

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM**

EIKE DACOREGIO DAUFENBACH

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA PARA OTIMIZAÇÃO DA
EFICIÊNCIA DE HÉLICES PARA AERONAVES RADIOCONTROLADAS DE
COMPETIÇÃO**

JOINVILLE

2023

EIKE DACOREGIO DAUFENBACH

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA PARA OTIMIZAÇÃO DA
EFICIÊNCIA DE HÉLICES PARA AERONAVES RADIOCONTROLADAS DE
COMPETIÇÃO**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

JOINVILLE

2023

EIKE DACOREGIO DAUFENBACH

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA PARA OTIMIZAÇÃO DA
EFICIÊNCIA DE HÉLICES PARA AERONAVES RADIOCONTROLADAS DE
COMPETIÇÃO**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Ricardo de Medeiros
UDESC - CCT

Membros:

Prof. Dr. Guilherme de Faveri
UDESC - CCT

Eng. Luis Nicolas Kuodrek da Silva
Indicium Tech

Joinville, 07 de julho de 2023

Aos membros da Equipe Albatroz Aerodesign,
que este trabalho possa retribuir a contribuição
do Aerodesign em minha formação como
engenheiro!

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu pai, José Roberto, e minha mãe, Naise, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando ao longo de minha trajetória. O estudo para o presente trabalho teve início, certamente, muito antes da ideia de cursar uma graduação em engenharia mecânica. Sou grato por todo o incentivo de vocês na prática do aerodelismo e paramotor, esportes que são os grandes motivadores desse trabalho. Sou grato à minha namorada, Ana Beatriz, pelo apoio e compreensão durante o tempo empregado neste trabalho.

À Equipe Albatroz Aerodesign, onde pude realmente desenvolver o senso de engenharia aplicada, compartilhando experiências e aprendendo constantemente. Agradeço especialmente ao Professor Dr. Fernando Humel Lafratta, coordenador da equipe, pelo empenho de sempre para que esse projeto aconteça com excelência, sempre focando no desenvolvimento de cada membro da equipe. Participar da Equipe Albatroz Aerodesign foi, para mim, uma experiência de incalculável impacto positivo, capaz de criar uma nova visão sobre tudo que posso realizar.

Ao meu orientador, Professor Dr. Ricardo de Medeiros, pela excelência em orientação e qualidade técnica, além do empenho para que o o trabalho fosse realizado com máximo aproveitamento, tanto para mim, quanto no contexto da equipe Albatroz Aerodesign.

“O homem nada pode aprender senão em virtude daquilo que já sabe” (ARISTÓTELES)

RESUMO

A Equipe Albatroz Aerodesign da UDESC - CCT projeta aeronaves radiocontroladas de competição conforme o regulamento anual proposto pela SAE Brasil. Em geral, a competição SAE Brasil Aerodesign é focada para o projeto de aeronaves de carga, fazendo com que o dimensionamento da aeronave para decolagem seja extremamente importante. Para atingir os objetivos, o grupo motopropulsor da aeronave deve ser precisamente dimensionado, e a hélice é o principal componente a ser variado. Como as hélices comercialmente disponíveis são projetadas de forma genérica, para atender as mais diversas aeronaves, o desempenho da aeronave na decolagem não é ótimo. Sendo assim, o projeto de hélices de aplicação específica é de grande relevância para o aumento de competitividade da aeronave, culminando em uma melhor colocação da Equipe Albatroz Aerodesign nas competições SAE Brasil Aerodesign. O presente trabalho visa a elaboração de um otimizador para projeto preliminar de hélices aplicadas à aeronaves radiocontroladas destinadas às competições SAE Brasil Aerodesign. Dessa forma, visando a utilização pela Equipe Albatroz Aerodesign, foi desenvolvido um modelo de otimização utilizando algoritmos genéticos para o projeto de hélices em regime subsônico. A metodologia foi modelada e implementada em Python e baseia-se na teoria proposta por Adkins e Liebeck (1994) para análise das hélices. Fez-se a verificação da metodologia de cálculo comparando com a hélice proposta por Adkins e Liebeck (1994) em seu trabalho, e, posteriormente, a implementação do otimizador. Por fim, realizou-se um estudo de caso, otimizando geometrias preliminares de hélices para aplicação na Equipe Albatroz Aerodesign. Foram realizadas otimizações preliminares de duas hélices, de duas e três pás, em condições de voo análogas às de uma aeronave de competição. A geometria foi obtida, assim como os valores de tração, torque e eficiência para cada hélice. A hélice tripá otimizada apresentou melhor desempenho para essa condição, com uma tração 5,4% maior e eficiência 5,6% maior, comparando com a bipá. A eficácia do otimizador em aproveitar o torque disponível do motor foi verificada, dado que as duas hélices foram otimizadas até que o torque requerido fosse o máximo torque disponível. Os resultados encontrados foram satisfatórios, viabilizando novos estudos da Equipe Albatroz Aerodesign sobre o assunto, sendo que a otimização de hélices possui potencial para aumento de pontuação de voo na competição.

Palavras-chave: Hélice. Aerodesign. Otimização. Elemento de pá. Teoria de vórtices.

ABSTRACT

The Albatroz Aerodesign Team from UDESC - CCT designs competition radio-controlled aircraft according to the annual regulations proposed by SAE Brasil. In general, the SAE Brasil Aerodesign competition focuses on the design of cargo aircraft, making the aircraft takeoff analysis extremely important. To achieve the objectives, the aircraft's powertrain must be precisely dimensioned, with the propeller being the main component to be changed. Since commercially available propellers are generically designed to meet the needs of various aircraft, the performance of the aircraft during takeoff is not optimal. Therefore, the design of specific application propellers is really relevant to increase the competitiveness of the aircraft, resulting in a better classification for the Albatroz Aerodesign Team in the SAE Brasil Aerodesign competitions. This work aims to develop an optimizer for the preliminary design of propellers applied to radio-controlled aircraft intended for SAE Brazil Aerodesign competitions. With the goal of being used by the Albatroz Aerodesign Team, a genetic algorithms optimization model was developed for the design of subsonic propellers. The methodology was modeled and implemented in Python, based on the theory proposed by Adkins and Liebeck (1994) for propeller analysis. The calculation methodology was verified by comparing it with the propeller proposed by Adkins and Liebeck (1994) in their work, and subsequently, the optimizer was implemented. Finally, a case study was conducted, optimizing preliminary propeller geometries for application in the Albatroz Aerodesign Team. Preliminary optimizations of two propellers, a two-blade and a three-blade, were carried out under generic flight conditions of a competition aircraft. The geometry, as well as the values of thrust, torque, and efficiency for each propeller, were obtained. The optimized three-blade propeller showed better performance for this condition, with 5.4% higher thrust and 5.6% higher efficiency, comparing with the two-blade. The effectiveness of the optimizer to use all the available engine torque was verified, as both propellers were optimized until the required torque reached the maximum available torque. The results obtained were satisfactory, enabling further studies by the Albatroz Aerodesign Team on the subject, as propeller optimization has the potential to increase flight scores in the competition.

Keywords: Propeller. Aerodesign. Optimization. Blade Element Method. Vortex theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Equipe Albatroz Aerodesign e aeronaves na competição de 2019.	14
Figura 2 – Estrutura organizacional da Equipe Albatroz Aerodesign.	15
Figura 3 – Aeronave da classe regular de 2019 após decolagem na competição.	16
Figura 4 – Representação de uma força.	17
Figura 5 – Representação do torque de uma força.	18
Figura 6 – Parâmetros geométricos de um aerofólio.	18
Figura 7 – Distribuição de pressão em um aerofólio.	19
Figura 8 – Força no centro aerodinâmico.	19
Figura 9 – Forças atuantes no aerofólio.	20
Figura 10 – Representação qualitativa do escoamento incompressível em torno de uma esfera.	21
Figura 11 – Coeficientes de sustentação, arrasto e momento.	22
Figura 12 – Comparação entre os aerofólios NACA0012 e NACA 2412.	23
Figura 13 – Geometria da hélice.	23
Figura 14 – Seções da hélice.	24
Figura 15 – Ângulos na seção da hélice.	25
Figura 16 – Passo da hélice.	25
Figura 17 – Teoria do disco atuador.	26
Figura 18 – Eficiência ideal em função do coeficiente de tração.	28
Figura 19 – Elemento de pá.	29
Figura 20 – Ângulos no elemento de pá.	29
Figura 21 – Interferência entre os elementos.	30
Figura 22 – Coeficientes de força em um elemento de pá.	33
Figura 23 – Diagrama de forças em um elemento de pá.	34
Figura 24 – Geometria do escoamento no elemento de posição radial r	35
Figura 25 – Ciclo do Algoritmo Genético.	37
Figura 26 – Fluxograma do trabalho e implementação do otimizador.	40
Figura 27 – Fluxograma de funcionamento do otimizador.	41
Figura 28 – Cordas e ângulos de controle na pá.	44
Figura 29 – Fluxograma de cálculo em um elemento de pá.	45
Figura 30 – Coeficientes aerodinâmicos do NACA 4415.	47
Figura 31 – Comparação do ângulo ϕ	48
Figura 32 – Comparação do fator de interferência axial a	49
Figura 33 – Comparação do fator de interferência radial a'	50
Figura 34 – Comparação da forma de planta das pás.	53
Figura 35 – Comparação de perfil das pás.	53
Figura 36 – Distribuição de tração ao longo do raio.	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do Algoritmo Genético PyGag (GAD, 2021).	42
Tabela 2 – Parâmetros fixos de entrada.	43
Tabela 3 – Variáveis de otimização.	43
Tabela 4 – Parâmetros de geometria e condições de simulação.	46
Tabela 5 – Cordas, Ângulos de torção geométrica e C_L ao longo da pá.	46
Tabela 6 – Comparação de tração e eficiência.	47
Tabela 7 – Diferença relativa para ϕ	48
Tabela 8 – Diferença relativa para a	48
Tabela 9 – Diferença relativa para a'	49
Tabela 10 – Condições de simulação para o estudo de caso.	51
Tabela 11 – Parâmetros geométricos das hélices para o estudo de caso.	51
Tabela 12 – Limites das variáveis de otimização para o estudo de caso.	51
Tabela 13 – Resultados de performance das hélices otimizadas.	52
Tabela 14 – Resultados de geometria das hélices otimizadas.	52

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MTOW	<i>Maximum Take-Off Weight</i>
CCT	Centro de Ciências Tecnológicas
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
GA	<i>Genetic Algorithm</i>
NACA	<i>National Advisory Committee for Aeronautics</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Densidade do Ar
ξ	Posição radial adimensional ($\frac{r}{R}$)
α	Ângulo de ataque do elemento
β	Ângulo de torção geométrica da pá no elemento
ϕ	Ângulo do escoamento no elemento
ϕ_t	Ângulo do escoamento no elemento da ponta da pá
a	Fator de interferência axial
a'	Fator de interferência radial
B	Número de pás
b	fator de escoamento axial
c	Corda do elemento
C_L	Coefficiente de sustentação
C_D	Coefficiente de Arrasto
C_x	Coefficiente de força transversal
C_y	Coefficiente de força axial
C_T	Coefficiente de Tração
C_P	Coefficiente de Portência
D	Diâmetro da hélice
F	Fator de perda de Prandtl
V	Velocidade axial da aeronave
W	Velocidade resultante local
Ω	Velocidade angular da hélice [Rad/s]
n	Velocidade angular da hélice [rps]
J	Razão de avanço da hélice ($\frac{V}{nD}$)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1	DEFINIÇÕES FÍSICAS ENVOLVIDAS	17
2.1.1	Força	17
2.1.2	Torque	17
2.2	AEROFÓLIOS	18
2.2.1	Forças Aerodinâmicas	18
2.2.2	Número de Reynolds	21
2.2.3	Coefficientes Aerodinâmicos	21
2.2.4	Aerofólios NACA	22
2.3	HÉLICE	23
2.3.1	Parâmetros Geométricos	23
2.3.2	Teoria do Disco Atuador	26
2.3.3	Teoria do Elemento de Pá	28
2.3.4	Evolução das Teorias Clássicas	31
2.3.5	Teoria de Adkins e Liebeck	32
2.3.5.1	<i>Análise de uma Geometria Arbitrária</i>	32
2.3.5.2	<i>Eficiência da Hélice</i>	35
2.4	OTIMIZAÇÃO	36
2.4.1	Algoritmo Genético	36
2.4.1.1	<i>Crossover</i>	37
2.4.1.2	<i>Mutação</i>	37
2.4.1.3	<i>Mapeamento Genótipo-Fenótipo</i>	37
2.4.1.4	<i>Função Fitness</i>	38
2.4.1.5	<i>Seleção</i>	38
2.4.2	Parâmetros de Otimização	38
3	METODOLOGIA	40
3.1	ROTINA DE OTIMIZAÇÃO	40
3.1.1	Penalização de indivíduos	41
3.1.2	Função objetivo	42
3.1.3	Parâmetros do GA	42
3.2	PARÂMETROS DE ENTRADA	42
3.2.1	Parâmetros Fixos	43
3.2.2	Variáveis de Otimização	43
3.3	CÁLCULO DA HÉLICE	44

4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	46
4.1	VERIFICAÇÃO DA ROTINA DE CÁLCULO	46
4.2	ESTUDO DE CASO	50
5	CONCLUSÃO	55
5.1	SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS	55
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

O programa Competição SAE BRASIL AeroDesign é um desafio lançado aos estudantes de Engenharia que tem como principal objetivo propiciar a difusão e o intercâmbio de técnicas e conhecimentos de Engenharia Aeronáutica, através de aplicações práticas e da competição entre equipes. Ao participar do programa SAE AeroDesign o aluno se envolve com um caso real de desenvolvimento de projeto aeronáutico, desde sua concepção, projeto detalhado, construção e testes (SAE, 2023). No contexto técnico da competição, apesar do regulamento e missão de voo ser diferente a cada ano, a essência da competição é projetar e construir uma aeronave capaz de carregar uma quantidade considerável de carga paga. Assim, dadas as limitações geométricas da aeronave e de espaço para decolagem, as equipes devem projetar uma aeronave ótima em pontuação de voo, dentro das regras impostas.

No ambiente do Centro de Ciências Tecnológicas - CCT da UDESC, a Equipe Albatroz Aerodesign foi fundada em 2001 e compete em duas das três classes existentes na competição, Regular e Micro. A primeira possui, em geral, uma limitação fixa de potência do grupo moto-propulsor e restrição geométrica da aeronave, assim como a delimitação da região de decolagem, sendo o objetivo a maior carga paga. Já na classe Micro, a aeronave possui missões variadas, mas trata-se de uma restrição geométrica na qual a aeronave é desmontável e pode ser armazenada em um volume fixo, porém sem limitações ao grupo moto-propulsor. A Figura 1 mostra a Equipe Albatroz Aerodesign na competição de 2019.

Figura 1 – Equipe Albatroz Aerodesign e aeronaves na competição de 2019.



Fonte: O autor (2019).

A equipe Albatroz Aerodesign é dividida em áreas, como exposto na Figura 2, e o projeto ocorre de forma integrada, área após área, com as devidas realimentações de dados e informações. Com a geometria da aeronave preliminarmente definida nas áreas de aerodinâmica e estabilidade e controle, a área de desempenho é responsável pela avaliação do desempenho da aeronave em todas as fases de voo, inclusive na decolagem.

Figura 2 – Estrutura organizacional da Equipe Albatroz Aerodesign.



Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

A contribuição do grupo moto-propulsor para a aeronave é gerar a força propulsiva ou tração. Um conjunto motor-hélice produz tração com base na terceira lei de Newton, ou seja, a hélice produz uma força que atua no ar e o desloca para trás, logo há uma reação na qual a aeronave é puxada para frente (SADRAEY, 2013). A decolagem da aeronave é de suma importância na determinação da carga a qual ela é capaz de levar e a força gerada pela hélice possui grande influência na determinação do MTOW da aeronave. Sendo assim, a otimização da hélice é de grande importância para que o MTOW da aeronave seja máximo. A Figura 3 mostra a aeronave de 2019 da equipe Albatroz em subida após a decolagem.

