

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

JAQUELINE MURIELLE CUSTÓDIO

Inversões Geométricas: Explorando o GeoGebra por meio de Construções Dinâmicas

JOINVILLE - SC

2023

JAQUELINE MURIELLE CUSTÓDIO

**Inversões Geométricas: Explorando o GeoGebra por meio de
Construções Dinâmicas**

Trabalho de Graduação apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática
do Centro de Ciências Tecnológicas,
da Universidade do Estado de Santa
Catarina, como requisito parcial para a
obtenção do grau de Licenciatura em
Matemática.

Orientador: Professor Me. Marnei
Luis Mandler

**JOINVILLE, SC
2023**

JAQUELINE MURIELLE CUSTÓDIO

Inversões Geométricas: Explorando o GeoGebra por meio de Construções Dinâmicas

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Banca Examinadora

Orientador:

Prof. Me. Marnei Luis Mandler
UDESC

Membro:

Profª. Drª. Ivanete Zuchi Siple
UDESC

Membro:

Profª. Drª. Marielle Aparecida Silva
UTFPR

Joinville, 24 de novembro de 2023.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho a todas as pessoas que estiveram ao meu lado durante minha jornada no curso de Licenciatura em Matemática, desde familiares e amigos até os professores que contribuíram para a minha formação.

Primeiramente, quero expressar minha profunda gratidão à minha família e amigos, que sempre estiveram ao meu lado durante essa jornada acadêmica, expresse minha profunda gratidão. Seu apoio incondicional foi essencial para superar os desafios e alcançar este objetivo. Sobretudo, àqueles que foram receptivos a todas as queixas ao longo destes quatro meses, demonstrando constantemente palavras de incentivo e afeto.

Agradeço também ao meu orientador, Prof. Me. Marnei Luis Mandler, por sua orientação, paciência e valiosas sugestões ao longo de todo o processo de pesquisa. Sua dedicação e conhecimento foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus professores do curso de Licenciatura em Matemática pela convivência e experiência compartilhada. Essa interação enriquecedora contribuiu significativamente para meu aprimoramento como educador e como pessoa, proporcionando ideias e críticas construtivas que moldaram meu contínuo desenvolvimento como indivíduo.

Aos colegas de curso, pela troca de experiências e pela colaboração mútua, agradeço por tornarem essa jornada acadêmica mais enriquecedora.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho e para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Este marco não teria sido possível sem o apoio e encorajamento de cada um de vocês.

“A Lua é uma companheira correta. Ela nunca se vai. Está sempre lá, observando, constante, reconhecendo-nos em nossos momentos de luz e escuridão, em constante transformação, assim como nós. Todos os dias uma versão diferente dela mesma. Às vezes fraca e lívida, noutras forte e cheia de luz. A Lua compreende o significado do ser humano. Inconstante. Solitária. Esburacada de imperfeições.”

Tahereh Mafi

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo o estudo de inversões geométricas, com o suporte do GeoGebra. A partir da definição matemática de inversão geométrica, são efetuadas construções dinâmicas que permitem obter o inverso geométrico de pontos situados no interior e no exterior de uma circunferência, bem como visualizar a imagem de retas e outras circunferências por uma inversão geométrica. Em termos metodológicos, o trabalho caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica. Dentre os resultados obtidos, destacam-se a demonstração de proposições que garantem que a inversão geométrica de retas e circunferências são retas ou circunferências (não respectivamente) e a construção de treze *applets* e um objeto de aprendizagem, integrados ao GeoGebra, que possuem o potencial de auxiliar na visualização de tais propriedades da inversão geométrica.

Palavras-chave: Inversão Geométrica. GeoGebra. Construção Dinâmica. *Applet*.

ABSTRACT

This work aims to study geometric inversions with the support of GeoGebra. Based on the mathematical definition of geometric inversion, dynamic constructions are created to obtain the geometric inverse of points located inside and outside a circumference. Additionally, the work explores visualizing the image of straight lines and other circles through a geometric inversion. Methodologically, this work is characterized as bibliographical research. Among the obtained results, we highlight the demonstration of propositions that ensure that the geometric inversion of lines and circles results in lines or circles (not respectively). Additionally, thirteen *applets* and a learning object were developed, integrated into GeoGebra, with the potential to assist in visualizing these properties of geometric inversion.

Key-words: Geometric Inversion. GeoGebra. Dynamic Construction. *Applet*.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interface do GeoGebra	16
Figura 2 – Estudo de Funções	16
Figura 3 – Estudo de Geometria	17
Figura 4 – Triângulos Semelhantes	21
Figura 5 – Ângulo Externo	22
Figura 6 – Ângulo central e ângulo inscrito	23
Figura 7 – Ângulos inscritos numa circunferência	23
Figura 8 – Ângulo reto inscrito em uma semicircunferência	25
Figura 9 – Inversão de um ponto qualquer	26
Figura 10 – Circunferência dados centro e um ponto	28
Figura 11 – Ponto P interior à C	28
Figura 12 – Semirreta r com origem em O	29
Figura 13 – Reta s perpendicular à semirreta r	30
Figura 14 – Interseção entre circunferência e perpendicular	31
Figura 15 – Reta tangente à C no ponto Q	31
Figura 16 – Interseção entre reta tangente e semirreta	32
Figura 17 – Inverso de um ponto interior à circunferência	33
Figura 18 – Construção de uma circunferência	34
Figura 19 – Ponto exterior à circunferência	35
Figura 20 – Segmento de reta \overline{OP}	35
Figura 21 – Ponto médio de um segmento \overline{OP}	36
Figura 22 – Construção de uma circunferência C_1	37
Figura 23 – Interseção entre as circunferências C e C_1	37
Figura 24 – Reta \overrightarrow{TP} tangente à C em T	38
Figura 25 – Reta perpendicular a um segmento	39
Figura 26 – Interseção entre s e \overline{OP}	39
Figura 27 – Inverso de um ponto exterior à C	40
Figura 28 – Triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$	43
Figura 29 – Inversão de uma reta em uma circunferência	46
Figura 30 – Inversão de uma reta tangente em uma circunferência	47
Figura 31 – Inversão de uma reta secante em uma circunferência	47
Figura 32 – Inversão de uma reta l , com $O \in l$	49
Figura 33 – Triângulos $\triangle APB$ e $\triangle A_1P_1B_1$	50
Figura 34 – Construção de uma circunferência C_1 de raio fixo e interior à C	53
Figura 35 – Construção de um ponto P pertencente à C_1	53

Figura 36 – Inverso de um ponto pertencente à C_1 , interior à C	54
Figura 37 – Ativação do rastro de P_1	55
Figura 38 – Ativação da animação de P_1	55
Figura 39 – Inversão geométrica da circunferência C_1 , interior à C	56
Figura 40 – Circunferência que passa pelo centro O de C	57
Figura 41 – Ponto P pertencente à circunferência C_1	57
Figura 42 – Inverso de um ponto P pertencente à C_1	58
Figura 43 – Ativação do rastro de P_1	59
Figura 44 – Ativação da animação de P	59
Figura 45 – Inversão geométrica da circunferência C_1 , que passa por O	60
Figura 46 – Construção de uma circunferência exterior à C	61
Figura 47 – Ponto P sobre C_1 exterior à C	61
Figura 48 – Ponto P_1 , inverso geométrico de P	62
Figura 49 – Ativação do rastro de P_1	63
Figura 50 – Ativação da animação	63
Figura 51 – Inversão geométrica da circunferência C_1 , exterior à C	64
Figura 52 – Circunferências que se intersectam	65
Figura 53 – Pontos de interseção entre C e C_1	65
Figura 54 – Ponto P pertencente à C_1 e interior à C	66
Figura 55 – Inverso geométrico de P , exterior à C	67
Figura 56 – Inverso geométrico de P , interior à C	67
Figura 57 – Inversão de uma circunferência C_1 que intersecta C	68
Figura 58 – Retas que não intersecta C	69
Figura 59 – Ponto P sobre l	70
Figura 60 – Inverso de P	70
Figura 61 – Inversão da reta l que não intersecta C	71
Figura 62 – Reta secante a C	72
Figura 63 – Ponto $P \in l$ no interior de C	73
Figura 64 – Inverso de $P \in l$ interior à C	73
Figura 65 – Inverso de $P \in l$, exterior à C	74
Figura 66 – Inverso da l secante a C	75
Figura 67 – Reta que passa no centro de C	76
Figura 68 – Ponto $P \in l$, interior a C	77
Figura 69 – Inverso de $P \in l$ interior a C	77
Figura 70 – Inverso de $P \in l$ exterior a C	78
Figura 71 – Inversão da reta l que passa em O	79
Figura 72 – Imagem de retas e circunferências pela inversão geométrica em $C(O, \rho)$	80

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	O GEOGEBRA E SUAS POTENCIALIDADES	14
2.1	O RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO DEDUTIVO	14
2.2	O GEOGEBRA	15
2.3	POTENCIALIDADES DO GEOGEBRA	16
3	CONCEITOS GEOMÉTRICOS PRELIMINARES	19
4	INVERSÃO GEOMÉTRICA	26
4.1	DEFINIÇÃO DE INVERSÃO GEOMÉTRICA	26
4.2	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS	27
4.3	PROPRIEDADES DA INVERSÃO GEOMÉTRICA	41
5	CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA A INVERSÃO GEOMÉTRICA	52
5.1	CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA A INVERSÃO GEOMÉ- TRICA DE CIRCUNFERÊNCIAS	52
5.2	CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA A INVERSÃO GEOMÉ- TRICA DE RETAS	69
5.3	SÍNTESE DAS CONSTRUÇÕES DINÂMICAS	80
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

1 INTRODUÇÃO

A Geometria está presente em nosso cotidiano e, como um ramo da Matemática, desempenha um papel importante no desenvolvimento do raciocínio lógico e na compreensão do espaço ao nosso redor. Ela fornece as ferramentas necessárias para a descrição e compreensão de formas, estruturas e transformações planas e espaciais, auxiliando, inclusive, na interpretação de conceitos algébricos mais abstratos.

No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), o estudo de conceitos geométricos é realizado nas disciplinas de Geometria Plana e Espacial (GPE) e Desenho Geométrico (DGE), ambas pertencentes à primeira fase do curso. Em GPE é estudada a fundamentação axiomática da geometria euclidiana e são demonstrados teoremas relativos às geometrias plana e espacial. Em DGE, o foco é destinado à construção, no ambiente lápis e papel, de elementos geométricos como ângulos, retas, circunferências e polígonos.

Com o avanço das tecnologias digitais, a integração de ferramentas computacionais tem propiciado novas perspectivas para a abordagem de conceitos geométricos. Nesse contexto, o uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, permite o estudo de propriedades matemáticas relacionadas à elementos geométricos, com destaque para seu potencial dinâmico que favorece a visualização e a manipulação de objetos em um ambiente interativo para a exploração desses conceitos e que estimula a transição entre suas representações geométrica e algébrica.

Nesse sentido, o objetivo geral deste trabalho de conclusão de curso consiste em abordar a teoria matemática relacionada ao conceito de inversão geométrica, de forma integrada à utilização do GeoGebra como recurso que permita efetuar construções dinâmicas que favoreçam a visualização das propriedades demonstradas matematicamente.

Como objetivos específicos, desejamos compreender uma inversão geométrica como uma transformação que permite modificar a geometria de um problema, a partir da sua aplicação em pontos, retas e circunferências. Também pretendemos descrever o passo a passo das construções que serão realizadas no GeoGebra para obter, dinamicamente, a imagem de retas e circunferências por uma inversão geométrica, conforme as diferentes configurações possíveis para suas posições em relação ao centro de inversão.

A escolha pelo tema de inversões geométricas deu-se pela possibilidade de relacionar conceitos geométricos abstratos com a construção de *applets*, no GeoGebra, que explorem dinamicamente sua definição e propriedades. Dado um ponto no plano, a definição matemática de inversão geométrica estabelece as condições que devem ser satisfeitas para que

outro ponto seja considerado o seu inverso geométrico, em relação a uma circunferência fixada. No entanto, a definição não indica como esse inverso pode ser encontrado. Com o suporte tecnológico do GeoGebra, apresentaremos os argumentos geométricos que permitem construir o inverso de pontos interiores ou exteriores à circunferência em relação à qual a inversão é efetuada. A seguir, provaremos que o inverso obtido por meio de tais construções satisfaz, de fato, a definição matemática de inversão geométrica.

Com isso, teremos o respaldo teórico para efetuarmos construções dinâmicas que potencializarão a visualização de propriedades satisfeitas pela inversão geométrica. As demonstrações de tais propriedades serão efetuadas com o uso de argumentos essencialmente geométricos, sem que seja necessário recorrer à representação algébrica de pontos do plano por meio de números complexos. Em especial, para cada propriedade demonstrada matematicamente, apresentaremos um *applet*, desenvolvido no GeoGebra, que permitirá identificar, visual e dinamicamente, a ação da inversão geométrica sobre retas e circunferências. Nesse sentido, indicamos que a não utilização de números complexos não causará prejuízo ao entendimento da inversão geométrica enquanto transformação definida no plano cartesiano, uma vez que as construções dinâmicas, integradas ao GeoGebra, enriquecerão a compreensão do conceito matemático envolto em uma inversão geométrica.

No tocante à aplicabilidade de inversões geométricas, ainda que esse tema não seja o foco principal deste trabalho, é possível destacar o fato que uma inversão geométrica preserva ângulos (resultado que será parcialmente obtido em uma das proposições do quarto capítulo), o que permite classificá-la como uma transformação conforme. Com isso, uma inversão geométrica pode ser aplicada em problemas matemáticos e físicos que envolvam a determinação de circunferências que sejam simultaneamente tangentes a três objetos geométricos do plano, sendo tais objetos quaisquer combinações entre pontos, retas ou outras circunferências.

Os problemas relacionados à obtenção de todas as circunferências simultaneamente tangentes a três objetos geométricos são historicamente conhecidos como Problemas de Apolônio e as suas soluções, por meio de inversões geométricas, podem ser consultadas em Sousa (2014). Além disso, Chaves, Galvão e Gomes (2016) aplicam a inversão geométrica para resolver um problema de Apolônio aplicado à artilharia militar.

A inversão geométrica também possui aplicabilidade por dar origem a uma geometria não euclidiana, chamada de Geometria Inversiva (Sousa; 2014, Silva Jr, 2022). A partir de suas propriedades, a aplicação de uma inversão geométrica permite transformar problemas geométricos ou físicos aparentemente complicados de serem resolvidos no contexto da geometria euclidiana em problemas equivalentes, menos sofisticados e passíveis de solução quando submetidos ao âmbito da geometria inversiva (Silva Jr, 2022). Após a resolução do problema equivalente (e simplificado) na geometria inversiva, basta aplicar a inversão geométrica em sua solução para obter a resposta ao problema inicial, no contexto euclidiano.

Nesse cenário, o estudo da inversão geométrica possui relevância científica. No âmbito deste trabalho, exploraremos a formalização das propriedades de uma inversão geométrica por meio das suas demonstrações matemáticas e as interpretaremos dinamicamente, com o apoio de um software de geometria dinâmica. De acordo com a natureza do tema a ser desenvolvido, a caracterização metodológica deste trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica, mediada pela utilização do GeoGebra como suporte computacional para as construções dinâmicas. O questionamento norteador da pesquisa consiste em como a teoria matemática subjacente à inversão geométrica pode ser integrada ao GeoGebra com o intuito de promover a visualização e auxiliar na compreensão de suas propriedades.

O trabalho está estruturado em seis capítulos, sendo o primeiro deles esta introdução. No segundo capítulo discutimos algumas das potencialidades do GeoGebra na visualização e compreensão de conceitos geométricos. No terceiro capítulo são elencadas definições e teoremas relacionados a conceitos da geometria euclidiana, que fornecerão a fundamentação matemática para o restante do trabalho. No quarto capítulo é apresentada a definição de inversão geométrica e são enunciadas e demonstradas proposições que estabelecem suas propriedades. Em especial, o quarto capítulo contém construções dinâmicas que permitem obter, no GeoGebra, a inversão geométrica de pontos interiores e exteriores a uma circunferência, com suas respectivas justificativas matemáticas. No quinto capítulo são apresentadas as construções dinâmicas, desenvolvidas com o suporte do GeoGebra e fundamentadas nos resultados obtidos no capítulo anterior, que permitem visualizar o efeito da aplicação da inversão geométrica em retas e circunferências. Por fim, no sexto capítulo são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2 O GEOGEBRA E SUAS POTENCIALIDADES

Neste capítulo apresentaremos a fundamentação teórica que embasará as construções dinâmicas que serão realizadas posteriormente. Com base em Duval (2009), discorreremos sobre a importância da transição entre os diferentes registros de representação de um objeto matemático. Também serão indicadas algumas das potencialidades do GeoGebra, com destaque para a visualização de elementos em duas e três dimensões, o dinamismo proporcionado pelo uso de parâmetros definidos por meio de controles deslizantes e a produção de *applets* integrados ao software.

2.1 O RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO DEDUTIVO

A Geometria é uma área da Matemática que tem por objetivo o estudo das formas planas ou espaciais, assim como suas propriedades. De acordo com Boyer (1996, p.5), “o desenvolvimento da geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem”.

Com isso, podemos perceber o quão presente a Geometria está no cotidiano de todos. As formas geométricas podem ser observadas em diversos objetos ao nosso redor, partindo de uma porta até uma fatia de pizza. A partir dessas formas é que começamos a conhecer a geometria, pois essa estuda as propriedades das formas geométricas, utilizando-se da lógica matemática para isso. Além disso, a geometria possui um papel importante na formação do pensamento e conhecimento do indivíduo, tendo influência na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na ativação do raciocínio dedutivo (Piasieski, 2010).

Aliado à importância do desenvolvimento de raciocínio geométrico dedutivo, Duval (2009) indica a necessidade de efetuar-se a transição entre diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático. De acordo com Duval (2009), a matemática não consiste em um conjunto isolado de conceitos, mas sim em um complexo tecido de interconexões entre diferentes formas de representação, como símbolos, palavras, gráficos, figuras e tabelas. Ao conseguir transitar entre os diferentes registros de representação, acaba-se obtendo uma visão mais completa e profunda dos conceitos matemáticos estudados.

Nesse sentido, é comum que a geometria e a álgebra sejam consideradas como abordagens distintas para compreender e resolver problemas matemáticos. Enquanto a geome-

tria proporciona uma compreensão visual e intuitiva, a álgebra fornece ferramentas precisas para efetuar-se a análise, manipulação e generalização dos conceitos geométricos. Nesse panorama, Duval (2009) indica que a transição entre registros geométricos e algébricos não apenas pode facilitar a ligação entre conceitos distintos, mas também proporciona um enriquecimento na abordagem e aprendizagem desses conceitos.

2.2 O GEOGEBRA

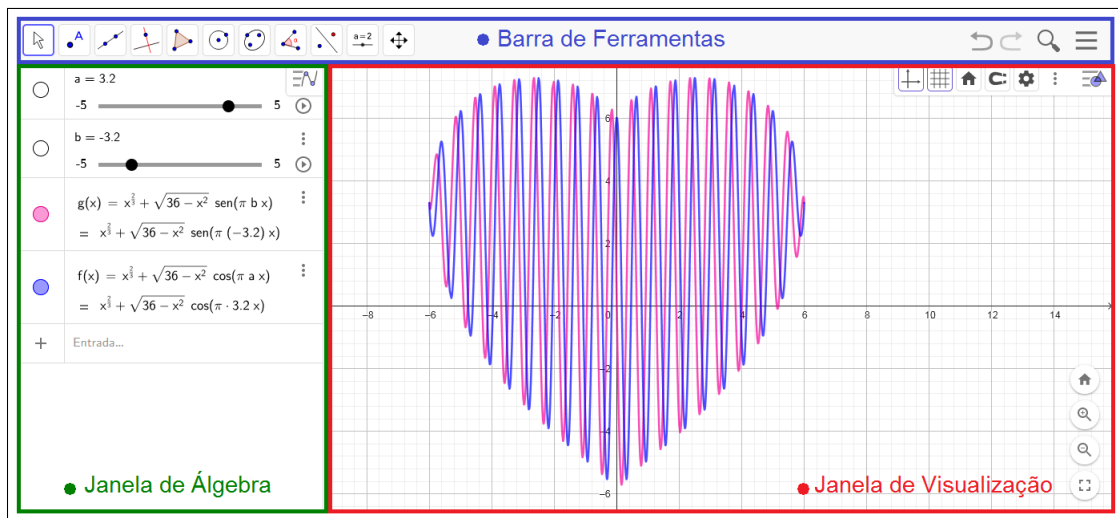
O GeoGebra é um software dinâmico de matemática que reúne geometria, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma (Santos, 2015).

Pode ser utilizado de forma online, sendo possível salvar os trabalhos produzidos, assim como compartilhá-los por meio do GeoGebra Tarefa, ou offline, por meio do download do aplicativo. É uma plataforma livre, em que qualquer pessoa pode se cadastrar, criar e compartilhar seus materiais (Silva, 2022).

A página inicial do GeoGebra consiste de três janelas principais: a Barra de Ferramentas, a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização. Na Barra de Ferramentas são disponibilizadas diferentes ferramentas que possibilitam construir, mover e alterar diversos objetos diferentes. Na Janela de Álgebra são armazenados e mostrados as representações algébricas dos elementos contruídos no GeoGebra. Essa janela possui um campo nomeado “Entrada”, em que é possível construir elementos por meio de comandos, como por exemplo, a lei de formação de uma função. Por fim a Janela de Visualização, é um componente importante do software, dinamicamente falando, porque é nela que os elementos geométricos são contruídos, animados, modificados, entre outros.

O layout da página inicial do GeoGebra pode ser visto na Figura 1, em que a Janela de Álgebra contém a lei de formação de duas funções cujos gráficos estão representados na Janela de Visualização.

Figura 1 – Interface do GeoGebra

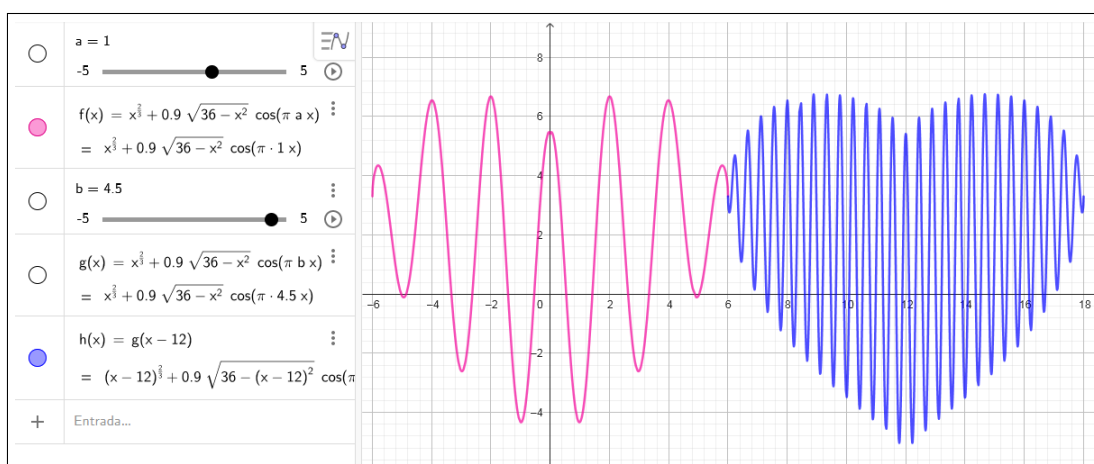


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

2.3 POTENCIALIDADES DO GEOGEBRA

O GeoGebra tem ampla potencialidade por propiciar, entre outras aplicações, a visualização de formas e figuras geométricas em duas e três dimensões. Em 2D, pode ser utilizado para o estudo do comportamento de funções. Nesse tipo de estudo é interessante ressaltar que o GeoGebra pode ser uma ferramenta que permite a visualização do comportamento gráfico de funções bastante complexas, como pode ser observado na Figura 2, na qual existe uma diferença significativa entre as funções f e h , sendo ela o valor da constante presente no cosseno. Por meio da utilização de controles deslizantes (disponíveis na Barra de Ferramentas), é possível inserir parâmetros na lei de formação de funções e, ao alterar tais parâmetros, analisar de forma dinâmica a variação ocorrida nos seus gráficos.

Figura 2 – Estudo de Funções

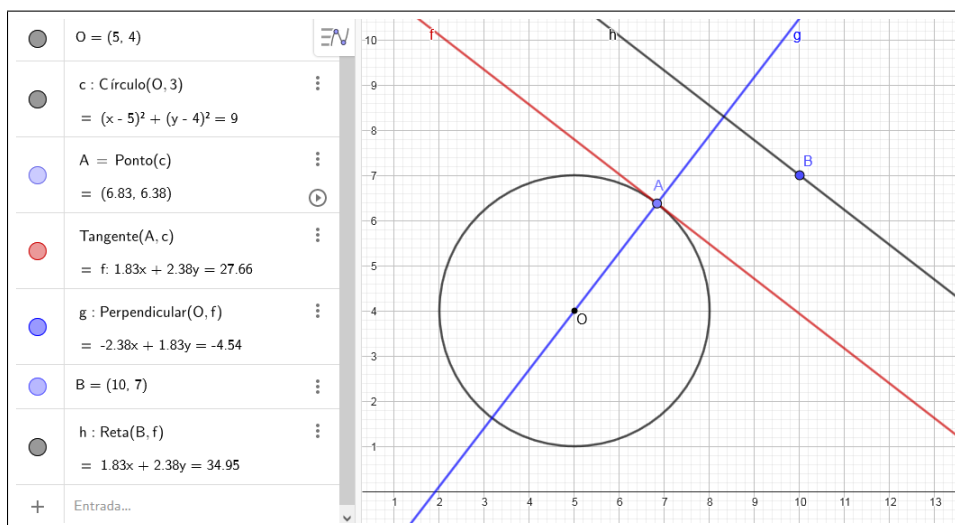


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Também é possível utilizar o GeoGebra para estudar conceitos referentes à geometria analítica, dentre os quais pode-se incluir a análise das curvas em coordenadas polares, que muitas vezes são difíceis de visualizar a partir de suas equações algébricas. Com o auxílio do GeoGebra essa tarefa pode se tornar mais simples. No link¹ é possível observar o comportamento geométrico da curva polar $r = \cos(n\theta)$, quando o valor de n é alterado com o auxílio de um controle deslizante.

Ao aliarmos a geometria analítica com a geometria plana, pode-se utilizar o GeoGebra como um recurso com potencial para observar propriedades e teoremas associados aos conteúdos de retas (paralelas, perpendiculares, tangentes, entre outras), circunferências e polígonos regulares ou irregulares, assim como para a construção de diferentes tipos de cônicas, arcos e setores circulares. Um exemplo do estudo de retas e circunferências pode ser observado na Figura 3, que contém uma circunferência C , uma reta f tangente a C em A , uma perpendicular g a f e uma paralela h a f . Além da representação geométrica desses elementos, pode-se visualizar também as suas representações algébricas na janela de álgebra na Figura 3.

Figura 3 – Estudo de Geometria



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Em 3D, pode-se utilizar o GeoGebra para estudar curvas, superfícies, poliedros e outros sólidos, assim como para obter as interseções entre diferentes tipos de curvas. Nesse contexto, o GeoGebra é particularmente útil por permitir relacionar a visualização geométrica com as representações algébricas dos conceitos estudados.

Mesmo sendo um software dinâmico, o GeoGebra permite a fixação de suas figuras, de modo que não seja possível movê-las ou modificá-las. No link² é possível observar o que

¹ <<https://www.geogebra.org/m/wgeytpxy>>

² <<https://www.geogebra.org/m/qnthmzd>>

consideramos como elementos fixos, embora alguns dos elementos sejam modificáveis a partir de sua forma algébrica. De acordo com Jones, Mackrell e Stevenson (2010), ambientes de geometria dinâmicos permitem que os usuários utilizem o mouse para entender os elementos presentes em uma figura e movê-los, extendendo essa compreensão. Ambientes como o GeoGebra também permitem que, ao movimentar elementos ou figuras na sua janela de visualização, seja possível observar as mudanças em suas expressões algébricas, e assim relacionar certas propriedades com os comportamentos geométricos observados. Além disso ao movimentar esses elementos, o que está sendo visto é modificado de tal maneira que as relações geométricas explícitas e/ou implícitas utilizadas em sua construção sejam mantidas (Zannela; Franco; Canavarro, 2018).

