

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM**

RAFAEL YUKIO KONO SHIMOMURA

**METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DE UM TAILBOOM EM MATERIAL
COMPÓSITO DE AERONAVES RÁDIO CONTROLADAS**

JOINVILLE

2023

RAFAEL YUKIO KONO SHIMOMURA

**METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DE UM TAILBOOM EM MATERIAL
COMPÓSITO DE AERONAVES RÁDIO CONTROLADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

JOINVILLE

2023

RAFAEL YUKIO KONO SHIMOMURA

**METODOLOGIA PARA AVALIAÇÃO DE UM TAILBOOM EM MATERIAL
COMPÓSITO DE AERONAVES RÁDIO CONTROLADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Ricardo De Medeiros
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Membros:

Prof. Me. Rafael Beck
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Me. Kelvin Masakazu Kuroki Iwasaki
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Joinville, 07 de julho de 2023

A todos que já participaram e participarão da
Equipe Albatroz Aerodesign

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Helena e Hiroci, e meus irmãos, Bruno, Lucas e Leonardo pelo apoio incondicional, por compreenderem as minhas ausências, por me incentivarem e por acreditarem no meu potencial.

Gostaria de agradecer a Equipe Albatroz pela oportunidade de crescimento profissional, por todo conhecimento adquirido ao longo dos anos e pelas amizades que fiz ao longo dos anos de projeto, em especial aos membros de 2022 que me acompanharam durante a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos, que estiveram ao meu lado durante todo o percurso da minha jornada acadêmica.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Professor Dr. Ricardo de Medeiros, pela dedicação, paciência e conhecimento compartilhado ao longo de todo o processo de elaboração deste trabalho, sua orientação foi fundamental para minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação de Santa Catarina pelo suporte financeiro (FAPESC - 2017TR1747, 2019TR779 e 2021TR843).

RESUMO

Materiais compósitos são aplicados nas mais diversas áreas da engenharia, como no ramo aeronáutico, automobilístico e aeroespacial devido à relação de alta rigidez com baixa massa. Além disso, pode-se alterar as disposições do material de acordo com o caso analisado. Assim, este trabalho propõe uma metodologia de avaliação de esforços combinados em estruturas construídas por paredes de laminados de madeira balsa e lâminas de carbono/epóxi, utilizadas como *tailboom* de aeronaves participantes da competição SAE Brasil Aerodesign. A ferramenta foi desenvolvida afim de estudar a aeronave da classe regular da Equipe Albatroz Aerodesign 2022, na qual consideram-se os casos críticos de voo como forma de assegurar a integridade da estrutura durante toda a missão. Para o procedimento, o método dos elementos finitos foi utilizado em uma análise inicial dos carregamentos nos pontos críticos da estrutura. Então, a geometria foi otimizada através de um código desenvolvido na linguagem Python e utilizando algoritmo genético, onde as análises se fundamentam na teoria clássica dos laminados para placas de material compósito visando a determinação da melhor orientação das camadas e a dimensão da seção transversal da estrutura. Em seguida, foi realizada uma nova simulação afim de avaliar o novo empilhamento/dimensão. Por fim, as etapas se repetem até que seja alcançada a melhor combinação entre empilhamento do laminado e dimensões da seção transversal do componente. Os resultados obtidos apresentaram uma diferença de aproximadamente 100% entre os dados resultantes de margem de segurança do algoritmo genético e da simulação computacional, os quais são justificados pela consideração de utilizar um empilhamento arbitrário para aquisição dos carregamentos fornecidos para a otimização e pelo uso dos esforços referentes à seção em que a estrutura é engastada. Porém, os valores finais são calculados após a segunda simulação e apresentaram valores dentro dos limites de projeto, ou seja, a utilização da ferramenta se apresenta viável dentro do projeto, principalmente na etapa preliminar em que é necessário determinar a geometria de forma rápida.

Palavras-chave: Materiais compósitos. Aerodesign. Otimização. Simulação computacional. Teoria clássica dos laminados.

ABSTRACT

Composite materials are applied in various engineering fields, such as the aeronautical, automotive, and aerospace sectors, due to their high stiffness-to-mass ratio. Furthermore, the material arrangements can be modified according to the specific case under analysis. Thus, this work proposes a methodology for evaluating combined loads in structures constructed with laminated walls of balsa wood and carbon/epoxy layers used as tailbooms in aircraft participating in the SAE Brazil Aerodesign competition. The tool was developed to study the regular class aircraft of the Equipe Albatroz Aerodesign 2022, considering critical flight cases to ensure structural integrity throughout the entire mission. For the procedure, the finite element method was used to initially analyze the loadings at critical points of the structure. Then, the geometry was optimized using a code developed in the Python language and utilizing a genetic algorithm, where the analyses are based on the classical lamination theory for composite material plates, aiming to determine the best layer orientation and cross-sectional dimensions of the structure. Subsequently, a new simulation was performed to evaluate the new stacking/dimensions. Finally, the steps are repeated until the best combination of laminate stacking and component cross-sectional dimensions is achieved. The obtained results showed an approximately 100% difference between the safety margin data resulting from the genetic algorithm and the computational simulation. This difference is justified by considering the use of an arbitrary stacking for acquiring the loadings provided for optimization and by the use of forces related to the section where the structure is fixed. However, the final values are calculated after the second simulation and showed values within the design limits. In other words, the use of the tool proves to be feasible within the project, especially in the preliminary stage where it is necessary to determine the geometry quickly.

Keywords: Composite materials. Aerodesign. Optimization. Computer simulation. Classical lamination theory .

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Equipe Albatroz AeroDesign	13
Figura 2 – Aeronave da classe regular 2022	14
Figura 3 – Aeronave da classe regular 2019	15
Figura 4 – Tensões em um elemento infinitesimal	17
Figura 5 – Rotação do sistema de coordenadas	20
Figura 6 – Laminado simétrico	25
Figura 7 – Deformações da placa no plano XZ	26
Figura 8 – Definição das cotas para o laminado	29
Figura 9 – Elemento quadrático	33
Figura 10 – Fluxograma representativo de um processo de otimização	36
Figura 11 – Máximos locais e global	37
Figura 12 – Direções de maiores taxas de variação	38
Figura 13 – Ciclo do AG	39
Figura 14 – Exemplo do método da roleta	40
Figura 15 – Exemplo do método de torneio	40
Figura 16 – Recombinação por 1 ponto	41
Figura 17 – Recombinação por 2 pontos	41
Figura 18 – Recombinação uniforme	41
Figura 19 – exemplo de mutação	41
Figura 20 – Fluxograma representativo do processo de otimização	44
Figura 21 – Fluxograma representativo do funcionamento do algoritmo genético	46
Figura 22 – Modelo computacional	47
Figura 23 – Malha de elementos rígidos	48
Figura 24 – Concentrações de esforços internos.	49
Figura 25 – Gráfico para análise de convergência de carregamentos	52
Figura 26 – Resultados para seção de 42 mm	53
Figura 27 – Resultados para seção de 42 mm	53
Figura 28 – Resultados para seção de 36 mm	54
Figura 29 – Resultados para o caso 1 da seção final	55
Figura 30 – Resultados para o caso 2 da seção final	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tensor e notação contraída para tensões e deformações	17
Tabela 2 – Valores limites de resistência para materiais ortotrópicos	21
Tabela 3 – Propriedades dos materiais utilizados	45
Tabela 4 – Definição dos esforços internos	48
Tabela 5 – Propriedades dos materiais utilizados	50
Tabela 6 – Resultados da convergência de malha	51
Tabela 7 – Valores limites para a otimização	52
Tabela 8 – Intervalos de otimização utilizados no AG	52
Tabela 9 – Resultados do AG	53
Tabela 10 – Resultados após simulação	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SAE	Sociedade de Engenheiros da Mobilidade
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
EH	Estabilizador horizontal
EV	Estabilizador vertical
EPT	Estado plano de tensão
ASTM	<i>American Society for Testing Materials</i>
FS	Fator de segurança
MS	Margem de segurança
SLC	<i>Standard Laminate Code</i>
MEF	Método dos elementos finitos
PTV	Princípio dos trabalhos virtuais
AG	Algoritmo genético

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	Tensão
σ_i	Tensão normal na direção i
τ_{ij}	Tensão cisalhante no plano i - j
ε	Deformação
ε_i	Deformação normal no plano i
γ_j	Deformação cisalhante no plano i - j
C	Matriz de rigidez do material
S	Matriz de flexibilidade do material
Q	Matriz de rigidez reduzida
E_1	Módulo de elasticidade longitudinal na direção 1
E_2	Módulo de elasticidade longitudinal na direção 2
E_3	Módulo de elasticidade longitudinal na direção 3
G_{12}	Módulo de elasticidade longitudinal no plano 1-2
G_{23}	Módulo de elasticidade longitudinal no plano 2-3
G_{31}	Módulo de elasticidade longitudinal no plano 3-1
ν_{12}	Coefficiente de Poisson no plano 1-2
ν_{13}	Coefficiente de Poisson no plano 1-3
ν_{21}	Coefficiente de Poisson no plano 2-1
ν_{23}	Coefficiente de Poisson no plano 2-3
ν_{31}	Coefficiente de Poisson no plano 3-1
ν_{32}	Coefficiente de Poisson no plano 3-2
T	Matriz de transformação
θ	Inclinação entre os eixos 1 e X
\bar{Q}	Matriz de rigidez transformada
R	Matriz de Reuter
X_t	Limite de resistência à tração na direção 1
X_c	Limite de resistência à compressão na direção 1
Y_t	Limite de resistência à tração na direção 2
Y_c	Limite de resistência à compressão na direção 2
S	Limite de resistência ao cisalhamento no plano 1-2

u	Deslocamento de um ponto na direção X
v	Deslocamento de um ponto na direção Y
w	Deslocamento de um ponto na direção Z
u^0	Deslocamento de um ponto no plano de referência na direção X
v^0	Deslocamento de um ponto no plano de referência na direção Y
ε_x^0	Deformação normal de um ponto no plano de referência na direção X
ε_y^0	Deformação normal de um ponto no plano de referência na direção Y
γ_{xy}^0	Deformação angular de um ponto no plano de referência no plano X-Y
κ_x	Curvatura do plano de referência em relação ao eixo X
κ_y	Curvatura do plano de referência em relação ao eixo Y
κ_{xy}	Cisalhamento do plano de referência no plano X-Y
N_x	Força normal na direção X
N_y	Força normal na direção Y
N_{xy}	Força cisalhante no plano X-Y
M_x	Momento fletor em relação ao eixo X
M_y	Momento fletor em relação ao eixo Y
M_{xy}	Momento torsor no plano X-Y
A	Matriz de rigidez extensional
B	Matriz de rigidez de acoplamento
D	Matriz de rigidez flexional
h_k	Altura da k-ésima lâmina
U^e	Deslocamentos nodais
B_f^e	Matriz de deformação membrana-flexão
B_c^e	Matriz de deformação cisalhante
K_f^e	Matriz de rigidez do laminado para esforços coplanares
K_f^c	Matriz de rigidez do laminado para esforços transversais
F^e	Vetor forças nodais
w_{fus}	Largura da fuselagem
l_{tdc}	Comprimento do <i>tailboom</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MACROMECAÂNICA DE UMA LÂMINA	16
2.1	RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA MATERIAIS ELÁSTICO-LINEARES	16
2.2	ROTAÇÃO DA RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO	19
2.3	RESISTÊNCIA DE UMA LÂMINA ORTOTRÓPICA	21
2.4	CRITÉRIOS DE FALHA	22
2.4.1	Tsai-Hill	22
2.4.2	Tsai-Wu	22
3	ANÁLISE DE UM LAMINADO	25
3.1	TEORIA CLÁSSICA DOS LAMINADOS	25
3.2	TIPOS ESPECIAIS DE LAMINADOS	29
3.2.1	Laminados simétricos	29
3.2.2	Laminados anti-simétricos	30
3.2.3	Laminados cruzados	30
3.2.4	Laminados angulares	30
3.2.5	Laminados quasi-isotrópicos	30
3.2.6	Laminados balanceados	31
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	32
4.1	PLACAS DE MATERIAL COMPÓSITO	32
5	OTIMIZAÇÃO	36
5.1	ALGORITMO GENÉTICO	38
5.1.1	<i>Função fitness</i>	39
5.1.2	Critérios de seleção	39
5.1.3	Recombinação	40
5.1.4	Mutação	41
6	METODOLOGIA	43
6.1	ALGORITMO	44
6.2	ANÁLISE COMPUTACIONAL	47
6.3	PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	49
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	51
7.1	ESTUDO DE CASO	51
8	CONCLUSÃO	57
8.1	TRABALHOS FUTUROS	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos são caracterizados pela união de dois ou mais constituintes diferentes, associados em escala macroscópica, para funcionarem como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes apresenta individualmente. Além disso, essa classe de materiais é representada principalmente pelas estruturas laminadas formadas por matriz e reforço, as quais possuem uma orientação preferencial para sua utilização. Dessa forma, esse tipo de material destaca pela possibilidade de se manipular as orientações das lâminas de forma a melhorar a rigidez e a resistência mecânica da estrutura (MENDONÇA, 2005). A partir do surgimento dessa classe de material, áreas como a aeronáutica, aeroespacial, automobilística sofreram grandes avanços tecnológicos (NETO; PARDINI, 2006).

Na graduação, uma das oportunidades de se aperfeiçoar na área de compósitos são os projetos de ensino, como o Aerodesign e o Fórmula SAE. Isso acontece, pois possuem como principal objetivo participar de competições nacionais, as quais exigem estruturas leves que assegurem a integridade do veículo durante os testes.

A Competição SAE Brasil Aerodesign, um programa em que coloca os estudantes de engenharia para desenvolver todas as etapas de um projeto de aeronáutica, desde a elaboração teórica até a construção e testes em voo da aeronave (SAE, 2023). A UDESC é representada pela Equipe Albatroz Aerodesign (Figura 1), que participa de duas das três classes da competição, a regular e a micro. No ano de 2023, a classe regular apresenta como principais imposições, a restrição das dimensões do avião e a necessidade de sobrevoar um obstáculo durante a corrida de decolagem. Já para a classe micro, o avião precisa decolar de uma mesa ao mesmo tempo que seja possível desmontá-lo e armazená-lo dentro de uma caixa (SAE, 2023). Apesar de contarem com requisitos de projeto diferentes, a redução do peso vazio para ganho de carga paga é um objetivo em comum.

