UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO – LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JEFERSON CAMARGO DA SILVA

MATERIAIS CONCRETOS E VIRTUAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA: UM LEQUE DE PROPOSTAS DE ATIVIDADES

JOINVILLE
2022

JEFERSON CAMARGO DA SILVA

MATERIAIS CONCRETOS E VIRTUAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA: UM LEQUE DE PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

JOINVILLE

2022

JEFERSON CAMARGO DA SILVA

MATERIAIS CONCRETOS E VIRTUAIS NO ENSINO DE GEOMETRIA: UM LEQUE DE PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

BANCA EXAMINADORA

Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Me. Marnei Luis Mandler
Universidade do Estado de Santa Catarina

Me. Valdir Damázio Junior
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 20 de julho de 2022.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e minha namorada por todo o carinho e apoio durante toda a graduação, especialmente durante a elaboração do trabalho.

Aos meus amigos que entraram no curso comigo, por todos os momentos descontraídos, apoio, companhia e aprendizagens ao longo dos semestres.

A professora Elisandra, minha orientadora, por todos os bons momentos, aprendizados e contribuições para meu trabalho e minha formação.

Aos professores Marnei e Valdir por aceitarem fazer parte da banca e contribuírem não só com este trabalho, mas com minha formação.

A professora Débora, por aceitar a participação no trabalho e toda a contribuição para aplicação e análise das atividades.

Aos meus colegas de curso e professores da Udesc, por todo o aprendizado ao longo da graduação.

A todos os outros que contribuíram para a minha formação de alguma maneira.

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar materiais manipuláveis concretos e virtuais para o ensino de tópicos da geometria plana e espacial e elaborar propostas de atividades que os utilizem para enriquecer os processos de ensino e de aprendizagem. Para a elaboração do trabalho, fez-se necessária a revisão bibliográfica sobre os estudos já existentes a respeito das possibilidades e benefícios desses materiais para os processos de ensino e de aprendizagem, e também para aprofundar os conhecimentos do autor sobre tópicos da geometria. Para cumprir com o objetivo, diversos materiais concretos foram idealizados, modelados e confeccionados com uso de tecnologia de impressão 3D e corte a laser, enquanto os materiais virtuais foram elaborados com uso do software GeoGebra e da plataforma Moodle. Alguns materiais e propostas de atividades foram organizados em uma sequência de atividades, para a aplicação em uma disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina, que abordava poliedros e suas planificações, o cálculo de áreas da superfície de sólidos geométricos e as definições de polígonos e poliedros. Com o uso de uma análise qualitativa foi observado que os resultados da aplicação contribuíram para a visualização, compreensão de conceitos e a criação de estratégias para enfrentar os problemas propostos, despertando interesse, curiosidade e desafiando os participantes ao longo do processo.

Palavras-chave: Geometria. Materiais Manipuláveis. Impressão 3D.

ABSTRACT

The present work aims to present concrete and virtual manipulable materials for the teaching of topics of plane and solid geometry and to develop proposals for activities that use them to enrich the teaching and learning processes. For the elaboration of the work, it was necessary to review the literature on existing studies regarding the possibilities and benefits of these materials for the teaching and learning processes, and also to deepen the author's knowledge on topics in geometry. To fulfill the objective, several concrete materials were designed, modeled and made using 3D printing technology and laser cutting, while the virtual materials were created using the GeoGebra software and the Moodle platform. Some materials and proposals for activities were organized in a sequence of activities, for application in a class of Mathematics Teaching Laboratory at the Santa Catarina State University, which addressed polyhedra and their nets, the calculation of surface areas of geometric solids and the definitions of polygons and polyhedra. Using a qualitative analysis, it was observed that the results of the application contributed to the visualization, understanding of concepts and the creation of strategies when facing the proposed problems, arousing interest, curiosity and challenging the participants throughout the process.