Os *applets* integrados ao GeoGebra também são considerados uma das suas potencialidades. Um *applet* é um software aplicativo, desenvolvido em linguagem de programação JAVA, que é executado dentro de outro programa (Moreira; Barcelos; Batista, 2010). Em geral, um *applet* tem como objetivo adicionar interatividade à aplicações WEB. Dentro da matemática, o seu uso permite experimentações e investigações, e devido a sua interatividade, proporciona o estudo de conjecturas sobre determinados assuntos (Santos, 2008; Silva, 2018).

Por fim, como os recursos disponíveis no GeoGebra são, em geral, intuitivos e de fácil manipulação, sua utilização tem potencial didático pedagógico no ensino e na aprendizagem de conceitos geométricos. Inclusive, professores de Matemática de todos os níveis podem criar ou adaptar os objetos de aprendizagem disponíveis nas comunidades online do GeoGebra para atribuir tarefas matemáticas em tempo real, em suas salas de aula, seja para introduzir conceitos ou utilizá-las com a perspectiva de projetar, identificar e explorar eventuais dificuldades de aprendizagem enfrentadas por seus alunos.

Com essas potencialidades do GeoGebra, a visualização 2D e 3D, o dinamismo e o uso dos *applets*, é possível utilizar esse software como auxiliar na compreensão de conceitos geométricos. Por exemplo no estudo de inversões geométricas, o GeoGebra não só permite uma construção mais rápida e dinâmica, como também proporciona a observação de diferentes propriedades e comportamentos, conforme veremos nos próximos capítulos.

3 CONCEITOS GEOMÉTRICOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos geométricos necessários, relacionados à geometria euclidiana, para a compreensão e construção deste trabalho. As definições e teoremas presentes nesse capítulo são provenientes de Rezende (2008), Garbi (2010), Villagra e Costa (2009) e Dolce e Pompeo (2005), nos quais é possível consultar as justificativas e demonstrações dos resultados aqui apresentados. Omitiremos as demonstrações de alguns resultados, por não serem o foco central deste trabalho.

Definição 3.1. *A noção estar entre é uma noção primitiva que obedece aos postulados (ou axiomas) que seguem:*

1. *Se P está entre A e B , então A, B e P são colineares;*
2. *Se P está entre A e B , então A, B e P são distintos dois a dois;*
3. *Se P está entre A e B , então A não está entre P e B nem B está entre P e A ;*
4. *Quaisquer que sejam os pontos A e B , se A é distinto de B , então existe um ponto P que está entre A e B .*

Notação: $A - P - B$ indica que P está entre A e B .

Definição 3.2. *Dados dois pontos distintos, a união do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta. Usaremos $|\overline{AB}|$ para denotar a medida do segmento \overline{AB} .*

Definição 3.3. *Sejam A e B pontos distintos. A semirreta de origem A contendo o ponto B , a qual é denotada por \overrightarrow{AB} , é definida como a união dos pontos do segmento \overline{AB} com o conjunto dos pontos X tais que $A - B - X$. O ponto A é denominado origem da semirreta.*

Definição 3.4. *Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados segmentos congruentes.*

Neste trabalho, a notação utilizada para denotar segmentos congruentes é $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Definição 3.5. *Um ponto B é o ponto médio de um segmento \overline{AC} se B está entre A e C e $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$.*

O próximo resultado assegura que o ponto médio de um segmento é único.

Teorema 3.1. *Todo segmento tem um único ponto médio.*

Definição 3.6. *Um ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} então essas semirretas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado de vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou ângulo CAB e representado por $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$, respectivamente. Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por \hat{A} .*

Definição 3.7. *Ângulos que têm a mesma medida são chamados ângulos congruentes.*

Quando os ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes, denotamos $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Já a igualdade de medida entre ângulos será, por comodidade, denotada por $\hat{A} = \hat{B}$.

Na sequência, apresentamos a definição de interior e exterior de uma circunferência.

Definição 3.8. *Sejam O um ponto e ρ um número real positivo. Definimos a circunferência de centro O e raio ρ , a qual denotaremos por $C(O, \rho)$, ou simplesmente C , como o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância ρ de O , ou seja, $X \in C$ se, e somente se, $|\overline{OX}| = \rho$.*

O interior de $C(O, \rho)$ é o conjunto de todos os pontos X tais que $|\overline{OX}| < \rho$. Um ponto desse tipo é chamado ponto interior da circunferência.

O exterior de $C(O, \rho)$ é o conjunto de todos os pontos X tais que $|\overline{OX}| > \rho$. Um ponto desse tipo é chamado ponto exterior da circunferência.

Definição 3.9. *Dois conjuntos, sendo cada um deles uma reta, uma semirreta ou um segmento, são perpendiculares se as retas que os contêm determinam um ângulo reto.*

Os próximos teoremas dizem respeito à existência e unicidade de retas perpendiculares.

Teorema 3.2. *Por um ponto de uma reta dada, existe uma única reta perpendicular a essa reta.*

Teorema 3.3. *Por um ponto não pertencente a uma reta, existe uma única reta perpendicular à reta dada.*

Postulado 3.1. *É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a um ponto qualquer, desde que os pontos não sejam coincidentes.*

O Postulado 3.1 é conhecido como o primeiro postulado de Euclides.

Postulado 3.2. *É possível traçar uma circunferência com qualquer centro O e raio ρ , com $\rho > 0$.*

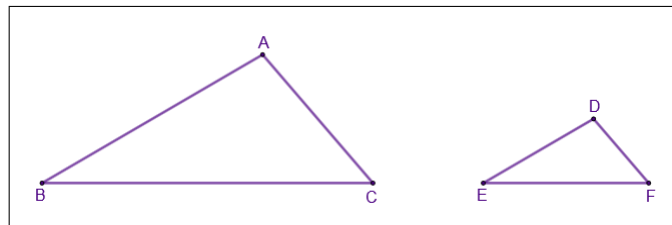
O Postulado 3.2 é conhecido como o terceiro postulado de Euclides.

Teorema 3.4. *Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma circunferência é que ela seja perpendicular ao raio que une o centro da circunferência ao ponto de tangência.*

Definição 3.10. *Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes.*

Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ como na Figura 4.

Figura 4 – Triângulos Semelhantes



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ para denotar que o triângulo $\triangle ABC$ é semelhante ao triângulo $\triangle DEF$, com a correspondência que leva A em D , B em E , e C em F .

Dessa maneira, se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ são válidas as igualdades entre os ângulos $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e as proporções entre os segmentos $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{EF}|} = \frac{|\overline{CA}|}{|\overline{FD}|}$.

O quociente entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade ou razão de semelhança entre os dois triângulos.

Teorema 3.5. *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{DF}|}$, então $\triangle(ABC) \sim \triangle(DEF)$.*

O Teorema 3.5 é conhecido como o critério lado-ângulo-lado da semelhança de triângulos.

Teorema 3.6. *Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$, então $\triangle(ABC) \sim \triangle(DEF)$.*

O Teorema 3.6 é conhecido como o critério ângulo-ângulo da semelhança de triângulos.

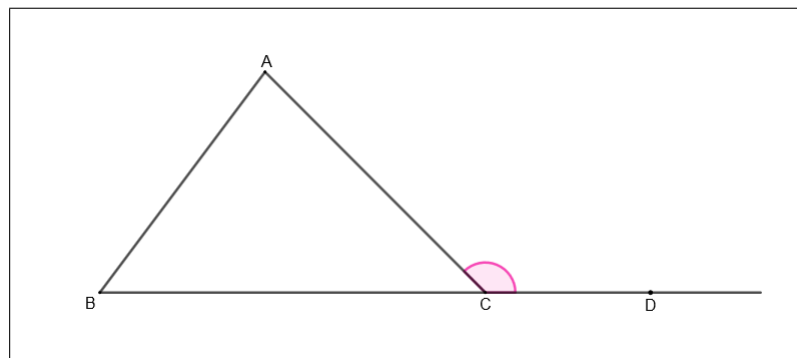
Lembremos que um triângulo é dito isósceles se têm dois lados de mesma medida, o outro lado é conhecido como base.

Teorema 3.7. *Um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos da sua base são congruentes.*

Definição 3.11. *Se C está entre B e D então \widehat{ACD} é ângulo externo do triângulo $\triangle ABC$.*

Na Figura 5, é possível observar que o ângulo \widehat{ACD} satisfaz a definição de ângulo externo à um triângulo.

Figura 5 – Ângulo Externo



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Teorema 3.8. *Em um triângulo, qualquer ângulo externo é congruente à soma dos dois ângulos internos não adjacentes à ele.*

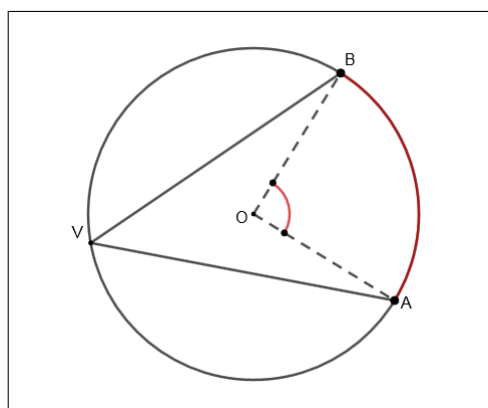
Definição 3.12. *Um polígono é inscritível se tem os seus vértices pertencentes a uma circunferência. Neste caso, dizemos que o polígono está inscrito nessa circunferência, ou que a circunferência é circunscrita ao polígono.*

Definição 3.13. *Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem vértice no centro da circunferência. Se numa circunferência de centro O um ângulo central determina um arco \widehat{AB} , dizemos que \widehat{AB} é o arco que corresponde ao ângulo central \widehat{AOB} .*

Definição 3.14. *Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.*

Na Figura 6 temos o ângulo \widehat{AVB} inscrito em uma circunferência; o arco \widehat{AB} que corresponde ao arco subentendido e o ângulo \widehat{AOB} que é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito \widehat{AVB} .

Figura 6 – Ângulo central e ângulo inscrito



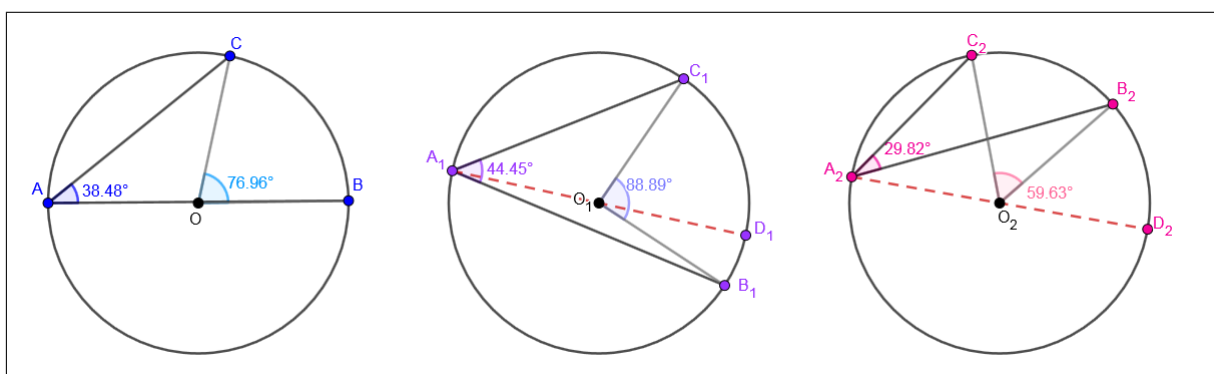
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O próximo resultado será demonstrado, pois será utilizado na dedução de propriedades da inversão geométrica nos capítulos seguintes.

Teorema 3.9. *A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do ângulo central correspondente.*

Demonstração: Considere uma circunferência T de centro O e raio ρ . Teremos três casos a considerar na demonstração: no primeiro o centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo; no segundo o centro é interior ao ângulo e no terceiro o centro é exterior ao ângulo. Cada um dos casos está representado na Figura 7.

Figura 7 – Ângulos inscritos numa circunferência



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

1º caso: Seja $B\hat{A}C$ um ângulo inscrito na circunferência, tal que $O \in \overline{AB}$. Logo \overline{AB} é um diâmetro de T . Além disso o triângulo $\triangle AOC$ é isósceles de base \overline{AC} , pois $|\overline{OA}| = \rho = |\overline{OC}|$. Como, pelo Teorema 3.7, os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, temos que $O\hat{A}C \equiv O\hat{C}A \equiv B\hat{A}C$. Pelo Teorema 3.8, como $B\hat{O}C$ é um ângulo externo ao $\triangle AOC$, obtemos

$$B\hat{O}C = O\hat{A}C + O\hat{C}A \implies B\hat{O}C = 2 \cdot B\hat{A}C \implies B\hat{A}C = \frac{B\hat{O}C}{2}.$$

2º caso: Seja $B_1\hat{A}_1C_1$ um ângulo inscrito na circunferência T , tal que O_1 esteja no seu interior. Considerando o diâmetro $\overline{A_1D_1}$ de T , pelo primeiro caso temos que

$$B_1\hat{A}_1D_1 = \frac{B_1\hat{O}_1D_1}{2} \quad \text{e} \quad C_1\hat{A}_1D_1 = \frac{C_1\hat{O}_1D_1}{2}.$$

Porém

$$B_1\hat{A}_1C_1 = C_1\hat{A}_1D_1 + B_1\hat{A}_1D_1 = \frac{C_1\hat{O}_1D_1}{2} + \frac{B_1\hat{O}_1D_1}{2} = \frac{C_1\hat{O}_1D_1 + B_1\hat{O}_1D_1}{2}.$$

Como, $C_1\hat{O}_1D_1 + B_1\hat{O}_1D_1 = B_1\hat{O}_1C_1$, obtemos que

$$B_1\hat{A}_1C_1 = \frac{B_1\hat{O}_1C_1}{2}.$$

3º caso: Seja $B_2\hat{A}_2C_2$ um ângulo inscrito na circunferência T , tal que O_2 esteja no seu exterior. Considerando o diâmetro $\overline{A_2D_2}$ de T , pelo primeiro caso temos que

$$B_2\hat{A}_2D_2 = \frac{B_2\hat{O}_2D_2}{2} \quad \text{e} \quad C_2\hat{A}_2D_2 = \frac{C_2\hat{O}_2D_2}{2}.$$

Porém

$$B_2\hat{A}_2C_2 = C_2\hat{A}_2D_2 - B_2\hat{A}_2D_2 = \frac{C_2\hat{O}_2D_2}{2} - \frac{B_2\hat{O}_2D_2}{2} = \frac{C_2\hat{O}_2D_2 - B_2\hat{O}_2D_2}{2}.$$

Como, $C_2\hat{O}_2D_2 - B_2\hat{O}_2D_2 = C_2\hat{O}_2B_2$, obtemos que

$$B_2\hat{A}_2C_2 = \frac{C_2\hat{O}_2B_2}{2}.$$

Portanto, a relação é válida para os três casos possíveis. ■

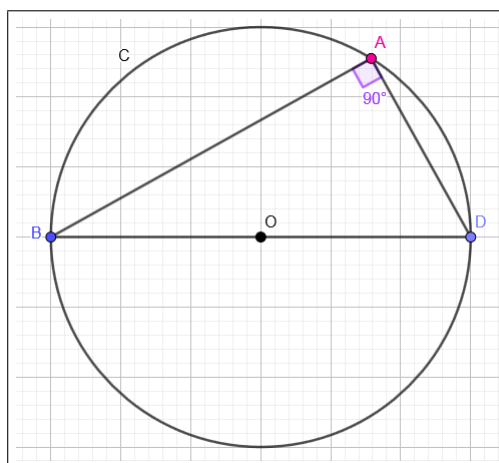
Como consequência do resultado anterior, temos o Corolário seguinte.

Corolário 3.1. *Todo ângulo reto é inscritível numa semicircunferência e, reciprocamente, todo ângulo inscrito numa semicircunferência, com os lados passando pelas extremidades do seu diâmetro, é ângulo reto.*

O Corolário 3.1 é, de fato, uma consequência direta do Teorema 3.9, pois o ângulo central de todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é raso, isto é, mede 180° .

Na Figura 8 é possível observar que o ângulo $\hat{B}AD$ está inscrito em uma semicircunferência e possui medida igual a 90° , em decorrência do Corolário 3.1. Veja que um dos lados do $\triangle ABD$ é o diâmetro.

Figura 8 – Ângulo reto inscrito em uma semicircunferência



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Teorema 3.10. *Um triângulo é retângulo se, e somente se, puder ser inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é a medida de sua hipotenusa.*

A demonstração do Teorema 3.10 utiliza o resultado do Corolário 3.1 e pode ser consultada em Villagra e Costa (2009).

4 INVERSÃO GEOMÉTRICA

Neste capítulo, trataremos da inversão geométrica, definida como a inversão em relação à uma circunferência C . A partir da sua definição, conseguiremos os métodos geométricos que permitem obter, com auxílio do GeoGebra, os inversos geométricos de pontos situados no interior e no exterior de C . A seguir, provaremos propriedades satisfeitas pela inversão geométrica. As principais referências deste capítulo são Prado (2022), Duran (2013) e Frasson (2022).

4.1 DEFINIÇÃO DE INVERSÃO GEOMÉTRICA

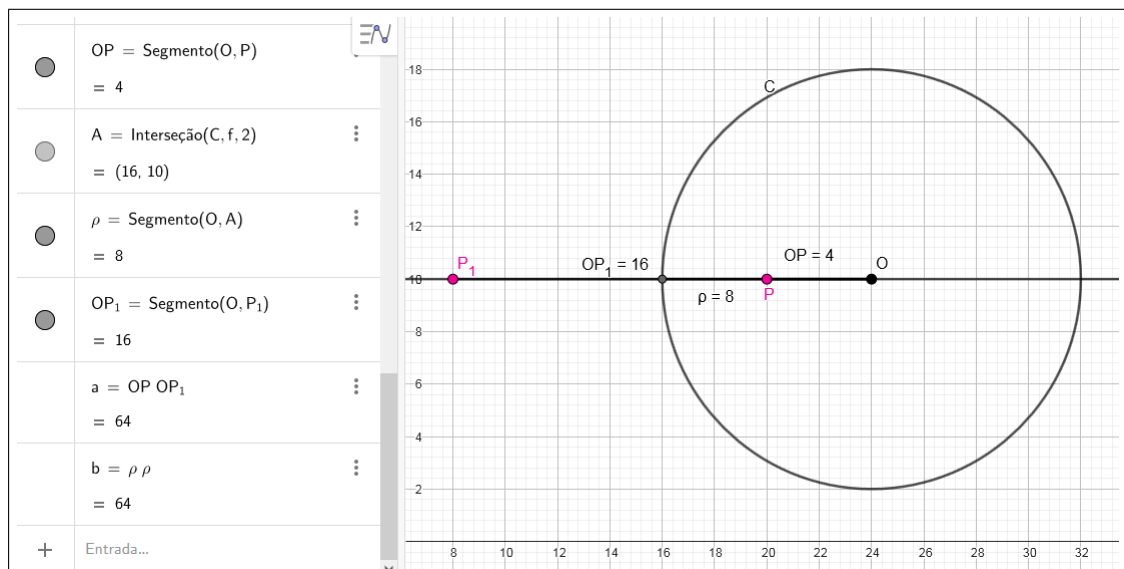
Definição 4.1. Dada uma circunferência $C(O, \rho)$ de centro num ponto O e raio ρ , uma inversão em C é uma transformação que envia cada ponto P , com $P \neq O$, num ponto P_1 tal que:

1. P_1 pertence à semirreta \overrightarrow{OP} .
2. $|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = \rho^2$.

O ponto P_1 é dito o inverso geométrico de P em relação à circunferência C .

A Figura 9 exibe o inverso geométrico P_1 de um ponto P , em relação à circunferência C , assim como possibilita verificar que os itens 1 e 2 da Definição 4.1 são satisfeitos.

Figura 9 – Inversão de um ponto qualquer



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Observação 4.1. Do item 2 da Definição 4.1, se $|\overline{OP}|$ representa a distância do ponto P ao centro O da circunferência C de raio ρ , temos que a distância de O até P_1 é dada por

$$|\overline{OP_1}| = \frac{\rho^2}{|\overline{OP}|},$$

pois $P \neq O$ garante que $|\overline{OP}| \neq 0$.

Observação 4.2. Da Definição 4.1, nota-se que o inverso geométrico de $P = O$ não está definido, pois caso estivesse, teríamos $|\overline{OP}| = 0$ e não existe P_1 tal que $0 \cdot |\overline{OP_1}| = \rho^2$.

4.2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS

Nesta seção vamos apresentar construções dinâmicas desenvolvidas no GeoGebra Classic 6 versão online, que permitem obter o inverso geométrico de um ponto P qualquer, assim como as demonstrações dos resultados obtidos com tais construções. Cada etapa das construções será justificada com base nos resultados preliminares apresentados no Capítulo 3. Também exibiremos as ferramentas do GeoGebra utilizadas em cada passo das construções.

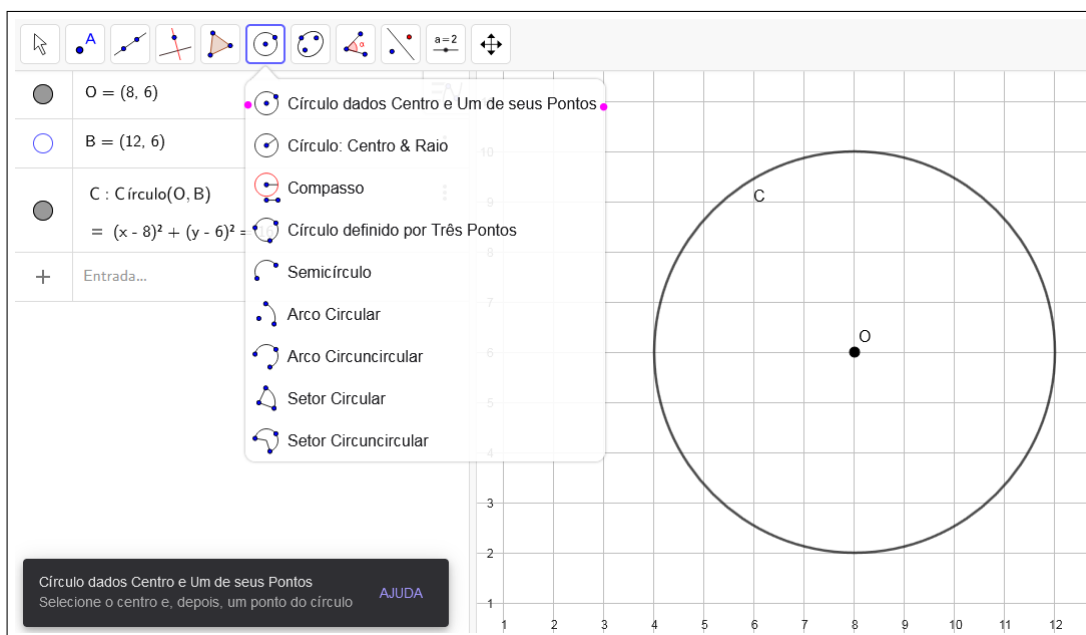
Construção 1: Inverso de um ponto P interior à circunferência C .

Justificativa:

Passo 1: utilizando a ferramenta de construção “círculo dados centro e um de seus pontos” construa uma circunferência C de centro O e raio ρ .

A Figura 10 ilustra a ferramenta do GeoGebra utilizada no primeiro passo e a circunferência C construída.

Figura 10 – Circunferência dados centro e um ponto



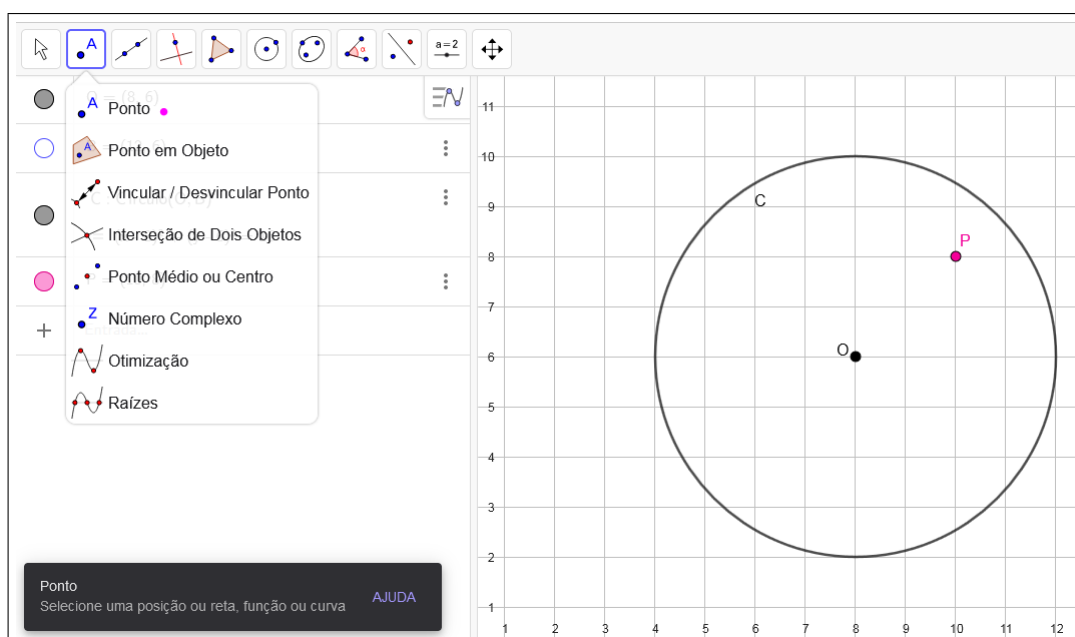
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é possível pela Definição 3.8 e pelo Postulado 3.2.

Passo 2: utilizando a ferramenta “ponto” tome um ponto P interior à circunferência C e diferente de O .

A Figura 11 mostra a ferramenta do GeoGebra usada no segundo passo da construção.

Figura 11 – Ponto P interior à C

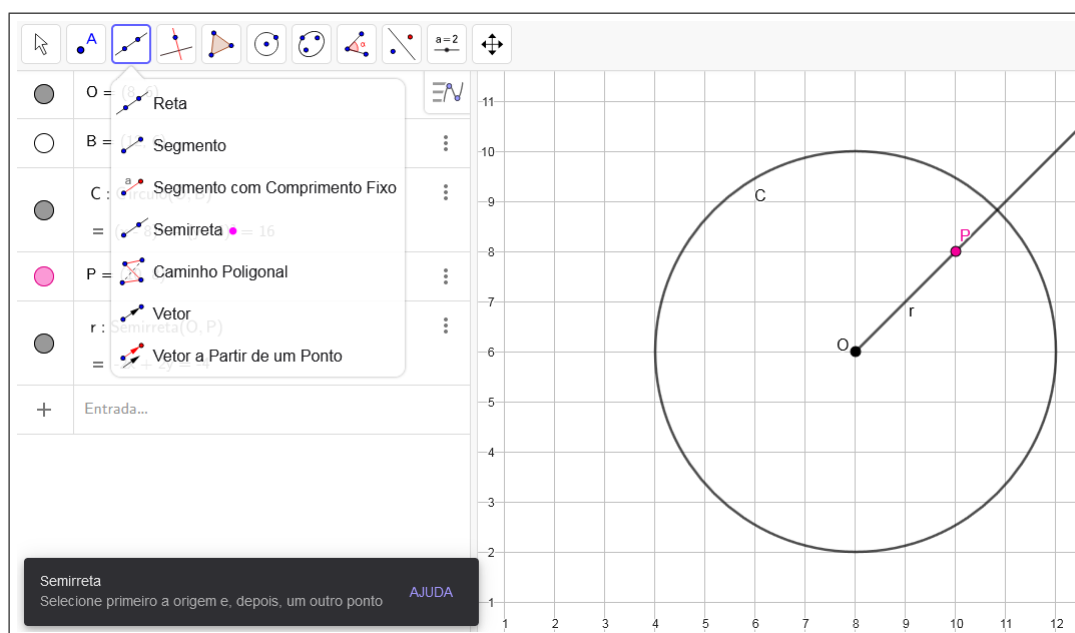


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “semirreta” construa uma semirreta $r := \overrightarrow{OP}$ com origem no ponto O e que passe por P .

Na Figura 12 podemos visualizar a semirreta \overrightarrow{OP} construída no terceiro passo e a respectiva ferramenta do GeoGebra utilizada.