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo desenvolver uma rotina para otimização da geometria preliminar de uma hélice, com base no modelo proposto por Adkins e Liebeck (1994), tendo o aumento de eficiência como função objetivo e utilizando o modelo de otimização por algoritmos genéticos. Vale ressaltar que a função objetivo pode ser facilmente alterada, visando atender da melhor forma o regulamento da competição SAE Brasil Aerodesign. Por fim, busca-se verificar a validade de tal programa e utilizá-lo no desenvolvimento preliminar de uma hélice otimizada em um estudo de caso.

Figura 3 – Aeronave da classe regular de 2019 após decolagem na competição.



Fonte: O autor (2019).

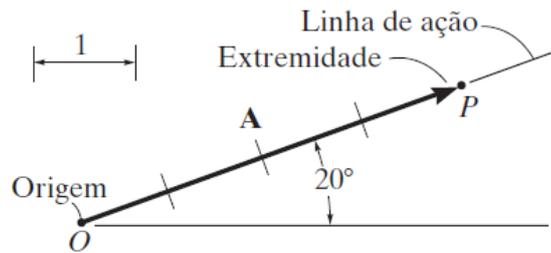
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 DEFINIÇÕES FÍSICAS ENVOLVIDAS

2.1.1 Força

Segundo Hibbeler (2010), a força é a ação exercida por um corpo sobre outro. Para Beer, Johnston e Mazurek (2019), uma força representa uma ação sobre um corpo e geralmente é caracterizada por seu ponto de aplicação, sua intensidade, sua direção e seu sentido. A direção de uma força é definida pela linha de ação e a indicação de seu sentido é imprescindível. Duas forças que tenham a mesma intensidade e a mesma linha de ação, mas sentidos diferentes, terão efeitos diretamente opostos sobre uma partícula. A força é fisicamente representada por um vetor, e sua intensidade é dada pelo módulo do vetor, como representado na Figura 4.

Figura 4 – Representação de uma força.



Fonte: (HIBBELER, 2010).

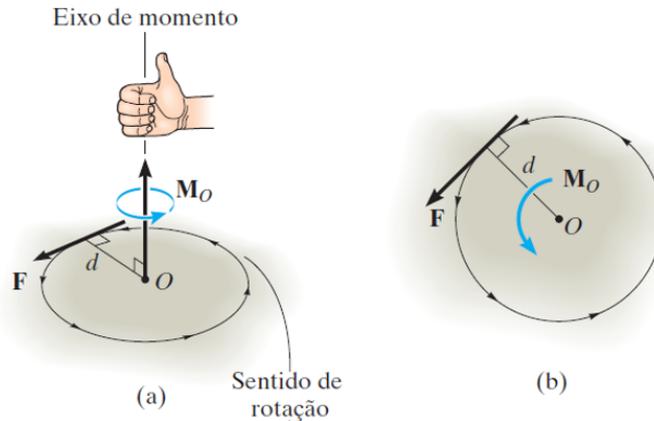
2.1.2 Torque

Segundo Resnick, Halliday e Walker (2016), o torque de uma força é tendência de giro provocada em um corpo, dada a aplicação de uma força em uma direção que não passa pelo centro de rotação do corpo. É uma grandeza vetorial que se dá por,

$$\tau = \vec{d} \times \vec{F}. \quad (1)$$

Logo, o vetor de torque é normal ao plano formado pelos vetores força e posição, como representado na Figura 5.

Figura 5 – Representação do torque de uma força.

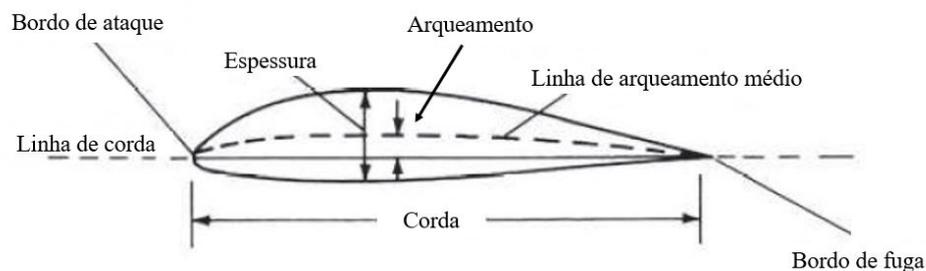


Fonte: (HIBBELER, 2010).

2.2 AEROFÓLIOS

Segundo Anderson (2017), um aerofólio é definido como qualquer seção transversal em um plano perpendicular ao eixo da envergadura de uma asa. As principais características geométricas de um aerofólio genérico são mostradas na Figura 6. O bordo de fuga e o bordo de ataque são os pontos de extremidade do aerofólio, sendo esse último, o ponto que tem primeiro contato com o escoamento, separando o escoamento para o intradorso e extradorso da asa ou hélice. A corda é a distância mínima entre os bordos de fuga e de ataque, sendo a linha que liga esses dois pontos denominada linha de corda. A linha de arqueamento médio é a linha traçada pelos pontos médios entre o intradorso e extradorso, ao longo da corda. O arqueamento é a distância máxima entre a linha de corda e a linha de arqueamento médio. A espessura é a máxima distância entre o intradorso e o extradorso.

Figura 6 – Parâmetros geométricos de um aerofólio.



Fonte: Adaptado de Anderson (2017).

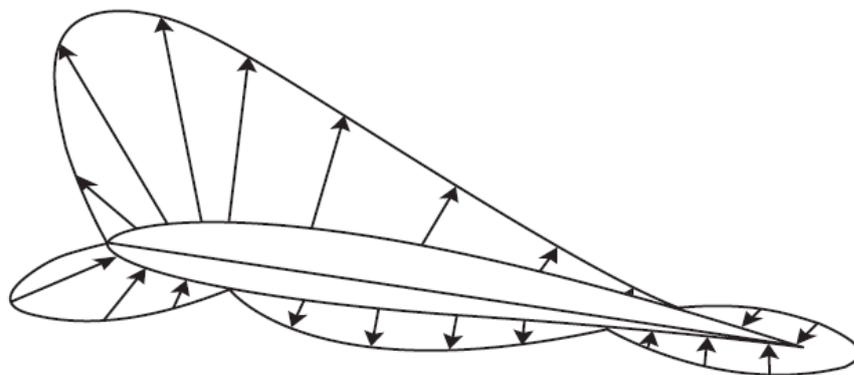
2.2.1 Forças Aerodinâmicas

Dada a geometria do perfil aerodinâmico, com o extradorso mais arqueado que o intradorso, quando exposto a um escoamento, faz com que as partículas de fluido, que se separam no

bordo de ataque, percorram uma maior distância no extradorso que no intradorso, em um mesmo tempo. Isso provoca um aumento de velocidade e, conseqüentemente, redução da pressão no extradorso. Portanto, gera-se distribuição de pressão da interação da geometria com o fluido.

Para Sadraey (2013), em um perfil de arqueamento positivo, a pressão estática na região superior do perfil é menor que a pressão ambiente, enquanto na região inferior do perfil a pressão estática é maior que a pressão ambiente. Isso se deve à velocidade maior na região superior e menor na região inferior. Quanto maior o ângulo de ataque do perfil, maior a diferença de pressão entre a região superior e inferior do perfil. A Figura 7 mostra a distribuição de pressão em um perfil aerodinâmico.

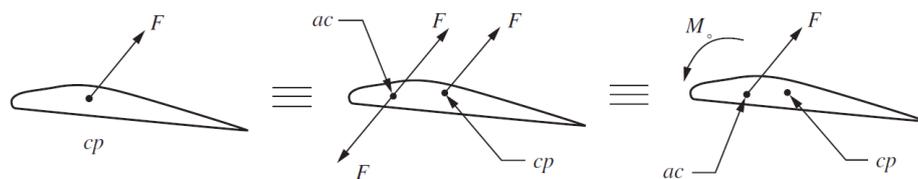
Figura 7 – Distribuição de pressão em um aerofólio.



Fonte: (SADRAEY, 2013).

Conforme Sadraey (2013), a integração da pressão na superfície do contorno do perfil resulta em uma força aerodinâmica que atua em um ponto chamado centro de pressão. A posição desse ponto na corda é dependente da geometria do perfil, ângulo de ataque, velocidade e propriedades do fluido. Logo a força aerodinâmica atuante no centro de pressão pode ser transladada para o centro aerodinâmico, posição de referência para o estudo de aerofólios, fazendo a inclusão de um momento, gerado pela distância entre o centro de pressão e o centro aerodinâmico, conforme a Figura 8.

Figura 8 – Força no centro aerodinâmico.

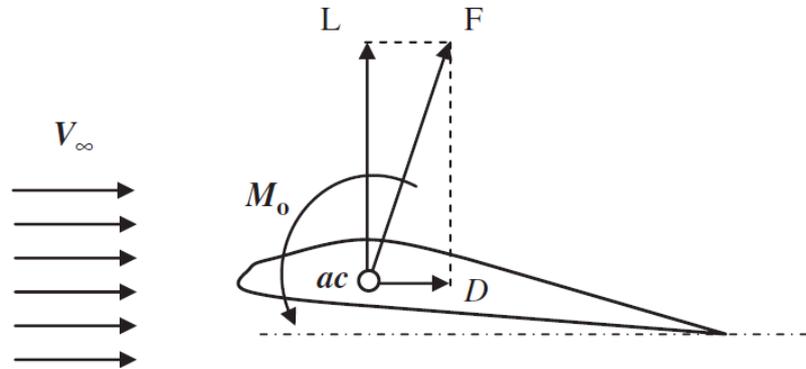


Fonte: (SADRAEY, 2013).

A força aerodinâmica pode ser resolvida em duas forças, perpendicular (sustentação) e

paralela (arrasto) ao vento relativo (SADRAEY, 2013). A Figura 9 apresenta a representação dessas forças.

Figura 9 – Forças atuantes no aerofólio.



Fonte: (SADRAEY, 2013).

Segundo Houghton e Carpenter (2003), a força de sustentação L é a componente da força aerodinâmica perpendicular ao escoamento não perturbado. A força de arrasto D é a componente da força aerodinâmica atuante na direção do escoamento não perturbado. No entanto, para os estudos de aerofólios é preferível a utilização de coeficientes adimensionais. Para Anderson (2017), o coeficiente de sustentação é dado por

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad (2)$$

onde L é a força de sustentação, ρ é a densidade do fluido, V é a velocidade do escoamento e S é a área de asa.

O coeficiente de arrasto por

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}, \quad (3)$$

onde D é a força de arrasto.

E o coeficiente de momento definido como

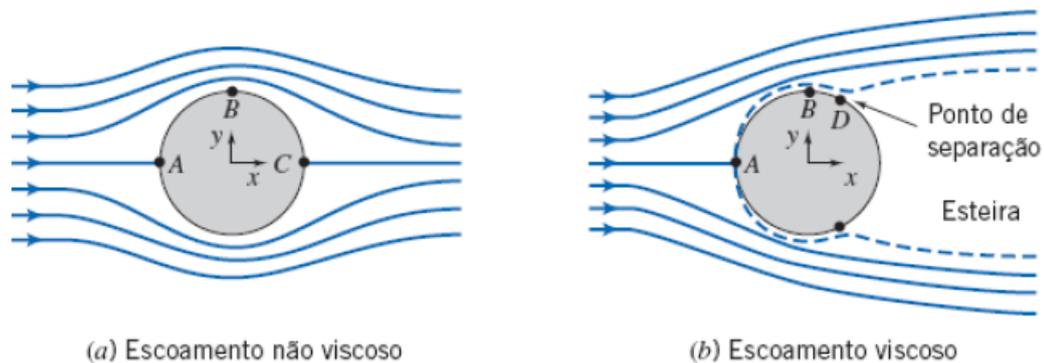
$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V^2 S c}, \quad (4)$$

onde M é o momento da seção e c é a corda.

2.2.2 Número de Reynolds

Conforme Anderson (2017), o número de Reynolds exerce uma grande influência sobre as propriedades de uma camada limite e governa a natureza dos fluxos viscosos de forma geral. A Figura 10 mostra a diferença do escoamento não viscoso e viscoso. Tal diferenciação é importante para o entendimento da definição do número de Reynolds e do comportamento do fluido na camada limite.

Figura 10 – Representação qualitativa do escoamento incompressível em torno de uma esfera.



Fonte: (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

Para Çengel e Cimbala (2018), o regime do escoamento depende, principalmente, da razão entre forças inerciais e forças viscosas no fluido. Essa razão é chamada de número de Reynolds e se dá por

$$Re = \frac{\rho V c}{\mu}, \quad (5)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido. Segundo Fox, Pritchard e McDonald (2010), especialmente em camadas limite, existem dois tipos básicos de fluxo viscoso:

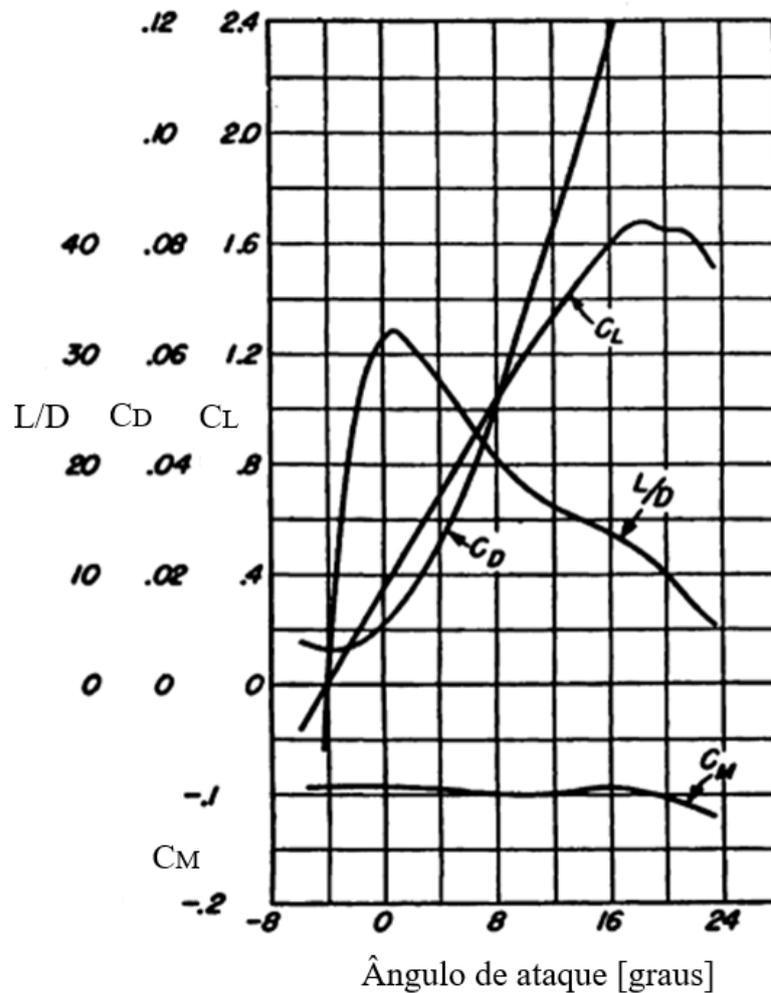
- Fluxo laminar, no qual as linhas de corrente são suaves e regulares, e um elemento fluido se move suavemente ao longo de uma linha de corrente.
- Fluxo turbulento, no qual as linhas de corrente se quebram e um elemento fluido se move de maneira aleatória, irregular e tortuosa.

2.2.3 Coeficientes Aerodinâmicos

Conforme Abbott e Doenhoff (1959), uma forma conveniente de descrever as características aerodinâmicas de uma asa é representar os valores dos coeficientes em função do ângulo de ataque, que é o ângulo entre a asa e a direção do movimento, como mostrado na Figura 11. O coeficiente de sustentação aumenta quase linearmente com o ângulo de ataque até que um valor máximo é atingido, no qual é dito que a asa "estola". O coeficiente de arrasto tem um valor mínimo em um baixo coeficiente de sustentação, e a forma da curva é aproximadamente

parabólica em ângulos de ataque abaixo do estol. Se o ponto em que o momento é tomado for corretamente escolhido (no centro aerodinâmico), o coeficiente de momento é essencialmente constante até a máxima sustentação.

