

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PATRICK DOS SANTOS E SANTOS

**OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT E TOPOLOGIA DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS
TUBULARES COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS INCLUINDO VARIÁVEIS
MISTAS E REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE**

JOINVILLE

2023

PATRICK DOS SANTOS E SANTOS

**OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT E TOPOLOGIA DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS
TUBULARES COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS INCLUINDO VARIÁVEIS
MISTAS E REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz Rojas

JOINVILLE

2023

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Santos, Patrick dos Santos e

Otimização de layout e topologia de pórticos tridimensionais
tubulares com ligações semirrígidas incluindo variáveis mistas e
redução da complexidade / Patrick dos Santos e Santos. -- 2023.
104 p.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz Rojas

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2023.

1. Otimização estrutural. 2. Pórticos 3D. 3. Redução da
complexidade. 4. Programação linear com variáveis mistas. I.
Muñoz Rojas, Pablo Andrés . II. Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

PATRICK DOS SANTOS E SANTOS

**OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT E TOPOLOGIA DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS
TUBULARES COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS INCLUINDO VARIÁVEIS
MISTAS E REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas
CCT/UDESC (presidente/orientador)

Membros:

Prof. Dr. Rogério José Marczak
UFRGS

Prof. Dr. Anderson Pereira
PUC/RJ

Prof. Dr. Itamar Ribeiro Gomes
CCT/UDESC (suplente)

Joinville, 27 de Janeiro de 2023.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter permitido este momento e provido forças para esta caminhada.

Aos meus pais, Marcia e Assis, e aos meus irmãos, André e Anderson, por todo carinho e compreensão neste período dedicado ao mestrado. À minha namorada, Natália, por todo amor, carinho e companheirismo de sempre.

Ao meu orientador, Professor Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas, por todo empenho e dedicação em minha formação. Pelas inúmeras reuniões e pelo seu imenso conhecimento compartilhado na área da pesquisa.

Aos professores Dr. Eduardo Lenz Cardoso e Dr. Ricardo de Medeiros pelas contribuições para a minha formação acadêmica, pelo incentivo e por todo suporte prestado sempre que precisava.

Agradeço ao Msc. Felipe Faria e a Msc. Daiane Pilatti por todo apoio e auxílio, por disponibilizarem os materiais utilizados em suas respectivas pesquisas e por sempre se colocarem à disposição.

Fica também meu agradecimento a Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) pela excelente infraestrutura e pela qualidade no ensino oferecido. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Programa de Bolsas de Monitoria de Pós-Graduação (PROMOP) pelo auxílio financeiro. À Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) que possibilitou ao grupo de pesquisa a aquisição dos aparatos computacionais necessários para o desenvolvimento dos trabalhos, sob financiamentos 2019TR779 e 2021TR843.

RESUMO

O modelo estrutural de pórtico tridimensional é amplamente empregado em estruturas da construção civil e mecânica. Nesse modelo, algumas simplificações são geralmente consideradas, como o fato das ligações entre os elementos serem idealizadas como perfeitamente rígidas. Isto não condiz com o comportamento verificado na prática, pois as conexões apresentam certo grau de flexibilidade sendo, portanto, semirrígidas. Ao incluir o efeito das conexões semirrígidas na otimização estrutural, tem-se uma representação mais realista. Nesse contexto, um objetivo frequente é minimizar os custos de manufatura dos elementos e das conexões, o que tipicamente leva a estruturas geometricamente complexas. A complexidade está associada ao número excessivo de elementos que dificultam o processo de execução da estrutura. Uma maneira de diminuir essa complexidade é prescrever um custo elevado para as conexões e empregar funções *Heaviside* regularizadas sobre as áreas e os comprimentos dos elementos. Destaca-se também que, na prática, perfis estruturais apresentam-se em seções padronizadas disponíveis em catálogos comerciais. Sendo assim, no processo de otimização, convém adotar variáveis discretas para as áreas padronizadas. Assim, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma estratégia de otimização de layout e de topologia em estruturas de pórticos tridimensionais com conexões semirrígidas, visando redução de custos e de complexidade. O problema de otimização formulado considera restrições de deslocamento e permite tratar as áreas dos elementos como variáveis de projeto contínuas ou discretas. Coordenadas nodais e fatores de fixação associados à rigidez das conexões podem ser adotados como variáveis de projeto contínuas, simultaneamente às áreas. Dois aspectos do trabalho merecem destaque: (i) a aplicação da estratégia de redução da complexidade baseada em funções *Heaviside* para estruturas tridimensionais com conexões rígidas; (ii) a possibilidade de alteração na topologia da estrutura quando as áreas forem tratadas como pertencentes a um conjunto discreto (introdução de uma área numericamente nula). Apresentam-se resultados comprovando a eficácia das abordagens propostas. Estudos numéricos mostram em que situações a introdução dos fatores de fixação, no problema de otimização, desempenha papel relevante. Apresenta-se, também, um exemplo interessante em que o uso de variáveis contínuas para as áreas leva a uma estrutura otimizada simétrica, sendo esta simetria perdida ao adotar áreas discretas.

Palavras-chave: Otimização estrutural; Pórticos 3D; Redução de complexidade; Programação linear com variáveis mistas.

ABSTRACT

The three-dimensional frame model is widely used in civil and mechanical structures. In this model, some simplifications are generally made, such as idealizing the connections between elements as perfectly rigid. This is not consistent with the behavior verified in practice, as the connections have a certain degree of flexibility and are therefore semi-rigid. By including the effect of semi-rigid connections in structural optimizations, a more realistic representation is obtained. In this context, a frequent objective is to minimize the manufacturing costs of elements and connections, which typically leads to geometrically complex structures. This complexity is associated with an excessive number of elements that hinder manufacturability. One way to reduce this complexity is to prescribe a high cost for the connections and employ regularized Heaviside functions over the areas and lengths of the elements. It is also noteworthy that, in practice, profiles are presented in standardized sections available in commercial catalogs. Therefore, in the optimization process, it is convenient to adopt discrete variables for the standardized areas. Thus, in the present work we propose a layout and topology optimization strategy applied to three-dimensional frame structures with semi-rigid connections, aiming at reducing costs and complexity. The formulated optimization problem considers displacement constraints and allows treating the element areas as continuous or discrete design variables. Nodal coordinates and fixity factors associated with the stiffness of connections can be adopted as continuous design variables simultaneously to the areas. Two aspects of the work deserve to be highlighted: (i) the application of the complexity reduction strategy based on Heaviside functions to three-dimensional structures with rigid connections; (ii) the possibility of changing the topology of the structure when the areas are treated as belonging to a discrete set (introduction of a numerically null area). Results show the effectiveness of the proposed approaches. Numerical studies evince in which situations the introduction of fixity factors plays a relevant role in the optimization problem. We also present an interesting example in which the use of continuous variables for the areas leads to a symmetric optimal structure, this symmetry being lost when adopting discrete areas.

Keywords: Structural optimization; 3D frames; Complexity reduction; Linear programming with mixed variables.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Configuração de teste para obtenção da curva experimental da conexão $M - \emptyset$. a) vista superior e b) vista frontal.	18
Figura 2 - Relação entre Momento fletor (M) e a rotação da conexão $\emptyset$ para alguns tipos de conexões.	19
Figura 3 – Modelo matemático linear e curva experimental de conexões.	20
Figura 4 – Significado físico do fator de fixação considerando as rotações da viga.	20
Figura 5 – Relação não linear entre a rigidez rotacional e o fator de fixação.	22
Figura 6 - Modelo matemático linear para conexões semirrígidas.	22
Figura 7 – Esquema de ligação entre os elementos considerando as conexões semirrígidas.	23
Figura 8 – Graus de liberdade do elemento de pórtico 3D.	23
Figura 9 -Variação linear dos custos das conexões.	28
Figura 10 – Variação quadrática do custo das conexões adotada por Simões (1996).	29
Figura 11 – Curvatura quadrática que define a variação nos custos adicionais referentes à fabricação das conexões desenvolvida por Faria (2019a).	30
Figura 12 – Exemplos de projetos ótimos complexos.	31
Figura 13 - (a) Estrutura inicial, (b) malha inicial 17×5 nós e 3.570 elementos de treliça.	32
Figura 14 - Otimização estrutural de treliça para o domínio simplesmente apoiado mostrado na Figura 13 para diferentes valores de custo unitário fabricação αF	32
Figura 15 – Efeito do aumento do parâmetro β em função das variáveis de projeto normalizadas γ_i	34
Figura 16 – Soluções ótimas com o emprego de um mesmo parâmetro β para duas medidas de redução da complexidade.	35
Figura 17 - Curvas da função <i>Heaviside</i> regularizada de acordo com os valores escolhidos para a área máxima.	36
Figura 18 – Elemento de seção transversal circular tubular.	47
Figura 19 – Elemento com seção circular vazada e maciça.	47
Figura 20 – Fluxograma referente ao algoritmo de otimização.	56
Figura 21 - Forma com que os limites móveis são determinados neste estudo.	58
Figura 22 – Domo de 52 barras.	60
Figura 23 – Soluções ótimas de acordo com o custo adicional de fabricação das conexões (CF) para o domo com uma força concentrada no nó 1.	62

Figura 24 – Comportamento da função objetivo, considerando o custo total de manufatura (W), para o exemplo do domo com uma força concentrada no nó 1.	63
Figura 25 – Comportamento da função objetivo (W), em escala logarítmica, com a contribuição das parcelas de custo do material (W1), considerando diferentes custos de fabricação (CF) associado ao custo das conexões. (W2).	64
Figura 26 – Restrição de deslocamento na direção Z dos nós de 1 a 5 para o CF = 0.	66
Figura 27 - Restrição de deslocamento na direção Z dos nós de 1 a 5 para o CF = 3.	67
Figura 28 - Restrição de deslocamento na direção Z dos nós de 1 a 5 para o CF = 60.	67
Figura 29 – Domo de 52 barras a) estrutura inicial indicando as variáveis de projeto, b) caso de carga I, c) caso de carga II e d) caso de carga III.	68
Figura 30 – Resultado da otimização, a) variáveis contínuas e b) variáveis mistas.	70
Figura 31 – Domo otimizado com as áreas discretas do catálogo e com indicação dos elementos removidos na otimização de layout e topologia.	72
Figura 32 – Análise de movimentação das coordenadas a) estrutura inicial com indicação da magnitude e direção de movimento dos nós e b) estrutura otimizada – variáveis mistas.	73
Figura 33 – Comportamento da função objetivo (custo total) e das parcelas que compõem a função objetivo (custo de material mais custo das conexões) ao longo do processo iterativo.	74
Figura 34 – Restrições de deslocamentos de 15mm para os três casos de carga do nó 1, nas direções a) X, b) Y e c) Z.	75
Figura 35 – Estrutura em balanço utilizada nos estudos de Rosa (2021).	76
Figura 36 – Estrutura inicial (a) estrutura otimizada considerando todas as variáveis contínuas (b) e estrutura otimizada com variáveis mistas(c).	78
Figura 37 – Resultado da otimização com variáveis contínuas para as áreas da estrutura em balanço.	79
Figura 38 – Resultado da otimização com variáveis mistas a) áreas selecionadas com base no conjunto discreto b) suposição de simetria com a área do elemento 10 c) suposição de simetria com a área do elemento 6.	80
Figura 39 – Movimento das coordenadas de projeto da otimização de variáveis contínuas para otimização de variáveis mistas.	82
Figura 40 – Elementos que apresentaram fatores de fixação diferentes de pino para a estrutura em balanço.	83
Figura 41 – Avaliação da rigidez da conexão $Kr(kNm)$ em função dos fatores de fixação α	84

Figura 42 – Comportamento da função objetivo (custo total R\$).	85
Figura 43 – Comportamento das restrições de deslocamento dos nós restritos ao longo do processo de iterações – estrutura em balanço.	86
Figura 44 – Arquivo de entrada para o LpSolve com uma variável discreta e uma contínua. .	98
Figura 45 – Arquivo de saída com uma variável discreta e uma contínua.	98
Figura 46 - – Arquivo de entrada para o LpSolve com duas variáveis discretas.	99
Figura 47 – Arquivo de saída do LpSolve com duas variáveis discretas.	99
Figura 48 – Arquivo de saída do LpSolve com duas variáveis contínuas.	99
Figura 49 – Arquivo de entrada para o LpSolve com duas variáveis contínuas.	100
Figura 50 – Catálogo Tuper.....	101
Figura 51 – Catálogo Tuper.....	102
Figura 52 – Catálogo Vallourec	103
Figura 53 – Catálogo Vallourec.	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas iniciais (em metros), domo.	60
Tabela 2 – Conectividade do domo	60
Tabela 3 – Parâmetros β iniciais e finais associados ao custo de fabricação das conexões para o domo com uma força concentra no nó 1.....	61
Tabela 4 – Áreas e comprimentos ótimos para o exemplo do domo com uma força concentrada no nó 1.	65
Tabela 5 – Coordenadas ótimas, CF = 60.....	66
Tabela 6 – Conjunto de áreas discretas retiradas dos catálogos Vallourec e Tuper.....	69
Tabela 7 – Resultado ótimo das áreas para o problema de variáveis mistas.	71
Tabela 8 – Áreas disponíveis no conjunto discreto, destacando os perfis presentes na estrutura otimizada e suas quantidades.	72
Tabela 9 – Coordenadas ótimas para o domo com variáveis mistas.	73
Tabela 10 – Fatores de fixação ótimos para o exemplo do domo com variáveis mistas.....	74
Tabela 11 – Coordenadas iniciais da estrutura em balanço.....	77
Tabela 12 – Conectividade da estrutura em balanço.	77
Tabela 13 – Áreas ótimas da estrutura em balanço.	79
Tabela 14 - Áreas disponíveis no conjunto discreto, destacando os perfis presentes na estrutura otimizada e suas quantidades – estrutura em balanço.....	81
Tabela 15 – Coordenadas ótimas da estrutura em balanço.....	82
Tabela 16 – Fatores de fixação das conexões semirrígidas da estrutura em balanço.....	82
Tabela 17 – Comparação entre os fatores de fixação com o aumento no caso de carga F_2 de 120kN para 180kN – custo das conexões fixo em 20% (pino) e 60% (rígida)....	86
Tabela 18 – Comparação entre os fatores de fixação com redução no custo das conexões rígidas de 60% para 40% - forças constantes $F_1 = 60kN$ e $F_2 = 180kN$	87

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS	16
1.1.1	<i>Objetivo geral.....</i>	<i>16</i>
1.1.2	<i>Objetivos específicos</i>	<i>17</i>
2	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1	CONEXÕES SEMIRRÍGIDAS	18
2.2	REDUÇÃO DE CUSTO EM ESTRUTURAS.....	26
2.3	REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE.....	31
2.4	OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA COM VARIÁVEIS DISCRETAS	37
3	FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS ENVOLVENDO REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE E VARIÁVEIS MISTAS.....	39
3.1	OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT E TOPOLOGIA COM REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE – TODAS AS VARIÁVEIS CONTÍNUAS E FATORES DE FIXAÇÃO CONSTANTES	39
3.2	OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT, TOPOLOGIA E FATORES DE FIXAÇÃO - VARIÁVEIS DE PROJETO MISTAS.....	41
3.2.1	<i>Tratamento de variáveis mistas na otimização de layout e topologia</i>	<i>42</i>
3.2.2	<i>Cálculo do momento de inércia para seções circulares vazadas e maciças.....</i>	<i>46</i>
3.3	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO UNIFICADO.....	49
3.4	PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL MISTA.....	50
3.5	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE.....	51
3.5.1	<i>Sensibilidade relacionada às áreas.....</i>	<i>51</i>
3.6	ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO.....	53
3.6.1	<i>Estratégia dos limites móveis</i>	<i>57</i>
3.6.2	<i>Critério de convergência</i>	<i>58</i>
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	59
4.1	OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT E TOPOLOGIA COM REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE – TODAS AS VARIÁVEIS CONTÍNUAS E FATORES DE FIXAÇÃO CONSTANTES	59
4.1.1	<i>Domo de 52 barras.....</i>	<i>59</i>

4.2	OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT, TOPOLOGIA E FATORES DE FIXAÇÃO-VARIÁVEIS MISTAS	68
4.2.1	<i>Domo de 52 barras – variáveis mistas</i>	68
4.2.2	<i>Estrutura em balanço</i>	76
5	CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	89
	REFERÊNCIAS	91
	ANEXO A.....	95
	ANEXO B – INTERFACE PARA INTEGRAÇÃO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO COM O LPSOLVE	97
	ANEXO C.....	101
	ANEXO D.....	103

1 INTRODUÇÃO

O campo da otimização visa alcançar o melhor resultado de uma operação enquanto atende certas restrições. A motivação é decorrente da exploração dos recursos limitados para obter maior eficiência no processo (maximizar a produção ou lucro, por exemplo). Ao longo da história humana, podemos encontrar inúmeras demonstrações do desejo do homem em maximizar a eficiência mecânica como, por exemplo, a invenção da alavanca e dos mecanismos de polia (HAFTKA; GURDAL, 1996).

Na área de projetos estruturais, uma atenção crescente tem sido dedicada à otimização estrutural sob as mais variadas restrições/condições de projeto. Nesse sentido, existem três classes diferentes de otimização estrutural, sendo elas: dimensionamento/paramétrica, forma e topologia (BENDSOE E SIGMUND, 2003; MITJANA *et al*, 2018). Podemos destacar ainda, a otimização de layout (paramétrica + forma), que visa encontrar de maneira simultânea o melhor dimensionamento dos elementos estruturais e a forma estrutural dos elementos (coordenadas nodais).

Ao aplicar uma otimização estrutural é necessário definir o seu objetivo, logo, definir os parâmetros da função objetivo torna-se imprescindível. Diversas funções objetivo podem ser empregadas com a finalidade de maximização da rigidez, minimização do peso, volume, custo, entre outros. Ao avaliar a minimização de custos, permite-se contribuir para uma economia de material e recursos financeiros, proporcionando um aumento na competitividade de mercado. Para isso, existem diversas funções objetivo empregadas no processo de otimização que vão desde funções simples (coeficientes multiplicados pelo volume de material) para representar os custos, como também, expressões mais completas que englobam custos essenciais de fabricação, soldagem, corte, perfuração, preparação da superfície, transporte e montagem (PAVLOVIC *et al*, 2004).

Antes de definir a função objetivo de otimização estrutural é necessário determinar o tipo de estrutura a ser otimizada. No campo de idealizações estruturais, diversos modelos e simplificações são consideradas para tentar representar o comportamento real da estrutura, por exemplo, elementos de treliças, pórticos, vigas (Euler-Bernoulli ou Timoshenko). Nesse sentido, destacam-se as estruturas de pórticos tridimensionais que modelam grande parte das estruturas reais utilizadas na construção civil. Dentre as estruturas reais modeladas por esses elementos, podemos citar as torres, estruturas de guindaste, pontes, montanha russa, escadas, estruturas de cobertura de

aeroportos, estádios, terminais rodoviários, dentre outros. Grande parte dessas estruturas é modelada por elementos de pórticos tridimensionais com área de seção transversal circular tubular, pois possuem maior durabilidade, melhor desempenho de estruturas expostas as ações dinâmicas e aparência arquitetônica (quando comparadas com outros perfis), conforme Wardenier *et al.* (2002).

Apesar do modelo de pórtico tridimensional ser muito empregado na análise estrutural, algumas simplificações são realizadas, como o fato das ligações entre os elementos estruturais serem consideradas como rígidas. Isto não condiz com o comportamento real da estrutura, pois as conexões apresentam certo grau de flexibilidade sendo, portanto, semirrígidas (SIMÕES,1996).

É importante mencionar, que os elementos de pórticos tridimensionais de seção transversal circular tubular apresentam elementos com seções transversais padronizadas, disponíveis através de catálogos. Por consequência, aplicar uma otimização discreta para esses elementos, torna o projeto prático e aplicável (ROSA, 2021). Outro fator de grande importância, é reduzir a complexidade estrutural, ou seja, o número excessivo de elementos que podem resultar do processo de otimização, inviabilizando a construção da estrutura, conforme Torii, Lopez e Miguel (2016). Para tal, podem ser aplicadas funções *Heaviside* regularizadas sobre as áreas e comprimentos dos elementos, adotando parâmetros de curvatura β_1 e β_2 diferentes entre si (ROSA, 2021).

Diante disso, o objetivo deste estudo concentra-se em dar continuidade às pesquisas de Faria (2019a) e Rosa (2021) no contexto da otimização de layout de pórticos tridimensionais com ligações semirrígidas, variáveis mistas e redução da complexidade. A primeira contribuição, está relacionada com a extensão dos estudos de Rosa (2021) de redução da complexidade de estruturas planas para estruturas tridimensionais. A segunda contribuição, está associada ao contexto da otimização de layout e conexões semirrígidas com variáveis mistas, incluindo agora uma otimização de topologia.

O trabalho está estruturado da seguinte forma. Após a introdução apresentada no capítulo 1, as justificativas e objetivos são apresentados em seguida. Uma breve revisão bibliográfica sobre os estudos desenvolvidos na área encontra-se no capítulo 2. O capítulo 3 contém a formulação utilizada/desenvolvida para a otimização de topologia de seção transversal circular tubular de parede fina e maciça, com o tratamento de variáveis mistas. No capítulo 4 são apresentados os resultados e discussões. Enfim, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões.

1.1 JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

A elaboração desta dissertação visa ampliar os estudos desenvolvidos inicialmente por Faria (2019a) e Rosa (2021). Faria (2019a) realizou a otimização de layout, com variáveis contínuas, de pórticos tridimensionais com seção transversal circular tubular com conexões semirrígidas sob restrições de deslocamentos, comprimento mínimo e critério de falha. Em seguida, Rosa (2021) expandiu os estudos e incluiu uma otimização com redução da complexidade e variáveis mistas. O problema misto tem como variáveis discretas as áreas, sendo as demais contínuas (fatores de fixação e coordenadas nodais).

Este estudo traz novas contribuições ao incluir uma otimização de topologia com variáveis discretas no problema de otimização mista. Outra contribuição está relacionada ao estudo da redução da complexidade de estruturas tridimensionais, não abordado nas análises de Rosa (2021). Diante de tal aspecto, é possível destacar a importância do trabalho ao considerar que a análise de estruturas tridimensionais modela grande parte das estruturas reais construídas. Entretanto, é necessário representar o comportamento da estrutura o mais próximo da realidade. Quando a estrutura está submetida a pequenos deslocamentos e deformações, pode-se incluir as conexões semirrígidas em uma análise linear. Apesar de não considerar os efeitos da flambagem neste estudo, a redução da complexidade tridimensional e a otimização topológica com variáveis mistas contribuem significativamente para aspectos práticos e construtivos.

Além disso, com base nas pesquisas realizadas relacionadas com as contribuições científicas referentes ao tema proposto, nenhum trabalho científico foi encontrado que integrasse simultaneamente a otimização de layout e topologia com variáveis mistas de pórticos tridimensionais com seção transversal circular tubular com conexões semirrígidas e redução da complexidade em uma análise linear.

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem por objetivo geral revisar os estudos de Faria (2019a) e Rosa (2021) no contexto da otimização de layout de pórticos tridimensionais com ligações semirrígidas, variáveis mistas e redução da complexidade. São apresentadas novas contribuições no estudo da redução da complexidade de pórticos tridimensionais e incluída a possibilidade de otimização de topologia com variáveis mistas.

1.1.2 Objetivos específicos

- Revisar os estudos de Faria (2019a) e Rosa (2021);
- Estudar a eficácia do procedimento de redução da complexidade com a aplicação das funções *heaviside* para as áreas e comprimentos em estruturas tridimensionais;
- Propor uma estratégia para permitir a modificação da topologia da estrutura no problema de variáveis mistas e conexões semirrígidas;
- Adaptar formulações prévias para tratar de maneira unificada seções transversais circulares tubulares e maciças.

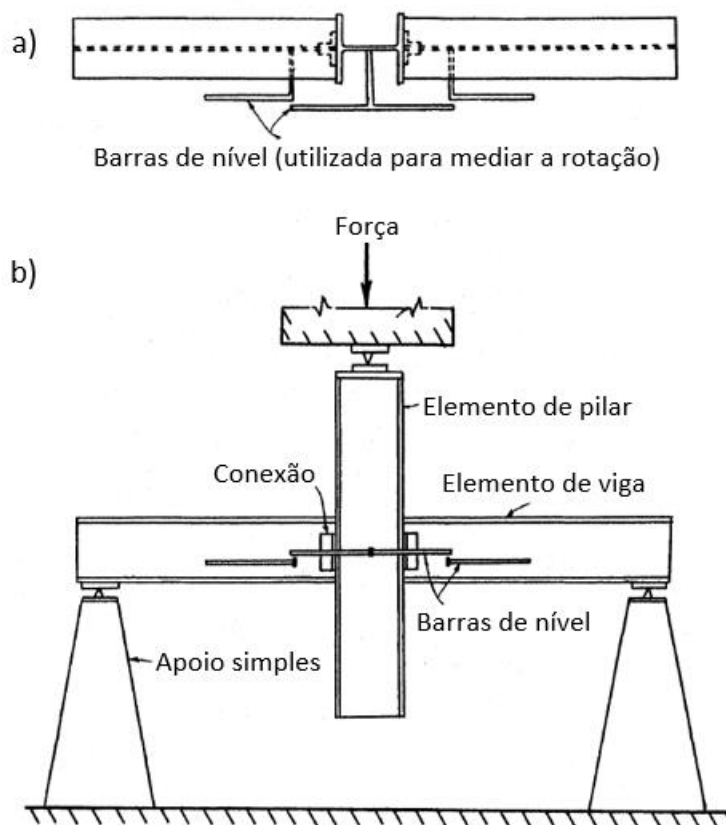
2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 CONEXÕES SEMIRRÍGIDAS

Abordagens tradicionais negligenciam o comportamento real de rigidez estrutural da ligação entre os elementos, através de uma simplificação idealizada em duas possibilidades de ligações: pinos e totalmente rígidas. Na prática, as ligações apresentam um comportamento semirrígido. O termo semirrígido expressa o comportamento da ligação entre esses dois extremos, ligações em pinos e totalmente rígidas (SIMÕES,1996).

Experimentos desenvolvidos por Nader e Astaneh (1991), entre outros, demonstram que as conexões semirrígidas apresentam um comportamento não linear. Esse resultado é obtido quando o conjunto viga-pilar é testado. Uma força aplicada induz um momento M e uma rotação θ na conexão. A rotação relativa para vários valores de momento é medida por meio de barras de nível sensíveis, conforme indicado na Figura 1.

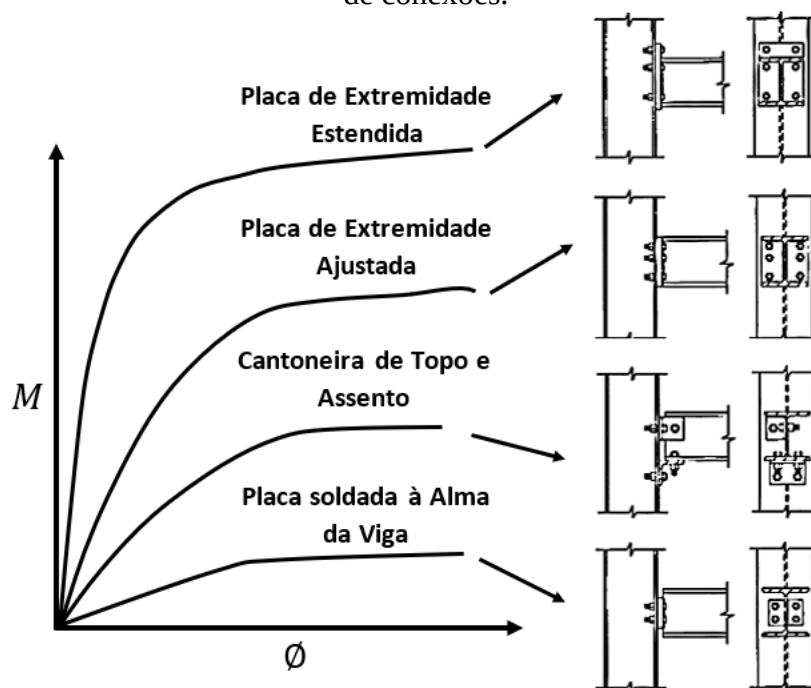
Figura 1 – Configuração de teste para obtenção da curva experimental da conexão $M - \theta$. a) vista superior e b) vista frontal.



Fonte: Monforton (1962).

Para um determinado momento, sabendo que a rotação medida pelas barras de nível correspondente à rotação total (conexão + viga), se a rotação elástica da viga é subtraída, o momento aplicado pode ser plotado em função da rotação característica da conexão (MONFORTON, 1962). Conforme indicado na Figura 2, o grau de rigidez irá depender do tipo de conexão empregada através da relação do momento fletor aplicado e a rotação da conexão.

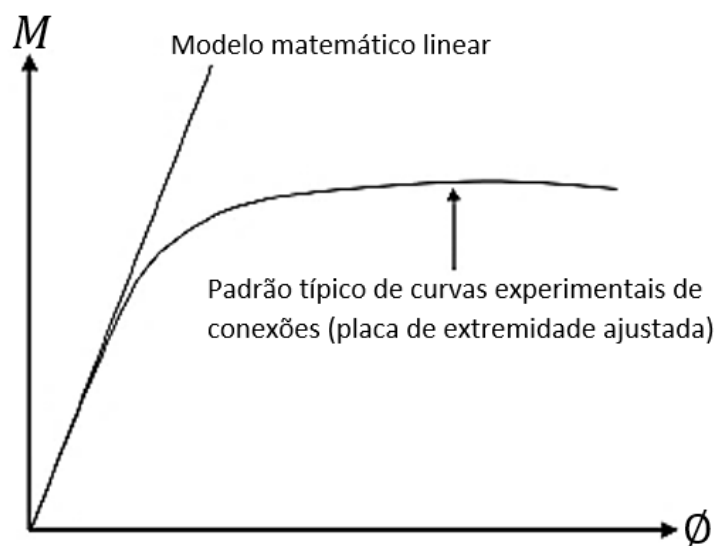
Figura 2 - Relação entre Momento fletor (M) e a rotação da conexão ϕ para alguns tipos de conexões.



Fonte: Adaptado de Simões (1996).

O comportamento não linear das conexões ocorre devido ao escoamento gradual das placas de conexões, travas, parafusos e etc. As propriedades das conexões são complexas e as incertezas no comportamento das conexões incluem imperfeições geométricas, tensão residual devido à soldagem, concentração de tensão, efeitos secundários locais (CHAN E CHUI, 2000). Estudos recentes de Msabawy e Mohammad (2019) destacam que as técnicas experimentais de análise, entre o momento fletor e a rotação da conexão, são geralmente caras e demoradas para serem implementadas na prática diária de projeto, e normalmente são empregadas apenas para fins acadêmicos. Logo, para analisar pórticos sujeitos a pequenos deslocamentos e deformações, pode-se considerar uma relação linear entre momento e rotação, conforme indicado na Figura 3.

Figura 3 – Modelo matemático linear e curva experimental de conexões.

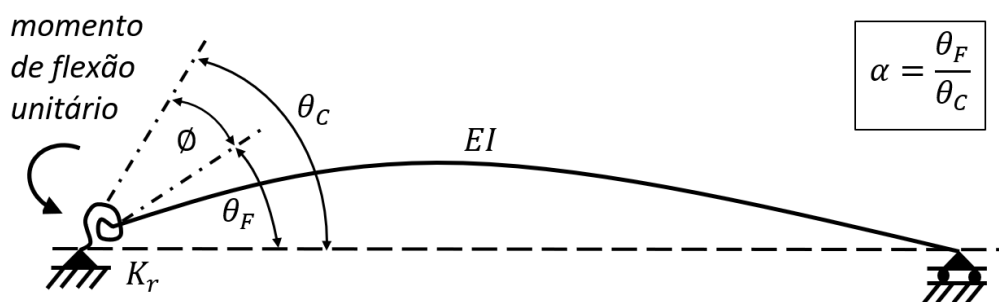


Fonte: Adaptado de Pinheiro (2003).

O modelo linear de estruturas treliçadas tem sido estudado por diversos autores como Monforton (1962), Xu e Grierson (1993), Simões (1996), Savio (2004), Csébfalvi (2007), Kartal *et al.* (2010), Artar e Daloglu (2016), Faria (2019a), Msabawy e Mohammad (2019) e Rosa (2021). Sekulovic e Salatic (2001), Savio (2004) e Chan e Chui (2000) afirmam que para a maioria das conexões, as deformações axiais e de cisalhamento geralmente são pequenas em comparação com a deformação por flexão. Sendo assim, seus trabalhos consideram apenas o comportamento à flexão para as ligações semirrígidas.

O comportamento à flexão da conexão semirrígida, para o caso bidimensional, é composto pela rotação do elemento (θ_F) mais a rotação da conexão ($\emptyset$), idealizado por uma mola rotacional, que compõe a rotação total (θ_C). Além disso, deve-se considerar a rigidez à flexão da conexão K_r . A Figura 4 apresenta essa idealização considerando a aplicação de um momento fletor unitário.