Figura 12 – Semirreta r com origem em O



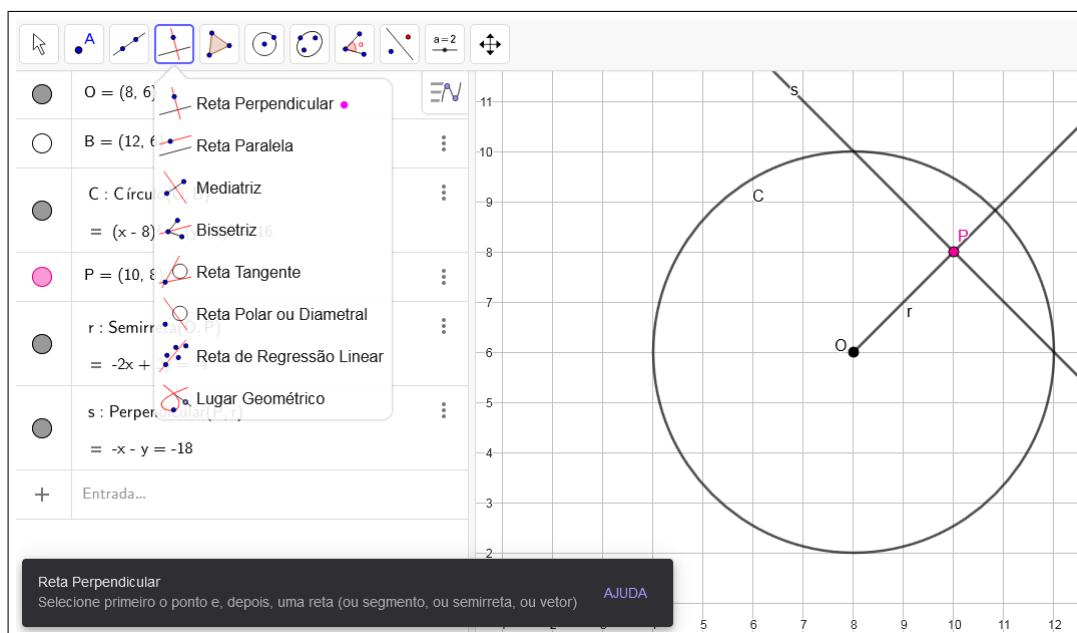
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é possível pela Definição 3.3 e pelo Postulado 3.1.

Passo 4: utilizando a ferramenta “reta perpendicular”, construa a reta s , que é perpendicular à semirreta \overrightarrow{OP} , no ponto P .

A ferramenta do GeoGebra utilizada nesse passo é mostrada na Figura 13.

Figura 13 – Reta s perpendicular à semirreta r



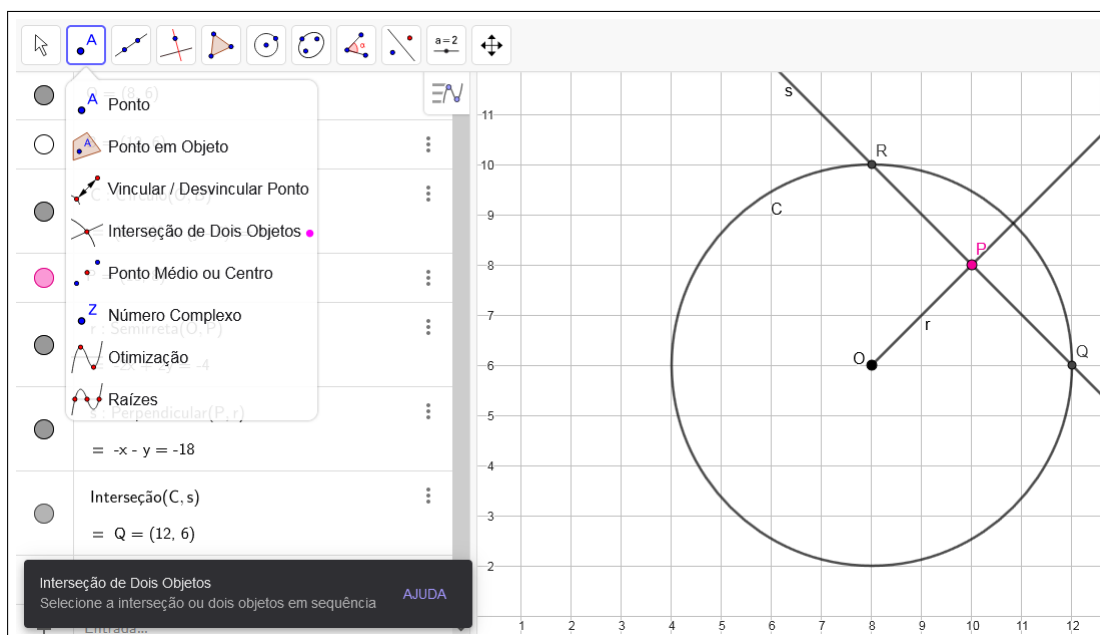
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção pode ser realizada devido à Definição 3.9 e pelos Teoremas 3.2 e 3.3, a reta s é única.

Passo 5: utilizando a ferramenta “interseção de dois objetos”, selecione a circunferência C e a perpendicular s .

Nessa etapa obteremos os pontos Q e R , conforme mostrado na Figura 14, onde também pode-se ver a ferramenta do GeoGebra utilizada. Sem perda de generalidade, consideraremos no restante desta construção somente o ponto Q . No entanto, ressaltamos que todos os passos realizados a partir daqui também valem para o ponto R .

Figura 14 – Interseção entre circunferência e perpendicular

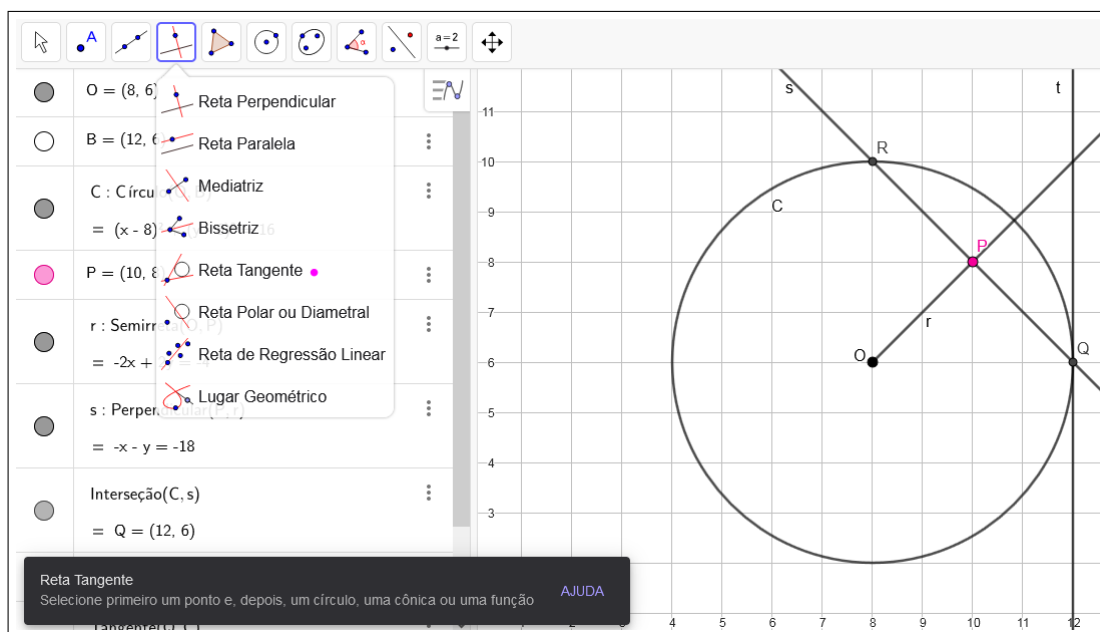


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 6: utilizando a ferramenta “reta tangente”, selecione o ponto Q e a circunferência C, assim construindo a reta tangente t à C no ponto Q.

A reta tangente construída nesse passo pode ser visualizada na Figura 15, assim como a ferramenta do GeoGebra utilizada nesse passo.

Figura 15 – Reta tangente à C no ponto Q



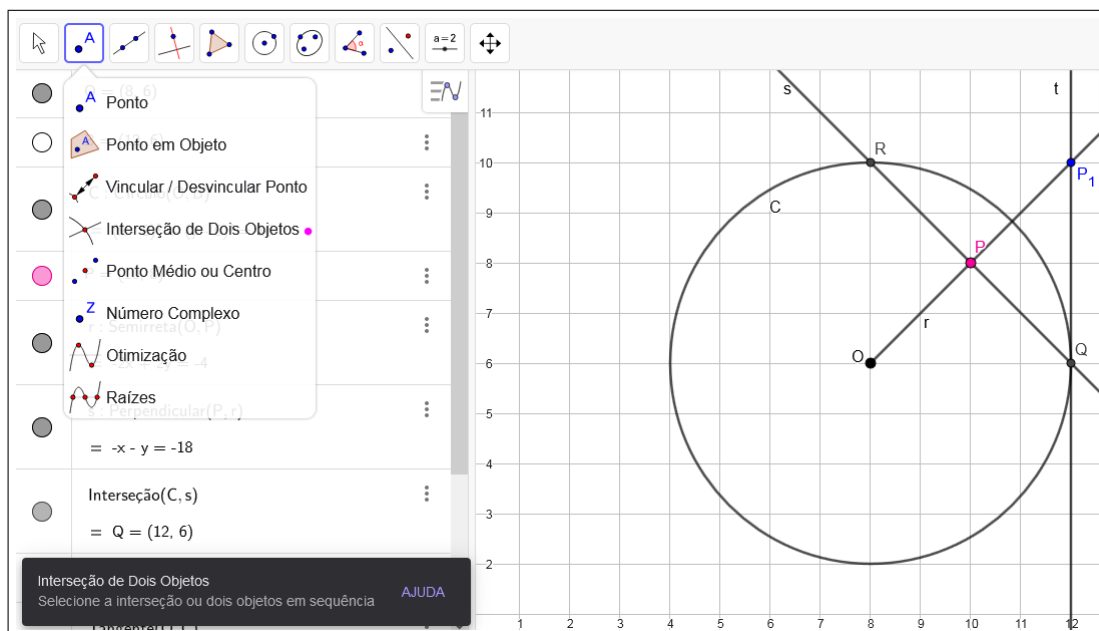
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é possível pelo Teorema 3.4.

Passo 7: utilizando a ferramenta “interseção de dois objetos”, selecione a reta tangente t e a semirreta \overrightarrow{OP} para obter o ponto de interseção P_1 .

A Figura 16 mostra a ferramenta do GeoGebra utilizada para a construção do ponto de interseção P_1 .

Figura 16 – Interseção entre reta tangente e semirreta



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Conclusão: Afirmamos que o ponto P_1 é o inverso de P em relação à circunferência C . ■

Ao mover o ponto P tomado no segundo passo da Construção 1 é possível perceber que todos os elementos construídos nas demais etapas se alteram. Isso ocorre sempre que o ponto P for tomado interiormente à circunferência C . Dessa forma, a Construção 1 fornece o inverso geométrico P_1 de um ponto P interior à C e tem potencial dinâmico, o que auxilia a compreender o conceito de inversão geométrica. Esse fato pode ser observado no *applet*¹ confeccionado no GeoGebra. Sempre que o ponto P for tomado interior à circunferência C , temos que o ponto P_1 será o inverso geométrico de P , conforme provaremos no resultado a seguir.

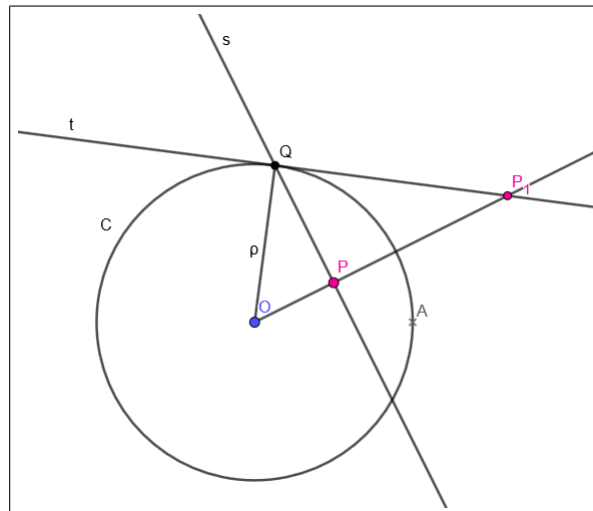
¹ <<https://www.geogebra.org/m/qhcvck4c>>

Teorema 4.1. *Se P é um ponto interior à circunferência C , então o ponto P_1 obtido na Construção 1 é o inverso geométrico de P em relação à circunferência C .*

Demonstração: Sejam C uma circunferência de centro O e raio ρ e P um ponto interior à C . Vamos provar que o ponto P_1 , obtido na Construção 1, satisfaz a Definição 4.1. De fato, temos:

1. Os pontos O , P e P_1 são colineares por construção, pois $P_1 \in \overrightarrow{OP}$, uma vez que P_1 é a interseção de t e \overrightarrow{OP} , e \overrightarrow{OP} é a semirreta que liga O a P .
2. Consideremos os triângulos OPQ e OQP_1 exibidos na Figura 17.

Figura 17 – Inverso de um ponto interior à circunferência



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O $\triangle OPQ$ é retângulo, pois $\widehat{OPQ} = 90^\circ$, por construção.

O $\triangle OQP_1$ é retângulo, pois $\widehat{OQP_1} = 90^\circ$, já que $|\overline{OQ}| = \rho$ e $\overrightarrow{QP_1}$ é tangente à C , por construção.

Assim, como $\widehat{QOP} \equiv \widehat{QP_1O}$ e $\widehat{OPQ} \equiv \widehat{OQP_1}$, utilizando o critério ângulo-ângulo (Teorema 3.6), temos que os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OQP_1$ são semelhantes.

$$\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OQ}|} = \frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OP_1}|} \Rightarrow \frac{|\overline{OP}|}{\rho} = \frac{\rho}{|\overline{OP_1}|}.$$

Disso segue:

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = \rho^2.$$

Portanto, pela Definição 4.1, P_1 é o inverso geométrico de P em relação à C .

■

A construção a seguir permite obter, com auxílio do GeoGebra, o inverso geométrico de um ponto situado no exterior de uma circunferência.

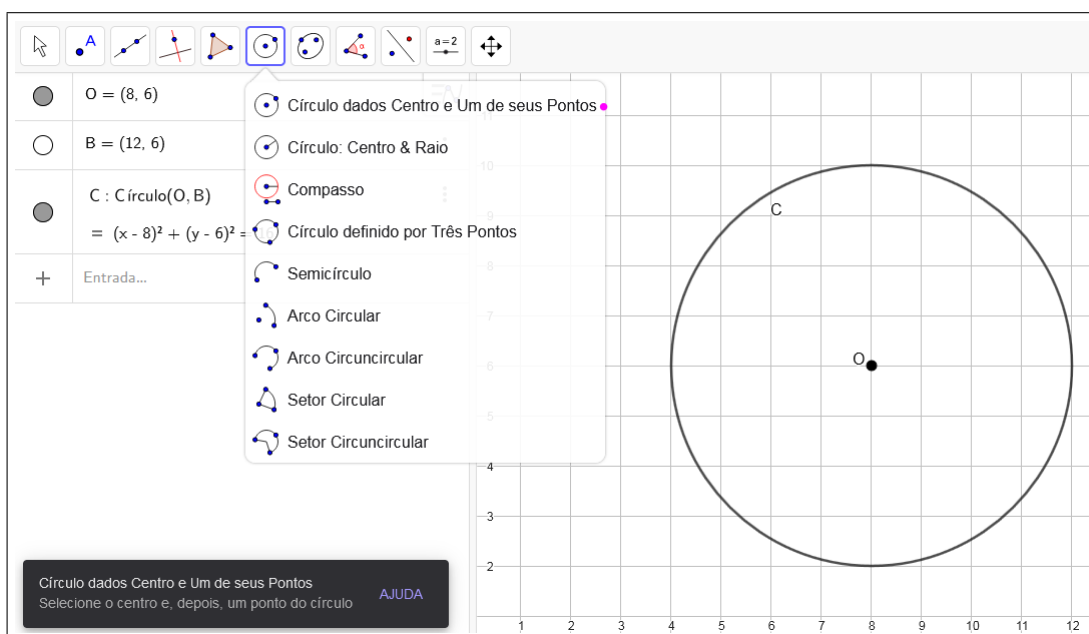
Construção 2: Inverso de um ponto P exterior à circunferência C .

Justificativa:

Passo 1: utilizando a ferramenta de construção “círculo dados centro e um de seus pontos” construa uma circunferência C de centro O e raio r .

A construção realizada pode ser observada na Figura 18, em que também é apresentada a ferramenta do GeoGebra utilizada.

Figura 18 – Construção de uma circunferência



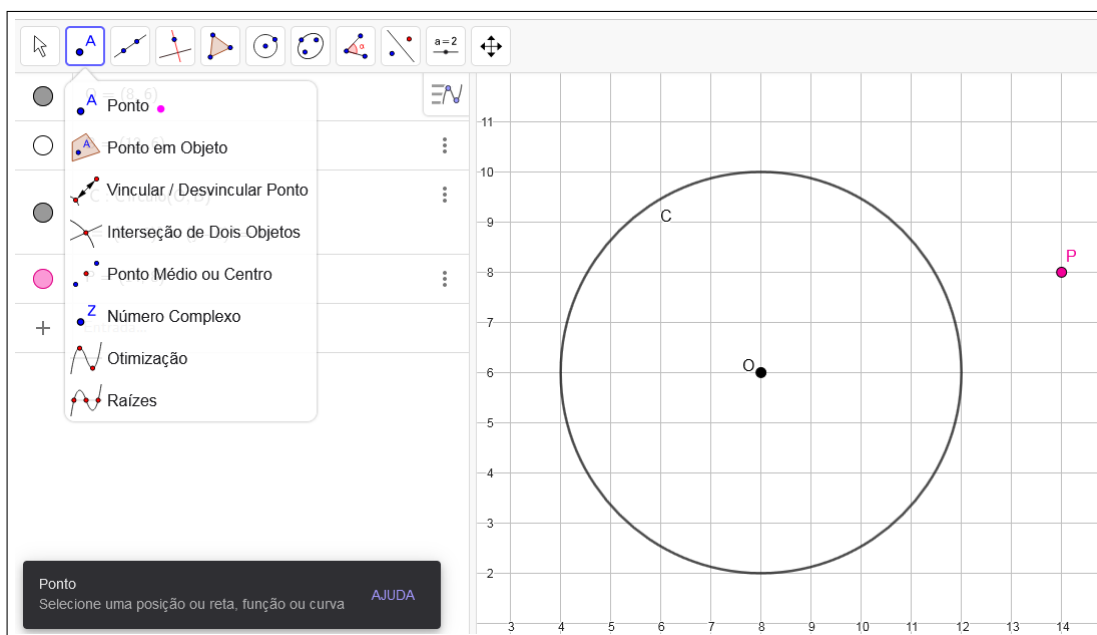
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é possível pela Definição 3.8 e pelo Postulado 3.2.

Passo 2: utilizando a ferramenta “ponto” tome um ponto P exterior à circunferência C .

O ponto P tomado pode ser visualizado na Figura 19, assim como a localização da ferramenta do GeoGebra que permite marcar o ponto P .

Figura 19 – Ponto exterior à circunferência

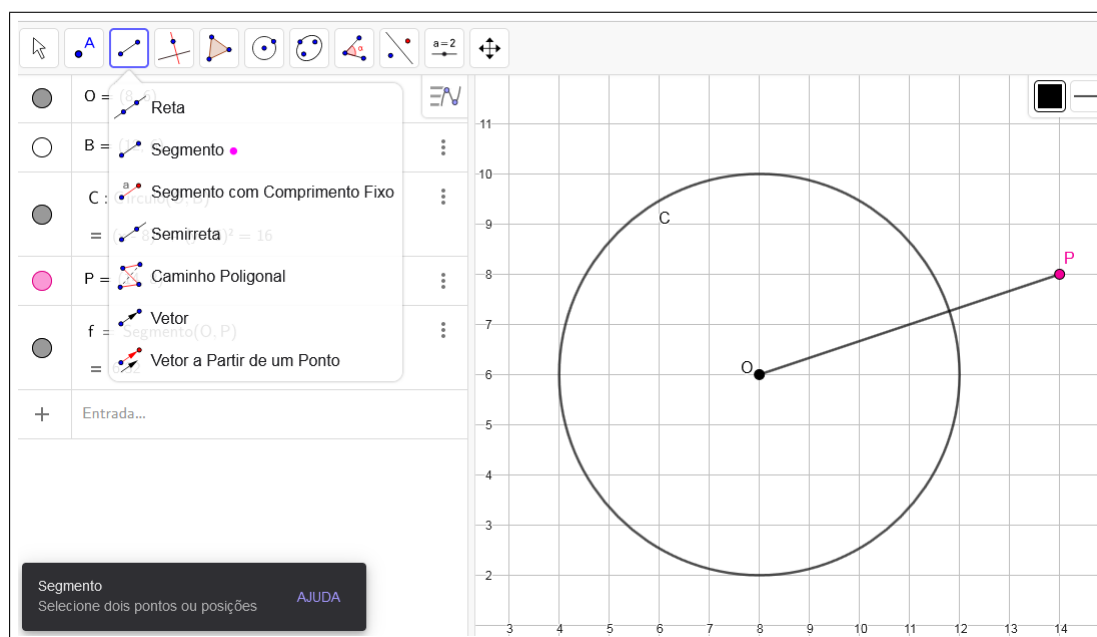


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “segmento” construa um segmento de reta com origem em O e extremidade no ponto P , denotado por \overline{OP} .

A Figura 20 apresenta a ferramenta do GeoGebra utilizada para a criação do segmento de reta \overline{OP} .

Figura 20 – Segmento de reta \overline{OP}



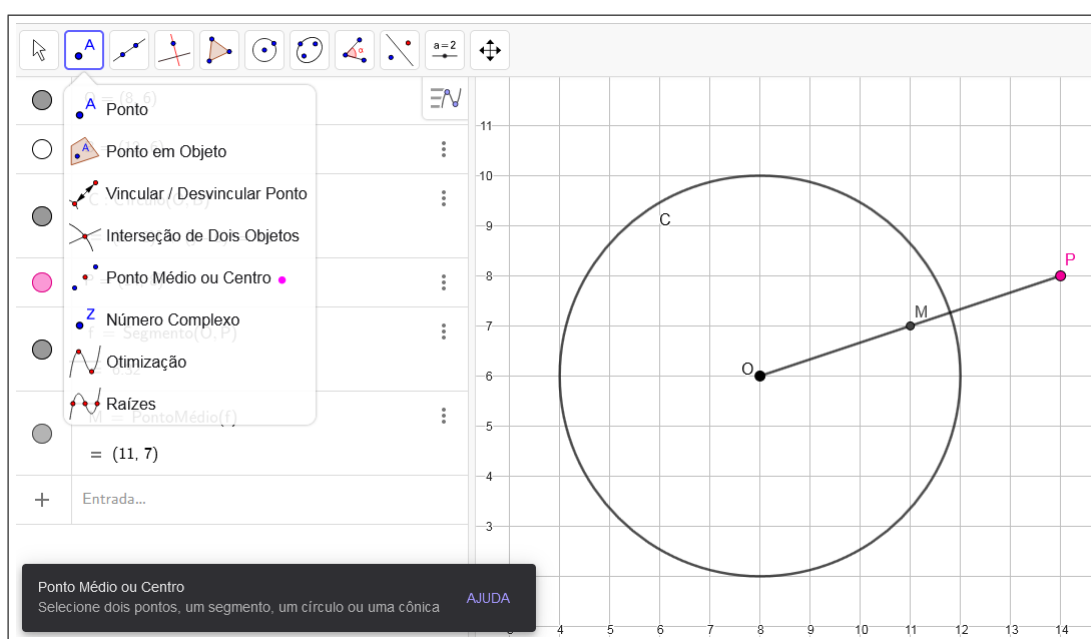
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é justificada, matematicamente, pela Definição 3.2, que define um segmento de reta.

Passo 4: utilizando a ferramenta “ponto médio ou centro”, selecione o segmento \overline{OP} e crie o seu ponto médio M .

Na Figura 21 é possível observar o ponto médio criado, assim como a localização da ferramenta do GeoGebra utilizada para esta ação.

Figura 21 – Ponto médio de um segmento \overline{OP}



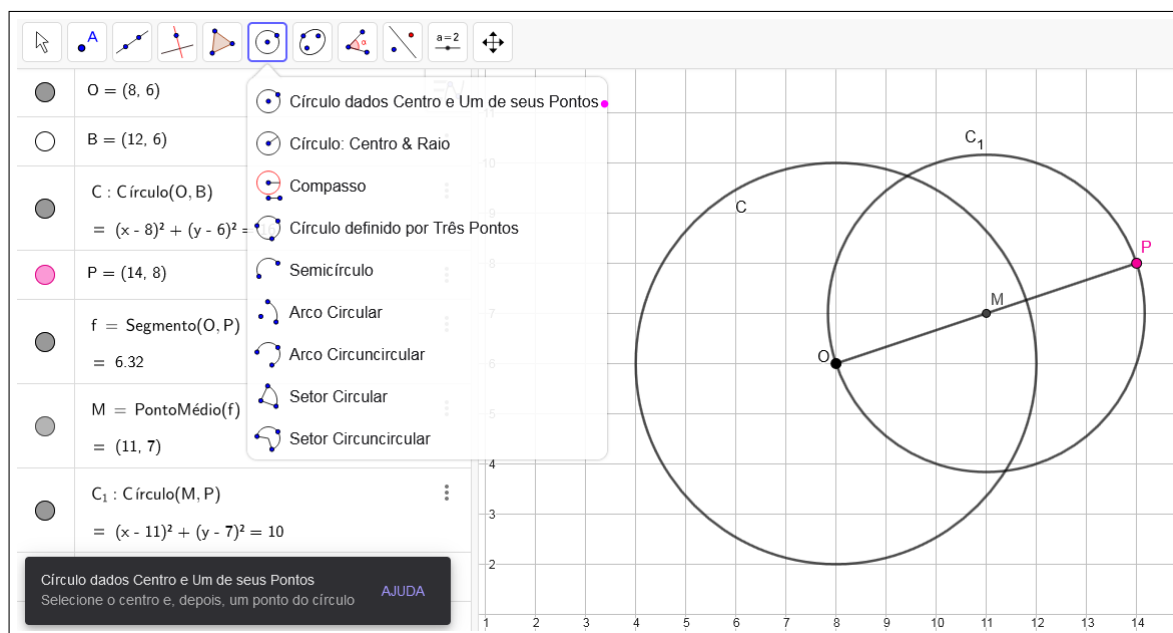
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é justificada, matematicamente, pelas Definições 3.5 e 3.1, que estabelecem o conceito de ponto médio de um segmento e sua unicidade.

Passo 5: utilizando a ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos”, construa a circunferência C_1 com centro em M e raio \overline{MP} .

Na Figura 22 é mostrada a ferramenta do GeoGebra utilizada para a construção da circunferência C_1 , assim como o resultado de sua utilização.

Figura 22 – Construção de uma circunferência C_1



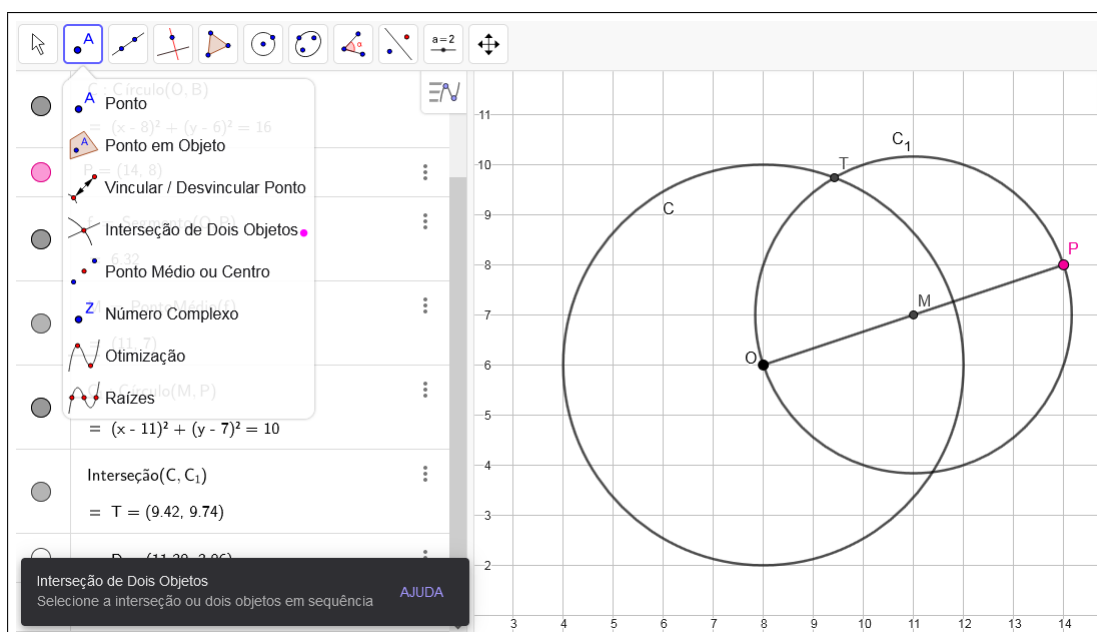
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é possível pela Definição 3.8 e pelo Postulado 3.2.