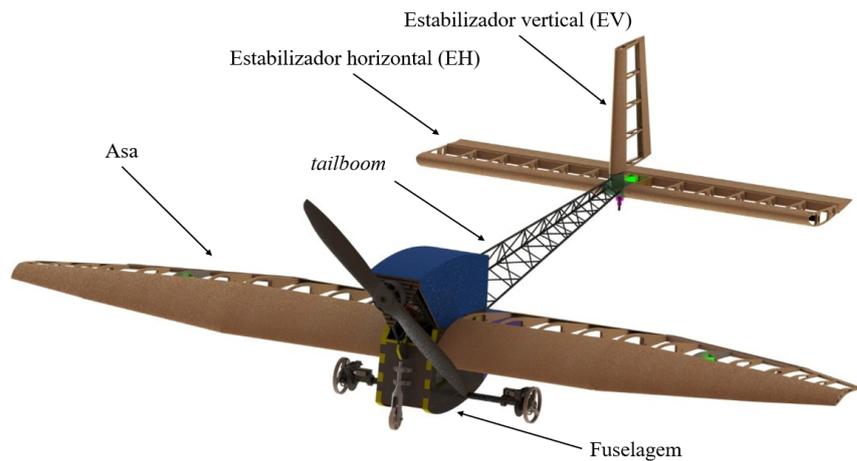
Figura 1 – Equipe Albatroz AeroDesign



Fonte: Equipe Albatroz (2022).

Dessa forma, a procura por materiais e métodos de reduzir a massa e ao mesmo tempo garantir a integridade da aeronave durante todo o voo são os principais focos dos membros da área estrutural do projeto, para isso busca-se utilizar materiais compósitos nos seus elementos. A Figura 2 apresenta os principais componentes da aeronave de 2022 da classe regular fabricados em materiais compósitos, tanto naturais como madeira, quanto compósitos poliméricos reforçados por fibra ou estruturas sanduíches.

Figura 2 – Aeronave da classe regular 2022



Fonte: Adaptado de Linhares e Souza (2022).

O *tailboom* é a estrutura que conecta a fuselagem aos estabilizadores, os quais são as superfícies de controle da aeronave e são classificados em vertical e horizontal. Na Figura 2 são indicados os três componentes: o estabilizador vertical (EV) é dividido em duas partes, uma fixa e outra móvel, com a segunda sendo chamada de leme que tem como função garantir o controle látero-direcional da aeronave a partir do aumento da força de sustentação proporcionada pelo EV. De forma similar, o estabilizador horizontal (EH), possui uma parte móvel denominada profundor com o objetivo de controlar o movimento longitudinal na aeronave (ROSA; TOPOROSKI, 2005).

Diante do exposto, este trabalho foi motivado pelo fato de a aeronave desenvolvida pela classe regular da Equipe Albatroz Aerodesign em 2019 (Figura 3), ter apresentado problemas de falta de rigidez e peso excessivo em seu *tailboom*. Dessa forma, buscar-se-á desenvolver uma metodologia de otimização do *tailboom* fabricado em material compósito. Para isso, através de simulações em elementos finitos, por meio do *software* Abaqus[®], fez-se uma análise inicial do laminado, onde são retirados os carregamentos internos para cada ponto na seção crítica. Em seguida, por meio de um algoritmo genético (AG), baseado na teoria clássica dos laminados, são estudadas diferentes combinações de empilhamentos de cada parede da estrutura em busca da configuração que melhor atenda aos critérios impostos. Ao final da avaliação, é realizada uma nova simulação com a configuração definida para verificar os resultados obtidos na etapa de otimização. Por fim, reduz-se a seção transversal da estrutura para um nova análise, até que se encontre as menores dimensões.

Figura 3 – Aeronave da classe regular 2019



Fonte: Equipe Albatroz (2019).

2 MACROMECAÂNICA DE UMA LÂMINA

A lâmina representa uma das estruturas mais simples dentro do estudo de materiais compósitos e uma análise mais detalhada é de suma importância para entender estruturas mais complexas como um laminado. A partir disso, realizar-se-á um estudo macroscópico de uma lâmina para descrever a resposta da lâmina quando solicitada por esforços combinados. Esta análise considera as propriedades mecânicas médias aparentes do compósito, desde que o material se encontre no regime elástico-linear. Os ensaios mecânicos com corpos de prova baseado em normas são uma das principais maneiras de determinar essas propriedades.

2.1 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA MATERIAIS ELÁSTICO-LINEARES

Segundo Hibbeler (2011), ao aplicar uma força externa a um sólido, esse produzirá esforços internos com o objetivo de manter sua integridade estrutural. Ao analisar um ponto do corpo, as forças geram tensões, as quais, por sua vez, ocasionam deformações responsáveis pela alteração da forma e tamanho da peça. Dessa forma, as tensões para um elemento infinitesimal, conforme a Figura 4, podem ser escritas na forma do seguinte tensor

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

de maneira similar, as deformações são representadas por

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

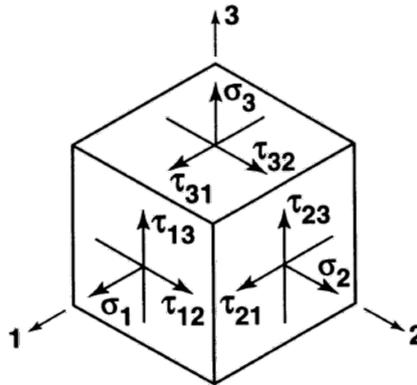
Uma vez que tanto o tensor de tensão como o de deformação são simétricos, utiliza-se a notação de Voigt para reduzir a ordem do tensor resultando nos seguintes vetores:

$$\sigma = \left[\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \tau_{23} \quad \tau_{31} \quad \tau_{12} \right]^T, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31} \quad \gamma_{12} \right]^T. \quad (4)$$

onde a relação entre a notação tensorial com a notação contraída é apresentada na tabela 1. Os termos σ_i , τ_{ij} , ε_i e γ_{ij} representam, respectivamente, tensões normais na direção i , tensões cisalhantes no plano ij , deformações normais na direção i , deformações angulares no plano ij .

Figura 4 – Tensões em um elemento infinitesimal



Fonte: Jones (1999).

Tabela 1 – Tensor e notação contraída para tensões e deformações

Tensão		Deformação	
Notação tensorial	Notação contraída	Notação tensorial	Notação contraída
σ_{11} (σ_1)	σ_1	ϵ_{11} (ϵ_1)	ϵ_1
σ_{22} (σ_2)	σ_2	ϵ_{22} (ϵ_2)	ϵ_2
σ_{33} (σ_3)	σ_3	ϵ_{33} (ϵ_3)	ϵ_3
$\tau_{23} = \sigma_{32}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$	ϵ_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\epsilon_{31}$	ϵ_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$	ϵ_6

Fonte: Adaptado de (JONES, 1999).

Na tabela 1, os valores de γ_{ij} representam as deformações cisalhantes de engenharia, enquanto que ϵ_{ij} para $i \neq j$ representa o tensor deformação cisalhante.

De acordo com Mendonça (2005), (3) e (4) se relacionam através da matriz de rigidez do material [C] composta pelos termos C_{ij} , resultando na equação

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

A matriz [C], definida na equação (5), caracteriza um material anisotrópico, o qual não possui planos de simetria, logo são necessários 36 coeficientes independentes para descrever o comportamento do material. Para o caso de existirem três planos ortogonais de simetria, o material é considerado ortotrópico, o qual possui em cada ponto pelo menos um sistema de referência em que as tensões normais ocasionam apenas deformações normais e as tensões

cisalhantes ocasionam apenas deformações cisalhantes. Com isso, [C] se reduz a 9 constantes independentes e a equação (5) é reescrita como,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Segundo Mendonça (2005), as lâminas são classificadas como materiais ortotrópicos transversalmente isotrópicos, pois além da simetria presente nos materiais ortotrópicos, existe uma igualdade entre as propriedades em relação as direções 2 e 3. Portanto, necessita-se de apenas 5 constantes para analisar o material, o que permite a simplificação de [C] para a matriz,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Como [C] é uma matriz não singular em todas as relações apresentadas anteriormente, é possível invertê-la para adquirir a matriz de flexibilidade do material [S] e a relação deformação-tensão para materiais ortotrópicos

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

As componentes de [S] são mais simples de determinar quando comparadas com as de [C]. Dessa forma, opta-se por utilizar a relação em função da flexibilidade, onde os coeficientes são calculados através das constantes de engenharia. A relação deformação-tensão assim como os valores de S_{ij} definidos por,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ \text{sim.} & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Outra simplificação nas análises acontece quando o ponto está submetido a um estado plano de tensão (EPT), ou seja, as tensões ocorrem em um único plano com as demais tensões sendo nulas. Dessa forma, uma lâmina sobre o plano 1-2 sofre apenas σ_1 , σ_2 e τ_{12} , o que possibilita a reescrita da equação (9) para o EPT resultando em

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ao calcular a inversa de $[S]$, obtém-se a relação tensão-deformação reduzida:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

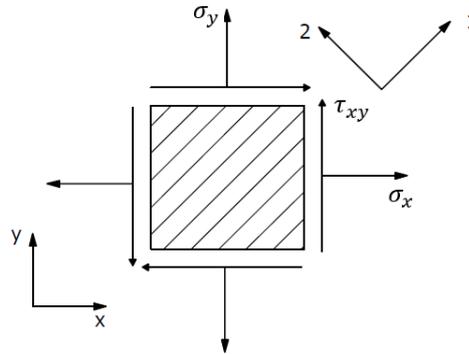
onde, os termos Q_{ij} constituem a matriz de rigidez reduzida $[Q]$ e são calculados da seguinte forma,

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, Q_{66} = G_{12}$$

2.2 ROTAÇÃO DA RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

O comportamento mecânico de materiais ortotrópicos está relacionado com a orientação em que a lâmina se encontra e a orientação na qual os esforços são aplicados. Dessa forma, de acordo com a Figura 5, utilizam-se o sistema de coordenadas global (xyz), no qual se observa a estrutura, e local (123), no qual os eixos estão orientados nas direções principais da lâmina (KAW, 2006).

Figura 5 – Rotação do sistema de coordenadas



Fonte: Fuga (2017).

Para os casos em que as tensões principais não se encontram orientadas com o sistema de coordenadas do material, utiliza-se da matriz de transformação [T],

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (12)$$

em sua forma inversa para relacionar as duas orientações através de

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

De maneira similar à tensão, é possível utilizar a inversa de [T] para as deformações, resultando em

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

porém, devido às diferentes notações para as deformações cisalhantes, faz-se necessário a inclusão da matriz de Reuter,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

o que resulta em

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

A partir das equações (11), (12) e (15) e algumas manipulações algébricas, a relação tensão-deformação para o sistema global a partir das propriedades do material para o sistema local pode ser definida como

$$[\sigma^x] = [T]^{-1}[Q][T]^{-t}[\varepsilon^x], \quad (17)$$

em que $[\bar{Q}]$, chamada de matriz de rigidez transformada é determinada por

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-t}. \quad (18)$$

Por fim, a forma matricial da relação tensão-deformação é representada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

2.3 RESISTÊNCIA DE UMA LÂMINA ORTOTRÓPICA

A determinação dos limites de falha em lâminas ortotrópicas está ligada ao sistema de coordenadas do material, dessa forma, para o estado plano de tensões, são necessários cinco valores limites de tensão, os quais são apresentados na tabela (2).

Tabela 2 – Valores limites de resistência para materiais ortotrópicos

Símbolo	Limite de resistência
X_t	Tração na direção 1
X_c	Compressão na direção 1
Y_t	Tração na direção 2
Y_c	Compressão na direção 2
S	Cisalhante no plano 1-2

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para materiais ortotrópicos, é possível determinar os limites através de ensaios mecânicos, os quais, se realizados de forma correta, fornecem dados de rigidez e resistência (JONES, 1999).

Conforme Neto e Pardini (2006), para materiais compósitos, têm-se as normas da *American Society for Testing and Materials* (ASTM), ASTM D3039 para ensaios de tração, ASTM D3410 para ensaios de compressão e ASTM D3518 para ensaios de cisalhamento.

2.4 CRITÉRIOS DE FALHA

No dimensionamento de estruturas, faz-se uso de critérios de falha específicos, que relacionam as tensões impostas sobre o componente com as tensões-limite do material. Devido às suas características, os materiais ortotrópicos exigem uma análise mais detalhada quando comparada aos materiais isotrópicos (TITA, 2006). Para isso, foram desenvolvidas teorias de falha que levam em consideração todo o conjunto de constantes de engenharia e limites que as lâminas possuem, em que os mais utilizados são os desenvolvidos por Tsai, Hill e Wu (NETO; PARDINI, 2006). Na prática, são utilizados os valores de fator de segurança (FS) e margem de segurança (MS) para verificar além da falha, a resistência do componente e a possibilidade de otimização.

2.4.1 Tsai-Hill

Azzi e Tsai (1965) apresentaram a teoria que Hill desenvolveu a partir de uma modificação do critério de von Mises. Segundo Jones (1999), em 1968, criou-se a teoria de Tsai-Hill, em que Tsai adaptou o critério de Hill para que abordasse apenas lâminas transversalmente ortotrópicas sobre o Estado Plano de Tensões (EPT). O resultado dos estudos foi:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1. \quad (20)$$

Caso a parcela da esquerda da equação (20) seja inferior à 1, é possível determinar o FS pelo seguinte cálculo

$$FS = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}}, \quad (21)$$

já a MS é calculada segundo

$$MS = \frac{1}{FS} - 1. \quad (22)$$

2.4.2 Tsai-Wu

Com o objetivo de melhorar as aproximações dos resultados experimentais, Tsai e Wu (1971), propuseram aumentar o número de termos no critério de Tsai. A forma geral da teoria é demonstrada por

$$\sum_{i=1}^6 F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 F_{ij} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1, \quad (23)$$

em que, $\sigma_4 = \tau_{23}$, $\sigma_5 = \tau_{13}$, $\sigma_6 = \tau_{12}$ e os coeficientes F_i , F_{ij} e F_{ijk} representam tensores de 2ª, 4ª e 9ª ordem. Entretanto, utiliza-se a forma simplificada,

$$\sum_{i=1}^6 F_i \sigma_i + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad (24)$$

uma vez que as constantes F estão associadas à ensaios mecânicos, os quais se tornam cada vez mais complexos e inviabilizam o método em sua forma geral. Já para o EPT, têm-se como resultado

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \tau_{12} + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \tau_{12}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{16} \sigma_1 \tau_{12} + F_{26} \sigma_2 \tau_{12} = 1, \quad (25)$$

em que os termos independentes são determinados através da aplicação de uma tensão não nula, com exceção de F_{12} , termo que necessita de um ensaio biaxial para ser especificado. Para este, Tsai e Hahn, aproximaram seu valor por meio de dados experimentais. A equação (26) expõe a forma final do critério para o EPT

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2 + \left(\frac{1}{X_t X_c} \right) \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma_2^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} = 1, \quad (26)$$

onde,

$$F_1 = \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right), F_{11} = \left(\frac{1}{X_t X_c} \right), F_2 = \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right), F_{22} = \left(\frac{1}{Y_t Y_c} \right),$$

$$F_{66} = \frac{1}{S^2}, F_{12} = -\frac{1}{2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}, F_6 = F_{16} = F_{26} = 0.$$

A equação (26) apresenta uma igualdade a 1, o que indica o limiar da falha da lâmina no ponto analisado. Para o caso de o lado direito da expressão ser maior que 1, a estrutura já atingiu a falha. A terceira possibilidade, em que o lado direito da expressão é menor que 1, possibilidade a determinação do FS e da MS. Para isso, substituí-se as tensões na equação (26) por tensões multiplicadas por uma constante S_f de forma a transformar o ponto de análise em crítico, e obtém-se

$$F_1 S_f \sigma_1 + F_2 S_f \sigma_2 + F_{11} S_f^2 \sigma_1^2 + F_{22} S_f^2 \sigma_2^2 + F_{66} S_f^2 \tau_{12}^2 + F_{12} S_f^2 \sigma_1 \sigma_2 = 1, \quad (27)$$

cujos FS é definido pela menor das soluções apresentadas em

$$S_f = \left| \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4A}}{2A} \right|, \quad (28)$$

em que,

$$A = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

$$B = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2.$$

Já para o cálculo de MS, utiliza-se da equação (29)

$$MS = S_f - 1. \tag{29}$$

No presente trabalho são aplicados apenas os critério de Tsai-Hill e Tsai-Wu. Porém, Jones (1999), Kaw (2006) e Mendonça (2005), apresentam os critérios, como o da Máxima Tensão, da Máxima Deformação, de Hoffman e de Hashin.

