem como da geometria da fase dispersa. Algumas variações de características da geometria da fase dispersa são ilustradas na figura 3:

Figura 3 – Representações esquemáticas das várias características geométricas e espaciais das partículas da fase dispersa que podem influenciar as propriedades dos compósitos: (a) concentração, (b) tamanho, (c) forma, (d) distribuição e (e) orientação.

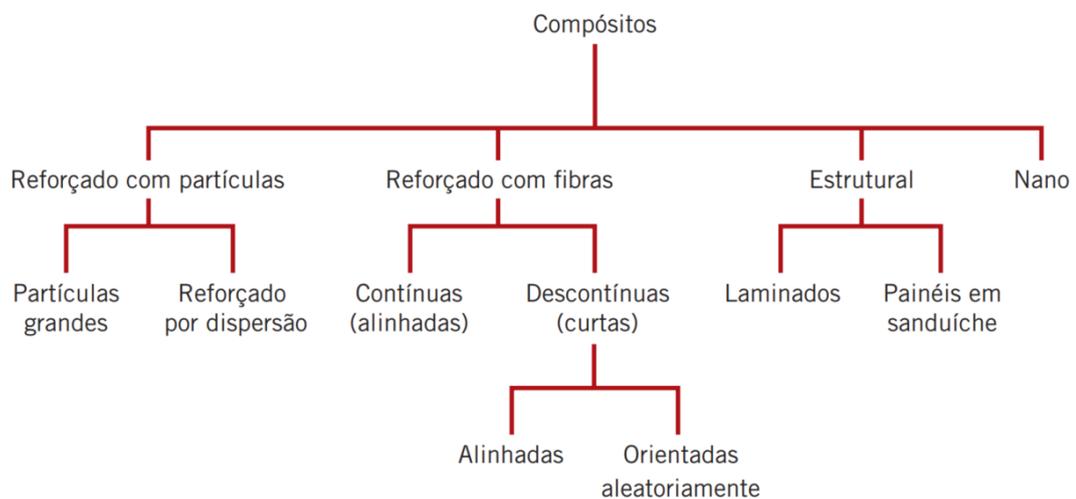


Fonte: (CALLISTER; RETHWISCH, 2016)

As propriedades da interface também influenciam nas propriedades mecânicas do compósito final, e o método de fabricação influencia nas propriedades da interface. Dois compósitos que possuam matriz e reforço idênticos entre si podem ter propriedades diferentes, desde que o método de fabricação seja diferente (TITA, 2006).

Devido às possibilidades de composição de materiais, é útil fazer uma classificação mais detalhada dentre materiais compósitos. Um esquema simples é a divisão em: compósitos reforçados com partículas, compósitos reforçados com fibras, compósitos estruturais e nanocompósitos. Algumas divisões ainda têm subdivisões, como ilustrado na figura 4.

Figura 4 – Esquema de classificação para os materiais compósitos.

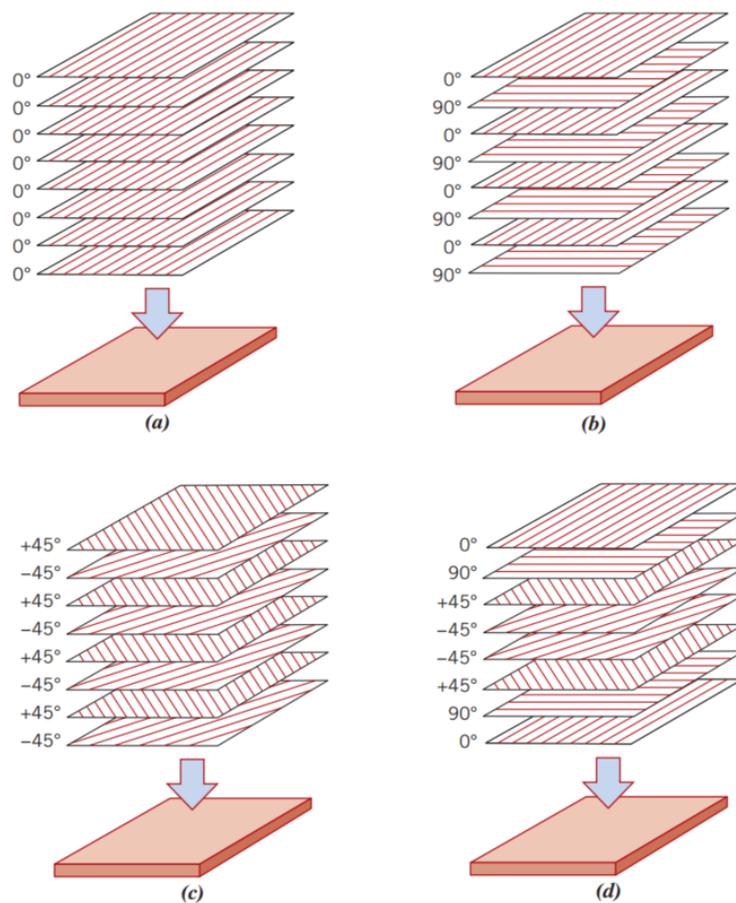


Fonte: (CALLISTER; RETHWISCH, 2016)

2.1.1 Compósitos laminados

Um compósito laminado é definido como um conjunto de camadas (ou lâminas) bidimensionais coladas umas nas outras. As propriedades do laminado dependem de vários fatores, como o tipo de material usado em cada camada e a orientação das fibras. Como geralmente as camadas são feitas do mesmo material, é a orientação que vai governar qual é o tipo de laminado, que pode ser dividido em quatro classes: laminados unidirecionais, laminados cruzados, laminados com camadas em ângulo e laminados multidirecionais. Nos unidirecionais a orientação das fibras é a mesma para todas as lâminas, nos cruzados há uma alternância da orientação entre camadas de 0° e 90° , nos com camada em ângulo a alternância é feita de $+\theta$ e $-\theta$ (45° , por exemplo), enquanto nos multidirecionais possuem várias orientações (CALLISTER; RETHWISCH, 2016). Essas quatro classes de tipos de laminados são ilustradas na figura 5.

Figura 5 – O empilhamento (diagrama esquemático) em compósitos laminados. (a) Unidirecional; (b) cruzado; (c) camada em ângulo; e (d) multidirecional.



Fonte: (CALLISTER; RETHWISCH, 2016)

Cada classe de laminado apresenta diferentes níveis de isotropia. Os laminados unidirecionais apresentam elevado grau de anisotropia, os cruzados e os com camada em ângulo apresentam maior grau de isotropia, enquanto os multidirecionais são os mais próximos de um

material isotrópico (CALLISTER; RETHWISCH, 2016).

2.1.2 Processo de fabricação

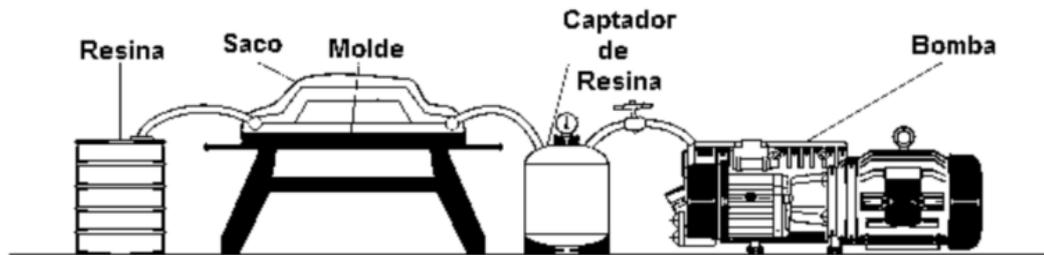
O processo de fabricação de componentes com materiais estruturais tradicionais geralmente é dividido em duas partes: o material em si, e o processo. Isso se deve ao fato de que a fabricação do material geralmente pode ser independente do processo, o que permite que grandes quantidades de material sejam fabricadas e então distribuídas até diferentes locais de processamento, onde então será dada a forma do componente, podendo ser usinado, moldado ou soldado. Já os compósitos reforçados por fibra, e os laminados por consequência, não seguem essa mesma lógica, uma vez que o material e o componente em si normalmente são fabricados simultaneamente. Assim, é necessário entender como as condições de processamento afetam as propriedades do produto final (GALLI, 2016).

De acordo com Silva (2016), há vários processos usados para a fabricação de compósitos, e os mais usuais na indústria são:

- Enrolamento Filamentar ;
- Rotomoldagem;
- Moldagem manual;
- Centrifugação;
- RTM (*Resin Transfer Molding*);
- Infusão a vácuo;
- Compressão a quente e a frio;
- Pultrusão.

O processo de infusão a vácuo é caracterizado pelo uso de uma superfície rígida como molde e um saco para vedação, A vedação é necessária para garantir o vácuo, que por sua vez vai gerar uma diferença de pressão, retirando o ar existente no interior do saco, e posteriormente induzindo um fluxo de resina por todo o componente (SILVA, 2016). Um exemplo de um sistema de infusão à vácuo está ilustrado na figura 6.

Figura 6 – Esquema completo de um sistema de infusão a vácuo.



Fonte: (SILVA, 2016)

2.1.3 Incertezas no processo de fabricação

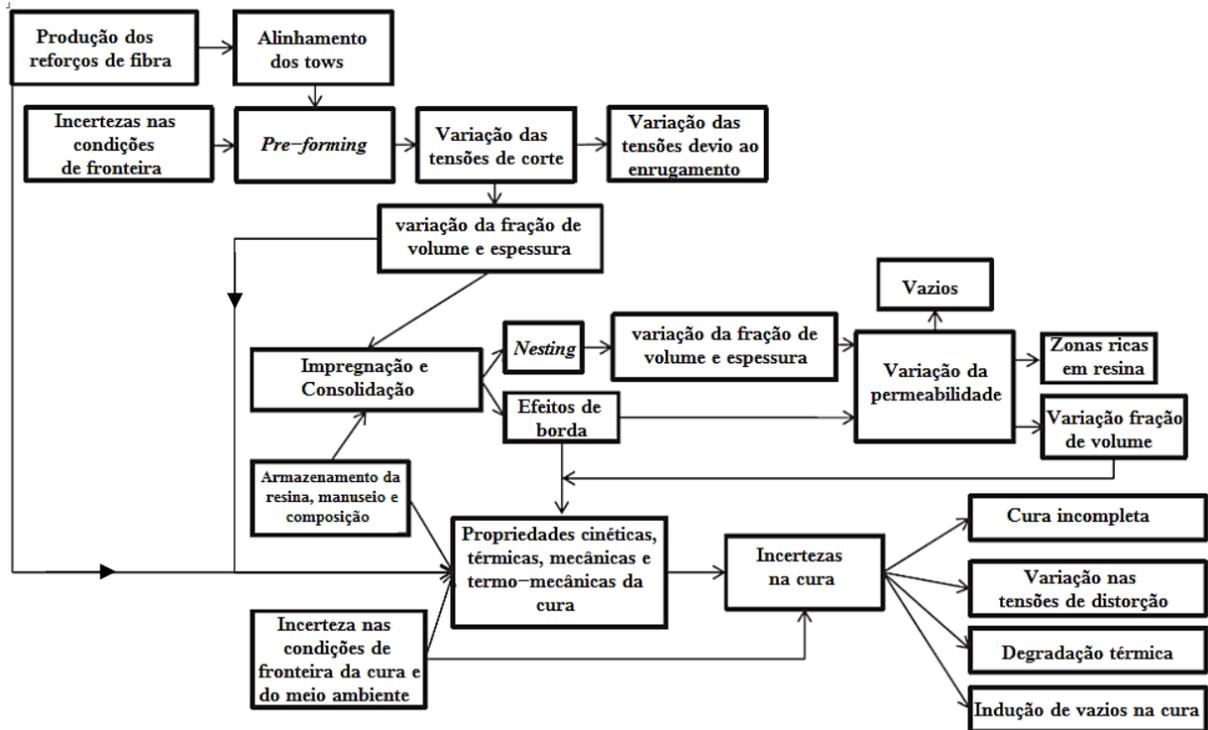
Todo processo real tem algum nível de incerteza associada, e os processos de fabricação de materiais compósitos não são diferentes. A fabricação de compósitos envolve diversas fontes de incertezas associadas com a variação das propriedades do material e das condições de contorno. Dependendo da variação, os critérios de projeto podem até nem ser mais válidos. Por exemplo, caso haja variação razoável do ângulo de orientação real do especificado em projeto, o critério de falha escolhido não é mais válido, pois a camada ortotrópica irá possuir outros valores de resistência mecânica. Ou ainda, caso a sequência de empilhamento das camadas seja diferente da especificada, o comportamento do laminado vai ser diferente do previsto em projeto. Por isso é essencial o estudo dessas incertezas, podendo assim antecipar o impacto nas propriedades do compósito final, e definir um nível aceitável de variação dos parâmetros na fabricação (MESOGITIS; SKORDOS; LONG, 2014; TITA, 2006).