Passo 6: utilizando a ferramenta “interseção de dois objetos”, selecione as circunferências C e C_1 e marque o ponto T (uma das interseções).

Esse ponto de interseção entre C e C_1 pode ser observado na Figura 23, assim como o local onde se encontra a ferramenta do GeoGebra que permite a sua construção.

Figura 23 – Interseção entre as circunferências C e C_1

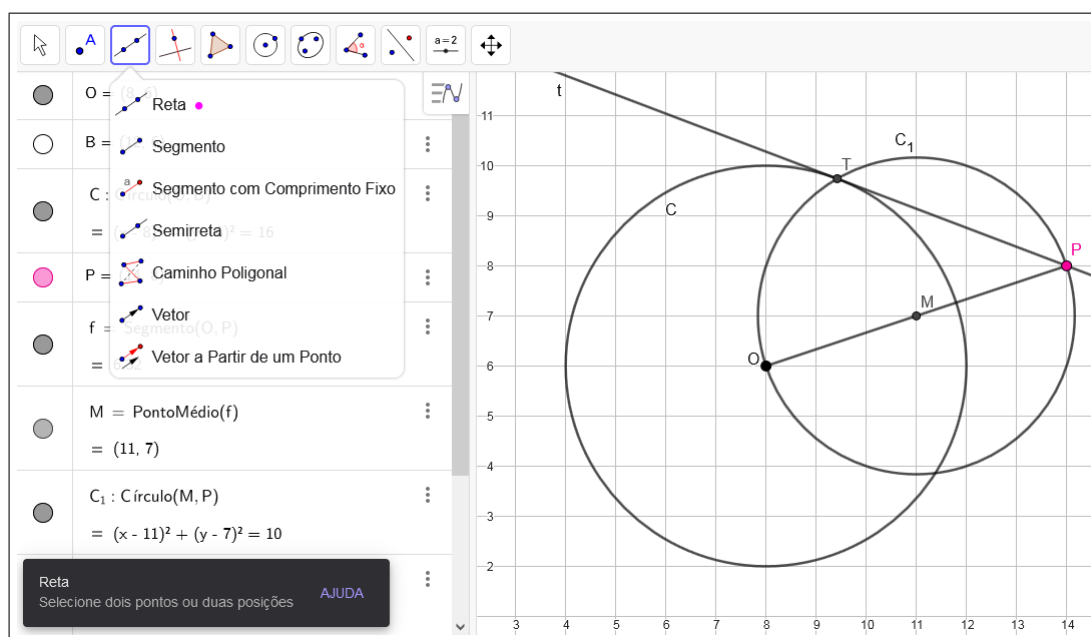


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 7: utilizando a ferramenta “reta”, selecione os ponto T e P , assim construindo a reta t , que é tangente à C em T . De fato, a reta t é tangente em T pelos Teoremas 3.4 e 3.10.

Na Figura 24 podemos ver a reta tangente t e o recurso do GeoGebra empregado para sua obtenção.

Figura 24 – Reta \overrightarrow{TP} tangente à C em T



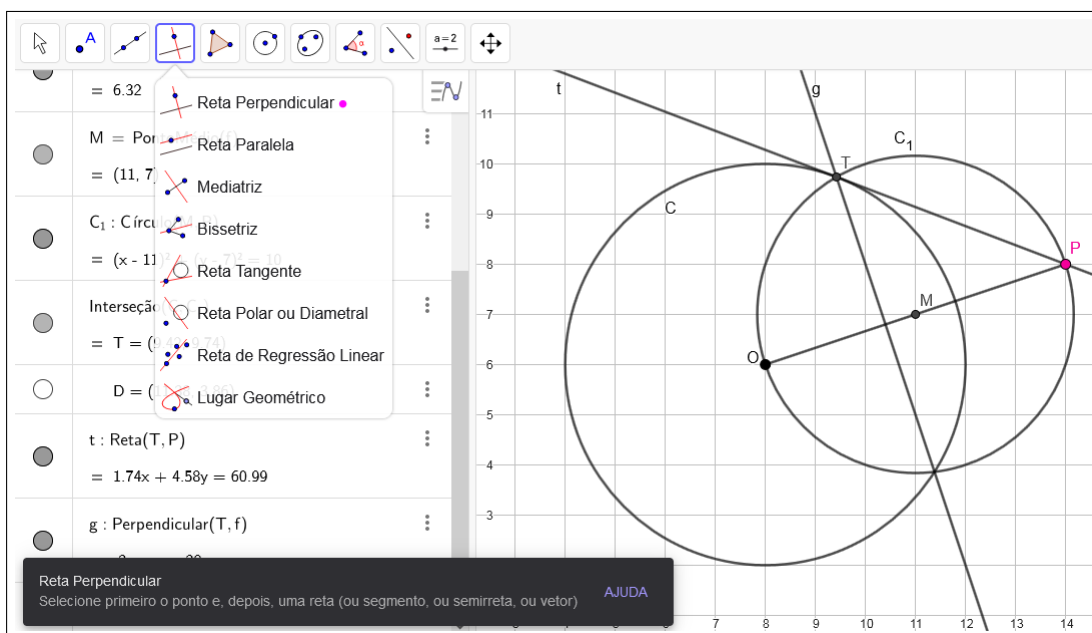
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção é justificada, matematicamente, pelo Teorema 3.4, uma vez que \overline{OT} é um raio de C .

Passo 8: utilizando a ferramenta “reta perpendicular”, selecione o segmento \overline{OP} e o ponto T para construir uma reta perpendicular s ao segmento \overline{OP} e que passa em T .

A reta perpendicular s pode ser vista na Figura 25, assim como a ferramenta do GeoGebra utilizada para sua construção.

Figura 25 – Reta perpendicular a um segmento



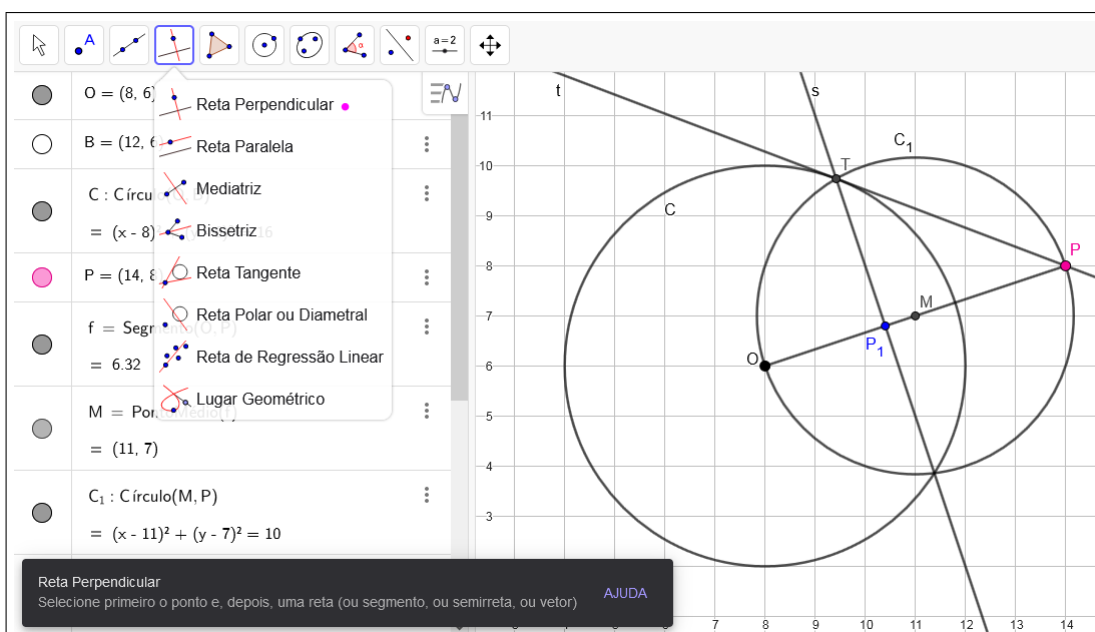
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Essa construção pode ser realizada devido à Definição 3.9 e aos Teoremas 3.2 e 3.3.

Passo 9: utilizando a ferramenta “interseção de dois objetos”, selecione a reta s e o segmento \overline{OP} , para obter P_1 o ponto de interseção P_1 .

O ponto P_1 é mostrado na Figura 26, que também exibe a ferramenta do GeoGebra utilizada em sua construção.

Figura 26 – Interseção entre s e \overline{OP}



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Conclusão: Afirmamos que o ponto P_1 é o inverso de P , em relação à circunferência C . ■

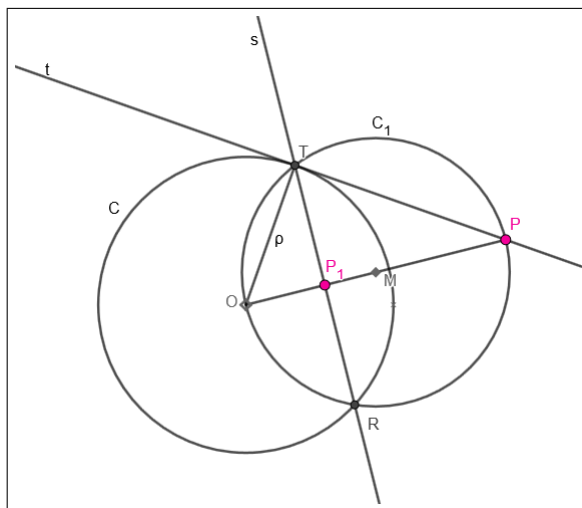
Ao mover o ponto P tomado no segundo passo da Construção 2, é possível perceber que todos os elementos construídos nas demais etapas se alteram dinamicamente, inclusive o ponto P_1 . Esse fato pode ser visualizado no *applet*² confeccionado no GeoGebra. Sempre que o ponto P for tomado no exterior da circunferência C , temos que o ponto P_1 será o inverso geométrico de P , conforme provaremos no resultado a seguir.

Teorema 4.2. *Se P é um ponto exterior à circunferência C , então o ponto P_1 obtido na Construção 2 é o inverso geométrico de P em relação à circunferência C .*

Demonstração: Sejam C uma circunferência de centro O e raio ρ e P um ponto exterior à C . Provaremos que o ponto P_1 satisfaz a Definição 4.1. De fato, temos que:

1. Os pontos O , P e P_1 são colineares por construção, pois $P_1 \in \overrightarrow{OP}$ e \overrightarrow{OP} é a semirreta que liga O a P .
2. Considere os triângulos $\triangle OP_1T$ e $\triangle OPT$ exibidos na Figura 27, em que T é o ponto obtido no sexto passo da Construção 2.

Figura 27 – Inverso de um ponto exterior à C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O $\triangle OP_1T$ é retângulo em P_1 , pois $\widehat{OP_1T} = 90^\circ$ por construção.

O $\triangle OPT$ é retângulo em T , pois $\widehat{OTP} = 90^\circ$, já que $|\overline{OT}| = \rho$ e \overline{TP} é tangente à C .

² <<https://www.geogebra.org/m/ymujzgmw>>

Assim, como $O\hat{P}_1T \equiv O\hat{T}P$ e $T\hat{O}P_1 \equiv T\hat{O}P$, utilizando o critério ângulo-ângulo (Teorema 3.6), temos que os triângulos $\triangle OPT$ e $\triangle OP_1T$ são semelhantes.

$$\frac{|\overline{OP_1}|}{|\overline{OT}|} = \frac{|\overline{OT}|}{|\overline{OP}|} \Rightarrow \frac{|\overline{OP_1}|}{\rho} = \frac{\rho}{|\overline{OP}|}.$$

Disso segue

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = \rho^2.$$

Portanto, provamos que P_1 é o inverso geométrico de P em relação à C . ■

Os resultados dos Teoremas 4.1 e 4.2 podem ser explorados dinamicamente em um objeto de aprendizagem³ desenvolvido com as potencialidades do GeoGebra. Este objeto de aprendizagem permite ao usuário selecionar ícones que exibem ou ocultam, isolada e ordenadamente, cada uma das etapas necessárias para a obtenção dos inversos geométricos de pontos interiores e exteriores a uma circunferência. O objeto de aprendizagem também contém questionamentos propostos ao usuário, que visam promover e estimular a compreensão da definição de uma inversão geométrica.

Na próxima seção provaremos o resultado referente à obtenção do inverso geométrico de um ponto $P \in C$.

4.3 PROPRIEDADES DA INVERSÃO GEOMÉTRICA

Nesta seção vamos enunciar e demonstrar propriedades relacionadas à inversão geométrica em uma circunferência C . As duas primeiras propriedades referem-se à localização do inverso geométrico de um ponto situado sobre C ou no seu interior/exterior.

Proposição 4.1. *A inversão geométrica em uma circunferência C mantém fixos os pontos situados sobre C .*

Demonstração: Seja C uma circunferência de raio ρ e centro O . Se $P \in C$, então

$$|\overline{OP}| = \rho.$$

Seja P_1 a imagem de P pela inversão em C . Pelo item 2 da Definição 4.1, temos

$$|\overline{OP_1}| = \frac{\rho^2}{|\overline{OP}|} = \frac{\rho^2}{\rho} = \rho,$$

³ <<https://www.geogebra.org/m/bhzwphwj>>

isto é, P_1 também pertence a C . Ainda, pelo item 1 Definição 4.1, P_1 deve pertencer à semirreta \overrightarrow{OP} . Consequentemente, temos

$$P_1 = P.$$

Disso, obtemos que a imagem de qualquer $P \in C$ pela inversão em C é o próprio P , o que significa que todo ponto da circunferência C é fixo pela inversão geométrica em relação à C . ■

Proposição 4.2. *A inversão geométrica em C envia pontos interiores a C em pontos externos a C . Analogamente, a inversão em C envia pontos exteriores a C em pontos internos a C .*

Demonstração: Seja C uma circunferência de raio ρ e centro O . Se P é um ponto situado no interior de C , então

$$|\overline{OP}| < \rho.$$

Seja P_1 a imagem de P pela inversão em C . Pela Observação 4.1, temos

$$|\overline{OP_1}| = \frac{\rho^2}{|\overline{OP}|} > \frac{\rho^2}{\rho} = \rho \Rightarrow |\overline{OP_1}| > \rho,$$

o que nos mostra que P_1 é um ponto situado na região externa à circunferência C . Analogamente, se T é um ponto situado na região externa à C , então

$$|\overline{OT}| > \rho.$$

Seja T_1 a imagem de T pela inversão em C . De acordo com a Observação 4.1, temos

$$|\overline{OT_1}| = \frac{\rho^2}{|\overline{OT}|} < \frac{\rho^2}{\rho} = \rho \Rightarrow |\overline{OT_1}| < \rho,$$

o que mostra que T_1 é um ponto situado na região interna de C . ■

Observação 4.3. Pela Definição 4.1, o centro O da circunferência C não possui inverso geométrico em relação à C . Isso faz sentido se pensarmos em analogia com o inverso multiplicativo de um número real x , dado por $x^{-1} = \frac{1}{x}$, que está definido se, e somente se $x \neq 0$. No entanto, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, é possível estender a definição de inverso geométrico para o centro O de $C(O, \rho)$ como um ponto no infinito. Além disso, definindo o inverso geométrico desse ponto no infinito como o centro O da circunferência $C(O, \rho)$, é possível verificar que tal extensão da inversão geométrica consiste em uma correspondência biunívoca definida em todo o plano.

O próximo resultado estabelece a semelhança entre dois triângulos que possuem o centro O de C como vértice comum e demais vértices formados pelos inversos geométricos dos vértices do outro triângulo.

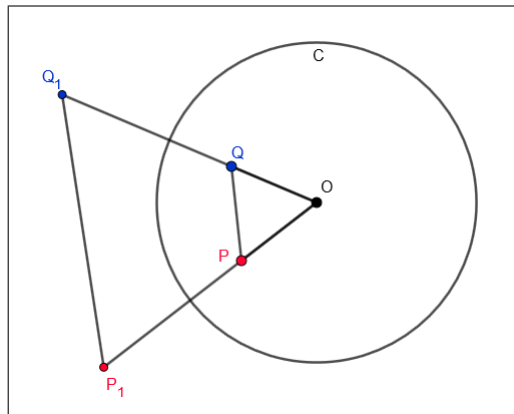
Proposição 4.3. *Considere a inversão geométrica em uma circunferência $C(O, \rho)$. Suponha que P, Q e O não sejam colineares e que os inversos de P e Q por C sejam P_1 e Q_1 , respectivamente. Então os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$ são semelhantes.*

Demonstração: Temos três possibilidades para as posições de P e Q , sendo elas: ambos interiores à C , ambos exteriores à C ou um interior à C e outro exterior. Sem perda de generalidade, vamos demonstrar apenas o primeiro caso, pois a demonstração dos outros dois é análoga.

Suponhamos que P e Q sejam pontos interiores à circunferência $C(O, \rho)$, diferentes de O , de modo que P, Q e O não sejam colineares. Como P_1 e Q_1 são os inversos geométricos de P e Q , respectivamente, o primeiro item da Definição 4.1 garante que P_1, Q_1 e O também não são colineares.

Com isso, é possível formar os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$, que podem ser vistos na Figura 28.

Figura 28 – Triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Como O é um vértice de ambos os triângulos, temos que $\widehat{POQ} = \widehat{P_1OQ_1}$.

Do segundo item da Definição 4.1, temos que

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = \rho^2 \quad \text{e} \quad |\overline{OQ}| \cdot |\overline{OQ_1}| = \rho^2.$$

Logo,

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = |\overline{OQ}| \cdot |\overline{OQ_1}|.$$

Dessa igualdade, obtemos

$$\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OQ}|} = \frac{|\overline{OQ_1}|}{|\overline{OP_1}|},$$

da qual concluímos, aplicando o Teorema 3.5, que os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$ são semelhantes.

■

O próximo resultado indica que ao realizarmos a inversão geométrica do inverso geométrico de um ponto, retornamos ao ponto original.

Proposição 4.4. *A inversa de uma inversão geométrica é a própria inversão geométrica.*

Demonstração: Seja P um ponto interior à circunferência $C(O, \rho)$. Pela Proposição 4.2 temos que o inverso geométrico de P , denotado por P_1 , é um ponto exterior à C .

Da Definição 4.1, temos que P e P_1 são colineares e vale a relação

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = \rho^2.$$

Vamos, então, encontrar o inverso geométrico de P_1 . Sabemos que P_1 é um ponto exterior à C , então pela Proposição 4.2, temos que o inverso de P_1 , que nomearemos por P_2 , é um ponto interior à C .

Da Definição 4.1, temos que P_1 e P_2 são colineares e vale a relação

$$|\overline{OP_1}| \cdot |\overline{OP_2}| = \rho^2.$$

Disso temos que:

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = \rho^2 = |\overline{OP_1}| \cdot |\overline{OP_2}| \implies |\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}| = |\overline{OP_1}| \cdot |\overline{OP_2}|.$$

Como $|\overline{OP}|$, $|\overline{OP_1}|$ e $|\overline{OP_2}|$ são valores positivos e não nulos, dividindo ambos os lados da igualdade anterior por $|\overline{OP_1}|$, obtemos

$$\frac{|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP_1}|}{|\overline{OP_1}|} = \frac{|\overline{OP_1}| \cdot |\overline{OP_2}|}{|\overline{OP_1}|} \implies |\overline{OP}| = |\overline{OP_2}|.$$

Como os segmentos \overline{OP} e $\overline{OP_2}$ pertencem ao segmento $\overline{OP_1}$, segue que $P = P_2$.

Portanto, a inversa de uma inversão geométrica é a própria inversão geométrica.

■

O resultado da Proposição 4.4 pode ser visualizado dinamicamente no applet⁴, em que P_{11} é o inverso geométrico de um ponto P interior à circunferência e P_{12} é o inverso de

⁴ <<https://www.geogebra.org/m/w54avye5>>

P_{11} . De mesmo modo, observa-se que P_{21} é o inverso geométrico de um ponto P exterior à circunferência e P_{22} é o inverso de P_{21} . Ao mover o ponto P é possível verificar que sempre é válido que $P_{12} = P$, enquanto P for interior à C , e que $P_{22} = P$, enquanto P for exterior à C , ou seja, que o inverso geométrico do inverso geométrico de um ponto é o próprio ponto original.

Os próximos resultados permitirão identificar o efeito da inversão geométrica quando aplicada em pontos situados sobre retas ou outras circunferências. A imagem de tais curvas, pela inversão geométrica em C , dependerá da posição das retas ou outras circunferências em relação à circunferência C .

Proposição 4.5. *Considere a circunferência $C(O, \rho)$. A imagem, pela inversão geométrica em C , de uma reta que não passa pelo centro de C , é uma circunferência que passa pelo centro de C .*

Demonstração: Seja l uma reta que não passa pelo centro O da circunferência C de raio ρ . Como $O \notin l$, existe uma única reta k que é perpendicular a l e passa pelo ponto O . Suponha que P seja a interseção entre as retas l e k .

Para cada $Q \in l$, com $Q \neq P$, têm-se por construção, que P , Q e O não são colineares. Logo, tomando P_1 e Q_1 como os inversos geométricos de P e Q , respectivamente, pela Proposição 4.3 temos que os triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$ são semelhantes.

Como $\triangle OPQ$ é retângulo em P (pela perpendicularidade de l e k) e a semelhança dos triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$ garante que

$$O\hat{P}Q \equiv O\hat{Q}_1P_1,$$

segue que $\triangle OP_1Q_1$ também é retângulo em Q_1 .

Além disso, a hipotenusa do triângulo retângulo $\triangle OP_1Q_1$ é $|\overline{OP_1}|$.

Com isso, considere a circunferência C_1 de raio $\rho_1 = \frac{|\overline{OP_1}|}{2}$ e com centro em $\frac{P_1 - O}{2}$ (ponto médio do segmento $\overline{OP_1}$). Pelo Teorema 3.10 sabemos que um triângulo é retângulo se, e somente se, pode ser inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é igual a medida de sua hipotenusa.

Como $\triangle OP_1Q_1$ é retângulo, com hipotenusa $|\overline{OP_1}| = 2 \cdot \rho_1$ igual ao diâmetro de C_1 , segue que o triângulo $\triangle OP_1Q_1$ está inscrito na circunferência C_1 e, portanto, $O \in C_1$ e $Q_1 \in C_1$.

Além disso, se $Q = P$, têm-se que $Q_1 = P_1 \in C_1$.

Portanto, para qualquer $Q \in l$ têm-se que

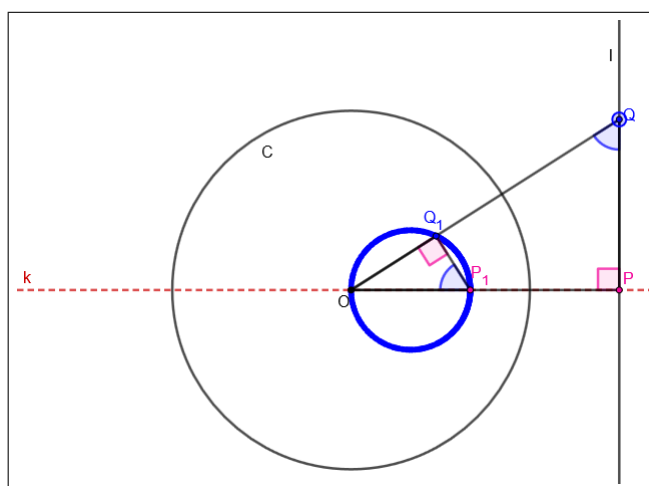
$$Q_1 \in C_1,$$

o que mostra que a imagem da reta l pela inversão geométrica em relação à circunferência $C(O, \rho)$ é a circunferência C_1 que passa pelo ponto O .



A Figura 29 mostra todos os elementos utilizados na demonstração da Proposição 4.5, com destaque para a circunferência C_1 , que provamos ser a inversão geométrica da reta l , em relação à C .

Figura 29 – Inversão de uma reta em uma circunferência



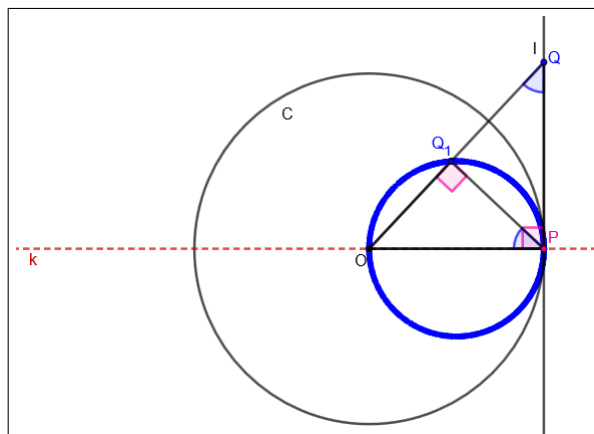
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Observação 4.4. Destacamos que a demonstração da Proposição 4.5 não depende do fato da reta l interceptar ou não a circunferência $C(O, \rho)$.

Ainda que na Figura 29 a reta l não intercepte a circunferência C , é possível mostrar que não há perda de generalidade ao considerar este fato. Para isso, vamos ilustrar mais duas possibilidades: quando l é tangente ou secante à C .

Na Figura 30, podemos visualizar que os argumentos utilizados na demonstração da Proposição 4.5 permanecem válidos quando a reta l tangencia a circunferência C em P . Nessa situação, nota-se que C_1 (a inversão da reta l) é tangente à C em P , pois pela Proposição 4.1, $P_1 = P$.

Figura 30 – Inversão de uma reta tangente em uma circunferência

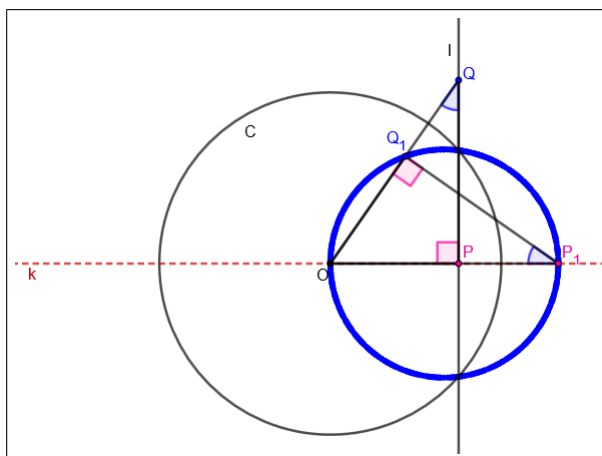


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Na Figura 31 podemos observar a situação em que a reta l é secante à circunferência $C(O, \rho)$, com $O \notin l$. Nota-se que, devido à Proposição 4.1, os pontos de interseção entre l e C também pertencem à C_1 (o inverso de l).

Além disso, percebe-se que em l há pontos interiores à C (como P) e pontos exteriores à C (como Q). Pela Proposição 4.2, os inversos desses pontos estão situados, respectivamente, no exterior (caso de P_1) e no interior (caso de Q_1) de C . Ainda assim, as propriedades dos triângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OP_1Q_1$ aplicadas na demonstração da Proposição 4.5 permanecem válidas no caso em que l é secante à C .

Figura 31 – Inversão de uma reta secante em uma circunferência



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Observação 4.5. Na Proposição 4.5 foi provado que a inversão por $C(O, \rho)$ de uma reta que não passa pelo ponto O de C , é uma circunferência C_1 que passa por O . Pela Proposição 4.4 temos que a inversa de uma inversão geométrica é a própria inversão geométrica. Portanto,

concluimos que a inversa da circunferência C_1 é a própria reta l , ou seja, a inversão de uma circunferência que passa pelo centro de $C(O, \rho)$ é uma reta que não passa por O .

O próximo resultado indica qual é a imagem, por uma inversão geométrica em $C(O, \rho)$, de uma reta que passa por O .

