

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA – PPGEM

KEILA MERCEDES OLIVEIRA DOS SANTOS

**AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO USO DE FUNÇÕES TIPO LEVEL-SET E DE
ANTI-DIFUSÃO NA REPRESENTAÇÃO DE INTERFACES NO MÉTODO VOF:
APLICAÇÃO PARA O PROBLEMA TIPO RUPTURA DE BARRAGEM COM
FLUIDO NÃO-NEWTONIANO**

JOINVILLE

2024

KEILA MERCEDES OLIVEIRA DOS SANTOS

AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO USO DE FUNÇÕES TIPO LEVEL-SET E DE ANTI-DIFUSÃO NA REPRESENTAÇÃO DE INTERFACES NO MÉTODO VOF: APLICAÇÃO PARA O PROBLEMA TIPO RUPTURA DE BARRAGEM COM FLUIDO NÃO-NEWTONIANO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, área de concentração em Modelagem e Simulação Numérica, da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcus Vinícius Canhoto Alves

Coorientadora: Roberta Brondani Minussi

JOINVILLE

2024

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Universitária Udesc,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Santos, Keila Mercedes Oliveira dos
Avaliação da influência do uso de funções tipo Level-set e
de Anti-difusão na representação de interfaces no método
VOF : Aplicação para o problema tipo ruptura de barragem
com fluido não-newtoniano / Keila Mercedes Oliveira dos
Santos. -- 2024.
83 p.

Orientador: Marcus Vinícius Canhoto Alves
Coorientadora: Roberta Brondani Minussi
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2024.

1. rompimento de barragem. 2. fluidos viscoplásticos. 3.
funções de interpolação. 4. VOF. I. Vinícius Canhoto Alves,
Marcus. II. Brondani Minussi, Roberta. III. Universidade do
Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV.
Titulo.

KEILA MERCEDES OLIVEIRA DOS SANTOS

AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DO USO DE FUNÇÕES TIPO LEVEL-SET E DE ANTI-DIFUSÃO NA REPRESENTAÇÃO DE INTERFACES NO MÉTODO VOF: APLICAÇÃO PARA O PROBLEMA TIPO RUPTURA DE BARRAGEM COM FLUIDO NÃO-NEWTONIANO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, área de concentração em Modelagem e Simulação Numérica, da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcus Vinícius Canhoto Alves
Coorientadora: Roberta Brondani Minussi

BANCA EXAMINADORA

Profa. Roberta Brondani Minussi, Dr. Eng. - Presidente
Universidade Federal do Paraná

Membros:

Prof. Leonardo Romero Monteiro, Dr. Eng.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Juliana Almansa Malagoli, Dra. Eng.
Universidade Federal do Paraná

Joinville, 25 de janeiro de 2024.

Aos meus pais, Marilene Oliveira e
Rangivaldo Mercedes dos Santos.

AGRADECIMENTOS

À Roberta Brondani Minussi e Marcus Vinicius Canhoto Alves, pela amizade, confiança, paciência e orientação extremamente comprometida e generosa.

Ao meu pai, Rangivaldo, quem me ensinou que “primeiramente a gente se casa com o diploma”, que sempre incentivou e acreditou, sobretudo, em meu potencial como engenheira e pesquisadora.

À minha mãe Marilene, por ser indefinível com o seu cuidado e o seu amor incondicional.

À minha irmã Kezia, pelo amor, incentivo e pela acolhida nos momentos mais delicados.

Ao meu irmão Rangel, pelo incentivo para investir neste projeto.

Às minhas colegas e aos meus colegas, especialmente Larissa Steiger e Eduardo Menezes, personificação de um afeto positivo genuíno, pela amizade e pelas trocas acadêmicas essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu amigo Leonardo pelo companheirismo e incentivo na vida acadêmica.

Ao João Felipe, meu irmão Joinvillense.

Às minhas amigas e aos meus amigos, especialmente Gabriele, Ramon, Taísa e Edson.

“Somos assim. Sonhamos o voo, mas tememos as alturas. Para voar é preciso amar o vazio. Porque o voo só acontece se houver o vazio. O vazio é o espaço da liberdade, a ausência de certezas. Os homens querem voar, mas temem o vazio. Não podem viver sem certezas. Por isso trocam o voo por gaiolas. As gaiolas são o lugar onde as certezas moram. (Rubem Alves)

RESUMO

Os escoamentos que ocorrem em decorrência do rompimento de barragens (*dam break flows*) são caracterizados pela rápida liberação de algum líquido reservado. Além do óbvio interesse neste tipo de estudo para prevenção de problemas relacionados à infraestrutura civil, também é um tipo de escoamento muito utilizado como teste numérico para problemas multifásicos imiscíveis. Uma grande quantidade de fluidos existentes na natureza e na indústria se comportam como fluidos não-Newtonianos, o que torna o seu estudo muito importante em diversas áreas na engenharia. Neste trabalho, os efeitos das funções de interpolação para captura da interface em problemas de ruptura de barragens envolvendo fluidos viscoplásticos são investigados numericamente, sendo que o problema multifásico é resolvido utilizando-se o método VOF (*Volume Of Fluid*). O objetivo principal desta Dissertação foi o estudo da avaliação da influência do uso de funções tipo level-set e de antidifusão na simulação de problemas de ruptura de barragens, notadamente quando o fluido apresenta comportamento viscoplástico. As simulações numéricas foram realizadas com o Ansys-Fluent 21R2 usando o método VOF e suas combinações com algoritmos *Level Set* e antidifusão. O escoamento foi simulado usando um domínio bidimensional contendo um obstáculo para forçar uma ruptura interfacial severa da frente de onda do fluido, permitindo que o desempenho das funções de interpolação fosse investigado minuciosamente. Os resultados da simulação foram examinados em três maneiras diferentes: descrição qualitativa da interface, com a análise da nitidez da interface; tempo computacional; e estabilidade numérica, com a verificação do número de passos de tempo e iterações totais de quatro funções de interpolação: PLIC, CICSAM, MHRIC e COMPRESSIVE. Com o resultado da análise realizada foi revelado que a abordagem geométrica mostrou melhor qualidade interfacial e nitidez em relação às outras funções de interpolação, uma vez que a função PLIC, apesar de ser a função teoricamente mais cara computacionalmente, apresenta a melhor solução numérica.

Palavras-chave: rompimento de barragem; fluidos viscoplásticos; funções de interpolação; VOF.

ABSTRACT

Dam break flows are characterized by the rapid release of some reserved liquid. In addition to the obvious interest in this type of study to prevent problems related to civil infrastructure, it is also a type of flow widely used as a numerical test for immiscible multiphase problems. Many fluids in nature and industry behave like non-Newtonian fluids, which makes their study very important in various areas of engineering. In this work, the effects of interpolation functions for capturing the interface in dam break problems involving viscoplastic fluids are investigated numerically, and the multiphase problem is solved using the VOF (Volume Of Fluid) method. The main objective of this dissertation is to study the influence of the use of level-set and anti-diffusion functions in the simulation of dam failure problems, especially when the fluid has viscoplastic behavior. Numerical simulations were carried out with Ansys-Fluent 21R2 using the VOF method and its combinations with Level Set and anti-diffusion algorithms. The flow was simulated using a two-dimensional domain containing an obstacle to force a severe interfacial rupture of the fluid wave front, allowing the performance of the interpolation functions to be thoroughly investigated. The simulation results were examined in three different ways: qualitative description of the interface, by analyzing the sharpness of the interface; computational time; and numerical stability, by checking the number of time steps and total iterations of four interpolation functions: PLIC, CICSAM, MHRIC and COMPRESSIVE. The results of the analysis revealed that the geometric approach showed better interfacial quality and sharpness compared to the other interpolation functions, since the PLIC function, despite being the theoretically most computationally expensive function, presented the best numerical solution.

Keywords: dam break flows; viscoplastic fluids; interpolation functions; VOF.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Balanço de massa no volume finito.....	24
Figura 2 – Representação da célula para o esquema HRIC modificado.....	32
Figura 3 – Representação de uma malha estruturada para o método MVF.....	41
Figura 4 – Procedimento de solução do algoritmo segregado com UDF.	43
Figura 5 – Domínio, condições de contorno e campo inicial das fases. As dimensões estão em mm.	44
Figura 6 – Evolução do tempo das frações volumétricas – resultados utilizando o esquema PLIC.	48
Figura 7 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante de impacto.	51
Figura 8 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante que a pluma passa pelo obstáculo.	52
Figura 9 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante final da simulação.....	53
Figura 10 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante de impacto. ..	55
Figura 11 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante que a pluma passa pelo obstáculo.	56
Figura 12 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante final da simulação.....	57
Figura 13 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante de impacto. ..	59
Figura 14 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante que a pluma passa pelo obstáculo.	60
Figura 15 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante final da simulação.....	61
Figura 16 – Região utilizada para a análise comparativa entre as malhas.	62
Figura 17 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função CICSAM.....	63
Figura 18 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função COMPRESSIVE.	64
Figura 19 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função MHRIC.....	65
Figura 20 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função PLIC.....	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores do limitador de inclinação e seus esquemas de discretização. ...	31
Tabela 2 – Propriedade dos fluidos.....	43
Tabela 3 – Propriedades reológicas.....	46
Tabela 4 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação padrão.....	69
Tabela 5 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação com level-set.....	70
Tabela 6 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação com antidifusão.....	70
Tabela 7 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação com antidifusão combinada com level-set.	71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AD	Antidifusão
CICSAM	<i>Compressive interface capturing scheme</i>
CLSVOF	<i>VOF-level-set</i> acoplado
EDPS	Equações diferenciais parciais
HRIC	<i>High resolution interface capturing scheme</i>
LS	<i>Level-set</i>
M3IM	Moldagem por injeção múltipla
MVF	Método dos volumes finitos
PLIC	<i>Piecewise linear interface construction</i>
SIMPLE	<i>Semi-implicit method for pressure linked equations</i>
SLIC	<i>Simple line interface calculation</i>
THINC/SW	Tangente da interface de hipérbole capturada com ponderação de inclinação
UDF	Funções definidas pelo usuário
VC	Volume de controle
VOF	Método de volume de fluido
WLIC	Cálculo de interface linear ponderada

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Coeficiente do sistema linear
α_d	Valor VOF da célula doadora
α_f	Valor VOF da face
α_k	Fração volumétrica da fase k
A	Área
b	Termo fonte
B	Valor do limitador de inclinação
Co	Número de Courant
\dot{D}	tensor da taxa de deformação
\overrightarrow{dr}	Distância entre a célula e a face
G	Fluxo de massa total da mistura
j	Fluxo volumétrico
k	Vazão volumétrica de cada fase
\dot{m}	Vazão mássica
M	Massa
M^o	Massa dentro do volume elementar
n	Número de fases
nb	Nós vizinhos do volume de controle
q	Vazão volumétrica
ρ	Massa específica
ρ_m	Densidade de uma mistura
τ	Tensor da tensão de cisalhamento
τ_c	Tensão de escoamento
T^θ	Função de interpolação no tempo
U_k	Velocidade média da fase k
\vec{u}	Campo de velocidade subjacente
\vec{u}_c	velocidade de compressão
φ	Novo valor da variável dentro de uma célula
$\tilde{\varphi}_c$	Valor normalizado da célula da fração volumétrica
$\tilde{\varphi}_f$	Valor normalizado da face

γ	Fator de compressão
μ	Viscosidade Newtoniana
∇	Gradiente
$\nabla\alpha_d$	Valor do gradiente VOF da célula doadora

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS	16
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS	18
2.2	MODELO NUMÉRICO	19
2.2.1	Regimes de escoamento Multifásico	19
2.2.1.1	<i>Abordagens para modelagem multifásica</i>	<i>19</i>
2.2.2	Problemas Multifásicos	20
2.2.3	Discretização das Equações Governantes	22
2.2.4	O modelo VOF e a modelagem física de interfaces.....	26
2.3	FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	27
2.3.1	Interpolação próxima a interface	28
2.3.1.1	<i>O esquema de reconstrução geométrica – PLIC.....</i>	<i>28</i>
2.3.1.2	<i>Esquema de captura de interface compressiva para malhas aleatórias - CICSAM</i>	<i>30</i>
2.3.1.3	<i>Esquema Compressivo</i>	<i>30</i>
2.3.1.4	<i>Esquema de alta resolução de captura de interface - HRIC.....</i>	<i>32</i>
2.3.2	Level-Set	33
2.3.3	Antidifusão interfacial	34
2.4	MODELAGEM NUMÉRICA DOS ESCOAMENTOS TIPO ROMPIMENTO DE BARRAGENS.....	36
3	METODOLOGIA NUMÉRICA	39
3.1	CARACTERIZAÇÃO DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA	39
3.1.1	Método de discretização	40
3.1.2	Funções definidas pelo usuário - UDF	42
3.1.3	Propriedades dos fluidos	43
3.1.4	Condições de contorno, condições iniciais e demais definições.....	43
3.1.5	Solução usando as funções padrão	47
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
4.1	DESCRIÇÃO QUALITATIVA DA INTERFACE.....	49
4.1.1	Conjunto de resultados para a malha de 5 mm	50

4.1.2	Conjunto de resultados para a malha de 2,5 mm	53
4.1.3	Conjunto de resultados para a malha de 2 mm	58
4.1.4	Comparativo entre as malhas.....	62
4.2	ASPECTOS NUMÉRICOS QUANTITATIVOS	67
4.2.1	Comparação dos aspectos numéricos quantitativos.....	68
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	72
5.1	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	73
	REFERÊNCIAS.....	74

1 INTRODUÇÃO

Os estudos de escoamentos decorrentes do rompimento de barragens, conhecidos como “*dam break flows*”, se concentram em compreender e prever o comportamento dos fluxos de algum fluido reservado quando o mesmo decorre de uma liberação abrupta. Segundo Chang *et al.* (2011), este tipo de escoamento pode ser estudado tanto em problemas reais (induzida por falha parcial ou catastrófica da estrutura de retenção), como também para teste de modelos de problemas multifásicos.

O estudo deste tipo de escoamento remonta dos trabalhos de Whitham (1952) que realizou uma análise teórica simplificada. Posteriormente, diversos trabalhos teóricos e experimentais foram realizados por Piau (1996), Nsom *et al.* (2000), Debiante (2000), Piau e Debiante (2005) e por Chanson *et al.* (2006), sendo que, modernamente, com o aumento do poder de processamento dos computadores, houve um grande avanço na qualidade dos resultados numéricos obtidos.

Nas últimas décadas, muita atenção tem sido dada ao desenvolvimento de métodos para calcular os escoamentos com superfície livre que estão envolvidos em vários campos da tecnologia. Os escoamentos de superfície livre referem-se aos problemas de um fluxo de fluido bifásico ou multifásico que estão associados a mais de um fluido imiscível (Issakhov *et al.*, 2018).

A simulação numérica da evolução interfacial de escoamentos imiscíveis bifásicos usando modelos Euleriano-Eulerianos é comumente realizada por duas classes de métodos: o método do Volume de Fluido (VOF) (Hirt, 1981) e o método *level-set* (LS) (Osher, 1988).

O método VOF é derivado com base no método dos volumes finitos e, por este motivo, é intrinsecamente conservador (Wang, *et al.*, 2012). O método VOF resolve um único conjunto de equações de conservação para todo o domínio, e as propriedades do fluido, como densidade e viscosidade, são calculadas por média usando frações volumétricas de fase quando necessário. Para poder calcular essas variáveis, uma equação de fração volumétrica para uma das fases é resolvida (usando a restrição de unidade para calcular a outra), mas a interface

em si não é rastreada; em vez disso, a interface é reconstruída e propagada (Barral et al., 2019).

Por este motivo, o uso do problema de rompimento de barragem como teste de funções de interpolação da interface de método VOF (*Volume Of Fluid*), especificamente quando o fluido reservado apresenta comportamento não-newtoniano, deve ser explorado com o intuito buscar a avaliação numérica e poder expandi-la para geometrias e problemas de maior complexidade.

1.1 OBJETIVOS

Esta dissertação tem como objetivo principal realizar o estudo da avaliação da influência do uso acoplado do método VOF com funções tipo *Level-set* e de Antidifusão na simulação de problemas de ruptura de barragens, notadamente quando o fluido apresenta comportamento viscoplástico. Além da viscoplasticidade, outros comportamentos não ideais, como a viscoelasticidade, são objeto de estudo da reologia (ciência que estuda as respostas dos materiais à aplicação de uma força). No entanto, esta dissertação está focada no estudo de materiais viscoplásticos e pseudoclássicos (que apresentam tensão crítica e viscosidade que diminui com a taxa de deformação), mais especificamente é utilizada a modelagem reológica proposta no modelo de Herschel-Bulkley.

Para atingir a proposta deste trabalho, alguns objetivos secundários são fundamentais:

- Apresentar as diferentes funções de interpolação para solucionar um problema de rompimento de barragem, quando o fluido reservado apresenta comportamento não-Newtoniano viscoplástico;
- Realizar simulações numéricas, através do uso de um *software* comercial Ansys-Fluent com a utilização do método VOF;
- Comparar as funções de interpolação com e sem “antidifusão” e verificar a influência do *level-set*.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: o capítulo 1, apresenta o contexto do trabalho na fluidodinâmica computacional, os objetivos e a estrutura do trabalho. No capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura recente, englobando os aspectos matemáticos e numéricos fundamentais para o entendimento do modelo matemático e da metodologia numérica utilizada pelo software Ansys-Fluent. O capítulo 3 atenta-se a exposição do problema físico proposto e as condições que caracterizam as simulações numéricas, tais como: o equacionamento e os métodos numéricos abordados, enquanto o capítulo 4 mostra e discute os resultados numéricos obtidos, realizando a comparação com as demais soluções de interpolação. O capítulo 5 traz as conclusões do trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica abordando algumas características dos fluidos não-newtonianos, especificamente de comportamento viscoplástico; alguns parâmetros sobre os escoamentos multifásicos; e, em seguida, o modelo VOF com a modelagem física e numérica da interface, explicando as funções de interpolação. Ao final do capítulo, são apresentados trabalhos numéricos desenvolvidos nos últimos anos relacionados ao tema deste trabalho e na última seção a justificativa do trabalho é abordada em face aos temas dos trabalhos da literatura.