Figura 4 – Significado físico do fator de fixação considerando as rotações da viga.



Fonte: Adaptado de Simões (1996).

A quantificação da rotação da conexão ($\emptyset$) depende do momento fletor interno da viga (M) e da rigidez rotacional da conexão (K_r), sendo escrito como

$$\emptyset = \frac{M}{K_r}, \quad (1)$$

Alguns autores como Monforton (1962), Simões (1996) e Kartal *et al.* (2010), utilizaram uma parametrização através do fator de fixação (α) para quantificar a rigidez de uma ligação semirrígida de pórticos planos, onde (α) varia entre 0 e 1, sendo 0 para uma ligação em pino e 1 para uma ligação rígida. O fator de fixação (α) estabelece uma relação entre a rotação total (θ_C) e a rotação da viga (θ_F), conforme indicado na Figura 4. Assim, a rigidez rotacional da conexão parametrizada é escrita por

$$K_r = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \frac{3EI}{L}, \quad (2)$$

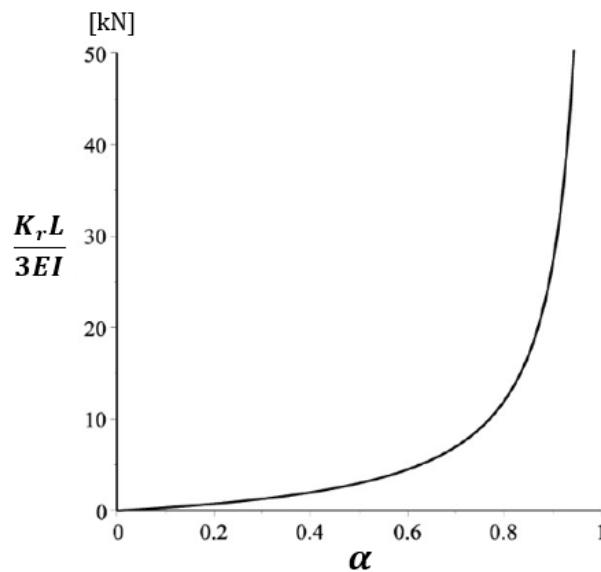
onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, I e L correspondem à inércia e ao comprimento do elemento, respectivamente. A rigidez rotacional da conexão K_r é definida na faixa de $(0, +\infty)$ para conexões em pino e rígidas, respectivamente. Reescrevendo a Equação (2), pode-se estabelecer uma relação entre o fator de fixação e a rigidez da conexão

$$\frac{K_r L}{3EI} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (3)$$

onde $\frac{K_r L}{3EI}$ expressa a razão entre a rigidez rotacional da conexão e a rigidez rotacional do elemento. Gerstle (1988) destaca que a razão entre a rigidez da conexão e a rigidez da viga, considerando uma conexão rígida, varia entre 10 kNm a 50 kNm . Essa variação de rigidez resulta em fatores de fixação (α) entre 0,90 e 0,98, respectivamente. Plotando o gráfico com base na equação (3), pode-se observar a não linearidade entre a rigidez e o fator de fixação da conexão, conforme indicado na Figura 5.

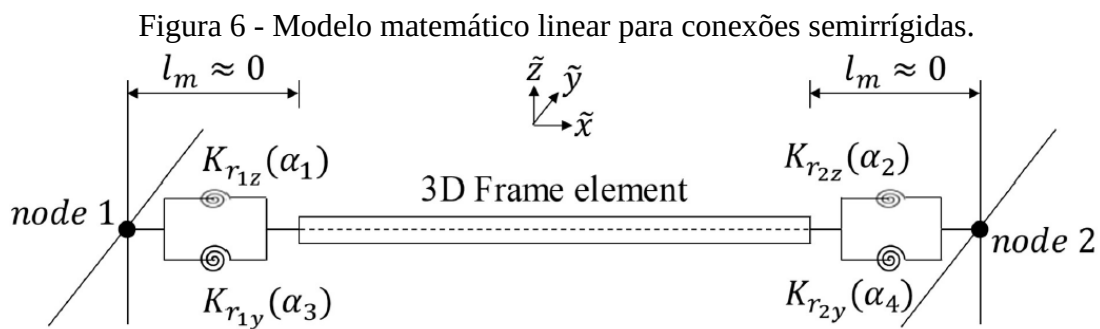
Uma pequena alteração no fator de fixação α , acima de 0,7, pode levar a um aumento exagerado na rigidez. Entretanto, algumas normas regulamentadoras como AISC (2005) e NBR 8800 (2008) definem intervalos de rigidez para classificar as ligações como semirrígidas ($2EI/L \leq K_r \leq 20EI/L$ e $EI/2L \leq K_r \leq 25EI/L$, respectivamente).

Figura 5 – Relação não linear entre a rigidez rotacional e o fator de fixação.



Fonte: Faria (2019a).

O modelo tridimensional de pórticos semirrígidos, também pode ser idealizado sob a mesma perspectiva. Para esse caso, há no modelo 3D (apresentado na Figura 6), duas molas rotacionais fictícias de comprimento desprezível l_m (FARIA, 2019a). Esse comprimento desprezível é apenas uma idealização para representar a rigidez da junta que liga um conector rígido, situado sobre o nó, com cada elemento. Apesar de ser interessante para ilustrar esse conceito, a variável l_m não é utilizado em nenhum momento nos equacionamentos apresentados por Faria.



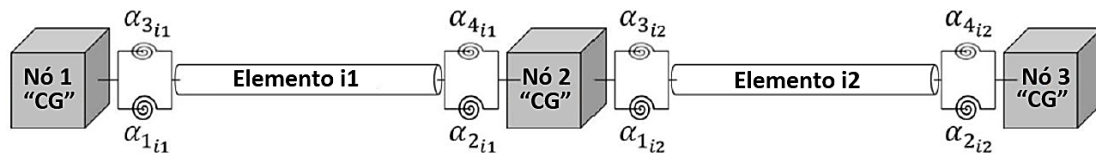
Fonte: Faria (2019a).

As molas rotacionais estão relacionadas aos planos de flexão $xy(K_{rz})$ e $xz(K_{ry})$, para os dois nós do elemento, que têm os momentos fletores M_y e M_z e as rotações θ_y e θ_z , respectivamente, conforme indicado na Figura 6. Monforton (1962) afirma que a maioria das conexões semirrígidas exibem comportamento totalmente rígido em torção. Assim, o modelo tridimensional apresentado por Faria (2019a), tendo como base o

desenvolvimento de Monforton (1962) e Chan e Chui (2000), não considera o comportamento semirrígido à torção.

A formulação desenvolvida é válida para qualquer tipo de ligação como viga-coluna, viga-viga, coluna-apoio, viga-apoio. Geralmente, as estruturas tridimensionais podem apresentar vários elementos conectados a uma conexão. Sendo assim, o modelo idealizado considera que as conexões de cada elemento são fixadas a um “conector global” (CG) que é rígido. O CG é ilustrado como um “cubo” e o nó 2, da Figura 7, tem apenas dois elementos ligados a ele. Se mais elementos estão conectados de forma não coplanar, cada elemento deve ser conectado com seu eixo $\tilde{x}$ local ortogonal a uma dada superfície do CG.

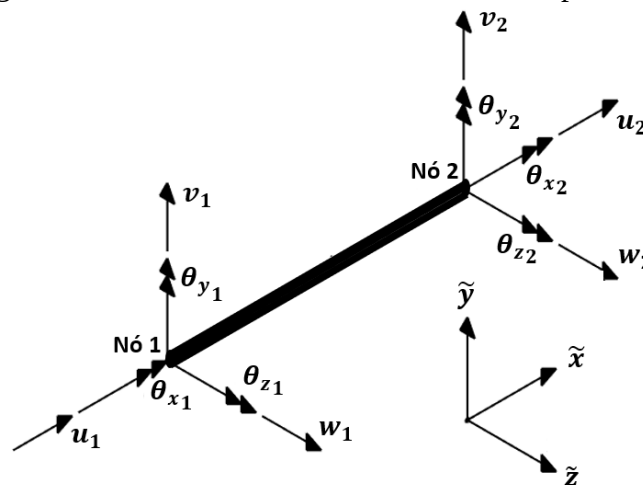
Figura 7 – Esquema de ligação entre os elementos considerando as conexões semirrígidas.



Fonte: Faria (2019a).

O elemento de pórticos 3D possui seis graus de liberdade por nó, três de translação (u, v, w) e três de rotação ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$). A Figura 8 apresenta os graus de liberdade do elemento no sistema de referência local. O elemento indicado tem comprimento L , área de seção transversal A , momento de inércia I , módulo de Young E e módulo de cisalhamento G .

Figura 8 – Graus de liberdade do elemento de pórtico 3D.



Fonte: O autor (2023).

O vetor de deslocamentos do elemento $\mathbf{u}$, no sistema de referência local, é escrito por

$$\mathbf{u} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \theta_{z_1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, \theta_{z_2}\}^T \quad (4)$$

A matriz de rigidez local ($\mathbf{K}_e$), desenvolvida por Faria (2019a) para o elemento de viga, incluindo os fatores de fixação (f_c), é apresentada na equação (8). Faria (2019a) adotou em sua pesquisa um intervalo de variação dos fatores de fixação ente 0,01 e 0,99, para conexões em pino e rígidas, respectivamente. Pode-se observar na matriz de rigidez da equação (8) que os fatores de fixação iguais a 0,01 (pino) apresentam rigidez à torção para o modelo de pórtico 3D, apresentado por Faria (2019a). A matriz de rigidez citada na equação (8) é utilizada no desenvolvimento deste trabalho.

A rotação da matriz de rigidez local $\mathbf{K}_e$ para o sistema de referência global é obtida por

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_i, \quad (5)$$

onde $\mathbf{K}_i$ é a matriz de rigidez local no sistema de referência global, i corresponde ao i – ésimo elemento, $\mathbf{T}_i$ é a matriz de transformação. A matriz de rigidez global é obtida por

$$\mathbf{K}_g = \bigwedge_{i=1}^{nel} \mathbf{K}_i \quad (6)$$

onde nel é o número total de elementos e $\bigwedge$ é o operador de montagem da matriz de rigidez global. Após a montagem da matriz de rigidez global $\mathbf{K}_g$ e conhecendo o vetor de carga global $\mathbf{F}$, pode-se obter os deslocamentos nodais $\mathbf{U}$ pela resolução numérica da equação de equilíbrio

$$\mathbf{K}_g \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (7)$$

$$K_{e_i} = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12b_i f_{c_i}^1 & 0 & 0 & 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^3 & 0 & -12b_i f_{c_i}^1 & 0 & 0 & 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^4 \\ 0 & 0 & 12b_i f_{c_i}^2 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^5 & 0 & 0 & 0 & -12b_i f_{c_i}^2 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & o_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -o_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^5 & 0 & 4b_i L_i^2 f_{c_i}^{11} & 0 & 0 & 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^5 & 0 & 2b_i L_i^2 f_{c_i}^8 & 0 \\ 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^3 & 0 & 0 & 0 & 4b_i L_i^2 f_{c_i}^9 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^3 & 0 & 0 & 0 & 2b_i L_i^2 f_{c_i}^7 \\ -a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12b_i f_{c_i}^1 & 0 & 0 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^3 & 0 & 12b_i f_{c_i}^1 & 0 & 0 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^4 \\ 0 & 0 & -12b_i f_{c_i}^2 & 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^5 & 0 & 0 & 0 & 12b_i f_{c_i}^2 & 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -o_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & o_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^6 & 0 & 2b_i L_i^2 f_{c_i}^8 & 0 & 0 & 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^6 & 0 & 4b_i L_i^2 f_{c_i}^{12} & 0 \\ 0 & 6b_i L_i f_{c_i}^4 & 0 & 0 & 0 & 2b_i L_i^2 f_{c_i}^7 & 0 & -6b_i L_i f_{c_i}^4 & 0 & 0 & 0 & 4b_i L_i^2 f_{c_i}^{10} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

onde,

$$a_i = \frac{A_i E_i}{L_i}, \quad o_i = \frac{G_i I_i}{L_i}, \quad b_i = \frac{E_i I_i}{L_i^3}, \quad (9)$$

$$f_{c_i}^1 = \frac{\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \alpha_{1i}\alpha_{2i}}{4 - \alpha_{1i}\alpha_{2i}}, \quad f_{c_i}^2 = \frac{\alpha_{3i} + \alpha_{4i} + \alpha_{3i}\alpha_{4i}}{4 - \alpha_{3i}\alpha_{4i}}, \quad f_{c_i}^3 = \frac{2\alpha_{1i} + \alpha_{1i}\alpha_{2i}}{4 - \alpha_{1i}\alpha_{2i}}, \quad f_{c_i}^4 = \frac{2\alpha_{2i} + \alpha_{1i}\alpha_{2i}}{4 - \alpha_{1i}\alpha_{2i}}, \quad f_{c_i}^5 = \frac{2\alpha_{3i} + \alpha_{3i}\alpha_{4i}}{4 - \alpha_{3i}\alpha_{4i}}, \quad (10)$$

$$f_{c_i}^6 = \frac{2\alpha_{4i} + \alpha_{3i}\alpha_{4i}}{4 - \alpha_{3i}\alpha_{4i}}, \quad f_{c_i}^7 = \frac{3\alpha_{2i}\alpha_{1i}}{4 - \alpha_{1i}\alpha_{2i}}, \quad f_{c_i}^8 = \frac{3\alpha_{3i}\alpha_{4i}}{4 - \alpha_{3i}\alpha_{4i}}, \quad f_{c_i}^9 = \frac{3\alpha_{1i}}{4 - \alpha_{1i}\alpha_{2i}}, \quad f_{c_i}^{10} = \frac{3\alpha_{2i}}{4 - \alpha_{1i}\alpha_{2i}}, \quad f_{c_i}^{11} = \frac{3\alpha_{3i}}{4 - \alpha_{3i}\alpha_{4i}}, \quad f_{c_i}^{12} = \frac{3\alpha_{4i}}{4 - \alpha_{3i}\alpha_{4i}}, \quad (11)$$

2.2 REDUÇÃO DE CUSTO EM ESTRUTURAS

O processo de desenvolvimento de projetos estruturais considera vários aspectos, tais como a viabilidade, tipo de material empregado, disponibilidade de recursos, mão de obra especializada, etc. Outro fator de grande interesse são os custos provenientes do projeto, que passam por uma série de etapas que vão desde estimativas iniciais (projeto preliminar) até os custos provenientes do projeto definitivo. Dentro dessa perspectiva, podemos citar alguns dos vários trabalhos que definem estimativas iniciais de custos baseados no peso ou volume das estruturas, como Hager e Balling (1988), Saka e Kameshki (1998), Erbatur *et al.* (2000), Klansek *et al.* (2007).

Existem algumas funções que contabilizam o custo de material e são formadas por uma função linear de algumas propriedades geométricas influentes (volume, área de superfície, por exemplo), que são multiplicados com pesos adequados, representando os coeficientes de custos. Essas abordagens normalmente são empregadas para uma estimativa inicial dos custos de projeto, caracterizando uma avaliação incompleta dos custos. Deve-se notar que os custos com fabricação, transporte, montagem, podem ser significativos. (PAVLOVIC *et al.*, 2004).

Alguns autores, com o intuito de contabilizar os custos provenientes das estruturas de maneira adequada, adicionaram ao custo dos elementos os custos provenientes das conexões, como: Xu e Grierson (1993), Simões (1996), Faria (2019a), Rosa (2021). Jarmai e Farkas (1999) buscaram uma função de custo mais abrangente, considerando que o custo de uma estrutura é a soma dos custos de materiais, fabricação e montagem, porém deram ênfase aos custos de fabricação e definiram uma expressão para representá-los, da seguinte forma

$$C_z = k_m \rho V + k_f \sum_{i=1}^7 T_i, \quad (12)$$

onde C_z é o custo associado ao material, à fabricação e à montagem de cada elemento. k_m e k_f são os custos de material e de fabricação, respectivamente, ρ é a densidade do material, V é o volume e T_i são os seguintes tempos de fabricação: T_1 é o tempo de preparação para soldagem, T_2 é o tempo de soldagem, T_3 é o tempo com ações adicionais de soldagem (troca de eletrodos, por exemplo), T_4 tempo para aplainamento de placas, T_5 tempo de preparação da superfície, T_6 tempo de pintura, T_7 corte e desbaste. Entretanto,

não há custos de materiais adicionais incluídos como consumíveis de soldagem, consumo de gás, etc.

Uma função de custo mais detalhada pode ser encontrada no trabalho de Pavlovic *et al.* (2004), onde são incluídos custos essenciais de fabricação como soldagem, corte, perfuração, preparação da superfície, montagem, alinhamento de flange e pintura, juntamente com o custo de material de aparafusamento, transporte e montagem. A função objetivo, foi implementada para estruturas de pórticos planos de aço, sendo aplicadas restrições baseadas no Eurocode 3.

Mais tarde, Hasançebi (2017) utilizou o modelo da função de custo desenvolvida por Pavlovic *et al.* (2004) e estruturou sua formulação com base no somatório de cinco itens: o primeiro é baseado no custo do material dos elementos (volume do material); o segundo item é o custo do material de fabricação das juntas, que pode ser dividido em dois: material (materiais usados para soldagem, aparafusamento e reforços) e fabricação das juntas (soldagem e corte); os demais itens são custo de transporte, montagem, custos extras (pintura, alinhamento do flange, preparação da superfície, corte, soldagem dos elementos, etc). Jarmai e Farkas (1999) afirmam que é difícil estabelecer parâmetros de custos, uma vez que estes dependem de diversos fatores como país, fábrica, tecnologia empregada, e por essa razão é importante desenvolver funções de custos abrangentes, contudo, flexíveis na utilização desses parâmetros.

Além do custo de material, Xu e Grierson (1993) incluíram o custo das conexões semirrígidas na otimização de pórticos planos de aço sujeito à restrições de deslocamento e tensão. Os autores utilizaram um algoritmo de otimização mista, baseado em gradiente, para avaliar as áreas (discretas), com base nos catálogos americanos, e os fatores de fixação como variáveis contínuas. A função objetivo empregada pelos autores avalia o custo da conexão em função da rigidez das conexões e o custo do material

$$W = \sum_{i=1}^{nel} \left(c_{wi} \rho_i A_i L_i + \left(\sum_{c=1}^2 (V_0 + V_1 \alpha_c) \right)_i c_{wi} \rho_i A_i L_i \right), \quad (13)$$

onde W é a função objetivo, i representa o elemento atual analisado, nel é o número de elementos, c_{wi} é o custo do material por massa, ρ_i é a densidade do material, A_i e L_i representam a área e comprimento do elemento, respectivamente. O índice c refere-se a rigidez da mola rotacional de um elemento. Os coeficientes V_0 e V_1 são parâmetros que controlam o custo adicional das conexões de cada elemento, que é diretamente

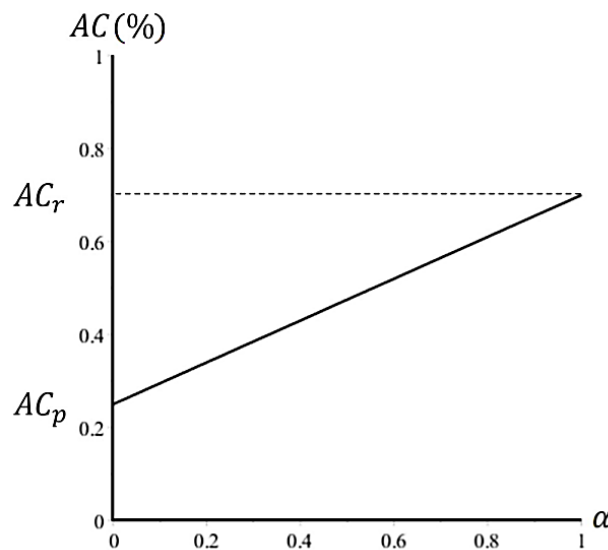
relacionado ao custo do material. Os custos das conexões são limitados a conexões em pino e totalmente rígidas. Pela característica do grau polinomial, o custo das conexões tem dependência linear do custo do material. O custo adicional, relativo às conexões, adotado pelos autores é de 25%, do custo de material, para conexões flexíveis (AC_p) e de 70% para conexões rígidas (AC_r), conforme

$$0,25\rho_i A_i L_i \leq AC_i \rho_i A_i L_i \leq 0,70\rho_i A_i L_i, \quad (14)$$

$$AC_i = \sum_{c=1}^2 (V_0 + V_1 \alpha_c). \quad (15)$$

A Figura 9 apresenta graficamente essa variação, onde AC é o percentual de custos adicionais referente às conexões (pode variar de 0 a 100% do custo do material) e α é o termo respectivo da rigidez das molas rotacionais (fatores de fixação) e podem variar na faixa entre 0 e 1.

Figura 9 -Variação linear dos custos das conexões.



Fonte: Faria (2019a).

Assim como Xu e Grierson (1993), Simões (1996) desenvolveu estudos semelhantes para análise de pórticos planos, incluindo os custos adicionais das conexões. Entretanto, o autor modificou a equação (13) para uma avaliação quadrática dos custos adicionais das conexões em função do custo do material, sendo escrita por

$$W = \sum_{i=1}^{nel} \left(c_{wi} \rho_i A_i L_i + \left(\sum_{c=1}^2 (V_0 + V_1 \alpha_c + V_2 \alpha_c^2) \right) c_{wi} \rho_i A_i L_i \right), \quad (16)$$

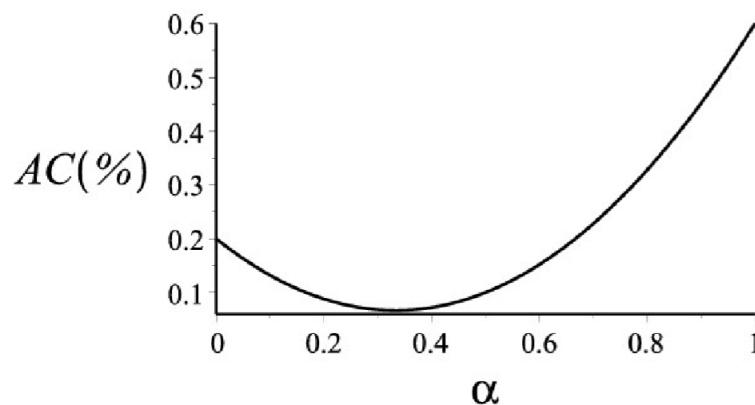
assim, é acrescentado o termo $V_2 \alpha_c^2$ na equação (13), o que resulta na equação (16), para avaliar a variação quadrática dos custos. Simões (1996) assumiu que o custo das ligações flexíveis era de 20% e rígidas de 60%, ou seja,

$$0,20 \rho_i A_i L_i \leq AC_i \rho_i A_i L_i \leq 0,60 \rho_i A_i L_i, \quad (17)$$

$$AC_i = \sum_{c=1}^2 (V_0 + V_1 \alpha_c + V_2 \alpha_c^2). \quad (18)$$

Simões (1996) argumenta que a adoção desse tipo de variação proporciona maior precisão na previsão do custo adicional das conexões. No entanto, não há um procedimento padrão descrito para definir os coeficientes constantes. A variação quadrática adotada por Simões (1996) apresenta o comportamento indicado na Figura 10.

Figura 10 – Variação quadrática do custo das conexões adotada por Simões (1996).

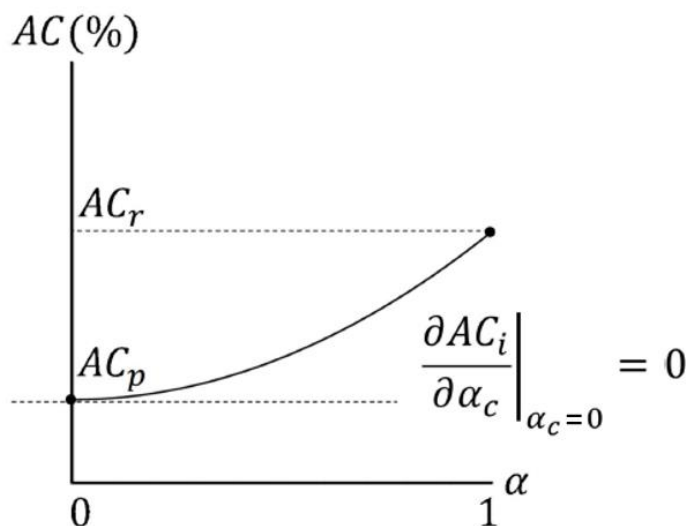


Fonte: Faria (2019a).

Faria (2019a) observou que os coeficientes adotados para representar a variação quadrática dos custos das conexões (Figura 10) violam a condição imposta na equação (17), ou seja, para α entre 0 e 0,6 o custo das conexões é inferior a 20%. Em função disso, Faria (2019a) apresenta uma alteração nos coeficientes que definem a variação quadrática dos custos adicionais das conexões. O autor utilizou a informação de dois pontos (AC_p e AC_r) e uma derivada localizada no ponto do custo adicional de conexões em pino.

A Figura 11 ilustra o comportamento da função quadrática dos custos adicionais das conexões, onde AC é referente ao percentual de custo adicional de conexões (este percentual está associado ao custo de massa da estrutura).

Figura 11 – Curvatura quadrática que define a variação nos custos adicionais referentes à fabricação das conexões desenvolvida por Faria (2019a).



Fonte: Faria (2019a).

Logo, o autor apresenta parâmetros que definem uma função de variação quadrática dos custos genérica, bem definida, que pode ser utilizada na otimização por métodos baseados em gradiente.

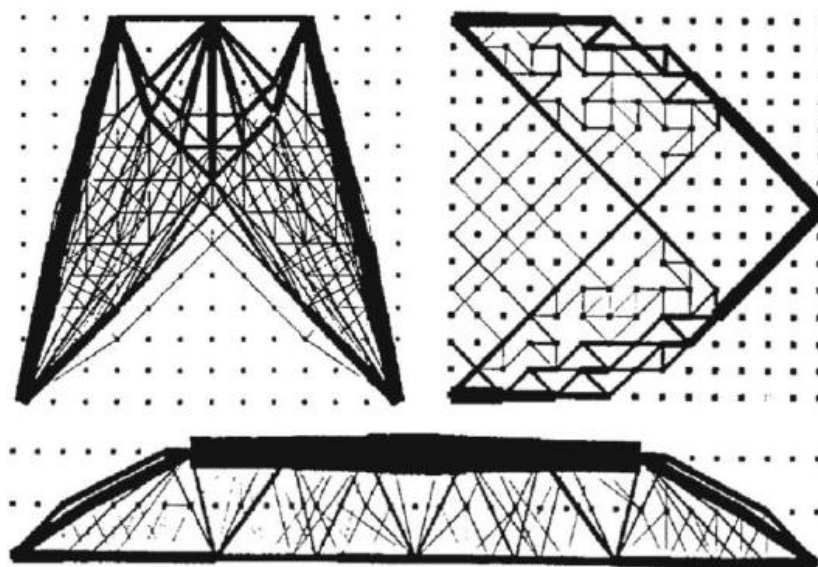
De forma geral, Xu e Grierson (1993), Simões (1996) e Eurocode 3 (2013) apresentam que os custos das conexões do tipo rígida (soldadas) são mais caras em relação às conexões do tipo pino. Porém, pode-se conjecturar que a situação oposta também seja possível, com as conexões do tipo pino sendo mais caras do que as soldadas. A fabricação de conexões 3D em pinos com muitos elementos conectados ao mesmo ponto pode exigir uma montagem geométrica complexa e os custos podem ser maiores do que para as conexões soldadas. Isto pode comprometer a viabilidade de fabricação de conectores ligando muitos elementos. Estudos mais aprofundados nesse sentido seriam necessários. Na ausência de tal informação concreta, este trabalho segue a proposição de Xu e Grierson (1993), Simões (1996) e Eurocode 3 (2013).

2.3 REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE

Estruturas treliçadas são amplamente empregadas e, por consequência, a busca por projetos ótimos (em termos de material, resistência mecânica, custos, dentre outros) são amplamente investigados na literatura. Dorn et al (1964), por exemplo, propôs o GSM (*Ground Structure Method*), como um procedimento para remoção de elementos na otimização de treliças, acarretando, na redução de custos provenientes do material empregado. A abordagem consiste em trabalhar com elementos de treliças conectados a um conjunto de nós em “grade”. A remoção dos elementos é realizada quando a área de seção transversal é menor que um limite pré-estabelecido pelo projetista.

No entanto, uma questão delicada pode surgir quando a abordagem do GSM é utilizada: o projeto ideal muitas vezes torna-se geometricamente complexo para fins práticos. A complexidade está relacionada a uma rede densa elementos com comprimentos variados, por exemplo. Tais aspectos, na maioria dos casos não são desejados, pois podem resultar em custos excessivos com elementos sem grande rigidez e resultar em um projeto inviável sob aspectos práticos (construtivos). A Figura 12 mostra alguns projetos ótimos apresentados por Bendsøe (1994) utilizando o método GSM.

Figura 12 – Exemplos de projetos ótimos complexos.



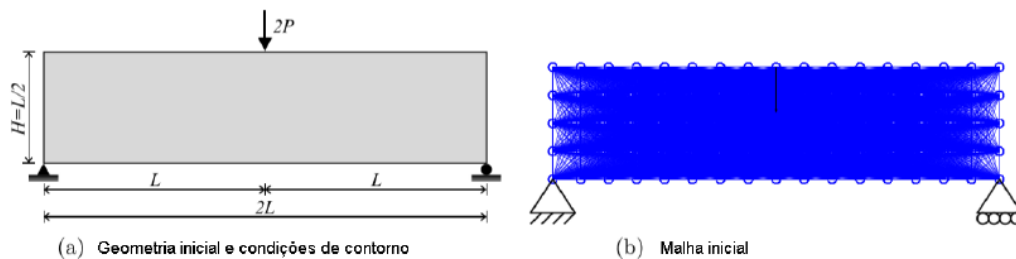
Fonte: Bendsøe (1994).

Os primeiros estudos da redução da complexidade foram propostos nos trabalhos de Prager (1974) e Parkes (1975). A ideia da proposta consiste em aplicar uma penalização ao comprimento dos elementos menores durante o processo de otimização,

de modo que as barras mais curtas se tornem menos vantajosas. Entretanto, He e Gilbert (2015) observaram que a abordagem nem sempre é eficaz, principalmente quando os elementos “mais curtos” apresentam comprimento similar aos elementos “mais compridos”.

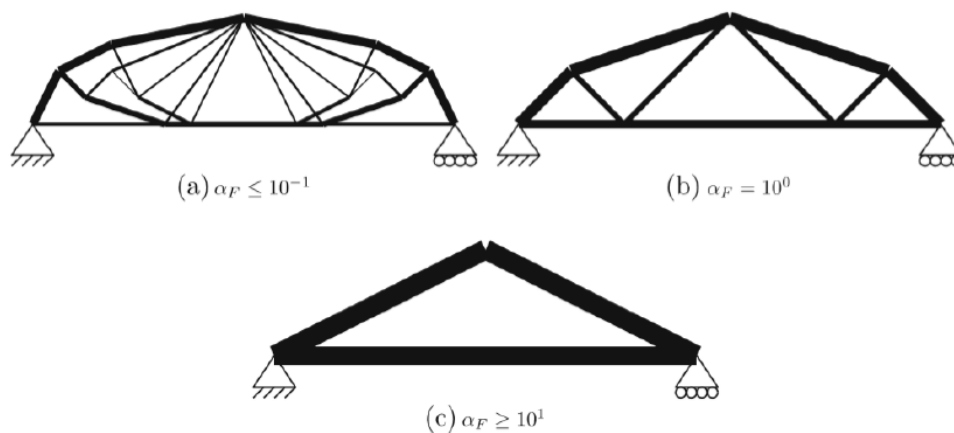
Asadpoure, Guest e Valdevit (2014) também analisaram o controle da redução da complexidade, tendo como embasamento os estudos de Guest, Prévost e Belytschko (2004). Os autores consideraram o controle da complexidade de estruturas treliçadas com uma função objetivo que contabiliza os custos de material e manufatura das conexões. Os custos de manufatura das conexões são proporcionais ao número de elementos da estrutura. A estimativa do número de elementos no domínio de projeto é realizada por uma função *Heaviside* regularizada aplicada sobre às áreas. Conforme o custo de fabricação por elemento α_F aumenta, nota-se uma significativa redução do número de elementos na geometria final, como indicado nas Figuras Figura 13 e Figura 14.

Figura 13 - (a) Estrutura inicial, (b) malha inicial 17×5 nós e 3.570 elementos de treliça.



Fonte: Asadpoure, Guest e Valdevit (2014).

Figura 14 - Otimização estrutural de treliça para o domínio simplesmente apoiado mostrado na Figura 13 para diferentes valores de custo unitário fabricação α_F .



Fonte: Asadpoure, Guest e Valdevit (2014).