Segundo Mesogitis, Skordos e Long (2014), essas incertezas podem ser resumidas nos seguintes tópicos:

- Variações na arquitetura da fibra, que normalmente são geradas durante a produção, manuseamento ou armazenamento;
- Incertezas associadas ao material da matriz, causadas por variações nas condições de armazenamento ou incertezas na composição da resina;
- Variações em parâmetros ambientais e condições do processo.

Na figura 7 estão ilustrados várias relações e consequências inerentes aos diversos tipos de incerteza que podem estar associadas ao processo de fabricação de compósitos:

Figura 7 – Esquema das incertezas nos processos de fabricação de compósitos.



Fonte: (SILVA, 2016)

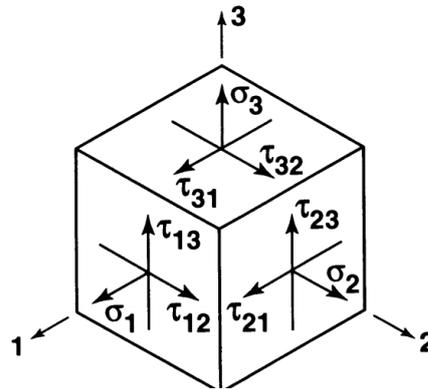
2.2 ANÁLISE MACROMECAÂNICA

A análise macromecânica é uma das possíveis abordagens para descrever o comportamento mecânico de uma lâmina de material compósito. Nela, como o nome sugere, são consideradas apenas as propriedades mecânicas médias aparentes, ao invés de se considerar as interações das fases constituintes. Apesar dessa abordagem descrever o comportamento de uma única lâmina, e não do laminado como um todo, ela é essencial para a construção de uma teoria de laminados, visto que as lâminas são os componentes formadores dos mesmos. É importante ressaltar que a teoria apresentada a seguir é restrita à materiais com comportamento linear-elástico, só podendo ser usada para relacionar tensões e deformações antes da falha (JONES, 1999).

2.2.1 Relação tensão-deformação para materiais elástico lineares

A abordagem apresentada em Jones (1999) e Tita (2006) é usada como base. Primeiramente, considera-se um elemento diferencial e suas tensões associadas, conforme ilustrado na figura 8.

Figura 8 – Elemento diferencial e suas tensões.



Fonte: (JONES, 1999)

Considerando um material elástico linear, a relação entre as tensões e deformações nas direções ilustradas na figura 8 é dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde os termos σ_i e ε_i representam as tensões e deformações normais nas direções "i", enquanto os termos τ_{ij} e γ_{ij} representam as tensões e deformações angulares nos planos "ij". Já as constantes que fazem a relação tensão-deformação são representadas pelos termos C_{ij} .

Esse é o caso mais geral possível, onde todos os 36 coeficientes são independentes, o que indica que não há nenhum plano de simetria, ou seja, se trata de um material anisotrópico. Porém, para materiais elásticos, considerando algumas características da energia de deformação, é possível demonstrar que a matriz acima é simétrica, o que reduz o número de coeficientes independentes de 36 para 21.

Caso haja um plano de simetria de reflexão nas propriedades, neste exemplo o plano 1-2, a relação constitutiva se reduz a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sim} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Há uma redução de 21 para 13 coeficientes independentes, e esses materiais são chamados de monocínicos.

Caso haja dois planos de simetria, obrigatoriamente haverá simetria a um plano mutuamente ortogonal aos dois primeiros. Esses materiais são chamados de ortotrópicos, e a sua relação constitutiva é dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sim} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Os materiais ortotrópicos têm, então, 9 coeficientes independentes, e é possível observar a ausência de termos que relacionem tensões normais com cisalhantes. Isso indica que esses materiais têm pelo menos um sistema de coordenadas, em cada ponto, no qual as tensões normais geram exclusivamente deformações normais, e as tensões cisalhantes geram exclusivamente deformações cisalhantes na direção do carregamento.

Caso exista pelo menos um plano, em cada ponto, no qual as propriedades do material sejam as mesmas em todas as direções, neste exemplo o plano 1-2, a relação constitutiva é dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ \text{sim} & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Esse material é chamado de transversalmente isotrópico, ou ortotrópico com um plano de simetria de rotação. O número de coeficientes independentes é reduzido para 5.

O caso mais simples possível é o de um material que apresente infinitos planos de simetria de propriedades, o material isotrópico. Neste caso, a relação constitutiva têm apenas 2 coeficientes independentes, e é dada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ \text{sim} & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

2.2.2 Constantes de engenharia e Lei de Hooke para materiais ortotrópicos em estado plano de tensões

Considerando a relação dada pela equação (3), os termos da matriz de rigidez são dados pelas seguintes relações entre as constantes de engenharia:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{E_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}; & C_{12} &= \frac{E_{11}(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} = \frac{E_{22}(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})}{\Delta}; \\
 C_{22} &= \frac{E_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13})}{\Delta}; & C_{13} &= \frac{E_{11}(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} = \frac{E_{22}(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{\Delta}; \\
 C_{33} &= \frac{E_{33}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}; & C_{23} &= \frac{E_{22}(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} = \frac{E_{33}(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})}{\Delta}; \\
 & & C_{44} &= G_{23}; & C_{55} &= G_{13}; & C_{66} &= G_{12}; \\
 \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Porém, esse é o caso mais geral para materiais ortotrópicos. Caso seja considerado que o material é transversalmente isotrópico, tem-se que: $E_{22} = E_{33}$, $G_{13} = G_{23}$ e $\nu_{12} = \nu_{13}$, o que reduz o número de constantes de engenharia independentes para 5, como visto anteriormente. Como a espessura da lâmina geralmente é muito fina, é plausível adotar-se um estado plano de tensão, de forma que a Lei de Hooke passa a ser escrita em função da Matriz de Rigidez Reduzida:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

onde:

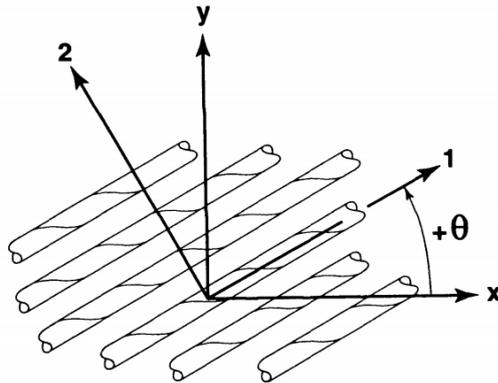
$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_{11}^2}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}; \\
 C_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_{11}E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}; \\
 C_{12} = C_{21} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_{11}E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}; \\
 C_{66} &= G_{12}; \\
 \frac{\nu_{12}}{E_{11}} &= \frac{\nu_{21}}{E_{22}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

2.2.3 Relação tensão-deformação para uma lâmina de orientação arbitrária

Nas seções anteriores, todos os cálculos foram apresentados para uma única lâmina, que convenientemente tinha suas propriedades alinhadas com o sistema de coordenadas usado,

representado pelos índices 123. Porém, como já visto anteriormente, um laminado pode ter lâminas em várias orientações diferentes. É necessário então descrever uma relação das tensões e deformações do sistema local de cada lâmina, para um sistema global do laminado, representado pelos índices xyz.

Figura 9 – Sistemas locais e globais de coordenadas



Fonte: (JONES, 1999)

Como é possível observar na figura 9, as direções 1 e 2 possuem direção paralela e perpendicular às fibras, respectivamente. Os carregamentos, porém, geralmente estão alinhados ao sistema de referência global, portanto utiliza-se a matriz de transformação

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Para as tensões, a relação fica:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{Local} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_{Local}. \quad (10)$$

E para as deformações:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix}_{Local} = [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix}_{Global} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix}_{Global} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix}_{Local}. \quad (11)$$

Como foi mencionado anteriormente, geralmente os carregamentos estão alinhados ao sistema de referência global, portanto é útil descrever as relações entre tensões e deformações globais por meio de uma matriz de rigidez reduzida transformada, que é obtida substituindo as equações (10) e (11) na equação (7):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} \quad ou \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} [T]$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11}\cos^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{22}\sin^4\theta; \\ \bar{C}_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta); \\ \bar{C}_{22} &= C_{11}\sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{22}\cos^4\theta; \\ \bar{C}_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta; \\ \bar{C}_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta; \\ \bar{C}_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta); \end{aligned} \quad (13)$$

Portanto, é a matriz de rigidez \bar{C} que irá carregar em seus componentes a influência da orientação de cada lâmina. Assim, a orientação da fibra influencia nas propriedades elásticas, que influenciam na matriz de rigidez da lâmina, que por sua vez influencia a rigidez do laminado como um todo.