Key words: Geometry. Manipulable Materials. 3D Printing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
FAB3D	Laboratório Fábrica Matemática
GPE	Geometria Plana e Espacial
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MMM	Movimento Matemática Moderna
OA	Objeto de Aprendizagem
STL	StereoLithography
SVG	Scalable Vector Graphics
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na busca da melhoria e exploração de diferentes possibilidades nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática, diversas alternativas já foram tomadas ao longo do tempo. É possível encontrar diversos trabalhos no meio acadêmico e nas salas de aula que utilizam metodologias ativas, materiais concretos ou tecnologias digitais buscando facilitar a compreensão de diversos tópicos na matemática.

Em particular, o ensino de geometria sofre de uma deficiência histórica, tanto por dificuldade dos professores em lidar com o conteúdo, como pela dificuldade dos alunos em visualizar os objetos geométricos, abstrair e generalizar conceitos. Ângelo, Santos e Barbosa (2020) relatam que a influência do Movimento Matemática Moderna (MMM) reforçou uma abordagem formalista dos tópicos matemáticos e com a lei Nº5.692/71, que dava liberdade para as escolas escolherem seus programas de ensino, uma resistência foi criada ao ensino de geometria, dado que os professores não se sentiam aptos para trabalhar com o enfoque em planos vetoriais e transformações geométricas. Assim, a geometria era adiada ou abandonada nas salas de aula e, consequentemente, um destaque maior era dado para a álgebra, valorizada pela ênfase na teoria de conjuntos do MMM.

O uso de materiais concretos e virtuais pode contribuir para facilitar a representação dos objetos matemáticos, a visualização dos alunos e a generalização de propriedades, além de propor uma atividade diferente do habitual. Consoante a isso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) incentiva que a geometria deve explorar características das formas geométricas, associando-as com suas planificações e objetos reais, tornar os alunos capazes de comparar diferentes polígonos e não se limitar ao estudo e aplicação de fórmulas e teoremas (BRASIL, 2018).

Nesse contexto, o presente trabalho buscou desenvolver materiais concretos e virtuais para o ensino de geometria plana e espacial e elaborar propostas de atividades que os utilizassem. Aliado a isso, o trabalho também descreve e analisa a aplicação de uma sequência de atividades, composta por algumas das atividades propostas e utilizando materiais manipuláveis concretos.

Por fim, o feedback do uso de materiais concretos em aplicações didáticas contribui para a evolução do material e de como podem ser abordados pelo professor. Logo, o retorno de professores, alunos e outros envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem contribui para a análise da aplicação da sequência de atividades e se tornam fatores essenciais para o aperfeiçoamento desses materiais. Consequentemente, os resultados da pesquisa podem favorecer reflexão sobre os possíveis usos destes materiais, pontos positivos e negativos encontrados na aplicação, e possibilidades para aplicações futuras de atividades como as aplicadas ou similares.

Neste trabalho foram desenvolvidos materiais concretos e materiais virtuais para o ensino de geometria, utilizando as tecnologias de impressão 3D, corte a laser e o software GeoGebra, e elaboradas propostas de atividades que explorem estes dois tipos de materiais. Uma sequência de atividades foi elaborada a partir das propostas de atividades, aplicada na formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática, em uma disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), e os seus resultados foram analisados por uma abordagem qualitativa.

A revisão bibliográfica mostra-se importante para a pesquisa, para que seja possível conhecer os materiais já elaborados sobre o tema e estudar a teoria envolvida nas atividades propostas, como por exemplo, as diferentes definições de poliedro. Além disso, ela "permite ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente" (GIL, 2008, p. 50). Deste modo, é possível conhecer previamente conceitos novos, pontos positivos e negativos dos materiais e utilizar esse conhecimento para contribuir na idealização, aplicação e análise dos materiais.

Para fazer a análise dos dados foi escolhida uma abordagem qualitativa, pois se adequa melhor aos objetivos da pesquisa. Segundo Goldenberg (2004), o interesse de uma pesquisa qualitativa não está em aspectos numéricos ou quantificáveis, mas sim no aprofundamento da compreensão de um grupo social. Os dados utilizados para a análise foram obtidos por meio da observação, da leitura das resoluções das atividades escritas, de gravações dos áudios das discussões, dos registros fotográficos e de vídeo, de colocações feitas pela professora responsável pela disciplina e dos questionários de avaliação respondidos pelos alunos após a aplicação. Todos os dados registrados em vídeo, áudio e imagens foram obtidos com a autorização prévia dos alunos segundo atestado nos termos de consentimento requisitados para a aplicação (Apêndice A).