Proposição 4.6. *Considere a circunferência $C(O, \rho)$. A imagem, pela inversão geométrica em C , de uma reta que passa pelo centro de C , é a própria reta.*

Demonstração: Seja l uma reta qualquer que passa pelo centro da circunferência $C(O, \rho)$. Da Observação 4.3, temos que o inverso de $O \in l$ por C é um ponto no infinito. Ainda, precisamos determinar o inverso dos demais pontos de l . Sabemos que a reta l intercepta a circunferência C em dois pontos, denotados por E e F . A partir disso, definiremos duas semirretas com origem em O e com sentidos opostos, indicadas por \overrightarrow{OE} e \overrightarrow{OF} . Dessa forma,

$$l = \overrightarrow{OE} \cup \overrightarrow{OF}.$$

Para a semirreta \overrightarrow{OE} , a inversão dos pontos interiores a C são pontos exteriores à C que pertencem à própria semirreta, devido ao item 1 da Definição 4.1. Além disso, como $E \in C$, seu inverso é ele mesmo, pela Proposição 4.2. Ainda, a inversão dos pontos de \overrightarrow{OE} que são exteriores à C são pontos interiores à C , situados sobre \overrightarrow{OE} . Portanto, a inversão de \overrightarrow{OE} é a própria semirreta \overrightarrow{OE} .

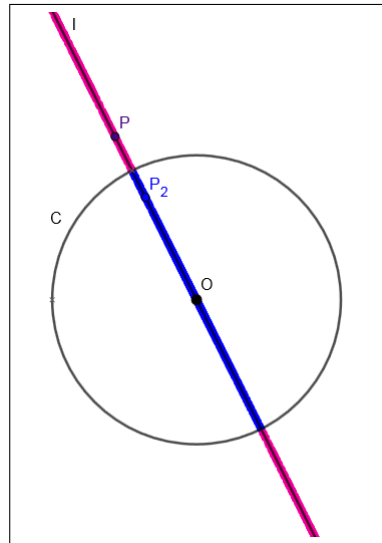
Para a semirreta \overrightarrow{OF} , o raciocínio é análogo. Portanto, como

$$l = \overrightarrow{OE} \cup \overrightarrow{OF},$$

a inversão geométrica de uma reta l que passa pelo centro de C é a própria reta l .

■

A Figura 32 exibe a imagem de uma reta l pela inversão geométrica em relação à uma circunferência C .

Figura 32 – Inversão de uma reta l , com $O \in l$ 

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O próximo resultado estabelece a imagem, pela inversão geométrica, de uma circunferência que não passa pelo centro de $C(O, \rho)$.

Proposição 4.7. *Considere uma circunferência $C(O, \rho)$. A imagem, pela inversão geométrica em C , de uma circunferência que não passa por O , é uma circunferência que também não passa por O .*

Demonstração: Seja $C_1(O_1, \rho_1)$ uma circunferência que não passa pelo centro da circunferência C . Suponhamos, sem perda de generalidade, que C_1 é interior a $C(O, \rho)$. Assim os pontos de C_1 são todos interiores à C , pela Definição 3.8.

Considere a semirreta $\overrightarrow{OO_1}$, que passa por O e contém um diâmetro de C_1 . Sejam A e B os pontos de interseção entre C_1 e $\overrightarrow{OO_1}$, disso tem-se que o diâmetro de C_1 mede $|\overline{AB}|$.

Considere P um ponto qualquer pertencente a C_1 , com $P \neq A$ e $P \neq B$. Logo P não é colinear com O e A , nem com O e B .

Como C_1 é interior a C , os inversos geométricos de A , B e P serão pontos exteriores à C , denotados por A_1 , B_1 e P_1 , respectivamente. Precisamos, então, mostrar que esses pontos pertencem à uma outra circunferência que também não passa pelo ponto O .

Da Proposição 4.3, temos as semelhanças de triângulos

$$\triangle OAP \sim \triangle OA_1P_1$$

e

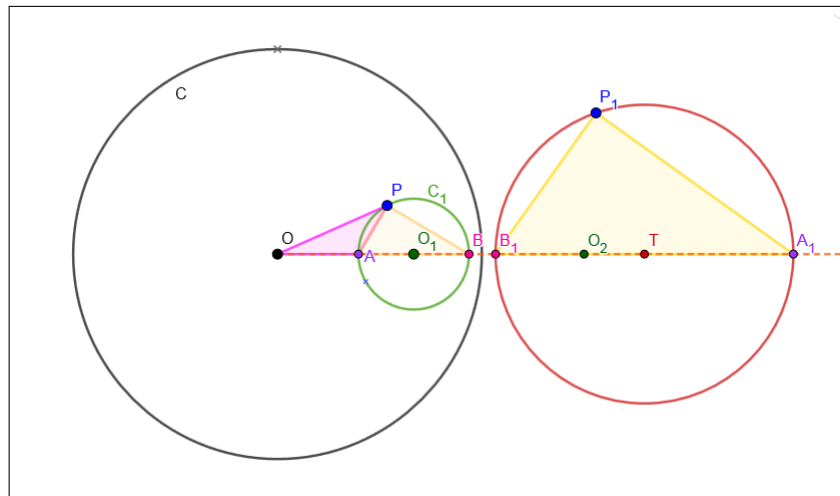
$$\triangle OPB \sim \triangle OP_1B_1.$$

A partir das semelhanças, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} O\hat{A}_1P_1 &\equiv O\hat{P}A, & O\hat{P}_1A_1 &\equiv O\hat{A}P, \\ O\hat{B}_1P_1 &\equiv O\hat{P}B, & O\hat{P}_1B_1 &\equiv O\hat{B}P. \end{aligned}$$

Sejam $\triangle APB$ e $\triangle A_1P_1B_1$ os triângulos formados pelos pontos de C_1 e seus inversos geométricos em relação à C , respectivamente, conforme exibido na Figura 33.

Figura 33 – Triângulos $\triangle APB$ e $\triangle A_1P_1B_1$



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Temos que o ângulo $O\hat{A}P$ é externo ao $\triangle APB$. Disso temos que

$$O\hat{A}P + B\hat{A}P = 180^\circ \implies O\hat{P}_1A_1 + B\hat{A}P = 180^\circ \implies B\hat{A}P = 180^\circ - O\hat{P}_1A_1.$$

Como o $\triangle APB$ está inscrito na circunferência C_1 e $|\overline{AB}|$ é um diâmetro de C_1 , então pelo Corolário 3.1, o triângulo é retângulo em P , isto é, $A\hat{P}B = 90^\circ$.

Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então, com relação ao $\triangle APB$, temos

$$A\hat{P}B + P\hat{B}A + B\hat{A}P = 180^\circ \implies P\hat{B}A + B\hat{A}P = 90^\circ,$$

mas $B\hat{A}P = 180^\circ - O\hat{P}_1A_1$, logo

$$P\hat{B}A + 180^\circ - O\hat{P}_1A_1 = 90^\circ \implies O\hat{P}_1A_1 = 90^\circ + P\hat{B}A.$$

Ainda, temos que $O\hat{P}_1A_1 = O\hat{P}_1B_1 + B_1\hat{P}_1A_1$, logo obtemos

$$O\hat{P}_1B_1 + B_1\hat{P}_1A_1 = 90^\circ + P\hat{B}A \implies O\hat{B}P + B_1\hat{P}_1A_1 = 90^\circ + P\hat{B}A.$$

Como, por construção, O , A e B são colineares, temos que $O\hat{B}P = P\hat{B}A$. Logo

$$P\hat{B}A + B_1\hat{P}_1A_1 = 90^\circ + P\hat{B}A \implies B_1\hat{P}_1A_1 = 90^\circ.$$

Deste modo, mostramos que o $\triangle A_1P_1B_1$ é retângulo em P_1 e sua hipotenusa é o segmento de reta $\overline{A_1B_1}$. Do Teorema 3.10, podemos afirmar que o $\triangle A_1P_1B_1$ está inscrito em uma circunferência C_2 , cujo diâmetro é $\overline{A_1B_1}$.

Por fim, temos que se $A, P, B \in C$, então $A_1, P_1, B_1 \in C_2$, e como P é um ponto arbitrário de C_1 , temos que C_2 é a inversa de C_1 pela inversão geométrica em C .

Além disso, como C_1 é interior à C , todos os pontos de C_2 são exteriores à C e, com isso, C_2 não passa pelo centro O de C .

■

Observação 4.6. Com *applet*⁵, é possível verificar que os pontos interiores à circunferência C_1 tem seu inverso dentro da inversão de C_1 , ou seja, interiores à C_2 .

⁵ <<https://www.geogebra.org/m/uufdvzrd>>

5 CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA A INVERSÃO GEOMÉTRICA

Neste capítulo, apresentaremos as construções que permitem obter a imagem de retas e circunferências por uma inversão geométrica em relação a uma circunferência C . Separaremos as construções em diferentes casos, de acordo com a posição relativa entre C e as curvas consideradas, e também conforme as curvas passem ou não pelo centro de C .

As construções serão efetuadas com o auxílio do GeoGebra e cada passo conterà a indicação de qual ferramenta do software deve ser utilizada. A Construção 1 e a Construção 2, juntamente com as Proposições 4.5, 4.6 e 4.7, fornecerão as bases para as construções que serão realizadas. Por isso, não serão incluídas as justificativas matemáticas para cada passo, uma vez que elas já foram inseridas, respectivamente, nas sessões 4.2 e 4.3.

Após cada construção, será fornecido o link para acesso a um *applet*, desenvolvido no GeoGebra, que permite variar os elementos utilizados na respectiva construção, de modo com que seja possível visualizar dinamicamente o resultado da inversão geométrica de retas e circunferências. A principal referência utilizada neste capítulo consiste em CMPU (2023).

5.1 CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA A INVERSÃO GEOMÉTRICA DE CIRCUNFERÊNCIAS

Considere uma circunferência C de centro O e raio ρ . Nesta seção, descreveremos as construções dinâmicas que fornecem as imagens, pela inversão geométrica em C , de outras circunferências, situadas no interior ou no exterior de C e que passam ou não por O . Cada construção dará origem a um *applet*, que permitirá visualizar dinamicamente os resultados obtidos com as proposições demonstradas na seção 4.3.

Iniciamos com a construção referente à inversão geométrica de uma circunferência situada no interior de C e que não passa por seu centro.

Construção 3: A circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio ρ_1 pertence ao interior da circunferência $C(O, \rho)$ e não passa por O .

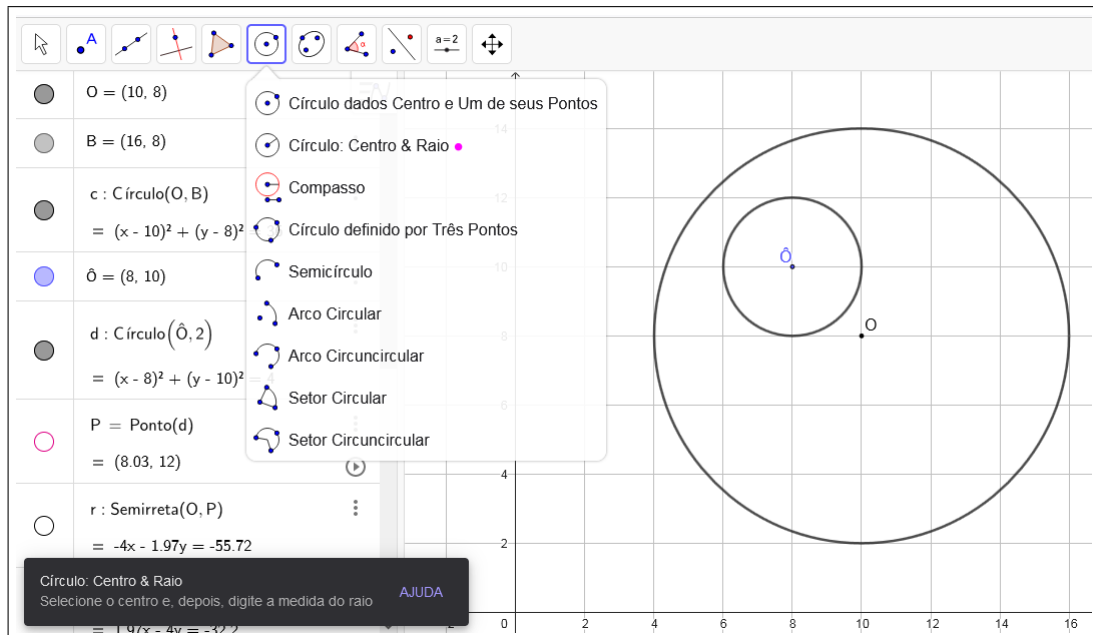
Justificativa:

Passo 1: utilizando a ferramenta do GeoGebra “círculo dados centro e um de seus pontos” construa uma circunferência C de centro O e raio ρ .

Essa construção consiste na primeira etapa das Construções 1 e 2, podendo ser visualizada na Figura 10.

Passo 2: utilizando a ferramenta “círculo: centro e raio” construa uma circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio fixo ρ_1 , de modo que C_1 fique completamente situada no interior de C , conforme exibido na Figura 34.

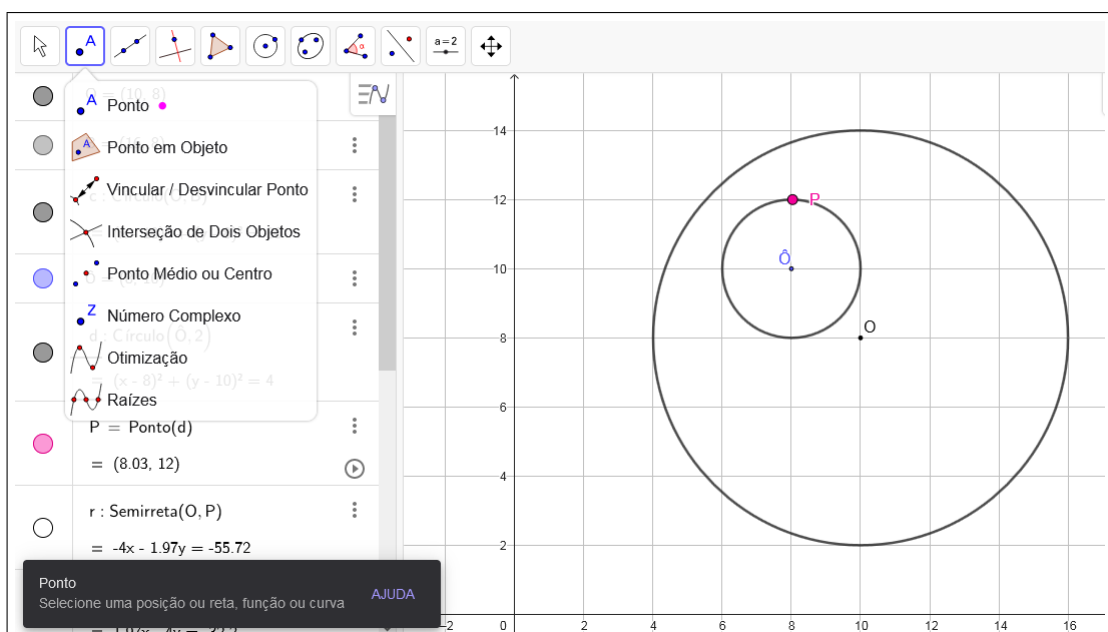
Figura 34 – Construção de uma circunferência C_1 de raio fixo e interior à C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “ponto” construa um ponto P pertencente à circunferência C_1 , conforme ilustrado na Figura 35.

Figura 35 – Construção de um ponto P pertencente à C_1

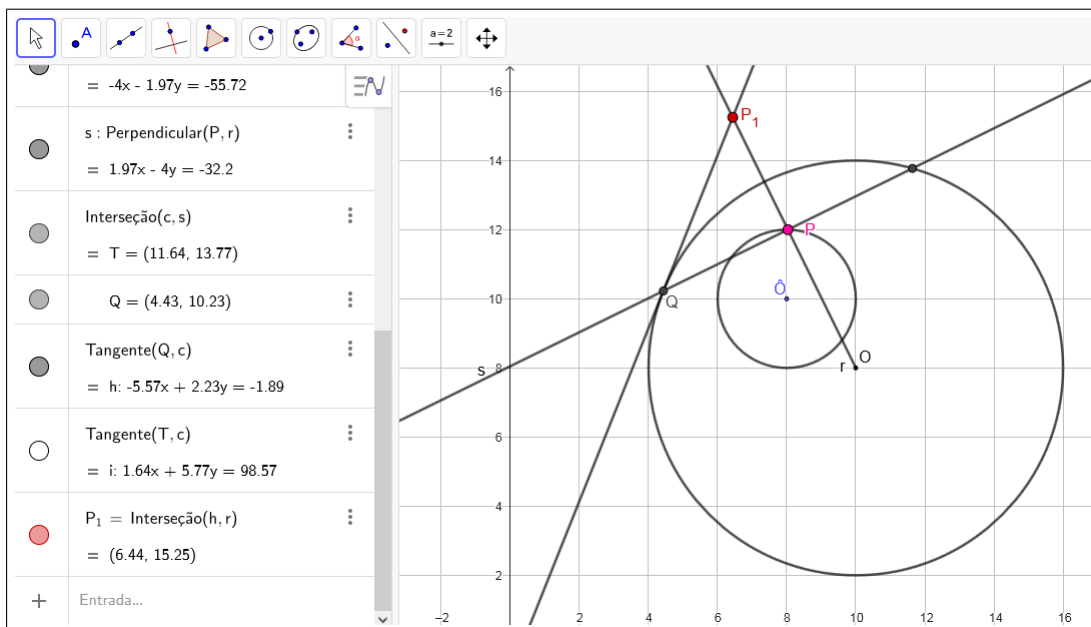


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 4: repita os passos de 3 a 7 realizados na Construção 1, para construir o inverso geométrico do ponto P , o qual denotamos por P_1 e que está situado no exterior de C .

Na Figura 36, podemos verificar o ponto P_1 construído no quarto passo.

Figura 36 – Inverso de um ponto pertencente à C_1 , interior à C

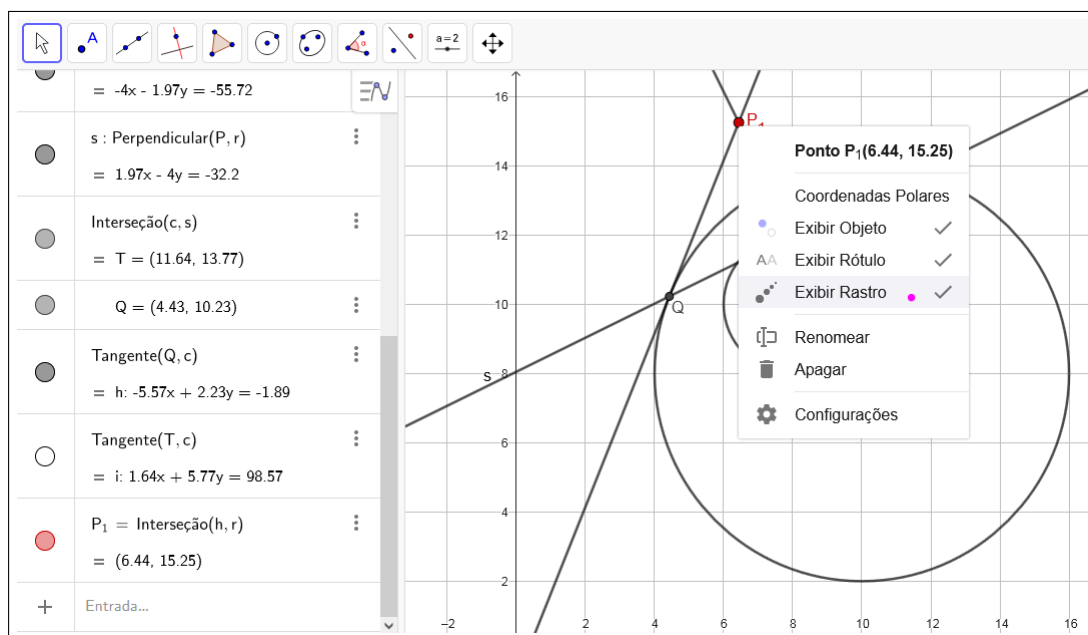


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Concluimos, pelo Teorema 4.1, que o ponto P_1 é o inverso geométrico de P , em relação à C . Para que seja possível visualizar a inversão geométrica de toda a circunferência C_1 são necessários mais dois passos.

Passo 5: com o botão direito do mouse, clique no ponto P_1 e ative o seu rastro, conforme indicado na Figura 37.

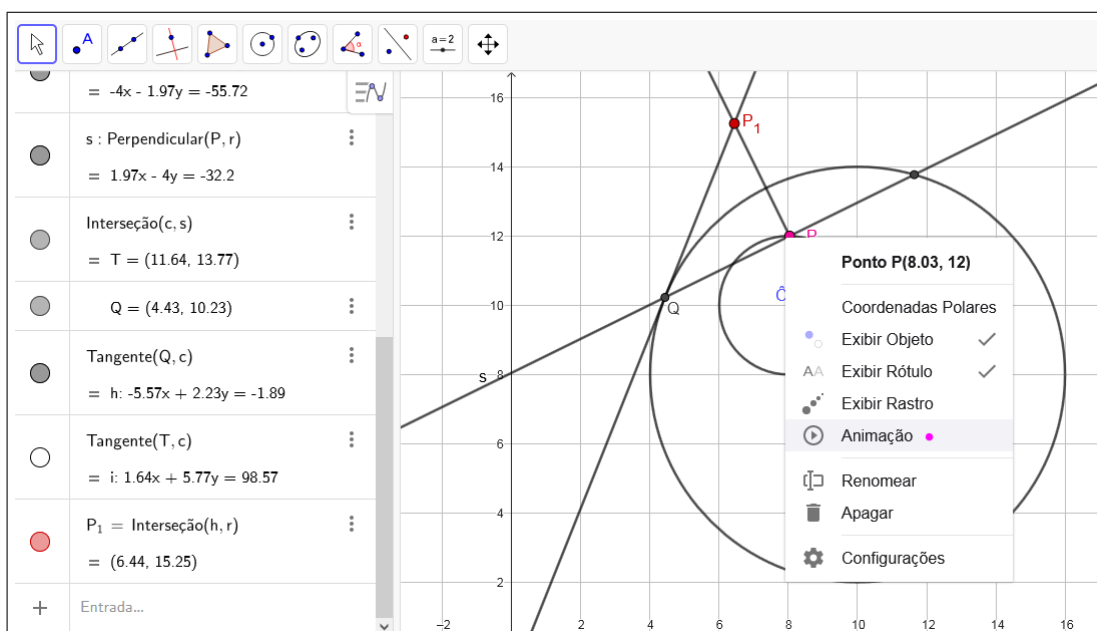
Figura 37 – Ativação do rastro de P_1



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 6: com o botão direito do mouse, clique no ponto P e ative a sua animação, conforme representado na Figura 38.

Figura 38 – Ativação da animação de P_1

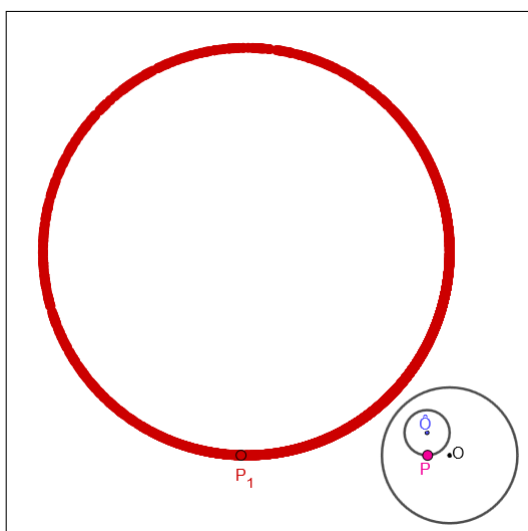


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Com isso, o ponto P irá se deslocar sobre a circunferência C_1 e, dinamicamente, o seu inverso geométrico P_1 irá gerar uma outra circunferência C_2 , que é a imagem de C_1 pela

inversão geométrica em C , como pode ser visto na Figura 39.

Figura 39 – Inversão geométrica da circunferência C_1 , interior à C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

■

Destaca-se que tanto C_1 quanto sua imagem C_2 não passam pelo centro O da circunferência C em relação à qual a inversão geométrica é efetuada, o que está em conformidade com a Proposição 4.5.

No *applet*¹ é possível acessar a construção dinâmica realizada no GeoGebra referente à inversão geométrica de uma circunferência situada no interior de $C(O, \rho)$ e que não passa pelo centro O . Ao acessar o *applet* e ativar a animação do ponto P é possível visualizar a circunferência descrita por P_1 .

A próxima construção refere-se à inversão geométrica de uma circunferência situada no interior de C e que passa por seu centro O .

Construção 4: A circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio ρ_1 pertence ao interior da circunferência $C(O, \rho)$ e passa pelo ponto O .

Justificativa:

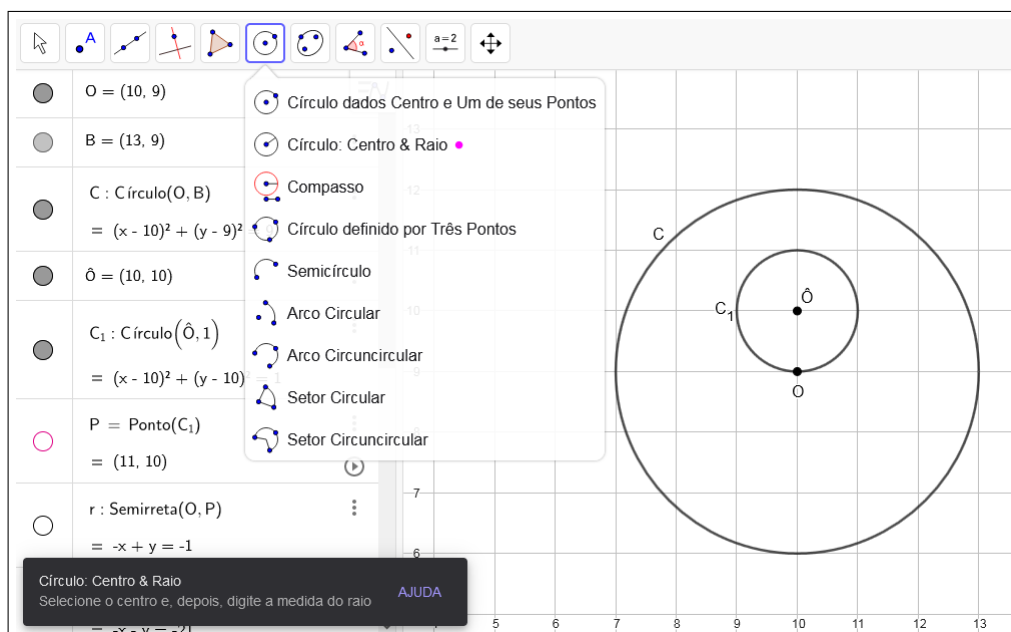
Passo 1: consiste em construir uma circunferência C de centro O e raio ρ , utilizando a ferramenta de construção “círculo dados centro e um de seus pontos” de forma análoga ao primeiro passo da Construção 1.

Passo 2: utilizando a ferramenta “círculo: centro e raio” construa uma circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio fixo ρ_1 , de modo que C_1 fique completamente situada no interior de C e

¹ <<https://www.geogebra.org/m/aqncr8uy>>

tenha como um de seus pontos o centro de C (ponto O), conforme ilustrado na Figura 40.