2.1 FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Os fluidos mais comuns da natureza (e da engenharia) possuem um comportamento chamado de Newtoniano, ou seja, um relacionamento linear entre a variação da velocidade cisalhante em que os fluidos se deformam e as tensões internas que ocorrem. A razão de proporcionalidade é chamada de viscosidade dinâmica. Muitos materiais de grande importância em processos industriais, entretanto, apresentam um comportamento chamado de não-Newtoniano. A área da Mecânica dos Fluidos responsável pelo estudo destes comportamentos é a Reologia (Minussi, 2007).

Os fluidos chamados de não-Newtonianos apresentam relação não-linear entre a tensão de cisalhamento (forças internas ao fluido) e a taxa de deformação (velocidade em que a deformação do material ocorre). O comportamento reológico não-linear apresentado pelos fluidos não-Newtonianos implica em um tratamento distinto da viscosidade em relação aos fluidos Newtonianos (São, 2021). Além disso, muitos materiais de grande importância aos processos industriais comportam-se como fluidos não-Newtonianos. Desse modo, existem diversas classes de fluidos não-Newtonianos: viscoelásticos, viscoplásticos, pseudo-plásticos e dilatantes. Vale destacar que grande parte dos fluidos de interesse na engenharia podem ser descritos como fluidos viscoplásticos, apresentando uma tensão limite de escoamento que necessita ser ultrapassada para que o material escoe; sendo que abaixo desta o material se comporta como

se tivesse uma viscosidade muito elevada, quase tendendo ao infinito. Alguns exemplos de materiais viscoplásticos são: cimento, lamas e os óleos pesados na indústria do petróleo; maionese, manteiga, cremes, pastas e muitos produtos lácteos nas indústrias alimentares e cosméticos; barro, lama e outras suspensões concentradas na natureza (Fonseca, 2008).

O estudo de fluidos reais usados nas indústrias química, farmacêutica, alimentícia e biomédica tem se tornado cada vez mais importante, principalmente por causa das limitações na aplicação das teorias de fluxo ideal e newtoniano para problemas de escoamentos nessas indústrias (Pak et al., 1990).

2.2 MODELO NUMÉRICO

2.2.1 Regimes de Escoamento Multifásico

Muitos escoamentos encontrados na natureza e na indústria podem ser caracterizados como multifásicos. No escoamento multifásico, uma fase pode ser definida como uma classe identificável de material que tem uma resposta inercial particular e interação com o fluxo e o campo potencial no qual está imerso. Por exemplo, partículas sólidas de tamanhos diferentes do mesmo material podem ser tratadas como diferentes fases pois cada coleção de partículas com o mesmo tamanho terá uma resposta dinâmica semelhante para o escoamento (FLUENT, 2023). Os tipos de escoamento multifásico podem ser agrupados em quatro categorias: escoamentos gás-líquido, líquido-líquido, gás-sólido, líquido-sólido; e escoamentos trifásicos. O foco do trabalho em questão será os problemas líquido-gás

2.2.1.1 Abordagens para modelagem multifásica

Os avanços na mecânica dos fluidos computacional forneceram a base para uma visão mais aprofundada da dinâmica de fluxos multifásicos. Existem duas abordagens para o cálculo numérico de fluxos bifásicos: Euler-Lagrange e Euler-Euler.

Na abordagem Euler-Euler, as diferentes fases são tratadas matematicamente como fases contínuas interpenetrantes. Como o volume de uma fase não pode ser ocupado pelas outras, o conceito de fração volumétrica pode ser introduzido. Essas frações volumétricas são consideradas funções contínuas de espaço e tempo e sua soma é igual a um. As equações de conservação para cada fase são derivadas para obter um conjunto de equações, que possuem estrutura semelhante para todas as fases. Essas equações são fechadas fornecendo relações constitutivas que são obtidas a partir de informações empíricas, ou, no caso de escoamentos granulares, por aplicação da teoria cinética. No *software*

Ansyst-Fluent, três diferentes modelos multifásicos Euler-Euler estão disponíveis: o volume de fluido (VOF), o modelo de mistura e o modelo totalmente Euleriano (FLUENT, 2023).

2.2.2 Problemas Multifásicos

Alguns parâmetros fundamentais associados aos escoamentos multifásicos são apresentados a seguir. As definições exibidas são baseadas no trabalho de Rosa (2012) e só são válidas na ausência de reações químicas.

A vazão mássica da mistura (\dot{m}) é definida como o somatório das vazões mássicas de cada fase k .

$$\dot{m} = \sum_{k=1}^n \dot{m}_k \quad (1)$$

onde, $1 \leq k \leq n$, e n corresponde ao número de fases e \dot{m} é dado em kg/s.

A vazão volumétrica da mistura (q) é definida como o somatório das vazões volumétricas de cada fase k .

$$q = \sum_{k=1}^n q_k \quad (2)$$

onde, $1 \leq k \leq n$ e q é dado em m^3/s .

O fluxo de massa total da mistura (G) representa o somatório das vazões mássicas por unidade de área individuais de cada fase k .

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \quad \text{onde } G_k = \frac{\dot{m}_k}{A} \quad (3)$$

em que, $1 \leq k \leq n$ e A é a área transversal do tubo.

E o fluxo volumétrico da mistura (j) é definido como o somatório das vazões volumétricas por unidade de área individuais de cada fase k .

$$j = \sum_{k=1}^n j_k \quad \text{e } j_k = \frac{q_k}{A} \quad (4)$$

onde, $1 \leq k \leq n$ em que j_k corresponde à velocidade média em que a fase k caso ela escoasse sozinha na tubulação.

Para processos de média embasados no volume, a probabilidade de ocorrência da fase k (α_k) representa a fração volumétrica da fase k em um volume de amostragem chamado de fração de vazios. Além disso, o somatório das probabilidades de ocorrência de cada fase deve ser unitário.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \quad (5)$$

em que, $1 \leq k \leq n$.

A densidade de uma mistura (ρ_m) é obtida através do somatório do produto das frações de vazio com as densidades de cada fase.

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \quad (6)$$

em que, $1 \leq k \leq n$.

Para malhas regulares, a velocidade média da fase k (U_k) é obtida através da razão entre a vazão volumétrica da fase k e a área transversal ocupada pela fase k .

$$U_k = \frac{q_k}{A_k} \quad (7)$$

Além disso, a velocidade da fase k pode ser escrita em termos da velocidade superficial da fase k e de sua fração de vazio.

$$U_k = \frac{j_k}{\alpha_k} \quad (8)$$

2.2.3 Discretização das Equações Governantes

No método dos volumes finitos o domínio de cálculo é subdividido em um número de volumes de controle. A técnica consiste em integrar as equações diferenciais do movimento em sua forma conservativa sobre cada volume de controle, resultando em equações discretas. As equações discretizadas para este trabalho, a equação da conservação da massa e da quantidade de movimento, representam a conservação integral através de cada volume de controle (MUNIZ, 2015), sendo uma representação finita da equação diferencial básica. Como vantagem do método de volumes finitos, a solução satisfaz a conservação integral de massa e da quantidade de movimento nos volumes de controle em todo o domínio, independentemente do número de volumes de controle (MALISKA, 2004).

A equação da continuidade é usada como uma equação para a pressão. Entretanto, a pressão não aparece explicitamente, gerando o problema do acoplamento pressão-velocidade. Portanto, deve-se dispor de uma equação evolutiva para o campo de pressão que, quando inserido na equação de conservação da quantidade de movimento, gere um campo de velocidade que satisfaça a equação da conservação da massa (MALISKA, 2004).

Para tratar o acoplamento pressão-velocidade, o programa Fluent oferece a seus usuários algumas opções, como exemplo, os algoritmos SIMPLE,

SIMPLEC ou PISO. O método SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) permite obter o campo da pressão utilizando uma relação entre correções de pressão e velocidade para reforçar a conservação da massa (PATANKAR; SPALDING, 1972). Trata-se de um algoritmo que, avaliando um balanço de massa na célula, incrementa a pressão caso esse balanço seja negativo ou decrementa a pressão caso esse balanço seja positivo. Os passos do método SIMPLE são:

- Calcular as velocidades com o campo de pressões existente, onde esse campo de velocidades em geral não satisfaz a continuidade;
- Resolver uma equação de correção de pressão;
- Corrigir velocidades e pressões;
- Verificar convergência (continuidade).

Por causa da não linearidade das equações é necessário controlar a mudança do valor recalculado do parâmetro de interesse φ (velocidade, pressão, etc.). Isto é obtido através da sub-relaxação, de forma a reduzir a mudança de φ produzida durante cada iteração, conforme:

$$\varphi = \varphi_{old} + \alpha \Delta\varphi, \quad (9)$$

onde φ é o novo valor da variável dentro de uma célula; φ_{old} é o valor anterior de φ ; $\Delta\varphi$ é a mudança computada em φ e α é o fator de sub-relaxação. O desacoplamento par-ímpar, ocasionado em função do arranjo de malha colocalizado, é resolvido com a utilização do esquema de interpolação de Rhie-Chow (RHIE; CHOW, 1983).

As equações de governo, após a discretização, são transformadas em lineares, reduzindo o conjunto de equações a um sistema linear do tipo:

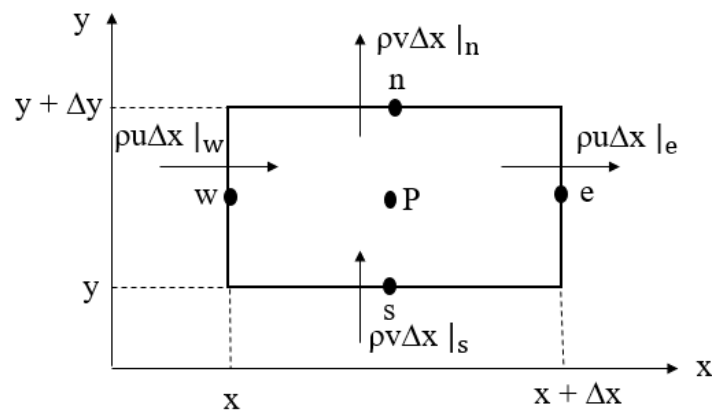
$$\alpha_p \varphi_p = \sum_{nb} (\alpha_{nb} \varphi_{nb}) + b, \quad (10)$$

onde o subscrito nb indica os nós vizinhos ao volume de controle, b é o termo fonte, α_p é o coeficiente principal e α_{nb} são os coeficientes linearizados das células vizinhas ao volume de controle para solução de φ_p .

Para os termos convectivos, é possível escolher entre os seguintes esquemas de discretização: *upwind* de primeira ordem, lei de potência, *upwind* de segunda ordem, QUICK de segunda ordem e HRIC Modificado (RHIE; CHOW, 1983).

Conforme Maliska (2004) existem duas maneiras de se obter equações aproximadas no método dos volumes finitos. A primeira é a realização dos balanços das propriedades em questão nos volumes elementares, ou volumes finitos. A segunda é partindo-se da equação diferencial conservativa e integrá-la sobre o volume elementar, no espaço e no tempo. Logicamente, os processos são equivalentes, pois basta lembrar que para deduzir as equações diferenciais é necessário primeiro realizar um balanço em volume infinitesimal, fazendo-se em seguida, o processo de limites para obter a equação diferencial. Para ilustrar estes processos, considere o volume elementar bidimensional mostrado na Figura 1. Dessa forma, é obtida a equação diferencial que representa a conservação de massa.

Figura 1 – Balanço de massa no volume finito



Fonte: Adaptado de MALISKA (2004).

O balanço de massa no volume elementar mostrado na Figura 1, para regime permanente, é dado por

$$\rho u \Delta y|_e - \rho v \Delta y|_w + \rho v \Delta x|_n - \rho v \Delta x|_s = 0 \quad (11)$$

As letras minúsculas e , w , n e s que aparecem na figura 2 representam, respectivamente, os pontos cardeais leste, oeste, norte e sul e é a nomenclatura usada para identificar as faces do volume de controle na discretização numérica.

Dividindo a equação (11) por $\Delta x \Delta y$, encontra-se

$$\frac{\rho u|_e - \rho u|_w}{\Delta x} + \frac{\rho v|_n - \rho v|_s}{\Delta y} = 0 \quad (12)$$

Que após a aplicação do limite nos dá a forma diferencial conservativa da equação de conservação de massa,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (13)$$

Realizando a integração da equação (13) no volume elementar mostrado na Figura (2), obtêm-se

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right] dx dy = 0 \quad (14)$$

$$\int_s^n [\rho u|_e - \rho u|_w] dy + \int_w^e [\rho v|_n - \rho v|_s] dx = 0 \quad (15)$$

Considerando que o fluxo de massa avaliado no meio da face do volume de controle representa a média da variação na face, pode-se escrever

$$\rho u \Delta y|_e - \rho u \Delta y|_w + \rho v \Delta x|_n - \rho v \Delta x|_s = 0 \quad (16)$$

Na literatura numérica é comum escrever a equação (16) como

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s = 0 \quad (17)$$

2.2.4 O modelo VOF e a modelagem física de interfaces

Dentre os métodos computacionais de escoamentos multifásicos, o método do volume de fluido (*volume of fluid*, VOF), apresentado pela primeira vez por Hirt e Nichols (1981), é um dos mais populares. Este é um método de captura de interface no qual sua localização é capturada rastreando a fração de volume de cada célula computacional na grade em relação a uma das fases fluidas: células que possuem uma fração de volume de zero a um (Issakhov et al., 2018).

O VOF pode modelar o fluxo de dois ou mais fluidos resolvendo um único conjunto de equações do movimento e rastreando a fração de volume de cada uma das fases do fluido em todo o domínio. As aplicações típicas do VOF incluem os escoamentos de fluidos imiscíveis; previsão de ruptura de jato; movimento de grandes bolhas em um líquido, o movimento do líquido após a ruptura de uma barragem e o rastreamento estável ou transiente de qualquer interface (Barral et al., 2019).

De acordo com São (2021) o método VOF é ideal para modelagem de jatos de superfície livre, dinâmica da onda em um caso *dam-break*, formação de ondas em superfície livre, entre outros casos. A grande vantagem do método VOF é a capacidade de conservar a massa no domínio, porém apresenta como desvantagem a susceptibilidade de difusão na interface. A difusão numérica na interface ocorre em decorrência da descontinuidade das funções do método na região da interface, gerando dificuldades no cálculo discreto das derivadas espaciais. O método VOF considera que todas as fases sejam imiscíveis.

Para representar a interface calculada pelo modelo VOF, vários métodos de reconstrução da interface de alta resolução foram desenvolvidos, como o *Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes* (CICSAM) e o *High Resolution Interface Capturing scheme* (HRIC). Um dos métodos mais empregados na literatura é o *Piecewise Linear Interface Construction* (PLIC), que consiste na representação da interface entre as fases por meio de retas inclinadas (planos em 3-D). Com a disposição da interface dentro de cada célula numérica é possível calcular o movimento do fluido através das superfícies de controle. O PLIC representa um avanço em relação ao seu antecessor, o *Simple*

Line Interface Calculation (SLIC), que utiliza apenas retas horizontais ou verticais para representar a interface (São, 2021).

A difusão numérica pode estar presente em qualquer solução numérica que não utilize como função de interpolação a própria solução exata da equação diferencial que representa a interface (Maliska, 2004), portanto eliminar este inconveniente numérico é um desafio extremamente grande para qualquer solução numérica. A difusão numérica se torna mais evidente em problemas com gradientes elevados, como são os escoamentos de fluidos imiscíveis.

No método VOF, um único conjunto de equações do movimento é compartilhada pelos fluidos, e a fração volumétrica de cada um dos fluidos é rastreada nas células computacionais de todo o domínio. As aplicações do modelo VOF incluem as simulações de fluxos estratificados, escoamentos com superfície livre, o movimento de grandes bolhas em um líquido, o movimento do líquido após o rompimento de uma barragem, a previsão da ruptura do jato (tensão superficial) e a estabilidade ou rastreamento transitório de qualquer interface líquido-gás (FLUENT, 2023).

Para escoamentos estratificados com interfaces bem definidas, o método VOF é uma boa escolha, já para fluxos dispersos (como no caso de escoamentos de jatos), malhas muito finas são requeridas, o que pode impedir o uso do método (WARDLE; WELLER, 2013).

2.3 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

As funções de interpolação são empregadas para a aproximação do fluxo da variável transportada nas faces do volume de controle finito, permitindo a obtenção de equações algébricas para todos os pontos nodais da malha. Essas equações aproximadas formam o sistema linear ao longo de todo o domínio computacional. Nesse trabalho é adotado o método VOF com alguns recursos de funções de interpolação disponíveis no *software* Ansys-Fluent para capturar a interface. As funções de interpolação utilizadas nessa pesquisa são: CICSAM, COMPRESSIVE, MHRIC e PLIC, sendo que, para cada uma dessas funções, adotou-se 4 variações: método tradicional (standard), inclusão de algoritmo de antidifusão, inclusão do *level-set* (CLSVOF) e inclusão do *level-set* com a

antidifusão. A seguir são apresentadas as especificidades de cada uma dessas funções para, no final, explorarmos a inclusão da antidifusão e do *level-set*.