Este trabalho está organizado em oito capítulos, iniciando com a introdução. O segundo capítulo aborda o uso de materiais manipuláveis concretos para o ensino de matemática, desde sua utilização na Grécia Antiga até a atualidade. O capítulo também aborda o uso de materiais virtuais e tecnologias digitais para o ensino de matemática, com destaque para softwares de geometria dinâmica e Objetos de Aprendizagem (OAs).

No terceiro capítulo são abordadas as tecnologias utilizadas para elaborar os materiais. São destacados o software GeoGebra, a impressão 3D e o corte a laser, apresentando uma noção inicial sobre sua história, como funcionam e de que forma são utilizadas para a elaboração de materiais concretos e virtuais.

No quarto capítulo serão abordados alguns conhecimentos matemáticos importantes para a elaboração das atividades e materiais, como os poliedros com buraco, as definições de polígono e poliedro e a relação de Euler.

No quinto capítulo estão descritos os processos de idealização dos materiais criados, a forma que foram confeccionados e os passos que levaram a formação das propostas de atividades e da sequência de atividades.

O sexto capítulo explora a aplicação da sequência de atividades, partindo da identificação do contexto no qual foi aplicada e descrevendo como esta aplicação se desenvolveu ao longo das atividades.

No sétimo capítulo é feita a análise dos resultados obtidos com a aplicação das atividades, complementados pelo retorno fornecido pela professora responsável pela disciplina e pela análise das impressões dos alunos participantes, coletadas por meio de questionários.

Por fim, no oitavo e último capítulo são feitas as considerações finais a respeito do desenvolvimento dos materiais e das propostas de atividades, da análise dos dados obtidos e das conclusões do trabalho.

2 MATERIAIS CONCRETOS X MATERIAIS VIRTUAIS

Neste capítulo abordaremos o uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática. Além das vantagens e possibilidades que o uso de materiais concretos traz para a sala de aula, também destacamos a abordagem com uso de tecnologias digitais no ensino, com destaque para os softwares de geometria dinâmica.

2.1 MATERIAIS CONCRETOS

Segundo Lorenzato (2006 p. 18 *apud* RODRIGUES; GAZIRE, 2012, p. 4) podemos definir material didático como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”. O autor destaca os materiais didáticos concretos e estabelece uma classificação para materiais manipuláveis, separando-os em estáticos, que não podem ser alterados fisicamente, e dinâmicos, cujas formas podem ser alterada por quem os manipula.

O uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática não é algo recente, com usos encontrados desde a geometria grega de Arquimedes, aos usos em universidades a partir do século XVII e aos aperfeiçoamentos a partir dos últimos séculos, em especial pela tecnologia de impressão 3D (AGUIAR; FIGUEIREDO; MATTOS, 2019). Os autores utilizam esta tecnologia para criar um elipsógrafo e um parabológrafo, artefatos para desenhar elipses e parábolas, respectivamente.

Knill e Slavskovsky (2013) utilizaram materiais concretos para representar materiais desenvolvidos por Arquimedes de uma forma mais fácil do que desenhos em uma lousa. Desse modo, o contato e a manipulação dos materiais facilitam o entendimento e a visualização dos conceitos. Além do destaque para as perspectivas que esses materiais podem trazer para refletir sobre a história da matemática e da engenharia, os autores também apontam como o uso dessa tecnologia é fantástico para ilustrar conceitos do cálculo na universidade.

Santos e Gualandi (2016) verificaram o uso dos materiais concretos por professores da rede pública de ensino do Espírito Santo, percebendo que são geralmente utilizados com objetivo de introduzir ou fixar conteúdos, mas também há casos em que são utilizados para avaliar a aprendizagem os alunos. Assim, observaram que os materiais manipuláveis podem ser utilizados com diferentes funções no processo de ensino. Segundo os autores, o uso de materiais manipuláveis colabora para o desenvolvimento de habilidades de observação, análise, levantamento de hipóteses, tomada de decisão, argumentação e organização. No ensino e aprendizagem de matemática, o aluno deve interpretar problemas e abstraí-los para compreender conceitos e, do mesmo modo, o uso de material manipulável parte da experimentação para a generalização de propriedades do objeto.