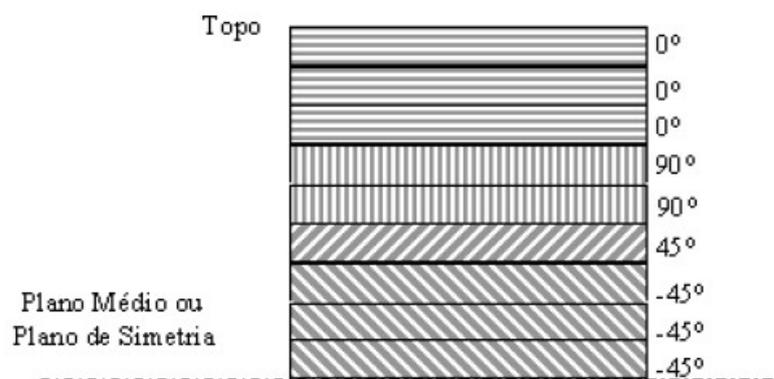
3 ANÁLISE DE UM LAMINADO

O conjunto de lâminas empilhadas em diversas orientações constitui um laminado. Portanto, para realizar um estudo de um laminado, é preciso definir uma referência para o empilhamento de camadas. Segundo Tita (2006), um dos métodos existentes, é o SLC (*Standard Laminate Code*), em que se identifica um laminado a partir de informações como:

- Orientação de uma camada específica com relação aos eixos de referência;
- Número de camadas para cada orientação;
- A sequência de empilhamento para formar o laminado.

Por meio do SLC, é possível representar um mesmo laminado de diversas formas. Por exemplo, o laminado apresentado na Figura 6 pode ser referenciado por $[0_3/90_2/45/-45_3/-45_3/45/90_2/0_3]_T$ ou $[0_3/90_2/45/-45_3]_S$, em que os subíndices numéricos designam o número de camadas na dada orientação, o T que o total de camadas foi apresentado e o S a presença de simetria em relação ao plano médio.

Figura 6 – Laminado simétrico



Fonte: Tita (2006).

3.1 TEORIA CLÁSSICA DOS LAMINADOS

Segundo Mendonça (2005), a teoria clássica dos laminados parte das hipóteses de Kirchhoff-Love para descrever a relação entre carregamentos e deslocamentos para laminados. As hipóteses adotadas são:

- Não há deslizamento ou descolamento entre as lâminas.
- Os deslocamentos são contínuos através das lâminas.
- O laminado é considerado delgado.

- As seções perpendiculares à linha de referência permanecem perpendiculares quando o laminado for estendido ou flexionado ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).
- A espessura é constante e a deformação transversal é nula, ou seja, $\epsilon_z = 0$.

A partir das hipóteses 3 e 5, definem-se as componentes de deslocamentos u , v e w ,

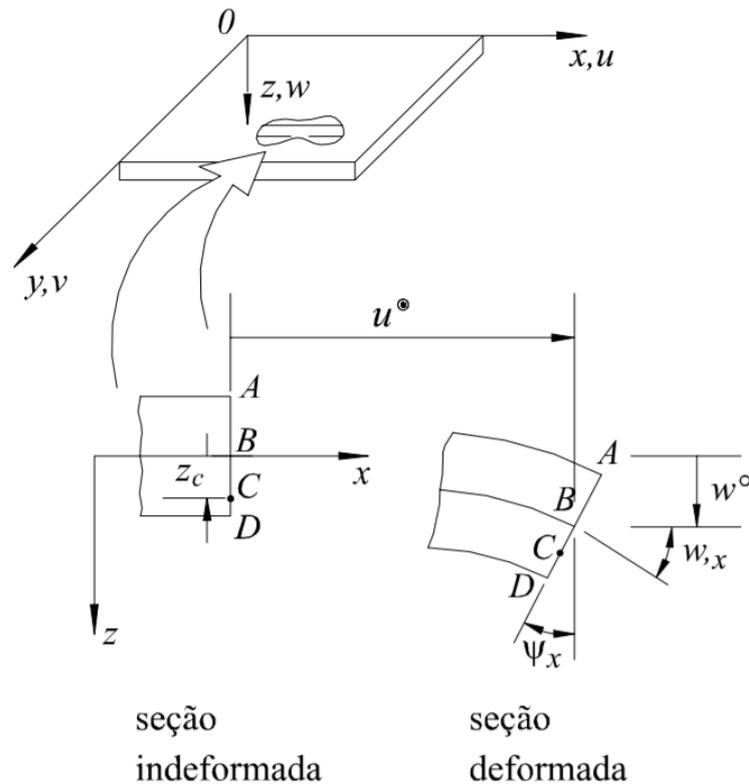
$$u(x, y, z) = u^0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y), \quad (30)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y), \quad (31)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y), \quad (32)$$

em que as duas primeiras representam as relações entre as componentes de deslocamento de um ponto qualquer com as componentes u_o e v_o de um ponto na superfície de referência, já a equação (32) é consequência da inextensividade do segmento normal. A Figura 7 identifica os deslocamentos.

Figura 7 – Deformações da placa no plano XZ



Ao assumir pequenas deformações e rotações, determinam-se as relações deformações-deslocamento,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (33)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (34)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (35)$$

Em seguida, substituem-se as equações (30), (31) e (32) em (33), (34) e (35) para obter

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^0(x,y)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}, \quad (36)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v^0(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}, \quad (37)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v^0(x,y)}{\partial x} - z 2 \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (38)$$

Estas relações podem ser divididas em deformações de membrana e curvaturas, em que as primeiras são representadas pelo primeiro termo da direita da igualdade para cada deformação, enquanto que as segundas pelos demais termos do lado direito da igualdade. As relações presentes nas equações de (36) a (38), podem ser reescritas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^0(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v^0(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Através da substituição da relação (39) na equação (19), obtém-se as tensões na k-ésima lâmina do laminado

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Observa-se que apenas os termos referentes à tensão e rigidez possuem o índice k , uma vez que, devido às hipóteses adotadas, as deformações e curvaturas possuem um comportamento linear ao longo da espessura do laminado e independem da lâmina. Enquanto que cada lâmina possui suas propriedades elásticas, representadas por $[\overline{Q}_{ij}^k]$, e influenciam na resposta da estrutura, como resultado, tem-se tensões diferentes em cada lâmina.

Calcula-se os esforços atuantes no laminado por meio da integração das tensões ao longo da espessura de cada lâmina e pela soma dessas parcelas, o que resulta em,

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz, \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz. \quad (42)$$

Por meio da reescrita das equações (41) e (42) pelo uso da relação tensão-deformação, encontra-se a equação (43) que expressa a relação entre o carregamento e as deformações.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

reescrevendo a equação (43) na forma compacta

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix}, \quad (44)$$

com [A], [B] e [D] calculados através de:

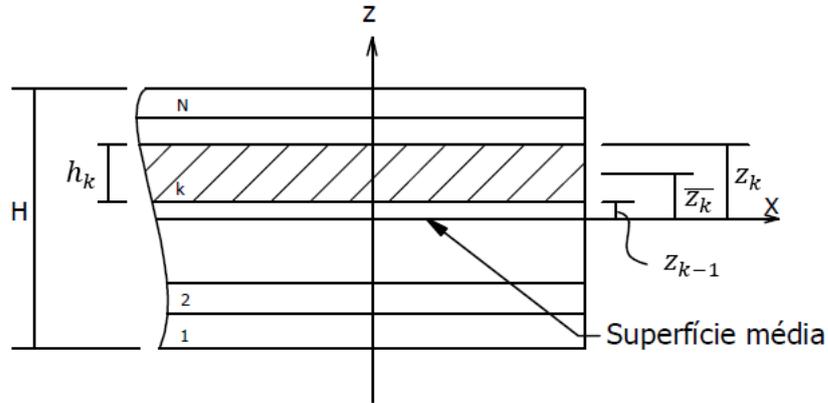
$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{ij})_k h_k,$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{ij})_k h_k \bar{z}_k,$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{ij})_k \left(h_k \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right),$$

em que h_k refere a espessura da k -ésima lâmina e \bar{z}_k a distância da superfície de referência do laminado até a superfície de referência da k -ésima lâmina, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Definição das cotas para o laminado



Fonte: Fuga (2017).

3.2 TIPOS ESPECIAIS DE LAMINADOS

De acordo com características como, os ângulos das fibras, os materiais, as espessuras de cada lâmina, se possui simetria ou anti-simetria, o laminado pode ser classificado de maneira mais específica. Esses casos são importantes para o estudo destes materiais, pois possibilitam simplificações nos cálculos e anular determinadas componentes de carregamentos (KAW, 2006).

Kaw (2006) e Jones (1999) identificaram os dois principais casos como: laminados simétricos e anti-simétricos. Já os demais tipos são particularidades desses dois. A seguir serão abordados as especificidades de cada um.

3.2.1 Laminados simétricos

Um laminado é simétrico caso ocorra igualdade de material, ângulos e espessuras das camadas em relação ao plano médio. Essa classe apresenta como vantagens a ausência do acoplamento entre tração/compressão e flexão, representada por $[B]=0$. Com isso, é possível analisar os comportamentos de membrana e flexão separados, através de

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

3.2.2 Laminados anti-simétricos

Os laminados anti-simétricos possuem simetria em relação ao plano médio, porém suas fibras possuem uma orientação negativa quando comparadas com as lâminas a mesma distância do plano de simetria. Esta sequência de empilhamento faz com que os termos nulos da sua matriz de rigidez sejam $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}$. Como os termos da matriz $[B]$ são diferentes de zero, existe o acoplamento dos comportamento de membrana e de flexão do laminado e a equação (47) apresenta sua relação constitutiva.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

3.2.3 Laminados cruzados

Laminados compostos apenas de fibras orientadas à 0° e 90° são denominados como cruzados, normalmente são construídos de forma à serem simétricos ou anti-simétricos. O benefício dessa categoria são os desacoplamentos entre os efeitos normais e cisalhantes e os efeitos de momento fletor e torsor. Esses desacoplamentos são definidos pelos valores nulos para os coeficientes $A_{16}, A_{26}, B_{16}, B_{26}, D_{16}, D_{26}$, na equação (43).

3.2.4 Laminados angulares

Os laminados angulares são aqueles formados por camadas de mesmo material e espessura, orientadas a $+\theta$ ou $-\theta$. Caso seja composto por um número par de lâminas, $A_{16}, A_{26} = 0$. Contudo, se o laminado possuir um número ímpar de camadas e for simétrico, $[B] = 0$ e $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}$ tendem a zero conforme o número de lâminas aumenta. Para o segundo caso, o comportamento é similar ao de um laminado cruzado, porém com uma maior rigidez ao cisalhamento.

3.2.5 Laminados quasi-isotrópicos

Para esse caso de laminado, $[A]$ possui um comportamento igual ao de um material isotrópico, ou seja, a rigidez para esse tipo de laminado é independente da orientação das camadas. Entretanto, $[B]$ e $[D]$ não necessariamente funcionam de maneira similar ao material isotrópico.

3.2.6 Laminados balanceados

Tratam-se de laminados balanceados aqueles que possuem pares de camadas com orientação diferente de 0° e 90° , em que uma está orientada em $+\theta$ e outra em $-\theta$. Os pares de positivos e negativos não precisam ser adjacentes, porém devem ser compostos de mesmo material e espessura. Essa particularidade implica em $A_{16} = A_{26} = 0$.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (MEF) é um procedimento numérico para resolver equações diferenciais parciais e equações integral-diferenciais, o qual, surgiu na área da mecânica estrutural para cálculos de tensões. No entanto, sua utilização abrange diversas outras áreas, como transferência de calor, dinâmica estrutural, mecânica dos fluídos, dinâmica dos fluídos, eletromagnetismo, acústica, entre outras (COOK *et al.*, 2001). A grande vantagem desse método, é a simplicidade para desenvolver programas computacionais (KIM; SANKAR, 2011).

Segundo Cook *et al.* (2001), a aplicação do MEF possui os seguintes passos:

- Divisão da estrutura em elementos finitos;
- Definição das propriedades de cada elemento;
- União dos elementos para obter o modelo discretizado da estrutura;
- Aplicação das condições de contorno;
- Determinação dos graus de liberdade dos demais elementos;
- Cálculo dos deslocamentos, deformações e tensões.