Figura 11 – Coeficientes de sustentação, arrasto e momento.



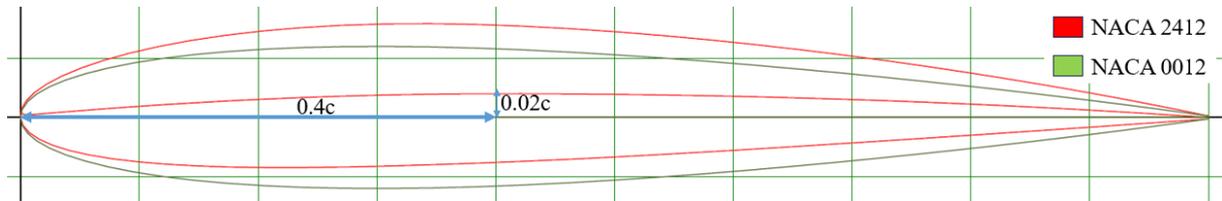
Fonte: Adaptado de Abbott e Doenhoff (1959).

2.2.4 Aerofólios NACA

Segundo Anderson (2017), a NACA - precursora da NASA - identificou diferentes formas de aerofólios com um sistema de numeração lógica. A primeira família de aerofólios NACA, desenvolvida na década de 1930, foi a série "quatro dígitos", como o aerofólio NACA 2412. Sendo o primeiro dígito o arqueamento máximo em porcentagem da corda, o segundo dígito a localização do arqueamento máximo em décimos da corda e os dois últimos dígitos retornam a espessura máxima em porcentagem da corda. Para o aerofólio NACA 2412, o arqueamento máximo é 2% da corda e está localizado em 40% da corda, desde o bordo de ataque, e a espessura máxima é 12% da corda. É comum que esses números sejam expressos em porcentagem da corda, ou seja, 2% de arqueamento em 40% da corda e 12% de espessura. Um aerofólio não

arqueado, o qual possui a linha de corda e linha de arqueamento coincidentes, é chamado de simétrico e possui os dois primeiros dígitos nulos. O NACA 0012 é um exemplo, com 12% de espessura. Uma comparação entre os aerofólios citados é exposta na Figura 12.

Figura 12 – Comparação entre os aerofólios NACA0012 e NACA 2412.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

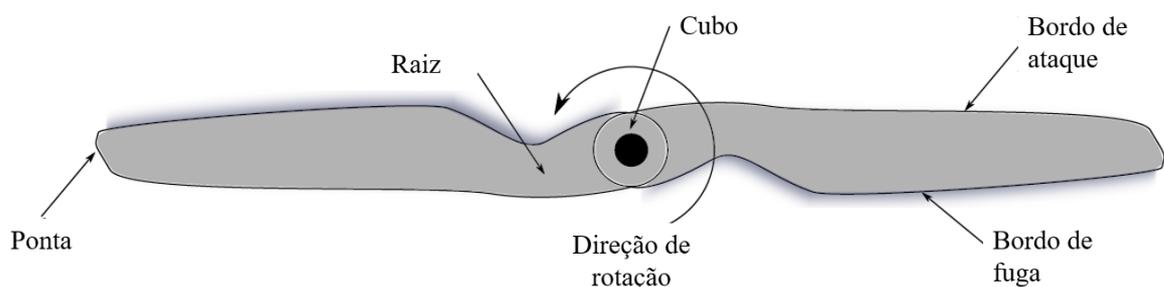
2.3 HÉLICE

Uma hélice é um dispositivo que provém força ou tração, ao custo da potência gerada por um motor, para mover um veículo em um meio fluido, como o ar ou água. Para gerar essa tração, a hélice deve deslocar uma massa de fluido em movimento na direção oposta à força de tração, ou movimento do veículo (WEICK, 1930).

2.3.1 Parâmetros Geométricos

Os parâmetros que definem a geometria de uma hélice são listados a seguir e ilustrados na Figura 13.

Figura 13 – Geometria da hélice.



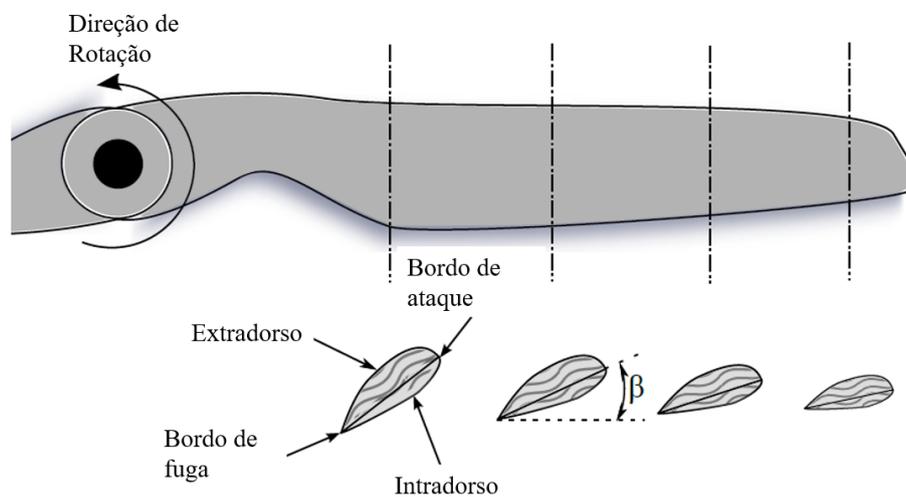
Fonte: Adaptado de Wall (2012).

- Cubo: é a região central da hélice que tem função de fixá-la ao eixo do motor ou transmissão, além de ser o local de união das pás;
- Pá: é uma asa, a qual uma das pontas está engastada ao cubo. A pá possui uma torção geométrica característica e gera a força de tração que é transmitida ao cubo.

- Raiz: é a porção da pá que se encontra próxima ao cubo. Essa região, geralmente, possui função apenas estrutural e não aerodinâmica, portanto, gera pouca ou nenhuma tração.
- Ponta: extremidade da pá mais afastada do cubo, que determina o raio da hélice e está submetida a altas velocidades tangenciais.
- Bordo de Ataque: na seção 2.2, no contexto do aerofólio, o bordo de ataque se trata de um ponto. No contexto da hélice, o bordo de ataque se estende por toda a pá, formando uma curva de acordo com a geometria da hélice, mas com função idêntica à descrita na seção 2.2;
- Bordo de Fuga: de maneira semelhante ao bordo de ataque, o bordo de fuga se estende ao longo da pá e tem função idêntica à descrita na seção 2.2;
- Diâmetro: diâmetro da circunferência descrita pela ponta da hélice quando em rotação.
- Passo: avanço da hélice por revolução, que, assim como o diâmetro, é um parâmetro que caracteriza comercialmente a hélice.

Além destes, outros parâmetros mais específicos determinam a performance de uma hélice, conforme a Figura 14. Em qualquer seção transversal de uma pá de hélice, há um

Figura 14 – Seções da hélice.



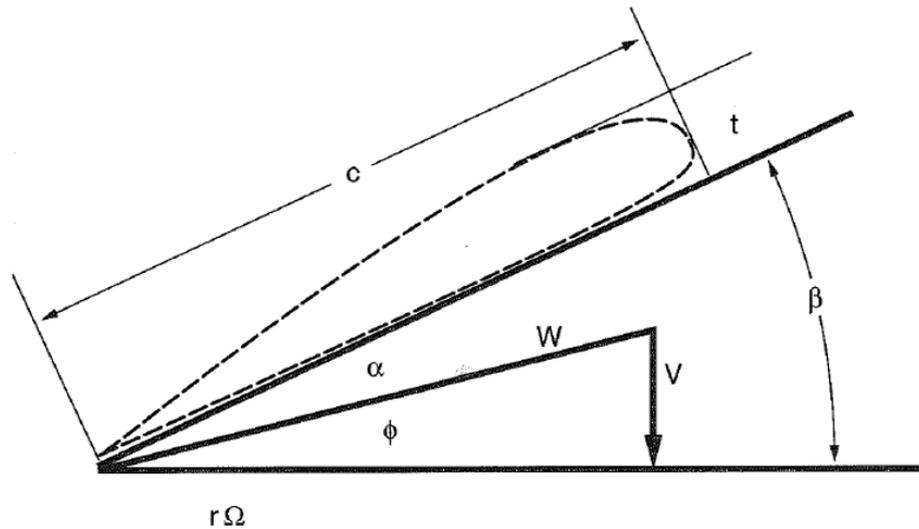
Fonte: Adaptado de Wall (2012).

aerofólio em que se pode observar os ângulos α , β e ϕ , mostrados na Figura 15 e definidos como:

- α : é o ângulo de ataque do perfil, entre a linha de corda e o escoamento sentido naquela seção da pá;
- β : é o ângulo de torção geométrica daquela seção, definido entre a linha de corda e o plano de rotação da hélice;

- ϕ : é o ângulo do escoamento sentido na seção em relação ao plano de rotação da hélice. Esse ângulo se dá pela soma vetorial das componentes de velocidade tangencial e velocidade axial da aeronave e também é dado por $\beta = \phi + \alpha$;

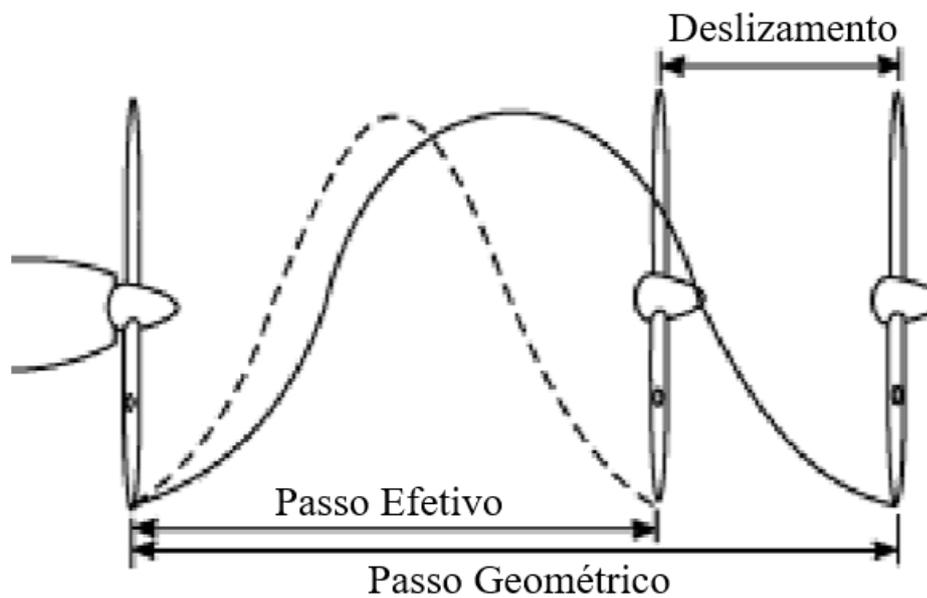
Figura 15 – Ângulos na seção da hélice.



Fonte: Adaptado de Lowry (1999).

Conforme Weick (1930), o passo efetivo de uma hélice, Figura 16, é dado pelo avanço real da hélice em uma revolução, visto que, por conta de perdas energéticas, o passo geométrico não é atingido.

Figura 16 – Passo da hélice.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

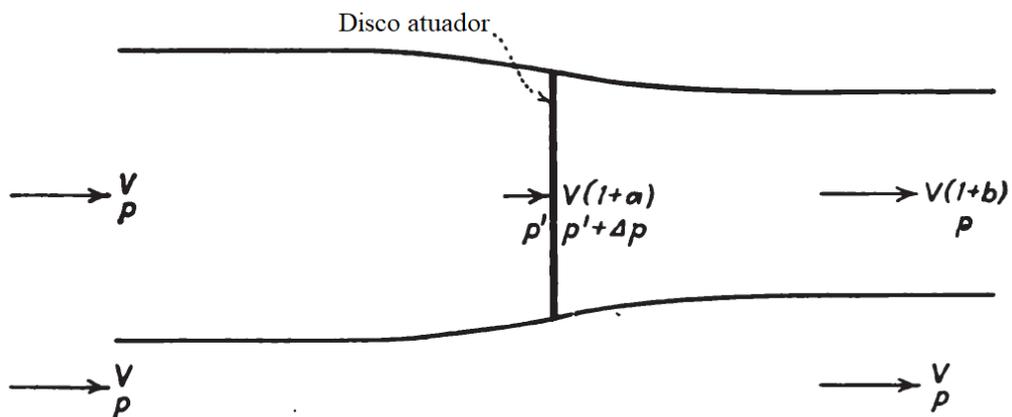
2.3.2 Teoria do Disco Atuador

O desenvolvimento de uma teoria racional de hélice iniciou-se com o trabalho de Rankine e Froude no século XIX. Na ocasião o interesse era na propulsão marinha, mas os princípios fundamentais são os mesmos para água e ar. Os mesmos desenvolveram as relações fundamentais de momento que regem um dispositivo propulsor em um meio fluido (WALD, 2006).

Segundo Weick (1930), a teoria do disco atuador aproxima a hélice para um disco que avança no meio, produzindo uma tração uniforme T , com pressões diferentes na frente e atrás do disco. Este disco pode ser imaginado como uma hélice com número infinito de pás e é assumido que o fluxo de ar é uniforme nos dois lados do disco, logo a velocidade axial é igual imediatamente a frente e atrás do disco. Além disso, considera-se que não há torque no disco e este não provoca qualquer tipo de rotação no ar. E, ainda, que o fluido é perfeito, incompressível e de viscosidade nula.

Na prática, a hélice avança em um meio fluido, porém, por conveniência, a teoria do disco atuador considera o disco estacionário, com um escoamento de fluido que incide sobre este. A Figura 17 ilustra o conceito desse modelo, no qual o fluido incide com velocidade V e pressão p . Imediatamente na frente do disco a pressão é reduzida para p' e recebe um incremento de Δp ao passar por ele. A velocidade no entorno do disco é incrementada de aV e assume o valor de $V + aV$. Em uma região mais distante do disco a velocidade tem um novo incremento para $V + bV$ e a pressão retoma o valor de p (WEICK, 1930).

Figura 17 – Teoria do disco atuador.



Fonte: Adaptado de Weick (1930).

Conforme Weick (1930), aplicando a equação de Bernoulli para os dois lados do disco, obtém-se a relação

$$\Delta p = \rho V^2 b \left(1 + \frac{b}{2}\right). \quad (6)$$

Logo, sendo A a área do disco, obtém-se a equação (7) para a tração T ,

$$T = A\Delta p = A\rho V^2 b \left(1 + \frac{b}{2}\right), \quad (7)$$

$$T = A\Delta p = A\rho V^2 b(1 + a). \quad (8)$$

Porém, a tração T pode também ser dada pela equação (8). Logo, igualando-se as duas expressões para a tração, obtém-se a relação $a = \frac{b}{2}$. Assim, conforme a teoria do disco atuador, metade do incremento de velocidade provocado no escoamento é realizado antes do fluido passar pelo disco e a outra metade, após o disco.