2.3.1 Interpolação próxima a interface

A formulação de volume de controle do Ansys-Fluent requer que os fluxos de advecção e difusão através das faces do volume de controle sejam calculados e balanceados com termos fonte (no caso deste trabalho, a força da gravidade) dentro do próprio volume de controle.

2.3.1.1 O esquema de reconstrução geométrica – PLIC

O *software* Ansys-Fluent utiliza, como padrão para simulações transientes, uma interpolação explícita para a interface, com o esquema de reconstrução geométrica PLIC (*Piecewise Line Interface Calculation*). Este esquema foi desenvolvido por Hirt e Nichols (1981) e nasceu como uma evolução do esquema SLIC, *Single Line Interface Calculation* de Noh e Woodward (1976).

No Ansys-Fluent, esse esquema é, em geral, o mais preciso sendo aplicável tanto a malhas estruturadas quanto a não estruturadas (Barral et al., 2019). O esquema PLIC pressupõe que a interface entre dois fluidos pode ser aproximada por uma linha reta de inclinação variável em cada célula e usa essa forma linear para calcular a advecção do fluido, através das faces da célula (FLUENT, 2023).

O cálculo da advecção do fluido rastreado desse esquema de reconstrução geométrica é calculado em três etapas (FLUENT, 2023):

- 1- Consiste no cálculo da posição da interface em relação ao centro de cada célula que está parcialmente preenchida, com base nas informações sobre a fração volumétrica e suas derivadas na célula;
- 2- É calculada a quantidade de fluido que avança através de cada face, usando a representação da interface linear computada e informações sobre a distribuição de velocidade normal e tangencial na face;
- 3- É realizado o cálculo da fração de volume em cada célula, usando o balanço de fluxos calculado durante a etapa anterior.

Entre os esquemas de interpolação geométrica, o algoritmo PLIC é o mais usado, sendo o único esquema geométrico implementado no Ansys-Fluent (ANSYS, 2022). A principal razão para o uso do PLIC é a sua precisão (SCARDOVELLI e ZALESKI, 1999), embora uma aproximação de segunda ordem não possa ser garantida para problemas tridimensionais (CIFANI, et al. 2016).

Barral et al (2019), estudando funções de interpolação para escoamento de fluidos Newtonianos, apresentaram como conclusão de que o PLIC apresentou os melhores resultados para grades mais grossas, sendo o único a conservar a massa total. Segundo os autores, para malhas de mesmo tamanho, o tempo de computação foi semelhante para todas as funções de interpolação.

Scardovelli e Zaleski (1999) apresentaram uma comparação entre PLIC, CLSVOF, a tangente da interface de hipérbole capturada com ponderação de inclinação - THINC/SW - e o cálculo de interface linear ponderada – WLIC. Este estudo indicou que para escoamentos dominados por tensão superficial ou características de escoamento de interface altamente fragmentadas, é melhor usar o CLSVOF ou PLIC, pois eles exigem grades menos refinadas.

Jabbari et al. (2014) realizaram uma comparação entre a função MULES do OpenFOAM e o PLIC, usando o problema da bolha de ar ascendente dentro de um fluido não Newtoniano como um problema teste. Além disso, eles concluíram que, embora o MULES seja menos dispendioso em termos de computação, seus resultados não foram tão precisos, principalmente devido a problemas de difusão numérica interfacial. Os mesmos autores relataram que o PLIC alcançou uma convergência de segunda ordem para a maioria dos testes; alta nitidez e precisão interfacial; e um desequilíbrio de massa muito pequeno. Neste estudo a combinação do VOF-PLIC com um cálculo de tensão superficial usando uma técnica de suavização apresentou os melhores resultados na análise de convergência de precisão e refinamento de grade.

2.3.1.2 Esquema de captura de interface compressiva para malhas aleatórias - CICSAM

O esquema de captura de interface compressiva para malhas arbitrárias (CICSAM), é um esquema de diferenciação de alta resolução. O esquema CICSAM é particularmente adequado para fluxos com altas razões de viscosidades entre as fases. Esse esquema de captura de interface é implementado no Ansys-Fluent como um esquema explícito e oferece a vantagem de produzir uma interface que é quase tão nítida quanto o esquema de reconstrução geométrica (FLUENT, 2023).

Jabbari et al. (2014) também apresentaram uma análise de um fluxo de pasta de cerâmica durante o processo de fundição de fita, um problema de superfície livre de um fluido de lei de potência. Foi usado o método VOF com três funções de interpolação diferentes (HRIC, CICSAM e PLIC) e as simulações foram realizadas com o Ansys-Fluent. Neste trabalho os autores concluíram que o CICSAM apresentou a melhor combinação de precisão na previsão da superfície livre e tempo computacional. Não foram apresentados comentários e resultados sobre a capacidade de conservar a massa do método.

Chen (2022) investigou a penetração de massa fundida na moldagem por injeção múltipla (M3IM) usando simulações numéricas. Esse tipo de problema é não isotérmico e os fluidos fundidos foram modelados usando o modelo Cross-WLF. As simulações foram realizadas com o Ansys-Fluent, e cinco funções de interpolação foram testadas: *upwind* de 1ª ordem, QUICK, HRIC modificado, CICSAM e PLIC. Os resultados foram comparados com dados experimentais, e os autores concluíram que, de modo geral, o CICSAM apresentou a melhor descrição interfacial.

2.3.1.3 Esquema Compressivo

O esquema compressivo é um esquema de reconstrução de segunda ordem baseado no limitador de inclinação (*slope limiter*). Os limitadores de inclinação são usados em esquemas de discretização espacial para evitar oscilações espúrias naturais dos esquemas de discretização espacial de alta

ordem, em decorrência de mudanças bruscas (ou grandes gradientes) no domínio da solução. A equação (18) é aplicável para a discretização localizada por fase e a discretização baseada em regime (disponível com o de fluxo), que usam a estrutura do esquema compressivo (FLUENT, 2023).

$$\alpha_f = \alpha_d + \beta \nabla \alpha_d \cdot \vec{dr} \quad (18)$$

onde:

α_f = valor VOF da face

α_d = valor VOF da célula doadora

B = valor do limitador de inclinação

$\nabla \alpha_d$ = valor do gradiente VOF da célula doadora

\vec{dr} = distância entre a célula e a face

Os valores do limitador de inclinação e seus esquemas de discretização são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores do limitador de inclinação e seus esquemas de discretização.

Limitador de inclinação de valor β	Esquema
0	Primeira ordem <i>upwind</i>
1	Reconstrução de segunda ordem limitada pelo mínimo/máximo global mínimo/máximo global da fração de volume
2	Compressivo
$0 > \beta > 1$ e $1 > \beta > 2$	Mesclado: em que um valor entre 0 e 1 significa mescla de primeira ordem e segunda ordem e um valor entre 1 e 2 significa mistura da segunda ordem e esquema compressivo

A discretização do esquema compressivo depende da seleção do tipo de regime de interface. O esquema compressivo só é adequado para a modelagem de interfaces nítidas (FLUENT, 2023).

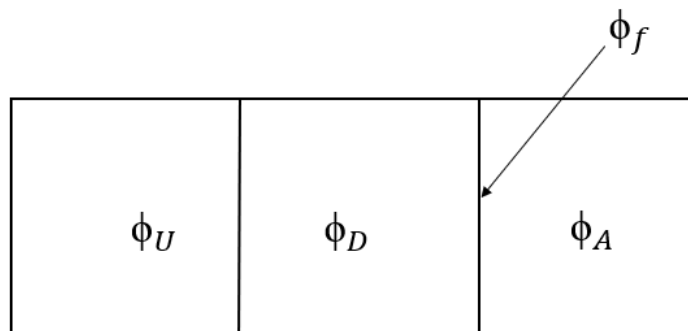
2.3.1.4 Esquema de alta resolução de captura de interface - HRIC

Para simulações que usam o modelo multifásico VOF, os esquemas *upwind* (ou ascendentes), geralmente, não são adequados para a interface devido a sua natureza excessivamente difusiva (Barral et al. 2019). Os esquemas de diferenciação central, embora possam reter a nitidez da interface, não são limitados e, frequentemente, apresentam resultados não físicos; superestimando ou subestimando os máximos físicos possíveis, ou seja, no caso da fração volumétrica apresentariam valores menores que zero ou superiores a unidade. Para superar essas deficiências, o Ansys-Fluent usa uma versão modificada de alta resolução de captura de interface, o HRIC modificado – MHRIC. O esquema MHRIC é um esquema composto que consiste em uma mistura não-linear de interpolação de *upwind* e a *downwind* (FLUENT, 2023).

Na figura 2 é mostrada a representação da célula para o esquema HRIC modificado, onde primeiro, o valor normalizado da célula da fração volumétrica, $\tilde{\varphi}_c$, é calculado e usado para encontrar o valor normalizado da face, $\tilde{\varphi}_f$, assim:

$$\tilde{\varphi}_c = \frac{\varphi_D - \varphi_U}{\varphi_D - \varphi_U} \quad (19)$$

Figura 2 – Representação da célula para o esquema HRIC modificado.



Fonte: Adaptado de FLUENT (2023).

onde o subscrito A representa a célula receptora, D representa a célula doadora e U representa a célula *upwind*.

$$\tilde{\varphi}_f = \begin{cases} \tilde{\varphi}_c & \tilde{\varphi}_c < 0 \text{ ou } \tilde{\varphi}_c > 1 \\ 2\tilde{\varphi}_c & 0 \leq \tilde{\varphi}_c \leq 0.5 \\ 1 & 0.5 \leq \tilde{\varphi}_c \leq 1 \end{cases} \quad (20)$$

Desse modo, se a célula *upwind* não estiver disponível, por exemplo no caso de uma malha não estruturada, um valor extrapolado ou interpolado será usado para φ_U . O uso direto do valor de φ_f causa rugas (ou oscilações) na interface, se o fluxo for paralelo à interface (FLUENT, 2023).

2.3.2 Level-Set

O método *level-set* (LS) criado por Satanley Osher e James A. Sethian na década de 1980, é um método de rastreamento de interface para acompanhar a evolução de interfaces topologicamente complexas. No método *Level-set* a interface é capturada e rastreada pela função *level-set*, definida como a distância de um referencial (a origem do sistema de coordenadas, por exemplo) até a interface. Como a função é suave e contínua, seus gradientes espaciais podem ser calculados facilmente e de forma contínua e sucessiva. Isso, por sua vez, produzirá estimativas da curvatura da interface e da força de tensão superficial causada pela curvatura (COYAJEE e BOERSMA, 2009). Por outro lado, este método é conhecido por apresentar dificuldades em conservar massa, além de possuir a necessidade de reiniciar a função *level-set* (WANG et al., 2012). Já o método VOF apresenta dificuldade no cálculo de suas derivadas espaciais, já que no VOF a fração volumétrica de uma fase específica é descontínua na interface. Sendo assim, o Ansys-Fluent oferece uma abordagem acoplada de *level-set* e VOF, para superar as deficiências de cada um desses métodos (FLUENT, 2023).

Para aproveitar a conservação da massa natural do método VOF e os recursos de descrição interfacial do LS, Bourliox (1995) introduziu o método VOF-*level-set* acoplado (CLSVOF), que foi posteriormente aprimorado e/ou

testado por Coyajee e Boersma (2009), Wang et al. (2012), Aniszewski, Ménard e Marek (2014) e Duy (2022).

A função *level-set* φ é a função que define a distância entre a interface e o referencial. Dessa forma, a interface é o *level-set* zero, $\varphi(x, t)$ e pode ser expressa como $\Gamma = \{x | \varphi(x, t) = 0\}$ em um sistema de duas fases:

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} +|d| & \text{se } x \in \text{a fase primária} \\ 0 & \text{se } x \in \Gamma \\ -|d| & \text{se } x \in \text{a fase secundária} \end{cases} \quad (21)$$

onde o subscrito d representa a distância da interface.

A evolução da função *level-set* pode ser dada de forma semelhante à do modelo VOF:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\varphi) = 0 \quad (22)$$

onde \vec{u} representa o campo de velocidade subjacente.

O desempenho do *level-set* (usando RCLSFoam) e do VOF-MULES (usando interPORE) foi avaliado em termos de sua capacidade de eliminar correntes espúrias e rastrear estruturas de pequena escala por Walters e Wolgemuth (2009). Os autores testaram os métodos usando dois casos de referência (cada um favorecendo cada um dos métodos) e os resultados mostraram que ambos tiveram o mesmo desempenho em termos de precisão e convergência nos testes.

2.3.3 Antidifusão interfacial

Numericamente, a equação da fração volumétrica pode ser resolvida explícita ou implicitamente. Para a formulação explícita existem esquemas de rastreamento disponíveis, que podem capturar imagens muito nítidas da interface. Em especial o PLIC é uma das funções explícitas disponíveis, sendo a mais utilizada. O cálculo explícito da interface está disponível apenas quando se utiliza uma solução transiente do problema, isso torna problemas de transientes

longos difíceis de serem estudados, pois os custos computacionais ficam muito elevados. Notadamente, as simulações exigem tamanhos de passo de tempo bastante baixos para garantir o critério de estabilidade baseado no número de Courant. Por outro lado, vários esquemas de captura de interface podem ser usados com formulação implícita, que permite tanto o estado estacionário quanto simulações transitórias com tamanhos de passo de tempo maiores. Embora sejam razoavelmente precisos, ainda assim são mais difusivos na interface quando comparado aos esquemas disponíveis com formulação explícita. So et al. (2011) desenvolveram uma técnica conhecida como antidifusão interfacial ou compressão interfacial para lidar com este problema (KLOSTERMANN, 2013).

De acordo com Vinay et al. (2015) este tratamento é aplicado apenas em células interfaciais e tenta suprimir a difusão numérica que pode surgir dos esquemas de advecção de fração volumétrica, especialmente para a malhas mais grosseiras, alta razão de aspecto ou com grandes saltos de volume celular nas proximidades da interface fluido-fluido (transições de malhas finas para grosseiras). Um termo fonte de difusão negativa, também chamado de termo de fonte de antidifusão, é adicionado à fração volumétrica para garantir a nitidez numérica da interface.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u}\alpha) = -\nabla \cdot (\bar{u}_c \alpha (1 - \alpha)) \quad (23)$$

onde

$$\bar{u}_c = \gamma |\bar{u}| \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \quad (24)$$

A equação (24) representa a velocidade de compressão na direção normal à interface, \bar{u} representa o vetor de velocidade da célula onde o fator de compressão que varia entre 0 e 1, em que $\gamma=0$ significa que não há compressão e $\gamma =1$ significa a compressão máxima. A natureza explícita do tratamento antidifusão e a nitidez numérica da interface resultante podem afetar negativamente a taxa de convergência.

2.4 MODELAGEM NUMÉRICA DOS ESCOAMENTOS TIPO ROMPIMENTO DE BARRAGENS

Nesta seção são apresentados alguns trabalhos numéricos que abordaram escoamentos multifásicos, principalmente quando um dos fluidos é não-newtoniano. Os trabalhos são citados em ordem cronológica, iniciando-se em 2010.

Malekmohammadi et al. (2010), por exemplo, apresentaram os resultados de um estudo comparativo numérico-experimental do escoamento de dois fluidos não newtonianos em um tubo horizontal fechado. Nesse estudo, ambos os fluidos exibem comportamento de cisalhamento e um dos fluidos tem uma tensão de escoamento. Partindo do princípio de que a tensão de escoamento é necessária para que o fluxo tenha equilíbrio estático, foi estudado os efeitos das mudanças na diferença de densidade e de pequenos desvios no interior do tubo horizontal. Desse modo, a comparação de resultados numéricos e experimentais mostraram tendências amplamente semelhantes, mas com algumas diferenças qualitativas também observadas.

Ahmed et al. (2011) conduziram simulações numéricas utilizando o modelo de Carreau para explorar o comportamento de uma tinta não newtoniana na impressão offset de gravura. O modelo de volume de fluido (VOF) foi adotado para demonstrar os comportamentos de alongamento e rompimento da tinta.

Minussi e Maciel (2012) conduziram experimentos de escoamentos não-Newtonianos em canais horizontais, com a utilização de soluções aquosas de Carbopol 940, as quais foram modeladas pela equação constitutiva de Herschel-Bulkley. Seus fluxos foram filmados e os quadros foram comparados com simulações numéricas. Dois resultados particulares foram analisados: a evolução da onda frontal com o tempo e sua distância de parada. O *software* CFX foi empregado e as simulações foram realizadas com o método VOF. Ambos os resultados, numéricos e experimentais, foram comparados com soluções de aproximação para águas rasas encontradas na literatura.

Tembely et al. (2012) desenvolveram um modelo para estiramento e quebra rápida de filamentos utilizando uma abordagem unidimensional para

fluidos newtonianos e não-newtonianos, os resultados foram comparados com dados experimentais. A abordagem levou em consideração o movimento inicial de alongamento do filamento do pistão usando uma formulação ALE. Dessa forma, as simulações da deformação dos filamentos foram comparadas com os resultados experimentais e numéricos. Nesse estudo, o comportamento do fluido newtoniano foi previsto pelo modelo numérico, enquanto para o caso do fluido não-newtoniano houve uma discrepância nos resultados.