4.1 PLACAS DE MATERIAL COMPÓSITO

Segundo Mendonça (2005), ao se tratar de estruturas bidimensionais de material laminado, a discretização em elementos finitos ocorre por elementos de placa laminada através da teoria de primeira ordem para placas semi-espessas. Para o caso estático linear, utiliza-se o princípio dos trabalhos virtuais (PTV)

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \widehat{\varepsilon}^0 \\ \widehat{\kappa} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \widehat{\gamma}_{yz} \\ \widehat{\gamma}_{xz} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} E_{44} & E_{45} \\ E_{45} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \widehat{w}q d\Omega = 0, \quad (48)$$

onde Ω é o domínio da placa e $q(x,y)$ é a carga transversal distribuída por unidade de área. A solução do PTV consiste em encontrar os deslocamentos da superfície de referência (ε_0 , κ , γ_{yz} e γ_{xz}) para qualquer conjunto de funções pesos ($\widehat{\varepsilon}^0$, $\widehat{\kappa}$, $\widehat{\gamma}_{yz}$ e $\widehat{\gamma}_{xz}$). O domínio Ω é dividido em um conjunto finito de elementos de forma que

$$\cup_{e=1}^{me} \Omega^e = \Omega, \quad (49)$$

$$\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, i \neq j. \quad (50)$$

O campo de deslocamentos de um ponto qualquer do laminado podem ser descritos através da teoria de primeira ordem, conforme apresentado por Reddy (2004)

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (51)$$

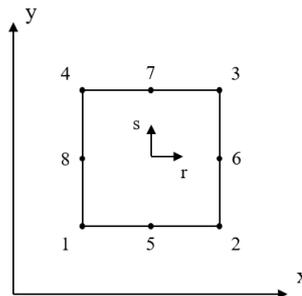
No lugar das soluções exatas w , ψ_x e ψ_y , determinam-se funções aproximadas $w_h(x, y)$, $\psi_{xh}(x, y)$ e $\psi_{yh}(x, y)$. Logo, são necessárias as funções de interpolação (N_{no}) definidas em cada nó de cada elemento, de forma que o campo de deslocamento aproximado pode ser expresso pelos deslocamentos nodais através de

$$\begin{bmatrix} u^0(x, y) \\ v^0(x, y) \\ w(x, y) \\ \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{bmatrix}_h^e = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(x, y) \begin{bmatrix} u_{no} \\ v_{no} \\ w_{no} \\ \psi_{xno} \\ \psi_{yno} \end{bmatrix}, \forall (x, y) \in \Omega^e. \quad (52)$$

em que, n_{ne} representa o número de nós no elemento. As funções de interpolação podem ser definidas através de um sistema de coordenadas intrínseco do elemento. A Figura 9 apresenta um elemento quadrático de oito nós, cujas funções são apresentadas por Reddy (2004)

$$\begin{bmatrix} N_1(r, s) \\ N_2(r, s) \\ N_3(r, s) \\ N_4(r, s) \\ N_5(r, s) \\ N_6(r, s) \\ N_7(r, s) \\ N_8(r, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-r)(1-s)(-r-s-1) \\ (1+r)(1-s)(r-s-1) \\ (1+r)(1+s)(r+s-1) \\ (1-r)(1+s)(-r+s-1) \\ 2(1-r^2)(1-s) \\ 2(1+r)(1-s^2) \\ 2(1-r^2)(1+s) \\ 2(1-r)(1-s^2) \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Figura 9 – Elemento quadrático



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Ao relacionar as funções presentes na equação (53) com os deslocamentos nodais (U^e), determinam-se os deslocamentos aproximados para cada elemento

$$[u(x,y)]_h^e = [\bar{N}^e(x,y)][U^e], \quad (54)$$

os quais são utilizados para calcular as deformações de membrana e flexão, por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du^0}{dx} \\ \frac{dv^0}{dy} \\ \frac{du^0}{dy} + \frac{dv^0}{dx} \\ \frac{d\psi_x}{dx} \\ \frac{d\psi_y}{dy} \\ \frac{d\psi_y}{dx} + \frac{d\psi_x}{dy} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

e deformações cisalhantes transversais, por

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_y + \frac{dw}{dy} \\ \psi_x + \frac{dw}{dx} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Dessa forma, é possível reescrever a equação (54) para determinar as deformações através das matrizes de deformação membrana-flexão ($[B_f^e]$) e cisalhante ($[B_c^e]$)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix}_h^e = [B_f^e(x,y)] [U^e], \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}_h^e = [B_c^e(x,y)] [U^e]. \quad (58)$$

Por fim, o PTV assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} [U^e]^t \left[\int_{\Omega^e} [B_f^e]^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [B_f^e] dx dy + \int_{\Omega^e} [B_c^e]^t [E^e] [B_c^e] dx dy \right] [U^e] \\ - [\hat{U}^e] \int_{\Omega^e} [N_w^e] q(x,y) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

ou ainda, na forma compacta

$$[U^e]^t [K_f^e + K_c^e] [U^e] - [\hat{U}^e][F^e] = 0, \quad (60)$$

em que as matrizes $[K_f^e]$, $[K_c^e]$ representam as matrizes de rigidez do laminado para os esforços coplanares e esforços transversais e $[F^e]$ o vetor força nodal do elemento. Para realizar o cálculo do PTV, utiliza-se de um conjunto de funções peso, contanto que pertençam ao espaço vetorial formado pelas funções de interpolação escolhidas. Portanto, ao tomar como solução funções peso unitárias em apenas um grau de liberdade e nulas nos demais, produzem-se n_{ne} relações

$$[K^e][U^e] = [F^e], \quad (61)$$

com $[K^e] = [K_f^e + K_c^e]$.

O sistema de equações composto pelas n_{ne} relações nodais (61) como apresentado não possui solução única, uma vez que a matriz composta pelos $[K^e]$ é singular. Porém, com o conhecimento das condições de contorno do problema, a matriz de rigidez se torna não singular, possibilitando a determinação do campo de deslocamentos dos elementos. Com os valores de deslocamento, determinam-se as deformações a partir das equações (57) e (58) em seguida, pela relação tensão-deformação, encontram-se as tensões no sistema global, as quais podem ser rotacionadas para o sistema local com auxílio de [T].

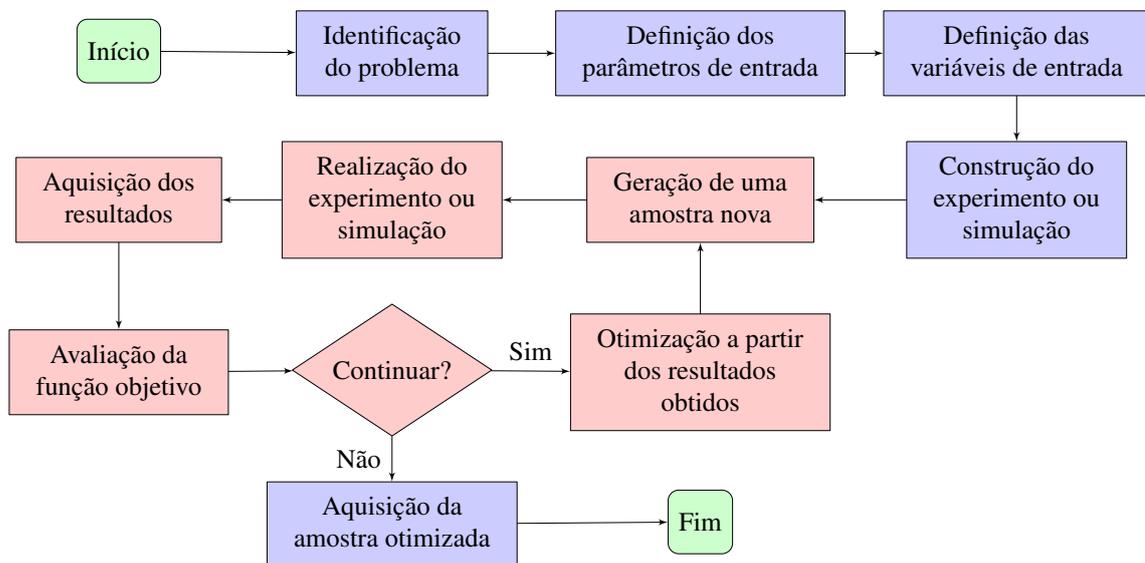
Com o avanço da tecnologia, as aplicações de materiais compósitos se estenderam para as mais diversas áreas da engenharia. Dessa forma, a aplicação do MEF se tornou fundamental para as análises estruturais, uma vez que os casos reais possuem geometrias complexas as quais não possuem formulações analíticas.

5 OTIMIZAÇÃO

Otimização é o processo de se obter o melhor resultado a partir de determinadas restrições, ou seja, buscar a combinação de condições que alcancem o máximo ou mínimo de uma função sem infringir os limites impostos. Dentro da engenharia, diversas são as situações em que o engenheiro precisa tomar uma decisão de grande impacto ao projeto, em que na maioria dos casos, visam reduzir os trabalhos ou aumentar os ganhos (RAO, 2009).

Segundo Cavazzuti (2013), para se realizar uma otimização é necessário, inicialmente, identificar o problema e quais os parâmetros de entrada. Em seguida, determinam-se quais características possuem maior influência e capacidade de variar a fim de melhorar os resultados. Porém, busca-se o mínimo de variáveis de otimização, uma vez que a complexidade aumenta de forma exponencial com o número de variáveis. A próxima etapa é definir o meio de avaliar os resultados, onde os dois principais meios são por ensaios experimentais ou simulações numéricas computacionais. Desse modo, inicia-se o processo iterativo em que se realiza a análise e se compara o resultado com os valores desejados até atingir o objetivo, enquanto não for alcançado, repete-se o processo com diferentes configurações. A Figura 10 apresenta um fluxograma de uma otimização.

Figura 10 – Fluxograma representativo de um processo de otimização

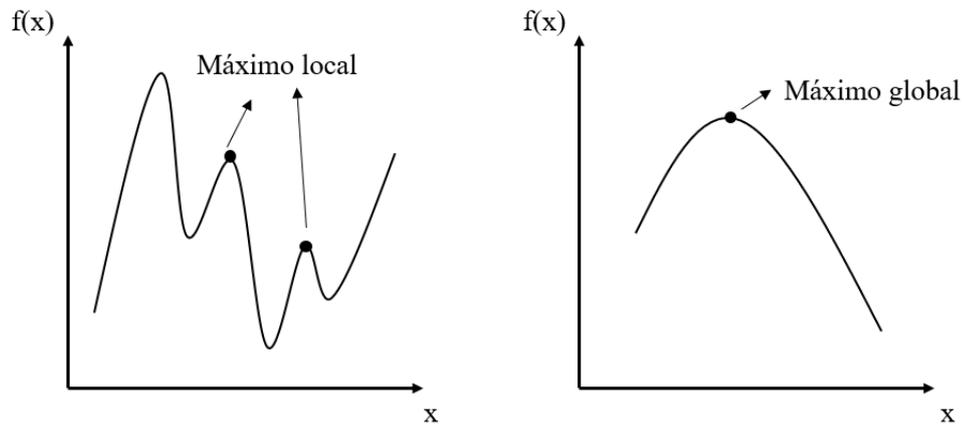


Fonte: Adaptado de Cavazzuti (2013).

A partir de uma abordagem matemática, o processo de otimização consiste em determinar $\vec{x} = x_1, x_2, \dots, x_n^T$ que minimize a função $f(\vec{x})$ quando impostas as restrições $g_i(\vec{x}) \leq 0$ com $i = 1, 2, \dots, m$ e $l_j(\vec{x}) = 0$ com $i = 1, 2, \dots, p$. Em que o vetor \vec{x} contém as variáveis de projeto, a função $f(\vec{x})$ é chamada de função objetivo e as funções $g_i(\vec{x})$ $l_j(\vec{x})$ são conhecidas como restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente. O número de variáveis n precisa estar relacionado com o número de restrições m e/ou p (RAO, 2009).

Como a otimização é um problema de máximos e mínimos de funções, é possível que o método de otimização encontre um máximo ou mínimo local, o que exige meios de verificar se o resultado obtido é uma solução ótima local ou global. Devido a isso, desenvolveram-se diversas técnicas de otimização, em que cada uma possui uma forma de examinar os resultados encontrados. A Figura 11 expõe a diferença entre uma solução ótima local e uma ótima global.

Figura 11 – Máximos locais e global



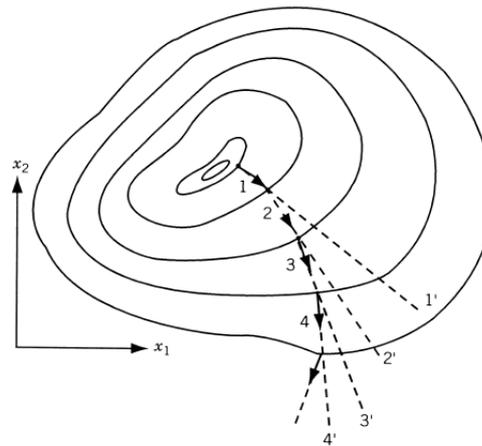
Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

A busca pela melhor distribuição de material em uma estrutura para que suporte os carregamentos impostos, é denominada otimização estrutural. Essa é dividida em três classes: paramétrica, a qual utiliza dos parâmetros da estrutura como variáveis de projeto, otimização de forma, em que o objetivo é determinar o contorno da estrutura que melhor atenda aos requisitos de projeto e topológica, onde se busca a melhor distribuição de material ao longo da estrutura (KLARBRING; CHRISTENSEN, 2009).

Para realizar tais otimizações, os principais tipos são: métodos baseados em gradientes, métodos heurísticos e métodos meta-heurísticos. Segundo Rao (2009), o primeiro, se baseia na propriedade do gradiente de que uma função varia na maior taxa possível, desde que siga a direção do gradiente, o que possibilita uma maior agilidade no processo de otimização. Contudo, trata-se de uma característica local da função, fato que faz com que o método dependa do ponto de partida.

A Figura 12 apresenta os gradientes de uma função para os pontos 1, 2, 3 e 4 ao longo das direções 11', 22', 33' e 44', respectivamente. Observa-se que ao partir do ponto 1, a direção 11' apresenta a maior taxa de variação, porém, isso não ocorre para o ponto 2, em que a maior taxa acontece na direção 22'. O mesmo se repete para os pontos 3 e 4, o que descreve a dependência do ponto de partida.

Figura 12 – Direções de maiores taxas de variação



Fonte: Rao (2009).

Os métodos heurísticos são técnicas computacionais aproximativas que têm como objetivo encontrar soluções ótimas e viáveis, ao direcionar uma parcela satisfatória de esforço computacional. Dentre esses, destacam-se os algoritmos que admitem como caminho válido de solução simplesmente tentar alcançar uma solução de um problema extremamente complexo e os algoritmos que ao procuram uma maior eficiência computacional ao invés de soluções ótimas (GOLDBARG, 2005).