A expressão apresentada pelos autores para avaliar a redução da complexidade do exemplo das Figura 13 e Figura 14 é

$$W(\gamma) = \sum_{i=1}^{nel} c_{w_i} \rho_i \gamma_i v_i + \alpha_{F_i} H_i, \quad (19)$$

$$H_i(y_i) = (1 - e^{-\beta y_i}) + y_i e^{-\beta}, \quad (20)$$

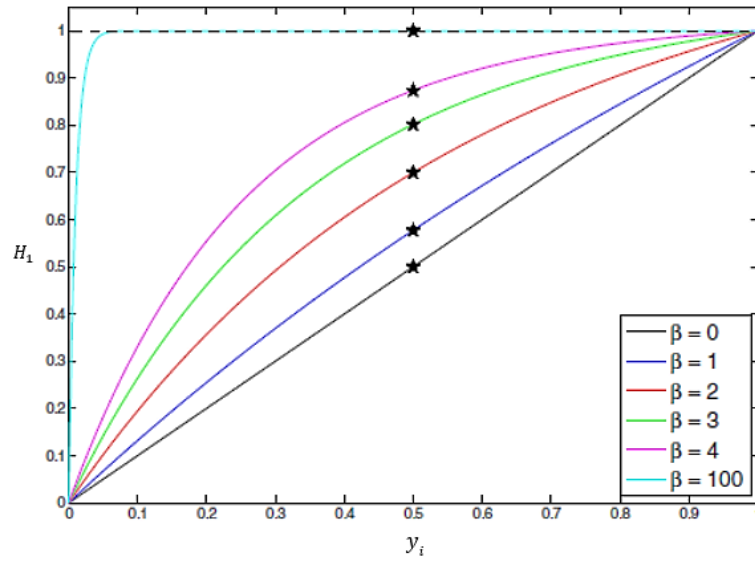
onde i representa o elemento atual analisado, nel é o número de elementos, c_w é o custo monetário do material por unidade de massa; γ é o vetor de variáveis de projeto: ($\gamma_i = A_i/A_{m\acute{a}x}$), A_i é a área do elemento i , $A_{m\acute{a}x}$ é a área máxima permitida na seção transversal; ρ é a densidade do material utilizado; v é a quantidade que dá o volume do material ($v_i = A_{m\acute{a}x} L_i$), L_i é o comprimento do elemento i ; α_F é o custo monetário por unidade de conexão; H_i é a aproximação contínua da função *Heaviside* aplicada sobre as áreas dos elementos e β é o parâmetro de curvatura da função *Heaviside* para as áreas.

O parâmetro $\beta \geq 0$ dita a curvatura da aproximação. Quando $\beta = 0$, H_i é uma função linear e quando β tende ao infinito, H_i se aproxima da função *Heaviside*, conforme apresentado na Figura 15. Existem várias discussões a respeito desse parâmetro, por exemplo, Guest, Asadpoure e Ha (2011) sugerem a utilização de um parâmetro fixo suficientemente alto (maior ou igual a 20) durante todo o processo de otimização. Outros autores como Schevenels, Lazarov e Sigmund (2011), Wang e Qian (2020), Niu *et al.* (2020), Wang *et al.* (2021) e Rosa (2021) sugerem a atualização do parâmetro β ao longo do processo de otimização.

Schevenels, Lazarov e Sigmund (2011) iniciaram o processo de otimização com $\beta = 1$, e seu valor é dobrado a cada 50 iterações até o valor máximo de 32. Wang e Qian (2020) iniciaram a otimização com $\beta = 0$ nas primeiras 50 iterações e aumentaram em 1,25 vezes a cada 25 iterações, até o valor máximo também de 32. Já Niu *et al.* (2020) propôs em seu trabalho duas formas de atualização do parâmetro de curvatura da função *Heaviside*. Na primeira, a otimização é iniciada com $\beta = 1$ e tem seu valor dobrado a cada 50 iterações, até atingir o valor máximo permitido. Na segunda, é iniciado com $\beta = 1$ e aumenta em 8 a cada 10 iterações, tendo como limite máximo o valor 100.

Wang *et al.* (2021) também iniciaram o processo de otimização com $\beta = 1$, mantendo esse valor nas primeiras 100 iterações. Após isso, o valor é multiplicado por um fator igual a 1,7 a cada 50 iterações até atingir um valor máximo de 40. Rosa (2021) iniciou com $\beta = 100$ para as áreas e o parâmetro é atualizado em 1% a cada iteração.

Figura 15 – Efeito do aumento do parâmetro β em função das variáveis de projeto normalizadas γ_i .



Fonte: Guest, Asadpoure e Ha (2011).

Rosa (2021) avaliou a atualização do parâmetro β considerando quatro custos de fabricação das conexões diferentes ($c_F = 0$, $c_F = 1$, $c_F = 10$ e $c_F = 100$). Com a adoção de quatro custos de fabricação diferentes é observado que quanto maior o custo de fabricação das conexões, até o limite de $\alpha_F = 100$, menor será a complexidade estrutural.

Faria (2019a) ampliou a metodologia de Asadpoure, Guest e Valdevit (2014) e incluiu uma função *Heaviside* para avaliar não somente as áreas, como também o comprimento dos elementos (H_2), porém atribuiu o mesmo parâmetro β em ambos. Então, Rosa (2021) observou que a proposta de Faria (2019a) traria melhores resultados com a adição de dois parâmetros β diferentes, um para as áreas e outro para os comprimentos. A expressão desenvolvida por Rosa (2021) é apresentada por

$$W(A, X, Y, Z) = \sum_{i=1}^{nel} c_{w_i} \rho_i A_i L_i + c_{F_i} H_{1_i} H_{2_i}, \quad (21)$$

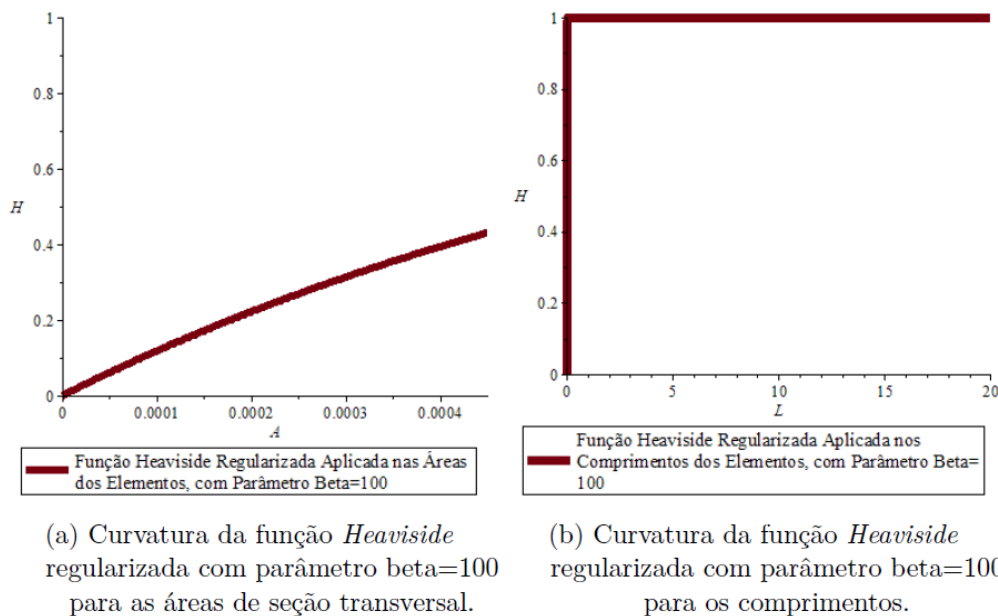
$$H_{1_i}(A_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta_1 A_i}{A_{máx}}}\right) + \frac{A_i}{A_{máx}} e^{-\beta_1}, \quad (22)$$

$$H_{2_i}(L_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta_2 L_i}{L_{máx}}}\right) + \frac{L_i}{L_{máx}} e^{-\beta_2}, \quad (23)$$

onde i representa o elemento atual analisado, nel é o número de elementos, H_{1i} e H_{2i} representam a aproximação contínua da função *Heaviside* aplicada sobre as áreas e comprimentos dos elementos, respectivamente. c_w é o custo monetário do material por unidade de massa, c_F é o custo monetário por unidade de conexão, A_i e L_i representam a área e comprimento do elemento i , $A_{máx}$ e $L_{máx}$ representam a área e o comprimento máximo para normalização dos elementos, respectivamente. β_1 e β_2 são os parâmetros que definem a curvatura da função *Heaviside* para as áreas e comprimento dos elementos.

Rosa (2021) justifica que a redução da complexidade está associada aos parâmetros de curvaturas diferentes β , equações (22) e (23), respectivamente. Para exemplificar essa justificativa, Rosa (2021) adotou o mesmo parâmetro $\beta = 100$ para o comprimento e área dos elementos, mostrando que, na área tem-se uma função suavizada, com uma larga região de transição, Figura 16(a), e no comprimento dos elementos, uma função *Heaviside* com transição brusca e com possibilidade de ocasionar problemas nas derivadas, Figura 16(b).

Figura 16 – Soluções ótimas com o emprego de um mesmo parâmetro β para duas medidas de redução da complexidade.



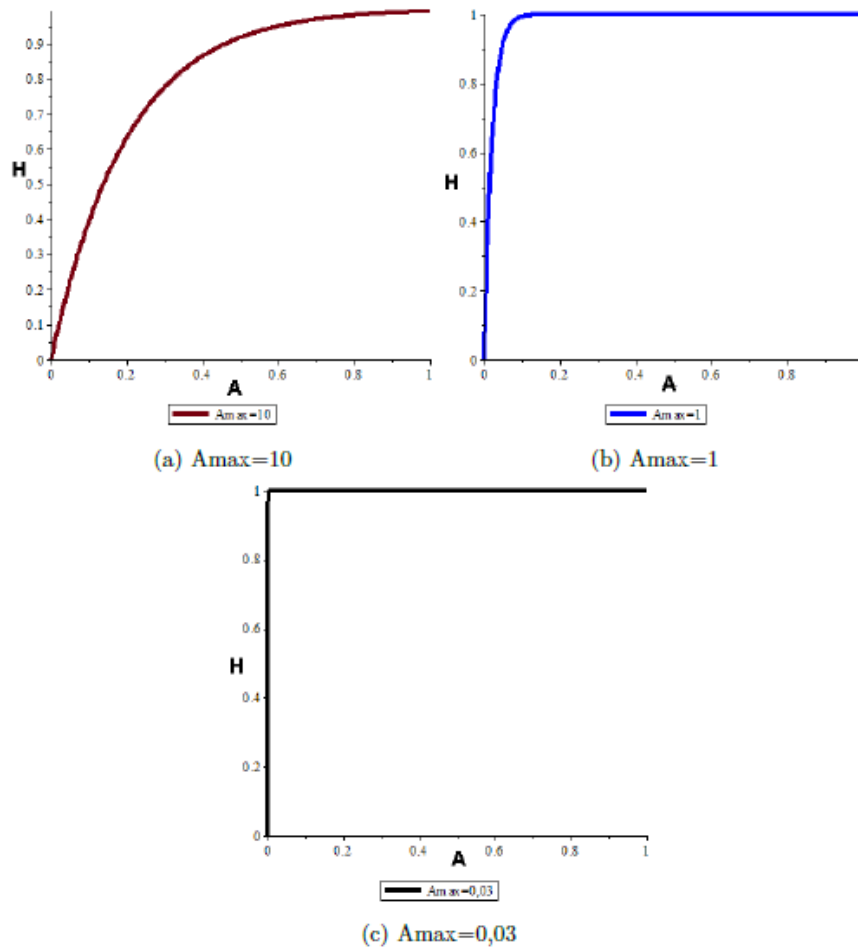
Fonte: Rosa (2021).

Rosa (2021) expressa que no início das iterações, é esperado que haja uma função *Heaviside* regularizada suavizada, com uma região de transição onde os elementos possam transitar livremente entre 0 e 1, e ao final do processo de otimização, tenha-se um

comportamento semelhante a função degrau unitário, assumindo apenas um único valor, 0 ou 1.

Além dos parâmetros β das equações (22) e (23), outros parâmetros como $A_{m\acute{a}x}$ e $L_{m\acute{a}x}$ são utilizados para adimensionalizar as áreas e comprimentos. Esses parâmetros, têm efeito marcante na relaxação da função *Heaviside*. Rosa (2021) destaca que se for utilizado um valor relativamente alto para esses parâmetros, tem-se um intervalo maior para que as variáveis de projeto possam transitar. Com a área máxima e comprimento máximo suficientemente pequenos, a região de transição entre 0 e 1 é menor, e tem-se uma curvatura semelhante à função *Heaviside* original. Este comportamento pode ser facilmente visualizado na Figura 17, com a adoção de três valores para a área máxima ($A_{m\acute{a}x}$) $0,03m^2$, $1m^2$ e $10m^2$, da função Heaviside H em relação a área A . O mesmo valor de β foi atribuído para as três situações. $A_{m\acute{a}x} = 0,03m^2$, apresenta a curvatura semelhante a função *Heaviside* original.

Figura 17 - Curvas da função *Heaviside* regularizada de acordo com os valores escolhidos para a área máxima.



Fonte: Rosa (2021).

2.4 OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA COM VARIÁVEIS DISCRETAS

Normalmente, a otimização estrutural é realizada com variáveis de projeto contínuas. A adoção de variáveis contínuas, em geral, simplifica o problema e permite o uso de técnicas numéricas eficientes de otimização. Técnicas de fabricação digital, como manufatura aditiva, permitem o design personalizado de estruturas feitas de componentes não padronizados. No entanto, a construção convencional é tipicamente restrita a conjuntos padronizados de seções transversais discretas (vigas I, L, T, ocas, etc), tornando assim, as variáveis de projeto discretas, o que levou ao desenvolvimento da otimização topológica com variáveis discretas, conforme Ohsaki e Katoh (2005).

John, Ramakrishnan e Sharma (1987) analisaram o projeto de treliças espaciais utilizando Programação Linear Sequencial com restrições de flambagem. O problema de minimização do peso é analisado inicialmente com variáveis contínuas e, após a convergência, as áreas discretas são selecionadas na vizinhança do problema contínuo. Entretanto, o autor destaca que para os casos analisados, as áreas selecionadas no conjunto discreto são sempre maiores, quando comparado com o resultado contínuo.

Rajeev e Krishnmoorthy (1992) propuseram a otimização de treliças planas e espaciais com variáveis discretas. Os autores transformaram um problema restrito em um problema irrestrito, através de uma formulação baseada na violação das restrições, tornando possível a utilização dos Algoritmos Genéticos (AG), como método de otimização. Bennage e Dhingra (1995) apresentaram uma otimização topológica não linear com variáveis discretas de estruturas treliçadas planas. A abordagem considera múltiplos casos de carga, restrições de tensão, deslocamento e flambagem local/global.

Lemonge e Barbosa (2004) propuseram um esquema de penalidade adaptativa para Algoritmos Genéticos com restrição de tensão e deslocamentos. A otimização tem como objetivo a minimização do peso e, para tal, foram consideradas variáveis contínuas e discretas. Os coeficientes de penalidade são adaptativos e são calculados com base na média da função objetivo e no nível de violação de cada restrição. Os autores avaliaram o problema de minimização de peso em treliças de 10, 25, 52 e 72 barras, comparando-os com estudos similares disponíveis na literatura.

Stolpe (2016) fornece uma extensa revisão envolvendo métodos de otimização com variáveis discretas. Métodos meta-heurísticos e estocásticos como algoritmos genéticos, recozimento simulado, otimização de colônia de formigas e otimização de enxame de partículas foram considerados. As desvantagens típicas dos algoritmos meta-

heurísticos correspondem ao grande número de análises estruturais necessárias para alcançar a convergência.

Brutting et. al (2020) apresentaram um método de concepção de estruturas reticuladas planas com impacto ambiental mínimo, feito com a combinação de elementos novos e reaproveitáveis. A formulação adotada pelos autores é baseada em uma combinação de avaliação do Ciclo de Vida (LCA) e Programação Linear Inteira Mista (MILP). As restrições de tensão e deslocamento são consideradas para análise do estudo.

Brütting, Senatore e Fivet (2022) apresentaram uma otimização topológica discreta de estruturas treliçadas planas e espaciais formulados com o problema de Programação Linear Inteira Mista (MILP). São aplicadas restrições de tensão e deslocamento para dois casos de carga com o intuito de minimizar o volume da estrutura.

Recentemente Hongjia e Yi (2023) analisaram o processo de otimização de layout e topologia de estruturas treliçadas planas e espaciais. Os autores propuseram um pós-processamento da estrutura com o intuito de limitar/padronizar os elementos. A etapa de pós-processamento é iniciada com a convergência da otimização de layout e topologia. Nessa etapa, são definidos os parâmetros de agrupamento para as áreas e comprimentos. Para tal, são considerados dois problemas: no primeiro, os autores definiram que barras do mesmo tipo apresentam mesma área de seção transversal; no segundo, além das áreas os elementos compartilham o mesmo comprimento. Em termos práticos, os autores apresentam uma metodologia que possibilita ao projetista definir a quantidade de “perfis” (e/ou grupos de comprimentos) que serão utilizados na estrutura.

3 FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS ENVOLVENDO REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE E VARIÁVEIS MISTAS

Este capítulo apresenta uma formulação unificada para os problemas de otimização estudados. Inicialmente, é apresentada a estratégia de otimização do problema de redução da complexidade com variáveis contínuas, com ênfase em estruturas tridimensionais. Depois, aborda-se o problema de otimização de layout, topologia e fatores de fixação com variáveis mistas, tendo como base os estudos de Rosa (2021). Finalmente, apresenta-se uma formulação que unifica os dois problemas anteriores. Todos os problemas apresentam restrições de deslocamentos e comprimento mínimo.

A estratégia adotada para o tratamento de variáveis mistas e o desenvolvimento do equacionamento adequado para o cálculo das propriedades geométricas do elemento para a otimização de topologia são apresentados na seção 3.2. O problema linearizado por programação linear sequencial mista e as sensibilidades são apresentados, posteriormente, nas seções 3.4 e 3.5, respectivamente. O processo do algoritmo de otimização é explicitado em um fluxograma, seguido da estratégia adotada para os limites móveis e os critérios de convergência considerados (seção 3.6).

3.1 OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT E TOPOLOGIA COM REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE – TODAS AS VARIÁVEIS CONTÍNUAS E FATORES DE FIXAÇÃO CONSTANTES

O primeiro problema apresentado por Rosa (2021), trata da otimização de layout e topologia de estruturas planas com minimização do custo de manufatura e aproximação contínua da função *Heaviside* (todas as variáveis de projeto contínuas). O presente estudo, expande a análise para estruturas tridimensionais. A função objetivo é escrita da seguinte forma

$$W(A, X, Y, Z) = \sum_{i=1}^{nel} c_{w_i} \rho_i A_i L_i + c_{F_i} H_{1_i} H_{2_i}, \quad (24)$$

$$H_{1_i}(A_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta_1 A_i}{A_{máx}}} \right) + \frac{A_i}{A_{máx}} e^{-\beta_1}, \quad (25)$$

$$H_{2i}(L_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta_2 L_i}{L_{m\acute{a}x}}}\right) + \frac{L_i}{L_{m\acute{a}x}} e^{-\beta_2}, \quad (26)$$

onde i representa o elemento atual analisado, nel é o número de elementos, H_{1i} e H_{2i} representam a aproximação contínua da função *Heaviside* aplicada sobre as áreas e comprimentos dos elementos, respectivamente. c_w é o custo monetário do material por unidade de massa, $A_{m\acute{a}x}$ e $L_{m\acute{a}x}$ representam a área e o comprimento máximo para normalização dos elementos, respectivamente. β_1 e β_2 são os parâmetros que definem a curvatura da função *Heaviside* para as áreas e comprimentos dos elementos. Nesta abordagem o custo monetário por unidade de conexão c_F é considerado como uma constante.

A função *Heaviside* serve para determinar se um elemento existe ou não. Caso exista, há um custo adicional de fabricação das conexões associados a este. O último termo da equação (24), serve como um fator de penalização na função objetivo, ou seja, quanto mais caro for o custo de fabricação de uma conexão, maior será a tendência do algoritmo em reduzir o número de elementos.

O primeiro caso, tem como restrições de projeto os deslocamentos e comprimento mínimo, definido por

$$\text{Minimize} \quad \frac{W}{W_{SF}}(A, X, Y, Z), \quad (27)$$

$$t. q \quad -\frac{U_d^{LC}}{|U_{ld}|} + 1.0 \leq 0, \quad (28)$$

$$\frac{U_d^{LC}}{|U_{Ud}|} - 1.0 \leq 0, \quad (29)$$

$$-\frac{L_i}{L_L} + 1.0 \leq 0, \quad (30)$$

onde W_{SF} é o valor da função objetivo no ponto inicial, o índice d está relacionado com as restrições de deslocamento, o índice i representa o i – ésimo elemento, U_{ld} e U_{Ud} são parcelas referentes aos limites inferior e superior das restrições de deslocamento e L_L é o limite inferior do comprimento dos elementos. LC representa o número de casos de carga.

3.2 OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT, TOPOLOGIA E FATORES DE FIXAÇÃO - VARIÁVEIS DE PROJETO MISTAS

O segundo problema apresentado inicialmente por Faria (2019a) refere-se à otimização de layout e fatores de fixação, com variáveis de projeto contínuas. Rosa (2021) avaliou o mesmo problema, mas considerou as áreas dos elementos como variáveis discretas e as coordenadas nodais e os fatores de fixação como variáveis contínuas, formulando o problema com variáveis mistas. Esta pesquisa, amplia os estudos de Rosa (2021) incluindo ao problema de variáveis mista uma otimização de topologia. A função objetivo é escrita por

$$W(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{nel} c_{w_i} \rho_i A_i L_i + c_{F_i}, \quad (31)$$

$$c_{F_i}(\alpha_c) = \sum_{c=1}^4 (V_0 + V_1 \alpha_c + V_2 \alpha_c^2) c_{w_i} \rho_i A_i L_i, \quad (32)$$

onde i representa o elemento atual analisado, nel é o número de elementos, c_{w_i} é o custo do material por massa ($R\$/Kg$), ρ_i é a densidade do material, A_i e L_i representam a área e comprimento do elemento, respectivamente. $c_{F_i}(\alpha_c)$ é uma função do custo de manufatura em cada unidade de conexão, o índice c refere-se aos fatores de fixação. α representa a rigidez da conexão que pode assumir os valores entre $\alpha = 0,01$ (conexões flexíveis) e $\alpha = 0,99$ (conexões rígidas).

Os coeficientes V_0 , V_1 e V_2 que definem uma curvatura quadrática na variação do custo adicional de conexões, delimitado por conexões em pinos AC_p e totalmente rígidas AC_r . Faria (2019a) descreve que normalmente o custo das conexões rígidas são mais caras em relação às conexões em pino. Entretanto, não há publicações sobre o valor exato a ser considerado para a variação quadrática desses valores. Assim, o autor apresentou parâmetros para definir uma função de variação quadrática dos custos genérica, e bem definida, que pode ser utilizada na otimização por métodos baseados em gradiente.

Para definir os coeficientes da curvatura quadrática, na variação do custo adicional das conexões, Faria (2019a) utilizou a informação de dois pontos (AC_p e AC_r) e uma derivada localizada no ponto do custo adicional de conexões em pino

$$\left. \frac{\partial AC_p}{\partial \alpha_c} \right|_{\alpha_c=0} = 0. \quad (33)$$

A Figura 11, apresentada na seção 2.2, ilustra o comportamento da função quadrática dos custos adicionais das conexões com coeficientes escritos por

$$V_0 = \frac{AC_p}{4}, \quad (34)$$

$$V_1 = 0, \quad (35)$$

$$V_2 = \frac{1}{4}(AC_r - AC_p). \quad (36)$$

O problema de otimização tem como restrições de projeto os deslocamentos e comprimento mínimo dos elementos, definido por

$$\text{Minimize} \quad \frac{W}{W_{SF}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (37)$$

$$t. q \quad -\frac{u_d^{LC}}{|u_{ld}|} + 1.0 \leq 0, \quad (38)$$

$$\frac{u_d^{LC}}{|u_{ud}|} - 1.0 \leq 0, \quad (39)$$

$$-\frac{L_i}{L_L} + 1.0 \leq 0, \quad (40)$$

onde W_{SF} é o valor da função objetivo no ponto inicial, o índice d está relacionado com as restrições de deslocamento, o índice i representa o i – ésimo elemento, u_{ld} e u_{ud} são parcelas referentes aos limites inferior e superior das restrições de deslocamento e L_L é o limite inferior do comprimento dos elementos. LC representa o número de casos de carga.

3.2.1 Tratamento de variáveis mistas na otimização de layout e topologia

Rosa (2021) apresentou em seus estudos os equacionamentos para otimização de layout com variáveis mistas. A formulação proposta no presente trabalho tem como base o desenvolvimento de Rosa (2021), mas incluindo a possibilidade de eliminar barras, assim, alterando a topologia. A otimização de layout com variáveis mistas, atribui um conjunto discreto de áreas padronizadas com base em catálogos comerciais. No trabalho de Rosa (2021) a menor área deste conjunto discreto tem valor não nulo, portanto nunca

há alteração de topologia. Na extensão aqui proposta é introduzida uma área, numericamente igual a zero, fazendo com que se tenha uma otimização topológica-discreta. Podem ser incluídas, no processo de otimização, variáveis contínuas (coordenadas e fatores de fixação, por exemplo), além das variáveis discretas. Assim, o problema de otimização de layout e topologia é caracterizado pelas variáveis mistas.

Inicialmente, no problema de variáveis mistas, são organizadas as variáveis de projeto em um vetor

$$\{\mathbf{X}\} = \left\{ \begin{matrix} \{\mathbf{x}_d\} \\ \{\mathbf{x}_c\} \end{matrix} \right\}, \quad (41)$$

onde $\{\mathbf{x}_d\}$ e $\{\mathbf{x}_c\}$ representam as variáveis discretas e contínuas, respectivamente. O conjunto de variáveis discretas e contínuas são representados

$$\{\mathbf{x}_d\} = \left\{ \begin{matrix} \{\mathbf{x}_1\} \\ \{\mathbf{x}_2\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{x}_{nd}\} \end{matrix} \right\}, \quad (42)$$

$$\{\mathbf{x}_c\} = \left\{ \begin{matrix} x_{nd+1} \\ x_{nd+2} \\ \vdots \\ x_{nd+nc} \end{matrix} \right\}, \quad (43)$$

onde nd e nc são o número de variáveis discretas e contínuas, respectivamente. Para cada variável discreta, poderá ser atribuído um valor de área contido em um conjunto $\mathbf{S}$ de possibilidades, por exemplo

$$\mathbf{S} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, \dots, D_l\}. \quad (44)$$

Para incluir a possibilidade de eliminar um elemento, incluímos um zero numérico como valor mínimo, aumentando o conjunto para

$$\mathbf{S}_0 = \{0, D_1, D_2, D_3, D_4, \dots, D_l\}. \quad (45)$$

Ao longo do processo de otimização, cada variável discreta será representada pelo seu valor corrente no conjunto e seus vizinhos imediatamente inferior e superior. Assim, se na n -ésima iteração a variável x_i tiver atribuído o valor D_3 , definimos $d_{i1} = D_2$, $d_{i2} = D_3$ e $d_{i3} = D_4$, isto é

$$\mathbf{s}_0 = \left\{ 0, D_1, \underbrace{D_2}_{d_{i1}}, \underbrace{D_3}_{d_{i2}}, \underbrace{D_4}_{d_{i3}}, \dots, D_l \right\}. \quad (46)$$

Assim, em cada iteração do processo de otimização as variáveis discretas são transformadas por

$$x_i = y_{i1}d_{i1} + y_{i2}d_{i2} + y_{i3}d_{i3} = \{\mathbf{d}_i\}^T \{\mathbf{y}_i\}, \quad i = 1, \dots, nd, \quad (47)$$

onde $\{\mathbf{d}_i\}$ é o vetor das seções transversais discretas associadas à variável x_i . Isto significa, que as áreas padronizadas por meio de catálogos comerciais e a área numericamente igual a zero, que possibilita a otimização de topologia, são encontradas no vetor $\{\mathbf{d}_i\}$. d_{i2} é o valor corrente, d_{i1} e d_{i3} são os valores adjacentes inferior e superior do conjunto discreto (para a variável corrente d_{i2}), respectivamente.

$$\{\mathbf{d}_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \end{Bmatrix}, \quad (48)$$

onde $\{\mathbf{y}_i\}$ é o vetor das variáveis de transformação

$$\{\mathbf{y}_i\} = \begin{Bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ y_{i3} \end{Bmatrix}. \quad (49)$$

As variáveis de transformação y_{i1} , y_{i2} e y_{i3} são binárias e podem assumir apenas os valores 0 ou 1. Para que somente um valor do conjunto discreto de possibilidades seja atrelada a cada variável discreta, somente uma das variáveis y_{ik} pode assumir o valor 1. O vetor de variáveis de projeto é transformado de acordo com o vetor de variáveis de projeto binárias

$$\{\mathbf{x}_d\} = \{\mathbf{x}_d(\mathbf{y})\}. \quad (50)$$

O vetor das variáveis de transformação pode ser representado por

$$\{\mathbf{y}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{y}_1\} \\ \{\mathbf{y}_2\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{y}_{nd}\} \end{Bmatrix}, \quad (51)$$

onde cada $\{\mathbf{y}_i\}$ é dado pela equação (49).

Com isso, o vetor de variáveis de projeto pode ser reescrito como

$$\{\mathbf{X}\} = \left\{ \begin{matrix} \{\mathbf{y}\} \\ \{\mathbf{x}_c\} \end{matrix} \right\}. \quad (52)$$

Para que apenas uma variável do conjunto discreto seja acessada, devem ser impostas novas restrições para cada variável de projeto discreta $\{\mathbf{x}_d\}$, logo

$$\begin{aligned} g_{nr+1} &= y_{11} + y_{12} + y_{13} - 1 = 0, \\ g_{nr+2} &= y_{21} + y_{22} + y_{23} - 1 = 0, \\ &\vdots \\ g_{nr+nd} &= y_{ndk} + y_{ndk} + y_{ndk} - 1 = 0, \quad k = 1, 2, 3. \\ y_{ndk} &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (53)$$

onde nr é o número de restrições originais do problema, e g_{nr+1} até g_{nr+nd} são as restrições relacionadas às variáveis discretas. Assim, pode-se estabelecer o seguinte problema de otimização

$$\text{Min } W(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y}, \mathbf{x}_c), \quad (54)$$

$$\text{tq } h_k(\mathbf{x}) = h_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}_c) = 0, \quad k = 1, \dots, n_{ri}, \quad (55)$$

$$g_k(\mathbf{x}) = g_k(\mathbf{y}, \mathbf{x}_c) \leq 0, \quad k = n_{ri+1}, n_{ri+2}, \dots, n_{ri+n_{rd}}, \quad (56)$$

$$h_k(\mathbf{y}) = y_{ki} + y_{ki} + y_{ki} - 1 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (57)$$

$$k = n_{r+1}, n_{r+2}, \dots, n_{r+nd}, \quad n_r = n_{ri} + n_{rd}, \quad (58)$$

$$y_{ki} \in \{0, 1\} \quad (59)$$

onde $h_k(\mathbf{x})$ representa as restrições de igualdade, $g_k(\mathbf{x})$ indica as restrições de desigualdade, n_{ri} , n_{rd} são o número de restrições de igualdade e desigualdade, n_r é o número de restrições originais do problema e nd representa as restrições relacionadas com as variáveis discretas, $h_j(\mathbf{y})$ representa o conjunto de restrições que converte uma variável contínua em discreta, sendo y_{jk} binários. A solução para o tratamento de variáveis binárias y_{jk} é empregado no *software* LpSolve, que trabalha com o método *Branch and Bound*.

Ao avaliar o custo computacional, torna-se mais caro solucionar um problema discreto-misto do que um contínuo. Isso ocorre, pois, para solucionar o problema discreto utilizando o método, por exemplo, *Branch and Bound* são calculados problemas adicionais. Portanto, para otimizar o custo computacional, inicialmente é solucionado o

problema contínuo (todas as variáveis de projeto contínuas). Considera-se que o ótimo discreto esteja na vizinhança do ótimo contínuo. Uma vez resolvido o problema contínuo, pode-se então resolver o problema discreto-misto. Desta forma, o número de iterações necessárias para a convergência do problema discreto-misto, é significativamente reduzida. Um aspecto importante da estratégia adotada na otimização de topologia está relacionado aos limites inferiores e superiores das áreas. Esses limites, devem ser iguais para o problema contínuo e misto. De maneira geral, os limites adotados para o conjunto discreto da equação (46), utilizados na otimização mista, são os mesmos para o problema com variáveis contínuas.

3.2.2 Cálculo do momento de inércia para seções circulares vazadas e maciças

Durante o processo de otimização é necessário atualizar as propriedades geométricas para o cálculo adequado da rigidez. Considerando que os elementos apresentam espessura constante, na otimização de topologia, não se deve considerar essa geometria durante todo o processo de otimização. Isso está relacionado ao fato do diâmetro interno diminuir significativamente até tornar-se uma seção maciça. Logo, é necessário utilizar um equacionamento adequado que contabilize as propriedades geométricas da seção vazada e maciça, respectivamente.