Karami et al. (2014) desenvolveram estudos numéricos e experimentais em uma tubulação horizontal de 0.15 m de diâmetro, com baixas frações de líquido composto por água e óleo. As simulações ocorreram em condições similares as testadas experimentalmente, e o *software* comercial Ansys-Fluent foi empregado juntamente com o modelo multifásico VOF, para obtenção de parâmetros importantes do escoamento bifásico como: o formato da interface, os campos de velocidade das fases líquida e gasosa, a fração de vazão do líquido, e a tensão de cisalhamento. Os autores testaram três tamanhos diferentes de malha, porém, o fenômeno de entranhamento de líquido não pôde ser verificado através das simulações, uma vez que para capturar seus efeitos, é necessária uma malha extremamente fina e conseqüentemente, um tempo de simulação muito alto. Os resultados encontrados nas simulações se mostraram em concordância com os dados experimentais.

Caron et al. (2015) apresentaram simulações numéricas de um problema de rompimento de barragens com o objetivo de avaliar a sensibilidade dos resultados a diferentes aspectos do modelo. O trabalho foi dedicado principalmente a avaliar a influência de modelos de turbulência, tensão superficial, número de dimensões e condições de contorno na previsão da evolução da interface ar-água, incluindo a formação de bolhas e gotas durante uma superfície livre de longo prazo análises de fluxo.

Barral et al. (2019) realizaram comparações qualitativas e quantitativas de funções de interpolação do método VOF existentes no *software* comercial de CFD Ansys-Fluent, através da utilização de um problema do problema clássico de rompimento de barragem de água. Dessa forma, algumas dessas funções foram comparadas sob diferentes pontos de vista. Verificou-se que, para grades mais finas, os esquemas PLIC, CICSAM e HRIC explícito tiveram desempenhos

semelhantes em relação à qualidade da interface reconstruída e conservação de massa. Por outro lado, o PLIC apresentou os melhores resultados para malhas mais grosseiras, sendo o único a conservar massa para todos os testes.

Pham et al. (2020) compararam a aplicação do VOF e os métodos de dois fluidos na simulação de fluxos de duas fases. O VOF foi acoplado a um modelo de bolha discreta Lagrangiana para a simulação de bolhas em escala de sub-malha. Os dois fluidos forneceram resultados mais desfavoráveis no caso de aumento de bolha única e resultados mais favoráveis para um fluxo borbulhante e um fluxo de superfície livre.

Por fim, cita-se Issakhov & Zhandalet (2020) que consideraram o problema de simulação numérica de um escoamento incompressível de ruptura de barragem composto por três fases. O movimento da superfície livre de água foi realizado usando o modelo de fluido newtoniano, e o movimento da mistura de lama foi feito pelo modelo de fluido não newtoniano baseado no método VOF. Neste artigo foram discutidos os problemas de cargas dinâmicas decorrentes do impacto de um fluxo de ruptura de barragem usando modelagem numérica.

3 METODOLOGIA NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentadas as propriedades dos fluidos, o domínio computacional e as condições de contorno para o processamento das simulações numéricas com o modelo VOF implementado no *software* Ansys-Fluent. Além disso, é apresentada a solução padrão para determinar um critério comparativo para os resultados.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA

O ponto de partida de qualquer método numérico é o modelo matemático, que se caracteriza por um conjunto de equações diferenciais parciais e condições de contorno que regem o processo. A escolha de um modelo apropriado para a aplicação alvo pode conter simplificações das regras de conservação exatas. Um método numérico normalmente é desenvolvido para encontrar uma solução aproximada de um conjunto particular de equações, uma vez que é impraticável criar um método de resolução que seja aplicável em todas as situações (Inácio, 2018).

Este trabalho tem como objetivo conduzir simulações numéricas de um fluido viscoplástico, utilizando o *software* comercial Ansys-Fluent, que é capaz de simular escoamentos de fluidos e transferência de calor em geometrias bi/tridimensionais. Ainda conforme Inácio (2018), este programa utiliza o método dos volumes finitos (MVF) para discretizar as equações de conservação e utiliza a formulação *cell centered* onde a variável de interesse está armazenada no centro da célula. O procedimento para obtenção dos resultados é composto por três fases principais:

1) Pré-processamento: geração da malha computacional, e definição das condições do escoamento e parâmetros de simulação.

2) Processamento: resolução das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, juntamente com as equações constitutivas que regulam o comportamento do material.

3) Pós-processamento: representação gráfica dos resultados obtidos através o *software*.

Neste trabalho as equações de conservação são a equação da conservação da massa e a equação da quantidade de movimento (FOX, PRITCHARD e MCDONLAD, 2010). Para esta última, a viscosidade dinâmica é substituída pela equação constitutiva reológica. Assim, quando o fluido é Newtoniano, a equação da conservação da quantidade de movimento se resumindo à equação de Navier-Stokes. Desse modo, escrevendo na forma conservativa, utilizando o sistema de coordenadas cartesiano e a notação indicial de Einstein, obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (25)$$

3.1.1 Método de discretização

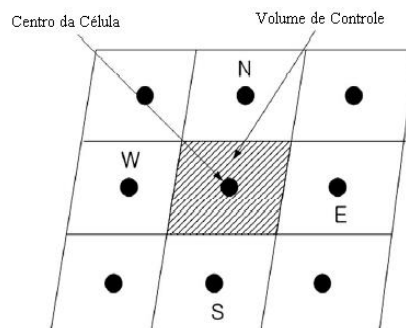
O conjunto das equações que define um problema de escoamento de fluidos não-Newtonianos, não é, na maior parte dos casos, passível de ser resolvido analiticamente. Consequentemente, é resolvido através de métodos numéricos que resultam em soluções aproximadas. Na computação numérica, existe uma grande variedade de metodologias utilizadas no cálculo da solução de problemas sobre escoamentos. No que diz respeito ao método de discretização das equações governantes destacam-se três métodos diferentes: o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos volumes finitos (Malheiro, 2018).

Depois de selecionado o modelo matemático, tem de se escolher um método de discretização apropriado, isto é, um método de aproximar as equações diferenciais por um sistema de equações algébricas para as variáveis do problema que serão obtidas em localizações discretas no espaço e no tempo. No método dos volumes finitos (MVF), a aproximação da solução das equações governantes é obtida através de balanços de fluxos sobre volumes de controle discretos que constituem o domínio do problema. A importância do MVF surge

do crescente interesse sobre problemas de escoamento de fluidos mais complexos em geometrias simples, onde o método revela ser o mais eficiente (Malheiro, 2018).

O MVF utiliza como ponto de partida a forma integral da equação da conservação. O domínio de solução é dividido num número finito de volumes de controle (VC) contíguos, e a equação da conservação é aplicada a cada VC. No centroide de cada VC localiza-se um nó computacional, no qual são calculados os valores das variáveis, sendo os valores das variáveis nas superfícies dos VC obtidos por interpolação em função dos valores nodais (centro do VC). Na figura 3 é apresentada a representação de uma malha estruturada para o método MVF, onde as integrais de volume e de superfície são aproximadas usando fórmulas de quadratura apropriadas. Como resultado, obtém-se uma equação algébrica para cada VC, na qual aparecem os valores das variáveis no nó e nos nós vizinhos (Gonçalves, 2007).

Figura 3 – Representação de uma malha estruturada para o método MVF.



Fonte:(Jeong & Seong, 2014)

De acordo com (Sáo Y., 2021), o Método dos Volumes Finitos, juntamente com os métodos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos, é um método numérico de discretização. O propósito da discretização no Método dos Volumes Finitos é de transformar uma ou mais equações diferenciais parciais (EDPs) contínuas em um sistema correspondente de equações algébricas, que pode ser escrito conforme Equação 26.

$$Ax = b \quad (26)$$

sendo A a matriz de coeficientes, x o vetor com incógnitas (velocidade, pressão, temperatura, entre outras) e b a matriz de termos-fonte.

O procedimento de transformação das EDPs no sistema de equações algébricas, ou seja, obtenção dos coeficientes da Equação 26, é definido por três passos:

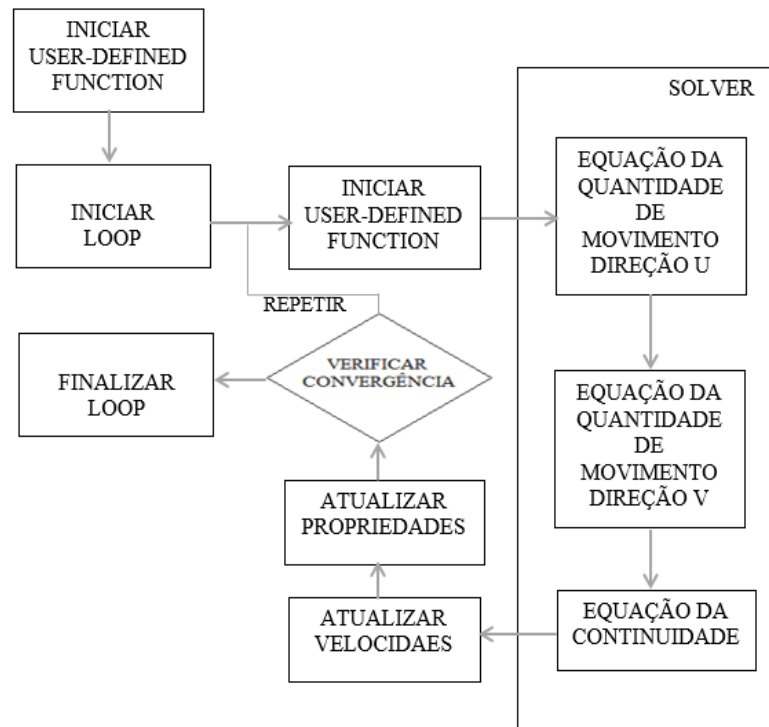
- 1) criação de uma malha computacional, ou seja, divisão espacial do domínio em volumes de controle finitos e discretos;
- 2) integração das equações governantes em cada volume de controle definido na malha;
- 3) discretização e linearização das equações algébricas obtidas visando organizar a forma matricial, resultando na topologia da Equação 26.

3.1.2 Funções definidas pelo usuário - UDF

No modelamento do comportamento reológico de fluidos viscoplásticos, mais especificamente na determinação do parâmetro da viscosidade, o programa computacional FLUENT possui um modelo regularizado específico. No entanto, o FLUENT permite utilizar uma função personalizada pelo usuário chamada UDF (*User Defined Function*). As UDFs são linhas de comando programadas pelo usuário e escritas em linguagem C, que são compiladas pelo *software* e podem ser utilizadas para diversos fins, desde auxiliar a resolução no pós-processamento, modelar condições de contorno, impor restrições aos escoamentos e definir propriedades (Inácio, 2018).

Neste estudo, UDFs foram criadas para determinar o parâmetro da viscosidade do fluido viscoplástico utilizando o modelo proposto por Minussi e Maciel (2012). O algoritmo de execução de solução, utilizando UDFs com a metodologia utilizada neste trabalho é mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Procedimento de solução do algoritmo segregado com UDF.



Fonte: Adaptado de (Fluent, 2023).

3.1.3 Propriedades dos fluidos

A Tabela 2 apresenta as propriedades do ar e do líquido não-newtoniano utilizado (*mud*), entretanto, o parâmetro de viscosidade da *mud* foi implementado através de uma Função Definida pelo Usuário (UDF), conforme foi descrita na seção 3.1.2

Tabela 2 – Propriedade dos fluidos.

	AR	MUD
ρ (kg/m ³)	1.225	1000
μ (kg/m-s)	1.789410^{-05}	UDF

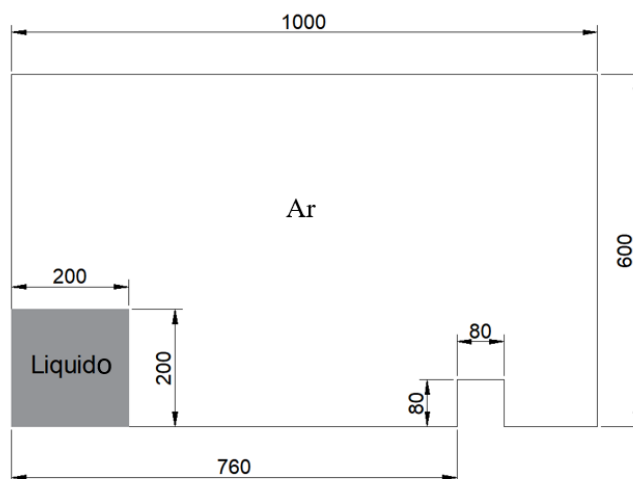
Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

3.1.4 Condições de contorno, condições iniciais e demais definições

As simulações numéricas foram conduzidas utilizando o pacote computacional ANSYS *Fluent* com o Método dos Volumes Finitos. O domínio

computacional foi constituído de um reservatório bidimensional fechado com condições de contorno de não deslizamento. O escoamento foi modelado em regime laminar. Como condição inicial, um volume inicial de 200 mm x 200 mm de fluido reservado foi introduzido. Veja a Figura 5.

Figura 5 – Domínio, condições de contorno e campo inicial das fases. As dimensões estão em mm.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

As simulações numéricas foram realizadas com o Ansys-Fluent 21R2 usando o método VOF e suas combinações com algoritmos *Level Set* e antidifusão. O escoamento foi simulado usando um domínio bidimensional contendo um obstáculo para forçar uma ruptura interfacial severa da frente de onda do fluido, permitindo que o desempenho das funções de interpolação fosse investigado minuciosamente. O domínio foi discretizado usando três tamanhos de malha regulares (células de 5, 2,5 e 2 mm).

Um aspecto importante da convergência de simulações é o passo de tempo. Na presente pesquisa, o número de Courant, Co , é usado para determinar o passo do tempo. Este critério fornece a distância máxima que uma propriedade de fluxo pode ser transportada em um passo de tempo em relação ao comprimento característico dos elementos da malha (SAVAGNAGO, 2022). Dessa forma, o passo de tempo foi controlado automaticamente pelo programa ANSYS-FLUENT usando o número de Courant.

$$Co = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{\Delta x_i} \quad (27)$$

na qual Δt corresponde ao passo de tempo, U_i e Δx_i são as velocidades e o comprimento característico da célula na direção $i = x, y, z$.

Wardle e Weller (2013) sugerem um valor máximo de 0,25 para o número de Courant em um fluxo multifásico. Isso significa que qualquer movimentação do fluxo percorre, em um passo de tempo, no máximo um quarto da distância entre dois pontos na grade.

Com o passo de tempo mínimo definido como 10^{-20} segundos e o passo de tempo máximo definido como 10^{-4} segundos; a adaptação do passo de tempo foi realizada usando o modo multifásico com a opção conservadora do solucionador. O resíduo relativo para todas as variáveis foi definido como 10^{-4} e o número máximo de iterações por etapa de tempo foi definido como 20. O passo de tempo inicial foi definido como 10^{-18} segundos. Esse valor muito baixo do passo de tempo inicial foi utilizado para tornar a convergência inicial mais fácil. Através desse desenvolvimento do passo de tempo inicial foi permitida a realização de uma simulação contínua, sem a necessidade de um aumento intermitente no valor do passo de tempo. Dessa forma, as simulações foram interrompidas na marca de 2 segundos e esse instante é considerado o fim da simulação.

O líquido liberado foi simulado usando o modelo de Herschel-Bulkley, que consiste em um modelo reológico newtoniano generalizado para simular fluidos viscoplásticos sem comportamento tixotrópico ou viscoelástico. A equação constitutiva de Herschel-Bulkley pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_c \dot{\boldsymbol{D}}(-\dot{D}_{II})^{-1/2} + 2^n k \dot{\boldsymbol{D}}(-\dot{D}_{II})^{(n-1)/2} \quad (28)$$

em que $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor da tensão de cisalhamento viscoso; $\dot{\boldsymbol{D}}$ é o tensor da taxa de deformação; \dot{D}_{II} é o segundo invariante do tensor da taxa de deformação; τ_c é a tensão crítica de escoamento; n é o índice de escoamento e k é o índice de consistência.

Matematicamente, a Equação (27) gera viscosidades infinitas se τ_{II} (o segundo invariante de τ) for menor que τ_c , um problema comum resultante de simulações numéricas de fluidos viscoplásticos. Para evitar esse problema, é comum usar métodos de regularização, como o modelo de Papanastasiou (1987). Neste trabalho, foi utilizado o método sugerido por Minussi e Maciel (2012), em que a viscosidade aparente, η , é calculada como:

$$\eta = \tau_c [\max(\dot{D}_{inf}, \alpha)]^{-1} + k \{\min[\dot{D}_{sup}, (\alpha, \dot{D}_{inf})]\}^{n-1} \quad (29)$$

onde $\alpha = 2(\dot{D}_{II})^{-1/2}$, $\dot{D}_{inf} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ e $\dot{D}_{sup} = 50000 \text{ 1/s}$ são, respectivamente, limites inferior e superior impostos para α .

Conforme Minussi e Maciel (2012), foram escolhidos valores para obter um comportamento reológico próximo ao encontrado em soluções aquosas de Carbopol (Carbopol 940 com ~ 0,1% de concentração volumétrica). Os valores utilizados como propriedades reológicas são exibidos na tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades reológicas.