2.3 TEORIA CLÁSSICA DOS LAMINADOS

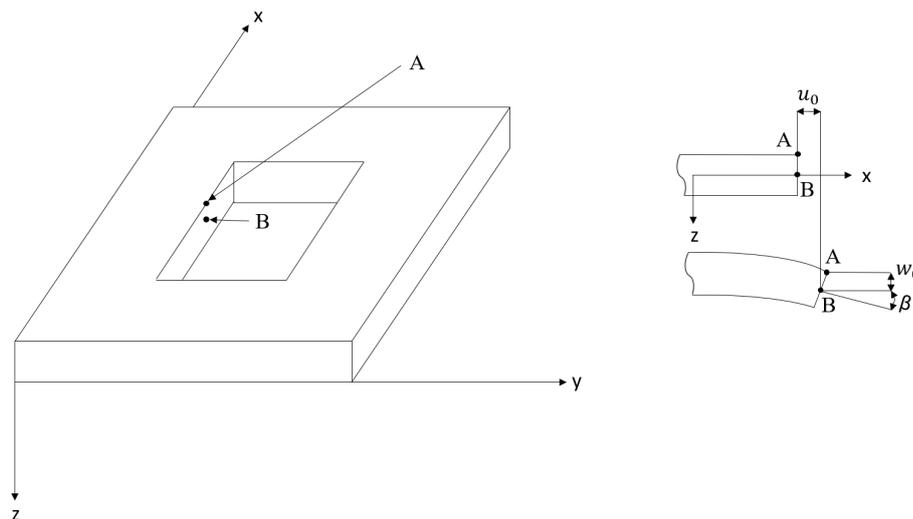
As abordagens apresentadas em Jones (1999) e Tita (2006) são usadas como base para a seguinte seção. Como visto anteriormente, um laminado é composto pelo empilhamento de diversas lâminas de material compósito, que podem ter propriedades diferentes entre si, como o material, espessura ou orientação. Assim, com a manipulação destas propriedades, é possível obter-se o comportamento mecânico desejado no laminado final, de acordo com a aplicação. Porém, a interação dessas várias camadas e sua influência no laminado não são triviais, e o processo da teoria clássica dos laminados é, essencialmente, achar hipóteses eficazes e razoavelmente precisas, que permitam a simplificação de um problema de elasticidade tridimensional complicado, para um de mecânica de corpos deformáveis, bidimensional e resolvível. Para tal, adotam-se as seguintes hipóteses, conhecidas como hipóteses de Kirchoff-Love:

1. O laminado é delgado.
2. A matriz entre as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento, portanto não há deslizamento entre as lâminas.

3. Material de adesão indeformável. Ou seja, as lâminas estão perfeitamente vinculadas entre si, portanto os deslocamentos são contínuos através das lâminas.
4. As seções perpendiculares à superfície de referência permanecem perpendiculares sob extensão e/ou flexão.
5. As deformações normais à superfície de referência são nulas.

As hipóteses 4 e 5 combinadas acarretam em: $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$ e $\epsilon_z = 0$, visto que as tensões de cisalhamento transversal e parcelas normais à superfície são nulas. Apesar das tensões τ_{xz} , τ_{yz} e ϵ_z na realidade não serem nulas, e serem importantes para a análise de delaminações, neste trabalho serão abordados laminados finos, que possuem uma relação >10 entre a espessura e a largura e a espessura e o comprimento, portanto as hipóteses de Kirchoff-Love são satisfatórias. O deslocamento e as rotações de uma região de placa, no plano xz, é ilustrada na figura 10:

Figura 10 – Deformações no plano xz



Fonte: Jones (1999), adaptado pelo autor (2023)

Os deslocamentos com índices "0" são os deslocamentos da superfície de referência. É possível observar que há uma variação do deslocamento de um ponto qualquer ao longo da espessura, fora da superfície de referência, para a superfície de referência. A causa dessa variação é a rotação, e é função do ângulo β , que é constante ao longo da espessura. Essas relações também se aplicam para o plano yz, e resultam na equação 14:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z\beta_x; \\ v &= v_0 - z\beta_y. \end{aligned} \tag{14}$$

E como é assumido que a seção transversal se mantém perpendicular à superfície de referência, o ângulo β é na verdade a inclinação da superfície de referência.

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{\partial w_0}{\partial x}; \\ \beta_y &= \frac{\partial w_0}{\partial y}.\end{aligned}\tag{15}$$

Substituindo a equação 15 na 14:

$$\begin{aligned}u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}; \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}.\end{aligned}\tag{16}$$

Para pequenos deslocamentos (comportamento linear-elástico), as deformações são definidas em função dos deslocamentos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{17}$$

Portanto, derivando a equação 16, tem-se que:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{18}$$

Ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}\tag{19}$$

Na qual as deformações da superfície de referência são:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}\tag{20}$$

E as curvaturas são:

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Portanto, devido às hipóteses adotadas, é possível observar na equação 19 que a variação da deformação ao longo da espessura é linear. Determinadas as deformações ao longo da espessura, agora é possível determinar as tensões ao longo da mesma, substituindo a equação 19 na equação 12:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

O índice k representa a k -ésima lâmina do laminado, e a matriz \bar{C}_{ij} pode ser diferente para cada lâmina, de forma que mesmo a variação de deformação sendo linear ao longo da espessura, a variação de tensão não necessariamente vai ser.

Para obter-se os esforços atuantes em uma seção transversal, é feita a integração da tensão ao longo da espessura. Porém, como foi observado, para laminados a tensão varia tanto dentro da mesma lâmina quanto de lâmina para lâmina, portanto, a integral a ser resolvida não é trivial. A solução é uma integral contínua para cada lâmina, e uma soma discreta da parcela de cada lâmina, representadas nas equações 23 e 24:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz. \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz. \quad (24)$$

Percebe-se que a largura não aparece nas equações, ou seja, os esforços obtidos na verdade são uma representação do carregamento aplicado por unidade de largura.

Substituindo a equação 22 nas equações 23 e 24, tem-se:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \right]. \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}_k z^2 dz \right]. \quad (26)$$

É possível juntar as equações 25 e 26, de forma que a relação entre os esforços aplicados no laminado e suas deformações é dada por:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{C}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}); \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{C}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2); \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{C}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3); \end{aligned} \quad (28)$$

Pode-se descrever o comportamento mecânico de um laminado de forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (29)$$

Onde a matriz [A] é chamada de matriz de rigidez à extensão, e é responsável por relacionar as forças aplicadas com as deformações de membrana do laminado. Já a matriz [D] é chamada de matriz de rigidez à flexão, e é responsável por relacionar os momentos aplicados com as curvaturas. Finalmente, a matriz [B] é chamada de matriz de rigidez de acoplamento, e é responsável por relacionar extensão e curvaturas.

Um dos tipos de laminados multidirecionais é o laminado simétrico. Neles, a superfície de referência funciona como um espelho, de modo que toda lâmina acima dela tem um par abaixo,

com a mesma espessura, material e orientação. Esse tipo de empilhamento tem a característica de não ter acoplamento entre extensão e flexão, de modo que a matriz [B] é nula, e equação 29 pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (30)$$

2.4 FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E ANÁLISE MODAL

Um sistema oscilante é definido por um conjunto de um ou mais componentes que quando é excitado por uma força, pode oscilar mecanicamente, ou vibrar. A vibração é percebida pela variação do deslocamento, velocidade ou aceleração de um ponto em uma coordenada espacial, sendo que cada possível variação de direção de uma coordenada é definida como um grau de liberdade (KELLY, 2006). O número de graus de liberdade é finito para sistemas discretos, e infinito para sistemas contínuos. Embora a maioria das estruturas reais sejam sistemas contínuos, como as placas de compósito deste trabalho, uma solução analítica geralmente é muito complexa de ser resolvida, e uma simplificação para alguns graus de liberdade se faz útil. Esse processo se chama discretização.

A análise modal é o estudo das características dinâmicas inerentes de um sistema. Essas propriedades podem ser definidas como frequências naturais, fatores de amortecimento e as formas modais, e são usadas para a formulação de um modelo matemático para o comportamento dinâmico do sistema. O modelo matemático formulado é chamado de modelo modal do sistema, enquanto as informações a respeito das características são chamadas de informações modais. É a FRF (função de resposta em frequência) quem define as características da dinâmica estrutural. A FRF é definida como a relação entre a resposta vibracional em um ponto e uma excitação no mesmo ou em outro ponto, em função da frequência de excitação. Com o sistema discretizado em vários pontos estratégicos, as combinações de respostas e excitações nestes diferentes pontos fornecem um conjunto de FRFs, que são representadas coletivamente em uma matriz de FRF, determinando a dinâmica estrutural do sistema, e permitindo que as características dos modos de vibração possam ser obtidas (ALMEIDA, 1987).

A abordagem apresentada em He e Fu (2001) é usada como base para essa seção.

Considerando um sistema massa-mola-amortecedor, aplica-se a segunda lei de Newton e iguala-se as forças internas (inércia, rigidez e amortecimento) à força externa, e a solução analítica resulta na seguinte equação governante da dinâmica estrutural:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t). \quad (31)$$

Onde $\ddot{X}(t)$, $\dot{X}(t)$ e $X(t)$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, e M , C e K são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura. A força externa é representada por $F(t)$, e considerando excitação harmônica, tem a seguinte forma:

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t}. \quad (32)$$

Considerando uma solução para o deslocamento com o mesmo formato:

$$X(t) = X_0 e^{i\omega t}. \quad (33)$$

Onde F_0 é a força estática, e X_0 é a amplitude e ω é a frequência. Derivando duas vezes a equação 33 temos que:

$$\dot{X}(t) = i\omega X_0 e^{i\omega t}. \quad (34)$$

e

$$\ddot{X}(t) = -\omega^2 X_0 e^{i\omega t}. \quad (35)$$

E substituindo as equações 34 e 35 na equação 31:

$$-(M\omega^2 + i\omega C + K)X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}. \quad (36)$$

Simplificando e reorganizando os termos, tem-se a função de resposta em frequência do sistema:

$$\frac{X_0}{F_0} = \frac{1}{(K + i\omega C - M\omega^2)}. \quad (37)$$

A FRF não é limitada apenas como o quociente do deslocamento pela excitação, podendo também ser definida como o quociente da velocidade ou da aceleração pela excitação. Cada uma delas tem uma interpretação física, e neste trabalho o interesse será na definida pela aceleração.

2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico usado para discretizar sistemas contínuos, de forma a subdividi-los em um número finito de partes, chamados elementos, conectados entre si pelos pontos discretos, os nós (FILHO, 2011).

Antigamente, era um método que exigia uma certa quantidade de tempo, visto que é baseado principalmente em operações de matrizes, e quanto mais as matrizes crescem, maior o tempo a ser dedicado caso a resolução seja manual. Porém, com o advento dos computadores, que realizam essas operações matriciais em questão de segundos, este se tornou um dos métodos mais utilizados tanto na academia quanto na indústria, nas mais diversas áreas.

Os principais passos para resolução de um problema com o método dos elementos finitos são:

1. Discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos, ou geração da malha.
2. Definição das integrais ponderadas pelas funções peso.
3. Desenvolvimento de um modelo de elementos finitos usando as integrais ponderadas.
4. Montagem dos elementos finitos para obter-se o sistema global das equações algébricas.
5. Imposição das condições de contorno
6. Solução das equações
7. Análise pós processamento da solução e das variáveis de interesse.

A abordagem apresentada em Mendonça (2005) e Reddy (1997) é usada como base para essa seção.