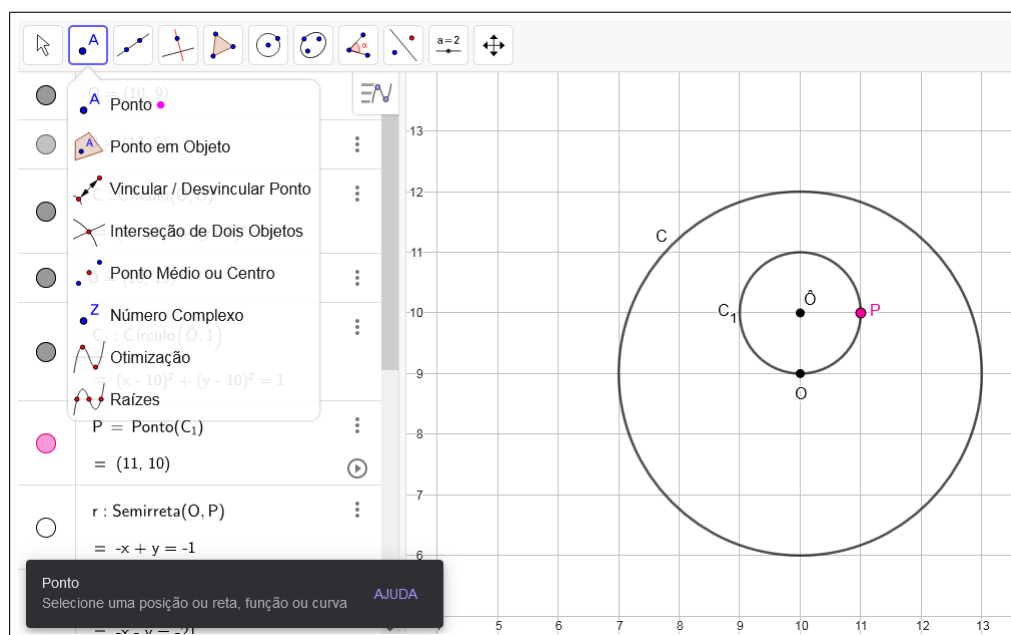
Figura 40 – Circunferência que passa pelo centro O de C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “ponto”, construa um ponto P pertencente à circunferência C_1 , conforme exibido na Figura 41.

Figura 41 – Ponto P pertencente à circunferência C_1

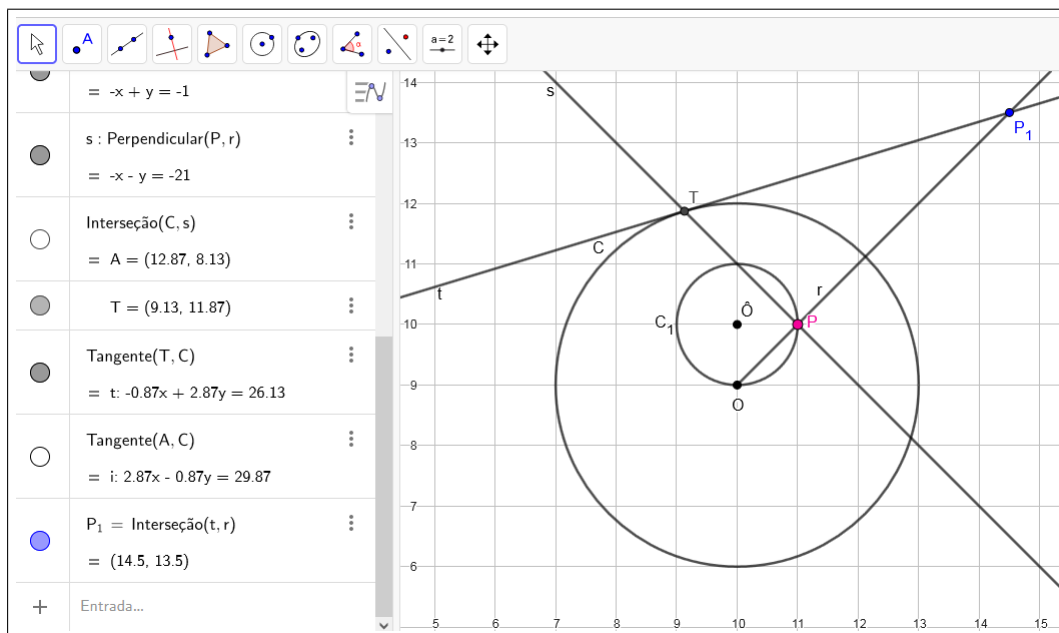


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 4: repita os passos de 3 a 7 realizados na Construção 1, para construir o inverso geométrico do ponto P , o qual denotamos por P_1 e que está situado no exterior de C .

Na Figura 42 podemos verificar o ponto P_1 construído no quarto passo.

Figura 42 – Inverso de um ponto P pertencente à C_1

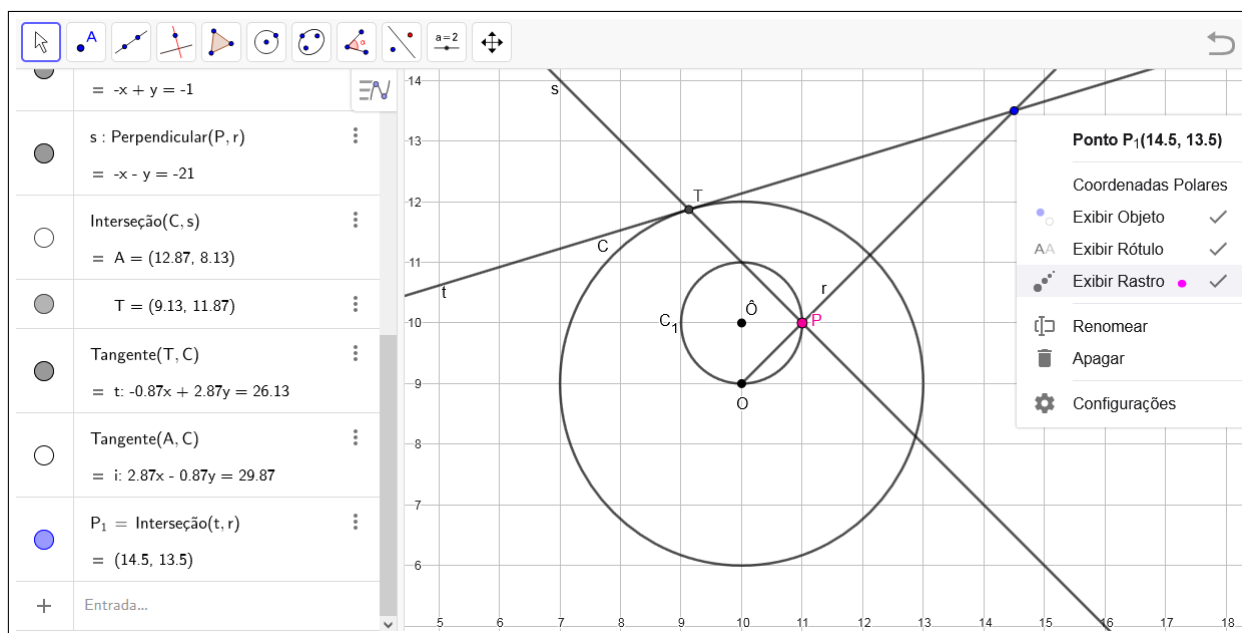


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Concluimos, pelo Teorema 4.1, que o ponto P_1 é o inverso geométrico de P , em relação à C . Para que seja possível visualizar a inversão geométrica de toda a circunferência C_1 são necessários mais dois passos.

Passo 5: com o botão direito do mouse, clique no ponto P_1 e ative o seu rastro, conforme indicado na Figura 43.

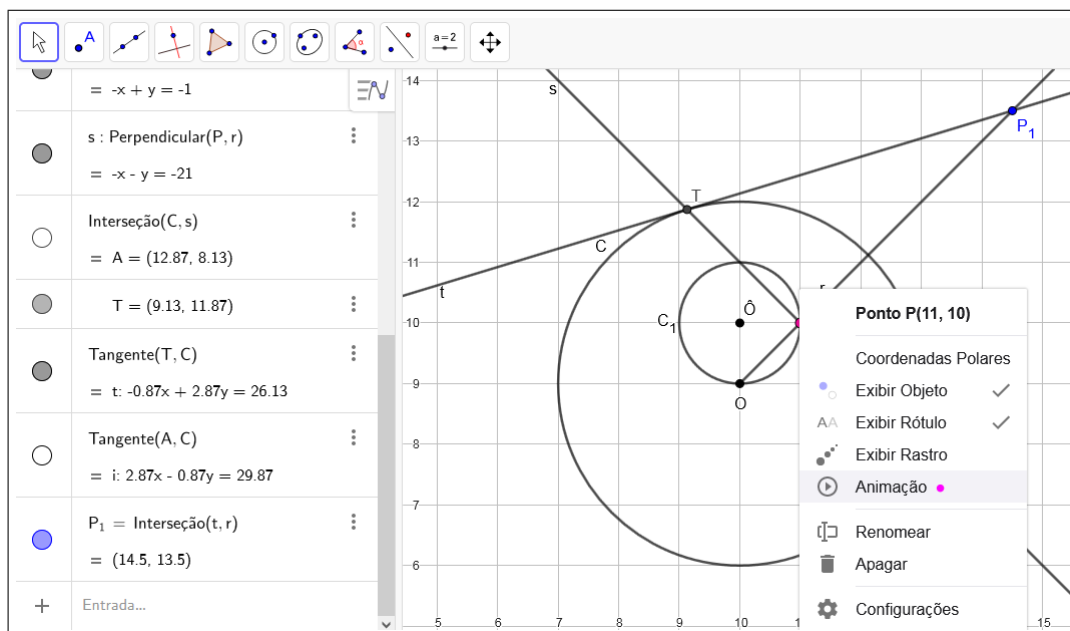
Figura 43 – Ativação do rastro de P_1



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 6: com o botão direito do mouse, clique no ponto P e ative a sua animação, conforme destacado na Figura 44.

Figura 44 – Ativação da animação de P

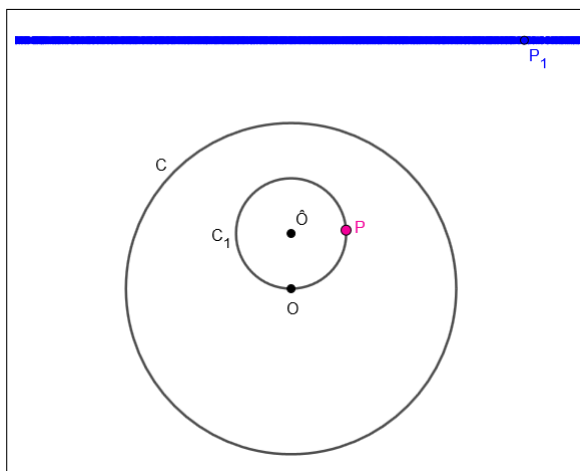


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Com isso, o ponto P irá se deslocar sobre a circunferência C_1 e, dinamicamente, o seu inverso geométrico P_1 irá gerar uma reta l , que é a imagem de C_1 pela inversão geométrica

em C , como pode ser visto na Figura 45.

Figura 45 – Inversão geométrica da circunferência C_1 , que passa por O



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

■

Percebe-se que a reta l , imagem da circunferência C_1 pela inversão geométrica em relação à $C(O, \rho)$, não passa pelo centro O de C , conforme obtido na Observação 4.5.

O *applet*² exibe a construção dinâmica, efetuada no GeoGebra, da inversão geométrica de uma circunferência que passa pelo centro O da circunferência $C(O, \rho)$ em relação à qual a inversão é efetuada. Ao acessar o *applet* e ativar a animação do ponto P é possível visualizar a reta l , descrita por P_1 .

A construção seguinte corresponde à inversão geométrica de uma circunferência situada completamente no exterior de $C(O, \rho)$ e que, conseqüentemente, não passa por O .

Construção 5: A circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio ρ_1 pertence ao exterior da circunferência $C(O, \rho)$.

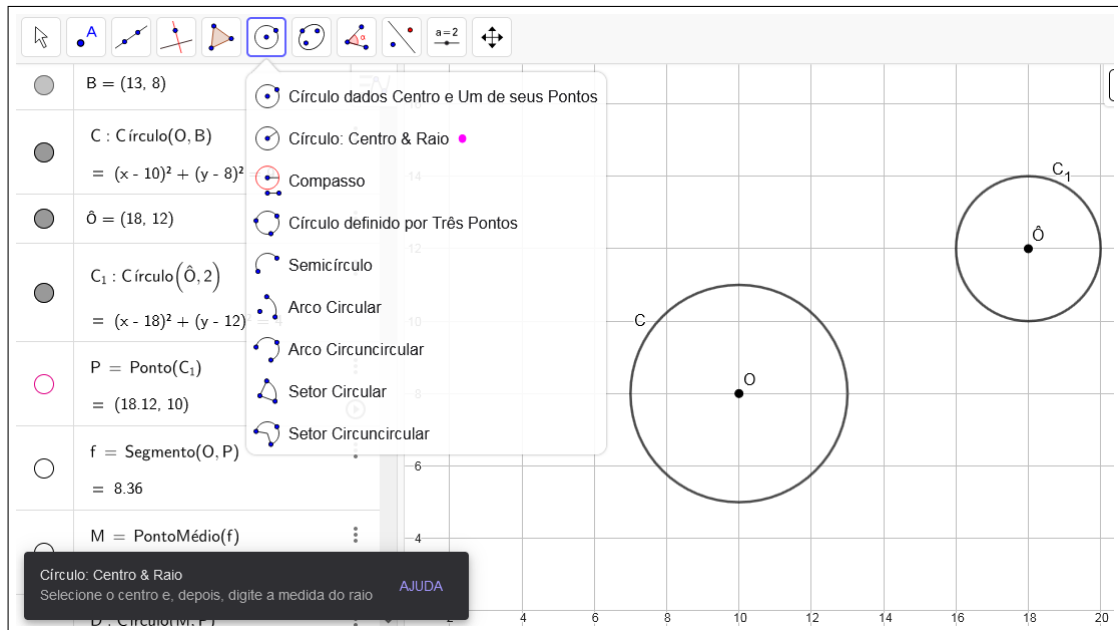
Justificativa:

Passo 1: esse passo consiste em construir uma circunferência C , de centro O e raio ρ , utilizando a ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos”, da mesma forma com que foi efetuado no primeiro passo da Construção 1.

Passo 2: utilizando a ferramenta “círculo: centro e raio”, construa uma circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio fixo ρ_1 , de modo com que C_1 fique completamente situada no exterior de C , conforme ilustrado na Figura 46.

² <<https://www.geogebra.org/m/zpjyuwye>>

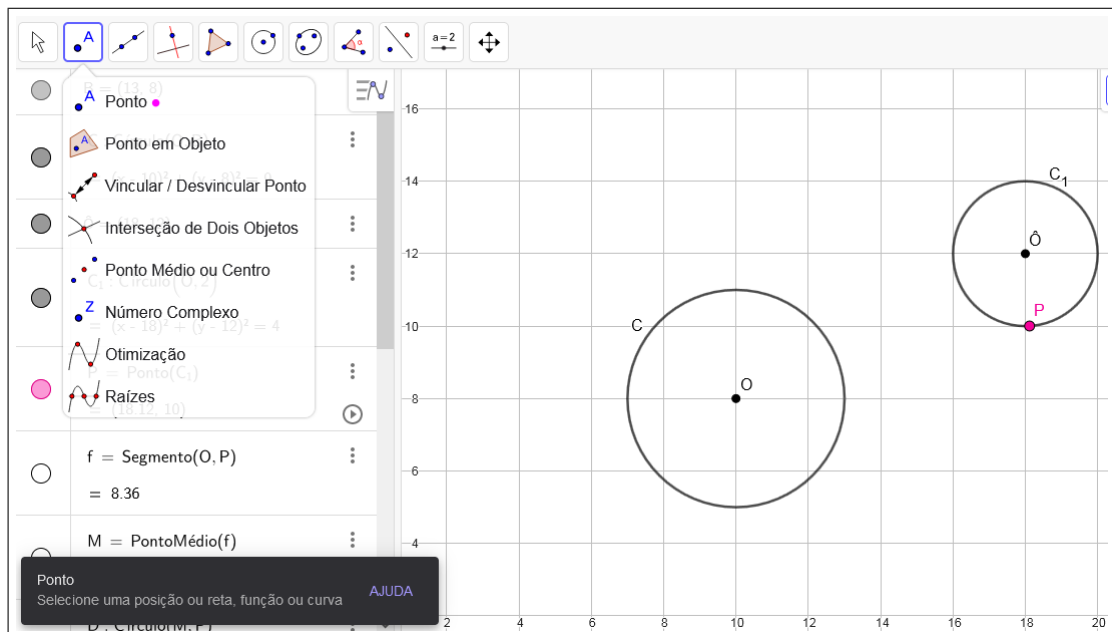
Figura 46 – Construção de uma circunferência exterior à C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “ponto” construa um ponto P pertencente à circunferência C_1 , conforme ilustrado na Figura 47.

Figura 47 – Ponto P sobre C_1 exterior à C

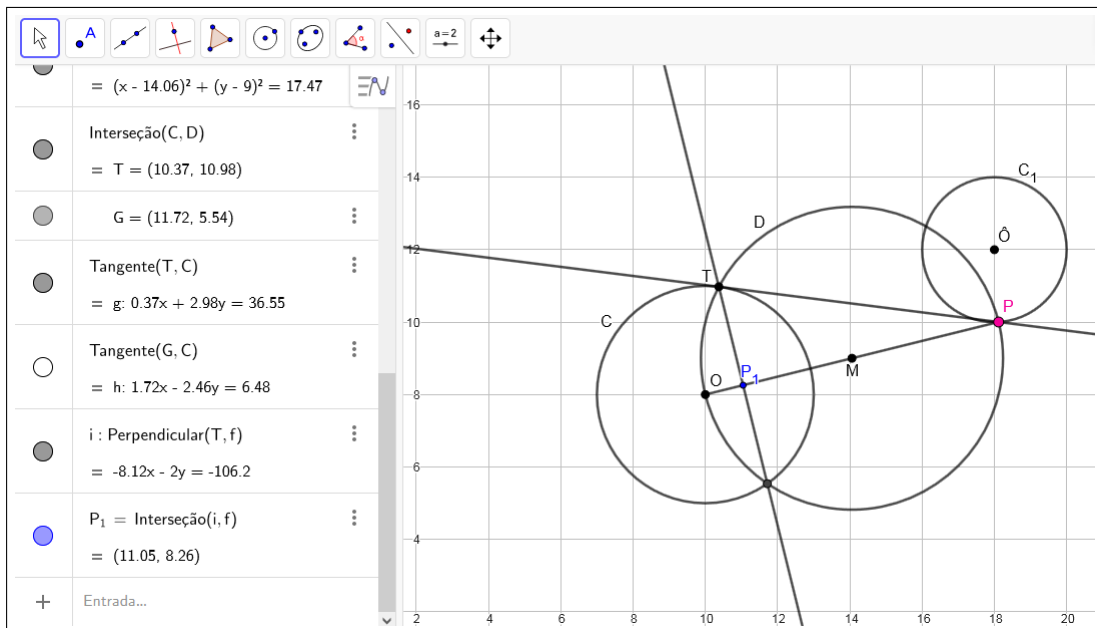


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 4: repita os passos de 3 a 9 realizados na Construção 2, construa o inverso geométrico do ponto P , o qual denotamos por P_1 e que está situado no interior de C .

Na Figura 48, podemos verificar o ponto P_1 construído no quarto passo.

Figura 48 – Ponto P_1 , inverso geométrico de P

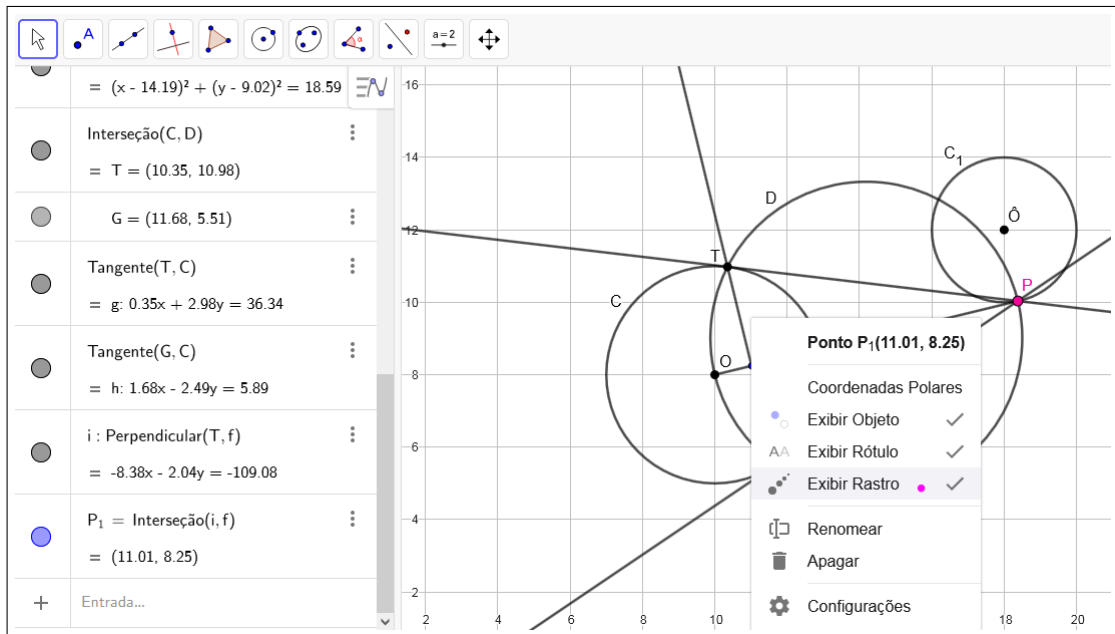


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Concluimos, pelo Teorema 4.2, que o ponto P_1 é o inverso geométrico de P , em relação à circunferência C . Para que seja possível visualizar a inversão geométrica de toda a circunferência C_1 são necessários mais dois passos.

Passo 5: com o botão direito do mouse, clique no ponto P_1 e ative o seu rastro, conforme indicado na Figura 49.

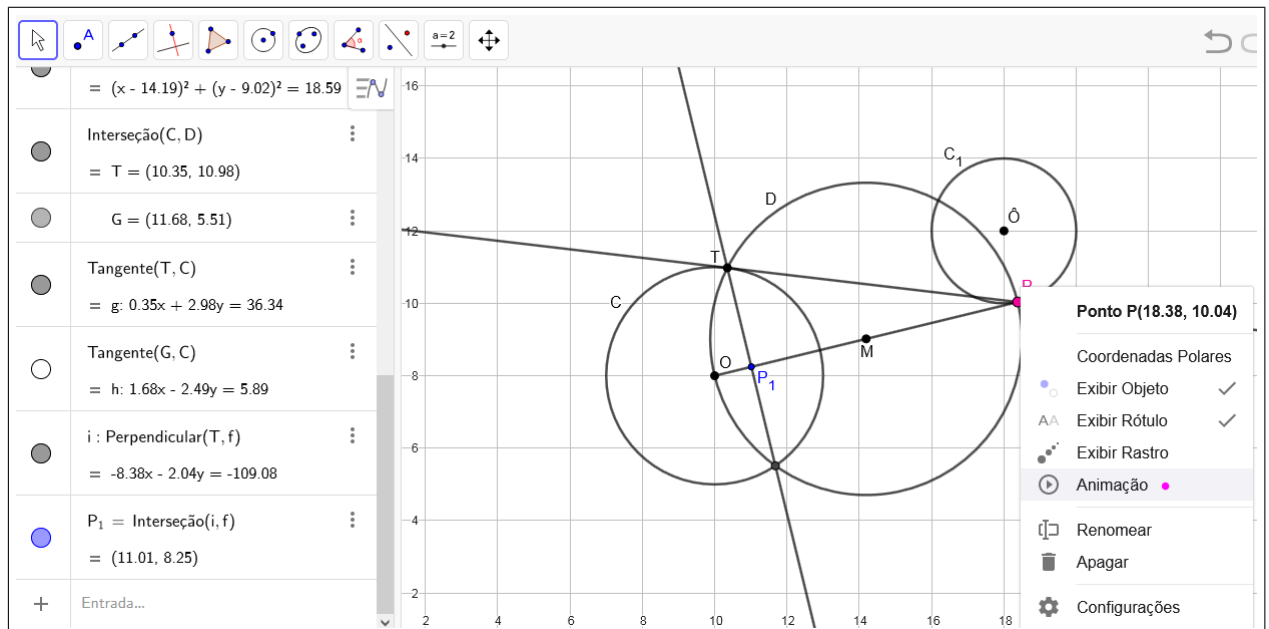
Figura 49 – Ativação do rastro de P_1



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 6: com o botão direito do mouse, clique no ponto P e ative a sua animação, conforme destacado na Figura 50.

Figura 50 – Ativação da animação

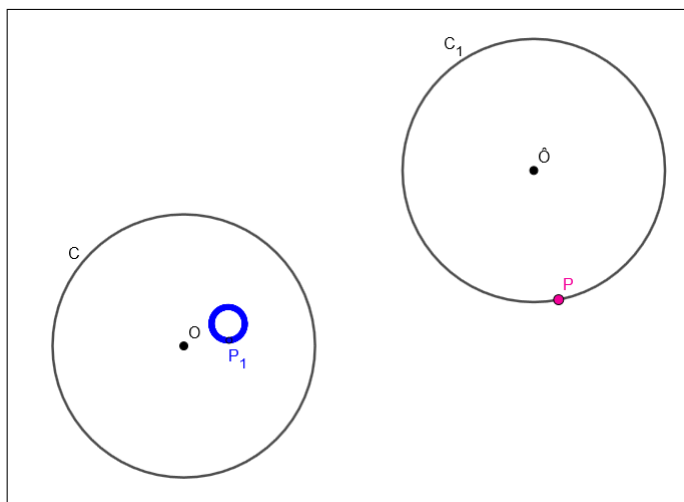


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Com isso, o ponto P irá se deslocar sobre a circunferência C_1 e, dinamicamente, o seu inverso geométrico P_1 irá gerar uma outra circunferência C_2 que é a imagem de C_1 pela

inversão geométrica em C , como pode ser visto na Figura 51.

Figura 51 – Inversão geométrica da circunferência C_1 , exterior à C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

■

Destaca-se, novamente, que a circunferência C_2 , imagem de C_1 pela inversão geométrica em C , não passa pelo centro O de C , o que está de acordo com a Proposição 4.7.

O *applet*³ contém a construção dinâmica, efetuada no GeoGebra, da inversão geométrica de uma circunferência situada no exterior de $C(O, \rho)$. Ao acessar o *applet* e ativar a animação do ponto P é possível visualizar a circunferência descrita por P_1 .

A construção seguinte corresponde à inversão geométrica de uma circunferência que intersecta a circunferência $C(O, \rho)$ e que não passa por O .

Construção 6: A circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio ρ intersecta a circunferência $C(O, \rho)$.

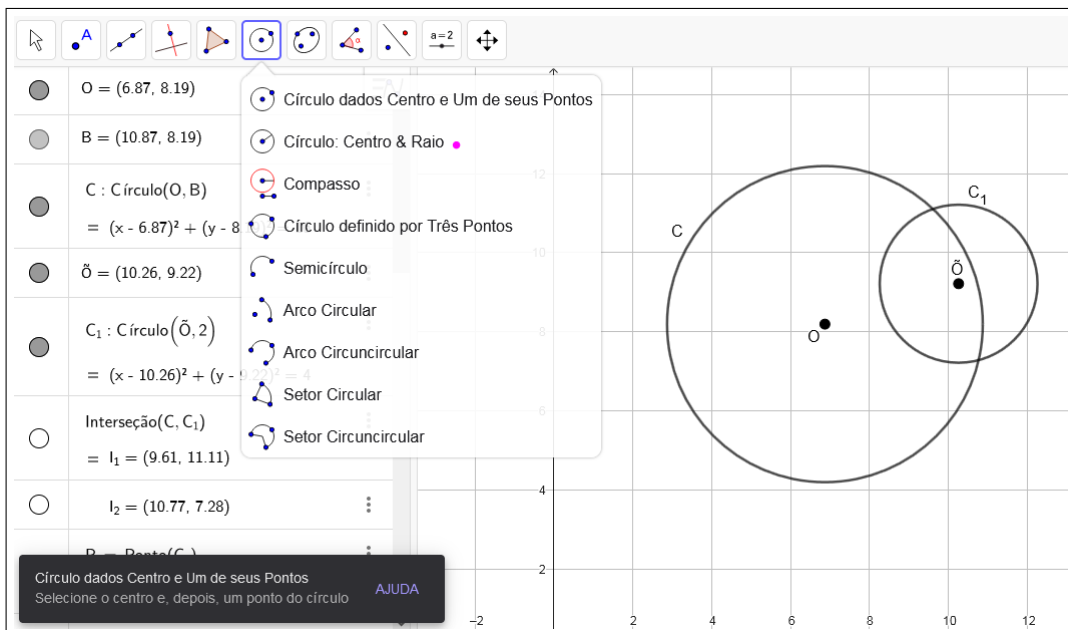
Justificativa:

Passo 1: utilizando a ferramenta do GeoGebra “círculo dados centro e um de seus pontos” construa uma circunferência C de centro O e raio ρ . Esse passo consiste na primeira etapa das construções anteriores e pode ser visualizado na Figura 10.