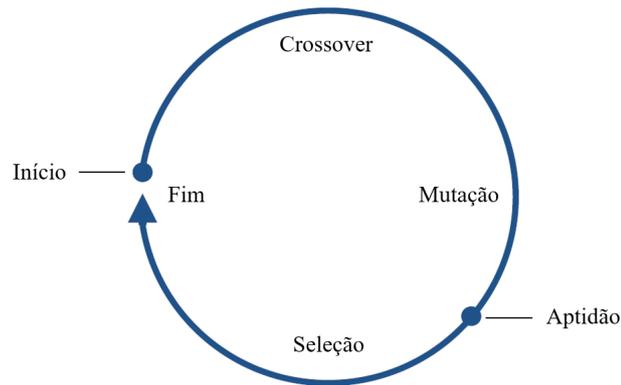
Conforme GoldBarg (2005), a meta-heurística é um mecanismo de orientação e desenvolvimento de algoritmos heurísticos, ou seja, é um método de otimização que produz sub-rotinas heurísticas para atingir seu objetivo. Para isso, baseia-se principalmente em fenômenos naturais, com os exemplos mais conhecidos sendo o enxame de partículas (PSO) e o algoritmo genético.

5.1 ALGORITMO GENÉTICO

O algoritmo genético (AG) é uma técnica de busca probabilística baseado nos princípios da genética. Dessa forma, os cromossomos representam as variáveis de otimização do problema, em que os indivíduos mais aptos são mais propensos a se reproduzirem e passar seus genes para a próxima geração. Além disso, assim como na genética, podem ocorrer os fenômenos de crossover e mutação (KOCHENDERFER; WHEELER, 2019).

A Figura 13 apresenta o ciclo do AG, e é fundamentado nos princípios da evolução natural. Uma vez que se possua um conjunto de soluções (população de indivíduos), ocorrem processos que beneficiam o desenvolvimento das melhores soluções (seleção natural) e proporcionam o desenvolvimento de gerações mais evoluídas. Com isso, as melhores soluções são selecionadas e sofrem os operadores de recombinação e mutação, para produzir uma nova população. Esse processo é iterado até que seja gerado um indivíduo qualificado a todos os critérios, ou até que se alcance o limite de iterações (KRAMER, 2017).

Figura 13 – Ciclo do AG



Fonte: Kramer (2017).

5.1.1 Função *fitness*

A função *fitness* representa os requisitos necessários que uma solução deve apresentar para ser genitora das próximas gerações. Logo, trata-se do método de avaliar as qualidades e deficiências de cada indivíduo e mapear quais os genes que produzem essas características (EIBEN; SMITH, 2015).

De acordo com Kramer (2017), a avaliação do desempenho de um AG está ligada ao número de avaliações da função *fitness* necessárias para resolução do problema. Com isso, busca-se minimizar o número de utilizações da função a fim de reduzir o tempo do processo.

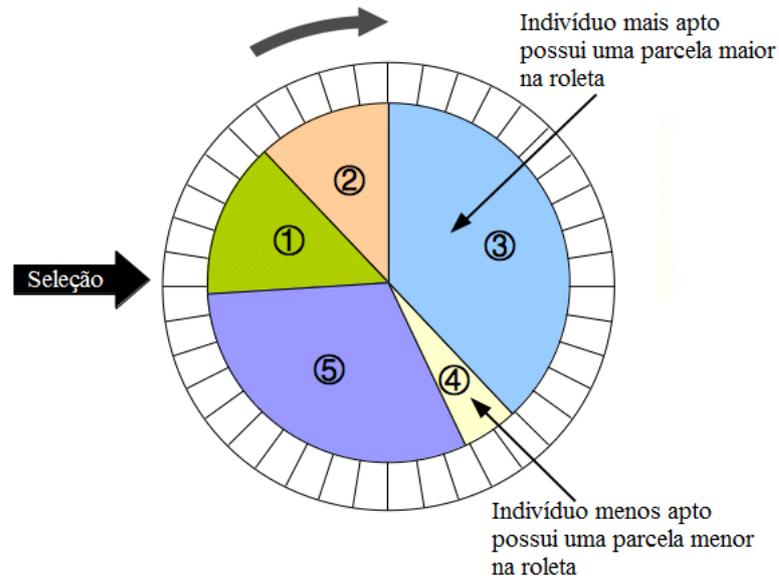
5.1.2 Critérios de seleção

Os critérios de seleção são utilizados para selecionar os indivíduos que serão usados no recombinação e mutação. A seleção dos pais ocorre de forma randômica, porém como forma de aumentar as chances dos mais capacitados, os principais métodos são: roleta, ranking e torneio (CAVAZZUTI, 2013).

No primeiro método, cada indivíduo da população é representado por uma parcela de uma roleta, proporcional a sua *fitness*, então a roleta é girada um determinado número de vezes, conforme o tamanho da população, sendo que os indivíduos sorteados se tornam os reprodutores da próxima geração. Já no ranking, os indivíduos são listados de acordo com sua *fitness*, então a probabilidade de seleção é de acordo com a sua colocação. No último, são selecionados ao menos dois indivíduos, os quais são comparados entre si e o melhor é selecionado como reprodutor (GABRIEL; DELBEM, 2008).

As Figuras 14 e 15 exemplificam os critérios da roleta e torneio, respectivamente.

Figura 14 – Exemplo do método da roleta



Fonte: Menezes (2017).

Figura 15 – Exemplo do método de torneio

Indivíduo	<i>Fitness</i>
x ₁	10
x ₂	300
x ₃	30
x ₄	100
x ₅	900
x ₆	1
x ₇	40
x ₈	60

→

Torneios		
x ₁	x ₂	x ₃
x ₅	x ₁	x ₆
x ₃	x ₈	x ₇
x ₆	x ₃	x ₁
x ₈	x ₄	x ₂
x ₆	x ₆	x ₆
x ₂	x ₄	x ₅
x ₈	x ₁	x ₃

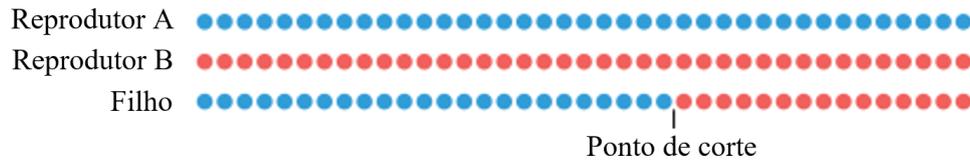
Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

5.1.3 Recombinação

Segundo Kochenderfer e Wheeler (2019), crossover é a combinação dos cromossomos dos pais para produção de novos indivíduos. O resultado desta operação é um indivíduo que possivelmente obteve as melhores características de cada pai. Os tipos mais comuns de recombinação são: 1-ponto, 2-pontos e uniforme.

Na recombinação por 1 ponto, seleciona-se de forma aleatória um ponto de corte nos cromossomos dos pais, em seguida, os descendentes recebem de um dos reprodutores a parcela a esquerda e do outro a parcela a direita do corte (CAVAZZUTI, 2013). A Figura 16 demonstra o funcionamento do operador.

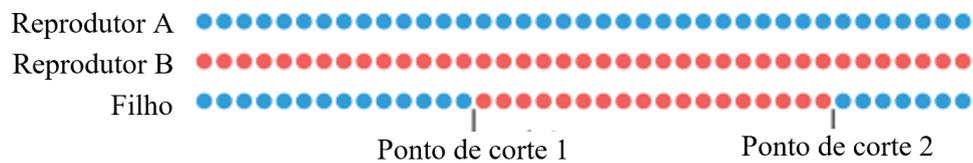
Figura 16 – Recombinação por 1 ponto



Fonte: Adaptado de Kochenderfer e Wheeler (2019).

A recombinação por 2 pontos funciona de maneira similar, porém nesta são selecionados dois pontos de corte nos cromossomos dos pais, resultando em três partições, as quais são herdadas pela prole. Na Figura 17 é mostrado um exemplo de recombinação por 2 pontos.

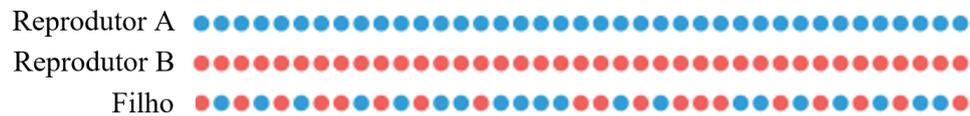
Figura 17 – Recombinação por 2 pontos



Fonte: Adaptado de Kochenderfer e Wheeler (2019).

Por fim, a recombinação uniforme define previamente quais genes serão herdados do reprodutor A e quais do reprodutor B de forma independente. A Figura 18 apresenta um exemplo de recombinação uniforme.

Figura 18 – Recombinação uniforme



Fonte: Adaptado de Kochenderfer e Wheeler (2019).

5.1.4 Mutação

De acordo com Menezes (2017), a mutação altera a estrutura do cromossomo de forma a aumentar a diversidade genética da população e também renovar o material genético, uma vez que cria indivíduos com propriedades diferentes do restante da população. Dessa forma, a mutação possibilita que qualquer ponto do espaço de busca seja estudado e garante que o processo escape de pontos de ótimo local. O operador de mutação modifica de forma aleatória, um ou mais genes de um cromossomo. Com esse operador, um indivíduo gera uma cópia de si mesmo, a qual sofre as alterações. A Figura 19 contém um exemplo de mutação.

Figura 19 – exemplo de mutação



Fonte: Adaptado de Kochenderfer e Wheeler (2019).

Para o correto funcionamento do AG, os conceitos apresentados anteriormente são adicionados ao AG de forma a melhorar o desempenho da otimização. A partir disso, Gad (2021) listou os parâmetros fundamentais como sendo: número de gerações, número de soluções por população, número de pais por população, critério de seleção, número de indivíduos mantidos na próxima, tipo e probabilidade de recombinação, tipo e probabilidade de mutação, intervalo de otimização para cada gene.

6 METODOLOGIA

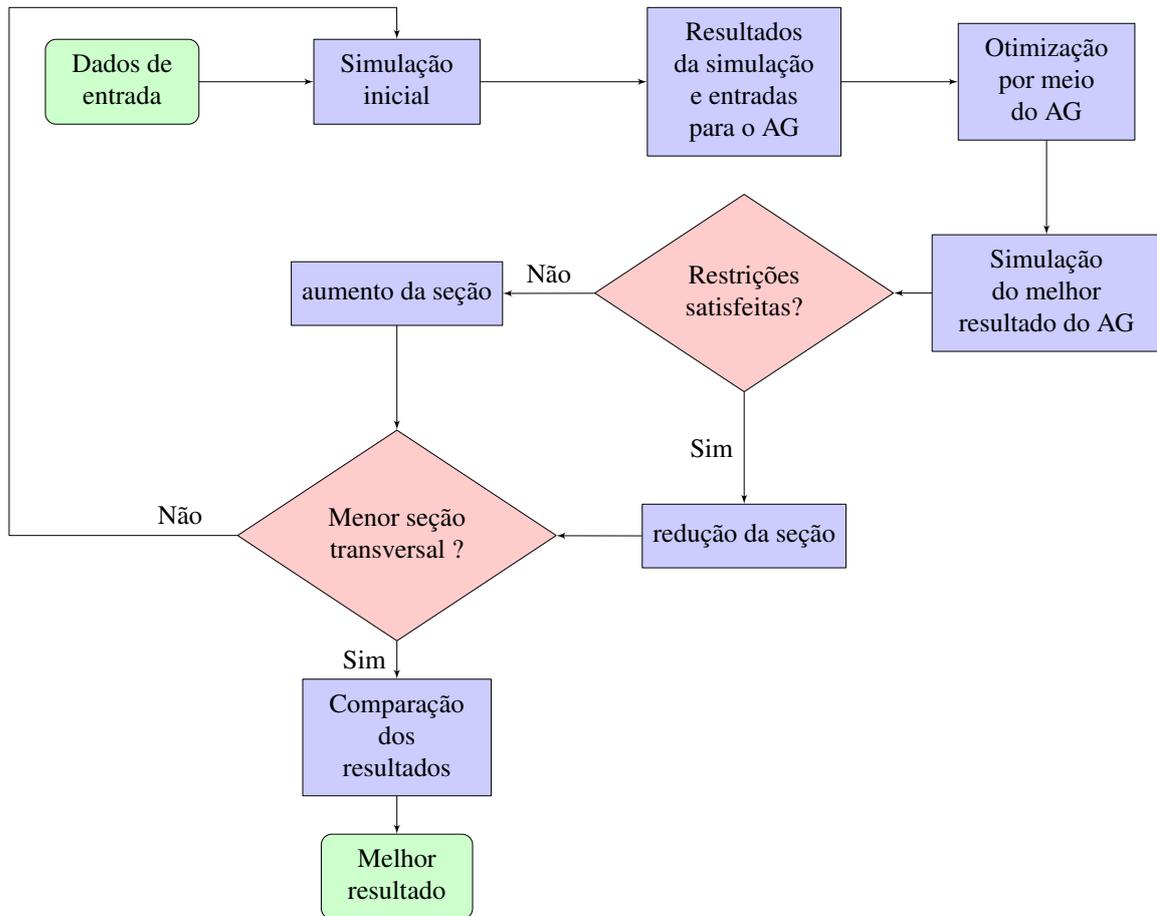
Durante o voo, os principais esforços sobre o *tailboom* são impostos pelos estabilizadores da aeronave. Uma vez que durante o percurso de voo a aeronave realiza muitas manobras, analisa-se a estrutura para os dois casos em que se apresentaram maiores deslocamentos: manobra de arfagem da aeronave com máxima deflexão do leme (caso 1), onde o *tailboom* apresenta maior deflexão e manobra de rolagem da aeronave com máxima deflexão do leme (caso 2), onde o *tailboom* apresenta maior torção. Para os dois casos, são consideradas as forças de sustentação, o momento fletor gerado por esta força e o momento torsor de cada empenagem.

O algoritmo elaborado foi escrito na linguagem Python e possui os estágios apresentados na Figura 20. Primeiro, define-se os dados referentes aos materiais, as dimensões, as restrições geométricas e os carregamentos externos. Em seguida, realiza-se uma simulação por meio do MEF para uma sequência de empilhamento $[0]_T$ e se obtém os esforços internos em cada ponto da seção crítica da estrutura. A partir disso, ajustam-se os dados para o devido funcionamento da função objetivo.

Na etapa de otimização pelo AG, são avaliadas diversas sequências de empilhamento com diferentes números de camadas para cada parede. Ao final é selecionada a configuração com menor número de camadas e com maior MS. Após o processo de otimização do laminado, realiza-se uma nova simulação a fim de obter os novos carregamentos internos e deformações da estrutura para o laminado encontrado e se determinam as MS para os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu através da TCL.