O elemento de seção circular vazada idealizado por Faria (2019a) é apresentado na Figura 18 com as características geométricas do elemento no eixo $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$ local. A área e a espessura são indicadas por A e t , respectivamente. I é o momento de inércia e J é o momento de inercia polar. R e R_m são o raio externo e o raio médio, respectivamente, e podem ser calculados por meio das expressões

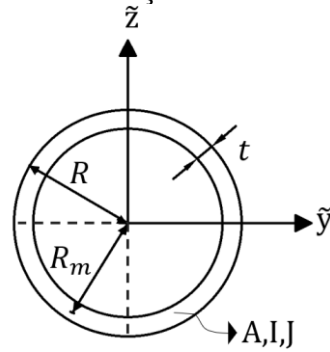
$$A = 2\pi t R_m, \quad (60)$$

$$R = \frac{(A + \pi t^2)}{2\pi t}, \quad (61)$$

$$R_m = R - \frac{t^2}{2}, \quad (62)$$

$$I = \pi t R_m^3, \quad (63)$$

Figura 18 – Elemento de seção transversal circular tubular.



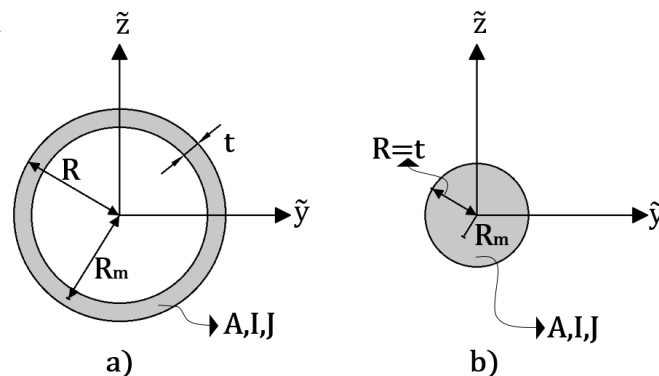
Fonte: Faria (2019a).

$$J = 2I. \quad (64)$$

Como mencionado anteriormente, ao diminuir a área da seção transversal, há uma transição da seção vazada para a seção maciça. Para compreendermos o desenvolvimento, considere a Figura 19. Na Figura 19 a), tem-se a representação do elemento vazado de espessura constante, proposto por Faria (2019a). É possível observar que, considerando a espessura constante, uma diminuição na área do elemento ocasiona uma diminuição nos raios interno e externo (R). Quando o raio interno vai a zero, nesse instante temos a transição do elemento vazado para um elemento maciço, Figura 19 b). Portanto, os cálculos das propriedades geométricas do elemento passam a ser de uma seção maciça e a expressão (63) se torna inadequada, uma vez que esta corresponde a uma simplificação para seção transversal circular tubular.

O desenvolvimento do equacionamento unificado das propriedades geométricas é desenvolvido para a área (A), momento de inércia (I) e momento de inércia polar (J). Para simplificar o desenvolvimento, vamos considerar que o raio externo R será igual à espessura t quando a seção for maciça

Figura 19 – Elemento com seção circular vazada e maciça.



Fonte: O autor (2023).

$$R_i = t_i, \quad (65)$$

$$R_{m_i} = \frac{R_i}{2}, \quad (66)$$

onde, R refere-se ao raio externo e i vai de um até o número de elementos. Substituindo as equações (65) e (66) na equação (60), obtemos:

$$A_i = \pi R_i^2, \quad (67)$$

dessa forma, quando o raio externo for igual à espessura, o cálculo da área do elemento (A) estará correto para a seção maciça. Sabe-se que a equação (63) apresentada, para o cálculo da inércia (I), por Faria (2019a) é aproximada. A equação aproximada é válida para elementos que apresentam uma espessura pequena em comparação com o raio. Para permitir que a área de um elemento seja projetada a zero faz-se necessário apresentar o equacionamento completo, escrito por

$$I_i = \pi t_i R_{m_i}^3 + \frac{\pi R_{m_i} t_i^3}{4}, \quad (68)$$

o desenvolvimento completo da equação (68) encontra-se no anexo A. Substituindo as equações (65) e (66) na equação (68), obtemos a inércia da seção maciça

$$I_i = \frac{\pi R_i^4}{4}. \quad (69)$$

Por consequência, o cálculo do momento de inércia polar (J) também estará adequado à seção maciça

$$J_i = 2I_i = \frac{\pi R_i^4}{2}. \quad (70)$$

Ao considerar as equações (65), (66) e o segundo termo da equação (68) é possível avaliar um elemento de seção maciça e/ou vazada. Sendo assim, pode-se incluir uma otimização de topologia com a projeção da área de alguns elementos para um valor numérico relativamente pequeno (apenas para evitar singularidade na matriz).

3.3 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO UNIFICADO

Os problemas apresentados nas seções 3.1 e 3.2 podem ser unificados pela função objetivo

$$W(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{nel} (1 + c_{F_{1i}}) c_{w_i} \rho_i A_i L_i + c_{F_{2i}} H_{1i} H_{2i}, \quad (71)$$

onde,

$$c_{F_{1i}}(\alpha_c) = \sum_{c=1}^4 (V_0 + V_1 \alpha_c + V_2 \alpha_c^2) \quad (72)$$

$$H_{1i}(A_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta_1 A_i}{A_{m\acute{a}x}}}\right) + \frac{A_i}{A_{m\acute{a}x}} e^{-\beta_1}, \quad (73)$$

$$H_{2i}(L_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta_2 L_i}{L_{m\acute{a}x}}}\right) + \frac{L_i}{L_{m\acute{a}x}} e^{-\beta_2}, \quad (74)$$

Para o caso do problema com variáveis mistas (seção 3.2) considera-se que $c_{F_2} = 0$ e $c_w = 1$. Este problema avalia inicialmente que todas as variáveis de projeto são contínuas (áreas, coordenadas e fatores de fixação). Após a convergência do problema contínuo é iniciada otimização com variáveis mistas. No problema misto, as áreas são atribuídas com base em um conjunto discreto de possibilidades, que incluem uma área nula, e as demais variáveis de projeto são contínuas (coordenadas e fatores de fixação).

No caso do problema de redução da complexidade, apresentado na seção 3.1, deve-se estabelecer $c_{F_1} = 0$, $c_w = 1$ e desconsiderar os fatores de fixação α como variáveis de projeto. Neste problema, as variáveis de projeto são contínuas (áreas e coordenadas nodais) e o c_{F_2} é constante.

Ambos os problemas apresentam restrições de deslocamentos e comprimento mínimo. Na forma normalizada padrão, temos

$$\text{Minimize} \quad \frac{W}{W_{SF}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (75)$$

$$t. q \quad -\frac{u_d^{LC}}{|u_{td}|} + 1.0 \leq 0, \quad (76)$$

$$\frac{u_d^{LC}}{|u_{ud}|} - 1.0 \leq 0, \quad (77)$$

$$-\frac{L_i}{L_L} + 1.0 \leq 0, \quad (78)$$

onde W_{SF} é o valor da função objetivo no ponto inicial, o índice d está relacionado com as restrições de deslocamento, o índice i representa o i – ésimo elemento, $\mathbf{U}_{ld}$ e $\mathbf{U}_{ud}$ são parcelas referentes aos limites inferior e superior das restrições de deslocamento e L_L é o limite inferior do comprimento dos elementos. LC representa o número de casos de carga.

3.4 PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL MISTA

O problema não linear apresentado nas equações (54) a (57) pode ser resolvido de várias formas. Neste trabalho é empregada a abordagem de programação linear sequencial mista e o problema linearizado torna-se

$$\text{Min } W(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 y_{ij} d_{ij} - x^0_i \right) + \sum_{i=nd+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x^0_i), \quad (79)$$

$$t.q \ h_k(x) = h_k(x^0) + \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 y_{ij} d_{ij} - x^0_i \right) + \sum_{i=nd+1}^n \frac{\partial h_k}{\partial x_i} (x_i - x^0_i) = 0, \quad (80)$$

$$k = 1, \dots, n_{ri}$$

$$g_k(x) = g_k(x^0) + \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 y_{ij} d_{ij} - x^0_i \right) + \sum_{i=nd+1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i} (x_i - x^0_i) \leq 0, \quad (81)$$

$$k = n_{ri} + 1, \dots, n_{ri} + n_{rd}$$

$$h_k(y) = y_{ki} + y_{ki} + y_{ki} - 1 = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (82)$$

$$k = n_{ri} + n_{rd} + 1, \dots, n_{ri} + n_{rd} + nd$$

$$y_{ndk} \in \{0, 1\} \quad (83)$$

onde nd é o número de variáveis discretas, nc é o número de variáveis contínuas e n é o número total de variáveis de projeto ($n = nd + nc$). n_{rd} é o número de restrições de desigualdade e n_{ri} é o número de restrições de igualdade. $W(x)$ é a função objetivo, $h(x)$ indica as restrições de igualdade, $g(x)$ as restrições de desigualdade e $h(y)$ as restrições adicionais das variáveis de transformação y .

Desconsiderando as variáveis de projeto discretas ($nd = 0$) o problema de otimização mista torna-se um problema de variáveis contínuas. Logo, a linearização apresentada pode ser utilizada no problema contínuo e misto. Ambos os problemas são resolvidos no *software* LpSolve.

3.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

No campo da otimização, dentre os mais distintos tipos de métodos que existem, duas classes se destacam: métodos baseados em gradiente e métodos livres de derivadas. Métodos baseados em gradiente são especificamente aplicáveis a problemas contínuos e continuamente diferenciáveis. Logo, faz-se necessário determinar os gradientes da função objetivo e de suas restrições de projeto. Métodos baseados em gradientes só garantem a convergência para mínimos locais, mas apresentam ganho em eficiência computacional em comparação com métodos combinatórios. Com isso, a quantidade de avaliação das funções do problema é reduzida. (ARORA, 2011).

Portanto, o método de otimização de programação linear sequencial necessita da informação dos gradientes que convertem qualquer problema não linear em uma sequência de problemas lineares que podem ser resolvidos iterativamente por qualquer método de programação linear como o método simplex, por exemplo.

A análise de sensibilidade desenvolvida para as funções e restrições é a sensibilidade analítica e foi validada por diferenças finitas centrais. O desenvolvimento dessas sensibilidades, encontram-se nos trabalhos de Faria (2019); Cardoso, Muñoz-Rojas e Cardoso (2007) e Muñoz-Rojas (2000). Devido às modificações introduzidas neste trabalho para possibilitar a alteração da topologia da estrutura, há que modificar o cálculo da sensibilidade da matriz de rigidez em relação às áreas, em consonância com o apresentado no item 3.2.2.

3.5.1 Sensibilidade relacionada às áreas

Além da correção das propriedades geométricas do elemento (área e inércia) na matriz de rigidez, apresentada no item 3.2.2, faz-se necessário aplicar a correção ao cálculo das sensibilidades. As sensibilidades corrigidas, com adição do segundo termo da equação (68), aparecem no cálculo dos deslocamentos nodais. Os deslocamentos nodais, podem ser obtidos pelo método dos elementos finitos (MEF), através da resolução numérica da equação de equilíbrio

$$\mathbf{K}_g \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (84)$$

sendo que $\mathbf{K}_g$ é a matriz de rigidez global, $\mathbf{U}$ é o vetor dos deslocamentos globais e $\mathbf{F}$ é o vetor de carregamento global. Partindo da derivada da equação de equilíbrio (84), em

relação a uma variável de projeto qualquer, chega-se novamente a um sistema linear na forma

$$\mathbf{K}_g \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial v_{p_j}} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v_{p_j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_g}{\partial v_{p_j}} \mathbf{U} \right), \quad (85)$$

sendo que a sensibilidade de $\mathbf{F}$ é nula no caso de carregamento externo puramente nodal e j vai de um até a j – ésima variável de projeto. A matriz de rigidez global $\mathbf{K}_g$ pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_g = \Lambda_{i=1}^{nel} \mathbf{K}_i \quad (86)$$

onde nel é o número total de elementos e Λ é o operador de montagem da matriz de rigidez global. A matriz de rigidez do elemento rotacionada no sistema global é escrita por

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_{e_i} \mathbf{T}_i, \quad (87)$$

onde $\mathbf{T}_i$ é a matriz de transformação que mapeia o elemento para o sistema de referência global e $\mathbf{K}_e$ é a matriz de rigidez para o i –ésimo elemento. Logo, a sensibilidade da matriz de rigidez indicada pelo segundo termo após a igualdade na equação (85) é escrita por

$$\frac{\partial \mathbf{K}_g}{\partial v_{p_j}} = \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial v_{p_j}} \mathbf{K}_{e_i} \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}}{\partial v_{p_j}} \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^T \mathbf{K}_{e_i} \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial v_{p_j}}. \quad (88)$$

Considerando que as variáveis de projeto são às áreas dos elementos e que a matriz de transformação não depende das áreas, a sensibilidade da matriz de rigidez global é escrita por

$$\frac{\partial \mathbf{K}_g}{\partial A_j} = \mathbf{T}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}}{\partial A_j} \mathbf{T}_i, \quad (89)$$

é importante observar que a sensibilidade da equação (89) é válida apenas para a seção circular vazada. A sensibilidade da matriz de rigidez global $\mathbf{K}_g$ é obtida através da sensibilidade da matriz de rigidez local $\mathbf{K}_e$ pela multiplicação das matrizes de transformação, conforme indicado na equação (89). A sensibilidade $\frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}}{\partial A_j}$ pode ser obtida separadamente para cada termo da matriz $\mathbf{K}_e$.

Os termos que sofreram alteração na matriz de rigidez $\mathbf{K}_e$, e apresentam as sensibilidades corrigidas, são os b_i associados aos planos de flexão x, y e x, z e os o_i associados à torção. Nesta etapa, é importante recordar as equações (8) e (9).

As inércias podem ser escritas em função da área,

$$I_i = \pi t_i R_{m_i}^3 + \frac{\pi R_{m_i} t_i^3}{4} = \frac{A_i t_{esp_i}^2}{8} + \frac{A_i^3}{8\pi^2 t_i^2}, \quad (90)$$

$$J_i = 2I_i = \frac{A_i t_i^2}{4} + \frac{A_i^3}{4\pi^2 t_i^2}, \quad (91)$$

então, a sensibilidade de b_i (associados à flexão nos planos (x, y) e (x, z)) em relação à área é escrita por

$$\frac{\partial b_i}{\partial A_j} = \frac{E_i}{L_i^3} f_c^d \frac{\partial}{\partial A_j} \left(\frac{A_i t_i^2}{8} + \frac{A_i^3}{8\pi^2 t_i^2} \right), \quad (92)$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial A_j} = \frac{E_i(\pi^2 t_i^4 + 3A_i^2)}{8L_i^3 \pi^2 t_i^2} f_c^d \delta_{ij}. \quad (93)$$

A sensibilidade dos termos o_i , associados à torção é escrita como

$$\frac{\partial o_i}{\partial A_j} = \frac{G_i}{L_i} \frac{\partial}{\partial A_j} \left(\frac{A_i t_i^2}{4} + \frac{A_i^3}{4\pi^2 t_i^2} \right), \quad (94)$$

$$\frac{\partial o_i}{\partial A_j} = \frac{G_i(\pi^2 t_i^4 + 3A_i^2)}{4L_i \pi^2 t_i^2} \delta_{ij}. \quad (95)$$

Os termos b_i e o_i do elemento i só possuem sensibilidade em relação à área A_i . Não há sensibilidade de K_{e_i} perante perturbações em áreas de outros elementos, por isso o delta de Kronecker δ_{ij} .

3.6 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

A sequência do algoritmo de otimização utilizada no trabalho pode ser vista no fluxograma da Figura 20. Note-se que, como algoritmo de otimização, entende-se o conjunto de três etapas: análise (método dos elementos finitos), cálculo de sensibilidade e rotina de programação matemática. Este algoritmo foi desenvolvido inicialmente por Faria (2019) na linguagem Fortran utilizando a rotina de programação linear (DLPRS da

biblioteca numérica IMSL do Fortran). Posteriormente, Rosa (2021) utilizou as rotinas desenvolvidas em Fortran e substituiu a rotina (DLPRS) pelo *software* externo Lpsolve para a otimização com variáveis mistas. A escolha do *software* Lpsolve é justificada pela ausência de rotinas de programação linear inteira mista na biblioteca numérica do Fortran.

O algoritmo de otimização apresenta duas partes: (i) otimização com variáveis contínuas e (ii) otimização com variáveis mistas. O problema de redução da complexidade (variáveis contínuas) é resolvido com base na primeira parcela (i). O problema de otimização de layout, topologia e fatores de fixação (variáveis mistas) é composto pelas duas parcelas (i) e (ii). Sendo assim, a primeira etapa (i) é comum para ambos os problemas.

i) Otimização com variáveis contínuas

Inicialmente, o algoritmo faz a leitura dos dados do problema (como por exemplo, condições de contorno, função objetivo, propriedades mecânicas e geométricas, número de variáveis de projeto e coeficientes referentes aos limites móveis). Após a leitura dos dados, são calculados a matriz de rigidez global e os deslocamentos pelo método dos elementos finitos.

Como o método de otimização é baseado em gradientes, faz-se necessário o cálculo das derivadas. Lineariza-se a função objetivo e as restrições através do truncamento no primeiro termo da série de Taylor. Após calcular a sensibilidade, faz-se a montagem do problema de otimização e a preparação de dados para o *software* externo LpSolve, um programa de acesso livre. Caso o critério de convergência não seja atingido, as variáveis de projeto e os limites móveis são atualizados e as propriedades da seção transversal são recalculadas e tem-se uma continuação do processo iterativo. Vale destacar que, para cada iteração, os resultados são impressos, permitindo o monitoramento em tempo real dos resultados.

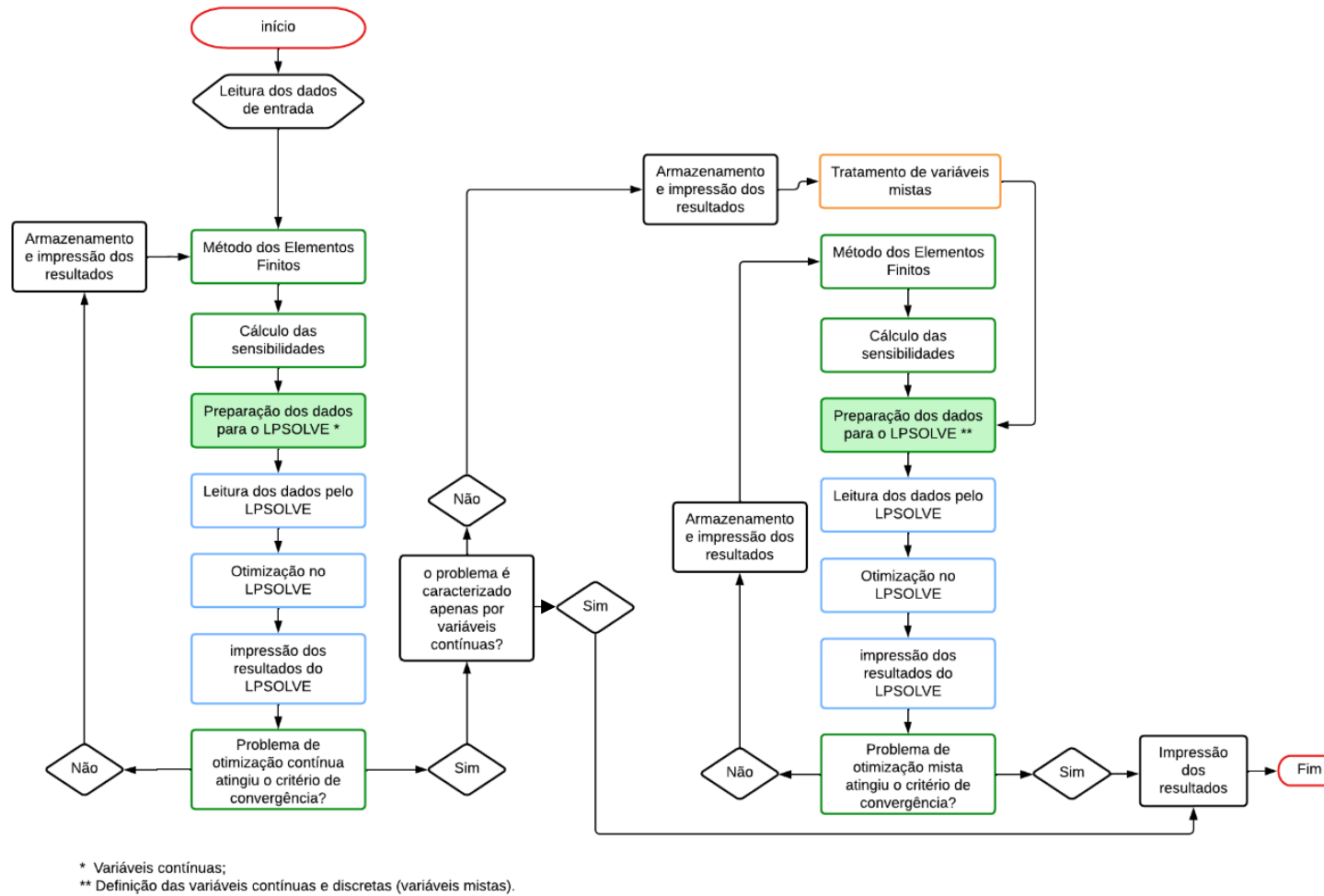
Caso o critério de convergência para o problema de variáveis contínuas (redução da complexidade) seja atingido o algoritmo imprime os resultados e finaliza o processo de otimização. Se o critério de convergência for atingido e o problema for de variáveis mistas, o algoritmo segue para a etapa (ii).

ii) Otimização com variáveis mistas

No processo de otimização com variáveis mistas é utilizado o resultado da otimização contínua. Esse resultado é importante para definir quais áreas do conjunto discreto serão utilizadas (método *Branch and Bound*). A função objetivo e as restrições são reescritas com as modificações para análise de variáveis mistas de acordo com a seção 3.2.1 e com as equações (54) a (57). Após a preparação do problema misto, é realizada a impressão do arquivo para a leitura e otimização no LpSolve (a etapa de preparação/integração do algoritmo de otimização com o LpSolve pode ser melhor compreendida no trabalho de Rosa (2021) ou consultada no Anexo B). Após realizar a otimização no LpSolve, os resultados são impressos e o algoritmo faz a leitura e avalia se o critério de convergência foi atingido.

Caso o critério de convergência não seja atingido, as variáveis de projeto são atualizadas e as propriedades da seção transversal são recalculadas e tem-se uma continuação do processo iterativo. Caso o critério de convergência seja atingido, os resultados são impressos e o algoritmo de variáveis mistas finaliza o processo de otimização.

Figura 20 – Fluxograma referente ao algoritmo de otimização.



Fonte: O autor (2023).

3.6.1 Estratégia dos limites móveis

A utilização dos limites móveis no algoritmo de programação linear sequencial tem grande importância no processo de otimização, pois afeta de forma direta e fortemente a convergência do processo. Não há uma única forma recomendada para utilização de limites móveis, podendo variar de acordo com o problema enfrentado, como também, pelo programador. Nesse sentido, Muñoz-Rojas (2000) apresenta uma estratégia de limites móveis para as coordenadas nodais e áreas que foram utilizadas nos trabalhos de Faria (2019a) e Rosa (2021).

O caso dos limites móveis aplicado às coordenadas é explicado para a componente X . A mesma abordagem é estendida para as componentes Y e Z . Os limites móveis para cada variável de projeto (neste caso a coordenada X do nó j , X_j) são determinados por ΔX_j , conforme

$$X_j^0 - \Delta X_j \leq X_j \leq X_j^0 + \Delta X_j. \quad (96)$$

Sugere-se analisar todos os elementos conectados ao nó j e define-se o parâmetro

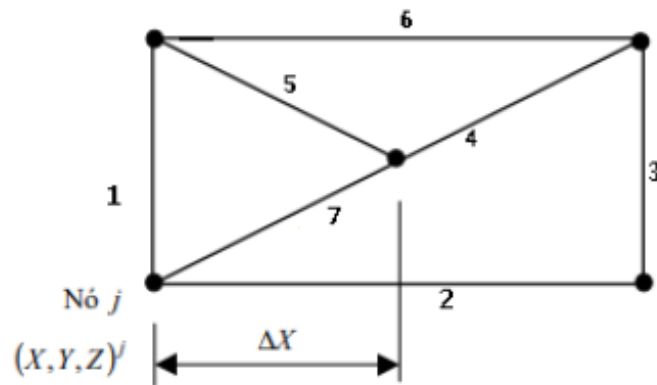
$$\Delta X = \min_{ncl} |X_2 - X_1|, \quad (97)$$

onde ncl é o número de elementos conectados ao nó j , X_2 e X_1 são as componentes X das coordenadas nodais dos nós locais dos elementos conectados. Se $\Delta X = 0$, faz-se $\Delta X = \min_{ncl} (|Y_2 - Y_1|, |Z_2 - Z_1|)$.

Este procedimento pode ser visualizado na Figura 21. Os elementos 2, 1 e 7 estão conectados ao nó j que tem coordenada X_j . No elemento 1 tem-se $|X_2 - X_1|_1 = 0$. Assim, esse elemento não é considerado. Quando os elementos 2 e 7 são analisados, verifica-se que $|X_2 - X_1|_2 > |X_2 - X_1|_7$. Logo, tem-se que $\Delta X = |X_2 - X_1|_7$.

Quando o processo de otimização é iniciado, aplica-se um determinado fator C_{al} a ΔX , especificado pelo usuário, resultando em $\Delta X_j = C_{al} \Delta X$. À medida que a análise se desenvolve, o seguinte critério é aplicado: se em duas iterações sucessivas a variável de projeto (componente da coordenada) caminha no mesmo sentido, faz-se $\Delta X_j = C_{xu} \Delta X_j$. Caso contrário, $\Delta X_j = C_{xd} \Delta X_j$, onde $C_{xu} > 1$ e $C_{xd} < 1$. C_{xu} , C_{xd} são denominados de fatores de atualização.

Figura 21 - Forma com que os limites móveis são determinados neste estudo.



Fonte: Muñoz-Rojas (2000).

A análise dos limites móveis aplicados nas áreas de seção transversal é apresentada por

$$A_j^0 - \Delta A_j \leq A_j \leq A_j^0 + \Delta A_j, \quad (98)$$

onde $\Delta A_j = C_a \Delta A_j^0$ e C_a é um fator percentual definido pelo projetista na entrada de dados do problema. O procedimento de atualização dos fatores de fixação é semelhante ao desenvolvido para as áreas. Sendo que, no caso das áreas os fatores de perturbação são definidos por C_{au} e C_{ad} .

3.6.2 Critério de convergência

A convergência do problema de otimização, se dá somente quando há estabilização tanto da função objetivo como das variáveis de projeto. A convergência das variáveis de projeto e da função objetivo é avaliada pela norma euclidiana do vetor que contém seus valores. Os valores da função objetivo e da norma do vetor das variáveis de projeto são monitorados em todas as iterações. Quando, em duas iterações sucessivas, estes valores sofrem uma alteração menor do que a tolerância prescrita, o problema é considerado convergido.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo apresentam-se resultados 3D para as formulações de otimização desenvolvidas. Os exemplos estudados são:

- Redução da complexidade
 - i) Domo de 52 barras com um caso de carga
- Otimização de layout, topologia e fatores de fixação com variáveis mistas
 - i) Domo de 52 barras com três casos de carga
 - ii) Estrutura tipo *cantilever* com dois casos de carga

A seguir é apresentado o detalhamento de cada um desses problemas. É importante salientar, que em nenhum exemplo foram impostas condições de simetria e os elementos projetados para as áreas e comprimentos mínimos são omitidos na visualização da geometria final.

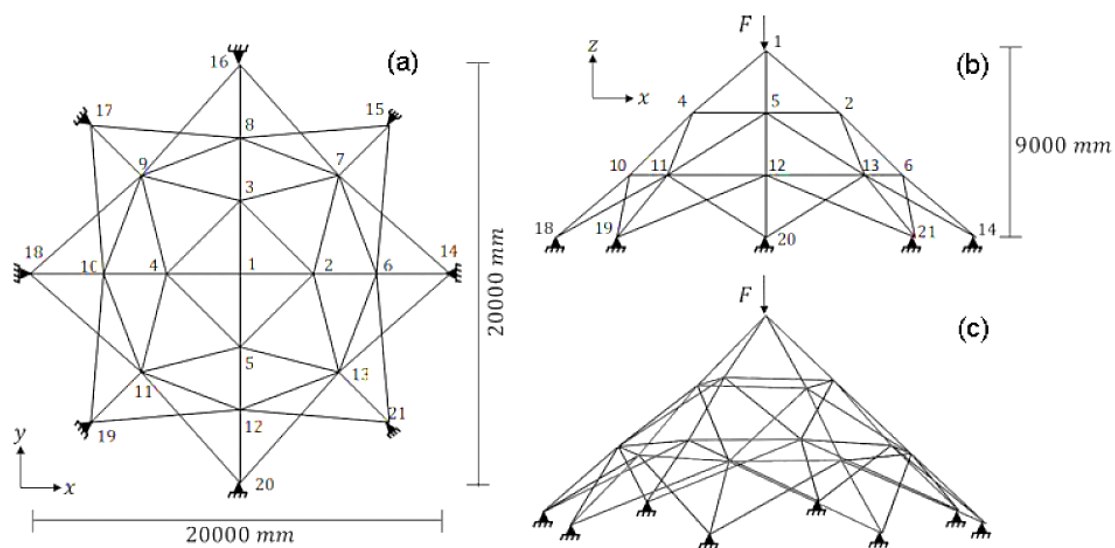
4.1 OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT E TOPOLOGIA COM REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE – TODAS AS VARIÁVEIS CONTÍNUAS E FATORES DE FIXAÇÃO CONSTANTES

4.1.1 Domo de 52 barras

O primeiro problema avalia a extensão dos equacionamentos desenvolvidos por Rosa (2021) com a utilização de dois parâmetros betas independentes nas funções *Heaviside* para estruturas tridimensionais. A estrutura inicial, domo de 52 barras e 21 nós, é apresentada na Figura 22. A estrutura está sujeita a uma força concentrada de 310 kN no nó 1, direção z . Todos os elementos compartilham as mesmas propriedades: módulo de elasticidade $E = 200\text{MPa}$, módulo de elasticidade transversal $G = 80\text{MPa}$, massa específica $\rho = 7800\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ e área inicial de $0,03\text{m}^2$. As coordenadas iniciais dos nós estão indicadas na Tabela 1 e a conectividade dos elementos na Tabela 2. Todas as 52 áreas são variáveis de projeto e as coordenadas x e y têm como variáveis os nós de 2 a 13.

As restrições laterais impostas para as áreas são de $1 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2$ e para os comprimentos de $0,05\text{ m}$. São impostas restrições de deslocamentos de 15 mm na direção z dos nós 1, 2, 3, 4 e 5.

Figura 22 – Domo de 52 barras.



Fonte: Faria (2019a).

Tabela 1 – Coordenadas iniciais (em metros), domo.

nó	x	y	z	nó	x	y	z
1	10,00	10,00	9,00	12	10,00	3,50	3,00
2	13,50	10,00	6,00	13	14,70	5,30	3,00
3	10,00	13,50	6,00	14	20,00	10,00	0,00
4	6,50	10,00	6,00	15	17,10	17,10	0,00
5	10,00	6,50	6,00	16	10,00	20,00	0,00
6	16,50	10,00	3,00	17	2,90	17,10	0,00
7	14,70	14,70	3,00	18	0,00	10,00	0,00
8	10,00	16,50	3,00	19	2,90	2,90	0,00
9	5,30	14,70	3,00	20	10,00	0,00	0,00
10	3,50	10,00	3,00	21	17,10	2,90	0,00
11	5,30	5,30	3,00				

Fonte: O autor (2023).

Tabela 2 – Conectividade do domo

Elementos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nós	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	1
	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	15	6
Elementos	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Nós	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	2	3
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	7	6	8	7
Elementos	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
Nós	3	4	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	
	9	8	10	9	12	11	13	12	14	13	15	14	

Fonte: O autor (2023).

Os fatores de perturbação dos limites móveis adotados para as áreas são de 1% e de 50% para as coordenadas x e y . A regra de atualização dos limites móveis de

ampliação é de 1% e de 10% para redução (áreas e coordenadas), de acordo com a estratégia apresentada na seção 3.6.1. O critério de convergência para a função objetivo, áreas e coordenadas é de $1 \cdot 10^{-3}$. Os fatores de fixação dos elementos são rígidos e não são considerados como variáveis de projeto. A área da seção transversal dos elementos é maciça. Na definição do eixo local, para o cálculo do momento de inércia, é utilizado um nó auxiliar que tem como coordenadas, em metros, a posição (10,10,22). Para mais informações pode-se consultar Chandrupatla e Belegundu (2012).