Para que este desenvolvimento seja possível, Felix Klein (1849 - 1925), o matemático fundador da Comissão Internacional de Educação Matemática, destaca a importância da visualização no aprendizado de matemática, em especial no caso da geometria, onde deve haver uma tentativa de ensinar usando a intuição inicial propiciada pela experiência concreta, para depois realizar a abstração de conceitos. O autor acredita que é possível trabalhar com geometria apenas pela intuição do empirismo, assim como é possível deixá-la de lado para trabalhar com análises completamente abstratas, mas ambas possibilidades parecem ser infrutíferas. Neste contexto, o Klein defende uma abordagem que mantenha uma conexão bidirecional entre o concreto e o abstrato (HALVERSCHEID; LABS, 2019).

Os materiais concretos tornam possível essa visualização, tornando palpáveis os objetos e conceitos que se pretende estudar e favorecendo uma experiência pessoal do aluno com eles. Além disso, “as visualizações também ajudam a mostrar a beleza da matemática e promovê-la para as pessoas. As figuras podem inspirar novas ideias, gerar novos teoremas ou auxiliar na computação.” (AGUIAR, 2016).

Contudo, o material manipulável concreto não pode ser empregado pelo professor sem um processo de reflexão que o preceda. Cabe ao profissional responsável considerar o conteúdo a ser estudado, os objetivos que pretende atingir, que tipo de atividade deseja alcançar e as limitações do material antes do seu uso (SANTOS; GUALANDI, 2016)

2.2 MATERIAIS VIRTUAIS

Com o avanço tecnológico das últimas décadas houve, consequentemente, um desenvolvimento nas possibilidades para o ensino. Com esse avanço surgiram diversas tecnologias digitais para o ensino, como os computadores, tablets, celulares, lousas digitais, aplicativos, plataformas e softwares educativos. Nesta seção daremos destaque aos softwares de geometria dinâmica.

Um software de geometria dinâmica permite a criação e a manipulação interativa sob múltiplas formas de linguagem (algébrica, aritmética, geométrica, estatística, gráfica) (LUCENA, 2017). Nesses softwares, a figura se modifica através de deslocamentos aplicados a seus elementos, porém mantém as relações geométricas características da situação. O GeoGebra, Winplot, Cabri-Geometry e o Régua e Compasso são alguns exemplos de softwares de geometria dinâmica.

Segundo Hanna (2000, p.12, tradução nossa), “O software de geometria dinâmica tem o potencial de encorajar tanto a exploração quanto a prova ao mesmo tempo”. Além disso, a precisão dos recursos do software facilita para os estudantes entender as proposições. “Os estudantes também podem facilmente testar conjecturas explorando as propriedades dadas pelas construções que eles produzem ou até mesmo ‘descobrir’ novas propriedades” (HANNA, 2000, p.12, tradução nossa).

Nesses softwares, também é possível criar materiais virtuais como os Objetos de Aprendizagem (OAs). Estes OAs são objetos digitais, pequenos e focados em um objetivo de aprendizagem único, com possibilidade de serem reutilizados em diferentes contextos ou com novos materiais, com interatividade e facilidade de uso. Por ser interativo, um OA pode conquistar facilmente a atenção dos alunos, e seu papel na aprendizagem passa a ser mais ativo. Pela manipulação dos elementos, o aluno passa a interagir com o objeto de estudo e pode desenvolver um senso investigativo importante para seu aprendizado (KALINKE, et al, 2015).

Em sua dissertação abordando OAs para o ensino de funções reais de duas variáveis, Lemke (2015) desenvolveu dez OAs para auxiliar o estudo de superfícies, coordenadas esféricas e cilíndricas e integração dupla. Alguns desses OAs foram aplicados por professores e, apesar de dificuldades técnicas, foram capazes de despertar o interesse nos alunos e facilitar a visualização dos conceitos.