2.5.1 Carregamentos dinâmicos

A análise de elementos finitos de uma placa de material compósito é feita com base na teoria de Mindlin para placas semiespessas. Usando o princípio de D’Alambert, é possível decompor as forças de corpo em forças de inércia, de modo que a integral dos termos de inércia é:

$$I = \int_{\Omega} [\rho_o(\hat{u}^0 \ddot{u}^o + \hat{v}^0 \ddot{v}^o + \hat{w}^0 \ddot{w}^o) + \rho_1(\hat{u}^0 \ddot{\beta}_x + \hat{v}^0 \ddot{\beta}_y + \hat{\beta}_x \ddot{u}^o + \hat{\beta}_y \ddot{v}^o) + \rho_2(\hat{\beta}_x \ddot{\beta}_x + \hat{\beta}_y \ddot{\beta}_y)] d\Omega. \quad (38)$$

Na forma compacta:

$$I = \int_{\Omega} \{\hat{u}\}^t \{m\} \{\ddot{u}\} d\Omega. \quad (39)$$

Usando o princípio dos trabalhos virtuais (PTV):

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}^0 \\ \hat{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{w} q(x, y, t) d\Omega + \int_{\Omega} [\hat{u}]^t [m] [\ddot{u}] d\Omega = 0. \quad (40)$$

Onde Ω é o domínio da placa, e $q(x, y, t)$ é a carga transversal distribuída por unidade de área. O PTV busca a solução dos deslocamentos da superfície de referência ($\varepsilon^0, \kappa, \gamma_{yz} e \gamma_{xz}$) para qualquer conjunto de funções peso $\hat{\varepsilon}^0, \hat{\kappa}, \hat{\gamma}_{yz} e \hat{\gamma}_{xz}$. O superfície de referência é representada pelo domínio (Ω), e é dividida em um conjunto finito de elementos, tal que:

$$\cup_{e=1}^{m_e} \Omega^e = \Omega. \quad (41)$$

$$\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, i \neq j, \quad (42)$$

onde ne é o número total de elementos, e e é o contador de elementos.

Usando as hipóteses cinemáticas da teoria de 1ª ordem, é possível descrever os deslocamentos de um ponto qualquer do laminado por:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (43)$$

onde,

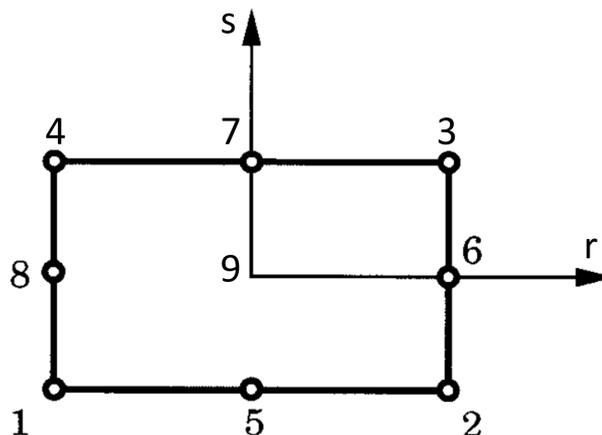
$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z} \text{ e } \phi_y = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (44)$$

Ao invés obter a solução exata de β_x, β_y e w , busca-se determinar as soluções aproximadas β_{xh}, β_{yh} e w_h . Para obter as soluções aproximadas, usam-se funções de interpolação, que são definidas em cada nó dos elementos finitos, expressas por:

$$\begin{bmatrix} u^0(x, y) \\ v^0(x, y) \\ w(x, y) \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}_h^e = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(x, y) \begin{bmatrix} u_{no} \\ v_{no} \\ w_{no} \\ \beta_{xno} \\ \beta_{yno} \end{bmatrix}_{no}, \quad \forall (x, y) \in \Omega^e. \quad (45)$$

Onde o subíndice no representa o nó do elemento, n_{ne} representa o número de nós de cada elemento, $N_{no}^e(x, y)$ representa o conjunto das n_{ne} funções de interpolação. Essas funções geralmente não são expressas no sistema de coordenadas global, mas sim no sistema local de cada elemento, como ilustrado na figura 11.

Figura 11 – Elemento retangular com 9 nós.



Fonte: Adaptado de (REDDY, 1997)

As funções de interpolação para o elemento lagrangeano biquadrática são:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-r)(1-s)(-r-s-1) \\ (1+r)(1-s)(r-s-1) \\ (1+r)(1+s)(r+s-1) \\ (1-r)(1+s)(-r+s-1) \\ 2(1-r^2)(1-s) \\ 2(1+r)(1-s^2) \\ 2(1-r^2)(1+s) \\ 2(1-r)(1-s^2) \\ 2(1-r^2)(1-s^2) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Assim, os deslocamentos aproximados dentro do elemento pode ser determinado usando as funções de interpolação e os deslocamentos nodais.

$$u(x, y, t)_h^e = [\bar{N}^e(x, y)]U^e(t). \quad (47)$$

É necessário fazer a derivação dos deslocamentos, a fim de determinar as deformações e calcular as integrais da equação 40. As deformações de membrana e flexão são:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du^0}{dx} \\ \frac{dv^0}{dy} \\ \frac{du^0}{dy} + \frac{dv^0}{dx} \\ \frac{d\beta_x}{dx} \\ \frac{d\beta_y}{dy} \\ \frac{d\beta_y}{dx} + \frac{d\beta_x}{dy} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

E as cisalhantes transversais:

$$\begin{bmatrix} \gamma^{yz} \\ \gamma^{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\beta_y}{dy} + \frac{dw}{dy} \\ \frac{d\beta_x}{dy} + \frac{dw}{dx} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Desta forma, as relações entre os deslocamentos e as deformações são:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} = [B_f^e(x, y)] [U^e] \quad e \quad \begin{bmatrix} \gamma^{yz} \\ \gamma^{xz} \end{bmatrix} = [B_c^e(x, y)] [U^e]. \quad (50)$$

Assim, o PVT assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
[\hat{U}^e] \int_{\Omega^e} [B_f^e]^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [B_f^e] dx dy + \int_{\Omega^e} [B_c^e]^t [E^e] [B_c^e] dx dy [U^e] - [\hat{U}^e]^t \int_{\Omega^e} N_w q dx dy + \\
[\hat{U}^e]^t \int_{\Omega} [N^e]^t [m^e] [N^e] d\Omega [\dot{U}^e] = 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Pode-se então aplicar as funções peso nos graus de liberdade, e para o caso de vetor de força nulo tem-se:

$$[M][\ddot{U}(t)] + [K][U(t)] = [F(t)]. \tag{52}$$

$$[U(t)] = [\bar{U}]e^{i\omega t}. \tag{53}$$

Substituindo a equação 53 na equação 52:

$$[K - \omega^2 M][\bar{U}] = 0. \tag{54}$$

A equação 54 é um problema de autovetores, e é a base da análise modal, como já visto anteriormente. Enquanto ω representa as frequências naturais do sistema, \bar{U} representa os modos de vibração.

A solução do autoproblema feita por SIMULIA (2011) usa o método de Lanczos, que extrai os autovalores e seus autovetores correspondentes. O método de Lanczos usado no *Abaqus*TM consiste basicamente em uma série das chamadas "rodadas Lanczo", nas quais em cada uma uma transformação espectral é aplicada:

$$M(K - \sigma M)^{-1} M\phi = \theta M\phi. \tag{55}$$

Onde σ representa o salto, θ o autovalor e ϕ o autovetor. Essa transformação consegue uma convergência relativamente rápida para os valores finais. Uma rodada Lanczo será finalizada quando a sua continuação for julgada ineficiente.

2.6 DESIGN OF EXPERIMENTS

Design of Experiments (DoE) é um processo que envolve o planejamento, condução e análise de testes controlados, com o objetivo de avaliar quais variáveis que têm influência no valor de um parâmetro de saída. Assim é possível identificar quais variáveis são mais importantes e quais são os seus valores aceitáveis para otimizar o parâmetro de saída (CONDRA, 2001).

A vantagem de uma metodologia que permita a variação simultânea dos parâmetros é a sua elevada eficiência em relação à abordagem de variar um parâmetro de cada vez, permitindo a detecção de como a interação entre os parâmetros pode afetar o resultado final medido (WEISMANN; ANDERSON, 2014).

2.6.1 Plackett-Burman

O método de Plackett-Burman é usado para estudar até $k = N - 1$ variáveis em N rodadas, dado que N seja um múltiplo de 4. Neste trabalho, serão estudadas 12 variáveis. A figura 12 ilustra como se dá o valor de cada variável em cada rodada.

Figura 12 – Plackett-Burman para N=12 e k=11

Rodada	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+
2	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-
3	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+
4	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+
5	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-	+
6	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	-
7	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-
8	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-
9	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+
10	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-
11	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	+
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: (MYERS; MONTGOMERY; M, 2016)

Cada uma das variáveis é representada pelas letras de "A" a "K", e é atribuída um valor máximo e um mínimo, representados pelos sinais positivos e negativos. Então, são realizadas 12 rodadas do experimento, uma simulação computacional, e é medido um parâmetro de saída. Finalmente, usa-se a seguinte equação:

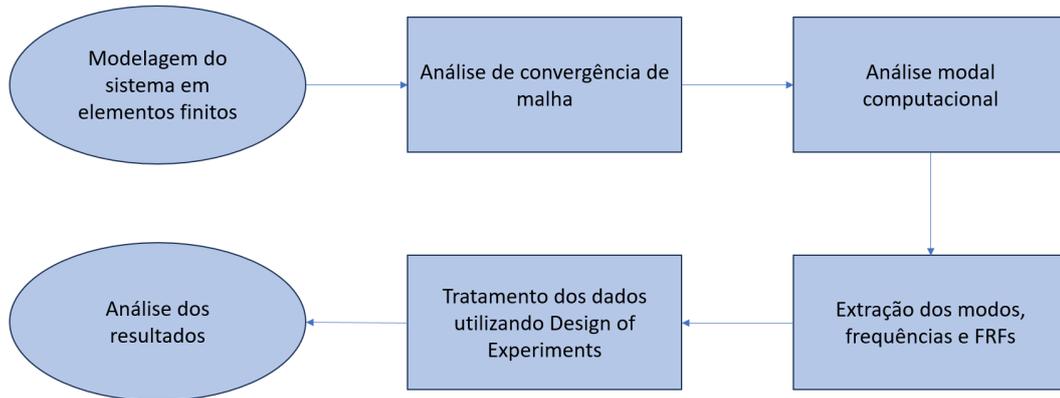
$$ME1(X) - ME2(X), \quad (56)$$

onde $ME1$ e $ME2$ são os valores médios dos parâmetros de saída nos quais a variável analisada era máxima e mínima, respectivamente.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção faz-se a descrição dos materiais e equipamentos utilizados, de como foi realizada a análise numérica, e de como foi realizada a análise final dos resultados. A figura 13 ilustra o fluxograma do procedimento realizado neste estudo.

Figura 13 – Fluxograma do estudo.

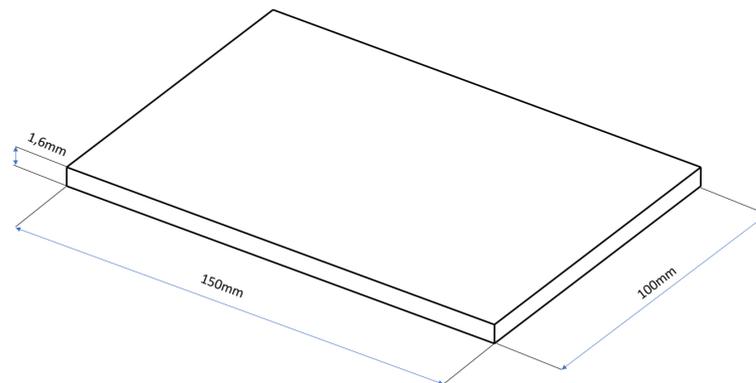


Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

3.1 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

As estruturas que são objeto de estudo neste trabalho são duas placas laminadas de fibra de vidro, uma utilizando fibra unidirecional (UD) e outra fibra bidirecional (BD). Ambas possuem 150mm de comprimento e 100mm de largura, com a UD possuindo 1,7mm de espessura e a BD 1,6mm de espessura.