A área e o comprimento máximo permitido para a função *Heaviside* são de $0,03 \text{ m}^2$ e 10 m , respectivamente. Após testes, definiu-se o parâmetro inicial $\beta_1 = 90$ para as áreas e para as coordenadas $\beta_2 = 33$. Após testes, definiu-se a atualização do parâmetro β_1 a cada iteração de 0,02 para as áreas β_2 de 0,007 para as coordenadas. A definição dos parâmetros betas iniciais e a regra de atualização foram adotados com base no trabalho de Rosa (2021).

A otimização é desenvolvida com diferentes custos de fabricação associados às conexões e os parâmetros β iniciais e finais estão indicados na Tabela 3. Para o caso tridimensional analisado, a redução da complexidade depende dos parâmetros betas iniciais e da regra de atualização. A dependência é maior em relação à escolha dos parâmetros betas iniciais.

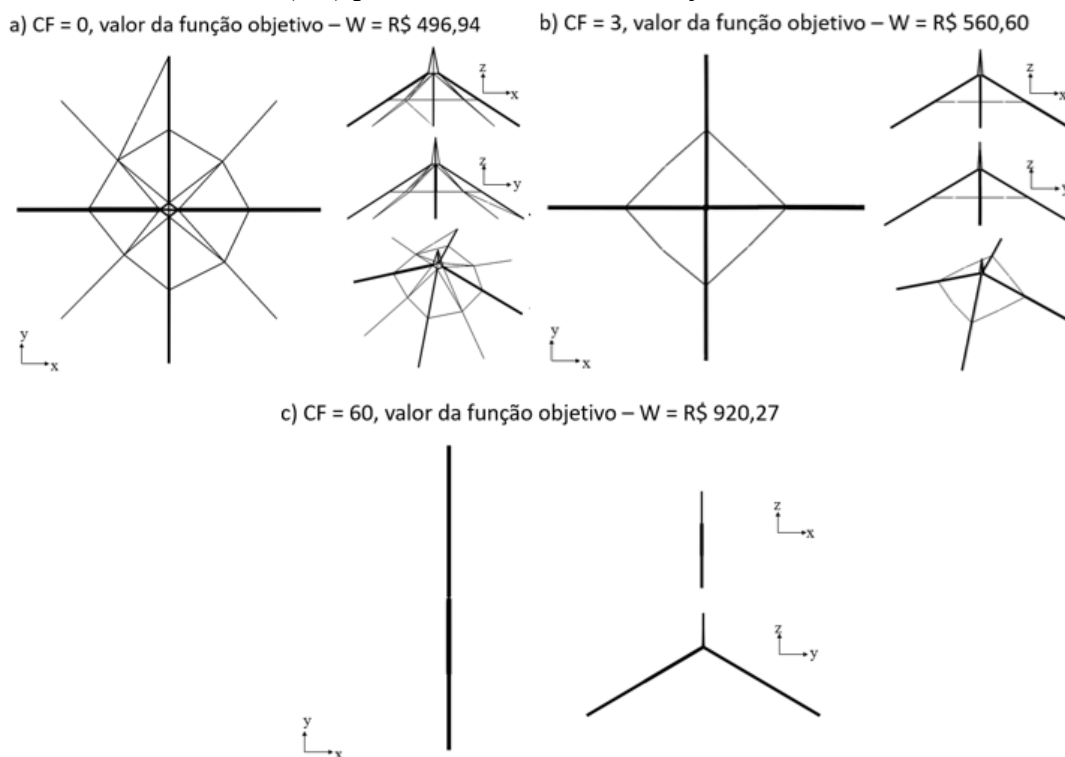
Tabela 3 – Parâmetros β iniciais e finais associados ao custo de fabricação das conexões para o domo com uma força concentra no nó 1.

	CF = 3	CF = 60
<i>Valor inicial do parâmetro β_1 aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos</i>	90	90
<i>Valor final do parâmetro β_1 aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos</i>	104,53	109,88
<i>Valor inicial do parâmetro β_2 aplicado nos comprimentos dos elementos</i>	33	33
<i>Valor final do parâmetro β_2 aplicado nos comprimentos dos elementos</i>	38,1	39,96

Fonte: O autor (2023).

As soluções ótimas, de acordo com a variação do custo de fabricação (CF) associados às conexões, são apresentadas na Figura 23.

Figura 23 – Soluções ótimas de acordo com o custo adicional de fabricação das conexões (CF) para o domo com uma força concentrada no nó 1.



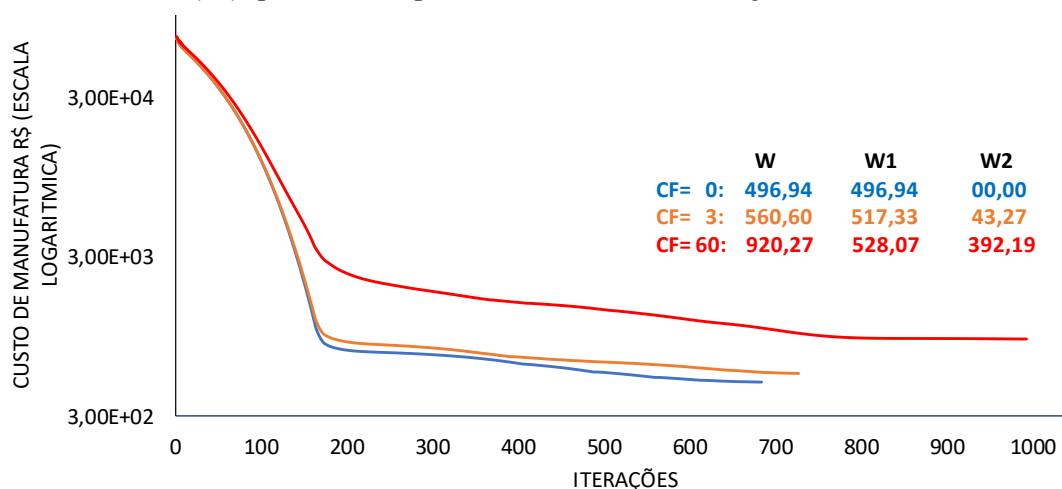
Fonte: O autor (2023).

A Figura 23a) apresenta o resultado da otimização de layout e topologia, sem considerar o custo de fabricação associado às conexões ($CF=0$). Um pequeno aumento no custo de fabricação das conexões ($CF=3$), Figura 23b), resulta na remoção de alguns elementos e em uma nova geometria. Isso ocorre pois o aumento no CF tende a tornar mais caras as conexões, de modo que o algoritmo trabalha para remover as conexões dos elementos, privilegiando a minimização do custo.

É possível observar na Figura 23c) uma estrutura com a menor quantidade de elementos. Para atender a rigidez necessária, com a remoção de alguns elementos, é preciso aumentar a área dos elementos não removidos. O custo de fabricação das conexões é diretamente proporcional ao número de elementos presentes na estrutura, conforme equação (24), quanto mais caro for o custo das conexões, maior será a tendência de reduzir o número de elementos. Contudo, o custo de fabricação acima de 60 não promove mais a remoção dos elementos.

O comportamento da função objetivo para os diferentes custos de fabricação pode ser observado na Figura 24. W é o custo total de manufatura, que inclui o custo do material $W1$ e o custo de fabricação das conexões $W2$.

Figura 24 – Comportamento da função objetivo, considerando o custo total de manufatura (W), para o exemplo do domo com uma força concentrada no nó 1.



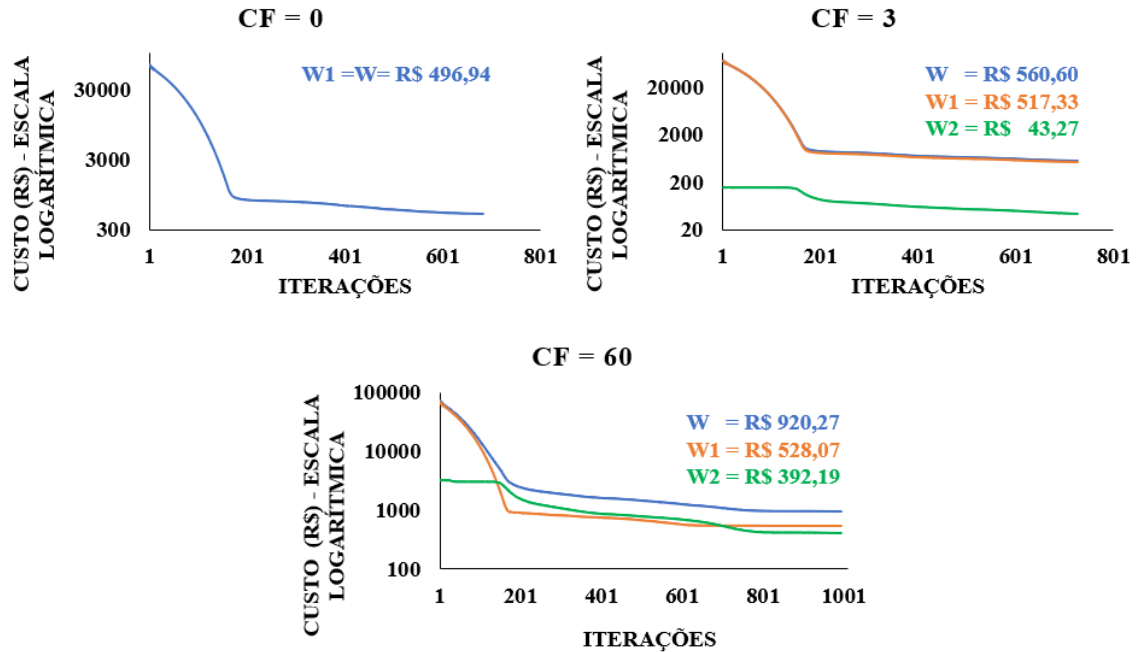
Fonte: O autor (2023).

Analisando o caso em que CF é igual a 29, o custo de massa na estrutura ótima é de 35,75% maior que na solução ótima onde não é considerada a redução da complexidade (CF=0), conforme mencionado anteriormente.

O resultado da Figura 24, CF = 0, apresenta uma função objetivo com custo de material de R\$ 496,94. Para o CF =60, a parcela da função objetivo que corresponde ao custo de material é igual a R\$ 528,17. Esse resultado evidencia que o parâmetro beta é responsável por encontrar um resultado com menor quantidade de elementos, porém mais pesado. Uma investigação mais aprofundada poderia ser realizada, iniciando o processo de otimização de pontos diferentes com o intuito de verificar se esse é o melhor dos mínimos.

A Figura 25 apresenta uma análise das parcelas que compõem a função objetivo W1 e W2 para diferentes custos de fabricação (CF). Na Figura 25, CF igual a 3, é possível observar que o custo das conexões W2, inicialmente, permanece “constante” até o ponto em que o custo do material W1 cai significativamente até a restrição de deslocamento ficar ativa. Nesse momento, a função objetivo não decai significativamente com os valores das áreas, pois a restrição de deslocamento está ativa. Logo, a função *Heaviside* começa a remover os elementos, e consequentemente o custo de fabricação começa a cair, pois os elementos estão sendo removidos e as conexões associadas a eles também. A regra de atualização é essencial nesta etapa de limpeza da estrutura.

Figura 25 – Comportamento da função objetivo (W), em escala logarítmica, com a contribuição das parcelas de custo do material ($W1$), considerando diferentes custos de fabricação (CF) associado ao custo das conexões. ($W2$).



Fonte: O autor (2023).

Um comportamento similar pode ser observado na Figura 25 para o ($CF = 60$). A Tabela 4 apresenta as áreas e comprimentos ótimos obtidos em função dos diferentes custos de fabricação. Os elementos que foram projetados para a área e comprimento mínimo, $1 \cdot 10^{-6} m^2$ e $0,05m$, respectivamente, são omitidos na visualização. As coordenadas ótimas estão indicadas na Tabela 5.

Na Tabela 4, o problema de otimização sem a redução da complexidade ($CF = 0$) projeta 16 elementos, de 1 a 16, para a área mínima. Já para o caso do ($CF = 60$), com a atuação da função *Heaviside*, os elementos de 17 a 32, 34, 37 a 42 e 49 a 52 são removidos por terem área abaixo do valor mínimo. Os elementos 33, 34, 35 e 36 são projetados para o comprimento mínimo e também são removidos. O problema de redução da complexidade promove a remoção de 30 elementos ao total, restando apenas 9 elementos, formando a estrutura indicada na Figura 23c). Note que nesta figura há, aparentemente, apenas três elementos. Isto ocorre porque alguns dos 9 elementos finais são colineares.

As restrições de deslocamentos dos nós 1, 2, 3, 4 e 5 para $CF = 0$ estão indicadas na Figura 26. Para $CF = 0$, a restrição do nó 1 permanece ativa durante o processo de otimização e a restrição do nó 3 oscila entre $11mm$ e $15mm$ nas iterações finais. Os nós 2, 4 e 5 também apresentam oscilações nos deslocamentos para as iterações finais.

Tabela 4 – Áreas e comprimentos ótimos para o exemplo do domo com uma força concentrada no nó 1.

Elemento	Áreas ótimas (m ²)			Comprimentos ótimos (m)		
	CF = 0	CF = 3	CF = 60	CF = 0	CF = 3	CF = 60
1	-	-	-	7,80	8,37	8,04
2	-	-	-	8,27	8,43	8,30
3	-	-	-	8,14	8,31	8,24
4	-	-	-	7,96	8,44	8,12
5	-	-	-	8,21	8,32	7,98
6	-	-	-	8,22	8,30	8,37
7	-	-	-	8,13	8,44	8,11
8	-	-	-	7,79	8,34	8,22
9	-	-	-	7,93	7,94	7,98
10	-	-	-	7,94	8,00	7,98
11	-	-	-	7,91	7,96	8,24
12	-	-	-	7,92	7,95	8,26
13	-	-	-	7,94	7,96	7,98
14	-	-	-	7,92	7,97	7,98
15	-	-	-	7,91	7,98	8,29
16	-	-	-	7,92	7,94	8,19
17	5,86E-06	1,93E-05	-	3,61	3,56	3,06
18	5,87E-06	1,94E-05	-	4,09	3,60	3,78
19	2,15E-06	7,87E-06	-	3,91	3,54	3,69
20	5,57E-06	7,91E-06	-	3,75	3,72	3,16
21	1,59E-06	3,15E-06	-	3,77	3,65	3,04
22	6,47E-06	3,14E-06	-	3,73	3,60	3,85
23	5,11E-06	9,45E-06	-	4,08	3,67	3,57
24	1,02E-05	9,44E-06	-	3,76	3,58	3,36
25	3,07E-06	-	-	5,24	4,58	5,24
26	1,00E-05	-	-	5,36	4,62	5,22
27	1,02E-05	-	-	5,29	4,68	5,18
28	1,04E-06	-	-	5,19	4,65	5,21
29	1,47E-06	-	-	4,80	4,77	5,23
30	1,91E-06	-	-	4,88	4,79	5,20
31	2,73E-05	-	-	5,57	4,66	5,22
32	2,24E-05	-	-	5,47	4,62	5,25
33	6,42E-04	6,17E-04	2,13E-03	0,76	0,32	-
34	6,41E-04	6,27E-04	-	0,75	0,37	-
35	6,32E-04	6,36E-04	6,25E-05	0,77	0,32	-
36	6,16E-04	6,23E-04	2,13E-03	0,74	0,38	-
37	1,36E-03	1,42E-03	-	5,58	5,73	6,55
38	1,36E-03	1,40E-03	-	5,57	5,69	5,14
39	7,58E-04	7,33E-04	-	3,06	3,01	3,00
40	1,39E-03	1,41E-03	-	5,58	5,72	6,56
41	1,39E-03	1,41E-03	-	5,57	5,71	5,13
42	7,66E-04	7,33E-04	-	3,06	3,01	3,00
43	9,67E-04	1,09E-03	2,56E-03	5,64	5,75	5,81
44	9,65E-04	1,09E-03	2,57E-03	5,63	5,73	5,81
45	5,36E-04	5,54E-04	1,28E-03	3,03	3,01	3,00
46	9,90E-04	1,09E-03	2,56E-03	5,65	5,76	5,81
47	9,88E-04	1,08E-03	2,56E-03	5,64	5,71	5,81
48	5,42E-04	5,53E-04	1,27E-03	3,03	3,01	3,00
49	1,31E-05	-	-	6,12	7,04	6,48
50	8,43E-06	-	-	6,17	6,99	6,51
51	1,36E-06	-	-	6,61	6,83	6,50
52	5,03E-05	-	-	5,88	7,02	6,47

Fonte: O autor (2023).

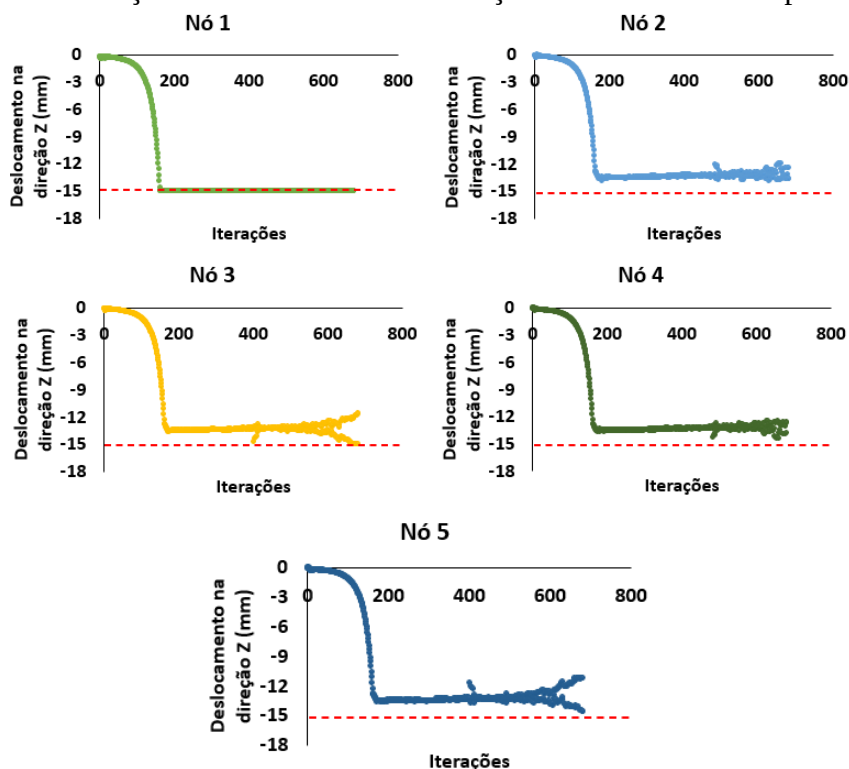
Tabela 5 – Coordenadas ótimas, CF = 60.

nó	x	y	z	nó	x	y	z
1	10,00	10,00	9,00	12	10,00	4,97	3,00
2	10,00	10,00	6,00	13	13,00	6,91	3,00
3	10,00	10,05	6,00	14	20,00	10,00	0,00
4	10,00	10,00	6,00	15	17,10	17,10	0,00
5	10,00	9,95	6,00	16	10,00	20,00	0,00
6	14,18	10,06	3,00	17	2,90	17,10	0,00
7	13,15	12,93	3,00	18	0,00	10,00	0,00
8	10,00	15,02	3,00	19	2,90	2,90	0,00
9	6,94	12,97	3,00	20	10,00	0,00	0,00
10	5,84	10,01	3,00	21	17,10	2,90	0,00
11	6,82	7,14	3,00				

Fonte: O autor (2023).

As demais restrições não ficam ativas durante o processo de otimização. O resultado assimétrico obtido na Figura 23a) contribui para a distribuição de áreas não simétricas e resultam em deslocamentos diferentes para os nós 2, 3, 4 e 5.

Figura 26 – Restrição de deslocamento na direção Z dos nós de 1 a 5 para o CF = 0.

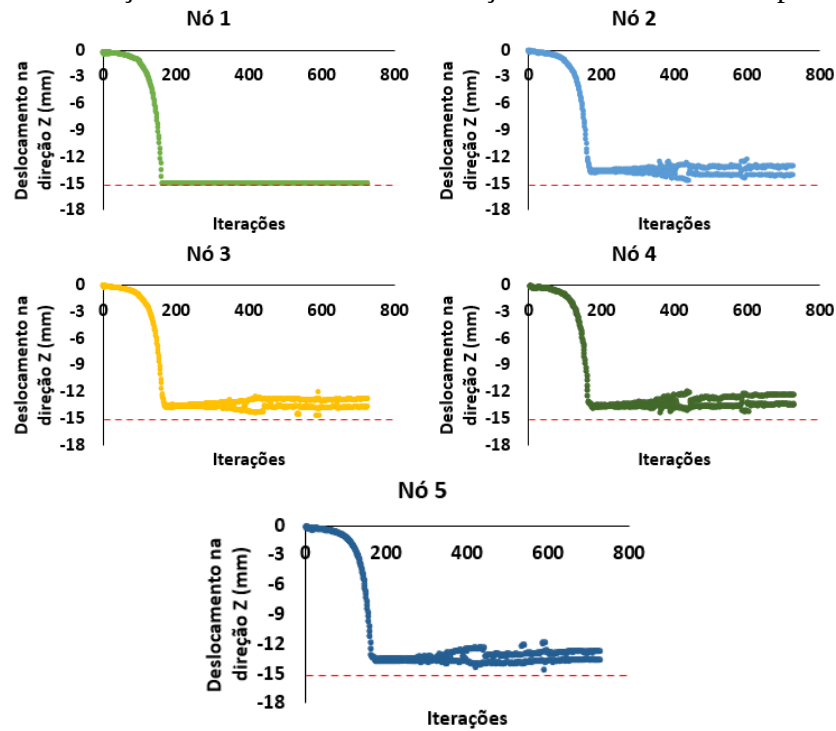


Fonte: O autor (2023).

As restrições de deslocamentos da Figura 27 (CF = 3) apresentam comportamento similar. A restrição do nó 1 permanece ativa durante o processo de otimização e as demais não estão ativas. Os nós 2, 3, 4 e 5 apresentam uma oscilação nos deslocamentos. Essa

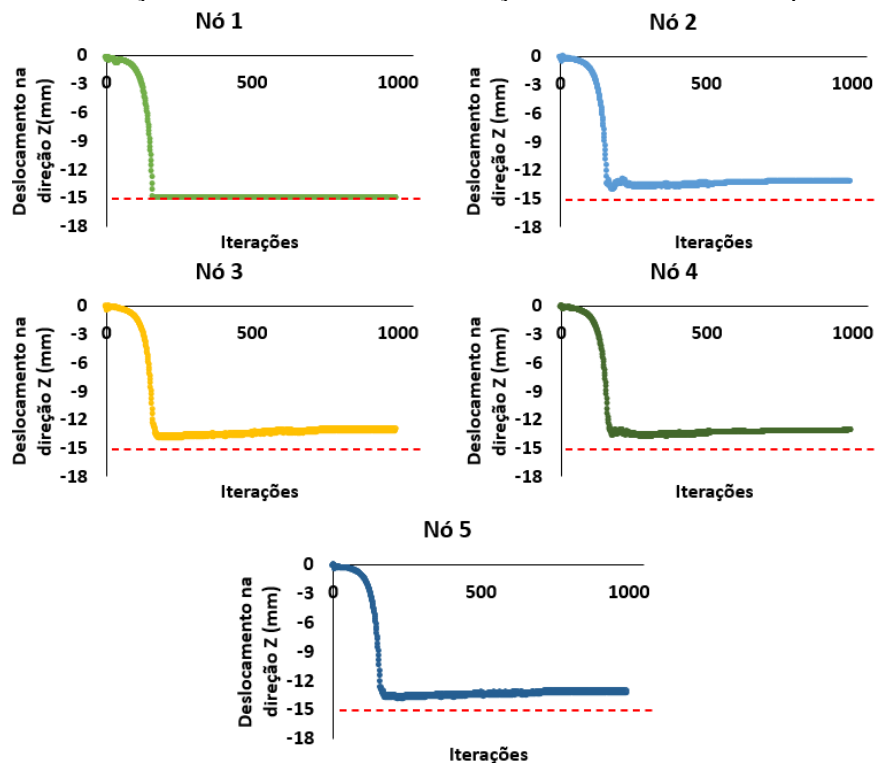
oscilação indica uma alternância do algoritmo de otimização entre duas possíveis soluções. Para $CF = 60$, Figura 28, não há oscilação nos deslocamentos e apenas a restrição do nó 1 permanece ativa.

Figura 27 - Restrição de deslocamento na direção Z dos nós de 1 a 5 para o $CF = 3$.



Fonte: O autor (2023).

Figura 28 - Restrição de deslocamento na direção Z dos nós de 1 a 5 para o $CF = 60$.



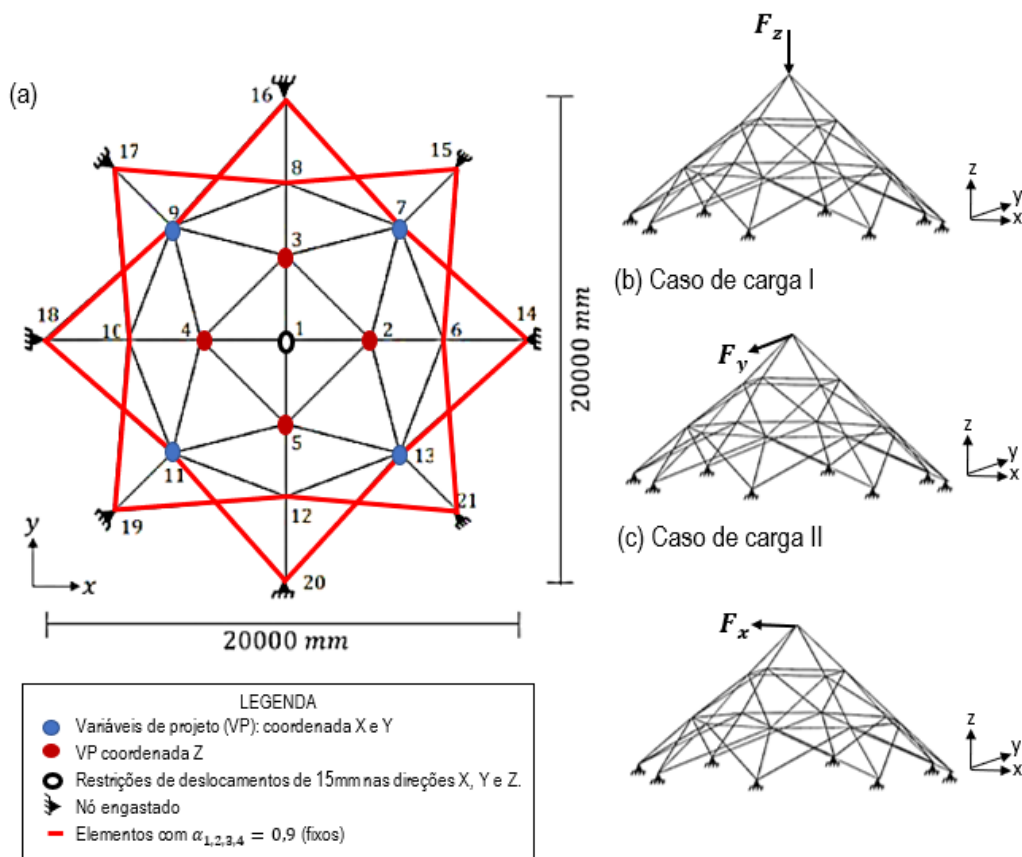
Fonte: O autor (2023).

4.2 OTIMIZAÇÃO DE LAYOUT, TOPOLOGIA E FATORES DE FIXAÇÃO-VARIÁVEIS MISTAS

4.2.1 Domo de 52 barras – variáveis mistas

O segundo problema analisado corresponde ao domo de 52 barras do problema anterior. Porém, agora é avaliada a otimização de layout, topologia e fatores de fixação com variáveis mistas. A estrutura está sujeita a três casos de carga (como mostrado na Figura 29): no primeiro caso de carga, uma única força $F_z = 512,04 \text{ kN}$; no segundo caso de carga, uma única força $F_y = 512,04 \text{ kN}$ e no terceiro caso de carga, uma única força $F_x = 512,04 \text{ kN}$. Todos os casos de carga são aplicados na direção negativa dos eixos x , y e z . As 52 áreas e os nós 7, 9, 11 e 13 das coordenadas x e y são variáveis de projeto. Para a coordenada z , são consideradas como variáveis de projetos os nós 2, 3, 4 e 5, conforme indicado na Figura 29.

Figura 29 – Domo de 52 barras a) estrutura inicial indicando as variáveis de projeto, b) caso de carga I, c) caso de carga II e d) caso de carga III.



Fonte: Adaptado de Faria (2019a).

Os fatores de fixação $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 dos elementos 17 a 52 são considerados como variáveis de projeto, os demais são fixos com $\alpha = 0,9$. A restrição lateral de área mínima (zero numérico) é de $1,002875 \cdot 10^{-6} m^2$ e corresponde ao diâmetro de 1,13mm, apresentado na Tabela 6. A restrição de comprimento mínimo adotada é de 0,05 m. São impostas restrições de deslocamentos de 15 mm nas direções x, y e z do nó 1. Os fatores de perturbação dos limites móveis adotados para as áreas são de 10%, 5% para os fatores de fixação e 6,67% para as coordenadas x, y e z . A regra de atualização dos limites móveis das áreas é de 5% para ampliação e 10% para redução. Para as coordenadas e fatores de fixação, a atualização dos limites móveis é de 1% para ampliação e de 10% para redução.

O critério de convergência para as áreas, coordenadas, fatores de fixação e para a função objetivo é de $1 \cdot 10^{-2}$. Na definição do eixo local, para o cálculo do momento de inércia, é utilizado um nó auxiliar que tem como coordenadas, em metros, a posição (10,10,22). Os demais dados, não apresentados, correspondem aos utilizados no problema anterior.

Para este problema, fixou-se o custo das conexões em uma faixa entre 20% a 60% do custo de material. Essa faixa define os coeficientes $V_0 = 0,05$, $V_1 = 0$ e $V_2 = 0,10$ que representam a curvatura quadrática na variação adicional do custo das conexões apresentados na equação (32).

As dimensões para as áreas de seção transversal do conjunto discreto são apresentadas na Tabela 6. Os diâmetros do conjunto discreto entre 60,30mm e 139,70mm são retirados do catálogo comercial da empresa Vallourec. Os diâmetros maiores que 139,70mm são retirados do catálogo da Tuper. Ambos podem ser consultados nos Anexos D e C, respectivamente.

Tabela 6 – Conjunto de áreas discretas retiradas dos catálogos Vallourec e Tuper.

Diâmetro (mm)	Área (m ²)	Diâmetro (mm)	Área (m ²)
339,70	8,34E-03	158,75	3,79E-03
323,80	7,94E-03	152,40	3,63E-03
273,80	6,68E-03	141,30	3,35E-03
254,00	6,18E-03	139,70	3,31E-03
244,48	5,94E-03	114,30	2,67E-03
219,10	5,31E-03	101,60	2,35E-03
203,20	4,91E-03	88,90	2,03E-03
193,70	4,67E-03	70,30	1,57E-03
177,80	4,27E-03	60,30	1,31E-03
168,30	4,03E-03	1,13	1,00E-06
165,10	3,95E-03	-	-

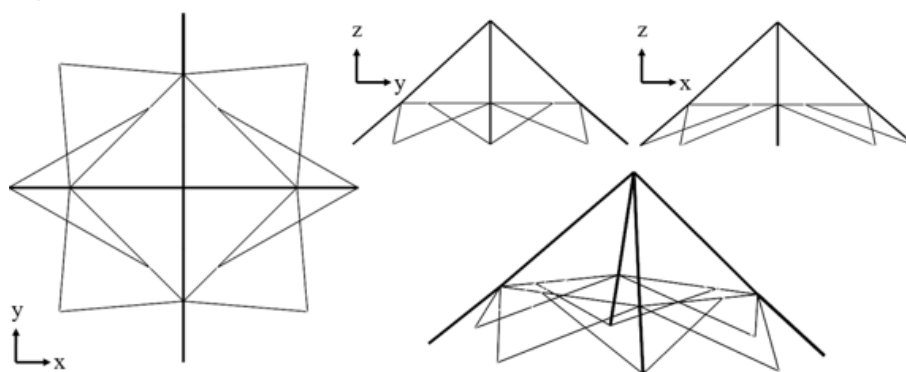
Fonte: O autor (2023).

No conjunto discreto é introduzido um diâmetro de $1,13\text{mm}$ que corresponde a uma área mínima $1,002875 \cdot 10^{-6}\text{m}^2$ (zero numérico). Os elementos dimensionados com essa área, no processo de otimização, serão omitidos da geometria final. Os elementos apresentam uma seção vazada de espessura constante de $8,0\text{ mm}$, com exceção do zero numérico que é tratado como seção maciça.