PROPRIEDADES	VALORES
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	1000
$\tau_c \text{ (Pa)}$	20
n	0.5
$k \text{ (Pa.s}^n\text{)}$	1.5

Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Para as simulações explícitas, quatro funções de reconstrução (interpolação) foram empregadas: CICSAM, COMPRESSIVE, HRIC modificado e PLIC, de quatro maneiras diferentes:

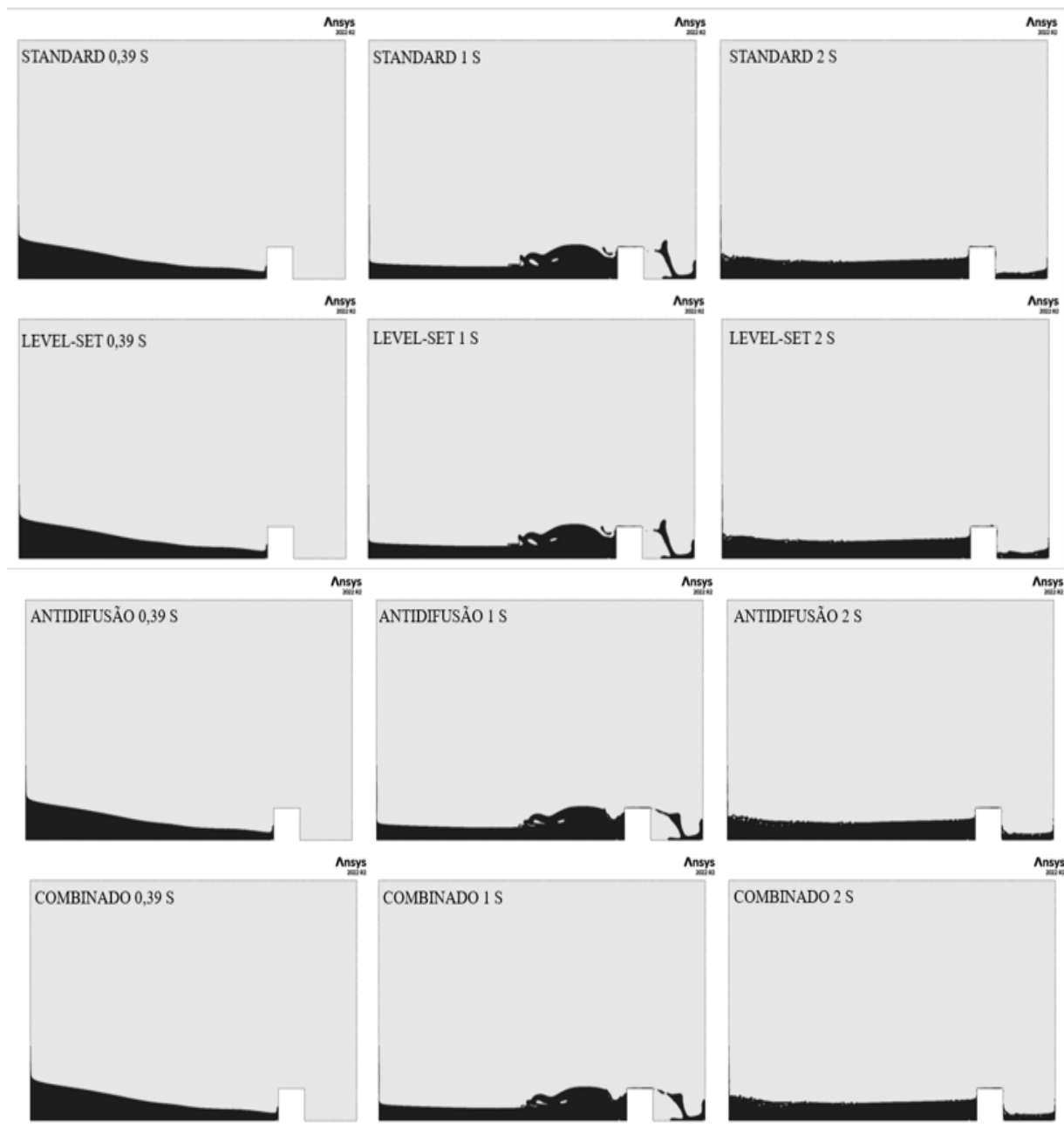
- 1) As funções padrão (sem acréscimo da Antidifusão ou do *Level-set*);
- 2) Usando o algoritmo antidifusão disponível no ANSYS-FLUENT,
- 3) Combinado com o *level-set* (algoritmo CLSVOF),
- 4) Combinado com antidifusão e *level-set*.

3.1.5 Solução usando as funções padrão

O método de interpolação PLIC foi utilizado como problema base para comparação entre as demais soluções numéricas. Dessa forma, foi utilizada a malha regular de 2mm como referência para as análises das imagens, conforme é mostrada na Figura 6 onde as imagens foram obtidas em três instantes de tempo de referência relevantes para a pesquisa:

- Instante de impacto, que ocorreu por volta de 0,39 segundos;
- Instante de retorno, caracterizado pelo momento do retorno da pluma após ultrapassar a barreira, identificado em torno de 1 segundo (*slosh flow*);
- Instante final da simulação, em 2 segundos.

Figura 6 – Evolução do tempo das frações volumétricas – resultados utilizando o esquema PLIC.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são discutidos os resultados numéricos para as simulações do escoamento modelado em regime laminar, com o auxílio do *software* Ansys-Fluent 21R2, utilizando o método VOF e suas combinações com algoritmos *Level-set* e antidifusão. Dessa forma, foi investigado o desempenho das funções de interpolação de maneira detalhada.

Os resultados da simulação foram examinados em três maneiras diferentes: descrição qualitativa da interface, com a análise da nitidez da interface; tempo computacional; e estabilidade numérica, com a verificação do número de passos de tempo e iterações totais. Nesse contexto, em simulações numéricas utilizando o VOF, o resultado qualitativo da nitidez da interface é visual, sendo um critério usual juntamente com tempo de computacional. Assim, o critério adicional de estabilidade numérica com a observação do número de passos de tempo e iterações, é importante porque influencia a seleção da função de interpolação. Nesse sentido, uma função que permite menos intervalos de tempo é considerada mais estável devido ao fato de poder executar a simulação com passos de tempo maiores, resultando em um menor custo computacional. O mesmo entendimento pode ser aplicado ao número de iterações, do ponto de vista computacional a função que converge em menos iterações por passo de tempo é considerada mais eficiente (ALVES, 2007).

4.1 DESCRIÇÃO QUALITATIVA DA INTERFACE

Nesta seção são apresentados os resultados dos campos de fração volumétrica visando uma análise qualitativa da nitidez nas interfaces. Sabe-se que um dos fatores para a ocorrência da difusão numérica é quando o escoamento não se encontra alinhado com a malha de cálculo, caracterizando uma falta de nitidez nos pontos mais afetados da interface (MALISKA, 2004).

Por esse motivo, foram destacados nas figuras 7 a 16 os pontos que apresentaram maior índice de cores cinzas, indicando maior difusão interfacial.

4.1.1 Conjunto de resultados para a malha de 5 mm

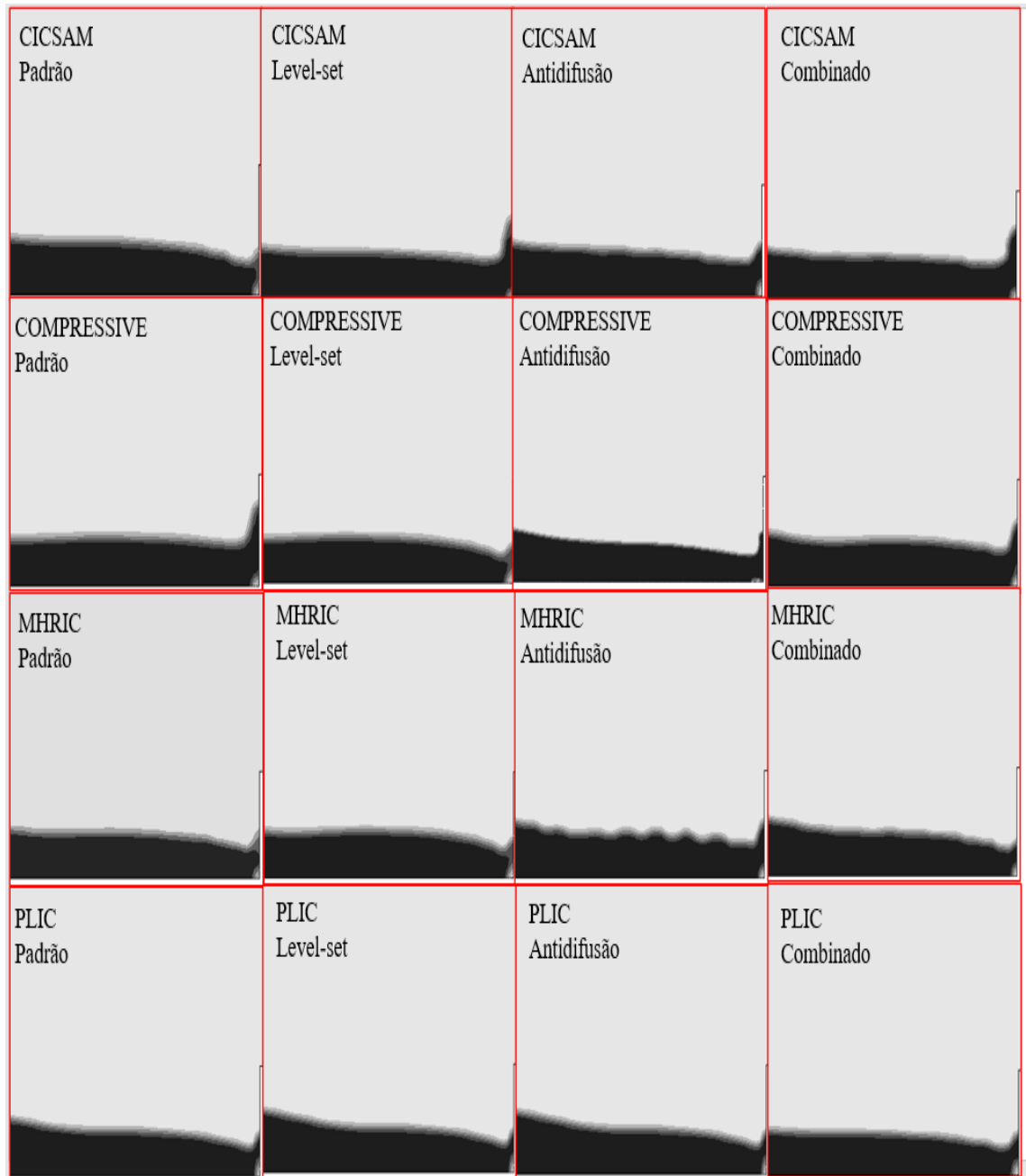
As Figuras 7 a 9 apresentam o conjunto de resultados para a malha de 5 mm, mostrando três instantes de tempo distintos com foco em três posições do domínio computacional: o instante de impacto que acontece por volta de 0,39 segundos; o instante de retorno onde a pluma passa pelo obstáculo, em torno de 1 segundo e o instante final da simulação, em 2 segundos. Cada linha representa uma função de interpolação e cada coluna representa uma modificação da função, ou seja, a função padrão, o uso do *Level-set*, a antidifusão, e/ou a utilização combinada dos métodos *Level-set* e antidifusão.

Através da análise qualitativa das interfaces, pode-se notar que para a malha mais grosseira, de 5 mm, é evidente que a difusão numérica interfacial é um problema para todas as soluções. O PLIC apresenta a resolução interfacial mais nítida para as regiões dos instantes observados, enquanto as outras funções de interpolação apresentaram uma solução com grave incidência de difusão numérica. O uso dos algoritmos *Level-set* (LS) e antidifusão (AD) isolados melhoram ligeiramente a solução das três outras funções de interpolação em análise. Contudo, os melhores resultados são observados na função CICSAM com o auxílio do algoritmo AD, possibilitando uma nitidez interfacial muito próxima da obtida pela função PLIC.

Nesse contexto, a função PLIC é praticamente inalterada por qualquer combinação de LS e AD. No entanto, os melhores resultados são obtidos quando uma combinação de LS e AD é usada, permitindo que todas as funções, exceto a função COMPRESSIVE, tenham uma melhor nitidez interfacial. A função COMPRESSIVE mostra melhorias notáveis em relação à configuração padrão, mas ainda fica aquém do desempenho observado pelas outras funções neste estudo. Uma análise semelhante pode ser feita a partir da nitidez interfacial da Figura 6, com o PLIC apresentando o melhor desempenho. Nesse sentido, a configuração padrão das outras funções também apresenta severa difusão numérica, sendo o pior cenário o do uso do HRIC modificado padrão. Para essa seção do domínio computacional, os algoritmos complementares apresentam uma boa melhoria para todas as funções, com os melhores resultados também

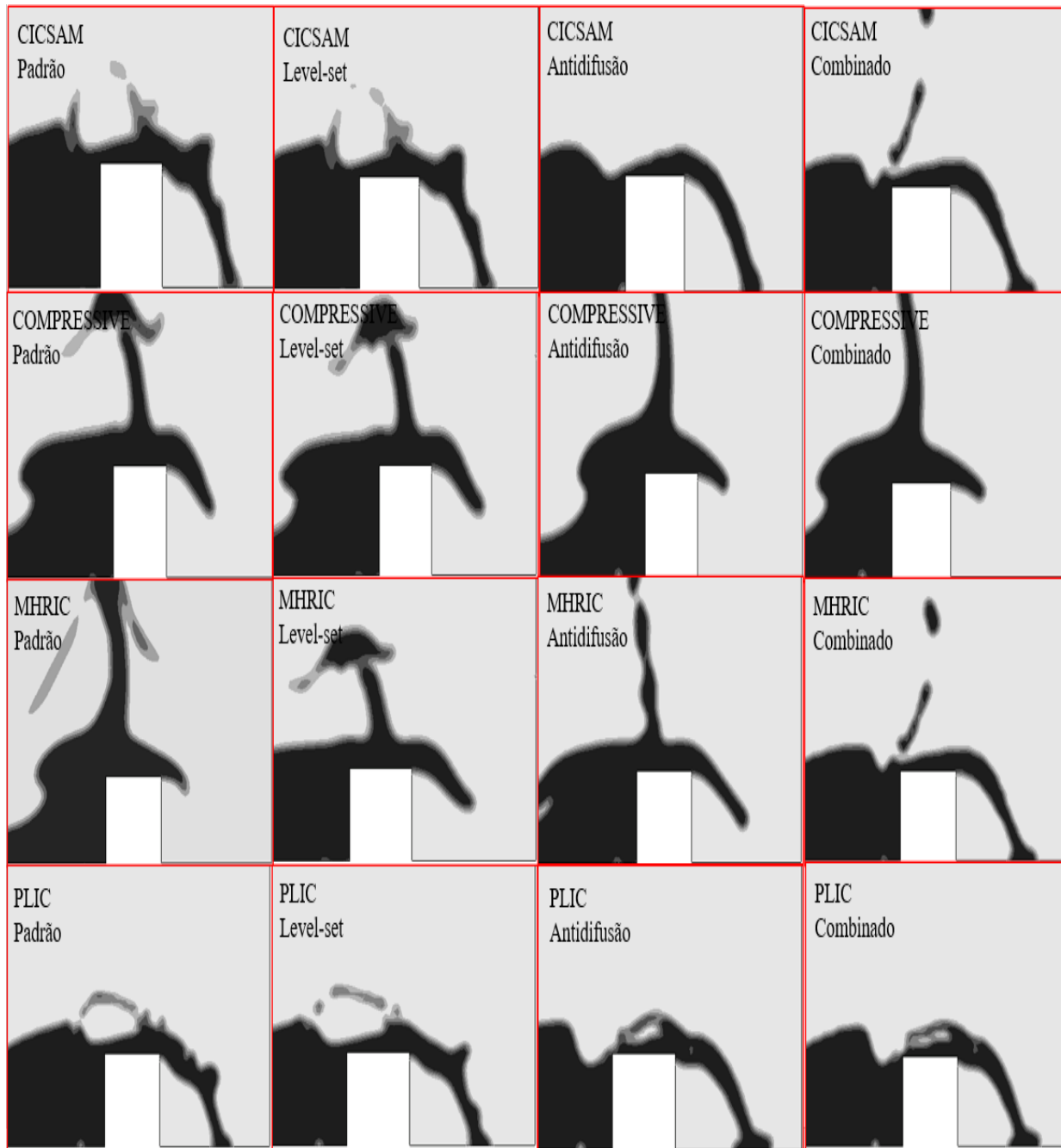
decorrentes do uso combinado de LS e AD. No entanto, o uso isolado de ambos os algoritmos têm um efeito sensível na nitidez interfacial.

Figura 7 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante de impacto.