Os materiais concretos e virtuais não são excludentes, mas sim se complementam em suas potencialidades e suas diferentes formas de serem explorados pelos alunos. Por exemplo, como citado por Lemke (2016), a representação física auxilia na percepção tátil do objeto e suas propriedades que a tela bidimensional dos recursos tecnológicos não consegue. Por outro lado, o material físico é geralmente estático, já que não é possível alterar suas dimensões, mas essa limitação pode ser suprida pelo uso de materiais virtuais.

Do mesmo modo, no seu trabalho abordando o cálculo do volume da esfera, Benk (2016) utiliza materiais concretos e virtuais em sua proposta didática. A autora acredita que o contato com o material concreto pode tornar o conteúdo mais intuitivo e tátil, possibilitando a verificação de hipóteses do princípio de Cavalieri. Dada a limitação da maquete física, a autora também programou um OA no GeoGebra, que a partir da alteração dos valores do raio e da altura da seção observada permite observar que o volume da esfera é igual ao volume da anticlépsidra.

3 FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS

Neste capítulo abordaremos as tecnologias utilizadas para a elaboração e confecção dos materiais desenvolvidos: o software GeoGebra, a impressão 3D e o corte a laser. O objetivo do capítulo não é ensinar a utilizar essas ferramentas, mas sim dar uma ideia geral de como os processos de elaboração e confecção funcionam, possivelmente servindo como um ponto de partida para o leitor pesquisar mais sobre elas.

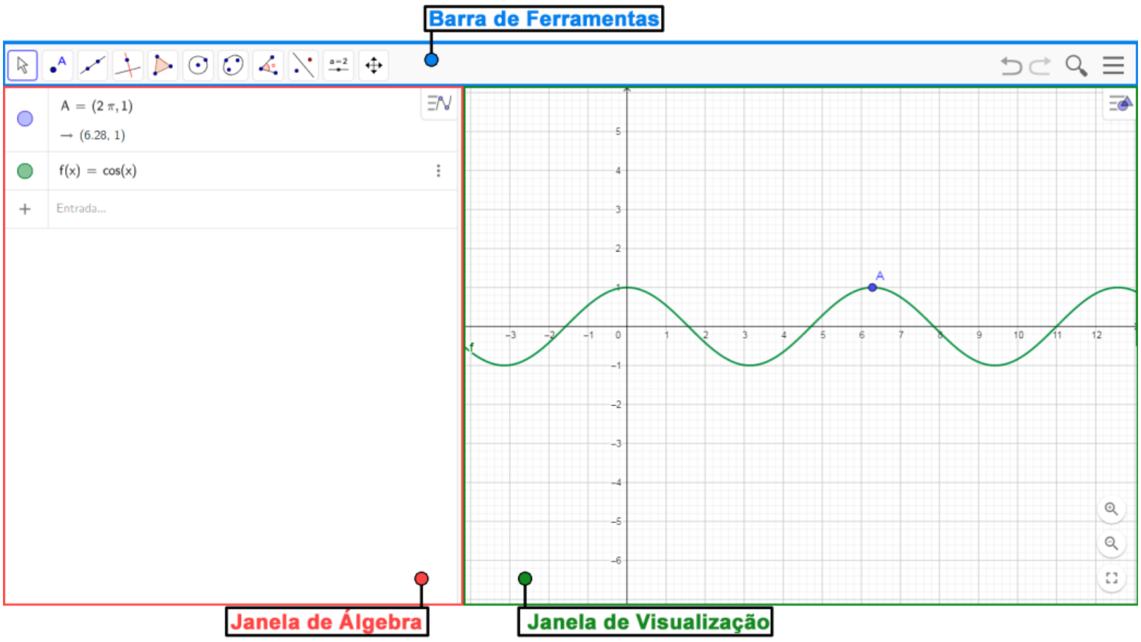
3.1 GEOGEBRA

O GeoGebra, um exemplo de software de geometria dinâmica, é uma plataforma livre para qualquer pessoa se cadastrar, criar e compartilhar seus recursos, com facilidade de utilização, pois as ferramentas do programa são autoexplicativas e, mesmo que não tenham conhecimento aprofundado de informática, podem ser utilizadas sem muita dificuldade por professores e alunos (LUCENA, 2017, p. 59). Segundo Lemke (2016), o software oferece diferentes representações, tais como algébrica, gráfica e numérica, interligadas de maneira dinâmica, possibilitando uma ampla gama de recursos para que os professores possam idealizar as suas próprias concepções de OAs.