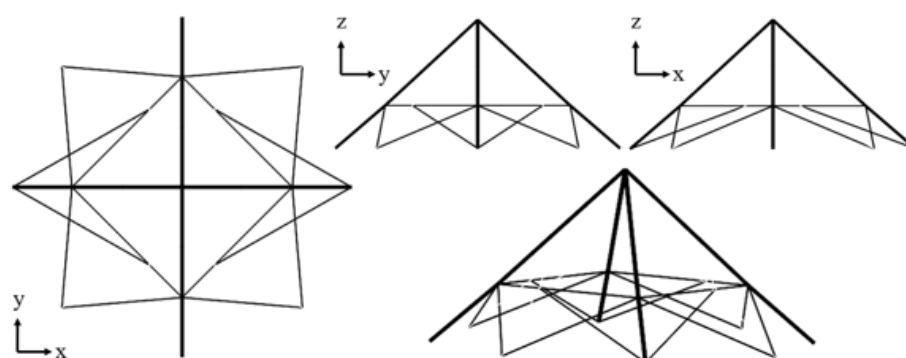
O resultado da estrutura otimizada pode ser visto na Figura 30. A Figura 30a) apresenta o resultado da otimização com as variáveis contínuas e a Figura 30b) o resultado otimizado com as variáveis mistas. Não há mudanças no layout da otimização contínua para a otimização com variáveis mistas. Contudo, há uma alteração nas áreas que são atribuídas aos elementos da estrutura com base no conjunto discreto.

Figura 30 – Resultado da otimização, a) variáveis contínuas e b) variáveis mistas.

a) Estrutura otimizada – Variáveis contínuas.



b) Estrutura otimizada – Variáveis mistas.



Fonte: O autor (2023).

As áreas ótimas são apresentadas na Tabela 7. As áreas sublinhadas destacam os elementos que foram projetados para a área mínima. Assim, 20 elementos são removidos da geometria da estrutura.

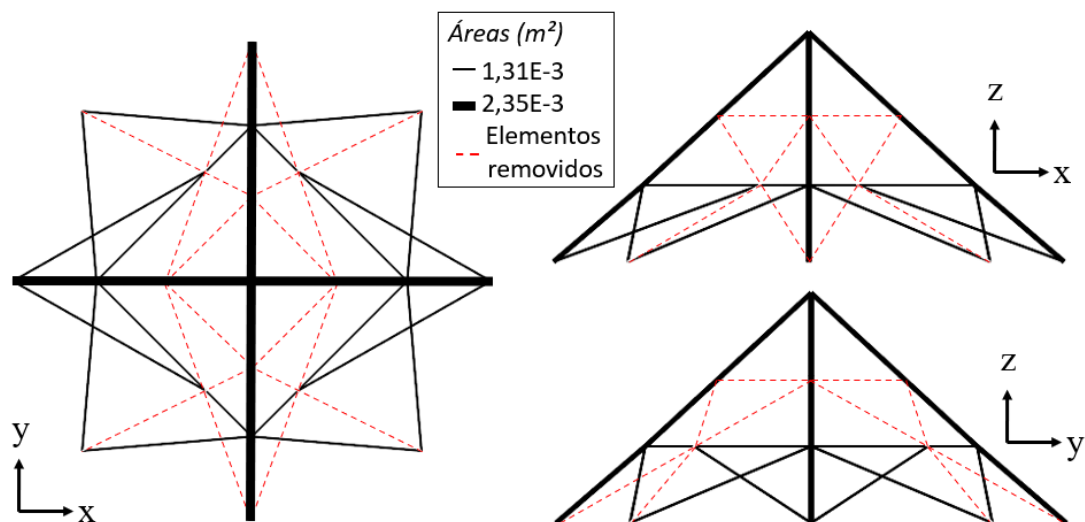
Tabela 7 – Resultado ótimo das áreas para o problema de variáveis mistas.

Elemento	Áreas (m ²)		Elemento	Áreas (m ²)	
	Contínuas	Discretas		Contínuas	Discretas
1	1,05E-06	1,31E-03	27	1,00E-06	1,00E-06
2	1,00E-06	1,00E-06	28	1,00E-06	1,00E-06
3	1,00E-06	1,00E-06	29	1,00E-06	1,00E-06
4	1,11E-06	1,31E-03	30	1,00E-06	1,00E-06
5	1,07E-06	1,31E-03	31	1,00E-06	1,00E-06
6	1,00E-06	1,00E-06	32	1,00E-06	1,00E-06
7	1,00E-06	1,00E-06	33	1,00E-06	1,00E-06
8	1,34E-06	1,31E-03	34	1,00E-06	1,00E-06
9	7,48E-05	1,31E-03	35	1,00E-06	1,00E-06
10	7,51E-05	1,31E-03	36	1,00E-06	1,00E-06
11	7,61E-05	1,31E-03	37	2,28E-03	2,35E-03
12	7,54E-05	1,31E-03	38	2,28E-03	2,35E-03
13	7,48E-05	1,31E-03	39	2,28E-03	2,35E-03
14	7,42E-05	1,31E-03	40	2,28E-03	2,35E-03
15	7,64E-05	1,31E-03	41	2,28E-03	2,35E-03
16	7,60E-05	1,31E-03	42	2,28E-03	2,35E-03
17	7,15E-05	1,31E-03	43	2,28E-03	2,35E-03
18	7,07E-05	1,31E-03	44	2,28E-03	2,35E-03
19	7,07E-05	1,31E-03	45	2,28E-03	2,35E-03
20	7,04E-05	1,31E-03	46	2,28E-03	2,35E-03
21	7,09E-05	1,31E-03	47	2,27E-03	2,35E-03
22	7,01E-05	1,31E-03	48	2,27E-03	2,35E-03
23	7,09E-05	1,31E-03	49	1,00E-06	1,00E-06
24	7,05E-05	1,31E-03	50	1,00E-06	1,00E-06
25	1,00E-06	1,00E-06	51	1,00E-06	1,00E-06
26	1,00E-06	1,00E-06	52	1,00E-06	1,00E-06

Fonte: O autor (2023).

A Figura 31 apresenta o resultado da otimização com variáveis mistas, destacando os elementos removidos da geometria. Uma geometria simétrica era esperada como resultado da otimização, pois os carregamentos aplicados são simétricos. Assim, a Figura 31 evidencia um mínimo local assimétrico. Outro ponto importante refere-se ao resultado final da estrutura com a distribuição de áreas com base no catálogo comercial. Na Tabela 8 são apresentadas as áreas selecionadas no conjunto discreto após a otimização com variáveis mistas. É observado que 20 elementos possuem o diâmetro de 60,3mm e 12 elementos apresentam diâmetro de 101,6 mm, ou seja, apenas dois perfis foram selecionados. Com esse resultado, pode-se utilizar o catálogo apenas da empresa Vallourec, pois, os diâmetros acima de 139,7mm são obitdos no catálogo da empresa Tuper.

Figura 31 – Domo otimizada com as áreas discretas do catálogo e com indicação dos elementos removidos na otimização de layout e topologia.



Fonte: O autor (2023).

Tabela 8 – Áreas disponíveis no conjunto discreto, destacando os perfis presentes na estrutura otimizada e suas quantidades.

Diâmetros disponíveis (mm)	Área (m²)	Quantidade de elementos
339,70	8,34E-03	-
323,80	7,94E-03	-
273,80	6,68E-03	-
254,00	6,18E-03	-
244,48	5,94E-03	-
219,10	5,31E-03	-
203,20	4,91E-03	-
193,70	4,67E-03	-
177,80	4,27E-03	-
168,30	4,03E-03	-
165,10	3,95E-03	-
158,75	3,79E-03	-
152,40	3,63E-03	-
141,30	3,35E-03	-
139,70	3,31E-03	-
114,30	2,67E-03	-
101,60	2,35E-03	12
88,90	2,03E-03	-
70,30	1,57E-03	-
60,30	1,31E-03	20
1,13	1,00E-06	-

Fonte: O autor (2023).

As coordenadas ótimas estão indicadas na Tabela 9. A Figura 32a) apresenta a estrutura inicial com as coordenadas consideradas como variáveis de projeto. A indicação

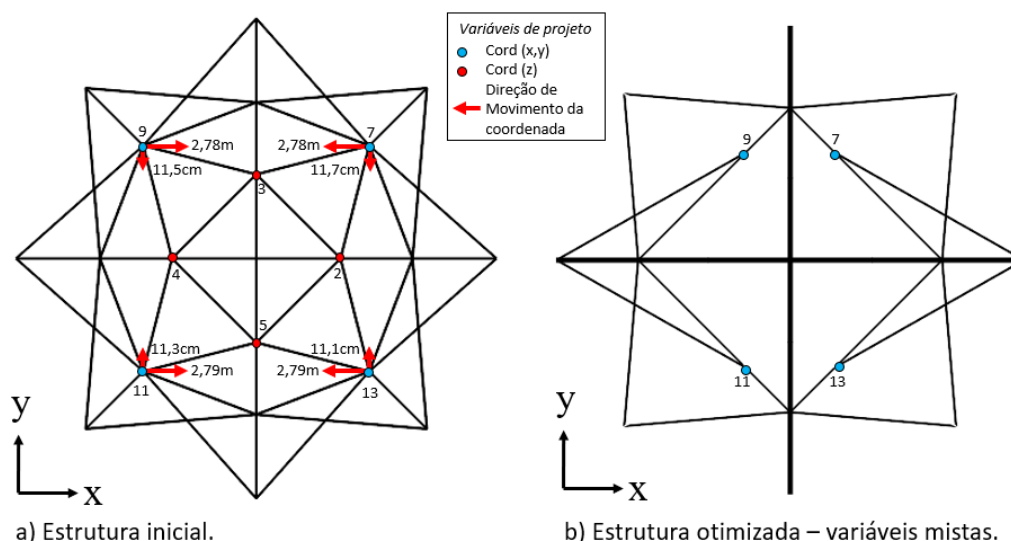
da magnitude e direção de movimento da coordenada durante o processo de otimização também são apresentados. A magnitude de movimento da coordenada é analisada em relação a estrutura otimizada com variáveis discretas. Na Figura 32b) estão indicadas as posições finais de movimento dos nós que foram atribuídos às coordenadas como variáveis de projeto.

Tabela 9 – Coordenadas ótimas para o domo com variáveis mistas.

Nó	Coordenadas ótimas contínuas			Nó	Coordenadas ótimas discretas		
	X (m)	Y (m)	Z (m)		X (m)	Y (m)	Z (m)
2	-	-	5,77E+00	2	-	-	5,77E+00
3	-	-	5,77E+00	3	-	-	5,77E+00
4	-	-	5,77E+00	4	-	-	5,77E+00
5	-	-	5,77E+00	5	-	-	5,77E+00
7	1,19E+01	1,46E+01	-	7	1,19E+01	1,46E+01	-
9	8,08E+00	1,46E+01	-	9	8,08E+00	1,46E+01	-
11	8,09E+00	5,41E+00	-	11	8,08E+00	5,41E+00	-
13	1,19E+01	5,41E+00	-	13	1,19E+01	5,41E+00	-

Fonte: O autor (2023).

Figura 32 – Análise de movimentação das coordenadas a) estrutura inicial com indicação da magnitude e direção de movimento dos nós e b) estrutura otimizada – variáveis mistas.



Fonte: O autor (2023).

Os fatores de fixação das conexões semirrígidas otimizados são apresentados na Tabela 10. Nesse caso, os fatores de fixação foram projetados para ligações em pinos.

O comportamento da função objetivo ao longo do processo iterativo pode ser visto na Figura 33. No início do processo de otimização, a função objetivo apresenta um custo total de R\$ 107.359,52. Ao final da otimização contínua, a função objetivo contabiliza

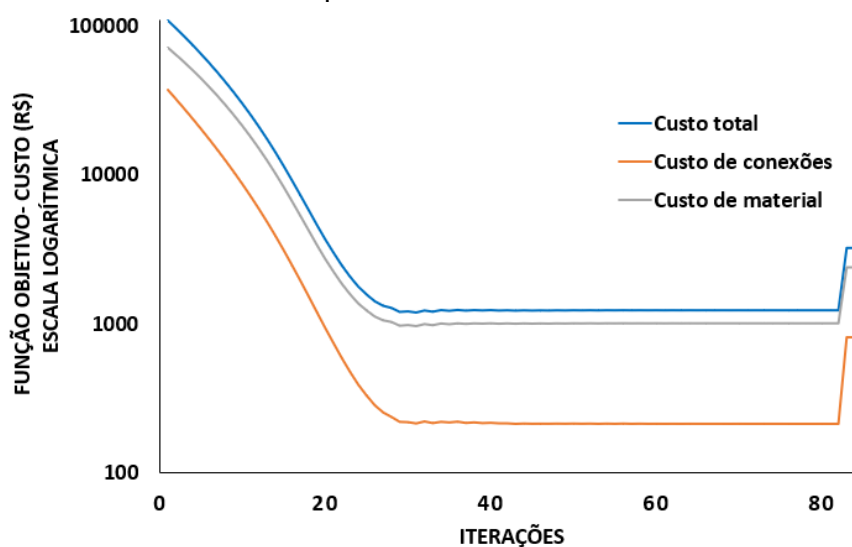
um custo R\$ 1.229,60. Desse total, R\$ 1.014,65 corresponde ao custo de material e R\$ 214,95 de conexões. Quando o algoritmo inicia a análise da otimização mista, ocorre um aumento da função objetivo. Então, o problema tem como custo de conexões R\$ 815,44, custo de material R\$ 2.400,15 e custo total de R\$ 3.215,59. Na otimização mista, o algoritmo realiza 6 iterações até atingir o critério de convergência.

Tabela 10 – Fatores de fixação ótimos para o exemplo do domo com variáveis mistas.

Elemento	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	Elemento	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$
17	0,01	0,01	0,01	0,01	35	0,01	0,01	0,01	0,01
18	0,01	0,01	0,01	0,01	36	0,01	0,01	0,01	0,01
19	0,01	0,01	0,01	0,01	37	0,02	0,02	0,01	0,01
20	0,01	0,01	0,01	0,01	38	0,02	0,01	0,01	0,01
21	0,01	0,01	0,01	0,01	39	0,01	0,01	0,01	0,01
22	0,01	0,01	0,01	0,01	40	0,01	0,01	0,03	0,03
23	0,01	0,01	0,01	0,01	41	0,01	0,01	0,03	0,01
24	0,01	0,01	0,01	0,01	42	0,01	0,01	0,01	0,01
25	0,01	0,01	0,01	0,01	43	0,01	0,01	0,03	0,02
26	0,01	0,01	0,01	0,01	44	0,01	0,01	0,02	0,01
27	0,01	0,01	0,01	0,01	45	0,01	0,01	0,01	0,01
28	0,01	0,01	0,01	0,01	46	0,02	0,02	0,01	0,01
29	0,01	0,01	0,01	0,01	47	0,02	0,01	0,01	0,01
30	0,01	0,01	0,01	0,01	48	0,01	0,01	0,01	0,01
31	0,01	0,01	0,01	0,01	49	0,01	0,01	0,01	0,01
32	0,01	0,01	0,01	0,01	50	0,01	0,01	0,01	0,01
33	0,01	0,01	0,01	0,01	51	0,01	0,01	0,01	0,01
34	0,01	0,01	0,01	0,01	52	0,01	0,01	0,01	0,01

Fonte: O autor (2023).

Figura 33 – Comportamento da função objetivo (custo total) e das parcelas que compõem a função objetivo (custo de material mais custo das conexões) ao longo do processo iterativo.

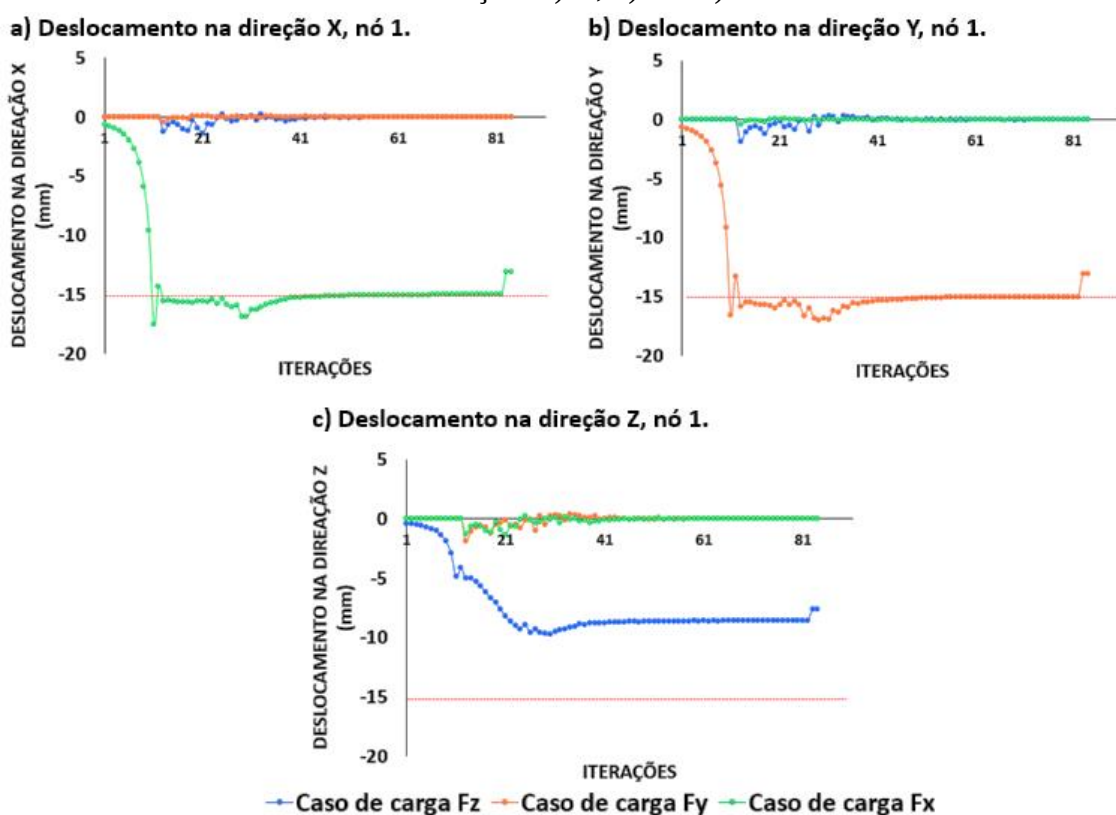


Fonte: O autor (2023).

A função objetivo praticamente não apresenta variação, quando comparado com o início da otimização mista. Após a convergência do problema misto, a função objetivo apresenta um custo total de R\$ 3.215,47, custo de material de R\$ 2.400,07 e de conexões de R\$ 815,40. O custo das conexões representa 25,36% do custo total da função objetivo. A descontinuidade apresentada na função objetivo, próximo à iteração de número 80, corresponde a transição da otimização contínua para a otimização mista (Figura 33).

As restrições de deslocamento são apresentadas na Figura 34. Considerando os três casos de carga, apenas as restrições em x e y ficaram ativas durante o processo de otimização. A Figura 34a) apresenta a restrição de deslocamento em x que viola a restrição nas primeiras iterações, porém, apresenta uma estabilização ao final do processo de otimização contínua. O deslocamento diminui, indicação de uma descontinuidade no gráfico, quando o processo de otimização mista é iniciado. Essa condição é observada de forma similar para os deslocamentos na direção Y. A restrição de deslocamento em Z também apresenta comportamento similar, mas não apresenta restrição ativa.

Figura 34 – Restrições de deslocamentos de 15mm para os três casos de carga do nó 1, nas direções a) X, b) Y e c) Z.



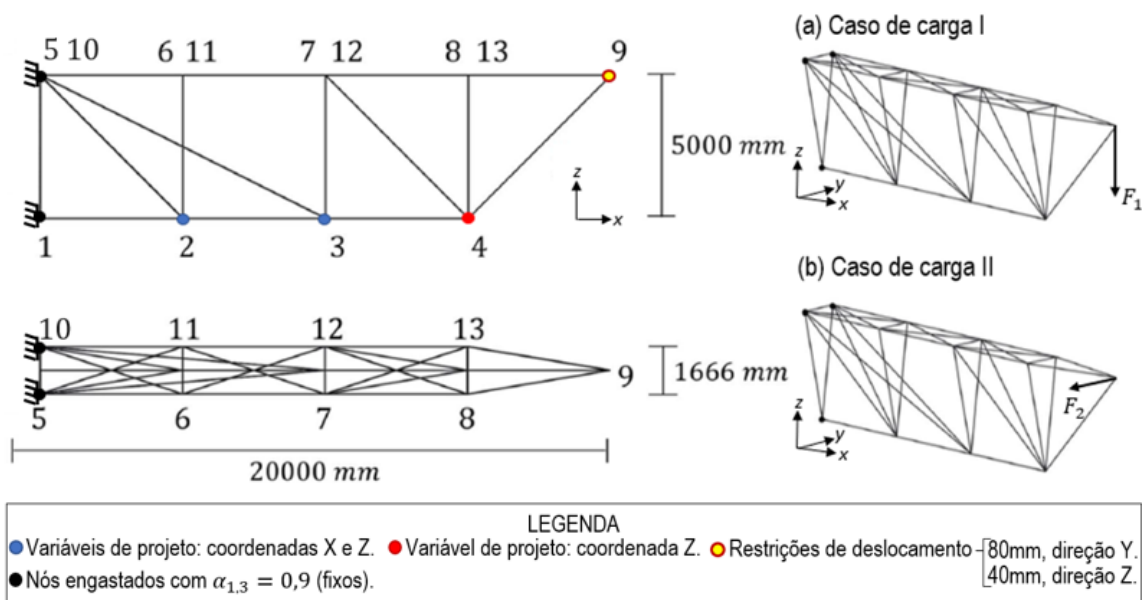
Fonte: O autor (2023).

4.2.2 Estrutura em balanço

A terceira estrutura analisada também aborda o problema de otimização de layout, topologia e fatores de fixação com variáveis mistas. Os elementos da estrutura são compostos de uma seção circular tubular de parede fina com espessura constante de $8,0\text{mm}$, durante todo o processo de otimização. O problema tem como dados: área inicial $8,30 \times 10^{-3} \text{m}^2$, módulo de elasticidade $E = 210 \text{MPa}$, módulo de cisalhamento transversal $G = 80 \text{MPa}$, massa específica $\rho = 7,799 \times 10^{-6} \text{kg/mm}^3$. Considerou-se o custo de material por quilo (kg) como sendo unitário. A estrutura é composta por 36 elementos, 13 nós e está submetida a dois casos de carga, como pode ser visto na Figura 35. Para o primeiro caso de carga tem-se uma força única $F_1 = 120 \text{kN}$ e para o segundo caso de carga, uma força única $F_2 = 60 \text{kN}$, conforme Figura 35. Os dois casos de carga são aplicados no nó 9. A estrutura está engastada nos nós 1, 5 e 10.

As coordenadas iniciais estão indicadas na Tabela 11 e a conectividade dos elementos na Tabela 12. As dimensões das áreas de seção transversal do conjunto discreto foram retiradas dos catálogos das empresas Vallourec e Tuper, mesmo conjunto discreto apresentado no problema anterior, item 4.2.1 (Tabela 6).

Figura 35 – Estrutura em balanço utilizada nos estudos de Rosa (2021).



Fonte: Adaptado de Rosa (2021).

Tabela 11 – Coordenadas iniciais da estrutura em balanço.

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	0,00E+00	8,30E-01	0,00E+00
2	5,00E+00	8,30E-01	0,00E+00
3	1,00E+01	8,30E-01	0,00E+00
4	1,50E+01	8,30E-01	0,00E+00
5	0,00E+00	0,00E+00	5,00E+00
6	5,00E+00	0,00E+00	5,00E+00
7	1,00E+01	0,00E+00	5,00E+00
8	1,50E+01	0,00E+00	5,00E+00
9	2,00E+01	8,30E-01	5,00E+00
10	0,00E+00	1,66E+00	5,00E+00
11	5,00E+00	1,66E+00	5,00E+00
12	1,00E+01	1,66E+00	5,00E+00
13	1,50E+01	1,66E+00	5,00E+00

Fonte: O autor (2023).

Tabela 12 – Conectividade da estrutura em balanço.

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	5	6	7	8	5	10
Nós	2	3	4	9	6	7	8	9	11	12	13	9	10	11	12	13	11	6
Elemento	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Nós	6	11	7	12	5	10	6	11	7	12	8	13	5	10	5	10	7	12
	12	7	13	8	1	1	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4

Fonte: O autor (2023).

A restrição lateral de área mínima (zero numérico) é de $1,002875 \cdot 10^{-6} m^2$ e corresponde ao diâmetro de 1,13mm, apresentado na Tabela 6. As tolerâncias adotadas para as áreas e fatores de fixação são de $1,0 \cdot 10^{-2}$ e $1,0 \cdot 10^{-3}$ para a função objetivo. Foram consideradas restrições de comprimento mínimo de 0,05m em todos os elementos.

Além das restrições de comprimento mínimo, são adotadas restrições de deslocamento no nó 9 de 80 mm na direção Y e 40 mm na direção Z. São consideradas como variáveis de projeto todas as 36 áreas, as coordenadas 2 e 3 em X e 2, 3 e 4 em Z, e os seguintes fatores de fixação: 33 α_1 , 36 (todos) α_2 , 33 α_3 e 36 (todos) α_4 . Não foram consideradas como variáveis de projeto os fatores de fixação α_1 e α_3 dos elementos 1, 5 e 10. A estimativa inicial dos fatores de fixação α é de 0,90. Na definição do eixo local, para o cálculo do momento de inércia, é utilizado um nó auxiliar que tem como coordenadas, em metros, a posição (10,0,10).

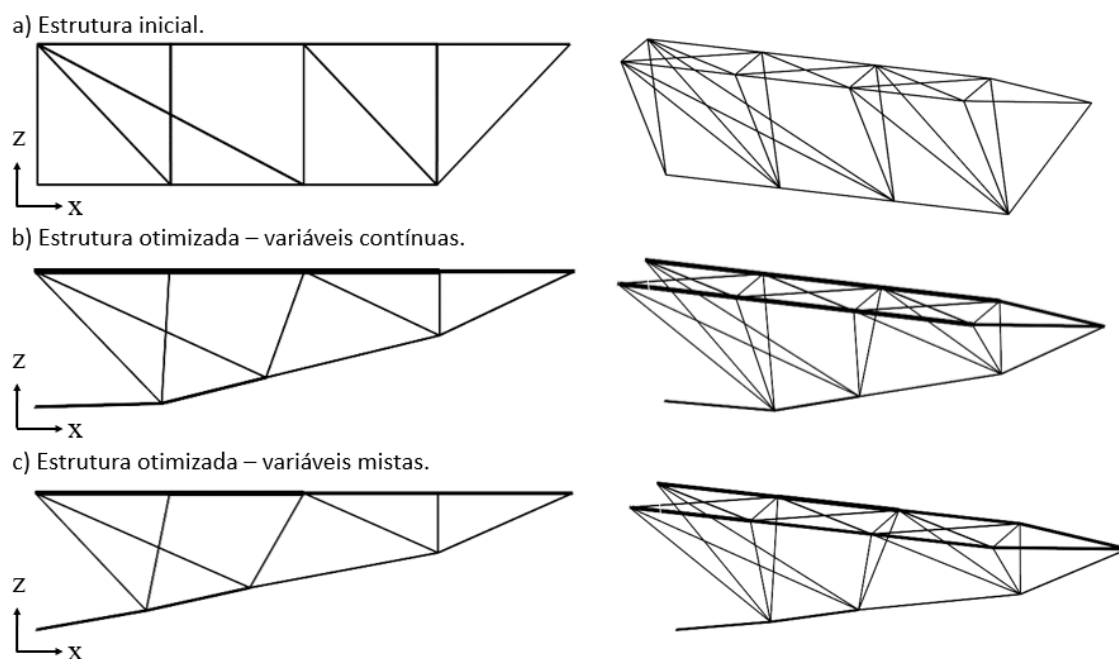
O fator de perturbação inicial dos limites móveis de 10% é atribuído às áreas, 5% para os fatores de fixação, 25% para a coordenada X e 6,67% para a coordenada Z. A atualização dos limites móveis para as coordenadas e fatores de fixação é de 1%, para ampliação e 10% para redução, respectivamente. Às áreas apresentam um fator de

ampliação de 5% e redução de 10%, de acordo com a seção 3.6.1. Para este problema, fixou-se o custo das conexões em uma faixa entre 20% a 60% do custo de material. Essa faixa define os coeficientes $V_0 = 0,05$, $V_1 = 0$ e $V_2 = 0,10$ que representam a curvatura quadrática na variação adicional do custo das conexões.

O resultado da estrutura otimizada pode ser visto na Figura 36. A Figura 36a) apresenta a estrutura inicial, a Figura 36b) indica o resultado da otimização com variáveis contínuas e a Figura 36c) contempla o resultado da otimização com variáveis mistas.

As áreas ótimas estão apresentadas na Tabela 13. As áreas em **negrito** evidenciam que nem sempre as áreas serão projetadas para as maiores áreas do conjunto discreto. A escolha das áreas discretas dependem do comportamento da função objetivo e das restrições de projeto.

Figura 36 – Estrutura inicial (a) estrutura otimizada considerando todas as variáveis contínuas (b) e estrutura otimizada com variáveis mistas(c).



Fonte: O autor (2023).

As áreas dos elementos que foram removidos da geometria estão sublinhadas (áreas mínimas) e correspondem aos elementos tracejados em vermelho na Figura 37. Para esse exemplo, a otimização de topologia não apresentou resultados relevantes, pois o número de barras da estrutura já é reduzido, sendo assim, não há muitos elementos para remover. Os únicos elementos removidos são os que têm ambos os nós completamente vinculados (como esperado).

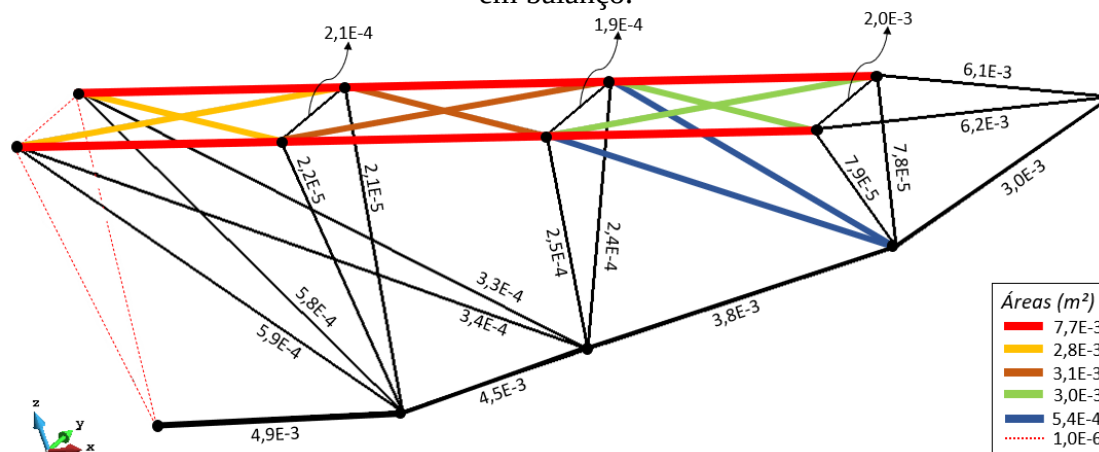
Tabela 13 – Áreas ótimas da estrutura em balanço.

Elemento	Áreas (m ²)		Elemento	Áreas (m ²)	
	Contínuas	Discretas		Contínuas	Discretas
1	4,92E-03	5,31E-03	19	3,08E-03	3,31E-03
2	4,51E-03	4,91E-03	20	3,07E-03	3,31E-03
3	3,77E-03	3,63E-03	21	3,02E-03	3,31E-03
4	3,03E-03	3,31E-03	22	3,03E-03	3,31E-03
5	7,74E-03	7,94E-03	23	<u>1,00E-06</u>	<u>1,00E-06</u>
6	7,74E-03	6,68E-03	24	<u>1,00E-06</u>	<u>1,00E-06</u>
7	7,74E-03	6,68E-03	25	2,24E-05	1,31E-03
8	6,15E-03	6,18E-03	26	2,11E-05	1,31E-03
9	7,74E-03	7,94E-03	27	2,46E-04	1,31E-03
10	7,74E-03	8,34E-03	28	2,41E-04	1,31E-03
11	7,74E-03	6,68E-03	29	7,91E-05	1,31E-03
12	6,13E-03	6,18E-03	30	7,80E-05	1,31E-03
13	<u>1,00E-06</u>	<u>1,00E-06</u>	31	5,95E-04	1,31E-03
14	2,07E-04	1,31E-03	32	5,81E-04	1,31E-03
15	1,93E-04	1,31E-03	33	3,43E-04	1,31E-03
16	2,00E-03	2,35E-03	34	3,33E-04	1,31E-03
17	2,76E-03	3,31E-03	35	5,39E-04	1,31E-03
18	2,77E-03	3,31E-03	36	5,36E-04	1,31E-03

Fonte: O autor (2023).