Segundo Weick (1930), a eficiência ideal da hélice é dada por

$$\eta = \frac{1}{1 + a} \quad (9)$$

e é um valor limite de eficiência que só poderia ser atingido por uma hélice ideal. Entretanto, podem ser citadas algumas perdas reais para que as hélices não desempenhem essa eficiência:

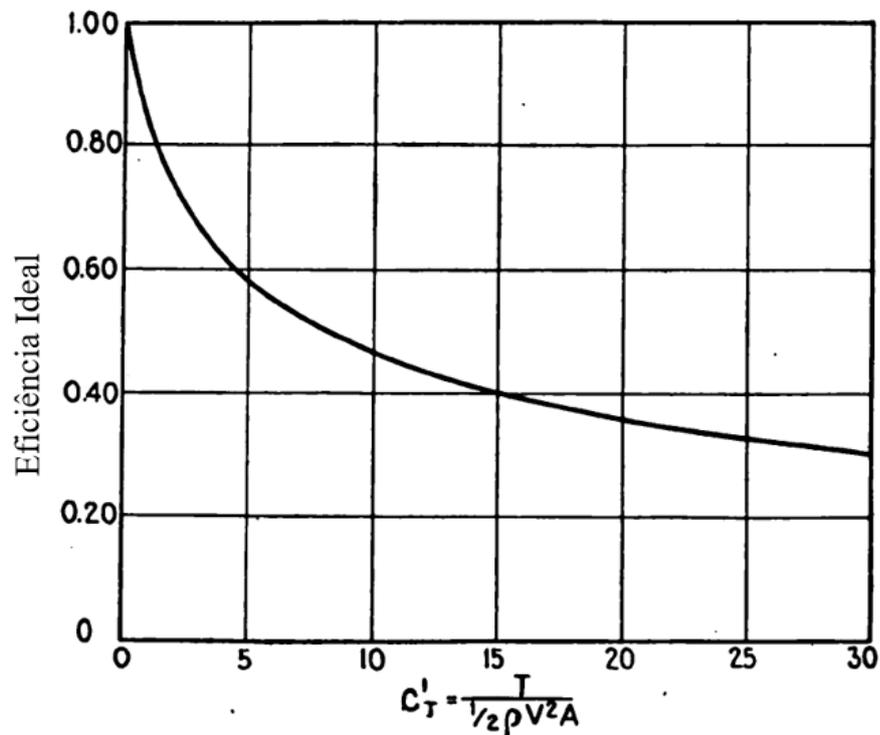
- A energia de rotação do escoamento devido ao torque;
- O arrasto de perfil das pás se movimentando no ar;
- A perda pela distribuição de tração não ser uniforme no disco, principalmente pelas perdas na ponta e no cubo;
- A perda devido ao número finito de pás e conseqüente variação da tração no tempo, em um ponto do disco.

Variando a eficiência ideal em função do coeficiente de tração, conforme a Figura 18, conclui-se que a eficiência ideal:

- diminui com o aumento da tração;
- aumenta com o aumento da velocidade axial;
- aumenta com o aumento de densidade do fluido;
- aumenta com o aumento da área do disco ou diâmetro da hélice;

Com base nestas considerações, pela teoria do disco atuador, o diâmetro deve ser o maior possível quando visada uma maior eficiência. Esse comportamento mostra que tal teoria não considera o arrasto da pá no fluido, que se tornaria mais influente ao aumentar o diâmetro.

Figura 18 – Eficiência ideal em função do coeficiente de tração.



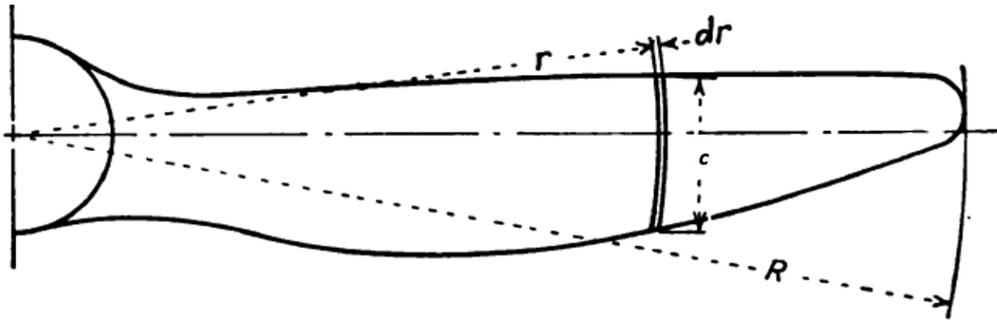
Fonte: Adaptado de Weick (1930).

2.3.3 Teoria do Elemento de Pá

No final do século XIX, Drzewiecki (1892) apresentou uma teoria da ação de hélice em que elementos da pá foram tratados como superfícies sustentadoras individuais se movendo pelo meio em um caminho helicoidal. Tal desenvolvimento não leva em conta o efeito em cada elemento da velocidade induzida pela própria hélice (WALD, 2006). Conforme Glauert (1935), essa teoria negligencia a influência dos sucessivos elementos de uma pá no elemento analisado, visto que essa interferência mudaria as características assumidas, neste modelo, para cada elemento.

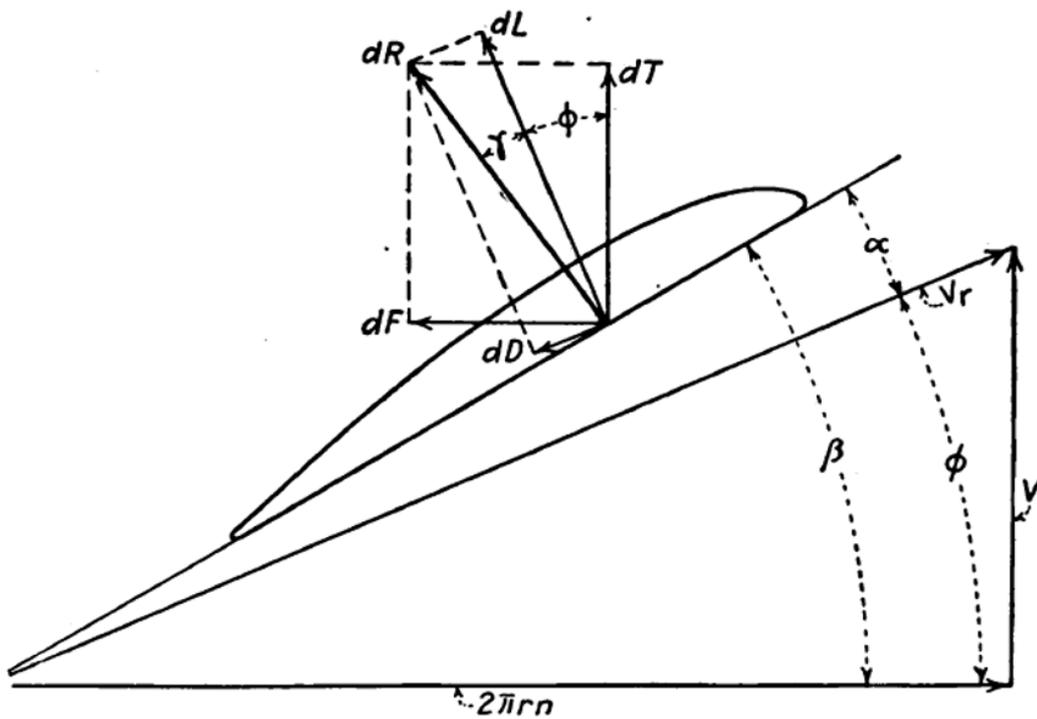
Considerando um elemento da pá distante r do eixo de rotação da hélice e com espessura infinitesimal dr , ao fazer um corte exatamente nesse elemento, tem-se uma seção transversal na forma de um aerofólio, de corda c , inclinado de um ângulo β em relação ao plano de rotação da hélice (GLAUERT, 1935). Conforme Weick (1930), um elemento da pá descreve um movimento helicoidal, determinado pelas componentes de velocidade tangencial, devido ao giro da hélice, dada por $2\pi rn$, e axial, dada por V , devido à velocidade axial da própria aeronave. Tais variáveis podem ser melhor entendidas nas Figuras 19 e 20. Como consequência dessas componentes de velocidade, são definidos os ângulos β , que se dá entre o plano de rotação e a linha de corda do elemento, representando a torção geométrica da pá, ϕ , que é o ângulo entre o plano de rotação e o escoamento de ar naquele elemento, e α , que é o ângulo do escoamento naquele aerofólio do elemento.

Figura 19 – Elemento de pá.



Fonte: (WEICK, 1930).

Figura 20 – Ângulos no elemento de pá.



Fonte: (WEICK, 1930).

Com base na dedução proposta por Weick (1930), a tração gerada em um elemento é definida

$$dT = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 C_L b dr \cos(\phi + \gamma)}{\sin^2(\phi) \cos(\gamma)}, \quad (10)$$

e a tração total gerada por uma hélice de número B de pás é dada por

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 B \int_0^R \frac{C_L b \cos(\phi + \gamma)}{\sin^2(\phi) \cos(\gamma)} dr. \quad (11)$$

De maneira análoga, o torque em um elemento é

$$dQ = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 C_L b r \sin(\phi + \gamma)}{\sin^2(\phi) \cos(\gamma)}, \quad (12)$$

e o torque de uma hélice

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 B \int_0^R \frac{C_L b \sin(\phi + \gamma)}{\sin^2(\phi) \cos(\gamma)} dr. \quad (13)$$

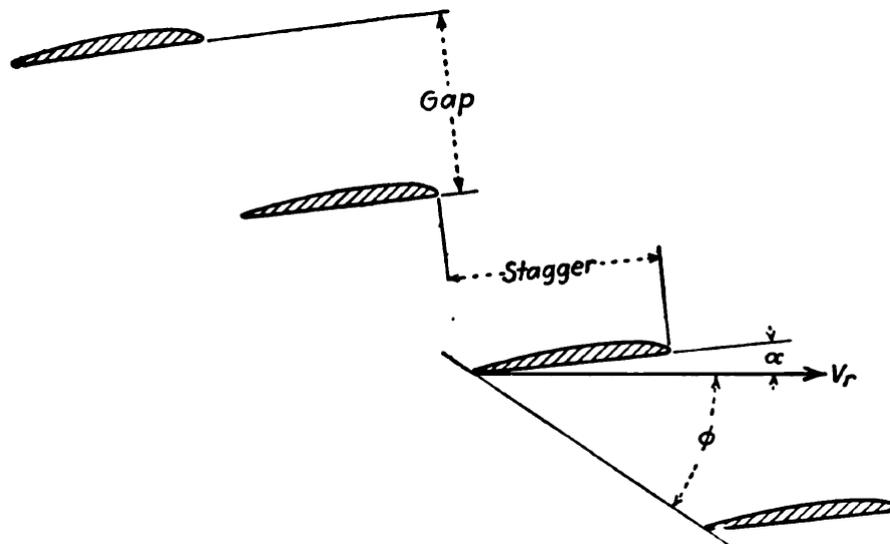
A eficiência da hélice calculada como

$$\eta = \frac{TV}{2\pi nQ}. \quad (14)$$

A teoria do elemento de pá possui certas limitações que fizeram com que novas soluções fossem analisadas. Segundo Weick (1930), uma das grandes fraquezas dessa teoria é a grande divergência dos resultados calculados para com ensaios em túnel de vento, visto que os elementos de pá possuem uma baixa razão de aspecto, dada sua envergadura infinitesimal, e as polares de perfis aerodinâmicos, utilizadas como entrada dos cálculos, são geralmente ensaiadas em asas de grande envergadura, ou seja, com razão de aspecto alta.

Outra limitação citada por Weick (1930) refere-se a não consideração da interferência entre as pás. Os elementos em um raio específico formam uma "cascata" similar às asas de um avião multiplano, com mais de uma asa, com *stagger*, avanço horizontal de uma asa em relação à outra, negativo, como mostrado na Figura 21.

Figura 21 – Interferência entre os elementos.



Fonte: (WEICK, 1930).

Próximo das pontas da pá, por conta da maior velocidade tangencial, o *gap*, distância vertical de uma asa em relação à outra, é maior e a interferência é pequena. No entanto, essa interferência é relativamente alta nos elementos mais próximos da raiz.

Nas hélices ainda há uma perda de ponta que a teoria do elemento de pá não contabiliza. A tração e torque calculados nos elementos próximos à ponta são sempre maiores que os avaliados em experimentos. Em resumo, apesar de todas as imprecisões, é uma ferramenta de grande utilidade nas mãos de projetistas de hélice experientes (WEICK, 1930).

2.3.4 Evolução das Teorias Clássicas

A teoria do disco atuador e a teoria do elemento de pá são as bases do projeto de hélices e foram diversas vezes modificadas e utilizadas como ponto de partida para desenvolvimentos futuros. Segundo Wald (2006), o trabalho de Wilbur e Orville Wright, conhecidos como os irmãos Wright, não teve influência no subsequente desenvolvimento da teoria de hélices, mas é notável que, embora eles fossem experimentadores e não teóricos, parecem ter sido os primeiros a combinar a teoria do elemento de pá e a teoria do disco atuador. Eles usaram a teoria do disco atuador para estimar a velocidade relativa e o ângulo de ataque dos elementos da pá e conseguiram projetar hélices bastante eficientes.

Para Wald (2006), com o desenvolvimento da teoria de linha sustentadora de Prandtl de asas incorporando os conceitos de vorticidade, abriu-se os caminhos para uma teoria mais racional da ação de hélice. Uma importante formalização em teorias de hélices foi feita por Glauert (1935), combinando a teoria do disco atuador e a teoria do elemento de pá. Este trabalho apresentou uma metodologia para análise de hélices arbitrárias. Embora a teoria tenha sido desenvolvida para baixo carregamento do disco, ou seja, baixa tração ou potência por unidade de área do disco, funciona bem para carregamento moderado e, dentro das suas limitações, é adequada para estimar o desempenho mesmo para altos carregamentos do disco (ADKINS; LIEBECK, 1994).

Betz (1958) estabeleceu condições de projeto para mínima perda de energia, porém o equacionamento apresenta muitas aproximações de pequenos ângulos e relações aplicáveis apenas em projetos de baixo carregamento da hélice. Theodorsen (1948) mostrou que a condição de mínima perda de energia de Betz pode ser aplicada para alto carregamento do disco também.

Larrabee (1979) reapresentou as equações para projeto otimizado de hélice, em um procedimento simples. No entanto, tinha-se ainda alguns problemas: aproximação de pequenos ângulos, a solução para a velocidade de deslocamento era precisa apenas para baixos carregamentos e ainda haviam termos viscosos faltantes para as velocidades induzidas. Tais termos devem estar presentes para que seja consistente com as teorias clássicas.

Patrao (2017) estendeu a teoria de Adkins e Liebeck (1994) para velocidades de escoamento não uniformes chegando na hélice, induzidas por carenagem ou hélice contra-rotativa. A metodologia é extremamente semelhante à de Adkins e Liebeck (1994), com modificações e novas variáveis a fim de considerar as condições citadas.

2.3.5 Teoria de Adkins e Liebeck

Adkins e Liebeck (1994) propôs a criação um sistema iterativo de cálculo, mais preciso, da velocidade de deslocamento de vórtice e o ângulo de sua distribuição. Este trabalho representou um avanço notório no desenvolvimento de hélices, sendo notável o baixo custo de solução aliado à boa acuracidade, quando comparado com métodos mais sofisticados, porém de alto custo.