Figura 14 – Placa de estudo BD esquematizada.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

O laminado foi fabricado pelo processo VARTM (*Vacuum Assisted Resin Transfer Molding*). e é composto de 16 camadas de mesma espessura cada, com sequência de empilhamento: $[45/ - 45/0/90/45/ - 45/0/90]_s$. Segundo SUTCLIFFE, LEMANSKI e SCOTT (2012) O desvio padrão da orientação das lâminas é $\pm 0,6^\circ$. As duas matrizes de fibra de vidro utilizadas

foram: uma unidirecional de 140g/m² [WRU-140] e outra bidirecional de 83g/m² [WR-83], ambas da marca Texiglass. As suas propriedades mecânicas e os respectivos desvios padrão são mostradas na tabela 1:

Tabela 1 – Propriedades das camadas de fibra de vidro e epóxi.

Propriedade	Camada fibra de vidro UD	Camada fibra de vidro BD
E_{11} [GPa]	38,60 ±0,76	32,64 ±0,58
$E_{22} = E_{33}$ [GPa]	13,61 ±0,94	30,32 ±0,78
$G_{12} = G_{13}$ [GPa]	7,14 ±0,24	2,85 ±0,24
G_{23} [GPa]	2,3 ±0,24	1,42 ±0,24
ν_{12} [-]	0,35 ±0,025	0,32 ±0,2
ρ [kg/m ³]	1616 ±116	1555 ±48

Fonte: (COSTA et al., 2020), (SILVA, 2014) e (BALCIOĞLU; SAKIN; GÜN, 2018).

Foram fabricados 5 espécimes de cada laminado, e suas dimensões geométricas são mostradas na tabela 2:

Tabela 2 – Dimensões dos laminados.

Placa	Comprimento [mm]	Largura [mm]	Espessura [mm]
01-UD	155,0	102,5	1,7
02-UD	151,0	100,0	1,7
03-UD	152,0	99,0	1,7
04-UD	152,0	103,5	1,7
05-UD	153,0	101,0	1,7
01-BD	150,0	101,6	1,6
02-BD	149,0	101,9	1,6
03-BD	149,0	98,8	1,6
04-BD	149,0	99,0	1,6
05-BD	150,0	101,5	1,6

Fonte: (MEDEIROS, 2016).

De forma que as médias e os desvios padrão são dados por:

Tabela 3 – Médias e desvios padrão das dimensões dos laminados.

Placa	Comprimento [mm]	Largura [mm]	Espessura [mm]
UD	152,6 ±1,4	101,2 ±1,6	1,7 ±0,03
BD	149,4 ±0,5	100,6 ±1,4	1,6 ±0,03

Fonte: (MEDEIROS, 2016).

Como descrito anteriormente, para o método PB com 12 rodadas, 11 parâmetros são escolhidos. Considerando distribuição normal, utiliza-se de 3 desvios padrão para calcular-se os valores máximos e mínimos, o que representa 99,7% dos valores possíveis. As tabelas 4 e 5 ilustram os valores utilizados para os espécimes unidirecionais e bidirecionais, respectivamente.

Tabela 4 – Parâmetros e seus valores máximos e mínimos para o caso unidirecional.

Parâmetro	Máximo	Mínimo	Unidade
Comprimento (L)	156,7	148,5	[mm]
Largura (W)	106,1	96,3	[mm]
Espessura (T)	1,8	1,6	[mm]
θ_{45}	46,8	43,2	[°]
θ_{90}	91,8	88,2	[°]
θ_0	1,8	-1,8	[°]
θ_{-45}	-43,2	-46,8	[°]
E_{11}	40,88	36,32	GPa
E_{22}	16,43	10,79	GPa
G_{12}	7,86	6,42	GPa
ρ	1964,0	1268,0	[kg/m ³]

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

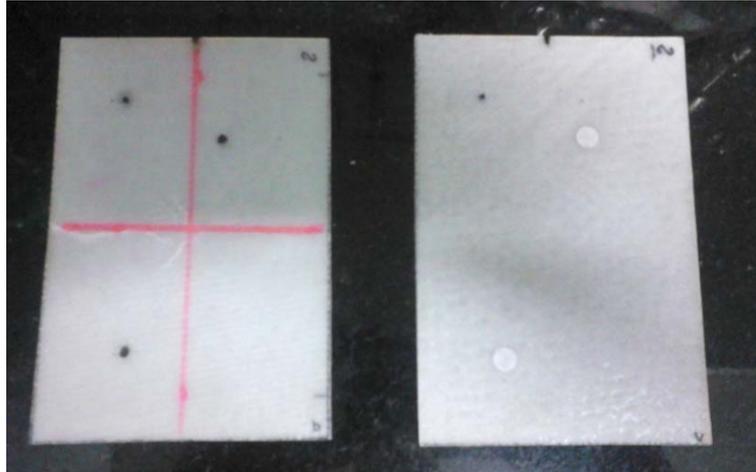
Tabela 5 – Parâmetros e seus valores máximos e mínimos para o caso bidirecional.

Parâmetro	Máximo	Mínimo	Unidade
Comprimento (L)	150,9	147,9	[mm]
Largura (W)	104,6	96,5	[mm]
Espessura (T)	1,7	1,5	[mm]
θ_{45}	46,8	43,2	[°]
θ_{90}	91,8	88,2	[°]
θ_0	1,8	-1,8	[°]
θ_{-45}	-43,2	-46,8	[°]
E_{11}	34,38	30,90	GPa
E_{22}	32,66	27,98	GPa
G_{12}	3,57	2,13	GPa
ρ	1699,0	1411,0	[kg/m ³]

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

A figura 15 ilustra os espécimes fabricados:

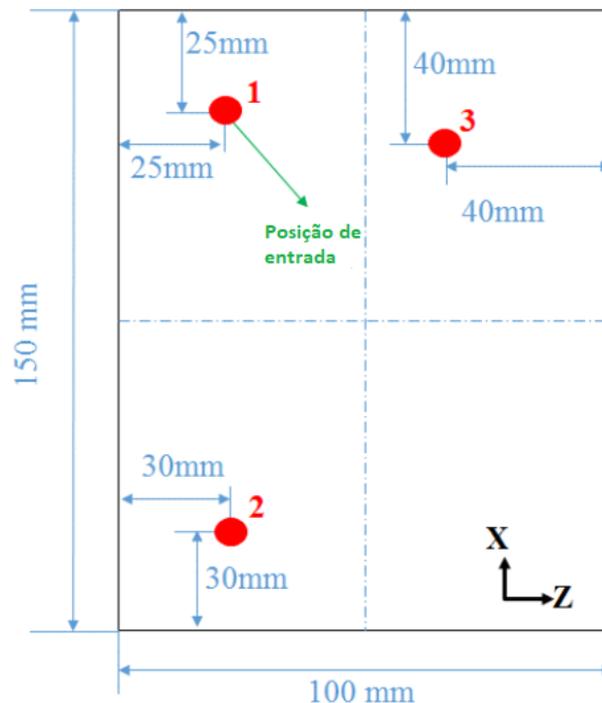
Figura 15 – Espécimes de fibra de vidro com resina epóxi.



Fonte: (MEDEIROS, 2016).

Observa-se duas linhas vermelhas, representando o centro da placa, e 3 pontos. Estes pontos são os pontos de medição experimental, e são ilustrados na figura 16:

Figura 16 – Pontos de medição.



Fonte: (MEDEIROS, 2016).

O ponto 1 é o ponto de entrada, ou seja, o ponto onde foi aplicada a força, neste caso, com um martelo de impacto. Os pontos 2 e 3 representam os pontos de medição da resposta, neste caso, as posições dos acelerômetros.

3.2 ANÁLISE MODAL COMPUTACIONAL

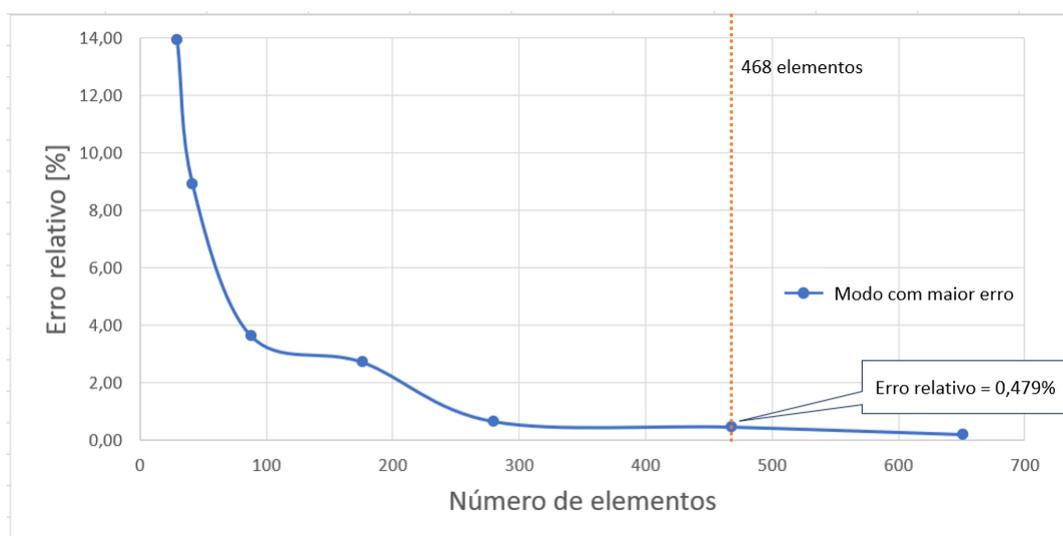
Tanto a modelagem da estrutura quanto a análise numérica foram feitas usando o *software ABAQUS*. Duas análises foram realizadas, uma para extrair os modos de vibrar e as frequências naturais, e outra para extrair as FRFs nos pontos de referência.

Como se trata de um método numérico, o resultado nunca é exato, mas sim aproximado, com um erro associado. Portanto, é necessário um estudo de convergência de malha, de modo que o erro não seja alto o suficiente para impactar de forma significativa o resultado final. Um erro relativo de 0,5% é definido, e é calculado da seguinte forma:

$$Erro_{relativo} = \frac{fn_m - fn_{m-1}}{fn_{m-1}} * 100. \quad (57)$$

Onde fn é a frequência natural estudada, e m é relativo à malha. As variáveis que impactam no tamanho da geometria na qual será gerada a malha são o comprimento e a largura. Por conta do método PB utilizado, são geradas 4 variações de geometria para cada tipo de placa (UD e BD), totalizando 8 geometrias diferentes. Foram realizados então 8 estudos de convergência de malha, mas por questão de padronização foi escolhido o elemento de menor tamanho para as malhas de todas as geometrias. Foram analisados os 6 primeiros modos de vibração, e o modo com maior erro relativo é o representante da sua respectiva malha, de forma que todos os modos tenham erro menor que o estipulado. Foi incluído um critério de que duas iterações seguidas devem ter erro relativo máximo menor que o estipulado, de forma a garantir que não se trata de um mínimo local. A análise de convergência de malha é representada na figura 17:

Figura 17 – Convergência de malha.