Passo 2: utilizando a ferramenta “círculo: centro e raio” construa uma circunferência C_1 de centro \tilde{O} e raio fixo ρ_1 , de modo que C_1 fique parcialmente interior e parcialmente no exterior de C . A circunferência construída pode ser vista na Figura 52.

³ <<https://www.geogebra.org/m/bd6f3pq2>>

Figura 52 – Circunferências que se intersectam

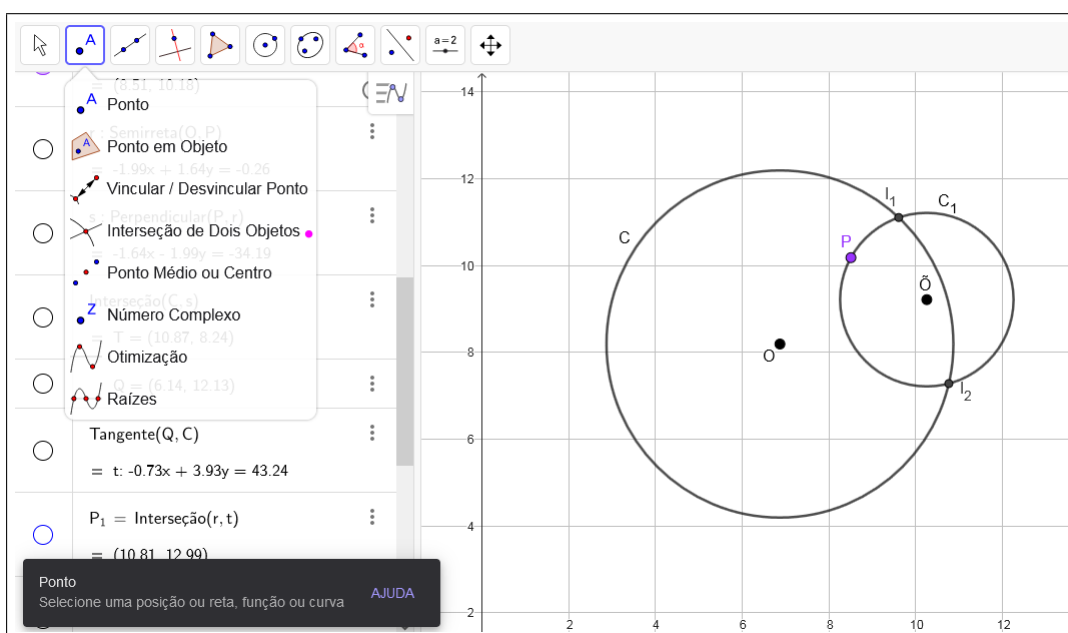


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “interseção de dois objetos” selecione C e C₁. Com isso surgirão dois pontos, que denotaremos I₁ e I₂.

A Figura 53 exhibe os pontos I₁ e I₂, obtidos no terceiro passo.

Figura 53 – Pontos de interseção entre C e C₁



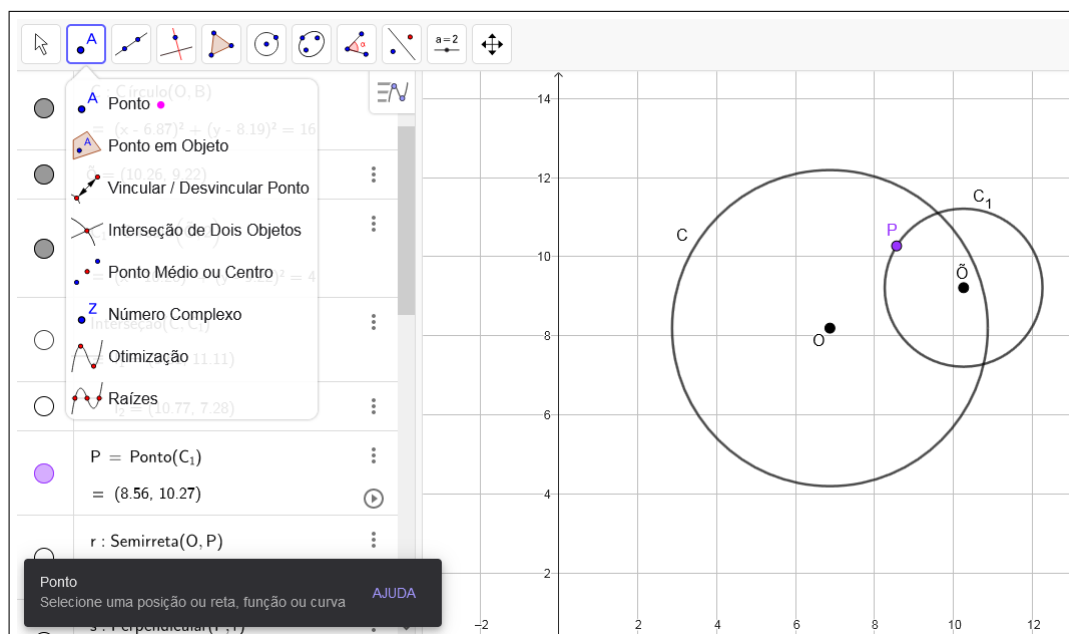
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 4: utilizando a ferramenta “ponto”, construa um ponto P sobre a circunferência C₁, de

modo com que P seja interior à C .

A Figura 54 exibe o ponto P construído no quarto passo.

Figura 54 – Ponto P pertencente à C_1 e interior à C

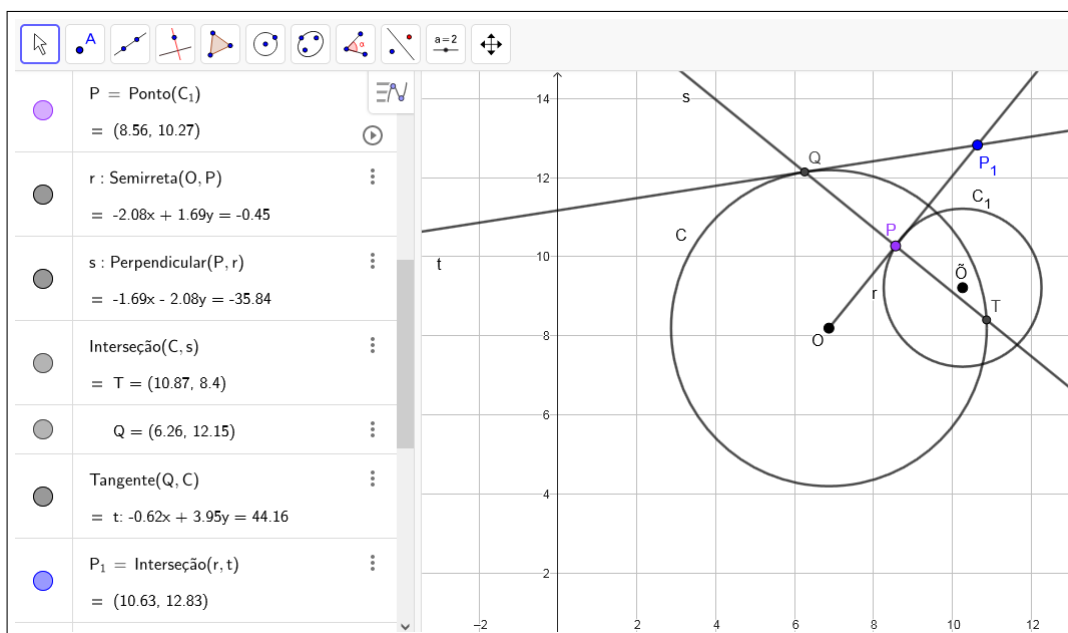


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 5: utilizando os passos de 3 a 7 vistos na Construção 3, construa o inverso geométrico do ponto P , o qual nomearemos P_1 e que está situado no exterior de C .

A Figura 55 ilustra a construção do ponto P_1 , efetuada no quinto passo.

Figura 55 – Inverso geométrico de P , exterior à C



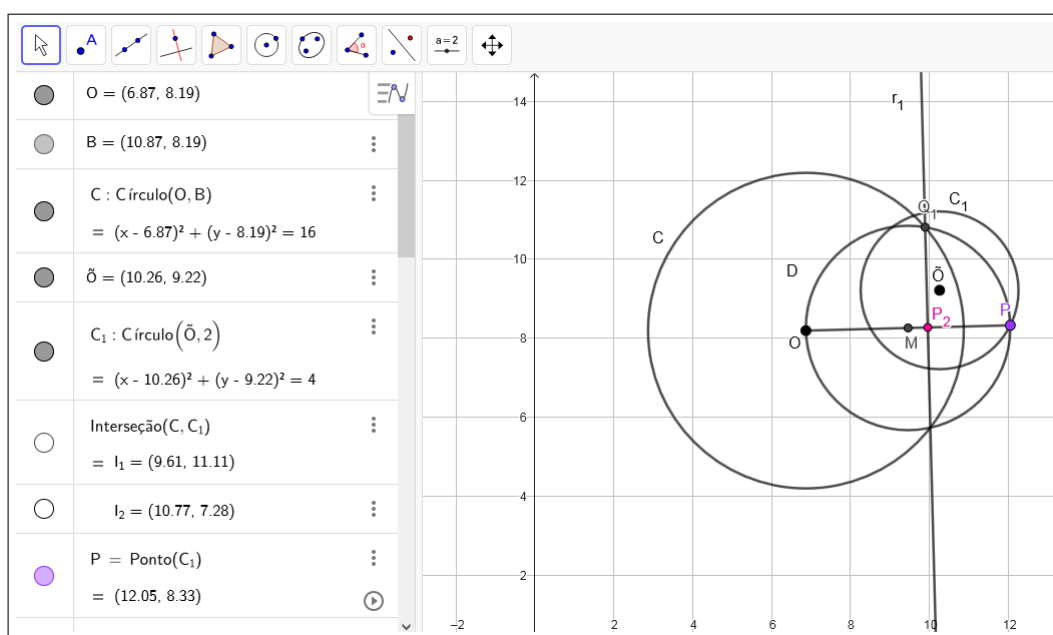
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 6: movimente P sobre C_1 até que ele se encontre no exterior de C .

Passo 7: repetindo os passos de 3 a 9 realizados na Construção 2, construa o inverso geométrico de ponto P , o qual nomearemos P_2 e que estará situado no interior de C .

A Figura 56 ilustra a construção de ponto P_2 efetuada no sétimo passo.

Figura 56 – Inverso geométrico de P , interior à C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Concluimos, pelos Teoremas 4.1 e 4.2, que os pontos P_1 e P_2 são os inversos geométricos de P , de acordo com a sua posição, em relação à circunferência C .

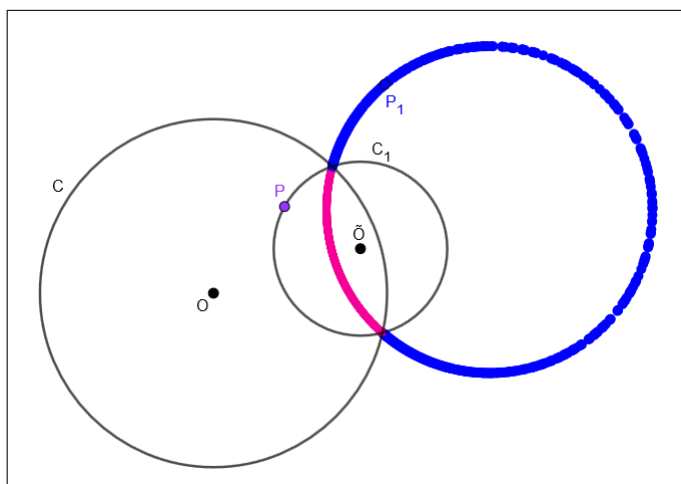
Para que seja possível visualizar a inversão geométrica de toda a circunferência C_1 são necessários mais dois passos.

Passo 8: com o botão direito do mouse, clique nos pontos P_1 e P_2 e ative os seus rastros.

Passo 9: com o botão direito do mouse, clique no ponto P e ative a sua animação.

Com isso o ponto P irá se deslocar sobre a circunferência C_1 e, dinamicamente, os inversos geométricos P_1 e P_2 , de acordo com a posição de P em relação à C , irão gerar uma outra circunferência, indicada por C_2 , que é a imagem de C_1 pela inversão geométrica em C , como pode ser visto na Figura 57.

Figura 57 – Inversão de uma circunferência C_1 que intersecta C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

■

Destaca-se, novamente, que a circunferência C_2 , imagem de C_1 pela inversão geométrica, não passa pelo centro O de C , o que está de acordo com a Proposição 4.7, pois C_1 não passa por O .

No *applet*⁴ é possível acessar a construção dinâmica realizada no GeoGebra referente à inversão geométrica de uma circunferência que intersecta $C(O, \rho)$ e que não passa pelo seu centro O .

⁴ <<https://www.geogebra.org/m/ppts4qv8>>

5.2 CONSTRUÇÕES DINÂMICAS PARA A INVERSÃO GEOMÉTRICA DE RETAS

Nesta seção, descreveremos as construções dinâmicas que fornecem a inversão geométrica de retas. Novamente, cada construção dará origem a um *applet*, que permitirá visualizar dinamicamente os resultados obtidos com as Proposições 4.5 e 4.6.

Iniciamos com a construção referente à inversão geométrica de uma reta situada completamente no exterior de $C(O, \rho)$ e que, conseqüentemente, não passa por O .

Construção 7: A reta l não intersecta a circunferência $C(O, \rho)$.

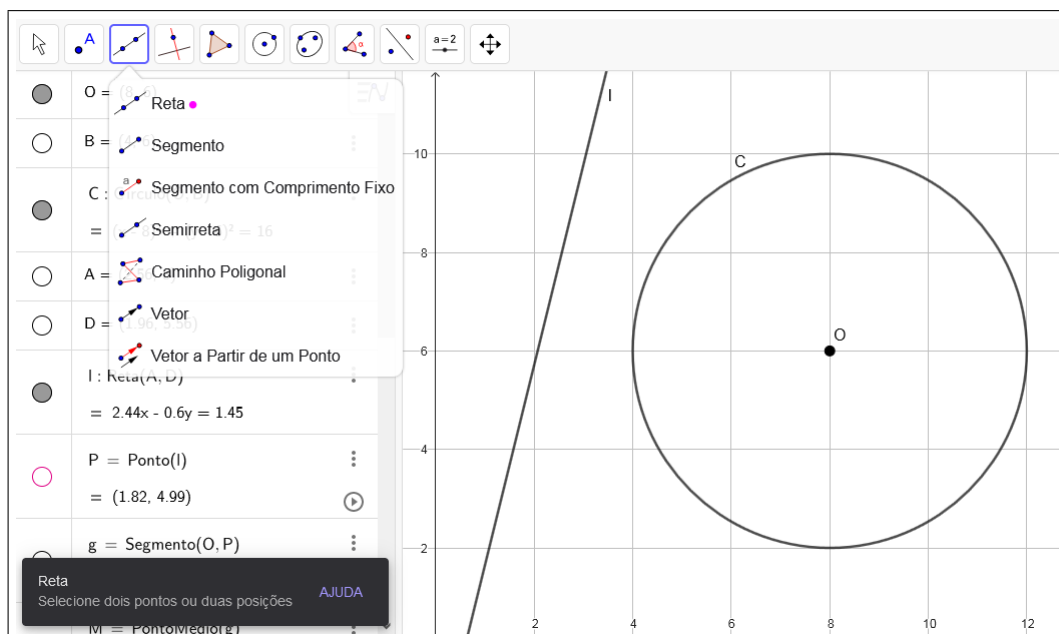
Justificativa:

Passo 1: utilizando a ferramenta do GeoGebra “círculo dados centro e um de seus pontos” construa uma circunferência C de centro O e raio ρ . Esse passo pode ser visualizado na Figura 10.

Passo 2: utilizando a ferramenta “reta”, marque dois pontos quaisquer, de modo que a reta criada não intersecte a circunferência C .

A Figura 58 exhibe a reta construída no segundo passo, bem como a ferramenta do GeoGebra utilizada.

Figura 58 – Reta que não intersecta C

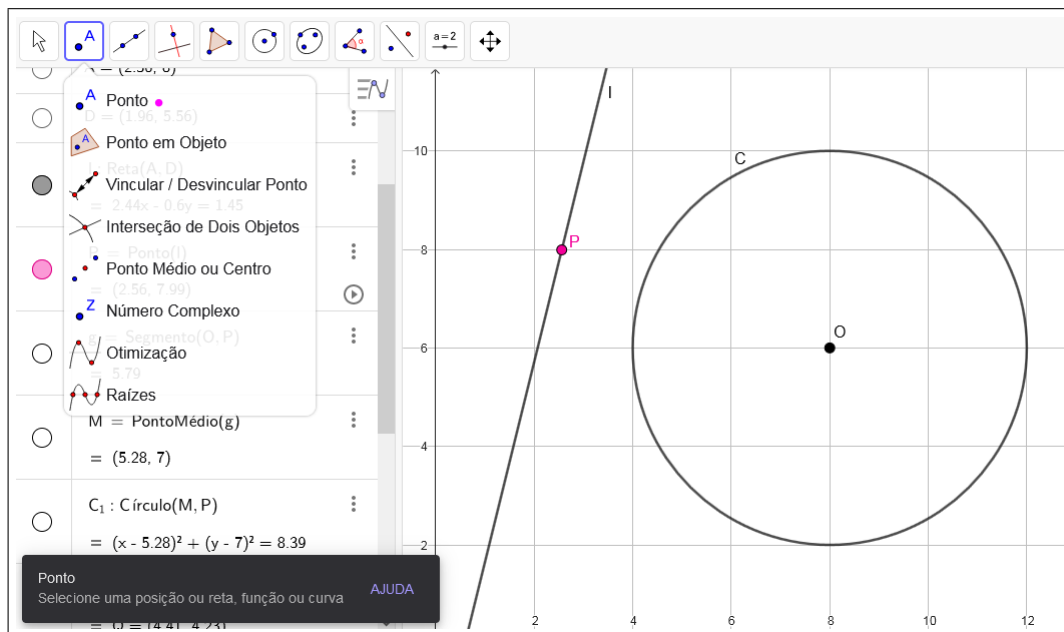


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “ponto”, marque um ponto P sobre a reta l .

A Figura 59 exibe o ponto $P \in l$, construído no terceiro passo, e a respectiva ferramenta do GeoGebra.

Figura 59 – Ponto P sobre l

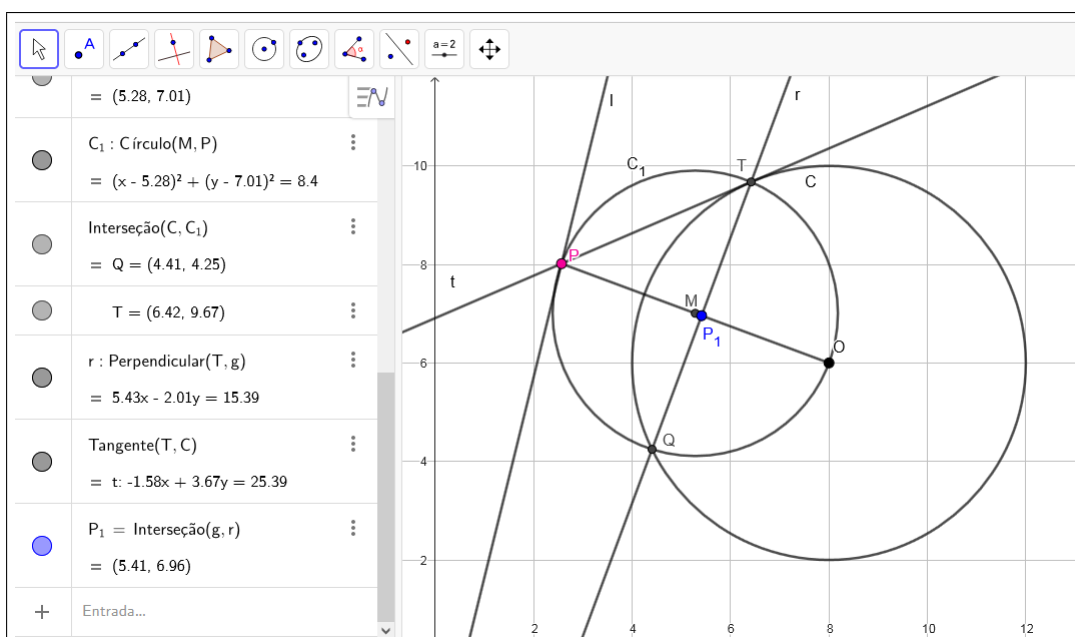


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 4: repetindo os passos de 3 a 9, realizados na Construção 2, construa o inverso geométrico do ponto P , o qual nomearemos por P_1 .

A Figura 60 exibe a construção do ponto P_1 , realizada no quarto passo.

Figura 60 – Inverso de P



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

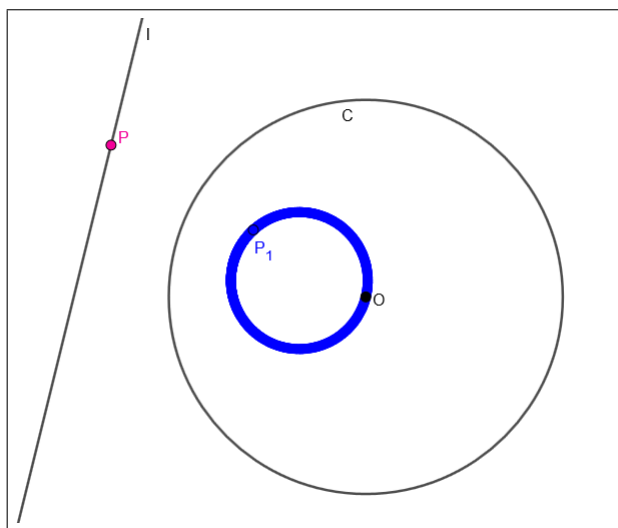
Para que seja possível visualizar o inverso de toda a reta l são necessários mais dois passos.

Passo 5: com o botão direito do mouse, clique no ponto P_1 e ative o rastro do mesmo.

Passo 6: com o botão direito do mouse, clique no ponto P e ative a sua animação.

Com isso, o ponto P irá se deslocar sobre a reta l e, dinamicamente, o seu inverso geométrico P_1 irá descrever uma circunferência C_1 , que é a imagem de l pela inversão geométrica em C , como pode ser visto na Figura 61.

Figura 61 – Inversão da reta l que não intersecta C



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

■

No *applet*⁵ é possível acessar a construção dinâmica realizada no GeoGebra referente à inversão geométrica de uma reta que não intersecta $C(O, \rho)$ e, conseqüentemente, não passa pelo centro O . Ao explorar o *applet* é possível movimentar toda a reta l e observar que, sempre que l não intersectar C , sua inversão geométrica será uma circunferência completamente situado no interior de C e que passe por seu centro O , conforme preconizado pela Proposição 4.5.

A construção seguinte corresponde à inversão geométrica de uma reta secante à circunferência $C(O, \rho)$ e que não passa por O .

Construção 8: A reta l é secante a circunferência $C(O, \rho)$.

Justificativa:

Passo 1: utilizando a ferramenta de construção “círculo dados centro e um de seus pontos” construa uma circunferência C de centro O e raio ρ . Esse passo pode ser visualizado na Fi-

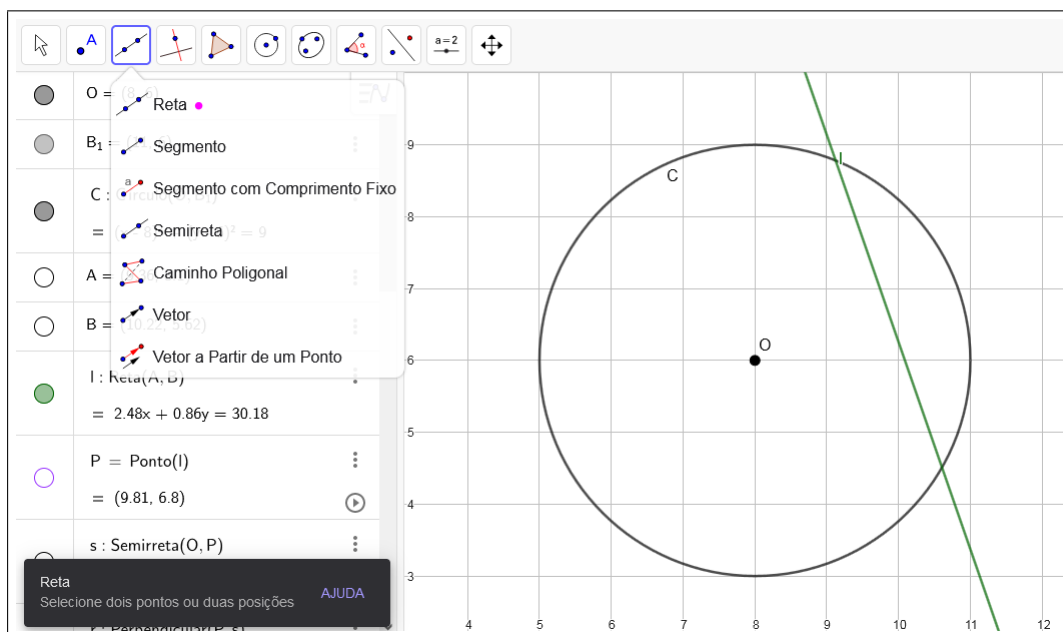
⁵ <<https://www.geogebra.org/m/ta8nwcnr>>

gura 10.

Passo 2: utilizando a ferramenta “reta”, marque dois pontos quaisquer, de modo que a reta criada seja secante a circunferência C .

A Figura 62 ilustra a construção de uma reta l , secante à C , conforme efetuado no segundo passo.

Figura 62 – Reta secante a C

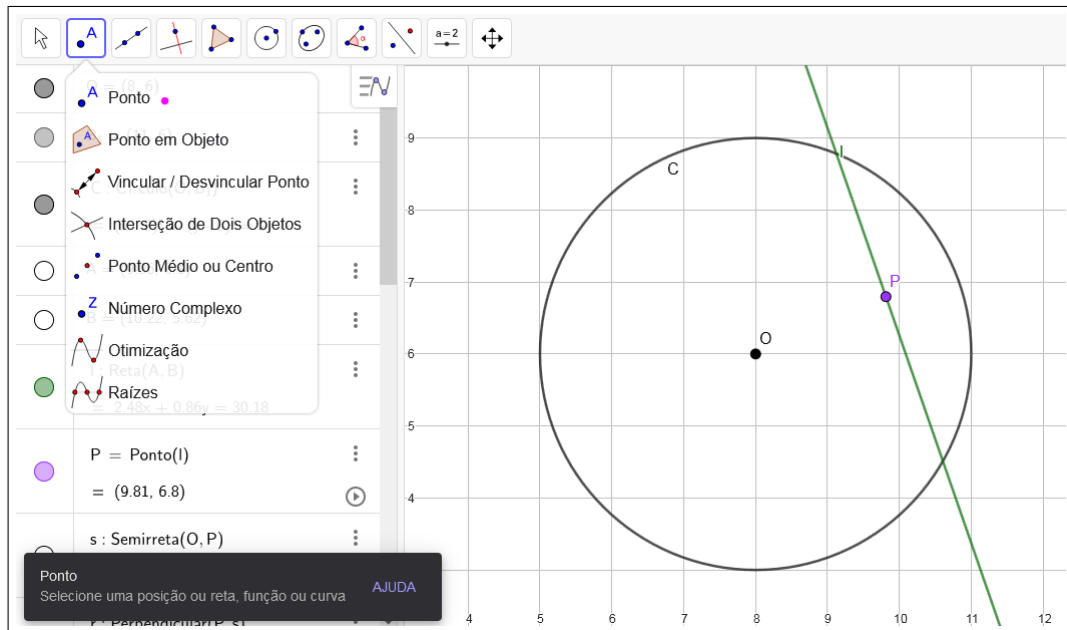


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “ponto”, marque um ponto P sobre a reta l , de modo que P esteja no interior de C .

A Figura 63 é mostrado um ponto P tomado sobre l e situado no interior de C .