2.3.5.1 Análise de uma Geometria Arbitrária

Para a análise de uma hélice conhecida, sabe-se, de início, a distribuição de corda e ângulo ao longo do raio e o perfil aerodinâmico da hélice. Segundo Adkins e Liebeck (1994), os coeficientes de força, mostrados na Figura 22, são dados por

$$C_y = C_L \cos(\phi) - C_D \sin(\phi), \quad (15)$$

tal que C_L é o coeficiente de sustentação do perfil, C_D é o coeficiente de arrasto do perfil e ϕ é o ângulo do escoamento no elemento,

$$C_x = C_L \sin(\phi) - C_D \cos(\phi). \quad (16)$$

A tração e torque por unidade de raio, Figura 23, são dados por

$$dT = \frac{1}{2} \rho W^2 B c C_y, \quad (17)$$

tal que W é a velocidade resultante no elemento, B é o número de pás e c é a corda do elemento,

$$\frac{dQ}{r} = \frac{1}{2} \rho W^2 B c C_x. \quad (18)$$

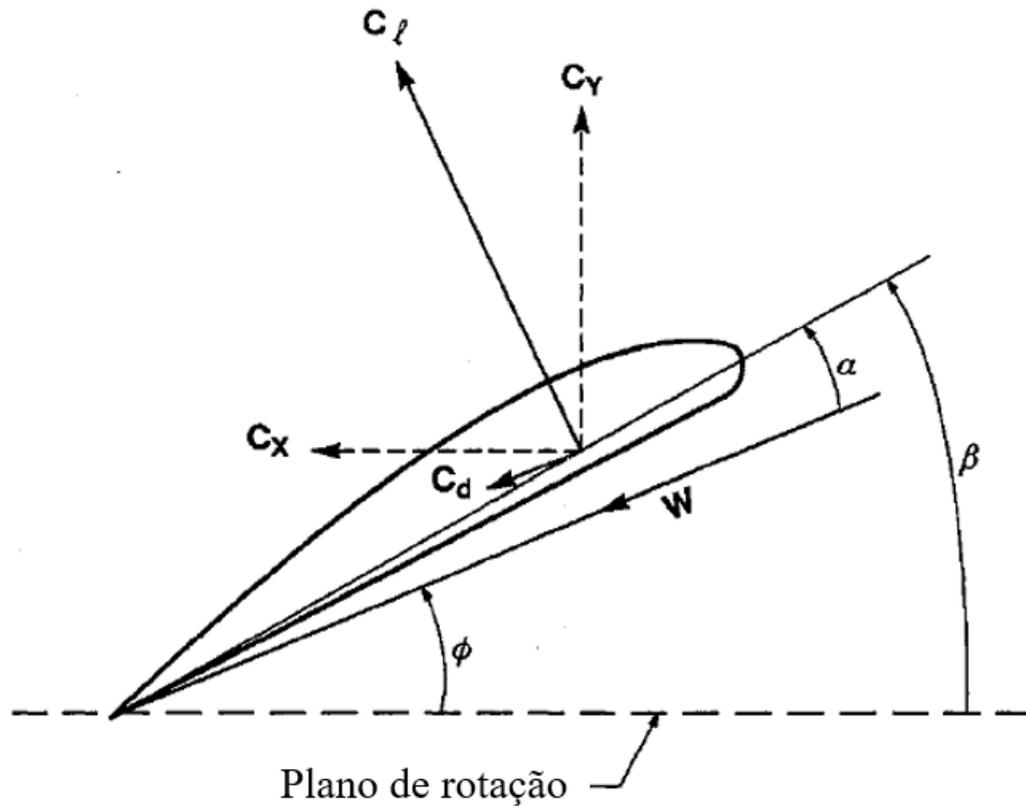
Para os fatores de interferência axial e rotacional são deduzidas

$$a = \frac{\frac{BcC_y}{8\pi r \sin^2(\phi)}}{F - \frac{BcC_y}{8\pi r \sin^2(\phi)}}, \quad (19)$$

em que F é o fator de perda de Prandtl,

$$a' = \frac{\frac{BcC_x}{8\pi r \sin(\phi) \cos(\phi)}}{F - \frac{BcC_x}{8\pi r \sin(\phi) \cos(\phi)}}. \quad (20)$$

Figura 22 – Coeficientes de força em um elemento de pá.



Fonte: Adaptado de Adkins e Liebeck (1994).

A relação para o ângulo do escoamento ϕ , dada por

$$\tan(\phi) = \frac{V(1+a)}{\Omega r(1-a')}, \quad (21)$$

é obtida da Figura 24. Conforme Adkins e Liebeck (1994), o fator F pode ser determinado por

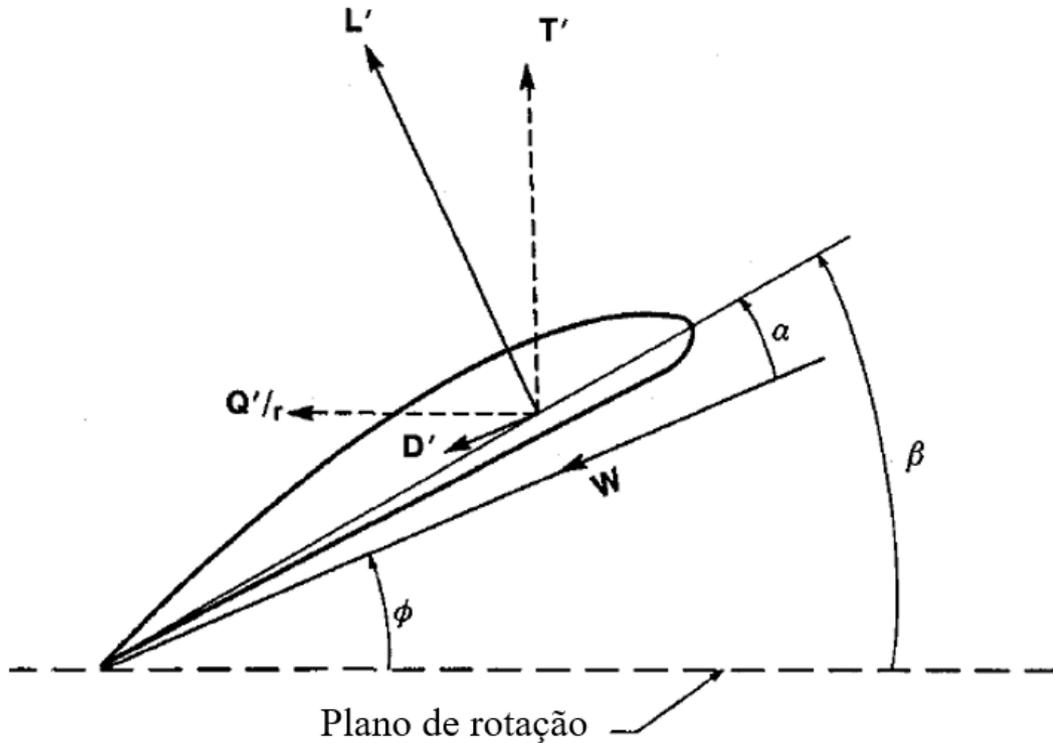
$$F = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(e^{-f}) \quad (22)$$

em que " f " é dado por

$$f = \frac{B}{2} \frac{(1-\xi)}{\sin(\phi_t)} \quad (23)$$

sendo ξ o raio adimensional $\frac{r}{R}$. O fator de perda de momento de Prandtl, denotado por F , varia de próximo de 1 na região do cubo, onde o fluxo radial é quase desprezível, até zero na ponta. Para a determinação de ângulo do escoamento na ponta da hélice, ϕ_t , Glauert (1935) sugere a relação

Figura 23 – Diagrama de forças em um elemento de pá.



Fonte: Adaptado de Adkins e Liebeck (1994).

$$\sin(\phi_t) = \xi \sin(\phi), \quad (24)$$

no entanto Adkins e Liebeck (1994) recomendam a utilização da relação

$$\tan(\phi_t) = \xi \tan(\phi), \quad (25)$$

fazendo tal correção no trabalho de Glauert (1935).

O procedimento de análise requer uma solução iterativa para o ângulo do escoamento ϕ em cada posição radial ξ . Uma estimativa inicial para ϕ pode ser obtida da Figura 24, conforme

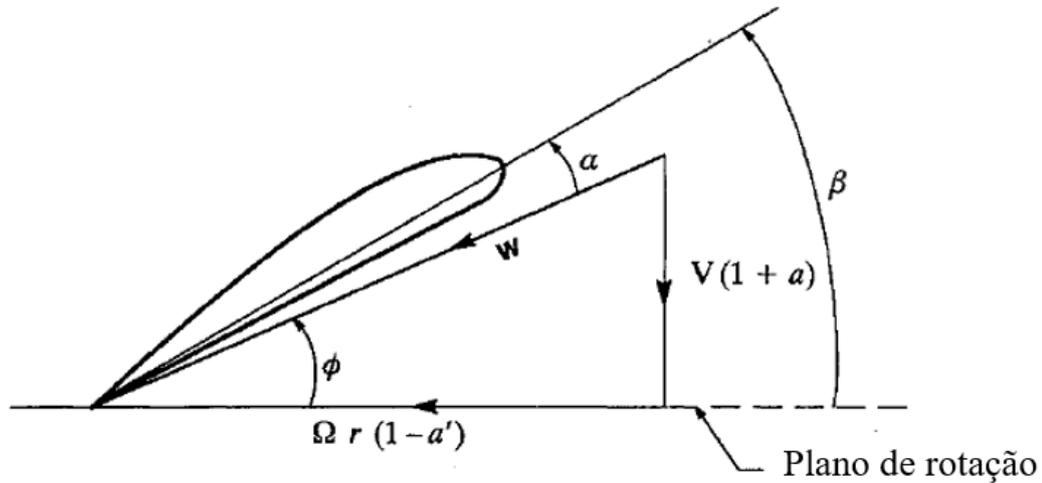
$$\tan(\phi) = \frac{V}{\Omega r}. \quad (26)$$

Como o ângulo geométrico do elemento, β , é conhecido, pode-se calcular o ângulo de ataque do elemento, α , com a relação

$$\alpha = \beta - \phi. \quad (27)$$

Conhecendo a velocidade, W , e corda do elemento, c , pode-se calcular o número de Reynolds usando a equação (5). Logo, uma nova estimativa de ϕ pode ser obtida pela equação

Figura 24 – Geometria do escoamento no elemento de posição radial r .



Fonte: Adaptado de Adkins e Liebeck (1994).

(21). Segundo Adkins e Liebeck (1994), uma substituição direta do novo valor deve gerar uma convergência adequada.

A convergência de ϕ pode ser um problema para algumas geometrias de hélice, geralmente quando tais geometrias estão distantes de um projeto ótimo. Segundo Adkins e Liebeck (1994), geralmente nesses casos são obtidos altos valores de a e a' nas pontas da pá, tornando a convergência difícil. Uma vez que o fator F é nulo na ponta da pá e a teoria utilizada não é para hélices de ponta quadrada, utiliza-se os valores $a = -1$ e $a' = 1$. Segundo Patrao (2017), um fator de relaxação, k , pode ser utilizado para facilitar a convergência do ângulo do escoamento, ϕ , conforme

$$\phi = (1 - k)\phi_{anterior} + k\phi_{novo}. \quad (28)$$

2.3.5.2 Eficiência da Hélice

Para Adkins e Liebeck (1994), os coeficientes de tração e potência são definidos

$$C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} \quad (29)$$

e

$$C_P = \frac{P}{\rho n^3 D^5}. \quad (30)$$

A eficiência é calculada por dada por

$$\eta = \frac{C_T J}{C_P} \quad (31)$$

tal que a razão de avanço, J , é dada pela equação

$$J = \frac{V}{nD}. \quad (32)$$

2.4 OTIMIZAÇÃO

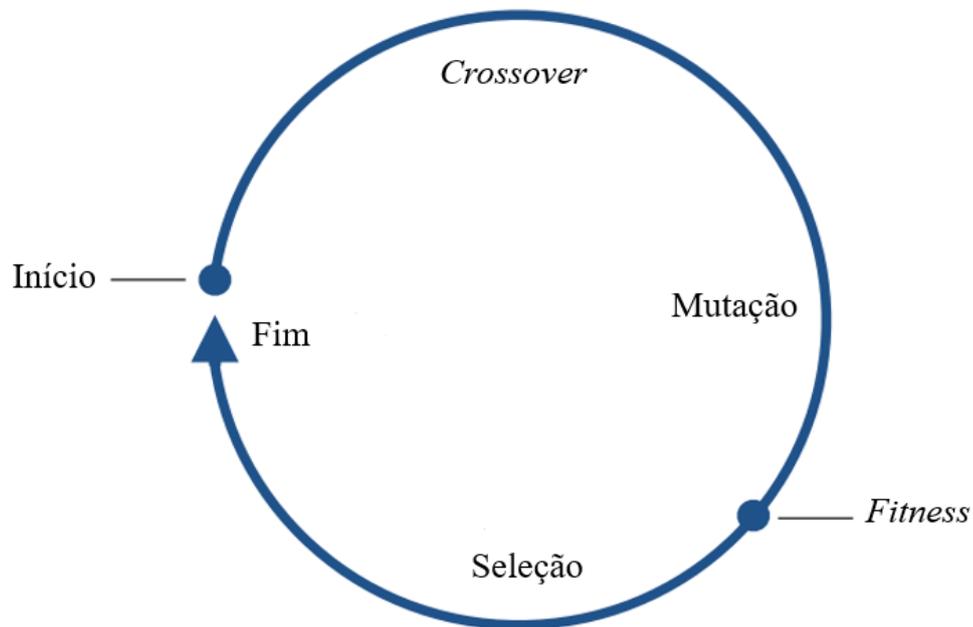
Problemas de otimização podem ser encontrados em muitos domínios, desde as ciências naturais até a matemática e a ciência da computação, da engenharia à vida social e cotidiana. Sempre que a tarefa é minimizar um erro, minimizar energia, peso, desperdício, esforço e maximizar lucro, resultado, sucesso e pontuações, enfrentamos problemas de otimização (KRAMER, 2017).

2.4.1 Algoritmo Genético

O algoritmo genético é uma técnica de otimização metaheurística inspirada na evolução biológica. Trata-se de uma abordagem computacional que busca soluções para problemas complexos baseados em princípios evolutivos como seleção natural, hereditariedade e mutação. Segundo Kramer (2017), o Algoritmo Genético clássico é baseado em um conjunto de soluções candidatas que representam uma solução para o problema de otimização que queremos resolver. Uma solução é um candidato potencial para um ponto ótimo do problema de otimização.

Para Kramer (2017), o ciclo contínuo de evolução artificial é baseado nos princípios da evolução natural. O processo evolutivo começa com soluções inicializadas aleatoriamente ou manualmente. O ciclo evolutivo começa recombinao duas ou mais soluções com o operador de crossover. O resultado é mutado e as melhores soluções geradas são selecionadas para a geração seguinte. Por fim, o ciclo evolutivo examina se a condição de término foi alcançada e continua a execução da otimização genética se esse ainda não for o caso. Tal evolução é representada na Figura 25.

Figura 25 – Ciclo do Algoritmo Genético.



Fonte: Adaptado de Kramer (2017).

2.4.1.1 *Crossover*

Para Kramer (2017), o *crossover* é um operador que permite a combinação do material genético de duas ou mais soluções. Na natureza, a maioria das espécies tem dois pais. De uma perspectiva biológica, dois parceiros da mesma espécie combinam seu material genético e o herdam para sua prole. Os operadores de *crossover* em Algoritmos Genéticos implementam um mecanismo que mistura o material genético dos pais.

2.4.1.2 *Mutaçãõ*

Os operadores de *mutaçãõ* mudam uma solução perturbando-a. A *mutaçãõ* é baseada em mudanças aleatórias e sua intensidade é chamada de taxa de *mutaçãõ*. Em espaços de solução contínuos, a taxa de *mutaçãõ* também é conhecida como tamanho do passo (KRAMER, 2017).

2.4.1.3 *Mapeamento Genótipo-Fenótipo*

Segundo Kramer (2017), após o *crossover* e a *mutaçãõ*, a nova população de filhos precisa ser avaliada. Cada solução candidata deve ser avaliada em relação à sua capacidade de resolver o problema de otimização. Dependendo da representação, pode ser necessária uma correspondência do cromossomo, o genótipo, para a solução real, que é denominada de fenótipo. A correspondência genótipo-fenótipo nem sempre é necessária. Por exemplo, em otimização

contínua, o genótipo é a própria solução. Mas muitos outros processos de modelagem evolutiva exigem essa correspondência.

2.4.1.4 Função *Fitness*

A função *fitness* mede a qualidade das soluções que o Algoritmo Genético gerou. A maioria das abordagens tem como objetivo minimizar o número de chamadas à função *fitness*. O desempenho de um Algoritmo Genético na resolução de um problema é geralmente medido em termos do número de avaliações da função *fitness* necessárias até que o ótimo seja encontrado ou aproximado com uma precisão desejada. Minimizar o número de chamadas à função *fitness* é muito importante se uma chamada for cara, por exemplo, se um elemento de construção tiver que ser gerado para cada avaliação. As chamadas à função *fitness* também podem exigir muito tempo, por exemplo, se um modelo de simulação tiver que ser executado para avaliar os parâmetros gerados com o Algoritmo Genético (KRAMER, 2017).