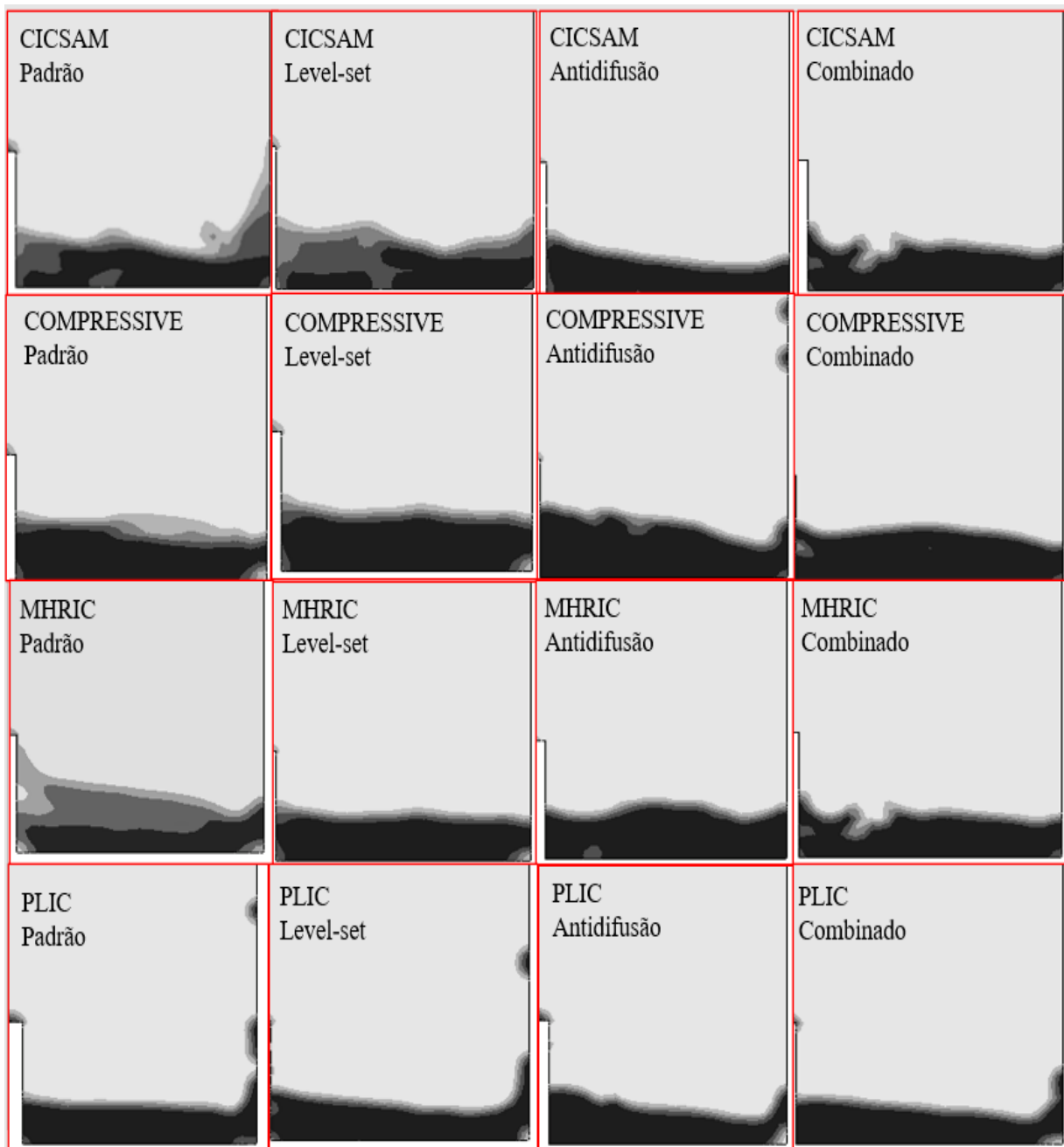
Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 8 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante que a pluma passa pelo obstáculo.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 9 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante final da simulação.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

4.1.2 Conjunto de resultados para a malha de 2,5 mm

As Figura 10 a 12 apresentam o conjunto de resultados para a malha de 2,5 mm, mostrando os mesmos três instantes de tempo distintos com foco nas três posições do domínio computacional consideradas de maior interesse.

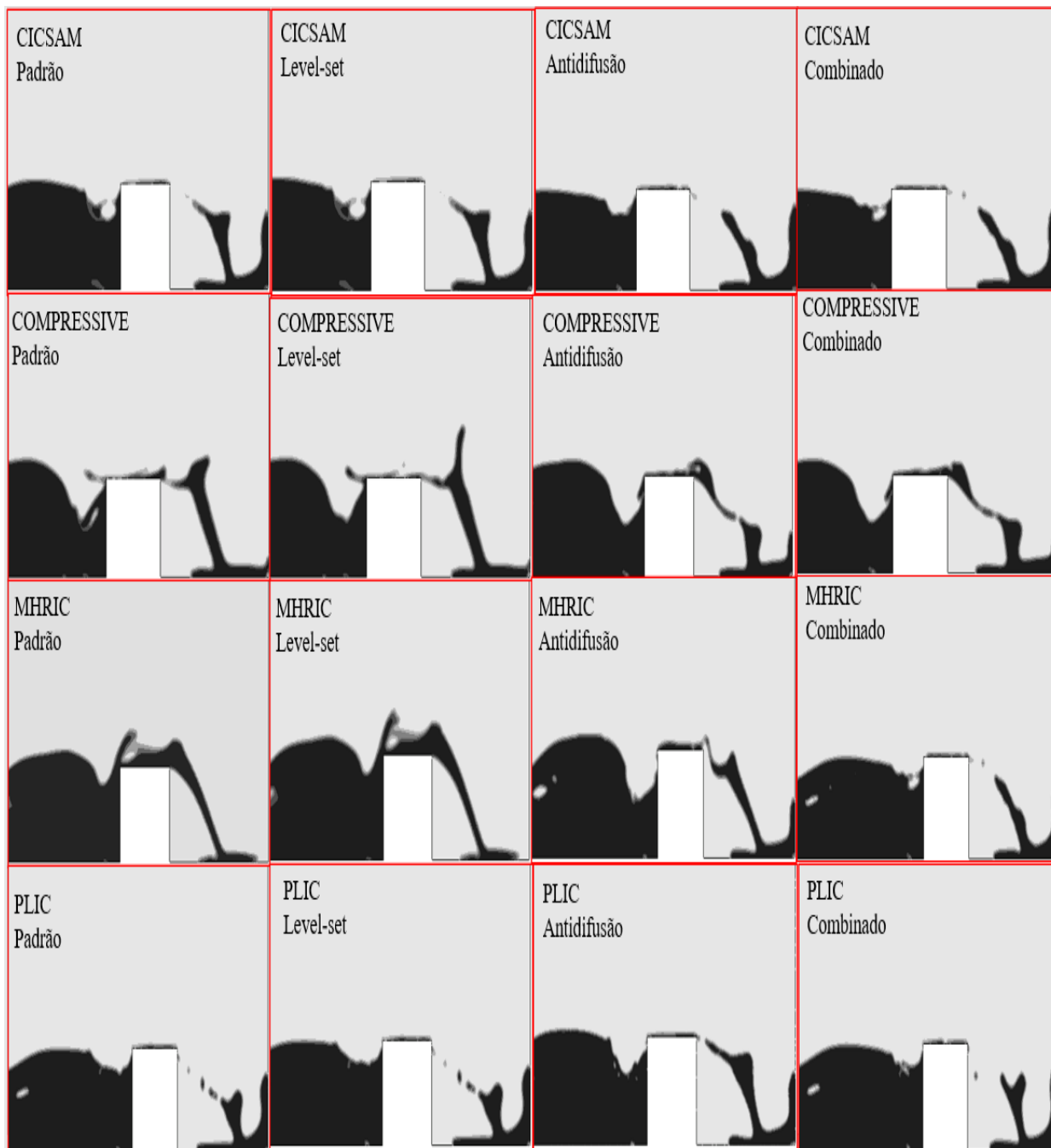
Portanto, seguindo a mesma metodologia de análise foi realizada na subseção 4.1.1, tem-se a seguinte análise: o conjunto de soluções para a malha de 2,5 mm mostra que os resultados são muito similares aos obtidos com a malha de 5 mm, com a função PLIC apresentando a descrição interfacial mais nítida e com pouco ou nenhum efeito dos algoritmos complementares (LS e AD). O pior comportamento é apresentado pelo HRIC modificado – MHRIC, porém, para essa malha, as diferenças entre o MHRIC, o COMPRESSIVE e o CICSAM são muito menores do que as apresentadas na malha de 5 mm, o que leva à conclusão de que os primeiros resultados se devem, de fato, à difusão numérica severa. Este resultado está em linha com os trabalhos tradicionais da literatura na área de difusão numérica conforme demonstrado em Maliska (2004). A influência do algoritmo de AD é favorável no controle dessa falsa difusão em todas as funções de interpolação testadas. Entretanto, o uso do LS isoladamente não é contribui de forma decisiva para que o MHRIC apresente um patamar comparável de nitidez interfacial. Neste caso, o uso da combinação de AD e LS é mais uma vez capaz de melhorar a nitidez interfacial de todas as funções avaliadas para resoluções comparáveis aos alcançados pelo PLIC.

Figura 10 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante de impacto.



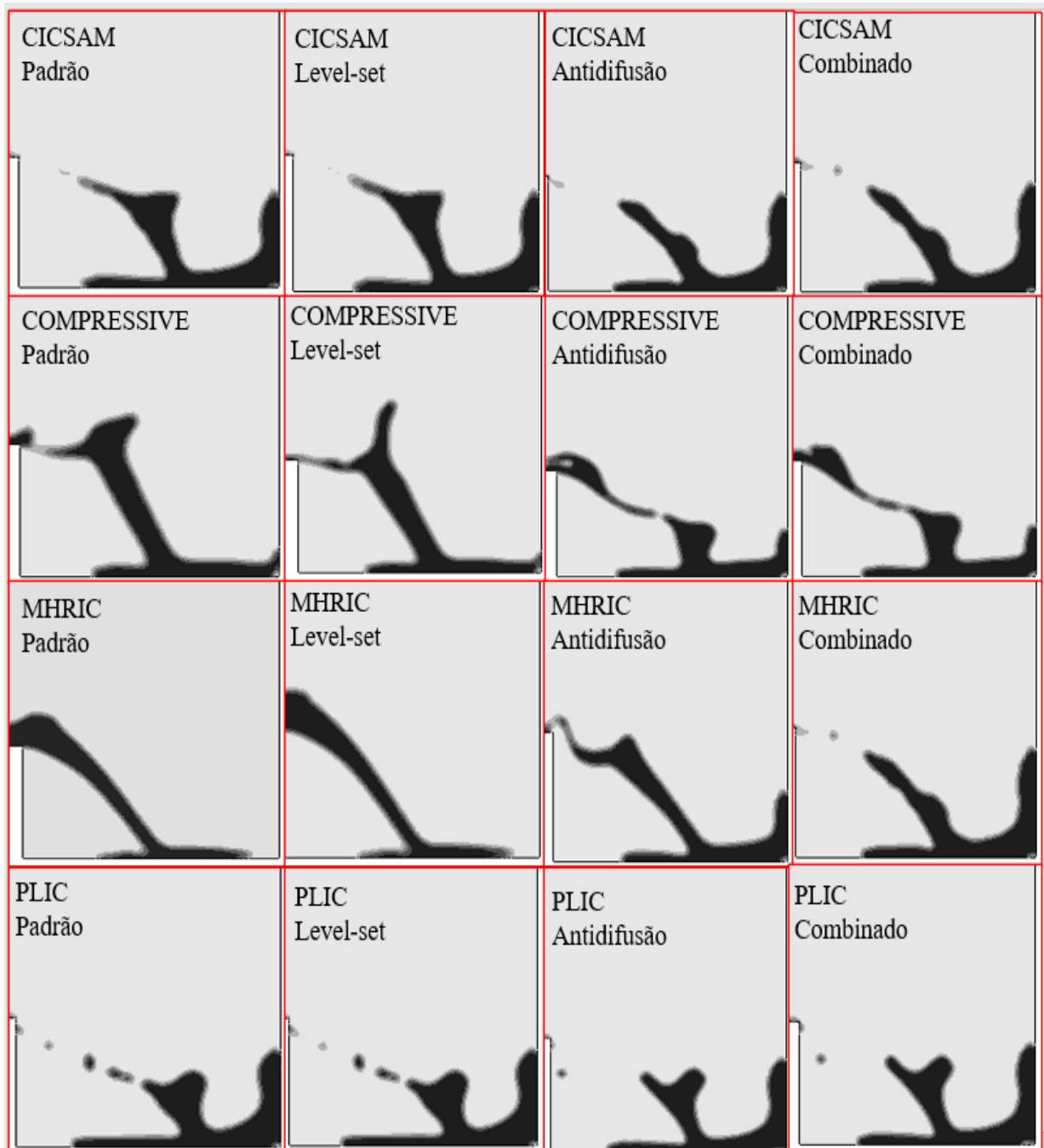
Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 11 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante que a pluma passa pelo obstáculo.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 12 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante final da simulação.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

4.1.3 Conjunto de resultados para a malha de 2 mm

Esta seção apresenta nas Figura 13 a 15 o conjunto de resultados para a malha de 2 mm utilizando a mesma metodologia de diagramação e análise realizada nas seções 4.1.1 e 4.1.2.

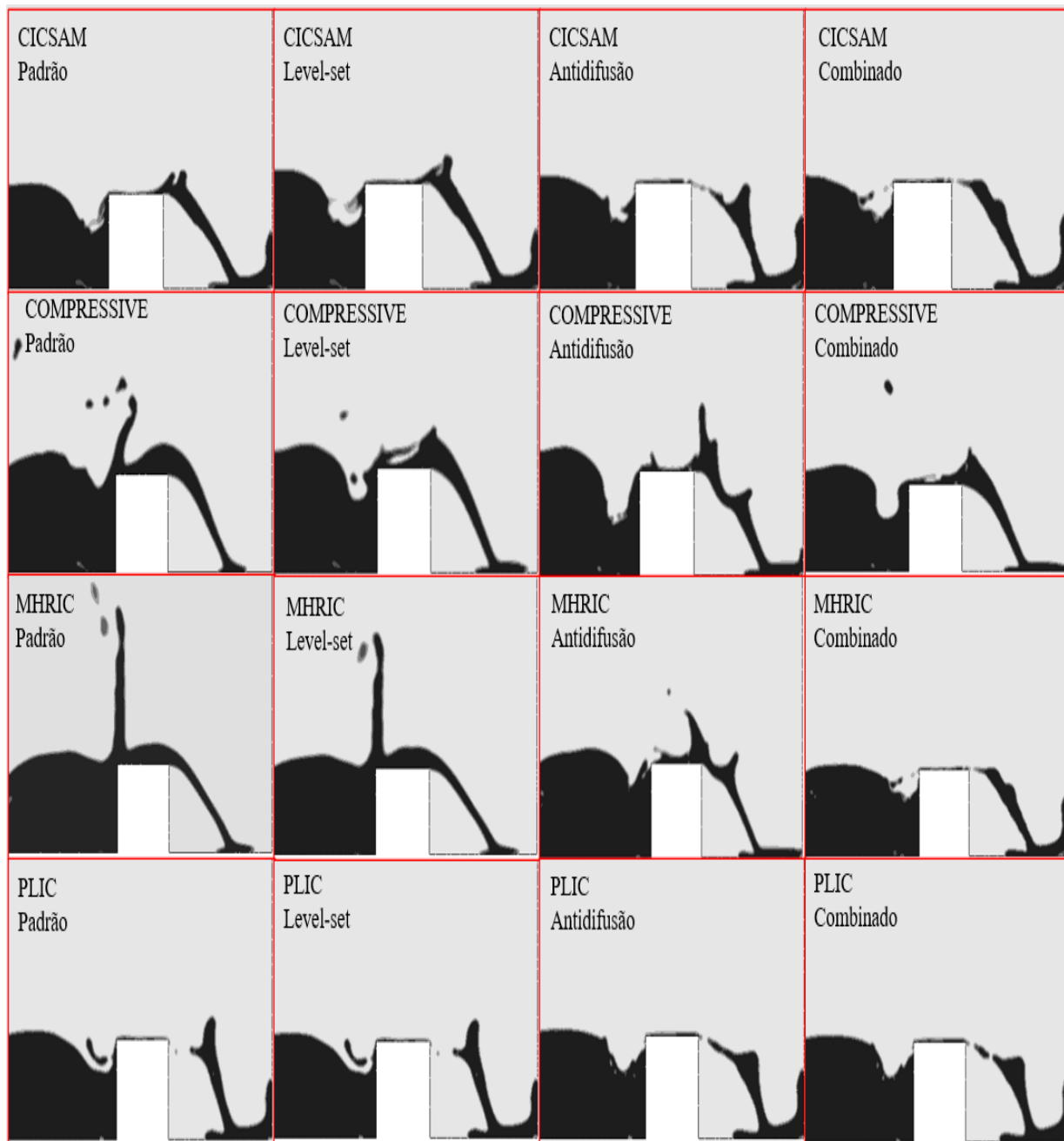
A análise das figuras 13 a 15 sobre o resultado para o tamanho de malha mais refinada (2,0 mm), demonstra uma conclusão semelhante as apresentadas para as malhas menos refinadas: o PLIC mantém a melhor nitidez interfacial; este resultado é esperado conforme os resultados do trabalho de Barral et al. (2019). No entanto, as funções padrão mantêm uma incidência severa de difusão numérica, sendo que o uso dos algoritmos complementares (AD e LS) proporciona uma melhoria considerável nas funções estudadas neste trabalho. Como nas malhas anteriores, o melhor desempenho das funções de interpolação não geométricas é obtido com o uso combinado de LS e AD.

Figura 13 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante de impacto.