A Figura 37 apresenta a distribuição das áreas da otimização com variáveis contínuas. Pode-se analisar que as áreas apresentam uma distribuição com certa “tendência” de simetria.

Figura 37 – Resultado da otimização com variáveis contínuas para as áreas da estrutura em balanço.



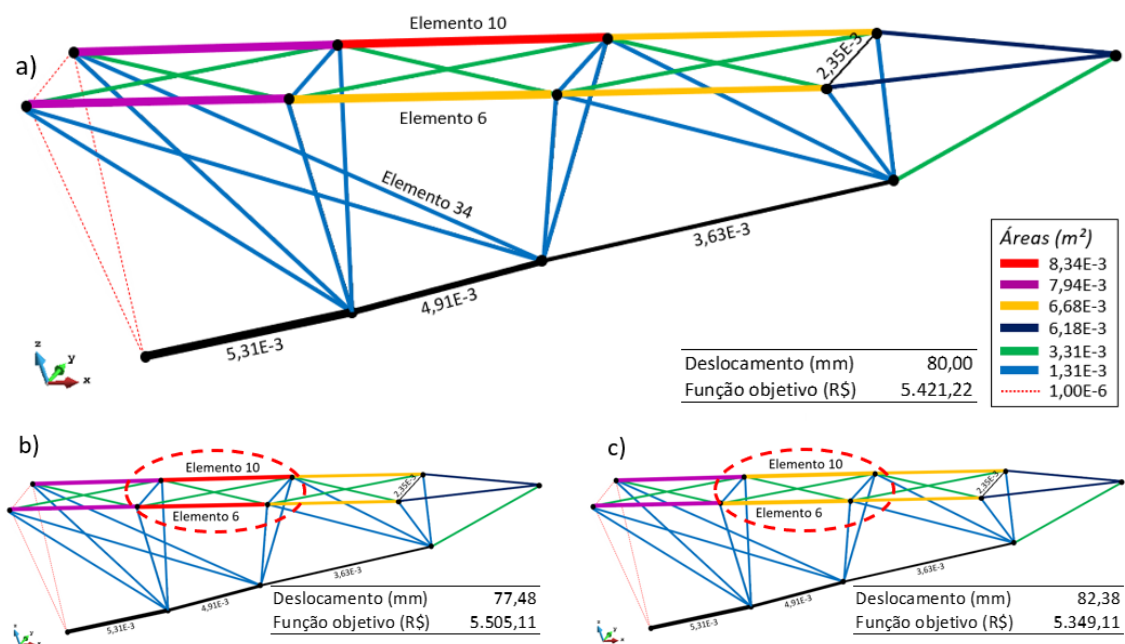
Fonte: O autor (2023).

Para a otimização com variáveis mistas, consideradas com base no conjunto discreto, o problema também apresenta uma distribuição simétrica das áreas, com exceção dos elementos 10 e 6, como apresentado na Figura 38a. Deve-se levar em conta que da

otimização contínua para a otimização discreta há uma redistribuição das áreas para os valores do conjunto discreto, como também, uma modificação nas coordenadas. Para tal, a função objetivo trabalha com o intuito de reduzir o custo de manufatura da estrutura. Para que a estrutura apresente o menor custo, sem violar as restrições de projeto, o processo de otimização encontra a solução apresentada na Figura 38a).

Uma possível distribuição simétrica das áreas é analisada para os elementos 10 e 6, conforme indicado na Figura 38b) e na Figura 38c). Na Figura 38b) a área do elemento 6 é projetada para a área do elemento 10 (ambas representadas pela cor vermelha). Com essa alteração há um aumento no valor da função objetivo de R\$ 5.421,22 para R\$ 5.505,11 e uma diminuição do deslocamento da estrutura de 80,00mm para 77,48mm. Na Figura 38c) a área do elemento 10 é projetada para a área do elemento 6 (ambas em amarelo), nesse caso a função objetivo diminui de R\$ 5.421,22 para R\$ 5.349,11 e a restrição de deslocamento é violada, apresentando valor de deslocamento de 82,38mm. A restrição de deslocamento imposta é de 80mm no nó 9 na direção do eixo y. A outra restrição de deslocamento de 40mm no nó 9, direção do eixo z, não é violada em nenhuma das suposições.

Figura 38 – Resultado da otimização com variáveis mistas a) áreas seleccionadas com base no conjunto discreto b) suposição de simetria com a área do elemento 10 c) suposição de simetria com a área do elemento 6.



Fonte: O autor (2023).

A Tabela 14 apresenta as áreas selecionadas do catálogo (conjunto discreto) na otimização com variáveis mistas. É observado que dez perfis diferentes foram selecionados para a estrutura otimizada.

Tabela 14 - Áreas disponíveis no conjunto discreto, destacando os perfis presentes na estrutura otimizada e suas quantidades – estrutura em balanço.

Diâmetros disponíveis (mm)	Área (m²)	Quantidade de elementos
339,70	8,34E-03	1
323,80	7,94E-03	2
273,80	6,68E-03	3
254,00	6,18E-03	2
244,48	5,94E-03	-
219,10	5,31E-03	1
203,20	4,91E-03	1
193,70	4,67E-03	-
177,80	4,27E-03	-
168,30	4,03E-03	-
165,10	3,95E-03	-
158,75	3,79E-03	-
152,40	3,63E-03	1
141,30	3,35E-03	-
139,70	3,31E-03	7
114,30	2,67E-03	-
101,60	2,35E-03	1
88,90	2,03E-03	-
70,30	1,57E-03	-
60,30	1,31E-03	14
1,13	1,00E-06	-

Fonte: O autor (2023).

As coordenadas ótimas estão indicadas na Tabela 15. Pode ser verificado que há uma mudança nas coordenadas da otimização contínua para a otimização mista. A Figura 39 ilustra esse resultado, indicando o sentido e a magnitude de movimento da coordenada para o resultado da geometria final.

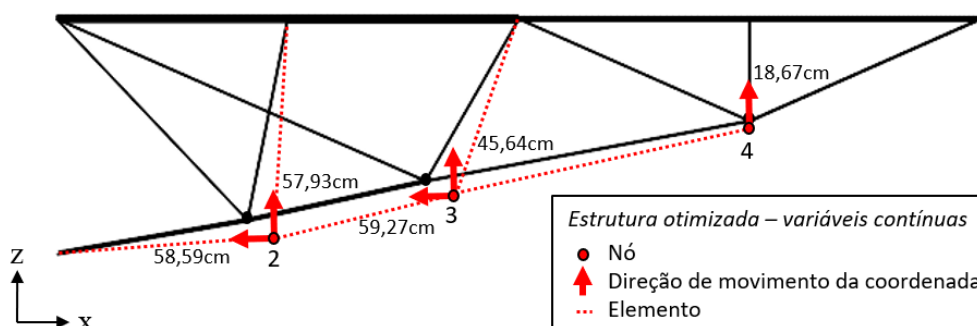
Os fatores de fixação otimizados das conexões semirrígidas estão indicados na Tabela 16. Os fatores de fixação destacados apresentam valores intermediários entre ligações em pino (0,01) e totalmente rígidos (0,99), com exceção do elemento 16 que necessita de conexões rígidas.

Tabela 15 – Coordenadas ótimas da estrutura em balanço.

Nó	Coordenadas ótimas contínuas		Coordenadas ótimas discretas	
	X (m)	Z (m)	X (m)	Z (m)
2	4,71E+00	1,30E-01	4,13E+00	7,10E-01
3	8,58E+00	1,09E+00	7,99E+00	1,54E+00
4	-	2,64E+00	-	2,82E+00

Fonte: O autor (2023).

Figura 39 – Movimento das coordenadas de projeto da otimização de variáveis contínuas para otimização de variáveis mistas.



Fonte: O autor (2023).

Os fatores de fixação omitidos da Tabela 16 correspondem aos fatores de fixação iguais a 0,9, mas que não foram considerados como variáveis de projeto, e os demais fatores apresentam rigidez próxima a 0,1.

Tabela 16 – Fatores de fixação das conexões semirrígidas da estrutura em balanço.

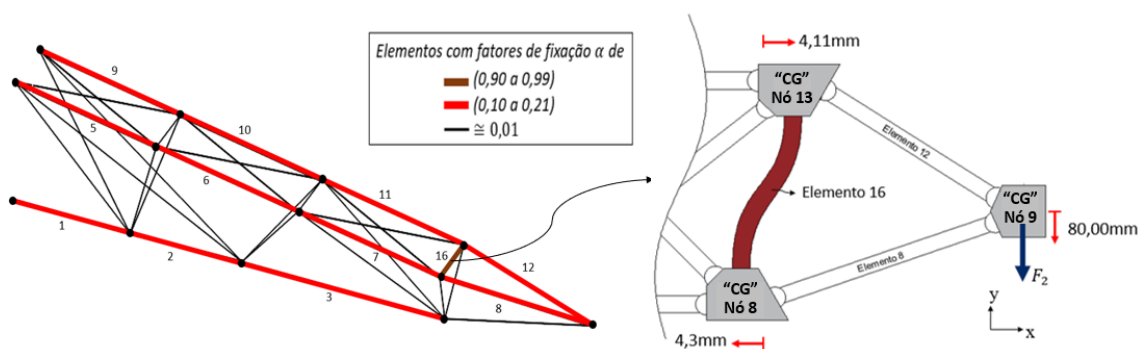
Elemento	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	Elemento	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$
1	-	0,01	-	0,16	19	0,04	0,01	0,01	0,03
2	0,01	0,01	0,19	0,16	20	0,03	0,01	0,02	0,03
3	0,01	0,01	0,21	0,04	21	0,04	0,02	0,02	0,01
4	0,01	0,01	0,07	0,03	22	0,02	0,01	0,04	0,01
5	-	0,01	-	0,15	23	0,01	0,01	0,01	0,01
6	0,01	0,01	0,15	0,17	24	0,01	0,01	0,01	0,01
7	0,01	0,01	0,16	0,01	25	0,01	0,01	0,01	0,01
8	0,01	0,02	0,11	0,01	26	0,01	0,01	0,01	0,01
9	-	0,03	-	0,13	27	0,01	0,01	0,01	0,01
10	0,03	0,02	0,13	0,16	28	0,01	0,01	0,01	0,01
11	0,01	0,03	0,16	0,02	29	0,01	0,01	0,03	0,01
12	0,01	0,02	0,11	0,01	30	0,01	0,01	0,03	0,01
13	0,01	0,01	0,01	0,01	31	0,01	0,01	0,01	0,01
14	0,03	0,03	0,01	0,01	32	0,01	0,01	0,01	0,01
15	0,04	0,04	0,01	0,01	33	0,01	0,01	0,01	0,01
16	0,99	0,99	0,89	0,90	34	0,01	0,01	0,01	0,01
17	0,04	0,05	0,07	0,04	35	0,01	0,01	0,01	0,01
18	0,02	0,03	0,09	0,06	36	0,01	0,01	0,01	0,01

Fonte: O autor (2023).

Os elementos com fatores de fixação destacados na Tabela 16 são apresentados na Figura 40. A faixa de variação desses fatores (0,11 a 0,21) pode ser entendida como ligações em pino. Nota-se que os elementos destacados na Figura 40 estão conectados por outros elementos que apresentam fatores de fixação ($\alpha \cong 0,01$) que formam uma geometria triangular, fornecendo rigidez à estrutura.

O elemento 16 apresenta fatores de fixação com rigidez entre 0,89 e 0,99. Esses fatores de fixação altos são entendidos através da representação da Figura 40, à direita. O segundo caso de carga F_2 , aplicado na direção y, provoca um deslocamento em sentidos opostos na direção do eixo x dos nós 13 e 8. Esses deslocamentos contribuem para o deslocamento no nó 9 na direção y. Porém, há uma restrição de deslocamento no nó 9 na direção y de 80mm, ou seja, para evitar que a restrição de deslocamento de 80mm no nó 9 seja violada é necessário que o elemento 16 apresente conexões rígidas.

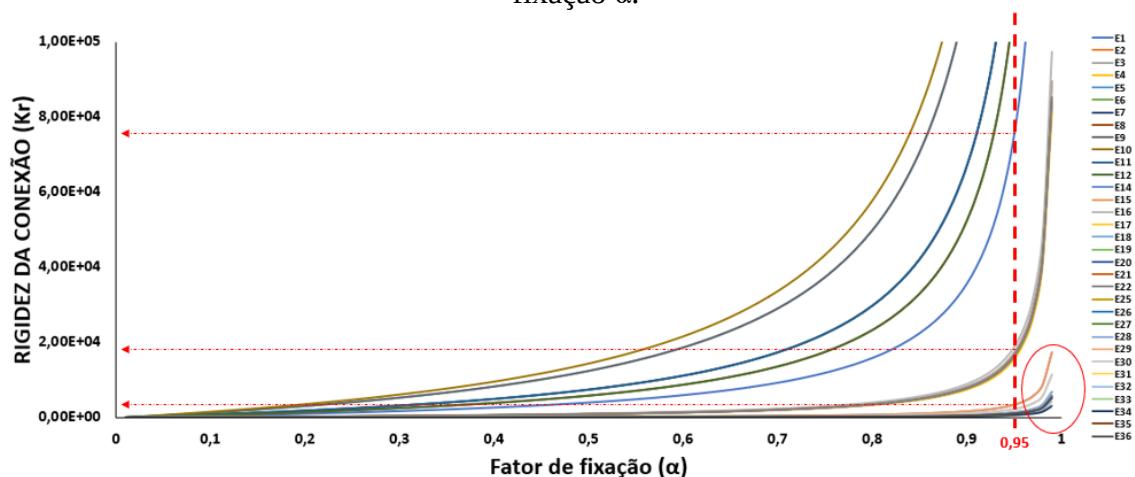
Figura 40 – Elementos que apresentaram fatores de fixação diferentes de pino para a estrutura em balanço.



Fonte: O autor (2023).

A rigidez das conexões depende dos fatores de fixação e das propriedades do elemento (módulo de elasticidade longitudinal, comprimento e inércia). A Figura 41 apresenta a rigidez das conexões para todos os elementos da estrutura, exceto os elementos revidos. A delimitação adotada da rigidez no eixo das ordenadas está entre 0 kNm e 100.000 kNm . Para a análise da rigidez dos fatores de fixação considere um fator de fixação $\alpha = 0,95$ (Figura 41). Pode-se observar que o fator de fixação igual a 0,95 produz valores de rigidezes diferentes das conexões para cada elemento, sendo representado pela seta tracejada horizontal. Apesar de produzir rigidezes diferentes para cada elemento em todos os casos elas são conexões rígidas.

Figura 41 – Avaliação da rigidez da conexão $K_r(kNm)$ em função dos fatores de fixação α .



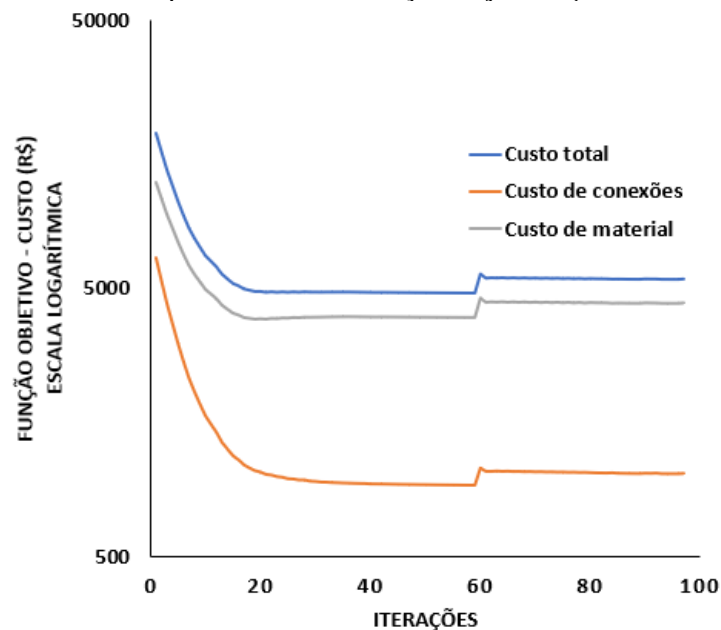
Fonte: O autor (2023).

A conexão será rígida pois a sua rigidez é avaliada em relação à rigidez do elemento e não sobre um valor fixo absoluto.

A Figura 41 apresenta uma região circutada em vermelho. Essa região, apresenta as curvas dos elementos que têm às rigidezes mais baixas. Em geral, os elementos dessa região apresentam áreas de seção transversal menores e/ou comprimento maiores. A primeira curva, da esquerda para a direita, representa o elemento 10, esse é o elemento que possui maior área de seção transversal. De maneira análoga, a primeira curva da direita para a esquerda e de baixo para cima (região circutada), é representada pelo elemento 34. O elemento 34 possui a menor área de seção transversal e o maior comprimento. A Figura 38a) indica os elementos 10 e 34 com as características mencionadas.

O comportamento da função objetivo ao longo do processo iterativo pode ser visto na Figura 42. É importante ressaltar que o custo total da função objetivo é composto do custo de massa dos elementos mais o custo das conexões. Inicialmente, o custo total da estrutura é de R\$ 18.931,75. Desse total, R\$ 12.422,41 refere-se ao custo de material e R\$ 6.509,34 das conexões. Ao final da otimização contínua, o custo total é de R\$ 4.805,21, R\$ 922,07 das conexões e R\$ 3.883,14 de material. Após a convergência do problema contínuo é iniciado o problema com variáveis mistas. Nesse momento, a função objetivo apresenta um aumento no seu valor, sendo representado pela descontinuidade da Figura 42 (iteração 60). O custo total contabilizado é de R\$ 5.657,34, o custo de material é de R\$ 4.588,87 e o custo das conexões é de R\$ 1.068,47.

Figura 42 – Comportamento da função objetivo (custo total R\$).



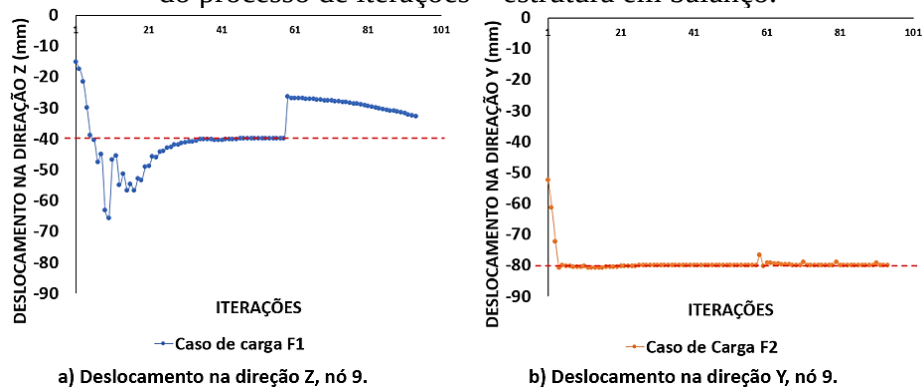
Fonte: O autor (2023).

O problema com variáveis mistas apresenta convergência na iteração de número 97. Em geral, o problema de otimização mista não leva muitas iterações para convergir. O aumento no número de iterações está relacionado com a alteração realizada nas coordenadas nodais, verificada entre a solução do problema contínuo e o problema misto. Com a convergência do problema misto, a função objetivo apresentou custo total de R\$ 5.657,34 distribuídos em R\$ 4.400,75 de custo de material e R\$ 1.020,46 de custo das conexões (Figura 42). O custo das conexões representa 18,03% do custo total.

Na Figura 43, têm-se os diagramas de convergência das restrições de deslocamentos aplicadas no nó 9 nas direções Z e Y. Verifica-se que a restrição na direção Z, Figura 43a), para o caso de carga 1 (F1), apresenta uma violação da restrição de 40 mm no início do processo de otimização, mas depois a restrição não é violada até atingir a convergência do problema contínuo. Após a convergência do problema contínuo, é iniciado o problema com variáveis mistas com a escolha das áreas estabelecidas no catálogo. Assim, os deslocamentos diminuem, representado pela descontinuidade da Figura 43a).

Para a restrição de deslocamento de 80mm na direção Y, Figura 43b), verifica-se que a restrição permanece ativa até o final do processo de otimização, para o caso de carga (F2) que é aplicado, também, na direção Y. Uma pequena descontinuidade é observada na transição da otimização contínua para a otimização mista, mas após esse instante a restrição volta a tornar-se ativa.

Figura 43 – Comportamento das restrições de deslocamento dos nós restritos ao longo do processo de iterações – estrutura em balanço.



Fonte: O autor (2023).

Após finalizar o estudo foram realizados alguns testes com o mesmo exemplo da estrutura em balanço, mas modificando alguns parâmetros (magnitude do carregamento aplicado e custo das conexões rígidas) com o intuito de avaliar o comportamento dos fatores de fixação.

O primeiro parâmetro alterado corresponde à força F_2 de 120kN para 180kN, mantendo o custo das conexões do tipo pino e rígidas em 20% e 60% do custo do material, respectivamente. A alteração da força aplicada F_2 proporciona um aumento nos fatores de fixação, conforme indicado na Tabela 17.

Tabela 17 – Comparação entre os fatores de fixação com o aumento no caso de carga F_2 de 120kN para 180kN – custo das conexões fixo em 20% (pino) e 60% (rígida).

CUSTO DAS CONEXÕES - 20% (PINO) A 60% (RÍGIDA)									
Força	F1= 60kN				Força	F1= 60kN			
Elemento	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$	Elemento	$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$
1	-	0,01	-	0,16	1	-	0,06	-	0,24
2	0,01	0,01	0,19	0,16	2	0,04	0,02	0,24	0,30
3	0,01	0,01	0,21	0,04	3	0,01	0,01	0,42	0,11
4	0,01	0,01	0,07	0,03	4	0,01	0,01	0,23	0,17
5	-	0,01	-	0,15	5	-	0,02	-	0,15
6	0,01	0,01	0,15	0,17	6	0,02	0,01	0,15	0,17
7	0,01	0,01	0,16	0,01	7	0,01	0,01	0,17	0,05
8	0,01	0,02	0,11	0,01	8	0,03	0,07	0,07	0,03
9	-	0,03	-	0,13	9	-	0,03	-	0,13
10	0,03	0,02	0,13	0,16	10	0,04	0,01	0,13	0,16
11	0,01	0,03	0,16	0,02	11	0,02	0,01	0,16	0,06
12	0,01	0,02	0,11	0,01	12	0,01	0,07	0,09	0,01
13	0,01	0,01	0,01	0,01	13	0,01	0,01	0,01	0,01
14	0,03	0,03	0,01	0,01	14	0,01	0,01	0,02	0,02
15	0,04	0,04	0,01	0,01	15	0,03	0,03	0,01	0,01
16	0,99	0,99	0,89	0,90	16	0,04	0,04	0,02	0,02

Fonte: O autor (2023).

Há um aumento nos fatores de fixação α_3 e α_4 dos elementos de 1 a 4 (destacados na tabela). Entretanto, o elemento 16 apresenta uma redução dos fatores de fixação. Essa redução é explicada pelo aumento dos fatores de fixação nos demais elementos (de 1 a 4), que antes eram praticamente pino. Sendo assim, agora, não é necessário que o elemento 16 apresente conexões rígidas para não violar a restrição de deslocamento, pois os demais elementos apresentam maior rigidez o que contribui para a redução dos deslocamentos da estrutura como um todo.

Após alterar a força F_2 de 120kN para 180kN fixou-se esse valor para modificar outro parâmetro. Então, agora é alterado o custo das ligações do tipo rígida que antes era de 60% do custo do material e agora é de 40%, ou seja, é reduzido o custo das conexões rígidas. Além dos elementos de 1 a 4 apresentarem fatores de fixação mais altos, os elementos de 5 a 12 apresentam aumento nos fatores de fixação, conforme destacado na Tabela 18.

Tabela 18 – Comparação entre os fatores de fixação com redução no custo das conexões rígidas de 60% para 40% - forças constantes $F_1 = 60kN$ e $F_2 = 180kN$.

CUSTO DAS CONEXÕES - 20% (PINO) A 60% (RÍGIDA)					CUSTO DAS CONEXÕES - 20% (PINO) A 40% (RÍGIDA)				
Força	F1= 60kN		F2=180kN		Força	F1= 60kN		F2=180kN	
Elemento	α_1	α_2	α_3	α_4	Elemento	α_1	α_2	α_3	α_4
1	-	0,06	-	0,24	1	-	0,20	-	0,43
2	0,04	0,02	0,24	0,30	2	0,17	0,03	0,42	0,52
3	0,01	0,01	0,42	0,11	3	0,02	0,01	0,72	0,17
4	0,01	0,01	0,23	0,17	4	0,01	0,01	0,38	0,30
5	-	0,02	-	0,15	5	-	0,04	-	0,27
6	0,02	0,01	0,15	0,17	6	0,04	0,01	0,28	0,30
7	0,01	0,01	0,17	0,05	7	0,01	0,02	0,30	0,08
8	0,03	0,07	0,07	0,03	8	0,04	0,12	0,11	0,07
9	-	0,03	-	0,13	9	-	0,07	-	0,24
10	0,04	0,01	0,13	0,16	10	0,07	0,03	0,24	0,28
11	0,02	0,01	0,16	0,06	11	0,03	0,01	0,28	0,10
12	0,01	0,07	0,09	0,01	12	0,01	0,11	0,15	0,03
13	0,01	0,01	0,01	0,01	13	0,01	0,01	0,01	0,01
14	0,01	0,01	0,02	0,02	14	0,01	0,01	0,03	0,03
15	0,03	0,03	0,01	0,01	15	0,05	0,05	0,01	0,01
16	0,04	0,04	0,02	0,02	16	0,07	0,07	0,03	0,04

Fonte: O autor (2023).

Esses testes evidenciam que quando as restrições de deslocamentos não estão ativas há uma propensão dos fatores de fixação irem para pino. Quando as restrições de deslocamentos estão ativas é necessário aumentar a rigidez, que pode ser obtida com o aumento dos fatores de fixação ou da área de seção transversal dos elementos. Entretanto, esta escolha é fortemente dependente do quanto o custo das conexões rígidas é maior do

que o custo das conexões do tipo pino. O custo das conexões rígidas não sendo elevado aumenta a possibilidade dos fatores de fixação serem mais altos.

A estrutura em balanço contém 36 elementos, mas a Tabela 17 e a Tabela 18 apresentam apenas 16. Os demais elementos foram omitidos por apresentarem pequenas modificações nos fatores de fixação, destacando apenas os elementos que mais foram alterados.

5 CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A otimização de layout de pórticos com seção circular tubular e redução da complexidade de estruturas planas com a utilização de funções *Heaviside* regularizadas, com dois parâmetros betas distintos para as áreas e comprimentos, é encontrada nos trabalhos de Rosa (2021). Neste trabalho a metodologia é estendida para estruturas tridimensionais, mostrando-se eficaz.

O problema de redução da complexidade apresenta dependência de vários parâmetros das funções *Heaviside* (betas iniciais e regra de atualização, áreas e comprimentos máximos). Para áreas e comprimentos máximos constantes, betas baixos apresentam dificuldade de "limpar" a estrutura e betas altos levam a dificuldades numéricas. A "limpeza"/eliminação de elementos começa a ocorrer no instante em que as restrições de deslocamento se tornam ativas. Outro aspecto que contribui para a eliminação de elementos está associado com a aplicação da função *Heaviside* sobre os comprimentos. Tal medida, possibilita eliminar elementos adicionais tornando o resultado menos complexo do que aquele obtido pela aplicação da função *Heaviside* somente sobre as áreas.

O nível de redução da complexidade também está relacionado com os custos de fabricação associado às conexões. Ao considerar custos de fabricação diferentes, têm-se geometrias distintas, de forma que o projetista tem liberdade para definir o controle da complexidade que atenda às suas necessidades de projeto. Vale destacar, que os custos de fabricação das conexões elevados têm como consequência a obtenção de estruturas menos complexas, porém mais pesadas.

O problema de otimização de layout e fatores de fixação com variáveis mistas também é encontrado nos estudos de Rosa (2021). Porém, não há uma otimização de topologia incluída nessa análise. Assim, ao incluir uma otimização de topologia, aliada com o problema de variáveis mistas, tem-se contribuições significativas para estudos práticos. A estratégia proposta neste trabalho para eliminação de elementos dentro de um conjunto discreto (permitindo, assim, a mudança de topologia da estrutura) teve êxito.

A introdução dos fatores de fixação como variáveis de projeto tem papel significativo na otimização de estruturas treliçadas com restrição de deslocamento. Quando não há restrições de deslocamentos ativas a tendência é que todas as conexões convirjam para pinos. Porém, com restrições de deslocamentos ativas a rigidez da estrutura deve aumentar, isso pode ser conseguido aumentando a seção transversal dos

elementos ou a rigidez das conexões. Nesse caso, se o custo das conexões rígidas não for elevado, aumenta a probabilidade de obter fatores de fixação mais altos.

A interpretação desses fatores de fixação deve ser feita com cautela. Um fator de fixação maior que 0,95 não significa que a rigidez da conexão tenda ao infinito, mas que ela é muito maior que a rigidez à flexão da viga, podendo ser considerada como uma conexão rígida. É importante mencionar também, que nos problemas de otimização mista, a utilização de um algoritmo de programação matemática com variáveis inteiras é fundamental pois a solução ótima não é obtida apenas aproximando os valores contínuos dos valores discretos mais próximos.

A ausência de uma imposição de agrupamento/simetria proporciona uma solução cujos resultados não são práticos. Assim, seria conveniente definir elementos que compartilhassem as mesmas áreas e fatores de fixação, para ter uma padronização em termos construtivos. Além disso, haveria uma contribuição para a redução no número de variáveis de projeto.

Para reduzir o custo computacional, com o número elevado de variáveis, a estratégia de otimização em duas etapas (a avaliação da otimização contínua e depois mista) apresenta bons resultados, quando comparado com uma otimização inicialmente inteira-mista.

De forma geral, os dois problemas de otimização apresentaram dificuldades com o algoritmo de programação linear sequencial, principalmente quando o mesmo se encontrava em regiões inviáveis. Outro aspecto negativo da abordagem, está relacionado com a possibilidade de o problema ficar preso em mínimos locais. Contudo, pode-se propor a utilização de diferentes algoritmos de otimização, mas todos os algoritmos apresentam algum tipo de dificuldade.

Sugere-se o desenvolvimento de trabalhos futuros, abordando-se os seguintes tópicos:

- Adaptação ou substituição do algoritmo de programação linear sequencial por outro mais robusto e eficiente;
- Imposição de agrupamento/simetria para as áreas e fatores de fixação;
- Implementação de restrições de flambagem global e local;
- Implementação de restrição de frequências naturais.

REFERÊNCIAS

- ABNT NBR 8800. “**Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**”. Design of steel and composite structures for buildings, Brasil, 2008.
- AISC. Specification for Structural Steel Buildings. ANSI/AISC 360-05, **American Institute of Steel Construction**, Chicago, IL, 2005.
- ARORA, J. S. Introduction to Optimum Design. 3th Edition, Elsevier Inc., 2011.
- ARTAR, M; DALOGLU, A.T. Optimum weight design of steel space frames with semi-rigid connections using harmony search and genetic algorithms. **Neural Computing and Applications**, Springer, v. 29, n. 11, p. 1089–1100, 2016.
- ASADPOURE, A; GUEST, J.K; VALDEVIT, L. Incorporating fabrication cost into topology optimization of discrete structures and lattices. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 51, n. 2, p. 385–396, 2014.
- BENDSØE, M. P; BEN-TAL, A; ZOWE, J. Optimization methods for truss geometry and topology design. *Structural optimization*, Springer, v. 7, n. 3, p. 141–159, 1994.
- BENDSØE, M. P; SIGMUND, O. Topology Optimization: theory, methods and applications. Springer, 2003.
- BENNAGE, W. A; DHINGRA, A. K. Optimization of truss topology using tabu search. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** v. 38, n. 23, p. 4035–4052, 1995.
- BRÜTTING, J; SENATORE, G; FIVET, C. MILP-based discrete sizing and topology optimization of truss structures: new formulation and benchmarking. **Struct Multidisc Optimization** v. 65, 2022.
- BRÜTTING, J. *et al.* Environmental impact minimization of reticular structures made of reused and new elements through Life Cycle Assessment and Mixed-Integer Linear Programming. **Energy and Buildings**. Elsevier, 2020.
- CARDOSO, Marcos R., MUÑOZ-ROJAS, Pablo A., CARDOSO, Eduardo L. **Otimização Topológica de Estruturas Tridimensionais de Barras e Pórticos**. Relatório Interno, Lamec – Laboratório de Mecânica Computacional, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2007.
- CHAN, S.L; CHUI, P.T. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. Elsevier, 2000.
- CHANDRUPATLA,T.R; BELEGUNDU,A.D. Introduction to finite elements in engineering. 4. Ed.Pearson, 2012.
- CSÉBFALVI, A. Optimal design of frame structures with semi-rigid joints. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 51, n. 1, p. 9–15, 2007.

ERBATUR, F. *et al.* Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms. **Comput. Struct.** v. 75, n. 2, p. 209–224, 2000.