2.4.1.5 Seleção

Para permitir a convergência em direção a soluções ótimas, as melhores soluções geradas são selecionadas como pais na nova população parental. Um excedente de soluções geradas é selecionado e os melhores são escolhidos para alcançar o progresso em direção ao ótimo. Esse processo de seleção é baseado nos valores de *fitness* da população. Em problemas de minimização, são preferidos valores de *fitness* baixos e vice-versa em problemas de maximização. Problemas de minimização podem ser facilmente transformados em problemas de maximização com a negação (KRAMER, 2017).

A condição de término define quando o loop evolutivo principal termina. Muitas vezes, o algoritmo genético é executado por um número pré-definido de gerações. Isso é plausível em várias configurações experimentais, visto que o tempo e o custo das avaliações da função de aptidão podem limitar o tempo do processo de otimização.

2.4.2 Parâmetros de Otimização

Além dos conceitos gerais do algoritmo genético, alguns parâmetros que controlam a evolução da otimização são importantes que sejam conhecidos. Os principais parâmetros de controle da otimização são definidos (GAD, 2021).

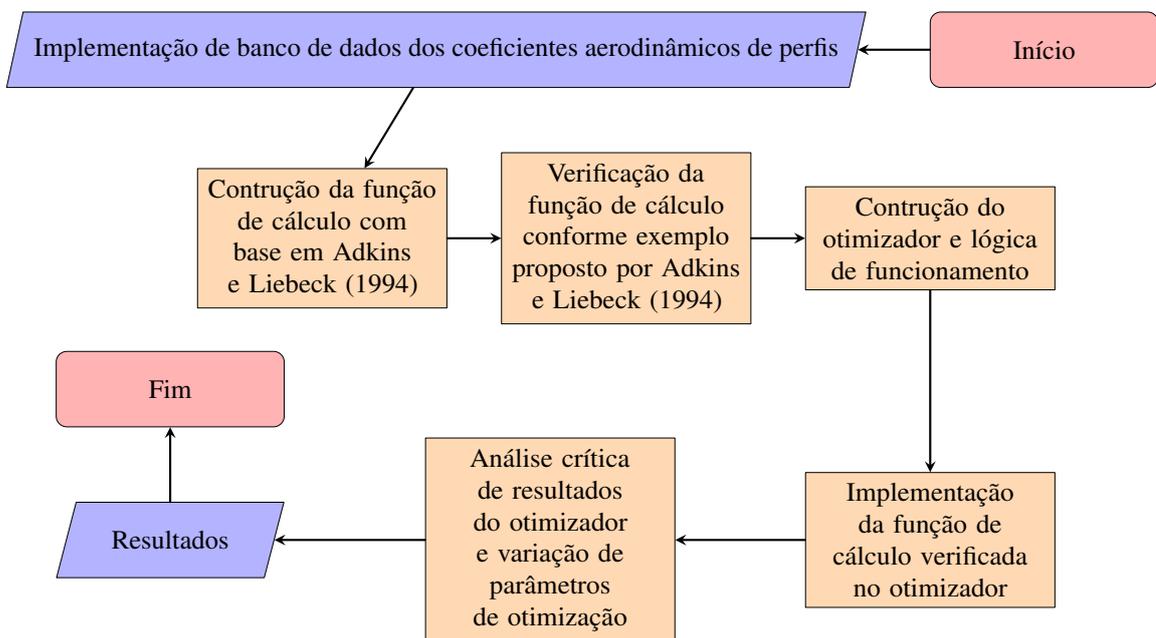
- Número de gerações: É o número de gerações que serão criadas, geralmente utilizado como critério de parada.
- Número de soluções por população: É o número de indivíduos de cada geração. Quanto maior o número, tende-se a convergir em menos gerações.
- Número de pais por população: É o número de soluções que serão selecionadas para compor o grupo de mutação que dará origem à próxima geração.

- Tipo de seleção de pais: É um parâmetro que define o critério utilizado para selecionar os pais da próxima geração. Dependendo a forma com que esses indivíduos são selecionados, a velocidade de convergência e qualidade do resultado podem ser afetados.
- Tipo de *crossover*: Tipo de combinação dos genes de duas ou mais soluções.
- Probabilidade de *crossover*: Parâmetro que define a chance de ocorrência do *crossover*.
- Tipo de mutação: Define a forma como o valor dos genes são mutados.
- Probabilidade de mutação: Parâmetro que define a chance de ocorrência de mutação.

3 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento desse trabalho utilizou-se da metodologia de cálculo de Adkins e Liebeck (1994), a qual resulta em dados de performance da geometria proposta, nas condições de contorno dadas. Acoplou-se essa metodologia de análise da hélice em uma rotina de cálculo em Python que, por meio do algoritmo genético, avalia a performance de diversas populações de hélices, convergindo para uma geometria ótima. A função de cálculo da hélice foi verificada comparando com a hélice avaliada por Adkins e Liebeck (1994), e tal verificação é apresentada na seção 4.1. O procedimento do trabalho é representado na Figura 26.

Figura 26 – Fluxograma do trabalho e implementação do otimizador.



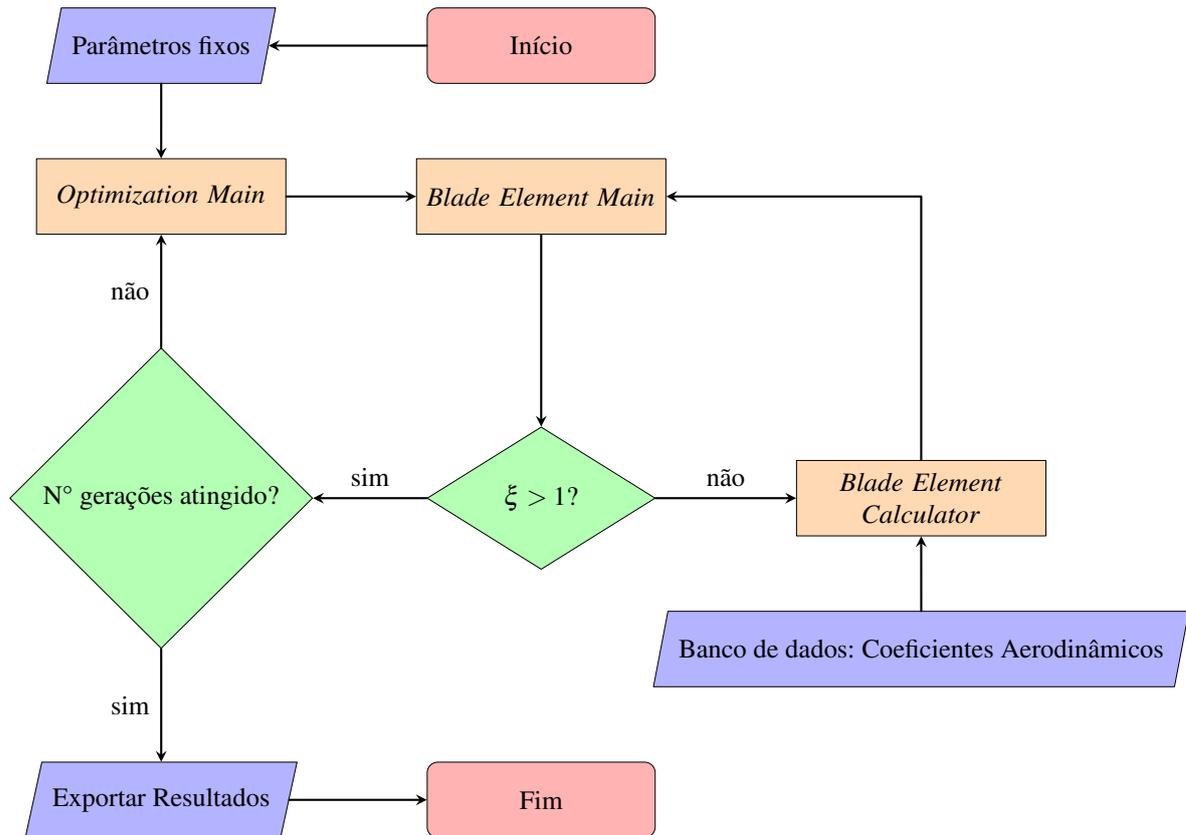
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

3.1 ROTINA DE OTIMIZAÇÃO

O algoritmo genético utilizado é proveniente de uma biblioteca em Python chamada PyGad (GAD, 2021). Essa biblioteca é utilizada na função *Optimization Main* e é responsável por criar gerações de indivíduos (hélices) e realizar mutações, formando novas gerações diferentes. Entretanto, as variáveis de otimização devem possuir, em todos os indivíduos, valores pertencentes a um intervalo delimitado pelos "bounds". O funcionamento do otimizador é representado na Figura 27.

A função objetivo do otimizador é maximizar a eficiência da hélice, na velocidade axial estabelecida. Cada uma das geometrias de hélice geradas pelo algoritmo genético, na função *Optimization Main*, tem sua performance avaliada, nas condições dadas na seção 3.2.1. A região do fluxograma, Figura 27, composta pelos blocos *Blade Element Main*, *Blade Element Calculator*

Figura 27 – Fluxograma de funcionamento do otimizador.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

e a verificação “ $\xi > 1$ ”, faz o cálculo de uma hélice completa, elemento por elemento, da raiz à ponta da pá.

O banco de dados de coeficientes aerodinâmicos dos aerofólios é composto por coeficientes que ajustam linearmente as curvas de $C_L \times \alpha$ e $C_D \times \alpha$, para diversos números de Reynolds. A entrada do banco de dados é um valor de α e Re , resultando em um *output* de C_D . Além disso, o banco de dados dispõe do ângulo de estol do perfil, possibilitando que o otimizador penalize as hélices que tenham alguma seção com ângulo de ataque maior que o ângulo de estol do perfil.

3.1.1 Penalização de indivíduos

Devido a algumas condições de contorno não serem utilizadas para o cálculo da hélice, algumas verificações ocorrem para cada indivíduo, garantindo que todos os indivíduos de alta eficiência são realmente viáveis. Tais verificações são:

- Se o motor é capaz de fornecer o torque requerido pela hélice naquela condição;
- Se a corda da ponta é menor corda presente na pá;
- Se o ângulo de ataque de cada seção é menor que o ângulo de estol do perfil.

Caso a hélice não atenda a algum dos requisitos, a penalização é aplicada atribuindo à hélice uma eficiência, tração e torque muito pequenos, comparados à valores realistas.

3.1.2 Função objetivo

A função objetivo do otimizador pode ser definida pelo usuário da forma que melhor atenda aos requisitos de projeto da aeronave, podendo ser relacionados quaisquer parâmetros de performance avaliados. Tal relação será minimizada pelo algoritmo genético até que a condição de parada seja satisfeita.

3.1.3 Parâmetros do GA

A otimização por meio do algoritmo genético requer a definição de parâmetros relacionados aos indivíduos gerados, assim como sua transformação e evolução. Tais parâmetros precisam ser testados e ajustados de forma a acelerar a convergência, assim como para garantir que o resultado seja realmente ótimo. Neste trabalho, principais parâmetros foram variados e ajustados de forma a tentar reduzir número de gerações necessárias para a convergência, ainda atingindo o objetivo. O otimizador foi compilado algumas vezes, variando os parâmetros, analisando a qualidade do resultado e velocidade de convergência. Assim, chegou-se nos parâmetros apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do Algoritmo Genético PyGag (GAD, 2021).

Parâmetro	Valor
Número de pais selecionados para próxima geração	10
Número de indivíduos em cada geração	100
Número de genes	9
Forma de seleção dos pais	"rank"
Tipo de Crossover	"single_point"
Probabilidade de Crossover	0.8
Porcentagem de genes a serem mutados	90
Tipo de Mutação	"random"
Probabilidade de Mutação	0.8

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

3.2 PARÂMETROS DE ENTRADA

Nessa seção serão descritos os parâmetros que devem ser determinados pelo usuário para que o otimizador possa funcionar. Alguns desses parâmetros são fixos, ou seja, condições de contorno da otimização, e outros são variáveis de otimização, logo o usuário deve delimitar intervalos nos quais cada variável pode ocorrer.

3.2.1 Parâmetros Fixos

Os parâmetros fixos definem as condições de simulação e algumas características geométricas da hélice, conforme descrito na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros fixos de entrada.

Variável	Descrição
B	Número de pás
R	Raio da hélice
V	Velocidade da aeronave
P	Potência disponível do motor
RPM	Velocidade angular da hélice em RPM
R_{root}	Raio da região estrutural da pá
R_{hub}	Raio do cubo da hélice
ρ	Massa específica do ar
μ	Viscosidade dinâmica do ar
V_{som}	Velocidade do som no ar

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

3.2.2 Variáveis de Otimização

A geometria da hélice é definida por meio de quatro seções de controle ao longo da pá, como apresentado na Figura 28. Cada seção possui um calor de corda e ângulo de torção em relação ao plano de rotação, sendo essas seções conectadas por meio de *splines*.

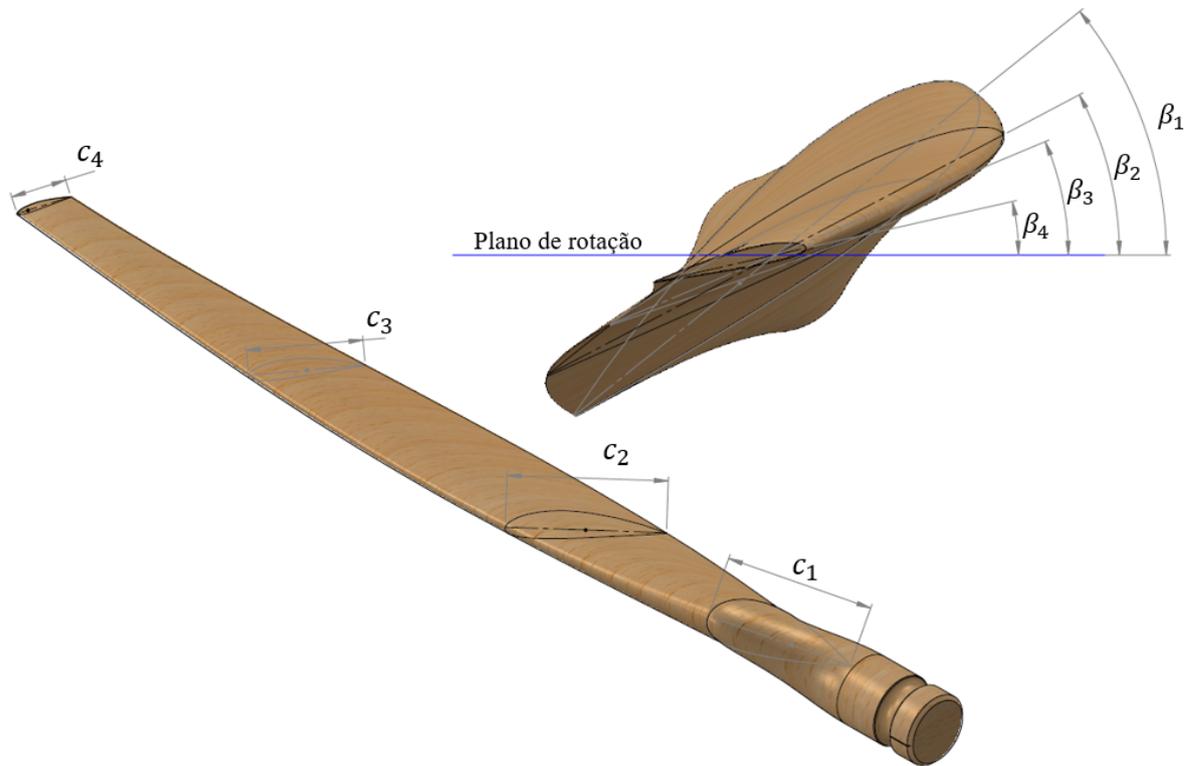
Tabela 3 – Variáveis de otimização.