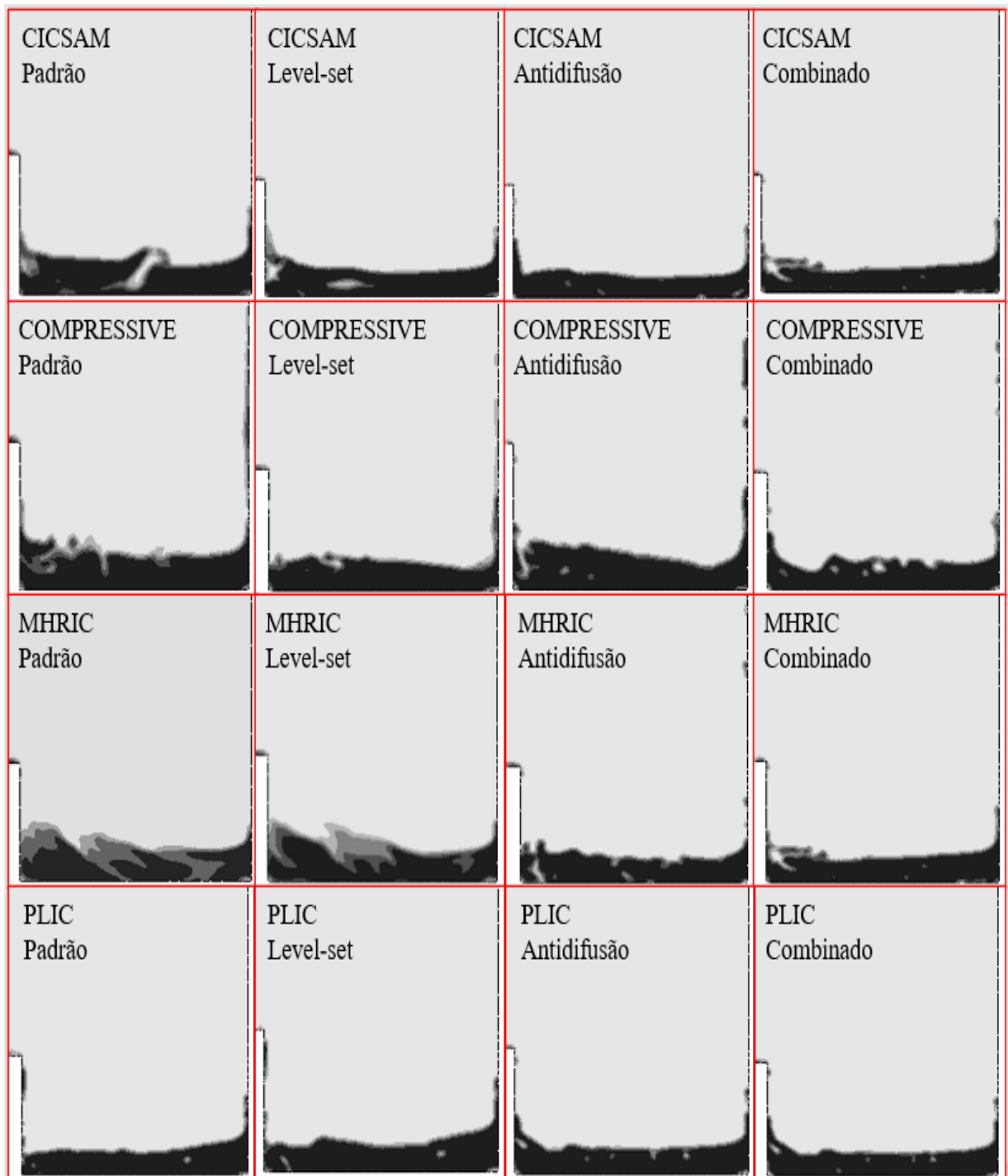
Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 14 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante que a pluma passa pelo obstáculo.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 15 – Evolução do tempo das frações volumétricas no instante final da simulação.

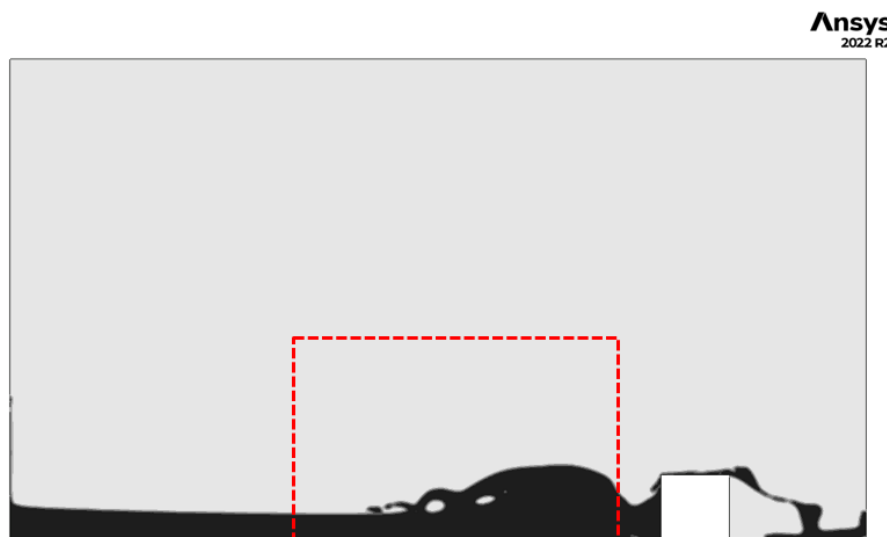


Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

4.1.4 Comparativo entre as malhas

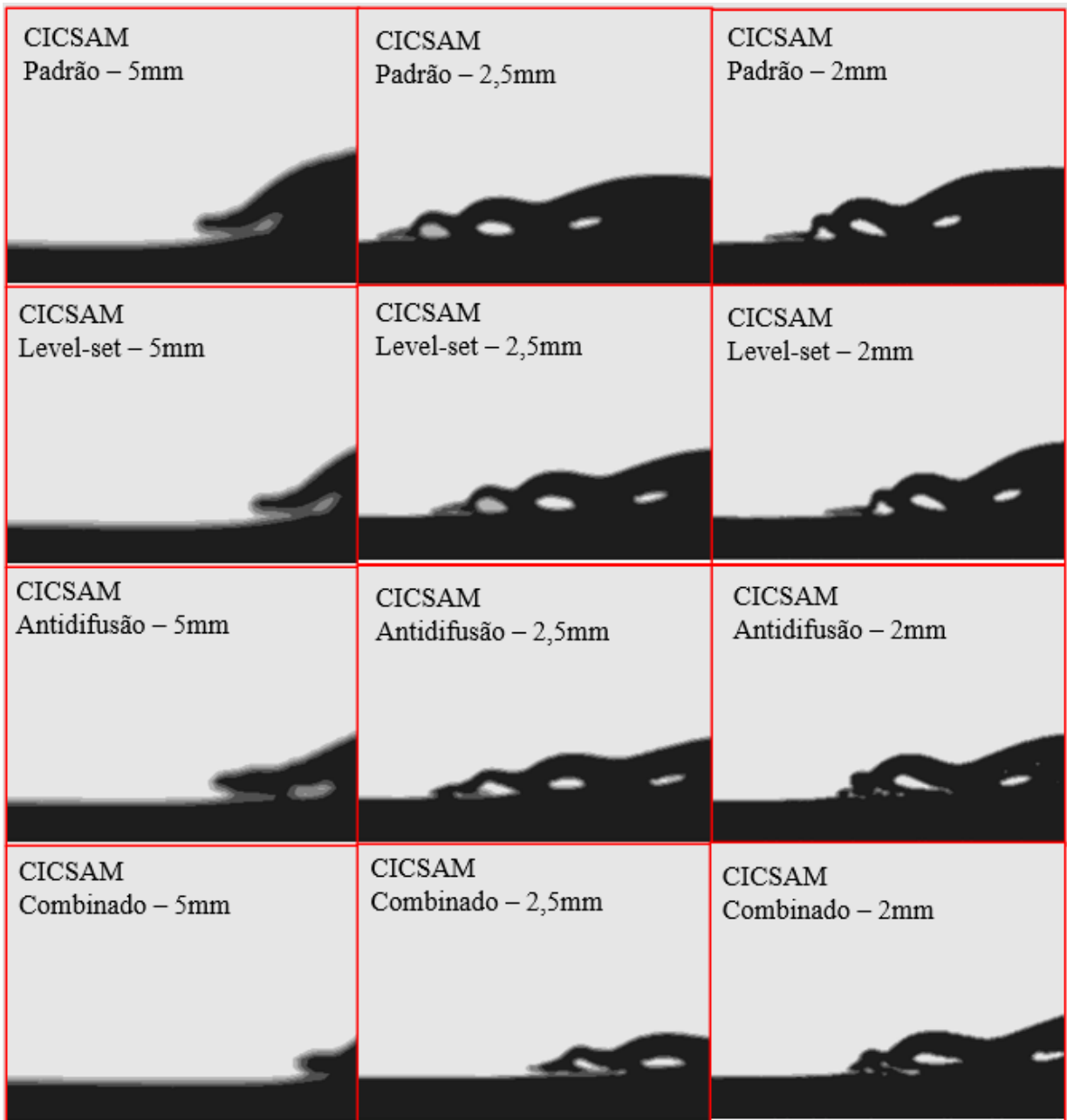
Para comparar as soluções para as diversas malhas de forma direta, foram criadas as figuras 17 a 20 para cada função de interpolação no instante de tempo de 1 segundo, onde cada linha representa um tamanho de malha e cada coluna representa uma modificação da função, ou seja, a função padrão, o uso do LS, a AD, ou a implementação combinada dos métodos LS-AD. A Figura 16 ilustra o instante de tempo em que ocorreu a captura das imagens em que a análise das figuras desta seção foi realizada.

Figura 16 – Região utilizada para a análise comparativa entre as malhas.



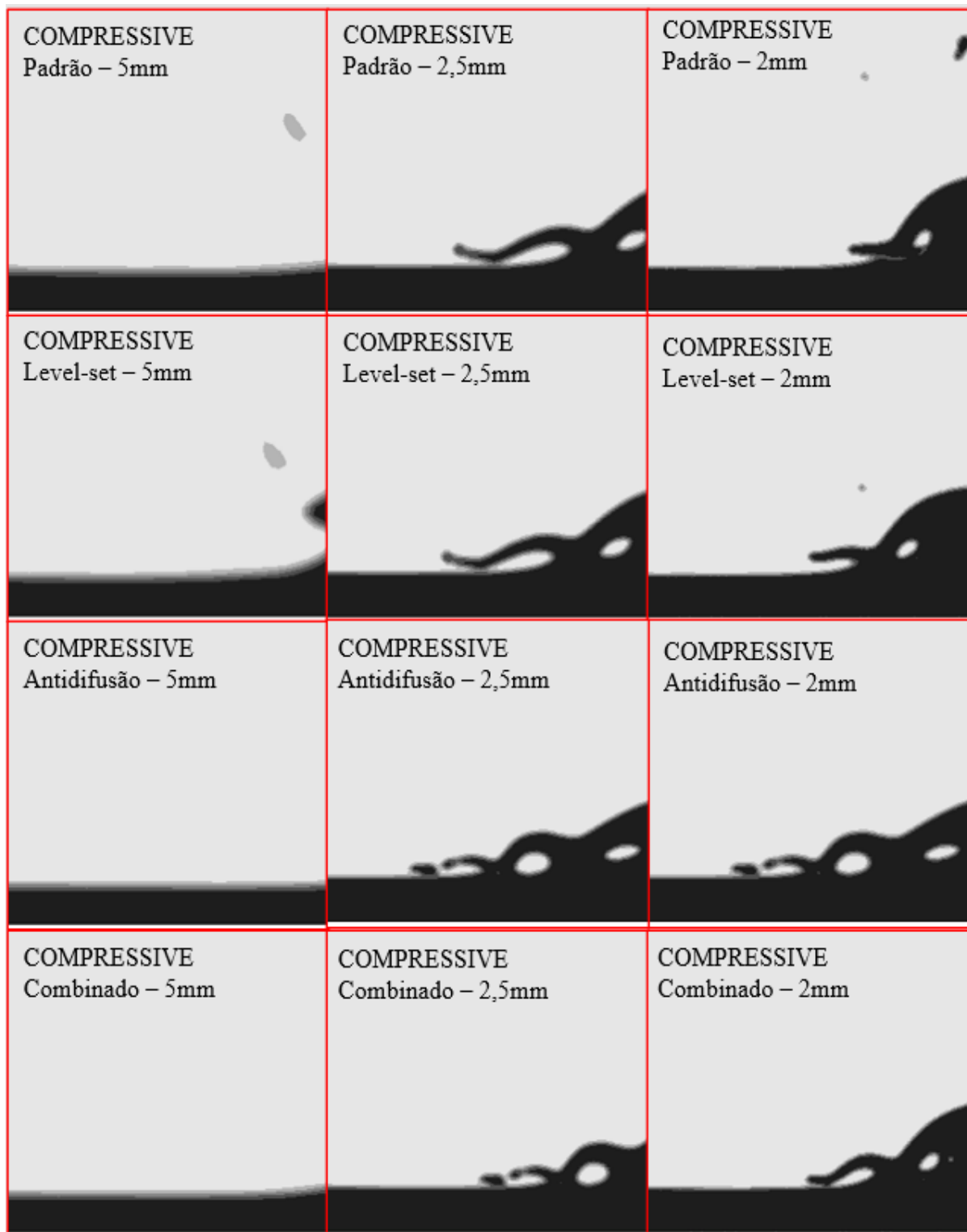
Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 17 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função CICSAM.



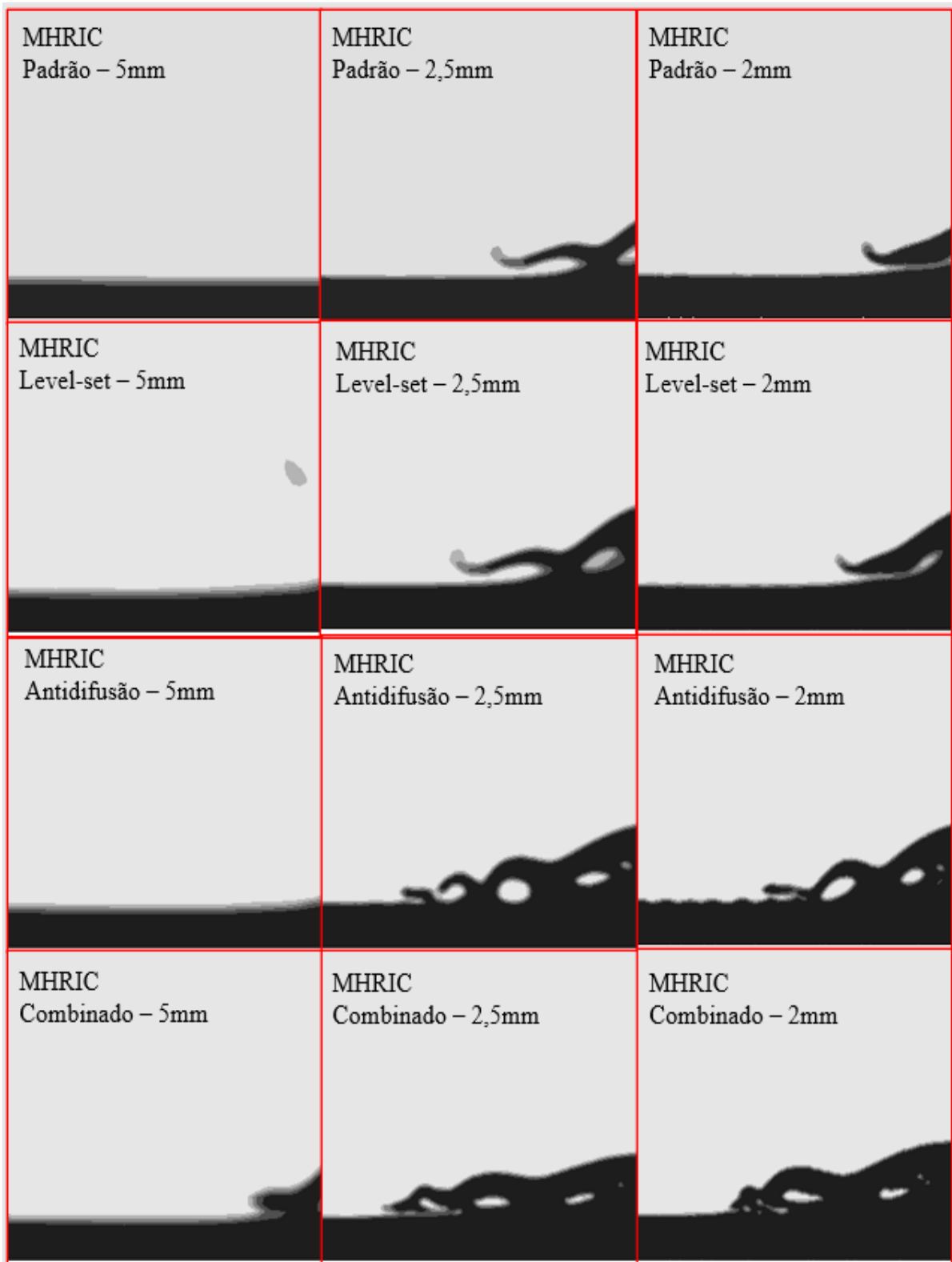
Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 18 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função COMPRESSIVE.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 19 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função MHRIC.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Figura 20 – Comparativo entre as malhas da resolução da interface para a função PLIC.



Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Por meio da análise qualitativa das imagens percebe-se, de forma geral, que os resultados para a malha mais grosseira (5 mm) em todas as funções de interpolação apresentaram uma falta de nitidez na interface, apresentando mais tons da cor cinza. No entanto, ainda assim, a função PLIC com a malha de 5 mm mostrou melhor nitidez na interface em relação as outras três funções. A função MHRIC com implementação combinada dos métodos *LS* e *AD* na malha de 5 mm, apresentou uma boa definição na interface, entretanto, não tão nítida quanto o PLIC. Outro aspecto a ser destacado na malha de 5 mm é que para as funções COMPRESSIVE e MHRIC o fluido tem um atraso no instante de impacto com relação às outras abordagens, enquanto as demais funções no tempo de 1 já completaram o processo de retorno da pluma, as funções COMPRESSIVE e MHRIC ainda não o fizeram, demonstrando uma interferência do campo de frações volumétricas distorcido pela difusão numérica no campo de velocidade do escoamento. Isso evidencia uma velocidade média interfacial mais baixa ao longo do período de tempo analisado.