Figura 63 – Ponto $P \in l$ no interior de C

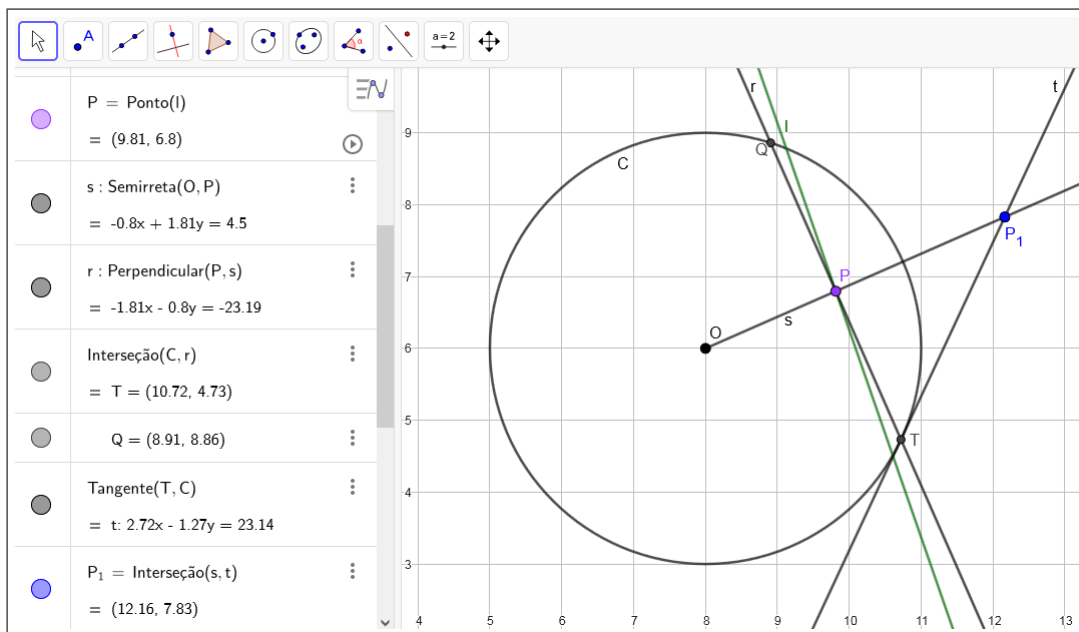


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 4: utilizando os passos de 3 a 7 realizados na Construção 1, construa o inverso geométrico do ponto P , o qual nomearemos P_1 e está situado no exterior de C .

A Figura 64 mostra a construção realizada no quarto passo, com destaque para P_1 , o inverso geométrico de P .

Figura 64 – Inverso de $P \in l$ interior à C



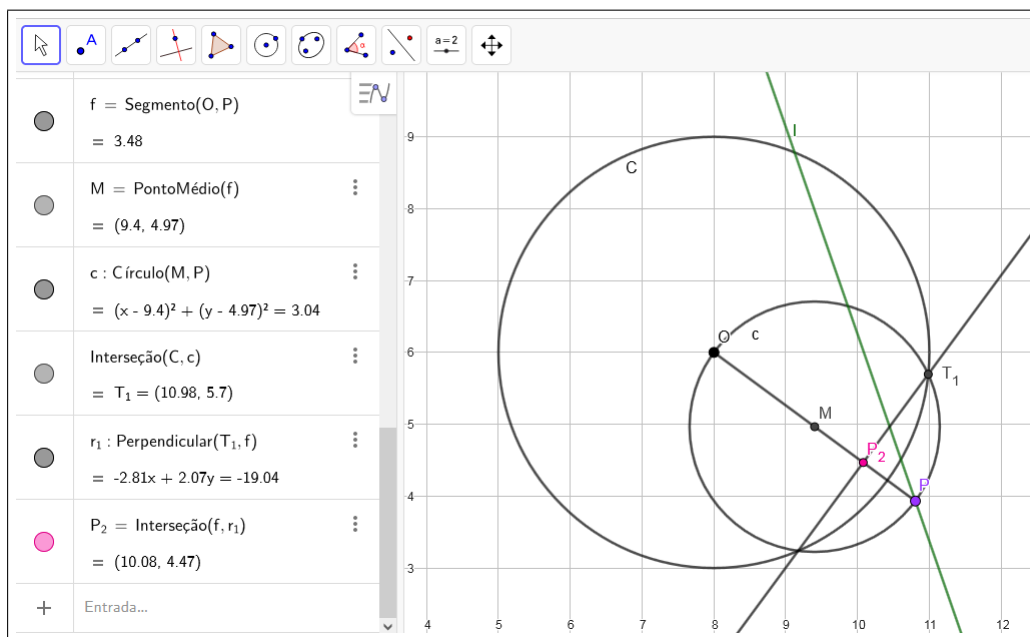
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 5: movimente o ponto P de maneira que ele fique situado no exterior de C .

Passo 6: utilizando os passos de 3 a 9 realizados na Construção 2, construa o inverso geométrico do ponto P , o qual nomearemos P_2 e que está situado no interior de C .

A Figura 65 mostra a construção realizada no sexto passo, com destaque para P_2 .

Figura 65 – Inverso de $P \in l$, exterior à C



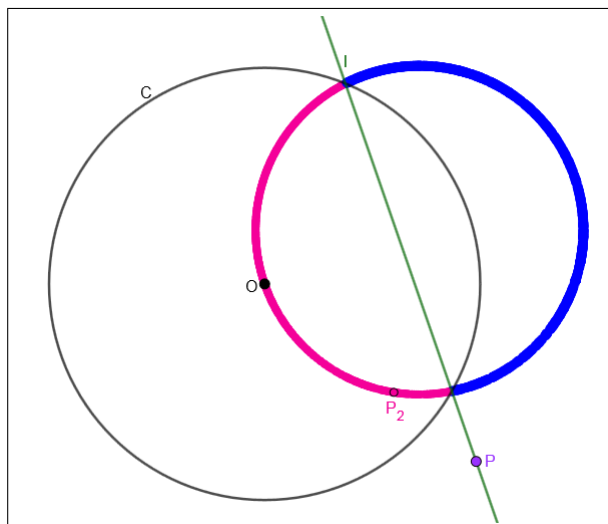
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Para que seja possível visualizar o inverso da reta l são necessários mais dois passos.

Passo 7: com o botão direito do mouse, clique nos pontos P_1 e P_2 e ative os seus rastros.

Passo 8: com o botão direito do mouse, clique no ponto P e ative sua animação.

Com isso, o ponto P irá se deslocar sobre a reta l e, dinamicamente, os pontos P_1 e P_2 irão descrever uma circunferência C_1 , que é a imagem de l pela inversão geométrica em C , como pode ser visto na Figura 66.

Figura 66 – Inverso da l secante a C 

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

■

No *applet*⁶ é possível acessar a construção dinâmica realizada no GeoGebra referente à inversão geométrica de uma reta secante à $C(O, \rho)$ e que não passa pelo centro O . Ao explorar esse *applet*, é possível movimentar a reta l e observar que:

- os pontos em que l intersecta C sempre pertencem à circunferência C_1 , o que ocorre devido à Proposição 4.1;
- sempre que a reta l intersecta C , sua inversão geométrica será formada por dois arcos, que em conjunto compõem a circunferência C_1 . O arco de C_1 que é externo a C é descrito pelo ponto P_1 e o arco de C_1 interno a C é descrito pelo ponto P_2 ;
- a circunferência C_1 sempre passa pelo centro O de C , conforme preconizado pela Proposição 4.5;
- conforme o ponto P tende ao infinito sobre a reta l , seu inverso geométrico fica cada vez mais próximo do centro O de C , o que está em conformidade com a Observação 4.3 e com a Proposição 4.4.

A construção seguinte corresponde à inversão geométrica de uma reta secante à circunferência $C(O, \rho)$ e que passa por O .

Construção 9: A reta l passa pelo centro da circunferência $C(O, \rho)$.

Justificativa:

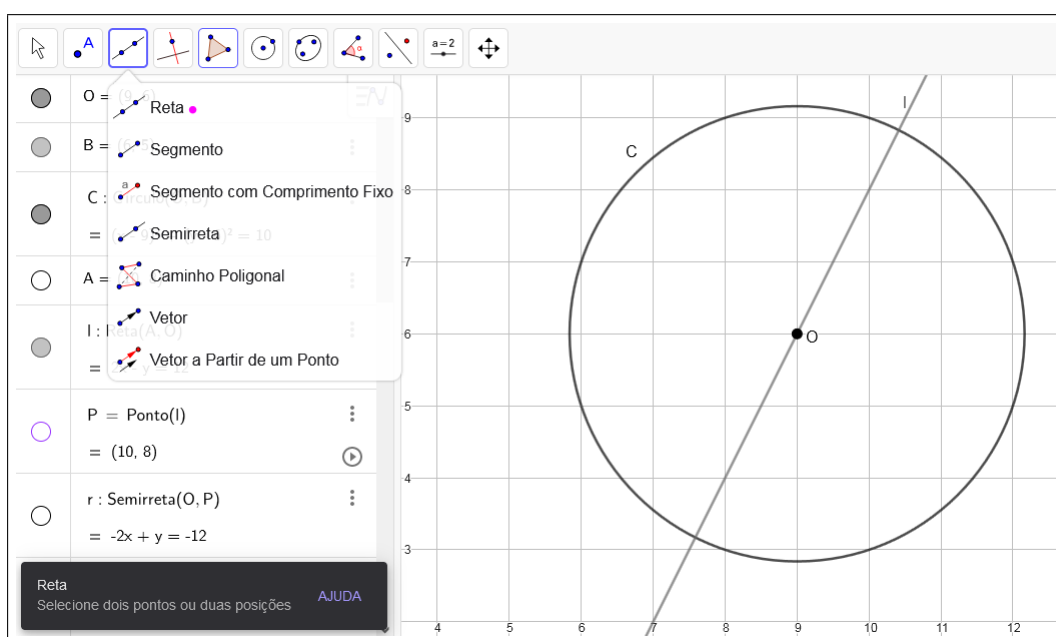
⁶ <<https://www.geogebra.org/m/csdeuah7>>

Passo 1: utilizando a ferramenta de construção “círculo dados centro e um de seus pontos” construa uma circunferência C de centro O e raio ρ . Esse passo pode ser visualizado na Figura 10.

Passo 2: utilizando a ferramenta “reta” construa uma reta que passa pelo centro O da circunferência C .

A Figura 67 exibe uma reta secante a C e que passa pelo seu centro, conforme construído no segundo passo.

Figura 67 – Reta que passa no centro de C

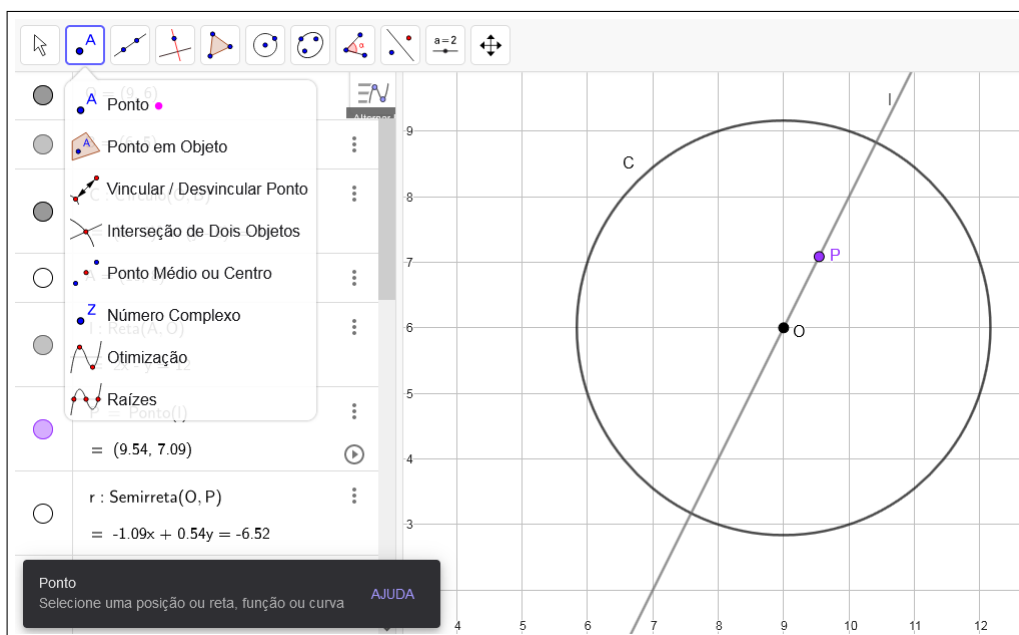


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 3: utilizando a ferramenta “ponto” construa um ponto P sobre a reta l , de maneira que P esteja no interior de C e seja distinto de O .

A Figura 68 exibe um ponto $P \in l$, com $P \neq O$, construído no terceiro passo.

Figura 68 – Ponto $P \in l$, interior a C

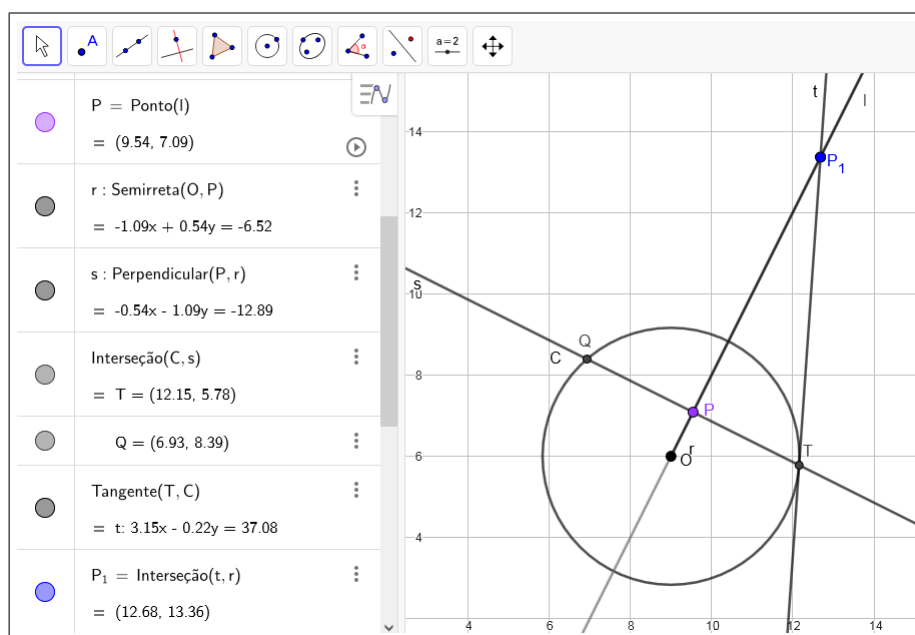


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 4: utilizando os passos de 3 a 7 realizados na Construção 1, construa o inverso geométrico do ponto P , o qual nomearemos P_1 e está situado no exterior de C .

A Figura 69 ilustra a construção de P_1 , realizada no quarto passo.

Figura 69 – Inverso de $P \in l$ interior a C

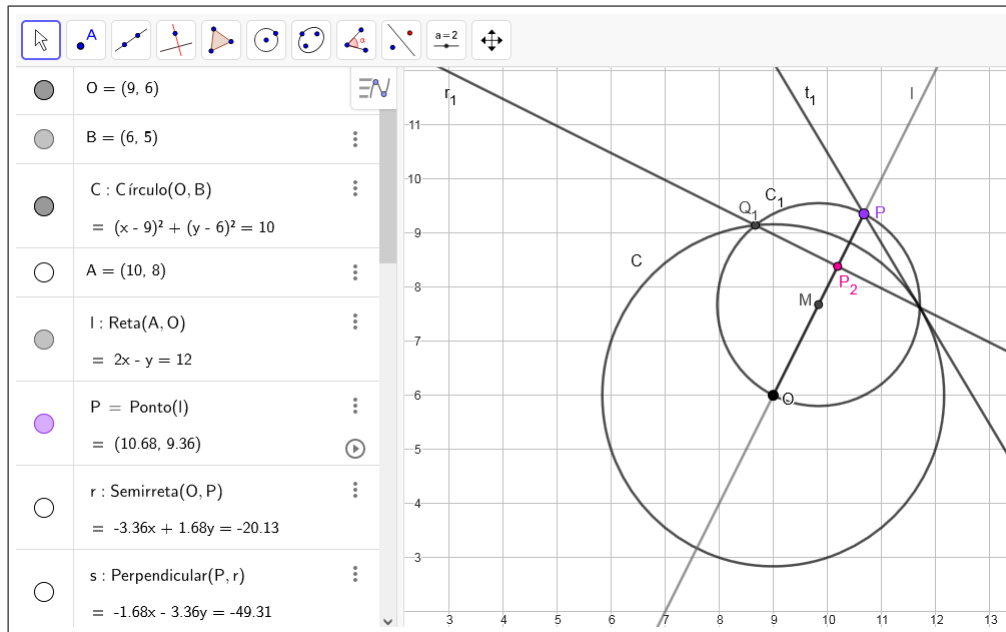


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Passo 5: movimente o ponto P de maneira que ele se torne exterior à circunferência C .

Passo 6: utilizando os passos de 3 a 9 realizados na Construção 2, construa o inverso geométrico do ponto P , o qual nomearemos P_2 e que estará situado no interior de C , conforme exibido na Figura 70.

Figura 70 – Inverso de $P \in l$ exterior a C



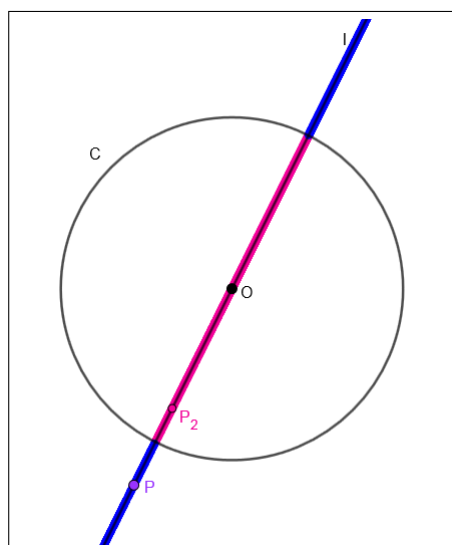
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Para que seja possível visualizar a inversão geométrica da reta l são necessários mais dois passos.

Passo 7: com o botão direito do mouse, clique nos pontos P_1 e P_2 e ative os seus rastros.

Passo 8: com o botão direito do mouse, clique no ponto P e ative a sua animação.

Com isso, o ponto P irá se deslocar sobre a reta l e, dinamicamente, os pontos P_1 e P_2 irão descrever a própria reta l , que corresponde a sua inversão geométrica, como pode ser visto na Figura 71. ■

Figura 71 – Inversão da reta l que passa em O 

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

No *applet*⁷ é possível acessar a construção dinâmica realizada no GeoGebra referente à inversão geométrica de uma reta secante à $C(O, \rho)$ e que passa pelo centro O . Ao explorar o *applet*, é possível alterar o raio ρ e a posição do centro O da circunferência C , de modo com que a reta l seja transladada ou rotacionada, mas sempre continue passando por O . Ao fazer isso, pode-se observar que:

- os pontos em que a reta l intersecta C permanecem fixos pela inversão geométrica em C , de acordo com a Proposição 4.1;
- a inversão da reta l , pela inversão geométrica em C , é a própria reta l , o que está em conformidade com a Proposição 4.6;
- conforme o ponto P varia no interior de C , seu inverso geométrico P_1 varia no exterior de C , descrevendo as duas porções ilimitadas de l ;
- conforme o ponto P varia no exterior de C , seu inverso geométrico P_1 varia no interior de C , descrevendo a porção limitada de l ;
- conforme o ponto P se aproxima do centro O de C , mais distante de O está o seu inverso geométrico P_2 , que consiste em um ponto no infinito, de acordo com a Observação 4.3.

⁷ <<https://www.geogebra.org/m/xbctyx9x>>

5.3 SÍNTESE DAS CONSTRUÇÕES DINÂMICAS

As Proposições 4.5, 4.6 e 4.7, juntamente com a Observação 4.5, permitem caracterizar a imagem de retas e circunferências pela inversão geométrica em relação à uma circunferência $C(O, \rho)$. Conforme verificamos nas construções anteriores, a imagem obtida depende do fato da curva original passar ou não pelo centro O da circunferência C . A Figura 72 sintetiza os resultados obtidos com as construções descritas nas sessões 5.1 e 5.2.

Figura 72 – Imagem de retas e circunferências pela inversão geométrica em $C(O, \rho)$

Curva original	Inversão da curva	Observação
Circunferência C_1 interior à C e não passa por O	Circunferência C_1 exterior à C	1
Circunferência C_1 exterior à C	Circunferência C_1 interior à C	2
Circunferência C_1 interior à C e passa por O	Reta / não intersecta C	3
Circunferência C_1 intersecta C e não passa por O	Circunferência C_1 intersecta C e não passa por O (diferente dela mesma)	4
Circunferência C_1 intersecta C e passa por O	Reta / intersecta C e não passa por O	5
Reta / não intersecta C	Circunferência C_1 interior à C e passa por O	6
Reta / intersecta C e não passa por O	Circunferência C_1 intersecta C e passa por O	7
Reta / intersecta C e passa por O	Reta / intersecta C e passa por O (ela mesma)	8

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

As observações numeradas na Figura 72 referem-se aos resultados matemáticos, demonstrados no Capítulo 4, e as respectivas construções no GeoGebra, descritas neste capítulo, que permitem comprovar as características geométricas da inversão de cada uma das curvas descritas. Tais observações estão indicadas a seguir:

1. Proposição 4.7 e Construção 3.
2. Proposição 4.7 e Construção 5.
3. Proposição 4.5 e Construção 4.
4. Proposição 4.7 e Construção 3.
5. Proposição 4.5 e Construção 6, com a circunferência C_1 passando por O .
6. Proposição 4.5 e Construção 7.
7. Proposição 4.5 e Construção 8.
8. Proposição 4.6 e Construção 9.

Com base nas informações sintetizadas na Figura 72, podemos afirmar que a inversão geométrica em C transforma retas e circunferências em retas ou circunferências, porém não reciprocamente.

No *applet*⁸ é possível acessar a construção dinâmica realizada no GeoGebra referente à inversão geométrica de uma circunferência qualquer. A exploração do *applet* permite modificar as circunferências C e C_1 de modo a variar a posição relativa entre elas e o fato de C_1 passar ou não pelo centro de C , e visualizar as diferentes imagens possíveis da inversão geométrica de C_1 em relação à C , contemplando todas as construções vistas na Seção 5.1.

O *applet*⁹ permite acessar a construção dinâmica realizada no GeoGebra referente à inversão geométrica de uma reta qualquer. Ao explorar o *applet* é possível alterar a circunferências C e a reta l de modo a modificar a posição relativa entre elas e o fato de l passar ou não pelo centro de C , e visualizar as diferentes imagens possíveis da inversão geométrica de l em relação à C , contemplando todas as construções vistas na Seção 5.2.

⁸ <<https://www.geogebra.org/m/qcguqy3m>>

⁹ <<https://www.geogebra.org/m/wxxjxmkf>>

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho a inversão geométrica foi explorada por meio de duas perspectivas que se integram. Partindo da sua definição matemática, provamos diversas propriedades satisfeitas pela inversão geométrica. A seguir, com o suporte do GeoGebra, efetuamos uma variedade de construções dinâmicas que permitem visualizar o efeito de uma inversão geométrica quando aplicada a pontos, retas e circunferências. Com isso, tornou-se possível transitar entre as diferentes representações (Duval, 2009) do objeto matemático relacionado à inversão geométrica.

Em particular, provamos que uma inversão geométrica transforma retas e circunferências em retas ou circunferências, não respectivamente, a depender se a curva original passa ou não pelo centro da circunferência em relação à qual inversão é realizada. Para cada possibilidade, apresentamos o passo a passo das construções que fornecem a imagem de tais curvas pela inversão geométrica. Também disponibilizamos os links de treze *applets* e de um objeto de aprendizagem, desenvolvidos no GeoGebra, que permitem visualizar e explorar a definição e as propriedades da inversão geométrica.

Nesse sentido, consideramos que os objetivos previstos para este trabalho foram atingidos. Destacamos também que o desenvolvimento das construções dinâmicas relacionadas à inversão geométrica de retas e circunferências se mostrou um avanço em relação às referências bibliográficas utilizadas como base para este trabalho, uma vez que tais referenciais, ainda que discutissem as propriedades matemáticas das inversões geométricas, em geral não abordavam suas construções dinâmicas, restringindo-se somente a construções estáticas.

A realização deste trabalho também proporcionou contribuições para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional, enquanto futura professora de Matemática. Por meio deste trabalho foi possível ampliar meus conhecimentos sobre o GeoGebra, especialmente em relação às suas ferramentas para o desenvolvimento de *applets* e suas potencialidades para a compreensão e visualização de conceitos matemáticos.

O desenvolvimento deste material também traz perspectivas para a realização de novas pesquisas, como a aplicação da inversão geométrica em outras cônicas, como hipérbolas, elipses ou parábolas; a representação algébrica para a inversão geométrica, a partir da utilização de números complexos; a discussão sobre a importância da circunferência em relação à qual uma inversão geométrica é realizada; a utilização de outras cônicas como base para uma inversão geométrica e também a respeito da Geometria Inversiva e a aplicabilidade da inversão geométrica em problemas físicos.

Por fim, destacamos que a execução desse trabalho permite vislumbrar a criação de um produto educacional, a ser composto pelos *applets* desenvolvidos, que possuem potencial de constituir um material didático formado por objetos de aprendizagem integrados aos diferentes recursos do GeoGebra e que, quando tornados públicos, poderão ser utilizados por qualquer pessoa interessada em aprofundar seus conhecimentos em relação às propriedades de inversões geométricas.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: E. Blucher, 1974. 488 p.

CHAVES, J. A.; GALVÃO, M. F. S.; GOMES, V. M. R. Resolução de um problema de tangência por inversão: uma aplicação à artilharia. **Revista Brasileira de Expressão Gráfica**, [S. l.], v. 4, n. 1, 2016.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005. 456 p.

DURAN, Fanciele. **Transformações de Möbius e Inversões**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro: 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FRASSON, Miguel Vinícius Santini. **Inversão por círculos como aplicação dos números complexos**. Revista do Professor de Matemática Online. São Paulo: SBM, 2022.

GARBI, Gilberto Geraldo. **C. Q. D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Livraria da Física, c2010. 403 p.

CMPU - Centro de Matemática da Universidade do Porto. **Inversão numa circunferência**, [2023]. Disponível em: <<https://cmup.fc.up.pt/cmup/mecs/Geometria/teoriainversao.pdf>>. Acesso em: 15 ago. 2023.

JONES, Keith; MACKRELL, Kate; STEVENSON, Ian. Designing digital technologies and learning activities for different geometries. **Mathematics education and technology-Rethinking the terrain: The 17th ICMI study**, p. 47-60, 2010.

MOREIRA, Larissa de Sousa; BARCELOS, Gilmar Teixeira; BATISTA, Silvia Cristina Freitas.

Gerando *Applets* no Software Geogebra. **Semana da Matemática**, Instituto Federal Fluminense, 2010.

PIASESKI, Claudete Maria. **A Geometria no Ensino Fundamental**. Monografia (Graduação). Licenciatura em Matemática. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI. Erechim: 2010.

PRADO, Douglas do. **Representações para números complexos e a caracterização geométrica para as transformações de Möbius**. Monografia (Graduação). Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2022.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2. ed. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2009.

SANTOS, Tiago Mateus Krepp dos. **Benefícios do Programa GeoGebra para o Ensino de Geometria**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - PROFMAT- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

SANTOS, Victor Cesar Paixao. **Mathlets: possibilidades e potencialidades para uma abordagem dinâmica e questionadora no ensino de Matemática**. Tese de Doutorado. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, Jeferson Camargo da. **Materiais concretos e virtuais no ensino de geometria: um leque de propostas de atividades**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática, Joinville, 2022.

SILVA, Joelson Lima da. **O uso do GeoGebra na Construção de Figuras Dinâmicas de Lugares Geométricos no Espaço**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - PROFMAT- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

SILVA JR, C. G. **Geometria Inversiva: A Transformação de Mutualidade entre retas e circunferências**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Universidade Federal de Campina Grande, 2022.

SOUSA, C. B. **Inversão geométrica aplicada à resolução dos problemas de Apolônio**. Dissertação de Mestrado (PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba, 2014.

VILLAGRA, Guillermo Antonio Lobos; COSTA, Ivo Machado da. **Caracterização de Triângulos Retângulos**. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

ZANNELA, André; FRANCO, Valdeni; CANAVARRO, Ana Paula. Realizar construções geométricas com o geogebra: a contribuição do ambiente de geometria dinâmica para o futuro professor de matemática. **RPEM**, Campo Mourão, PR, v. 7, n. 14, p. 179-207, jul.-dez. 2018.