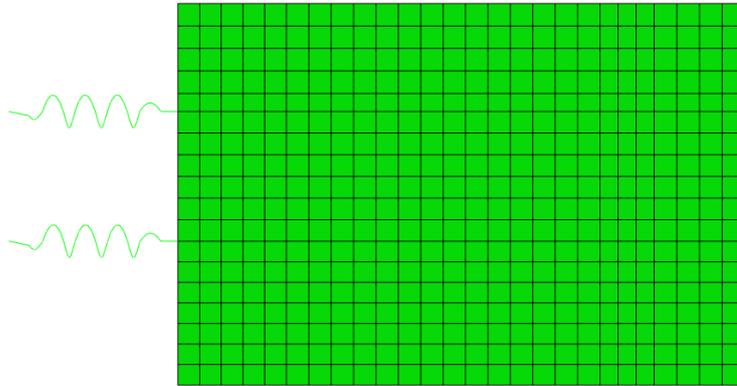


Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Portanto, o número de elementos usado foi 468, com tamanho de 6mm, do tipo S4R. Para melhor representar as condições do experimento, as simulações são realizadas com condições de

contorno quasi-livre-livre, onde duas molas com constantes elásticas baixíssimas (10 N/m) têm uma extremidade fixada na placa e a outra engastada. A figura 18 ilustra a malha e as condições de contorno usadas.

Figura 18 – Malha e condição de contorno.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Com as propriedades de material, malha e condições de contorno definidas, é possível rodar as simulações e analisar os resultados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

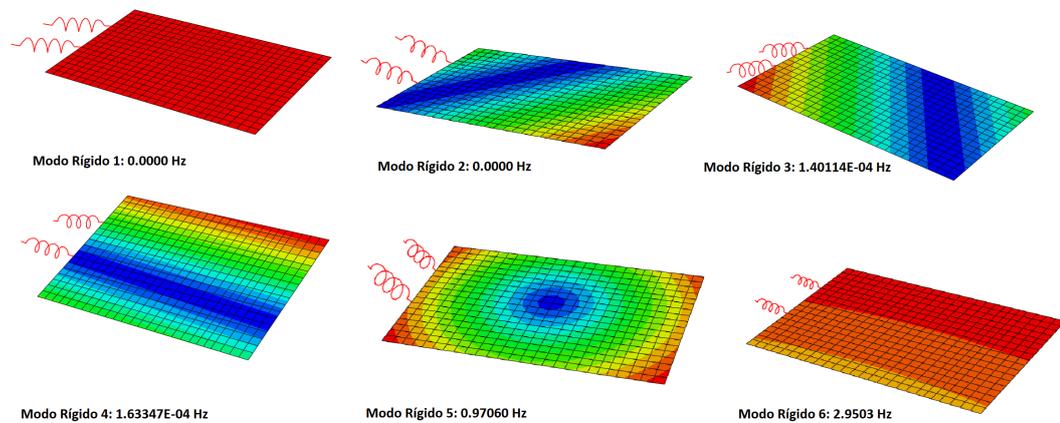
Nesta seção faz-se a descrição dos resultados obtidos após as simulações computacionais e a aplicação do método PB. As discussões são divididas em análise modal, onde é feito o ranking dos parâmetros de entrada com base no parâmetro de saída - as frequências naturais - e FRFs, onde é feito o envelope de falha do projeto de acordo com as frequências máximas e mínimas.

4.1 ANÁLISE MODAL

Primeiramente ilustram-se os resultados obtidos pela simulação computacional, e em seguida é mostrado o resultado do método PB utilizando os dados da simulação. Finalmente, é feita uma análise dos resultados.

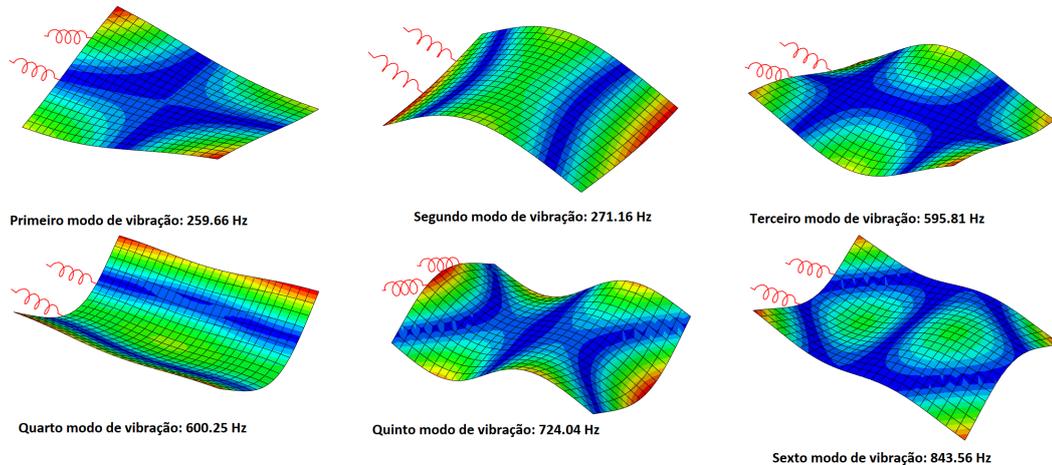
Após a realização dos procedimentos descritos na Seção 3.2, e simulação foi realizada e obteve-se as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura. A figura 19 ilustra os seis primeiros modos de corpo rígido, enquanto a figura 20 ilustra os seis primeiros modos de vibração e suas respectivas frequência naturais, para a primeira rodada do caso unidirecional.

Figura 19 – Modos de corpo rígido.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 20 – Modos de vibração.



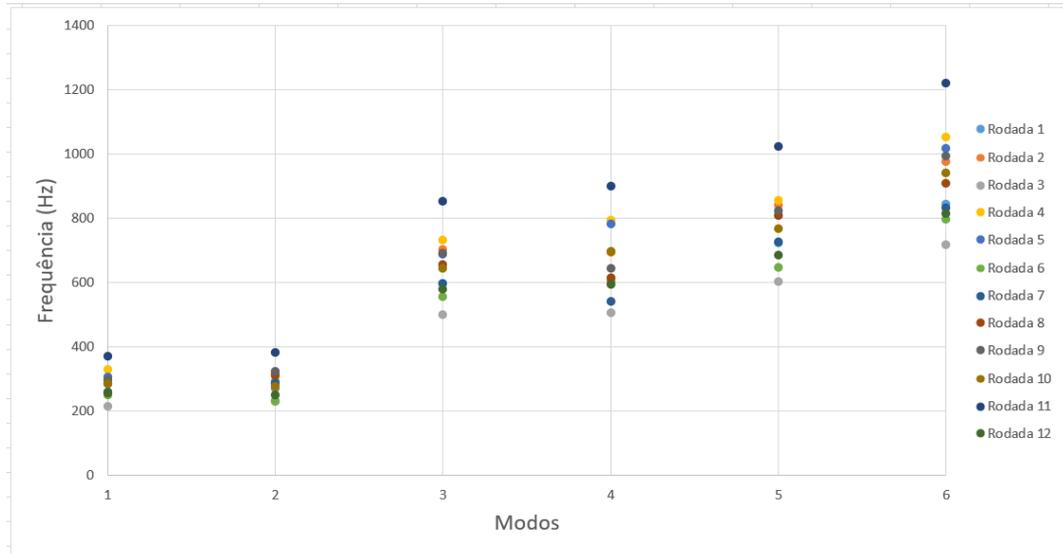
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Nota-se que as 4 primeiras frequências de corpo rígido são praticamente zero, enquanto as duas últimas já apresentam valores significativos. Isso se dá pelo fato da estrutura estar conectada nas duas molas. Porém, ainda assim percebe-se que os valores são bem inferiores ao primeiro modo de vibrar, portanto a condição quasi-livre-livre é atendida.

Portanto, segue-se com o procedimento e realiza-se as 12 rodadas de simulação com os parâmetros variando entre seus valores máximos e mínimos de acordo com a figura 12. Por conta da proximidade em frequência de alguns modos (primeiro com segundo e terceiro com quarto, por exemplo), conforme os parâmetros são variados, os modos podem "trocar de lugar", como por exemplo o segundo se tornando o primeiro e vice versa. Nestes casos, a análise precisa ser consistente e comparar os mesmos modos, mesmo que se apresentem em ordem diferentes.

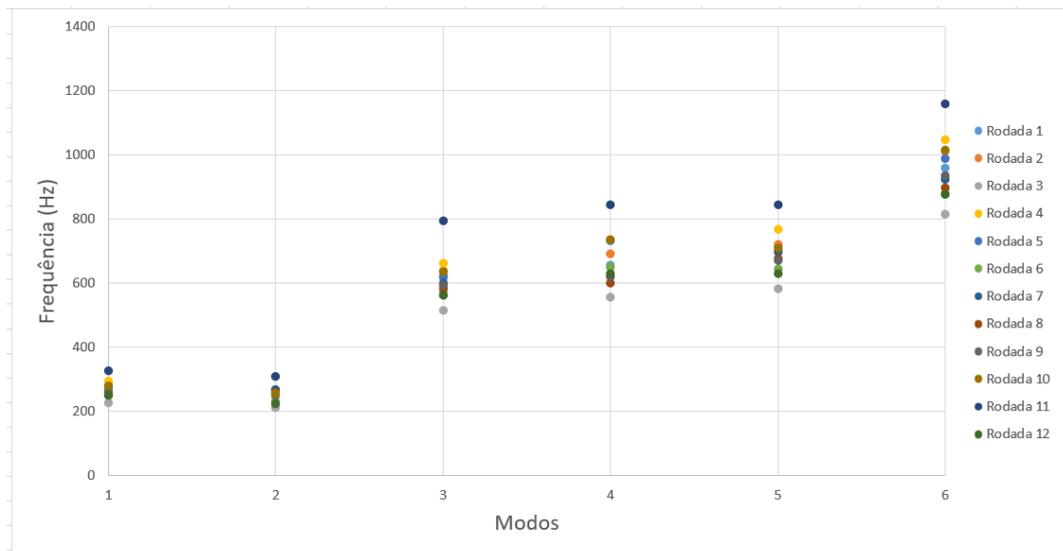
As figuras 21 e 22 ilustram as frequências dos 6 primeiros modos para as 12 rodadas de simulação no caso UD e no BD, respectivamente.

Figura 21 – Frequências naturais resultantes das análises modais para o caso UD.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 22 – Frequências naturais resultantes das análises modais para o caso BD.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Percebe-se que o caso BD apresenta menor dispersão entre os resultados, o que é causado pelas incertezas menores quando comparado ao caso UD.

Com as frequências em mãos, então aplica-se o método PB, calculando o ME para cada modo e cada parâmetro, bem como a média do ME entre os modos, e faz-se o ranking dos parâmetros. As tabelas 6 e 7 ilustram os resultados obtidos, enquanto enquanto as figuras 23 e 24 ilustram a influência de cada parâmetro em cada modo, para ambos os casos.

Tabela 6 – Resultados do ME para o caso UD.

Modos	1	2	3	4	5	6	Média ME	Ranking
ρ	60,89	64,00	141,71	147,79	167,84	204,41	131,11	1
Espessura (T)	33,26	33,35	75,43	79,73	93,80	102,75	69,72	2
Largura (W)	29,25	1,15	51,85	128,06	43,29	95,80	58,23	3
Comprimento (L)	14,29	30,79	40,81	1,99	58,93	49,54	32,73	4
E_{22}	8,39	12,51	24,93	48,07	30,83	59,19	30,65	5
θ_0	12,03	6,13	25,63	43,80	25,16	33,74	24,42	6
E_{11}	9,88	11,57	25,85	16,75	29,04	29,47	20,43	7
G_{12}	6,03	12,25	16,45	19,57	27,73	20,72	17,13	8
θ_{45}	3,46	7,70	10,29	1,35	8,81	19,31	8,49	9
θ_{90}	0,65	4,74	6,96	11,11	10,35	7,27	6,85	10
θ_{-45}	1,43	2,16	5,12	10,57	11,34	1,51	5,35	11

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Tabela 7 – Resultados do ME para o caso BD.