Variável	Descrição
n_{perfil}	Aerofólio da hélice
c_1	Corda de controle 1
c_2	Corda de controle 2
c_3	Corda de controle 3
c_4	Corda de controle 4
β_1	Ângulo de torção geométrica 1
β_2	Ângulo de torção geométrica 2
β_3	Ângulo de torção geométrica 3
β_4	Ângulo de torção geométrica 4

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Cada variável de otimização pode ser variada pelo algoritmo genético dentro de um intervalo definido pelo usuário, a fim de que as geometrias de hélices propostas sejam coerentes, acelerando a convergência. Esse intervalo é estabelecido pelo usuário na função *Optimization Main*, explicitada na Figura 27. Todas as variáveis de otimização do programa são apresentadas na tabela 3.

Figura 28 – Cordas e ângulos de controle na pá.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

3.3 CÁLCULO DA HÉLICE

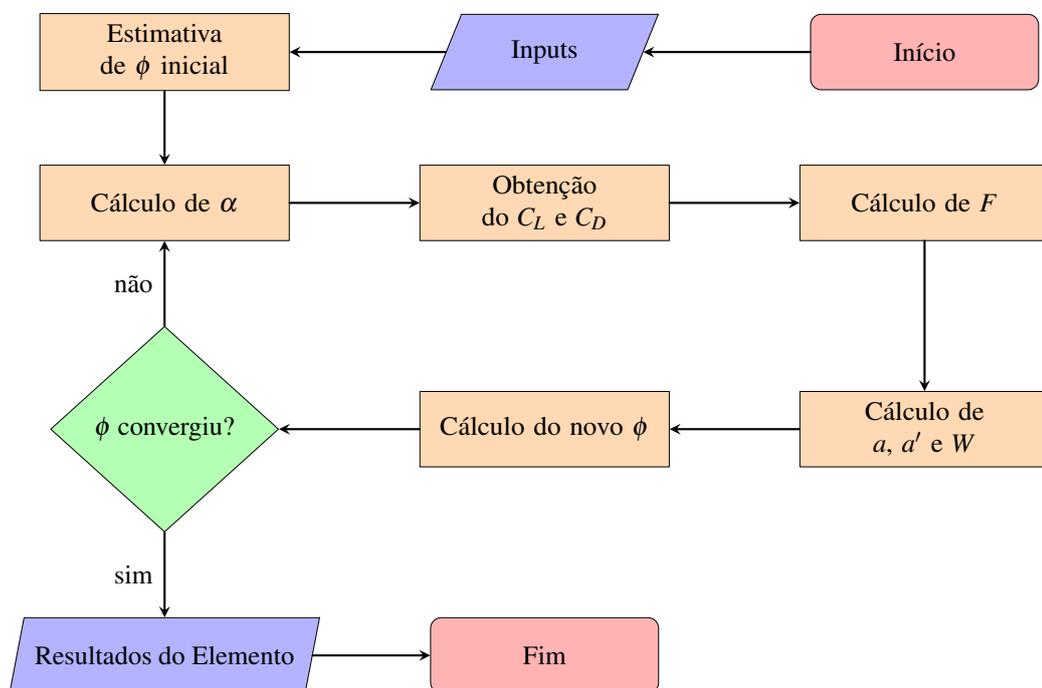
Em seu trabalho, Adkins e Liebeck (1994) propuseram um procedimento para análise de hélices, o qual foi utilizado para o desenvolvimento do otimizador. A implementação da metodologia requer a solução iterativa do ângulo do escoamento, ϕ , em cada elemento de pá:

1. Estimar um valor inicial para o ângulo do escoamento ϕ , usando a eq. ((26));
2. Sendo conhecidos β e ϕ , α pode ser calculado usando a equação (27);
3. Podem ser calculados os coeficientes de sustentação e arrasto, C_L e C_D , visto que são conhecidos α e Re ;
4. O fator de perda de Prandtl, F , pode ser calculado usando a equação (22);
5. Os fatores de interferência axial e radial, a e a' , podem ser calculados com as equações (19) e (20), atualizando também a velocidade do escoamento, W ;
6. O novo ângulo do escoamento pode ser calculado, usando a equação (21);
7. O ângulo inicial deve ser substituído pelo novo e o procedimento ser repetido, a partir do passo 2, até a convergência do ϕ ;

8. É possível calcular, então, os coeficientes de força, C_y e C_x , usando as equações (15) e (16);
9. Usando as equações (17) e (18), podem ser obtidos tração e torque no elemento.

O procedimento descrito é mostrado na Figura 29 e ocorre para cada elemento, até que se chegue na ponta da pá, quando $\xi = 1$, como apresentado na Figura 27, onde tal procedimento ocorre na função *Blade Element Calculator*. Para melhorar a convergência do ângulo ϕ em cada elemento, empregou-se a relaxação proposta por Patrao (2017), apresentada na equação (28), usando um $k = 0,7$, ao invés da substituição direta proposta por Adkins e Liebeck (1994).

Figura 29 – Fluxograma de cálculo em um elemento de pá.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Havendo convergência do ângulo do escoamento, ϕ , são calculados a tração e torque no elemento. Tal procedimento se repete para cada elemento discretizado ao longo da pá, sendo posteriormente integrados tração e torque ao longo do raio, visando obter tais parâmetros na perspectiva global da hélice. A eficiência é calculada utilizando a equação (31).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 VERIFICAÇÃO DA ROTINA DE CÁLCULO

Para a verificação do cálculo de performance da hélice, utilizou-se apenas tal módulo da rotina, entrando com as mesmas condições de contorno apresentadas por Adkins e Liebeck (1994) e comparou-se os resultados com os apresentados por esses autores. O caso analisado por Adkins e Liebeck (1994) é apresentado nas tabelas 4 e 5.

Tabela 4 – Parâmetros de geometria e condições de simulação.

Número de pás (B)	2
Diâmetro da região estrutural [m]	0.3048
Diâmetro da hélice [m]	1.7526
Aerofólio	NACA4415
Velocidade da aeronave [m/s]	49.1744
Velocidade angular da hélice [rpm]	2400

Fonte: Adaptado de Adkins e Liebeck (1994).

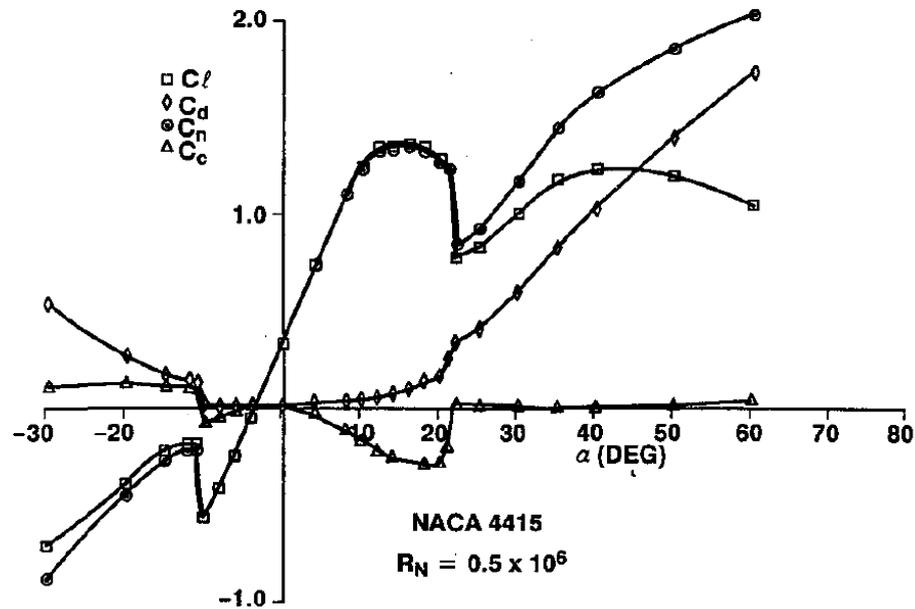
Tabela 5 – Cordas, Ângulos de torção geométrica e C_L ao longo da pá.

r [m]	ξ	β [°]	c [m]	C_L
0,1524	0,1739	58,3125	0,1043	0,7
0,2730	0,3115	41,8645	0,1403	0,7
0,3937	0,4492	32,2669	0,1301	0,7
0,5143	0,5869	22,2978	0,1087	0,7
0,6349	0,7246	18,7971	0,0852	0,7
0,7556	0,8623	15,9619	0,0583	0,7
0,8763	1	13,8552	0	0,7

Fonte: Adaptado de Adkins e Liebeck (1994).

Os coeficientes aerodinâmicos do perfil NACA 4415, utilizados por Adkins e Liebeck (1994), são obtidos da Figura 30. Como os autores utilizaram um C_L constante ao longo da pá, é necessário obter o C_D para o respectivo ângulo, visto que tal valor não é mencionado por Adkins e Liebeck (1994). Utilizou-se o WebPlotDigitizer, Rohatgi (2022), para digitalizar os pontos da imagem e obter equações para as curvas de C_L e C_D . Assim, calculou-se o valor de $C_D = 0,01732$.

Figura 30 – Coeficientes aerodinâmicos do NACA 4415.



Fonte: (ADKINS; LIEBECK, 1994).

Os mesmo dados apresentados por Adkins e Liebeck (1994) foram utilizados como entrada da função de cálculo de hélice do OptProp, e os resultados foram comparados com os resultados mostrados por Adkins e Liebeck (1994) em seu trabalho. As variáveis ϕ , a e a' foram utilizadas como comparação, assim como a Tração, T , e a eficiência, η . A tabela 6 mostra a comparação da tração e eficiência em relação à literatura.

Tabela 6 – Comparação de tração e eficiência.

Variável	Adkins e Liebeck (1994)	OptProp	Diferença relativa
Tração [N]	923.50	922.77	0.08%
η	86.99%	87.01%	0.02%

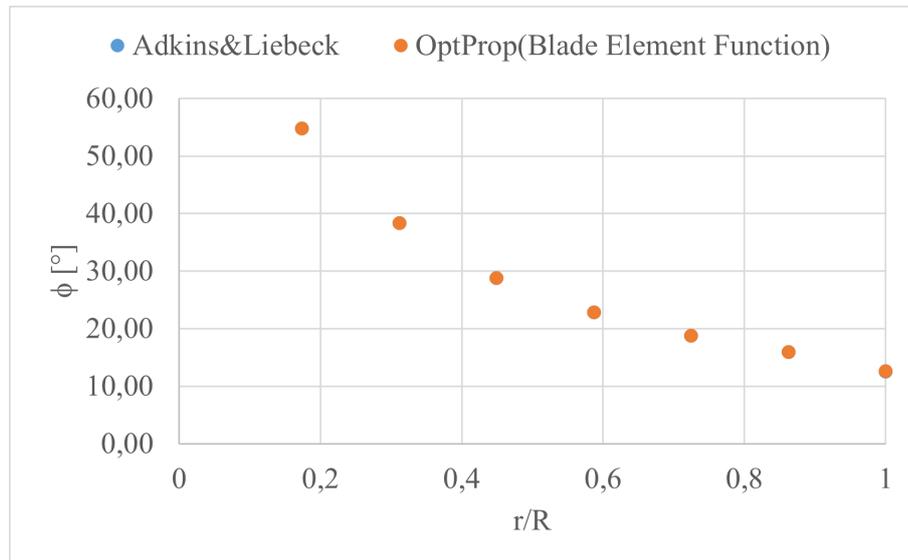
Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Nas tabelas 7, 8 e 9 são apresentados os valores das variáveis em questão, ao longo do raio da pá, assim como a diferença relativa para o resultado apresentado por Adkins e Liebeck (1994). Os mesmos resultados são mostrados em forma gráfica nas Figuras 31, 32 e 33.

Tabela 7 – Diferença relativa para ϕ .

ϕ [°]			
r/R	Adkins	OptProp	Diferença Relativa
0,1739	54,8116	54,8085	0,0056%
0,3116	38,3638	38,3605	0,0087%
0,4493	28,7661	28,7640	0,0073%
0,5870	22,7927	22,7910	0,0076%
0,7246	18,7971	18,7959	0,0064%
0,8623	15,9619	15,9610	0,0055%
1,0000	12,5682	12,5865	0,1450%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

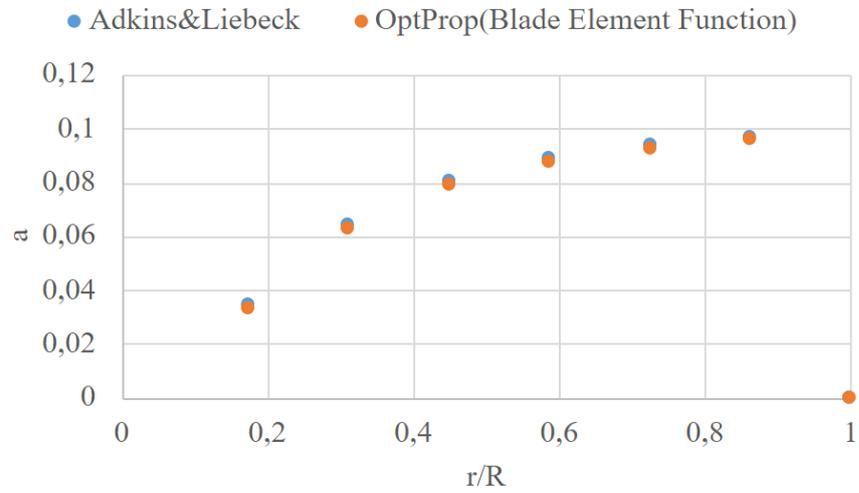
Figura 31 – Comparação do ângulo ϕ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 8 – Diferença relativa para a .

a			
r/R	Adkins	OptProp	Diferença Relativa
0,1739	0,0348	0,0333	4,4772%
0,3116	0,0644	0,0628	2,5243%
0,4493	0,0804	0,0791	1,6601%
0,5870	0,0890	0,0878	1,3592%
0,7246	0,0938	0,0928	1,0634%
0,8623	0,0968	0,0959	0,9461%
1,0000	0,0000	0,0000	0,0000%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

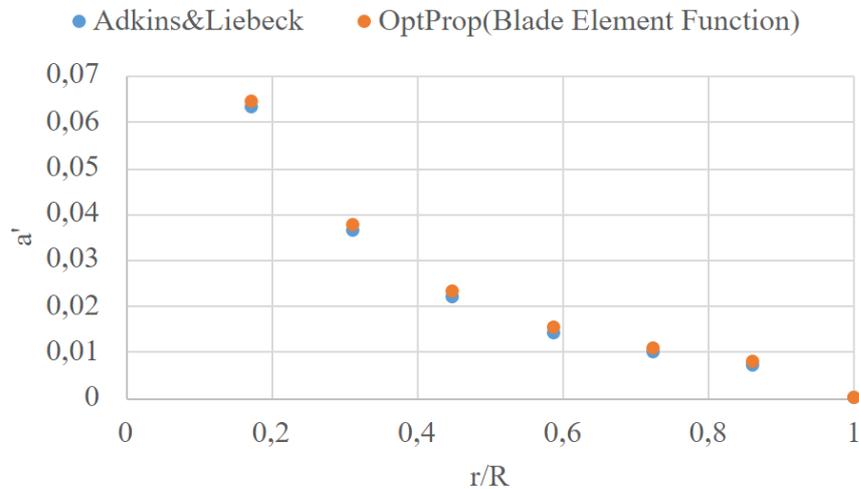
Figura 32 – Comparação do fator de interferência axial a .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 9 – Diferença relativa para a' .

a'			
r/R	Adkins	OptProp	Diferença Relativa
0,1739	0,0633	0,0645	1,8208%
0,3116	0,0365	0,0378	3,3482%
0,4493	0,0219	0,0231	5,0307%
0,5870	0,0142	0,0152	6,4002%
0,7246	0,0098	0,0107	8,0150%
0,8623	0,0072	0,0079	8,5733%
1,0000	0,0000	0,0000	0,0000%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Figura 33 – Comparação do fator de interferência radial a' .

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Estando verificada a função de cálculo, pôde-se integrá-la ao otimizador e realizar os posteriores estudos de caso. Apesar das diferenças relativas próximas de 5% na região mais próxima da raiz da pá, resultado é satisfatório, tendo em vista que no resultado global da hélice, tração e eficiência, a diferença relativa é, praticamente, nula. Uma possível hipótese para a origem dessas diferenças é a dificuldade de extrair o valor de C_D da Figura 22, visto que, segundo Patrao (2017), o método é sensível em relação ao arrasto.