A partir das respostas encontradas, variam-se as dimensões da seção transversal, dentro de um intervalo definido pelo usuário. Para o caso de a nova configuração satisfazer todas as restrições de deslocamento impostas, reduzem-se as medidas, caso contrário são aumentadas. Esse processo iterativo de variação da seção é feito através do método da bisseção até que a diferença entre as seções analisadas seja inferior à um valor de 2 mm. Ao determinar a seção ótima, na etapa seguinte, comparam-se os melhores resultados para cada dimensão de seção transversal analisada. Por fim, seleciona-se a seção que possui menor massa.

Figura 20 – Fluxograma representativo do processo de otimização



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

6.1 ALGORITMO

O código para as etapas de simulação foram desenvolvidas com auxílio da ferramenta *MacroScript* presente no *software* Abaqus[®], a qual traduz todas funções utilizadas na interface gráfica para a linguagem Python. O código gerado é adicionado ao algoritmo com o objetivo de acelerar todo o processo iterativo, já que exclui a necessidade de reconstrução do modelo para cada alteração realizada durante a otimização, além de possibilitar que os dados retirados das simulações sejam adicionados às próximas iterações de forma automática.

A biblioteca PyGAD fornecida por Gad (2021), foi utilizada para construção do AG, onde se empregaram os parâmetros presentes na tabela (3). Para os parâmetros de critério de seleção, tipo de recombinação e tipo de mutação, utilizaram-se os valores padrão da biblioteca. Enquanto que os demais foram definidos com o objetivo de compreender todo o domínio de estudo. A função *fitness*, baseia-se na TCL com as etapas apresentadas na Figura 21. Para a realização do processo iterativo, estipula-se como variáveis de otimização as orientações das lâminas de cada parede, com o objetivo de determinar a maior MS.

Tabela 3 – Propriedades dos materiais utilizados

Parâmetros	Valores
Número de gerações	100
Número de indivíduos por geração	50
Número de indivíduos mantidos na próxima geração	10
Critério de seleção	ranking
Tipo de recombinação	uniforme
Probabilidade de recombinação	50 %
Tipo de mutação	aleatória
Probabilidade de mutação	5 %

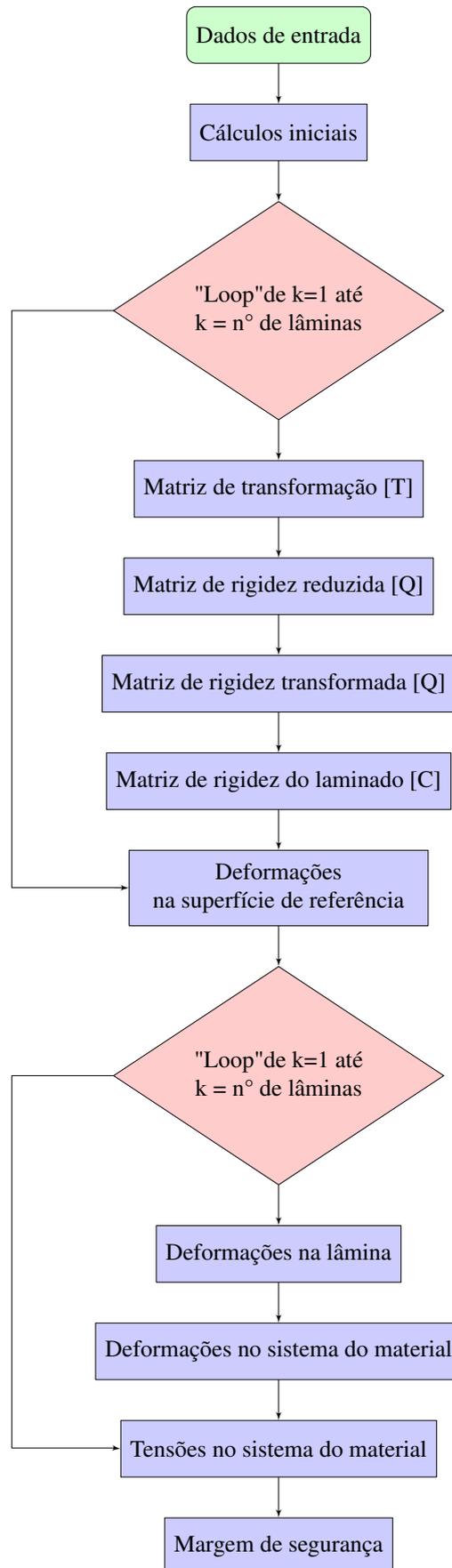
Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

O desenvolvimento da função *fitness* emprega as hipóteses presentes na TCL e que a estrutura é uma viga longa devido à grande relação entre comprimento e dimensões da seção. Na etapa de cálculos iniciais, determinam-se as alturas de acordo com a Figura 8. A partir dos valores iniciais, calculam-se [Q] e [T] para cada lâmina através das equações (11) e (12). Com isso, é possível rotacionar [Q] com auxílio de [T] e obter $[\bar{Q}]$, de acordo com a relação (18).

Em seguida, encontra-se [C] por meio das matrizes [A], [B] e [D]. O próximo passo é a computação das deformações no plano médio pelo inverso da relação (43), dessa forma, necessita-se de [S], calculada invertendo a matriz [C], e dos carregamentos obtidos através das análises computacionais.

Com as deformações no plano médio, é possível estimar as deformações em cada lâmina pela equação (39) e por consequência as deformações no plano do material. Com isso, avaliam-se as tensões no sistema da estrutura em três alturas diferentes da lâmina (as duas extremidades e a altura média) por meio da equação (40), em que a maior é rotacionada e utilizada para os cálculos das MS pelos critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu. Por fim, a menor MS entre os dois critérios, é utilizada como valor de comparação para a função *fitness*.

Figura 21 – Fluxograma representativo do funcionamento do algoritmo genético



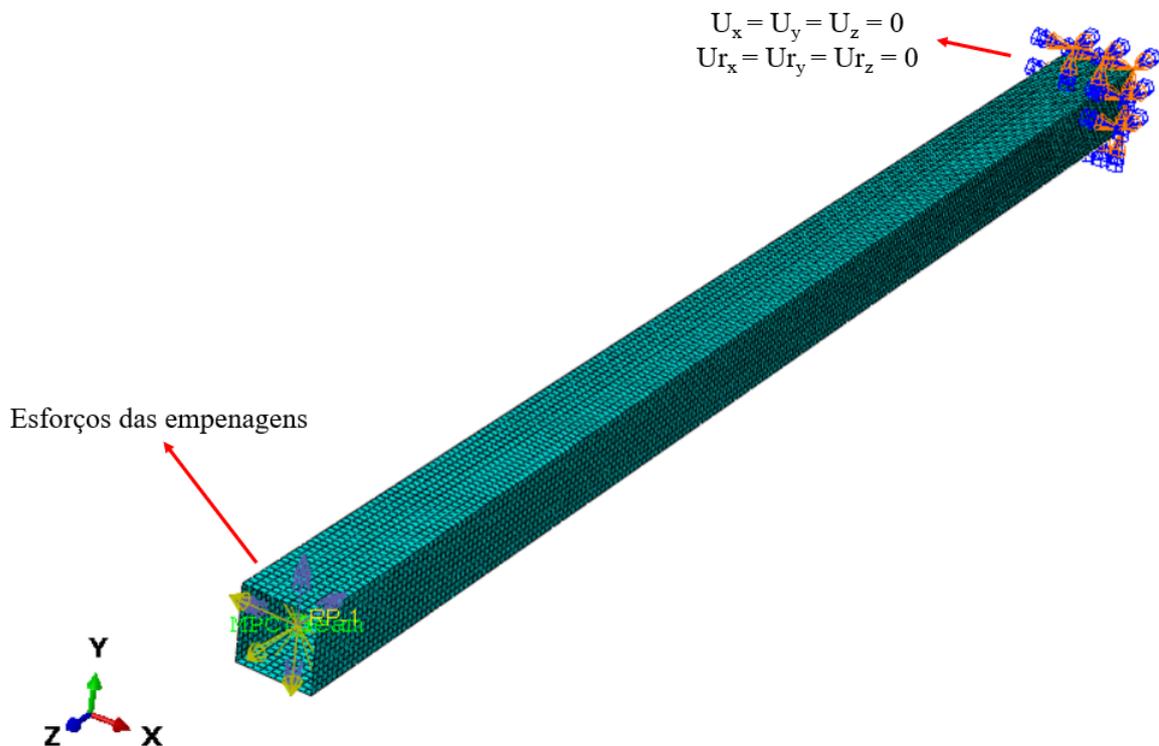
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

6.2 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Para as análises computacionais através do MEF, realiza-se a modelagem no software Abaqus® através de quatro superfícies do tipo casca, com elementos quadriláteros, em que cada uma possui um empilhamento composto por madeira balsa e lâminas de carbono/epóxi. Para auxiliar na aplicação dos carregamentos, utiliza-se de planos para particionar a estrutura e garantir a existência de nós em determinadas regiões. Dessa forma, as condições de contorno são: o engaste na região em que o componente está fixado no avião e os esforços das empenagens.

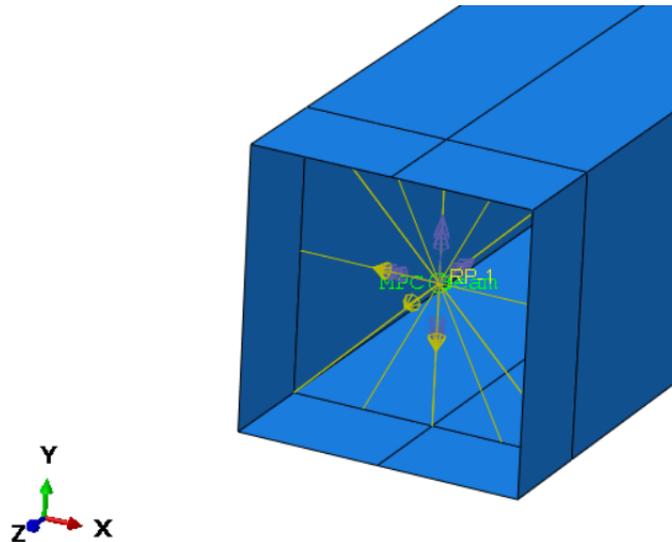
A aplicação das cargas, acontece em um nó no meio da seção, o qual está ligado ao restante da estrutura por elementos do tipo rígidos. Esse tipo de elemento possui uma rigidez infinita, logo, todos os esforços aplicados nele são distribuídos aos demais nós. A Figura 22 apresenta o modelo construído, assim como as condições de contorno utilizadas, enquanto que na Figura 23 é possível visualizar a malha de elementos rígidos. Com isso, seleciona-se um nó, sempre na mesma posição do modelo, e se observam os resultados nele para vários tamanhos de malha, a partir dos quais se analisa a convergência dos resultados para determinação do tamanho de malha ideal para a análise.

Figura 22 – Modelo computacional



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Figura 23 – Malha de elementos rígidos



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

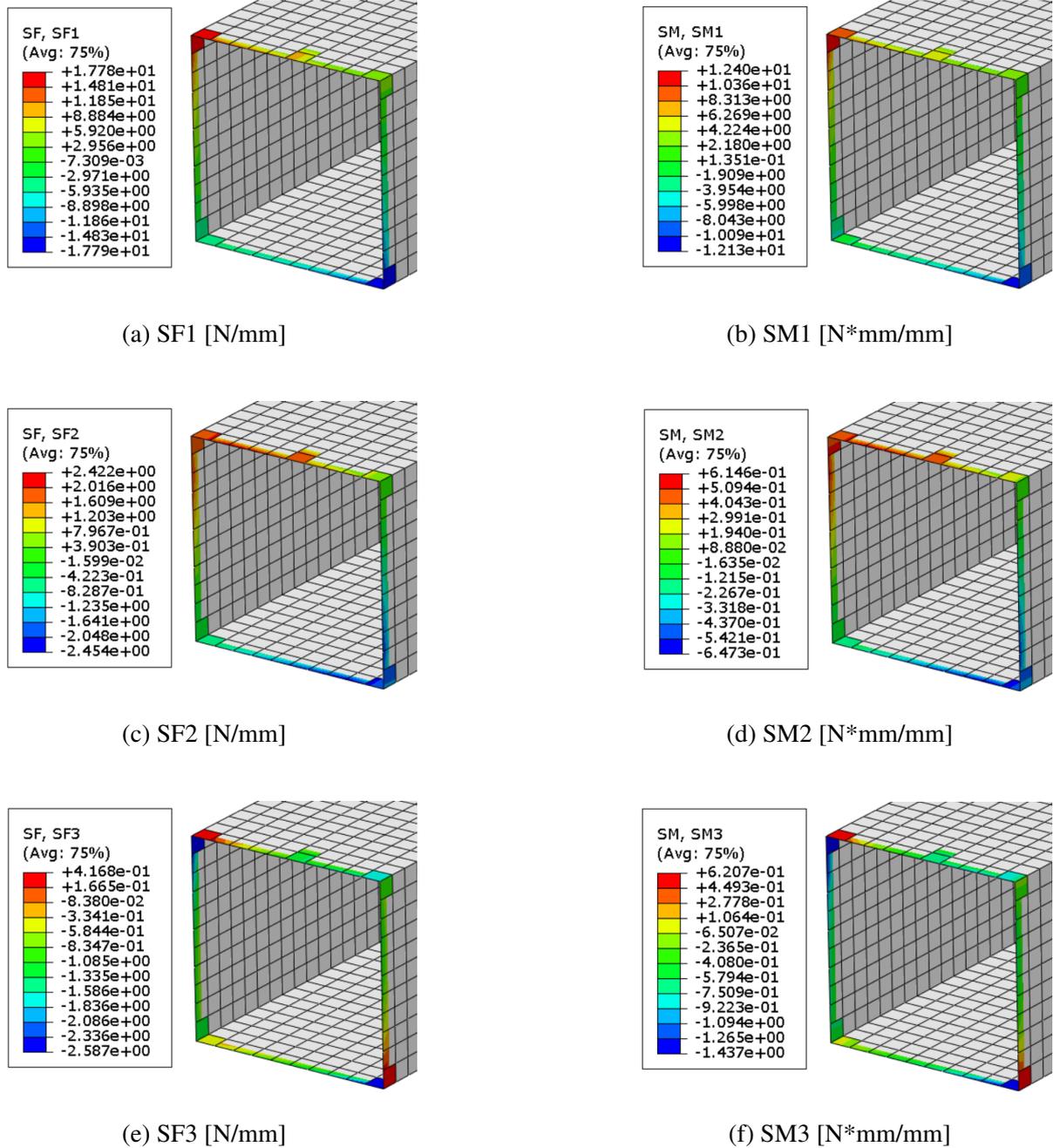
A região em que a estrutura apresenta os maiores esforços internos é no engaste, logo os pontos de análise pertencem a essa região. Observa-se que os nós de encontro entre as paredes concentram carregamentos, conforme a Figura 24, uma vez que durante os cálculos, eles recebem a contribuição das duas paredes. Dessa forma, excluem-se os nós presentes nas quatro quinas da análise. A tabela (4), apresenta a descrição de cada variável presente na Figura 24.