Modos	1	2	3	4	5	6	Média ME	Ranking
Espessura (T)	31,96	32,96	84,43	81,61	89,65	120,55	73,53	1
ρ	24,52	23,92	65,98	63,14	68,91	94,04	56,75	2
Largura (W)	21,34	2,77	49,25	96,66	40,59	70,29	46,82	3
θ_0	9,83	7,36	29,39	43,11	21,70	28,93	23,39	4
E_{22}	9,19	5,50	27,32	36,17	15,33	38,60	22,02	5
G_{12}	6,87	18,31	29,53	22,37	34,51	17,23	21,47	6
E_{11}	8,93	5,57	26,34	18,65	14,01	22,79	16,05	7
Comprimento (L)	4,17	11,06	23,69	4,99	13,79	16,64	12,39	8
θ_{-45}	0,52	1,89	12,38	12,72	1,42	7,75	6,11	9
θ_{90}	1,79	0,84	11,28	12,15	0,39	7,39	5,64	10
θ_{45}	1,38	1,51	12,80	3,53	8,09	2,13	4,91	11

Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 23 – ME de cada parâmetro por modo para o caso UD.

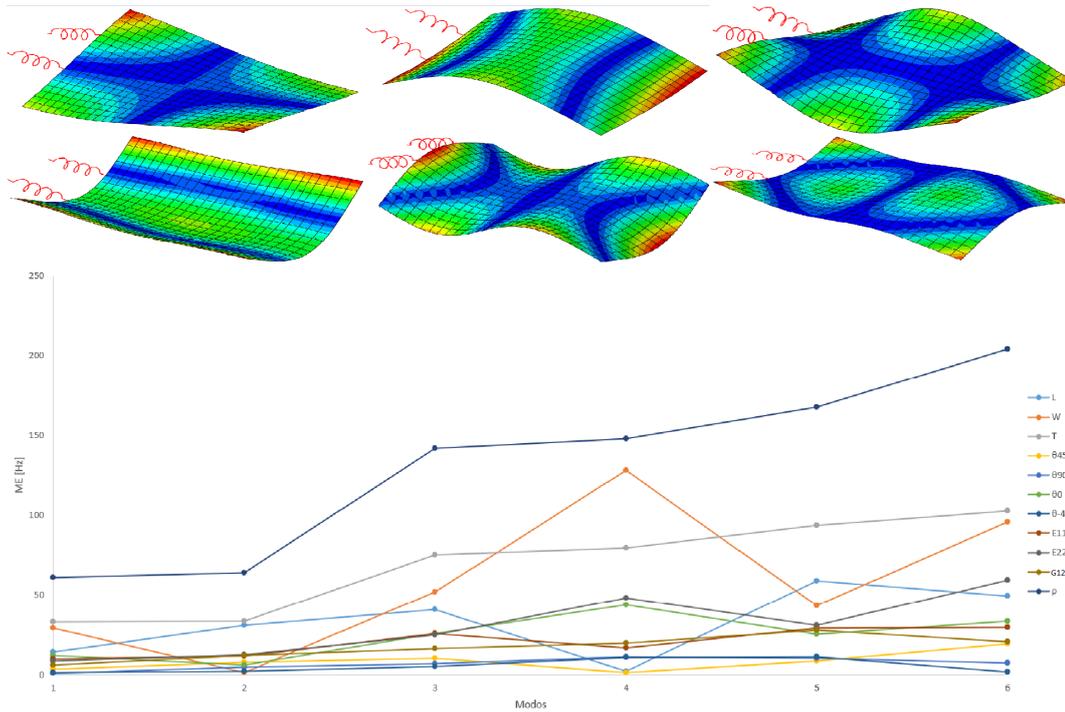
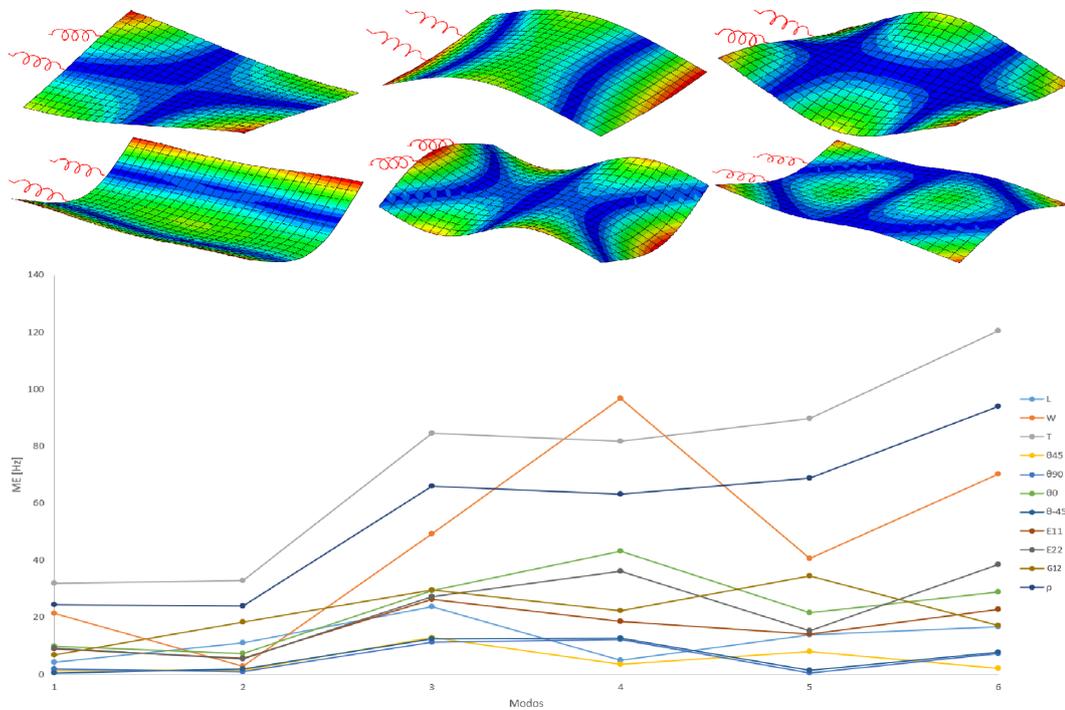


Figura 24 – ME de cada parâmetro por modo para o caso BD.



Lembra-se que como o valor de ME não foi normalizado pelo desvio padrão, ele está medindo simultaneamente a importância do parâmetro no comportamento dinâmico, bem como a

magnitude do desvio padrão do parâmetro. Por exemplo, percebe-se que tanto a espessura quanto a densidade são os parâmetros mais importantes, com a espessura tendo valores de ME muito próximos (69,72 - UD e 73,53 - BD), enquanto a densidade se destaca dos outros parâmetros no caso UD, com um valor de ME de 131,11, enquanto que no caso BD ela tem valor de 56,75. Isso é uma representação do desvio padrão, que é muito mais alto para a densidade no caso UD do que no BD, enquanto se mantém o mesmo para a espessura em ambos os casos.

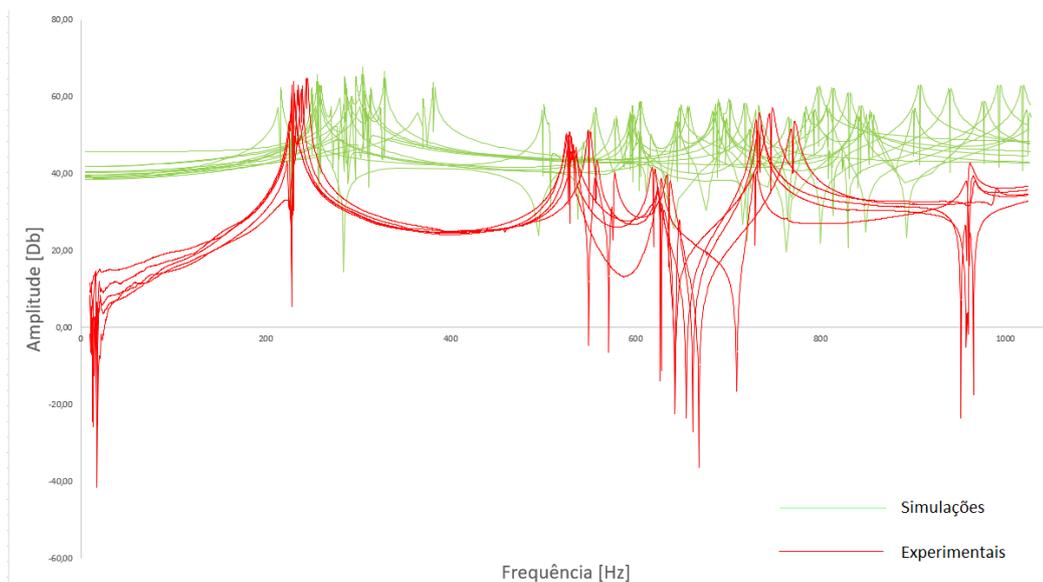
É possível perceber que quanto maior a frequência do modo, maior a sensibilidade, portanto maior o valor de ME. Isso é observado na densidade, por exemplo, que é uma propriedade que teoricamente não depende de qual tipo de modo está sendo analisado, e tem o seu valor crescente conforme as frequências sobem.

Já a orientação das fibras e as propriedades mecânicas influenciam diferentes modos de formas diferentes, como observado nas figuras 23 e 24. Isso pode ser observado, por exemplo, na maior influência que E_{22} , W e θ_0 têm sobre o 4º modo, em ambos os casos, visto que este é um modo de flexão no eixo X, e estes são os parâmetros principais para a rigidez à flexão neste eixo.

4.2 FRFS

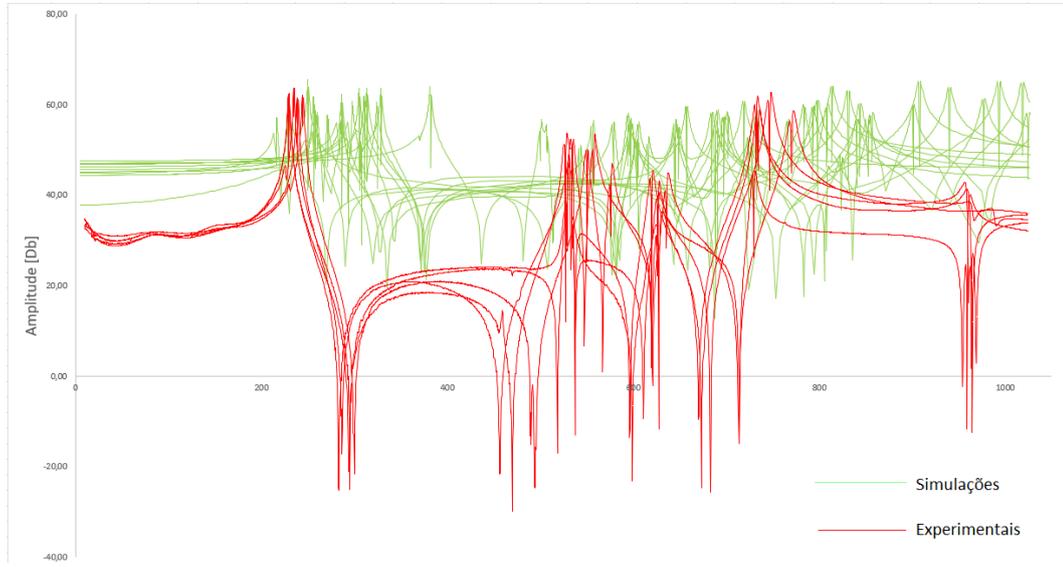
Após a realização da análise modal, foram extraídas as FRFs, que representam as respostas dos pontos 2 e 3 em relação à um esforço aplicado no ponto 1, conforme a figura 16. O esforço considerado neste trabalho foi uma força impulso unitária, de forma que as respostas se dêem de forma normalizada automaticamente. As figuras 25, 26, 27 e 28 ilustram as FRFs dos pontos 2 e 3 dos casos UD e BD, tanto para as 12 rodadas de simulação quanto para os resultados experimentais.