4.2 ESTUDO DE CASO

A equipe Albatroz Aerodesign consagrou-se em 2022 como a primeira equipe brasileira a realizar um voo válido com motorização elétrica da história da classe regular. Com um grupo moto-propulsor elétrico definido, realizou-se a otimização de hélices para aeronaves da equipe. Visando preservar a confidencialidade de informações dos projetos da equipe, utilizou-se de informações genéricas para o estudo de caso. A potência do motor é um parâmetro limitado pelo regulamento da SAE Brasil e a otimização foi realizada para uma velocidade de cruzeiro genérica. As condições de simulação são apresentadas na tabela 10 e os parâmetros fixos da geometria, na tabela 11.

Tabela 10 – Condições de simulação para o estudo de caso.

Variável	Descrição	Valor
$V[m/s]$	Velocidade da aeronave	15
$P[W]$	Potência disponível do motor	700
$RPM[1/min]$	Velocidade angular da hélice em RPM	5500
$\rho[Kg/m^3]$	Massa específica do ar	1,225
$\mu[Kg/m.s]$	Viscosidade dinâmica do ar	$1,79 \cdot 10^{-05}$
$V_{som}[m/s]$	Velocidade do som no ar	340

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Para as condições apresentadas, fez-se a otimização de duas hélices, com duas e três pás. A função objetivo definida para ser minimizada é dada por

$$fitness = \frac{1}{T\eta}, \quad (33)$$

fazendo com que a eficiência e a tração sejam maximizadas, aplicando as devidas penalizações, quando necessário. A eficiência foi calculada utilizando a equação (31) e a tração, integrando a equação (17) ao longo do raio. Estando definidos os parâmetros fixos, foram estabelecidos os limites para cada variável de otimização, apresentados na tabela 12.

Tabela 11 – Parâmetros geométricos das hélices para o estudo de caso.

Variável	Descrição	Valor
$R[m]$	Raio da hélice	0,25
$R_{root}[m]$	Raio da região estrutural da pá	0,055
$R_{hub}[m]$	Raio do cubo da hélice	0,035

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Tabela 12 – Limites das variáveis de otimização para o estudo de caso.

Variável	Limites	
	Inferior	Superior
n_{perfil}	['NACA2412', 'Clark_Y']	
$c_1[m]$	0,010	0,060
$c_2[m]$	0,010	0,060
$c_3[m]$	0,005	0,050
$c_4[m]$	0,005	0,040
$\beta_1[^\circ]$	15,0	70,0
$\beta_2[^\circ]$	10,0	65,0
$\beta_3[^\circ]$	5,0	60,0
$\beta_4[^\circ]$	1,0	40,0

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Os resultados das otimizações são apresentados na tabela 13 e a geometria das hélices otimizadas na tabela 14.

Tabela 13 – Resultados de performance das hélices otimizadas.

Número de pás	2	3
Tração [N]	32,59	34,45
Torque [N.m]	1,209	1,208
Eficiência	70,14%	74,30%

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

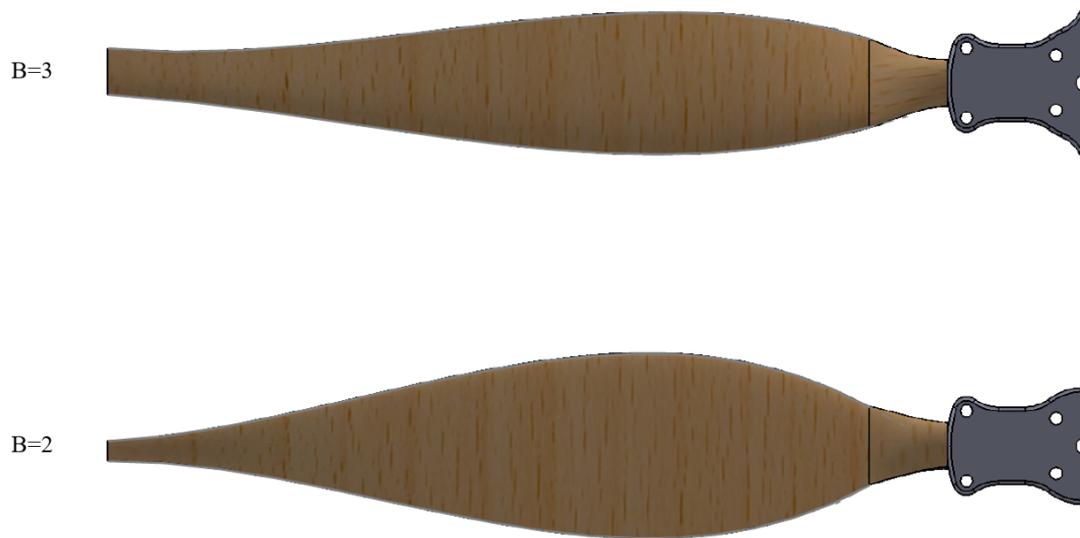
Tabela 14 – Resultados de geometria das hélices otimizadas.

Número de pás	2	3
n_{perfil}	NACA2412	NACA2412
c_1 [m]	0.0226	0.0297
c_2 [m]	0.0501	0.0386
c_3 [m]	0.0311	0.0254
c_4 [m]	0.0052	0.0121
β_1 [°]	27.2407	40.1009
β_2 [°]	21.1164	19.8197
β_3 [°]	16.1944	12.7752
β_4 [°]	10.2543	9.7171

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

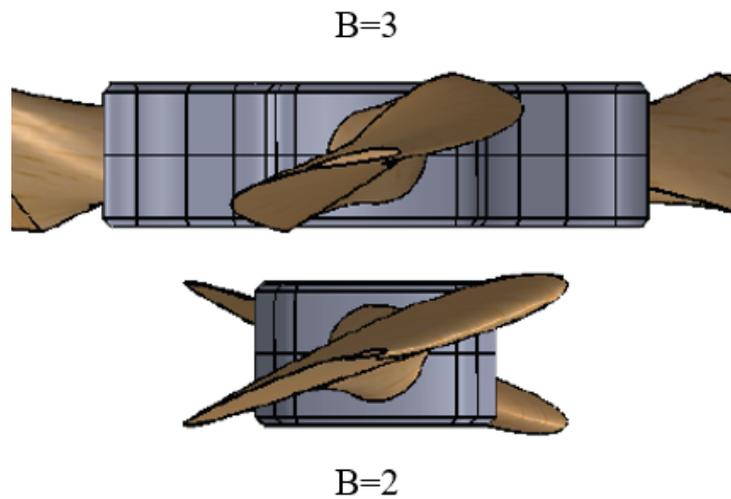
De início, é possível verificar a eficácia do otimizador em aproveitar todo o torque disponível do motor, que é de $1,21Nm$, na condição de otimização. A hélice tripá, por sua vez, apresentou melhor desempenho de tração e eficiência. As pás das duas hélices otimizadas podem ser comparadas nas Figuras 34 e 35.

Figura 34 – Comparação da forma de planta das pás.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

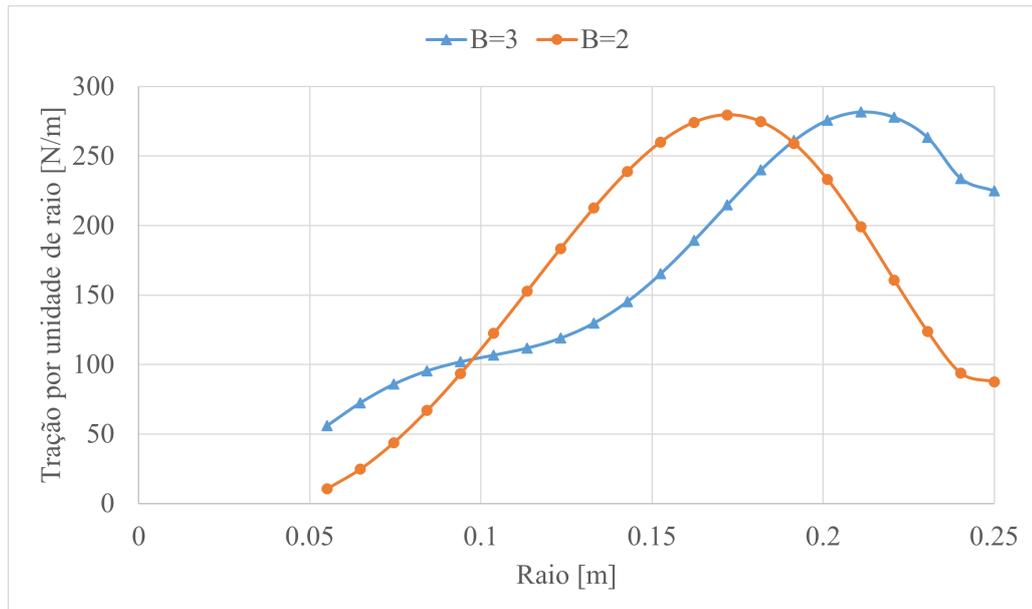
Figura 35 – Comparação de perfil das pás.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

Além disso, comparou-se a distribuição de tração ao longo da pá, para as duas hélices otimizadas, Figura 36.

Figura 36 – Distribuição de tração ao longo do raio.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

As duas configurações apresentam eficiência baixa, quando comparadas à hélice da seção 4.1, por exemplo. Tal resultado é esperado quando se tratando de hélices muito pequenas, visto que a interferência entra as pás é mais influente. Além disso, a baixa razão de avanço para qual as hélices foram simuladas também contribui para que a acuracidade do modelo seja prejudicada, haja visto que é um modelo desenvolvido para hélices de aeronaves maiores. Ainda assim, tratando-se de uma otimização preliminar, o resultado cumpre o seu papel de nortear um projeto detalhado completo de uma hélice.

5 CONCLUSÃO

O objetivo do trabalho foi criar um programa de otimização para projeto preliminar de hélices, visando o emprego no contexto da Equipe Albatroz Aerodesign. Para tal, utilizou-se a metodologia de análise proposta por Adkins e Liebeck (1994) e o algoritmo genético PyGad, Gad (2021), para otimização. Uma rotina em Python foi desenvolvida para a criação do otimizador, assim como avaliação dos resultados.

A função de cálculo da hélice foi verificada comparando com a hélice apresentada no trabalho de Adkins e Liebeck (1994) e as diferenças relativas se mostraram, em média, menores que 5%, sendo esse um resultado satisfatório.

Por fim, realizou-se um estudo de caso, otimizando duas hélices, bipá e tripá, para o contexto da Equipe Albatroz Aerodesign. Pôde-se perceber a dificuldade de obter uma eficiência alta, quando otimizando para uma razão de avanço baixa, que é a realidade experimentada pelas aeronaves de competição SAE Aerodesign.

Assim, vale ressaltar a importância de um projeto detalhado acerca da geometria preliminar otimizada, tanto aerodinâmico, como, principalmente, estrutural da hélice.

5.1 SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS

Sendo o projeto de hélices uma realidade recente para a Equipe Albatroz Aerodesign, inúmeras possibilidades de análises futuras são criadas. Algumas destas possibilidades são:

- um estudo de influência dos parâmetros do algoritmo genético na velocidade de convergência,
- o emprego de outras formas de simulação fluidodinâmica para verificação dos dados de performance para as geometrias otimizadas,
- a avaliação de casos críticos e respectivos esforços estruturais na hélice,
- comparação de performance após projeto detalhado com ensaios experimentais da hélice.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, I.H.; DOENHOFF, A.E. Von. **Theory of Wing Sections, Including a Summary of Airfoil Data**. Dover Publications, 1959. (Dover Books on Aeronautical Engineering Series). ISBN 9780486605869. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=DPZYUGNyuboC>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- ADKINS, Charles N.; LIEBECK, Robert H. Design of optimum propellers. **Journal of Propulsion and Power**, v. 10, n. 5, p. 676–682, 1994. Citado 13 vezes nas páginas 6, 15, 31, 32, 33, 34, 35, 40, 44, 45, 46, 47 e 55.
- ANDERSON, John David. **Fundamentals of Aerodynamics**. 6. ed. New York: McGrawHill, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 18, 20, 21 e 22.
- BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON, E. Russell; MAZUREK, David F. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática**. 11. ed. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2019. ISBN 9788580556209. Citado na página 17.
- BETZ, A. **Screw Propellers with Minimum Energy Loss**. NRC, Division of Mechanical Engineering, 1958. (Technical translation). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=QvVyNAEACAAJ>>. Citado na página 31.
- ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications**. McGraw-Hill Education, 2018. ISBN 9781259921902. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=DqFJvgAACAAJ>>. Citado na página 21.
- DRZEWIECKI, Stefan. **Bulletin de L'Association Technique Maritime**: A second paper in 1901. Paris: [s.n.], 1892. Citado na página 28.
- FOX, R.W.; PRITCHARD, P.J.; MCDONALD, A.T. **Introduction to Fluid Mechanics**. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470547557. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cfq9ifU1xqYC>>. Citado na página 21.
- GAD, Ahmed Fawzy. **PyGAD: An Intuitive Genetic Algorithm Python Library**. 2021. Citado 5 vezes nas páginas 9, 38, 40, 42 e 55.
- GLAUERT, H. **Aerodynamic Theory**: Airplane propellers. Berlin: Julius Springer, 1935. v. 4. Div.L. Edited by Willian Frederick Durand. Citado 4 vezes nas páginas 28, 31, 33 e 34.
- HIBBELER, R.C. **Estática: mecânica para engenharia**. Pearson Education do Brasil, 2010. ISBN 9788587918970. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=1JloAAAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- HOUGHTON, E.L.; CARPENTER, P.W. **Aerodynamics for Engineering Students**. Elsevier Science, 2003. ISBN 9780080493855. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4YCThwzeTBQC>>. Citado na página 20.
- KRAMER, Oliver. **Genetic Algorithm Essentials**. [S.l.]: Springer, 2017. ISBN 978-3-319-52156-5. Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 38.
- LARRABEE, E. Eugene. Practical design of minimum induced loss propellers. **SAE Transactions**, SAE International, v. 88, p. 2053–2062, 1979. ISSN 0096736X, 25771531. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/44699041>>. Citado na página 31.

LOWRY, J.T. **Performance of Light Aircraft**. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. (AIAA education series). ISBN 9781563473302. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3oc9llQai5YC>>. Citado na página 25.

PATRAO, Alexandre Capitaio. Implementation of blade element momentum/vortex methods for the design of aero engine propellers. 2017. Citado 4 vezes nas páginas 31, 35, 45 e 50.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. **Fundamentos De Física - Volume 1 - Mecânica**. LTC, 2016. ISBN 9788521630357. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=KG9PvgAACAAJ>>. Citado na página 17.

ROHATGI, Ankit. **Webplotdigitizer: Version 4.6**. 2022. Disponível em: <<https://automeris.io/WebPlotDigitizer>>. Citado na página 46.

SADRAEY, Mohammad H. **Aircraft design: A systems engineering approach**. Chichester: John Wiley and Sons, 2013. (Aerospace Series). ISBN 9781118352700. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/9781118352700>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 19 e 20.

SAE. **SAE BRASIL AeroDesign - SAE BRASIL — saebrasil.org.br**. 2023. <<https://saebrasil.org.br/programas-estudantis/aero-design-sae-brasil/>>. [Accessed 02-May-2023]. Citado na página 14.

THEODORSEN, T. **Theory of Propellers**. McGraw-Hill Book Company, 1948. (McGraw-Hill publications in aeronautical science). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iqkAAAAMAAJ>>. Citado na página 31.

WALD, Quentin R. The aerodynamics of propellers. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 42, n. 2, p. 85–128, 2006. ISSN 0376-0421. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042106000455>>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 28 e 31.

WALL, David. **Optimum propeller design for electric UAVs**. Tese (Doutorado), 2012. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

WEICK, F.E. **Aircraft Propeller Design**. McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1930. ISBN 9780598630872. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=63ZTAAAAMAAJ>>. Citado 8 vezes nas páginas 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30 e 31.