Tabela 4 – Definição dos esforços internos

Símbolo	Descrição
SF1	Força normal por unidade de largura na direção local 1
SF2	Força normal por unidade de largura na direção local 2
SF3	Força cisalhante por unidade de largura no plano local 1-2
SM1	Momento fletor por unidade de comprimento em relação ao eixo local 2
SM2	Momento fletor por unidade de comprimento em relação ao eixo local 1
SM3	Momento torsor por unidade de comprimento no plano local 1-2

Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

Figura 24 – Concentrações de esforços internos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

6.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Para a utilização dos elementos de casca compósito no software Abaqus[®], são necessárias 6 constantes de engenharia para caracterizar o problema. Uma vez que o objetivo deste trabalho está ligado à Equipe Albatroz, utilizaram-se as propriedades presentes no relatório de Estruturas e Ensaios Estruturais de 2022, com os dados faltantes sendo retirados de Doyle (1956). Os materiais em questão são: o tecido de fibra de carbono 2003k e a madeira balsa e suas propriedades estão presentes na tabela (5).

Tabela 5 – Propriedades dos materiais utilizados

Propriedade	Madeira Balsa	Fibra de Carbono
ρ [kg/m ³]	86,79	1120,00
E_1 [MPa]	3792,00	49749,50
E_2 [MPa]	173,00	49749,50
G_{12} [MPa]	202,00	14500,00
G_{13} [MPa]	141,00	7000,00
ν_{12}	0,23	0,27
X_t [MPa]	4,03	181,74
X_c [MPa]	-3,96	-137,5
Y_t [MPa]	1,93	181,74
Y_c [MPa]	-1,94	-137,5
S [MPa]	1,02	33

Fonte: Adaptado de Doyle (1956) e Linhares e Souza (2022).

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 ESTUDO DE CASO

A fim de analisar o método para uma aplicação real, estudou-se o dimensionamento do *tailboom* da aeronave da Equipe Albatroz Aerodesign 2022 na classe regular. Portanto, utilizaram-se os carregamentos do conjunto de empenagens do ano anterior. Com isso, realizou-se uma análise de convergência de malha em função das diferenças relativas para cada esforço interno, os quais as descrições estão presentes na tabela (4).

Os resultados do estudo de convergência de malha estão presentes na tabela (6) e na Figura 25. A análise tomou como base as dimensões obtidas na primeira iteração do algoritmo com o tamanho de malha encontrado sendo utilizado durante todas as simulações realizadas. A partir disso, para o cálculo das diferenças relativas, utilizou-se como referência o modelo com maior número de nós. Por se tratar de uma malha estruturada apenas por elementos finitos retangulares, percebe-se que para tamanhos de elementos finitos de até 5 milímetros, as variações nos resultados para todos os esforços internos são desprezíveis. Portanto, com o objetivo de reduzir o tempo de processamento, definiu-se como 5 milímetros o tamanho dos elementos.

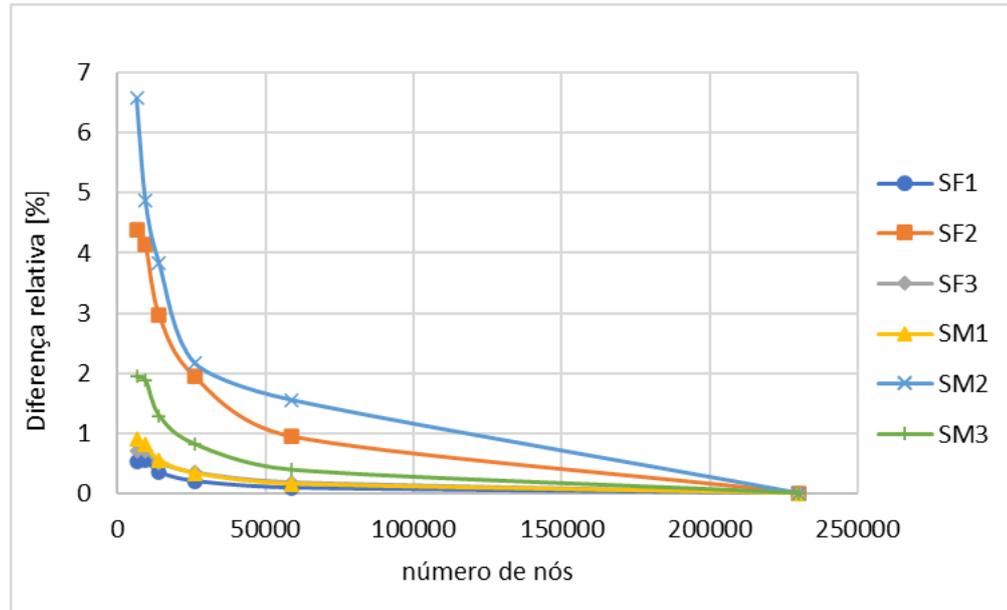
Tabela 6 – Resultados da convergência de malha

Tamanho dos elementos [mm]	Elementos	Nós	Diferença [%]					
			SF1	SF2	SF3	SM1	SM2	SM3
1	230020	229808	REF	REF	REF	REF	REF	REF
2	58644	58536	0,09	0,95	0,18	0,16	1,55	0,39
3	26136	26064	0,20	1,94	0,35	0,34	2,17	0,82
4	14144	14092	0,35	2,97	0,51	0,56	3,83	1,29
5	9548	9592	0,55	4,14	0,70	0,81	4,87	1,88

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Os valores limites utilizados para dimensionamento da estrutura estão presentes na tabela (7). Os limites para a seção estão em função da largura da fuselagem (w_{fus}), pois leva em consideração a possibilidade de construção e método de fixação da estrutura na fuselagem da aeronave. Já para as demais restrições, colocaram-se as mesmas utilizadas durante o projeto, em que a restrição de deslocamento angular, é calculada como o ângulo que provoca uma deflexão na ponta do EH de 10 % da meia-envergadura do EH. O termo l_{tdc} é o comprimento da *tailboom*.

Figura 25 – Gráfico para análise de convergência de carregamentos



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Tabela 7 – Valores limites para a otimização

Variável	Descrição	Valor
max_section [mm]	valor máximo de seção	$0,2 * w_{fus}$
min_section [mm]	valor mínimo de seção	$0,5 * w_{fus}$
max_rot [°]	valor limite de deslocamento angular na estrutura	—
max_deflex [mm]	valor limite de deflexão na estrutura	$0,1 * l_{tdc}$
lim_MS	valor mínimo de MS	0,5

Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

A estrutura é construída a partir de uma camada de madeira balsa e uma de fibra de carbono em cada parede, dessa forma, para o AG foram utilizadas 8 variáveis de otimização, as quais representam a orientação de cada camada, com os intervalos de otimização presentes na tabela (8).

Tabela 8 – Intervalos de otimização utilizados no AG

Índice	Variável	Intervalo
1	Orientação madeira balsa parede superior [°]	[0; 90]
2	Orientação fibra de carbono parede superior [°]	[0; 90]
3	Orientação madeira balsa parede inferior [°]	[0; 90]
4	Orientação fibra de carbono parede inferior [°]	[0; 90]
5	Orientação madeira balsa parede esquerda [°]	[0; 90]
6	Orientação fibra de carbono parede esquerda [°]	[0; 90]
7	Orientação balsa parede direita [°]	[0; 90]
8	Orientação fibra de carbono parede direita [°]	[0; 90]

Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

Os resultados para cada seção analisada resultantes do AG estão apresentados na tabela (9), o código é finalizado quando a próxima iteração variar menos de 2 milímetros em relação a última seção analisada.

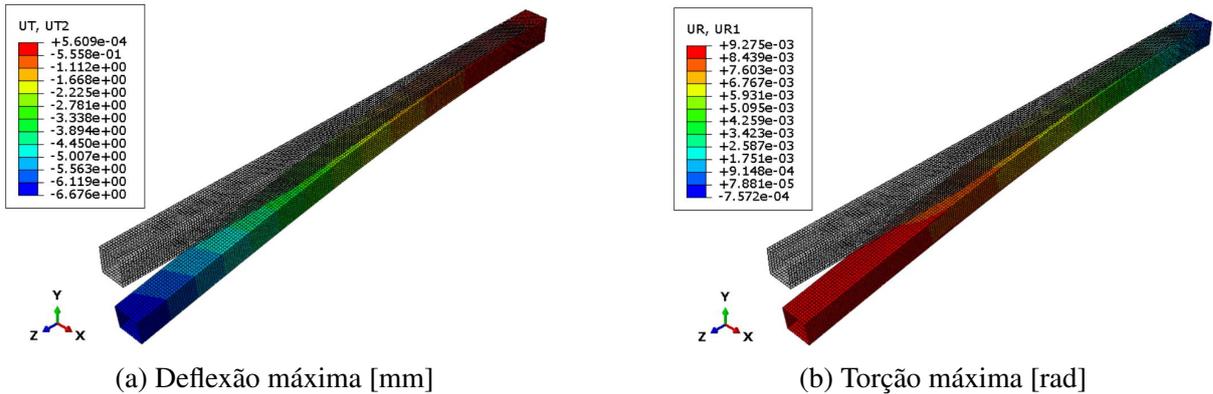
Tabela 9 – Resultados do AG

Iteração	Seção [mm]	MS preliminar	Variável							
			-	1	2	3	4	5	6	7
1	53	1,17	33	19	45	33	39	18	32	47
2	42	0,69	19	8	2	3	33	12	18	19
3	36	0,16	22	14	38	26	2	10	31	61
4	33	-0,08	16	6	42	33	22	1	17	60

Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

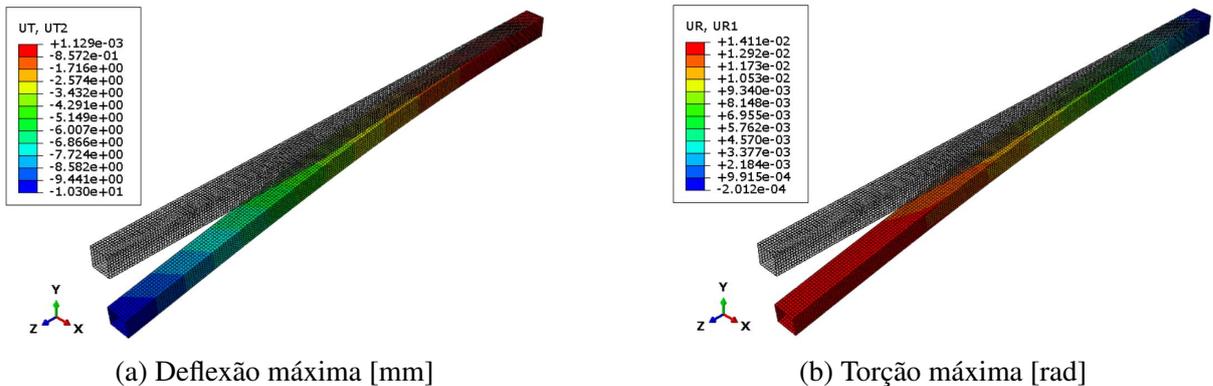
Após as simulações de verificação, obtiveram-se os campos de deflexão em X e torção no eixo Z, valores máximos de deslocamento transversal e deslocamento angular, para as três primeiras iterações são apresentados nas Figuras 26, 27 e 28.

Figura 26 – Resultados para seção de 42 mm



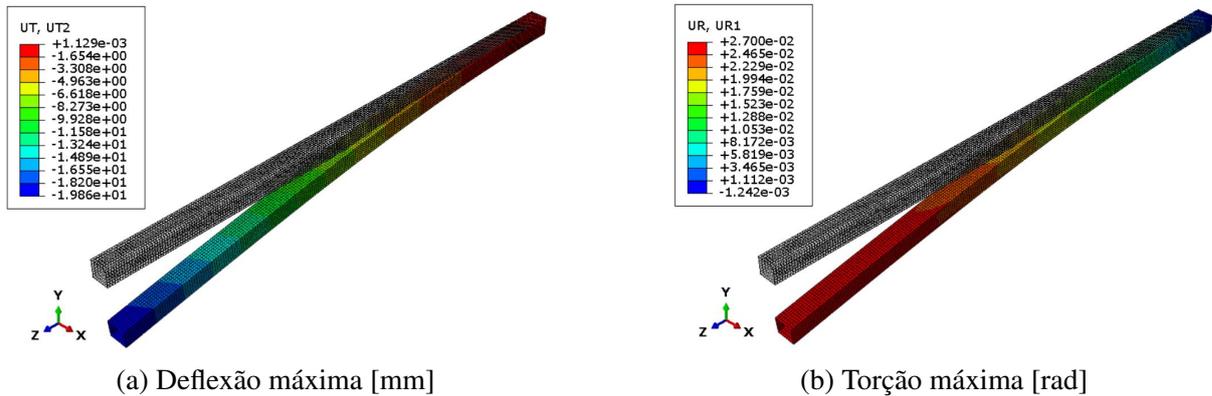
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 27 – Resultados para seção de 42 mm



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 28 – Resultados para seção de 36 mm



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para a seção final, os resultados de campos de deslocamento para os dois casos analisados estão presentes nas Figuras 29 e 30.

Com os resultados apresentados nas Figuras 26, 27, 28, 29 e 30, construiu-se a tabela (10) que contém um comparativo dos resultados de deflexão e torção máxima para cada iteração. Os valores de deflexão e torção estão normalizados pelo valor limite.