Figura 25 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 2 no caso UD.



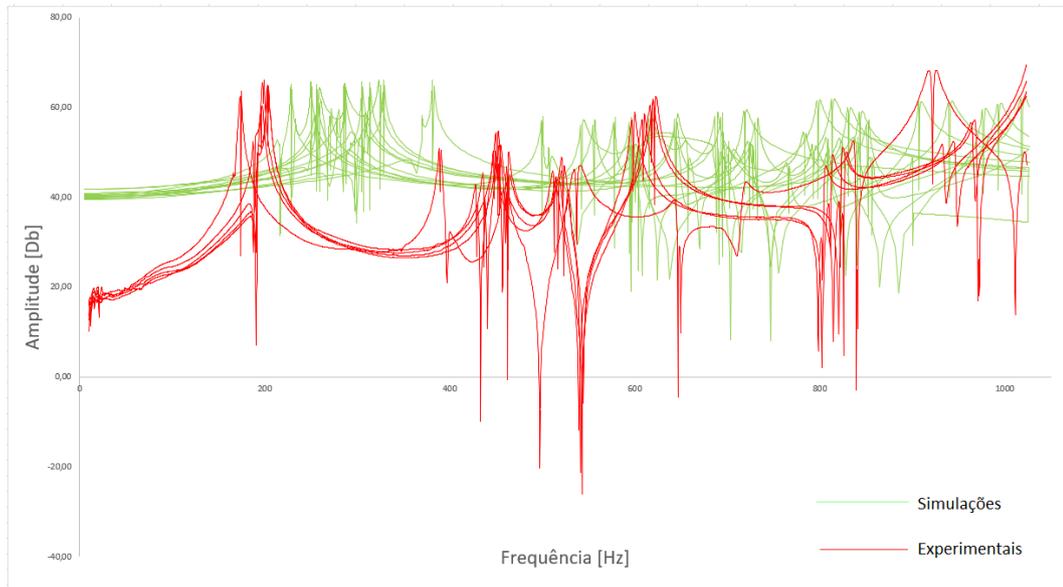
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 26 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 3 no caso UD.



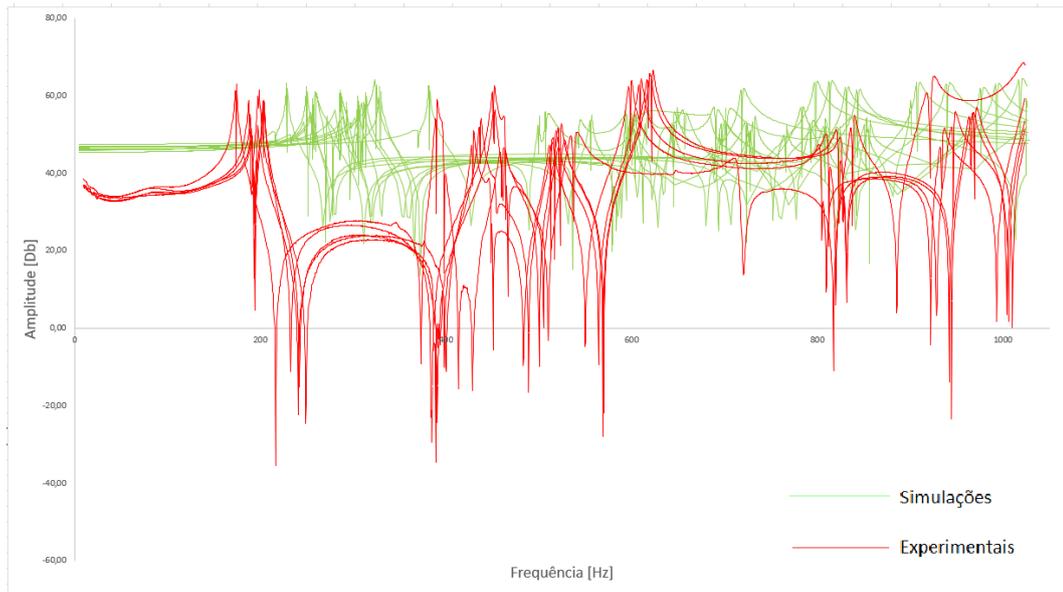
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 27 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 2 no caso BD.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 28 – FRFs computacionais e experimentais para o ponto 3 no caso BD.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Percebe-se que, para o caso UD, os valores de pico estão dentro do esperado, tanto em frequência quanto em amplitude, enquanto os valores de vale estão dentro do esperado em frequência, mas não em amplitude. Já para o caso BD, os valores de pico estão dentro do esperado apenas em amplitude, e não em frequência, enquanto os valores de vale estão fora do esperado tanto em frequência quanto em amplitude.

5 CONCLUSÃO

Esse trabalho se propôs a estudar a influência de parâmetros do processo de fabricação na resposta modal de placas de fibra com resina epóxi através de análises modais computacionais e metodologia Design of experiments.

Conclui-se que os objetivos foram atingidos, visto que foi possível analisar a influência dos parâmetros na resposta modal da estrutura, fazendo um ranking dos parâmetros.

Foi possível observar que a espessura e a densidade são os parâmetros mais importantes, enquanto as orientações da fibra (com exceção da orientação 0°) são os que menos importam. Também foi possível observar que o valor de saída que a metodologia fornece é uma combinação tanto da importância daquele parâmetro, quanto da sua confiabilidade. Portanto, é razoável afirmar que a densidade e a espessura exigem um controle de qualidade maior do que a orientação das fibras no processo de fabricação.

A análise das FRFs foi bastante inconclusiva. Para o caso UD, os valores de amplitude distorceram o gráfico, dificultando a análise de envelope. Talvez normalizar a amplitude pelo valor máximo seja um recurso para facilitar a análise. Já para o caso BD, além da amplitude, os valores de frequência estavam deslocados à esquerda, indicando que os valores experimentais são mais baixos que os computacionais. Isso indica uma variação negativa da rigidez e/ou uma variação positiva da massa do modelo computacional em relação ao experimental. Uma possível causa é que a fonte dos dados UD é experimental, portanto mais confiável, enquanto a fonte dos dados BD é teórica, o que explicaria a diferença nas frequências.

Uma sugestão para trabalhos futuros, é a normalização dos valores de amplitude das FRFs, bem como um estudo das propriedades do modelo inicial, para entender porque as frequências no caso BD estão menores.

Outra sugestão é o uso de outra metodologia. Embora o método PB seja bastante útil, ele também é relativamente simples, e é limitado a um número múltiplo de 4 para a quantidade de parâmetros estudados. Neste trabalho, por exemplo, não se analisou a influência do G_{23} nem do ν_{12} , que podem ter influências bastante importantes no comportamento da estrutura.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. T. **Vibrações mecânicas para engenheiros**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1987. Citado na página 27.
- BALCIOĞLU, H Ersen; SAKIN, Raif; GÜN, Halit. Development of fixed end type flexural fatigue test machine and static and dynamic behaviour of glass/epoxy laminated composite. **International Ege Composite Materials Symposium**, 2018. Citado na página 35.
- CALLISTER, William D.; RETHWISCH, David G. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma introdução**. 9. ed. São Paulo: LTC, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 14 e 15.
- CHITA, Ricardo Jorge de Sousa. **Estudo da delaminação em compósitos**. 2012. Citado na página 12.
- CONDRA, Lloyd W. **Reliability Improvement with Design of Experiments**. 2. ed. New York: Marcel Dekker, 2001. Citado na página 32.
- COSTA, Romeu RC da et al. Polyurethane derived from castor oil reinforced with long cotton fibers: Static and dynamic testing of a novel eco-friendly composite material. 2020. Citado na página 35.
- FILHO, Avelino Alves. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 5. ed. São Paulo: Érica, 2011. Citado na página 28.
- GALLI, Cecilia Antunes. **Caracterização das Propriedades Mecânicas de Compósitos de Matriz de Epóxi com Fibras de Carbono Unidirecionais**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2016. Citado na página 15.
- HE, Jimin; FU, Zhi-Fang. **Modal Analysis**. 1. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. Citado na página 27.
- JONES, Robert M. **Mechanics of Composite Materials**. 2. ed. Filadélfia: Taylor Francis, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 21, 22 e 23.
- KELLY, S. Graham. **Advanced Vibration Analysis**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2006. Citado na página 27.
- MEDEIROS, R. De. **Development of a criterion for predicting residual strength of composite structures damaged by impact loading**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- MENDONCA, Paulo de Tarso R. **Materiais Compostos Estruturas - Sanduíche**. 1. ed. Florianópolis: Orsa Maggiore, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 29.
- MESOGITIS, T. S.; SKORDOS, A. A.; LONG, A. C. Uncertainty in the manufacturing of fibrous thermosetting composites: A review. 02 2014. Citado na página 16.
- MYERS, Raymond H.; MONTGOMERY, Douglas C.; M, Anderson-Cook Christine. **Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments**. 4. ed. Hoboken: John Wiley Sons, 2016. Citado na página 33.

PRASAD, N. Eswara; WANHILL, R. J. H. **Aerospace Materials and Material Technologies: Volume 1: Aerospace Materials**. 1. ed. Singapura: Springer, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. 2. ed. Washington, DC: CRC Press, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

SILVA, Fernando Daniel Ribeiro da. **Modelação dinâmica de um Processo de Infusão a Vácuo**. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 17.

SILVA, Henrique Pereira da. **Comportamento mecânico de compósitos de fibra de vidro/epóxi nano-reforçados**. Tese (Doutorado) — Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Coimbra, 2014. Citado na página 35.

SIMULIA, A. T. M. **Abaqus theory manual**. 2011. Citado na página 32.

SUTCLIFFE, M.P.F.; LEMANSKI, S.L.; SCOTT, A.e. Measurement of fibre waviness in industrial composite components. 09 2012. Citado na página 34.

TITA, Voltei. **Projeto e Fabricação de Estruturas em Material Compósito Polimérico**. 2006. Citado 5 vezes nas páginas 12, 13, 16, 17 e 22.

WEISMANN, S. A; ANDERSON, N. G. **Design of experiments (DoE) and process optimization: a review of recent publications**. [S.l.]: Organic Process Research and Development, 2014. Citado na página 32.