EUROCODE 3. Joints in Steel Construction: Moment-Resisting Joints to Eurocode 3. The Steel Construction Institute and The British Constructional Steelwork Association Limited, Publication P398, 2013.

FARIA, F.A.C. **Layout and Connections Optimization of Steel Tubular Space Frames Considering Manufacturing Costs**. Dissertassion Mechanical Engineering Department at the College of Technological Science of Santa Catarina State University, Joinville, Santa Catarina, 2019a.

FARIA, F.A.C. **Relatório Interno Com o Computo das Sensibilidades**. Internal report, LAMEC – Laboratory of Computational Mechanics, Department of Mechanical Engineering, Santa Catarina State University, 2019.

GERSTLE, K. H. Effect of connections on frames. **J. Construct. Steel Research**, 10:241-267, 1988.

GUEST; ASADPOURE, A; HA, S.H. Eliminating beta-continuation from heaviside projection and density filter algorithms. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 44, n. 4, p. 443–453, 2011.

GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H.; Belytschko, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, n. 2, p. 238–254, 2004.

HAFTKA, R.T; GURDAL, Z. Elements of structural optimization. v.3. **Kluwer Academic Publishers**, 1996.

HAGER, K.; BALLING, R. New approach for discrete structural optimization. **Journal of Structural Engineer**. v. 114, n. 5, p. 1120–1134, 1988:

HASANÇEBİ, O. Cost efficiency analyses of steel frameworks for economical design of multi-storey buildings. **Journal of Constructional Steel Research**, 128:p.380-396, 2017.

HONGJIA, L; YI, M. X. Reducing the number of diferente members in truss layout optimization. **Structural and multidisciplinary optimization**, 2023.

HE, L; GILBERT, M. Rationalization of trusses generated via layout optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 52, n. 4, p. 677–694, 2015.

JARMAI, K; FARKAS, J. Cost calculation and optimisation of welded steel structures. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 50, n. 2, p. 115–135, 1999.

JOHN, K.V; RAMAKRISHNAN, C.V; SHARMA, K.G. Minimum weight design of trusses using improved move limit method of sequential linear programming. **Computers & Structures**, v. 27, n. 5, p. 583–591, 1987.

KARTAL *et al.* Effects of semi-rigid connection on structural responses. **Electronic journal of structural Engineering**, EJSE International Ltd., University of Melbourne Grattan St. Parkville, v. 10, n. 10, p. 22–35, 2010.

KLANSEK, U. *et al.* Minlp optimization of steel frames. *Advanced Steel Construction* Vol. 3, No. 3, pp. 689–705, 2007.

Lemonge, A. C. C; Barbosa, H. J. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 59, n. 5, p. 703–736, 2004.

MITJANA, F. *et al.* Optimization of structures under buckling constraints using frame elements. **Engineering Optimization**, 2018. doi:10.1080/0305215x.2018.1444162.

MONFORTON G. R. **Matrix analysis of frames with semi-rigid connections**. Dissertation thesis, Department of Civil Engineering, University of Windsor, Canada, 1962.

MSABAWY, A. MOHAMMAD, F. **Practical analysis procedures of steel portal frames having different connections rigidities using modified stiffness matrix and end-fixity factor concept**. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 518 (2019).

MUÑOZ-ROJAS, P.A. **Otimização do Layout de Treliças Espaciais Não-Lineares**. Relatório Interno GMAp 08/00, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS, 2000.

NADER, M. N.; ASTANEH, A. Dynamic behavior of flexible, semirigid and rigid steel frames. **Journal of Constructioal Steel Research**, v. 18, n. 3. p. 179–192, 1991.

NIU, B. *et al.* Topology optimization of compliant mechanisms considering strain variance. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 62, n. 3, p. 1457–1471, 2020.

OHSAKI, M; KATOH, N. Topology optimization of trusses with stress and local constraints on nodal stability and member intersection. *Struct Multidisc Optim*, 2005.

PAVLOVCIC, L; KRAJNC, A; BEG, D. Cost function analysis in the structural optimization of steel frames. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 28, n. 4, p. 286–295, 2004.

PARKES, E. W. Joints in optimum frameworks. *International Journal of Solids and Structures*, 1975.

PRAGER, W. A note on discretized michell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974.

RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms. **Journal of Structural Engineering**, v. 118 n. 5, p. 1233–1250, 1992.

ROSA, D.C.P. **Redução da complexidade e utilização de variáveis mistas na otimização do layout de pórticos espaciais tubulares com conexões semirrígidas**.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2021.

SAKA, M.P.; KAMESHKI, E.S. Optimum design of unbraced rigid frames. **Computers & Structures**, v. 69, n. 4, p.433–442, 1998.

SAVIO, A.A D. **Modelagem Computacional de Estruturas de Aço com Ligações Semi-Rígidas**. Dissertação (Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.

SCHEVENELS, M; LAZAROV, B.S; SIGMUND, O. Robust topology optimization accounting for spatially varying manufacturing errors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 200, n. 49-52, p. 3613–3627, 2011.

SEKULOVIC, M; SALATIC, R. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. **Computers e Structures**, Elsevier, v. 79, n. 11, p. 1097–1107, 2001.

SIMÕES, L.M.C. Optimization of frames with semi-rigid connections. **Computers & structures**, Elsevier, v. 60, n. 4, p. 531–539, 1996.

STOLPE, M. Truss optimization with discrete design variables: a critical review. *Struct Multidisc Optim*, 2016.

TORII, A.J; LOPEZ, R.I. H; MIGUEL, L.F. Design complexity control in truss optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 54, n. 2, p. 289–299, 2016.

WANG, C; QIAN, X. Simultaneous optimization of build orientation and topology for additive manufacturing. **Additive Manufacturing**, Elsevier, v. 34, p. 101246, 2020.

WANG, C. *et al.* Topology optimization of self-supporting structures for additive manufacturing with b-spline parameterization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 374, p. 113599, 2021.

WARDENIER, J. *et al.* **Hollow sections in structural applications**. Zoetermeer, The Netherlands, Bouwen met Staal, 2002.

XU, L; GRIERSON, D.E. Computer-automated design of semirigid steel frameworks. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 119, n. 6, p. 1740–1760, 1993.

ANEXO A

A equação para o cálculo do momento de inércia (I) de uma seção circular vazada é escrita por

$$I = \frac{\pi}{4} (R^4 - R_i^4), \quad (99)$$

onde R é o raio externo e R_i é o raio interno. Expandindo o termo entre parênteses da equação (99) obtemos

$$I = \frac{\pi}{4} (R^2 - R_i^2)(R^2 + R_i^2). \quad (100)$$

Simplificando o termo entre parênteses, à esquerda, da equação (100), tem-se

$$I = \frac{\pi}{4} (R - R_i)(R + R_i)(R^2 + R_i^2), \quad (101)$$

sabendo que o raio médio (R_m) pode ser escrito por

$$2R_m = R + R_i, \quad (102)$$

então, pode-se substituir a equação (102) no segundo termo entre parênteses da equação (101)

$$I = \frac{\pi}{4} (R - R_i)2R_m(R^2 + R_i^2), \quad (103)$$

assim, a equação resulta em

$$I = \frac{\pi R_m}{2} (R - R_i)(R^2 + R_i^2), \quad (104)$$

sabendo que o raio interno pode ser escrito em função da espessura (t) e do raio externo (R), obtém-se

$$R_i = R - t, \quad (105)$$

substituindo a equação (105) na equação (104) e simplificando os termos, obtém-se

$$I = \frac{\pi R_m}{2} t(2R^2 - 2Rt + t^2), \quad (106)$$

$$I = \pi R_m t \left(R^2 - Rt + \frac{t^2}{2} \right). \quad (107)$$

O raio externo pode ser escrito em função do raio médio e da espessura, por

$$R = R_m - \frac{t}{2}, \quad (108)$$

substituindo a equação (108) na equação (107) e realizando as simplificações obtém-se

$$I = \pi R_m t \left(R_m^2 + \frac{t^2}{4} \right), \quad (109)$$

$$I = \pi R_m^3 t + \frac{\pi R_m t^3}{4}. \quad (110)$$

A primeira parcela da equação (110), à esquerda, é apresentada por Faria (2019a) e o segundo termo refere-se a parcela que possibilita a unificação do equacionamento para o cálculo da inércia de uma seção vazada ou maciça.

ANEXO B – INTERFACE PARA INTEGRAÇÃO DO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO COM O LPSOLVE

A integração entre o algoritmo de otimização e o LpSolve foi desenvolvida por Rosa (2021) e, aqui será apresentado um exemplo acadêmico retirado do trabalho da autora, para esclarecer esse processo, segue o exemplo.

Seja o problema de otimização

$$\text{Min} \quad -3x_1 - 2x_2 \quad (111)$$

$$\text{st} \quad 1x_1 - 1x_2 \leq 5 \quad (112)$$

$$4x_1 - 7x_2 \leq 50 \quad (113)$$

O problema definido acima, pode ser solucionado de três maneiras:

- x_1 variável discreta e x_2 contínua;
- x_1 e x_2 variáveis discretas;
- x_1 e x_2 variáveis contínuas.

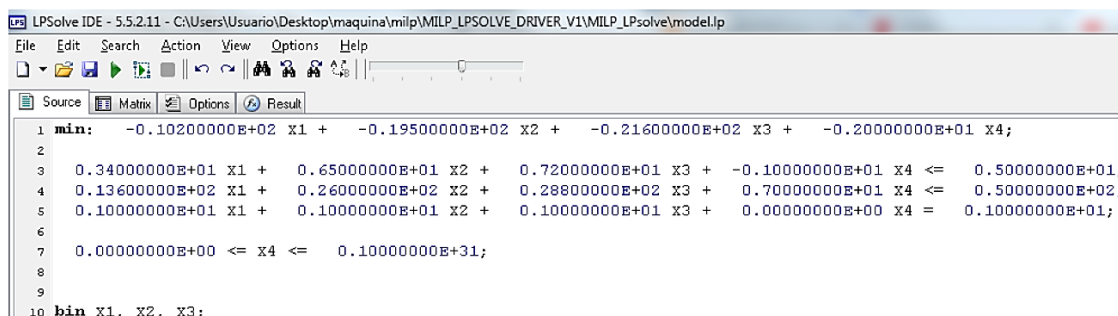
O conjunto discreto de projeto é dado por $\{3,4; 6,5; 7,2\}$

PRIMEIRO CASO: x_1 DISCRETA E x_2 CONTÍNUA

O primeiro passo do algoritmo, é a leitura dos dados do problema (coeficientes da função objetivo, das restrições e demais dados de entrada). Posteriormente, os dados são preparados para o LpSolve. Na rotina de preparo, para cada variável discreta é feita a conversão $x_i = y_{i1}d_{i1} + y_{i2}d_{i2} + y_{i3}d_{i3}$, com y_{ik} binárias e são impostas restrições adicionais que $\sum_{i=1}^3 y_{ik} = 1$, de forma que apenas uma seção discreta seja associada a cada elemento. Esta etapa (preparação) é onde começa efetivamente o processo de organização da informação para a solução do algoritmo de otimização mista com o LpSolve. Um detalhe importante, é que as variáveis discretas devem ser as primeiras no conjunto de variáveis de projeto.

O segundo passo, é a criação de um arquivo de entrada para o LpSolve. Uma subrotina do algoritmo foi desenvolvida para criar este arquivo de entrada. Para o exemplo que está ilustrado, o arquivo de entrada gerado pode ser visto na Figura 44.

Figura 44 – Arquivo de entrada para o LpSolve com uma variável discreta e uma contínua.



```

1 min: -0.10200000E+02 X1 + -0.19500000E+02 X2 + -0.21600000E+02 X3 + -0.20000000E+01 X4;
2
3 0.34000000E+01 X1 + 0.65000000E+01 X2 + 0.72000000E+01 X3 + -0.10000000E+01 X4 <= 0.50000000E+01;
4 0.13600000E+02 X1 + 0.26000000E+02 X2 + 0.28800000E+02 X3 + 0.70000000E+01 X4 <= 0.50000000E+02;
5 0.10000000E+01 X1 + 0.10000000E+01 X2 + 0.10000000E+01 X3 + 0.00000000E+00 X4 = 0.10000000E+01;
6
7 0.00000000E+00 <= X4 <= 0.10000000E+31;
8
9
10 bin X1, X2, X3;

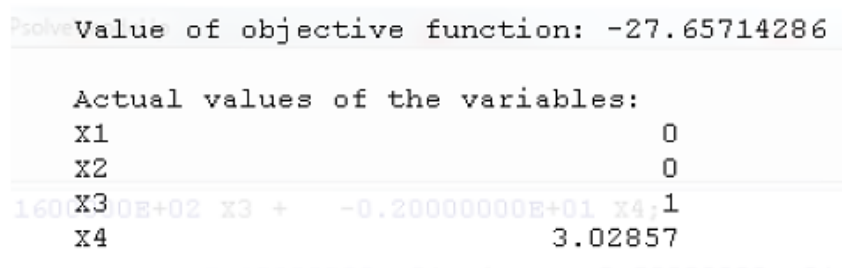
```

Fonte: Rosa (2021).

Na função objetivo, tem-se três variáveis de projeto adicionais. Trata-se da transformação da variável de projeto área pelas variáveis y_{ik} . Note que na Figura 44, a terceira restrição. Ela serve para que apenas uma variável de transformação y_{ik} seja igual a 1. Consequentemente, apenas uma seção discreta é associada a cada elemento.

O terceiro passo, é a otimização através do LpSolve gravando o resultado num arquivo de saída, aqui nomeado como “output”, o qual pode ser visto na Figura 45. Pode-se ver nessa figura, que a solução obtida para x_1 é 7,2 (terceira opção da tabela de possibilidades), x_2 é 3,02857 e tem como função objetivo – 27,6571. Na Figura 45, as variáveis X_1, X_2, X_3 são referentes às variáveis de transformação binárias y_{ik} e a variável X_4 é relacionada à variável contínua x_2 .

Figura 45 – Arquivo de saída com uma variável discreta e uma contínua.



```

Psolve Value of objective function: -27.65714286
Actual values of the variables:
X1 0
X2 0
X3 1
X4 3.02857

```

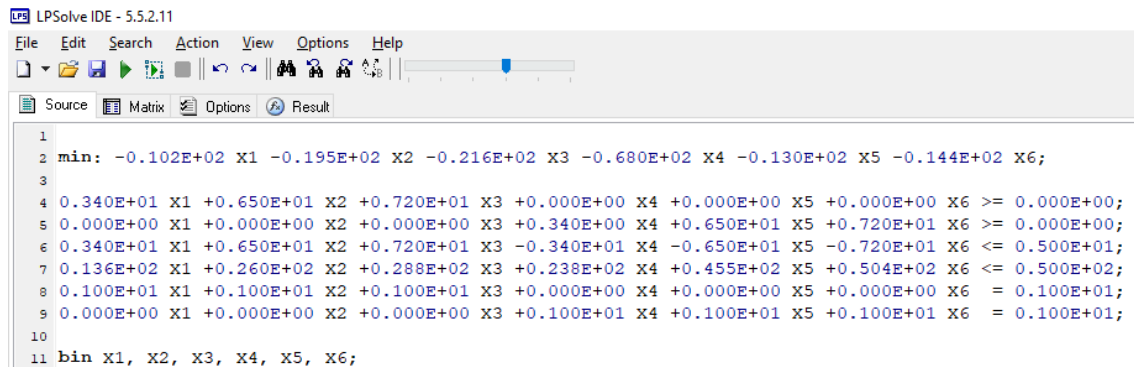
Fonte: Rosa (2021).

SEGUNDO CASO: x_1 E x_2 DISCRETAS

Neste caso, pode-se ver na Figura 47 que X_1, X_2, X_3 são referentes à variável discreta x_1 e X_4, X_5, X_6 respectivas à variável x_2 . O valor da função objetivo encontrado

pelo algoritmo de otimização foi de 26,30, e para as variáveis x_1 e x_2 6,5 e 3,4, respectivamente.

Figura 46 – Arquivo de entrada para o LpSolve com duas variáveis discretas.



```

1
2 min: -0.102E+02 X1 -0.195E+02 X2 -0.216E+02 X3 -0.680E+02 X4 -0.130E+02 X5 -0.144E+02 X6;
3
4 0.340E+01 X1 +0.650E+01 X2 +0.720E+01 X3 +0.000E+00 X4 +0.000E+00 X5 +0.000E+00 X6 >= 0.000E+00;
5 0.000E+00 X1 +0.000E+00 X2 +0.000E+00 X3 +0.340E+00 X4 +0.650E+01 X5 +0.720E+01 X6 >= 0.000E+00;
6 0.340E+01 X1 +0.650E+01 X2 +0.720E+01 X3 -0.340E+01 X4 -0.650E+01 X5 -0.720E+01 X6 <= 0.500E+01;
7 0.136E+02 X1 +0.260E+02 X2 +0.288E+02 X3 +0.238E+02 X4 +0.455E+02 X5 +0.504E+02 X6 <= 0.500E+02;
8 0.100E+01 X1 +0.100E+01 X2 +0.100E+01 X3 +0.000E+00 X4 +0.000E+00 X5 +0.000E+00 X6 = 0.100E+01;
9 0.000E+00 X1 +0.000E+00 X2 +0.000E+00 X3 +0.100E+01 X4 +0.100E+01 X5 +0.100E+01 X6 = 0.100E+01;
10
11 bin X1, X2, X3, X4, X5, X6;

```

Fonte: Rosa (2021).

Figura 47 – Arquivo de saída do LpSolve com duas variáveis discretas.

Value of objective function: -26.30000000

Actual values of the variables:

X1	0
X2	1
X3	0
X4	1
X5	0
X6	0

Fonte: Rosa (2021).

TERCEIRO CASO: x_1 E x_2 CONTÍNUAS

Neste caso, pode-se observar na Figura 48 que X_1 e X_2 são referentes às variáveis x_1 e x_2 , respectivamente. O valor da função objetivo obtido foi de 28,6363 e para as variáveis de projeto x_1 e x_2 foi de 7,7272 e 2,7272, respectivamente.

Figura 48 – Arquivo de saída do LpSolve com duas variáveis contínuas.

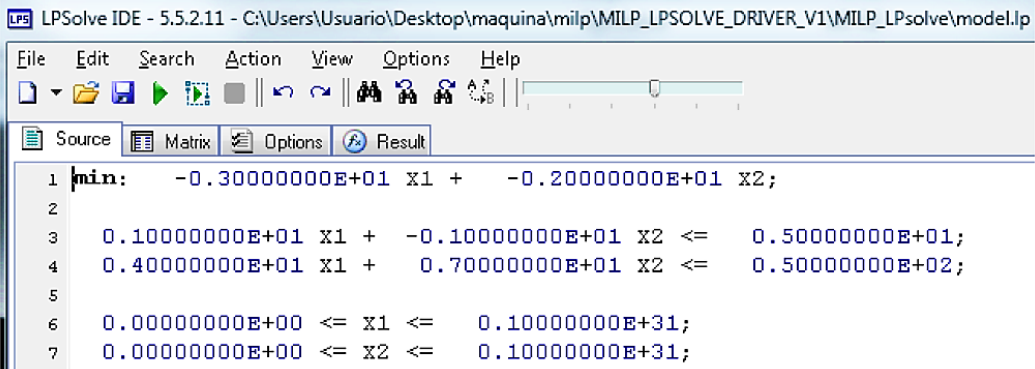
Value of objective function: -28.63636364

Actual values of the variables:

X1	7.72727
X2	2.72727

Fonte: Rosa (2021).

Figura 49 – Arquivo de entrada para o LpSolve com duas variáveis contínuas.



The screenshot shows the LPSolve IDE window titled "LPSolve IDE - 5.5.2.11 - C:\Users\Usuario\Desktop\maquina\milp\MILP_LPSOLVE_DRIVER_V1\MILP_LPsolve\model.lp". The interface includes a menu bar (File, Edit, Search, Action, View, Options, Help) and a toolbar with icons for file operations and solving. Below the toolbar are tabs for "Source", "Matrix", "Options", and "Result". The "Source" tab is active, displaying the following linear programming model:

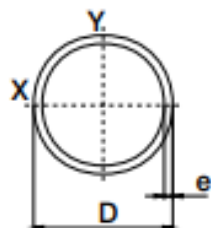
```

1 min:    -0.30000000E+01 x1 +   -0.20000000E+01 x2;
2
3    0.10000000E+01 x1 +   -0.10000000E+01 x2 <=    0.50000000E+01;
4    0.40000000E+01 x1 +    0.70000000E+01 x2 <=    0.50000000E+02;
5
6    0.00000000E+00 <= x1 <=    0.10000000E+31;
7    0.00000000E+00 <= x2 <=    0.10000000E+31;
  
```

Fonte: Rosa (2021).

ANEXO C

Figura 50 – Catálogo Tuper



Ø 139,70 - 5.1/2"		Ø 141,30 - 5.9/16"		Ø 152,40 - 6"		Ø 158,75 - 6.1/4"		Ø 165,10 - 6.1/2"		Ø 168,30 - 6.5/8"	
3,75 - 6,30	19	3,75 - 6,30	19	3,75 - 5,60	19	3,75 - 5,60	19	3,75 - 4,75	19	3,75 - 10,60	10
7,10 - 10,00	13	7,10 - 9,50	13	6,30 - 9,00	13	6,30 - 8,00	13	5,60 - 8,00	13	11,20 - 16,00	7
		10,00	10	9,50 - 10,60	10	9,00 - 16,00	10	9,00 - 10,60	10		
								11,20 - 16,00	7		
139,70		141,30		152,40		158,75		165,10		168,30	
e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p
3,75	75,432	3,75	76,320	3,75	82,478	3,75	86,002	3,75	89,525	3,75	91,301
4,25	85,175	4,25	86,181	4,25	93,161	4,25	97,154	4,25	101,147	4,25	103,160
4,75	94,844	4,75	95,969	4,75	103,770	4,75	108,233	4,75	112,696	4,75	114,945
5,60	111,112	5,60	112,438	5,60	121,635	5,60	126,896	5,60	132,158	5,60	134,809
6,30	124,349	6,30	125,840	6,30	136,187	6,30	142,106	6,30	148,025	6,30	151,008
7,10	139,298	7,10	140,979	7,10	152,640	7,10	159,311	7,10	165,982	7,10	169,343
8,00	155,891	8,00	157,785	8,00	170,923	8,00	178,440	8,00	185,956	8,00	189,744
9,00	174,045	9,00	176,176	9,00	190,957	9,00	199,413	9,00	207,869	9,00	212,130
9,50	183,012	9,50	185,261	9,50	200,863	9,50	209,789	9,50	218,714	9,50	223,212
10,00	191,904	10,00	194,271	10,00	210,695	10,00	220,091	10,00	229,486	10,00	234,221
-	-	-	-	10,60	222,396	10,60	232,355	10,60	242,314	10,60	247,333
-	-	-	-	-	-	11,20	244,513	11,20	255,036	11,20	260,339
-	-	-	-	-	-	12,50	270,489	12,50	282,234	12,50	288,152
-	-	-	-	-	-	14,00	299,841	14,00	312,995	14,00	319,623
-	-	-	-	-	-	15,00	319,039	15,00	333,132	15,00	340,234
-	-	-	-	-	-	16,00	337,941	16,00	352,973	16,00	360,549

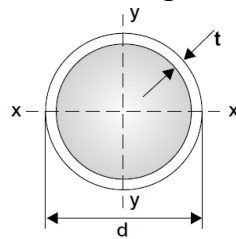
Figura 51 – Catálogo Tuper

Ø 177,80 - 7"		Ø 193,70 - 7.5/8"		Ø 203,20 - 8"		Ø 219,10 - 8.5/8"		Ø 244,48 - 9.5/8"		Ø 254,00 - 10"		Ø 273,00 - 10.3/4"	
3,75 - 10,00	10	3,75 - 9,00	10	3,75 - 8,00	10	3,75 - 11,20	7	4,25 - 10,00	7	4,25 - 9,50	7	4,25 - 9,00	7
10,60 - 16,00	7	9,50 - 16,00	7	9,00 - 11,20	7	12,70 - 16,00	5	10,60 - 16,00	5	10,00 - 16,00	5	9,50 - 16,00	5
				12,50 - 16,00	5								
177,80		193,70		203,20		219,10		244,48		254,00		273,00	
e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p
3,75	96,572	3,75	105,394	3,75	110,665	3,75	119,487	4,25	151,064	4,25	157,050	4,25	168,998
4,25	109,133	4,25	119,132	4,25	125,106	4,25	135,104	4,75	168,485	4,75	175,175	4,75	188,529
4,75	121,621	4,75	132,796	4,75	139,473	4,75	150,647	5,60	197,930	5,60	205,818	5,60	221,561
5,60	142,681	5,60	155,855	5,60	163,727	5,60	176,901	6,30	222,019	6,30	230,893	6,30	248,604
6,30	159,863	6,30	174,685	6,30	183,540	6,30	198,361	7,10	249,371	7,10	259,372	7,10	279,332
7,10	179,323	7,10	196,026	7,10	206,006	7,10	222,709	8,00	279,917	8,00	291,185	8,00	313,675
8,00	200,989	8,00	219,809	8,00	231,054	8,00	249,875	9,00	313,575	9,00	326,252	9,00	351,553
9,00	224,781	9,00	245,954	9,00	258,604	9,00	279,778	9,50	330,293	9,50	343,674	9,50	370,381
9,50	236,566	9,50	258,915	9,50	272,269	9,50	294,618	10,00	346,937	10,00	361,022	10,00	389,135
10,00	248,277	10,00	271,803	10,00	285,859	10,00	309,384	10,60	366,812	10,60	381,743	10,60	411,542
10,60	262,232	10,60	287,170	10,60	302,069	10,60	327,006	11,20	386,580	11,20	402,357	11,20	433,842
11,20	276,082	11,20	302,430	11,20	318,173	11,20	344,522	12,50	429,047	12,50	446,654	12,50	481,795
12,50	305,722	12,50	335,129	12,50	352,700	12,50	382,107	14,00	477,425	14,00	497,146	14,00	536,503
14,00	339,302	14,00	372,238	14,00	391,916	14,00	424,852	15,00	509,308	15,00	530,437	15,00	572,605
15,00	361,318	15,00	396,607	15,00	417,691	15,00	452,980	16,00	540,894	16,00	563,432	16,00	608,412
16,00	383,039	16,00	420,680	16,00	443,170	16,00	480,811	-	-	-	-	-	-

Ø 323,80 - 12.3/4"		Ø 339,70 - 13.3/8"	
5,60 - 16,00	1	6,30 - 16,00	1
323,80		339,70	
e	p	e	p
5,60	263,653	6,30	310,778
6,30	295,957	7,10	349,402
7,10	332,698	8,00	392,627
8,00	373,806	9,00	440,373
9,00	419,200	9,50	464,136
9,50	441,786	10,00	487,824
10,00	464,298	10,60	516,153
10,60	491,215	11,20	544,374
11,20	518,026	12,50	605,156
12,50	575,749	14,00	674,668
14,00	641,732	15,00	720,639
15,00	685,351	16,00	766,314
16,00	728,673	-	-

ANEXO D

Figura 52 – Catálogo Vallourec



Dimensões externas	Espessura da parede	Massa por Unidade de Comp.	Área da Seção Transversal	Momento de Inércia	Raio de Giração	Módulo de Resistência Elastico	Módulo de Resistência Plástico	Const. Torção	Módulo de Resistência à Torção	Área da superfície por unidade de Comp.
d (mm)	t (mm)	m (kg/m)	A (cm²)	$I_x = I_y$ (cm⁴)	$r_x = r_y$ (cm)	$W_x = W_y$ (cm³)	$Z_x = Z_y$ (cm³)	J (cm⁴)	W_t (cm³)	U (m²/m)
60,3	3,6	5,03	6,41	25,9	2,01	8,58	11,6	51,7	17,2	0,189
	4,0	5,55	7,07	28,2	2,00	9,34	12,7	56,3	18,7	
	4,5	6,19	7,89	30,9	1,98	10,2	14,0	61,8	20,5	
	5,0	6,82	8,69	33,5	1,96	11,1	15,3	67,0	22,2	
	5,6	7,55	9,62	36,4	1,94	12,1	16,8	72,7	24,1	
	6,4	8,51	10,8	39,9	1,92	13,2	18,7	79,8	26,5	
	7,1	9,32	11,9	42,7	1,90	14,2	20,2	86,5	28,3	
	8,0	10,3	13,1	46,0	1,87	15,3	22,1	92,0	30,5	
73,0	8,8	11,2	14,2	48,6	1,85	16,1	23,6	97,2	32,2	0,229
	3,6	6,16	7,85	47,4	2,46	13,0	17,4	94,8	26,0	
	4,0	6,81	8,67	51,8	2,44	14,2	19,1	104	28,4	
	4,5	7,60	9,68	57,0	2,43	15,6	21,1	114	31,3	
	5,0	8,38	10,7	62,1	2,41	17,0	23,2	124	34,0	
	5,6	9,31	11,9	67,8	2,39	18,6	25,5	136	37,1	
	6,4	10,5	13,4	74,9	2,37	20,5	28,5	150	41,1	
	7,1	11,5	14,7	80,7	2,34	22,1	31,0	161	44,2	
	8,0	12,8	16,3	87,6	2,32	24,0	34,0	175	48,0	
	8,8	13,9	17,7	93,2	2,29	25,5	36,5	186	51,0	
	10,0	15,5	19,8	101	2,26	27,6	40,0	201	55,2	
	11,0	16,8	21,4	106	2,23	29,1	42,7	212	58,2	

Figura 53 – Catálogo Vallourec.

Dimensões externas	Espessura da parede	Massa por Unidade de Comp.	Área da Seção Transversal	Momento de Inércia	Raio de Giração	Módulo de Resistência Elastico	Módulo de Resistência Plástico	Const. Torção	Módulo de Resistência à Torção	Área da superfície por unidade de Comp.
d (mm)	t (mm)	m (kg/m)	A (cm²)	$I_x = I_y$ (cm⁴)	$r_x = r_y$ (cm)	$W_x = W_y$ (cm³)	$Z_x = Z_y$ (cm³)	J (cm⁴)	W_t (cm³)	U (m²/m)
88,9	3,6	7,57	9,65	87,9	3,02	19,8	26,2	176	39,5	0,279
	4,0	8,38	10,7	96,3	3,00	21,7	28,9	193	43,3	
	4,5	9,37	11,9	107	2,99	24,0	32,1	213	47,9	
	5,0	10,3	13,2	116	2,97	26,2	35,2	233	52,4	
	5,6	11,5	14,7	128	2,95	28,7	38,9	255	57,5	
	6,4	13,0	16,6	142	2,93	31,9	43,6	284	63,9	
	7,1	14,3	18,2	154	2,90	34,6	47,6	308	69,2	
	8,0	16,0	20,3	168	2,87	37,8	52,5	336	75,6	
	8,8	17,4	22,1	180	2,85	40,4	56,7	359	80,9	
	10,0	19,5	24,8	196	2,81	44,1	62,6	392	88,2	
	11,0	21,1	26,9	208	2,78	46,9	67,2	417	93,7	
	12,5	23,6	30,0	225	2,74	50,6	73,6	450	101	
101,6	4,0	9,63	12,3	146	3,45	28,8	38,1	293	57,6	0,319
	4,5	10,8	13,7	162	3,44	31,9	42,5	324	63,8	
	5,0	11,9	15,2	177	3,42	34,9	46,7	355	69,9	
	5,6	13,3	16,9	195	3,40	38,4	51,7	390	76,9	
	6,4	15,0	19,1	218	3,37	42,9	58,1	436	86,8	
	7,1	16,5	21,1	237	3,35	46,6	63,5	473	93,2	
	8,0	18,5	23,5	260	3,32	51,1	70,3	519	102	
	8,8	20,1	25,7	279	3,30	54,9	76,0	557	110	
	10,0	22,6	28,8	305	3,26	60,1	84,2	611	120	
	11,0	24,6	31,3	326	3,23	64,2	90,7	652	128	
	12,5	27,5	35,0	354	3,18	69,7	99,9	708	139	
114,3	4,0	10,9	13,9	211	3,90	36,9	48,7	422	73,9	0,359
	4,5	12,2	15,5	234	3,89	41,0	54,3	469	82,0	
	5,0	13,5	17,2	257	3,87	45,0	59,8	514	89,9	
	5,6	15,0	19,1	283	3,85	49,6	66,2	566	99,1	
	6,4	17,0	21,7	317	3,82	55,4	74,6	634	111	
	7,1	18,8	23,9	345	3,80	60,4	81,7	690	121	
	8,0	21,0	26,7	379	3,77	66,4	90,6	759	133	
	8,8	22,9	29,2	409	3,74	71,5	98,2	817	143	
	10,0	25,7	32,8	450	3,70	78,7	109	899	157	
	11,0	28,0	35,7	482	3,67	84,3	118	963	169	
	12,5	31,4	40,0	526	3,63	92,0	130	1.051	184	
	14,2	35,1	44,7	571	3,57	99,8	143	1.141	200	