Tabela 10 – Resultados após simulação

Iteração	Seção [mm]	MS [Tsai-Hill]	MS [Tsai-Wu]	deflexão máxima	torção máxima
-	-	-	-	-	-
1	53	2,77	2,83	0,042	0,087
2	42	2,03	1,29	0,085	0,12
3	36	1,01	1,07	0,14	0,20
4	33	0,97	1,06	0,18	0,25

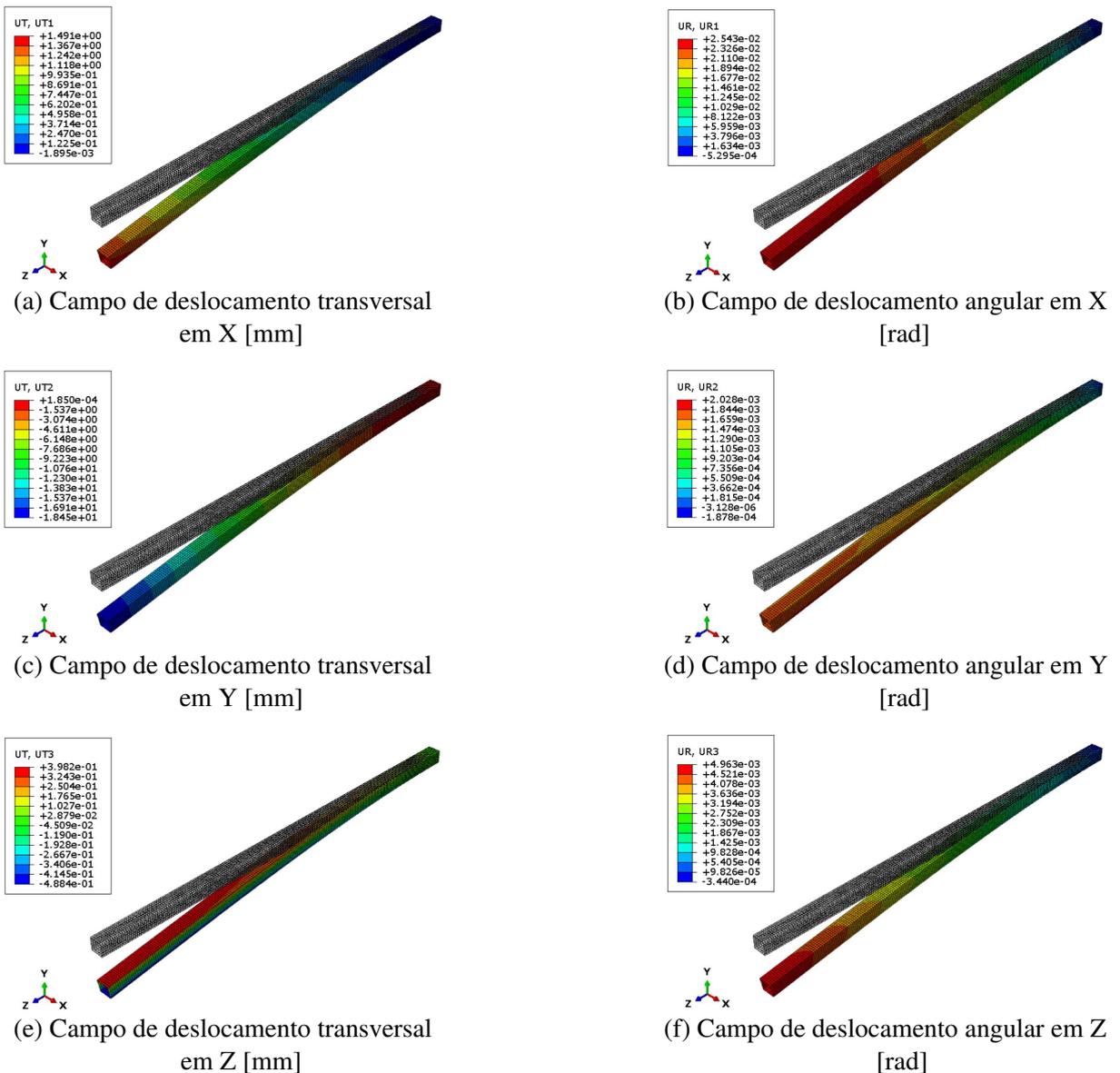
Fonte: Elaborado pelo Autor (2023).

A partir dos resultados presentes na tabela (10), observa-se que em todas as iterações, as deflexões e torções limites não ultrapassaram 25% do limite imposto, ou seja, a estrutura possui uma rigidez suficiente para garantir um bom funcionamento da aeronave durante todas as etapas de voo. Além disso, as MS se apresentam superior ao mínimo imposto, ou seja, a estrutura é capaz de suportar todos os esforços. Dessa forma, se o critério de parada para variação da seção não fosse atingido, a seção poderia ser reduzida ainda mais e por consequência uma maior redução de peso. Porém, ao comparar os resultados de MS obtidos através da função *fitness* e com os novos valores de carregamentos após as simulações finais, presente nas tabelas (9) e (10), percebe-se que os valores do otimizador são inferiores aos reais, fato que é explicado pelo próprio método. Uma vez que as iterações dentro do AG utilizam como valores de carregamentos, os obtidos através da simulação para um empilhamento $[0]_T$ e como apresentado na equação (61), os esforços internos calculados através do MEF estão ligados à rigidez do elemento, então uma diferente disposição das lâminas pode tanto aumentar quanto diminuir as forças. Outra

possibilidade é a seção de análise se localizar no engaste da estrutura, posição que oferece uma concentração de tensão.

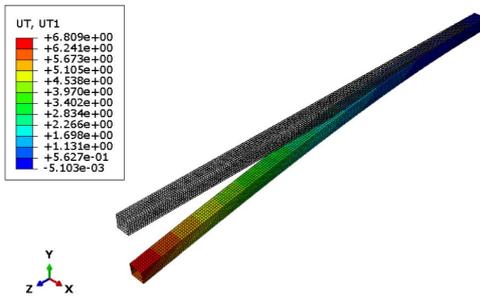
Dessa forma, têm-se a vantagem de os resultados obtidos através do AG serem mais seguros, pois a MS aumenta após a simulação com o novo empilhamento. Por outro lado, existe o problema de que o método não pode possuir um critério de penalização, já que resultados que aparentam ruins dentro da função *fitness*, podem apresentar valores dentro dos limites após a simulação final.

Figura 29 – Resultados para o caso 1 da seção final

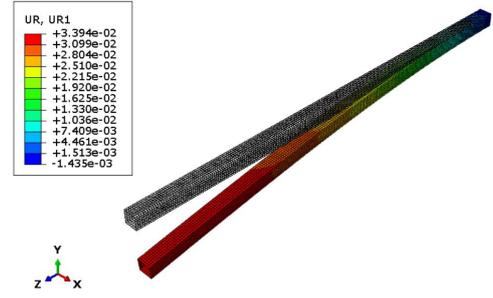


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

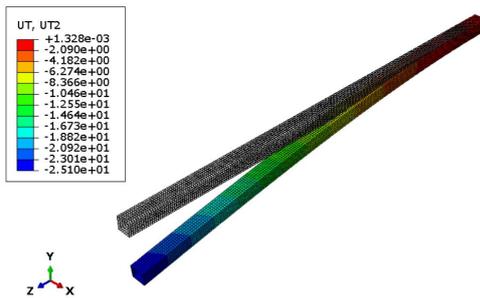
Figura 30 – Resultados para o caso 2 da seção final



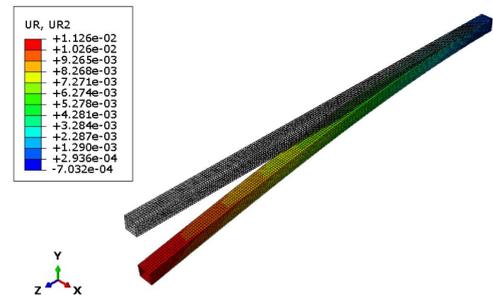
(a) Campo de deslocamento transversal em X [mm]



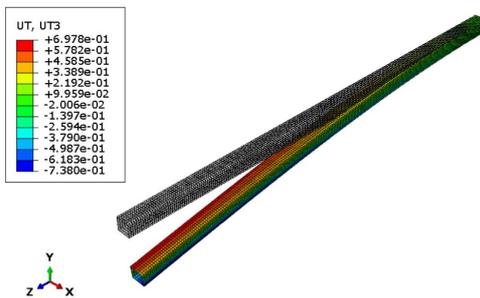
(b) Campo de deslocamento angular em X [rad]



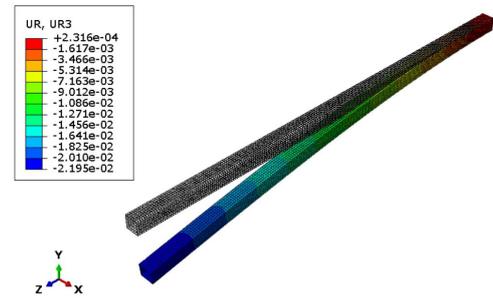
(c) Campo de deslocamento transversal em Y [mm]



(d) Campo de deslocamento angular em Y [rad]



(e) Campo de deslocamento transversal em Z [mm]



(f) Campo de deslocamento angular em Z [rad]

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

8 CONCLUSÃO

Como objetivo deste trabalho estabeleceu-se o desenvolvimento de uma metodologia de otimização de um *tailboom* em material compósito para uma aeronave rádio controlada. A análise foi realizado por meio de simulações em elementos finitos através do *software* Abaqus[®] e uma rotina na de otimização utilizando o algoritmo genético fornecido por Gad (2021) com uma função *fitness* baseada na TCL.

Para testar o funcionamento do programa, realizou-se um estudo de caso a partir dos dados do projeto da aeronave de 2022 da classe regular da Equipe Albatroz Aerodesign. A partir dos resultados obtidos, observou-se que o método funciona, porém são necessários alguns cuidados em relação aos resultados obtidos diretamente do algoritmo genético, uma vez que esses podem apresentar algumas inconsistências por conta das considerações usadas para seu funcionamento.

A metodologia apresenta uma vantagem de tempo quando comparada com as técnicas de otimização presentes em *softwares* comerciais, pois excluí a necessidade da realização de simulações para cada sequência de empilhamento, porém carece na precisão dos resultados, uma vez que o AG encontra valores inferiores aos reais, sendo necessário a simulação computacional para atingir os resultados corretos. Devido a isso, sua utilização é viável em uma etapa preliminar de projeto a fim de determinar uma geometria inicial de forma rápida.

8.1 TRABALHOS FUTUROS

O programa desconsidera os efeitos de cisalhamento transversal na estrutura ao considerá-la uma viga longa, dessa forma não é possível analisar materiais sujeitos à falha por cisalhamento, como a espuma de PVC expandido, material muito utilizado no aerodesign. Recomenda-se então a implementação dessas considerações.

Sugere-se um estudo mais detalhado dos resultados adquiridos por meio de uma simulação computacional na região de engaste, uma vez que esse é um dos possíveis responsáveis pela imprecisão dos resultados adquiridos por meio da otimização em AG.

Como o objetivo do trabalho é o desenvolvimento do método, utilizaram-se os parâmetros padrão de funcionamento do AG. Dessa forma, aconselha-se o estudo desses valores para um melhor funcionamento do otimizador.

Dentro da realidade da equipe, as estruturas em materiais compósitos são construídas de forma manual, portanto, indica-se o desenvolvimento de um método de avaliar a influência das imprecisões do método construtivo nos resultados finais da estrutural.

Por último, recomenda-se estudar a possibilidade de modificar a seção transversal e também, implementar o código da simulação para seções que variam ao longo do comprimento, pois os esforços se concentram na região do engaste, não sendo necessária a mesma seção transversal ao longo de todo o comprimento do *tailboom*.

REFERÊNCIAS

- AZZI, V. D.; TSAI, S. W. **Anisotropic strength of composites**. 5. ed. [S.l.: s.n.], 1965. Citado na página 22.
- CAVAZZUTI, M. **Optimization Methods: From Theory to Design**: Scientific and technological aspect in mechanics. [S.l.]: Springer, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 36, 39 e 40.
- COOK, R. D. *et al.* **Concepts and applications of finite elements analysis**. 4. ed. Danvers, MA: John Wiley & Sons, Inc, 2001. Citado na página 32.
- DOYLE, D. V. **Elastic Properties of Wood**: The young's moduli, moduli of rigidity and poisson's ratios of balsa and quipo. Wisconsin: [s.n.], 1956. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- EIBEN, A. E.; SMITH, J. E. **Introduction to Evolutionary Computing**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2015. Citado na página 39.
- FUGA, F. R. **Análise computacional e analítica do comportamento à flexão de vigas laminadas**. 2017. Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Trabalho de Conclusão de Curso. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 29.
- GABRIEL, P. H. R.; DELBEM, A. C. B. **Fundamentos de Algoritmos Evolutivos**. São Carlos, SP: ICMC - USP, 2008. Citado na página 39.
- GAD, A. F. **PyGAD: An Intuitive Genetic Algorithm Python Library**. 2021. Citado 3 vezes nas páginas 42, 44 e 57.
- GOLDBARG, E. G. **Otimização Combinatória e Meta-heurísticas**: Algoritmos e aplicações. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2005. Citado na página 38.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2011. Citado na página 16.
- JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. 2. ed. Philadelphia, PA: Taylor and Francis, Inc, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 17, 21, 22, 24 e 29.
- KAW, A. K. **Mechanics of composites materials**. 2. ed. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 19, 24 e 29.
- KIM, N.-H.; SANKAR, B. V. **Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: GEN, 2011. Citado na página 32.
- KLARBRING, A.; CHRISTENSEN, P. **An Introduction to Structural Optimization**. [S.l.]: Springer, 2009. Citado na página 37.
- KOCHENDERFER, M. J.; WHEELER, T. A. **Algorithms for Optimization**. 1. ed. Cambridge, MA: The MIT Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 38, 40 e 41.
- KRAMER, O. **Genetic Algorithm Essentials**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- LINHARES, B. H.; SOUZA, L. C. **Estruturas e Ensaio Estruturais**. Joinville, SC: Equipe Albatroz Aerodesign, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 50.

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais Compostos e Estruturas-Sanduiche**: Projeto e análise. 1. ed. Barueri, SP: Manole, 2005. Citado 7 vezes nas páginas 13, 17, 18, 24, 25, 26 e 32.

MENEZES, Roberto. **Thermal Generator Scheduling using Adaptive Genetic Algorithm and Interior Point Method**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Sergipe, 01 2017. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

NETO, F. L.; PARDINI, L. C. **Compósitos estruturais**: Ciência e tecnologia. 2. ed. São Paulo, SP: Blucher, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 13, 21 e 22.

RAO, S. S. **Engineering Optimization**: Theory and practice. 4. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 38.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**: theory and analysis. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press LLC, 2004. Citado na página 33.

ROSA, E. da; TOPOROSKI, J. **Introdução ao projeto aeronáutico**: Uma contribuição á competição sae aerodesign. 1. ed. Florianópolis, SC: UFSC, Centro Tecnológico, 2005. Citado na página 14.

SAE, Brasil. **Sociedade de Engenheiros de Automóveis**. 2023. <https://saebrasil.org.br/programas-estudantis/aero-design-sae-brasil/>. Citado na página 13.

TITA, V. **Projeto e Fabricação de Estruturas em Material Compósito Polimérico**. São Carlos, SP: [s.n.], 2006. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.

TSAI, S. W.; WU, E. M. A. **A general theory of strength for anisotropic materials**. [S.l.]: J. Composite Materials, 1971. Citado na página 22.