Para a malha de 2,5 mm é notório que houve uma melhora da difusão numérica em relação a malha de 5 mm em todas as funções de interpolação. Nota-se também que o uso do LS e da AD apresentou melhoras nas funções CICSAM, COMPRESSIVE e MHRIC, no entanto, essa melhora não é expressiva ou suficiente para apresentar equivalência com o PLIC.

O comparativo entre para a resolução da interface da malha de 2 mm mostrou o melhor resultado em todas as funções de interpolação, existe uma melhora significativa nas funções CICSAM, COMPRESSIVE e MHRIC, sobretudo com a implementação combinada dos métodos LS e AD. Convém ressaltar que, assim como nas outras malhas, a função PLIC apresentou melhor qualidade de resolução na interface na malha de 2 mm, evidenciando a semelhança da interface em todas as modificações dessa função, de modo que houve pouca diferença entre as imagens com esta resolução de malha.

4.2 ASPECTOS NUMÉRICOS QUANTITATIVOS

Nesta seção os resultados da simulação são analisados de acordo com o tempo computacional e a estabilidade numérica, por meio da verificação do

número de passos de tempo e iterações totais. A comparação da estabilidade numérica da simulação é importante porque também interfere na escolha da função de interpolação.

4.2.1 Comparação dos aspectos numéricos quantitativos

As Tabelas 4 a 7 apresentam uma comparação dos aspectos numéricos quantitativos de todas as funções testadas. À medida que o refinamento da malha aumenta, o tempo computacional aumenta significativamente em todos os casos, assim como o número de passos de tempo. Isso é esperado devido à natureza auto-adaptativa da função de passos de tempo selecionada no Ansys-Fluent, pois, à medida que o tamanho da malha fica menor, o número de Courant força o *time step* a ser reduzido de forma equivalente, causando o aumento no número total de intervalos de tempo. O número médio de iterações por *time step* não apresenta uma correlação direta com o tamanho da malha, exceto pelo fato de que, em quase todas as simulações, o tamanho da malha de 2,5 mm apresenta o maior número de iterações por intervalo de tempo. A única exceção é a simulação MHRIC com AD. Os tempos de computação são exibidos em segundos, e o computador usado para as simulações tem um processador AMD com arquitetura Zen 3, dispondo de 24 núcleos e 128 Gb de RAM DDR4 rodando a 3200 MHz; a estação de trabalho foi usada exclusivamente para essas simulações.

Tabela 4 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação padrão.

Função			Tempo Computacional [s]	Número de <i>time steps</i>	Número médio de iterações por <i>time step</i>
PLIC	Tamanho da Malha (mm)	5	429	5837	6.50
		2.5	2858	8988	10.57
		2	7285	15988	9.84
COMPRESSIVE	Tamanho da Malha (mm)	5	691	9429	4.89
		2.5	2684	14383	5.68
		2	7399	23531	5.59
CICSAM	Tamanho da Malha (mm)	5	478	8896	4.34
		2.5	3339	13473	6.61
		2	6573	21802	6.17
M-HRIC	Tamanho da Malha (mm)	5	692	10436	4.24
		2.5	2792	15320	5.43
		2	6196	24176	4.78

Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Tabela 5 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação com *level-set*.

Função			Tempo Computacional [s]	Número de <i>time steps</i>	Número médio de iterações por <i>time step</i>
PLIC	Tamanho da Malha (mm)	5	1246	6380	6.68
		2.5	4750	9006	10.47
		2	9580	15206	9.77
COMPRESSIVE	Tamanho da Malha (mm)	5	1595	9837	5.14
		2.5	4589	16289	5.49
		2	10435	31284	4.43
CICSAM	Tamanho da Malha (mm)	5	1262	9428	4.28
		2.5	4300	12968	7.43
		2	9346	21090	6.91
M-HRIC	Tamanho da Malha (mm)	5	1443	9837	5.10
		2.5	4318	15138	5.58
		2	9042	25593	4.64

Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Tabela 6 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação com antidifusão.

Função			Tempo Computacional [s]	Número de <i>time steps</i>	Número médio de iterações por <i>time step</i>
PLIC	Tamanho da Malha (mm)	5	544	5363	7.42
		2.5	3215	8865	10.87
		2	7923	13542	10.77
COMPRESSIVE	Tamanho da Malha (mm)	5	569	8215	4.63
		2.5	2900	10507	9.14
		2	6957	17179	8.74
CICSAM	Tamanho da Malha (mm)	5	344	4339	6.75
		2.5	3567	10189	9.66
		2	7220	20564	7.21
M-HRIC	Tamanho da Malha (mm)	5	462	5637	5.62
		2.5	3616	12367	7.44
		2	6951	16033	9.18

Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Tabela 7 – Resultados qualitativos e quantitativos para cada função de interpolação com antidifusão combinada com *level-set*.

Função			Tempo Computacional [s]	Número médio de iterações por <i>time step</i>	Número médio de iterações por <i>time step</i>
PLIC	Tamanho da Malha (mm)	5	927	5410	7.10
		2.5	3719	8827	10.86
		2	8976	13201	10.74
COMPRESSIVE	Tamanho da Malha (mm)	5	911	6623	5.25
		2.5	3932	10348	9.22
		2	8678	22660	5.63
CICSAM	Tamanho da Malha (mm)	5	859	5369	6.70
		2.5	4676	9744	10.61
		2	9117	15930	9.98
M-HRIC	Tamanho da Malha (mm)	5	885	5369	6.70
		2.5	4685	9744	10.61
		2	9215	15930	9.85

Fonte: Elaborada pela Autora, 2023.

Os resultados apresentados nas tabelas 4 a 7 sobre a comparação dos aspectos quantitativos indicam que o uso combinado dos algoritmos complementares LS e AD pode melhorar o desempenho computacional e a qualidade da interface para as funções de interpolação, com exceção do PLIC que não tem uma interferência significativa por ser um método geométrico.

A melhoria de desempenho proporcionada pelo uso dos algoritmos AD e LS indica que, para problemas que têm um estado de escoamento bifásico estável e constante, como os padrões de escoamento bifásico segregados em tubulações, é possível tirar proveito desses algoritmos. Para as simulações transientes, o aprimoramento não é suficiente para superar a qualidade interfacial e a estabilidade da formulação totalmente geométrica (PLIC).

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho realizou uma análise qualitativa da resolução interfacial, juntamente com uma avaliação de dois aspectos numéricos, o tempo computacional e a estabilidade numérica, de quatro funções de interpolação: PLIC, CICSAM, MHRIC e COMPRESSIVE. O problema selecionado para o estudo de casos é uma ruptura de barragem de um fluido não-newtoniano (de reologia viscoplástica) com a presença de um obstáculo.

A influência de algoritmos complementares, como *level-set* e antidifusão, também foi avaliada, indicando que seu uso pode melhorar substancialmente a qualidade interfacial e a nitidez das funções de interpolação não geométricas (CICSAM, MHRIC e COMPRESSIVE) para qualidade e nitidez comparável ao PLIC. Ainda assim, a abordagem geométrica mostrou resultado melhor em relação às outras funções na configuração padrão, uma vez que a função PLIC, apesar de ser a função teoricamente mais cara computacionalmente, apresenta a melhor solução mesmo com a malha mais grosseira, apresentando pouca diferença entre as soluções.

Dessa forma, o resultado considerado padrão para a solução (malha de 2 mm para a função PLIC) é semelhante às demais funções de interpolação CICSAM, MHRIC e COMPRESSIVE com o implemento dos algoritmos complementares (LS e AD), apresentando a mesma qualidade interfacial. Assim, em relação ao recurso do *Level-set* e antidifusão, foi possível notar uma melhora substancial nas funções de interpolação não geométricas, principalmente na malha mais grosseira com a função MHRIC utilizando a junção dos algoritmos LS e AD. Esta combinação apresentou uma melhora substancial da qualidade interfacial, gerando uma solução semelhante a função PLIC. Contudo, para as simulações explícitas essas outras funções não são vantajosas do ponto de vista numérico da solução.

Desse modo, é possível concluir que a abordagem geométrica é superior às outras funções na configuração padrão. A análise dos parâmetros quantitativos revela, entretanto, que o aumento do tempo de computação ainda é uma desvantagem da metodologia.

5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como recomendações para trabalhos futuros, é necessário elencar os seguintes aspectos:

- Realizar uma análise em um modelo tridimensional para introdução de uma maior exigência dos algoritmos interfaciais;
- Expandir a análise para outros programas comerciais de CFD, como os da Autodesk, da Altair e da Flow Science, concorrentes da Ansys;
- Avaliar um modelo com problema de pseudo regime permanente, onde exista um estado em que o escoamento pode ser considerado em regime permanente.

REFERÊNCIAS

- Ahmed, D. H., Sung, H. J., & Kim, D. S. (2011). Simulation of non-Newtonian ink transfer between two separating plates for gravure-offset printing. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 32(1), 298–307. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2010.06.011>
- ALVES, Marcus Vinícius Canhoto. Análise e modelagem do bombeamento de óleo em compressores herméticos alternativos para refrigeração doméstica. Florianópolis, 2007. xxi, 131 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
- Aniszewski, W., Ménard, T., & Marek, M. (2014). Volume of Fluid (VOF) type advection methods in two-phase flow: A comparative study. *Comput Fluids*, 97, 52–73.
- Barral, A. A., Minussi, R. B., & Alves, M. V. C. (2019). Comparison of interface description methods available in commercial CFD software. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 12(6), 1801–1812. <https://doi.org/10.29252/JAFM.12.06.29538>
- Bourlioux, A. (1995). A coupled level-set volume-of-fluid algorithm for tracking material interfaces. *Proceedings of the 6th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, 15.
- Caron, P. A., Cruchaga, M. A., & Larreteguy, A. E. (2015). Sensitivity analysis of finite volume simulations of a breaking dam problem. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 25(7), 1718–1745. <https://doi.org/10.1108/HFF-10-2014-0308>
- Chanson, H., Jarny, S., Coussot, P. (2006). Dam break wave of thixotropic fluid. *Journal of Hydraulic Engineering, New York*, 280 – 293.

- Chang, T. J., Kao, H. M., Chang, K. H., & Hsu, M. H. (2011). Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Hydrology*, 408(1–2), 78–90. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2011.07.023>
- Chen, L.-B., & et al. (2022). Effects of convective schemes and geometric reconstruction scheme on interface of multiple melt flows. *Polymer*.
- Cifani, P., Michalek, W. R., Priems, G. J. M., & et al. (2016). A comparison between the surface compression method and an interface reconstruction method for the VOF approach. *Comput Fluids*, 136, 421–435.
- Coyajee, E., & Boersma, B. J.: (2009). Numerical simulation of drop impact on a liquid–liquid interface with a multiple marker front-capturing method. *J. Comput. Phys*, 228, 4444–4467.
- Debiane, K. (2000). *Hydraulique des écoulements laminaires a surface libre dans un canal pour des milieux visqueux ou viscoplastiques. 2000, 275 p. Tese (Doutorado em Mecânica dos Fluidos e Fenômeno de Transporte) - Université Joseph Fourier-Grenoble I, Grenoble, França.*
- Duy, T.-N., Nguyen, V.-T., Phan, T.-H., & et al. (2022). A free surface flow solver based on an efficient improvement to a coupling method for interface computations. *Comput. Math. with Appl.*, 124, 21–41.
- Fluent. (2020). *ANSYS Fluent Workbench Tutorial Guide*. <http://www.ansys.com>
- FLUENT, I. (2023). *User's Guide: An Introduction to Ansys Fluent 2023* (J. E. Matsson, Ed.). Stephen Schroeff.
- Fonseca C. (2008). Uma investigação numérica de escoamentos planares de fluidos Herschel-Bulkley regularizados empregando um método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados. *Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul*.

Fox, R. W., Pritchard, P. J., Mcdonlad, A. T. (2010). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Ltda.

Gonçalves N. (2007). *Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas*.

Gupta, V. K., Khan, M., & Punekar, H. (2016). Development and Application of Interfacial Anti-Diffusion and Poor Mesh Numerics Treatments for Free Surface Flows. *Proceedings - 22nd IEEE International Conference on High Performance Computing Workshops, HiPCW 2015*, 12–18. <https://doi.org/10.1109/HiPCW.2015.12>

Hirt, C. W. , & Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys*, 39, 201–225.

Inácio G. (2018). *Análise numérica do escoamento de fluidos viscoplásticos em canais planos com bifurcação tipo T*.

Issakhov, A., & Zhandaulet, Y. (2020). Numerical study of dam break waves on movable beds for various forms of the obstacle by VOF method. *Ocean Engineering*, 209. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107459>

Issakhov, A., Zhandaulet, Y., & Nogaeva, A. (2018). Numerical simulation of dam break flow for various forms of the obstacle by VOF method. *International Journal of Multiphase Flow*, 109, 191–206. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.08.003>

Jeong, W., & Seong, J. (2014). Comparison of effects on technical variances of computational fluid dynamics (CFD) software based on finite element and finite volume methods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 78, 19–26. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.10.017>

- Karami, H., Torres, C. F., Parsi, M., Pereyra, E., & Sarica, C. (2014). CFD simulations of low liquid loading multiphase flow in horizontal pipelines. *American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division (Publication) FEDSM*, 2. <https://doi.org/10.1115/FEDSM2014-21856>
- Klostermann, J., Schaake, K., & Schwarze, R. (2013). Numerical simulation of a single rising bubble by VOF with surface compression. *Int J Numer Methods Fluids.* , 71, 960–980.
- Malekmohammadi, S., Naccache, M. F., Frigaard, I. A., & Martinez, D. M. (2010). Buoyancy driven slump flows of non-Newtonian fluids in pipes. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 72(3–4), 236–243. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2010.03.024>
- Malheiro, J. (2018). *Simulação computacional de uma válvula Loop-Seal acoplada a leito fluidizado circulante.*
- MALISKA, C. R. (2004). *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas.* LTC - Livros Técnicos e Científicos.
- Minussi, R. B. (2007). Rompimento de barreiras: análise experimental e numérica na previsão de velocidades de propagação de frentes de material hiperconcentrado.
- Minussi, R. B., De, G., & Maciel, F. (2012). *Numerical Experimental Comparison of Dam Break Flows with non-Newtonian Fluids: Vol. XXXIV (Issue 2).* <https://doi.org/https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000200008>
- Noh, W. F., & Woodward, P.: (1976). SLIC (simple line interface calculation). *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics.*

- Nsom, B., Debiante, K., Piau, J. M. (2000). Bed slope effect on dam break problem. *Journal of Hydraulic Research, Delft*, v.38, n.6, p. 459 – 464.
- Osher, S. , & Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys*, 79, 12–49.
- Pak, B., Cho, Y. I., & Choi, S. U. S. (1990). SEPARATION AND REATTACHMENT OF NON-NEWTONIAN FLUID FLOWS IN A SUDDEN EXPANSION PIPE. In *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*.
- Papanastasiou, T. C. (1987). Flows of materials with yield. *J Rheol.* , 31, 385–404.
- Patankar, S. V, & Spalding, D. B. (1972). *A CALCULATION PROCEDURE FOR HEAT, MASS AND MOMENTUM TRANSFER IN THREE-DIMENSIONAL PARABOLIC FLOWS: Vol. IS*. Pergamon Press.
- Piau, J. M. (1996). Equations of plastic flow for yield stress fluid in a long domain – application to flow on an inclined plane. *Journal Rheology, New York*, n. 40, p. 711 - 723.
- Piau, J. M., DEBIANE, K., (2005). Consistometers rheometric of power-law viscous fluids. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics, Amsterdam*, v.127, p. 213– 224.
- PHAM, T. Q. D., JEON, J., & CHOI, S. (2020). Quantitative comparison between volume-of-fluid and two-fluid models for two-phase flow simulation using OpenFOAM. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 34, 1157–1166.
- RHIE, C. M., & CHOW, W.-Liang. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21, 1525–1532.
- Rosa, E. S. (2012). *Conceitos Básicos em escoamentos Multifásicos*. (E. S. Rosa, Ed.). Bookman.

- Sáo Y. (2021). *Investigação numérico-experimental da influência de efeitos de inércia em escoamentos de fluidos viscoplásticos modelados como ruptura de barragem.*
- SAVAGNAGO, Vítor., & ALVES, M. V. Canhoto. (2021). Numerical Simulation of Churn and Annular Transient Flows. *Springer International Publishing*, 343–354.
- Scardovelli, R., & Zaleski, S. (1999). Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 31, 567–630.
- SO, K. K., HU, X. Y., & ADAMS, N. A. (2011). Anti-diffusion method for interface steepening in two-phase incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, 230, 5155–5177.
- Tembely, M., Vadillo, D., Mackley, M. R., & Soucemarianadin, A. (2012). The matching of a “one-dimensional” numerical simulation and experiment results for low viscosity Newtonian and non-Newtonian fluids during fast filament stretching and subsequent break-up. *Journal of Rheology*, 56(1), 159–183. <https://doi.org/10.1122/1.3669647>
- Walters, D. K., & Wolgemuth, N. M. (2009). A new interface-capturing discretization scheme for numerical solution of the volume fraction equation in two-phase flows. *Int J Numer Methods Fluids*, 60, 893–918.
- Wang, Z., Yang J., & Stern, F. (2012). A new volume-of-fluid method with a constructed distance function on general structured grids. *J. Comput. Phys*, 231, 3703–3722.
- Wardle, K. E., & Weller, H. G. (2013). Hybrid multiphase CFD solver for coupled dispersed/segreated flows in liquid-liquid extraction. *International Journal of Chemical Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2013/128936>