> O **GeoGebra** (aglutinação das palavras **Geo**metria e Ál**gebra**) é um software de Matemática dinâmica, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único GUI (do inglês, **Graphical User Interface**, ou do português **Interface Gráfica do Utilizador**). O GeoGebra é um software livre, disponível gratuitamente em www.geogebra.org, escrito em linguagem Java, linguagem esta orientada a objetos. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula em todos os níveis de ensino. O projeto foi iniciado na Universidade de Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, além de ser traduzido para inúmeros países, incluindo o Brasil (SCADELAI, 2014, p. 13, grifo do autor).

A interface do GeoGebra é composta por diferentes Janelas com formas diferentes de representação. A Janela de Álgebra, por exemplo, exibe as equações, leis de funções e coordenadas, enquanto a Janela de Visualização exibe a representação geométrica desses elementos, por meio de curvas e pontos no plano. Acima das Janelas encontra-se a barra de ferramentas, onde existem atalhos para a criação de pontos, segmentos de reta, retas, polígonos, arcos, cônicas, medição e transformação. A Figura 1 ilustra a interface do software e indica os elementos mencionados.

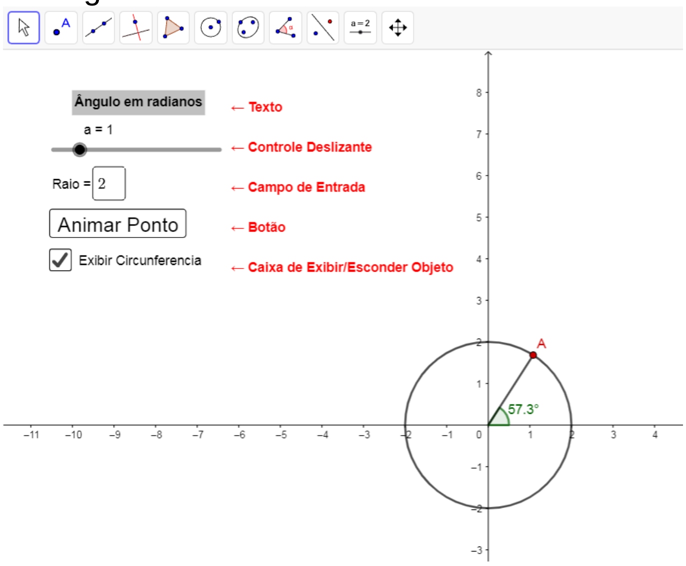
Figura 1 – Interface do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Além disso, existem ferramentas auxiliares que ajudam a identificar, organizar e modificar elementos exibidos nas Janelas. A ferramenta Controle Deslizante, por exemplo, cria um elemento com variação numérica, que pode ser inserido como um parâmetro em outros comandos. Como a ferramenta nos permite variar este valor em um “slider”, podemos observar como a representação geométrica na Janela de Visualização se altera de acordo com esta variação. Por sua vez, o Campo de Entrada permite ao usuário alterar diretamente um elemento presente no programa, como o valor de uma variável, a coordenada de um ponto ou a lei de uma função. Por fim, as ferramentas de Texto, Caixa para Exibir/Esconder Objetos e Botão ajudam a organizar a informação na tela com textos auxiliares, exibição e ocultação de elementos e execução de pequenos blocos de código, respectivamente. A Figura 2 apresenta a identificação das ferramentas mencionadas, aplicadas em um exemplo.

Figura 2 – Ferramentas auxiliares



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Também é possível exibir Janelas adicionais na interface do software, a partir dos seus menus. Além das Janelas de Álgebra e Visualização, existe a Planilha, que pode ser utilizada para organizar dados e representá-los como listas de pontos ou matrizes, e a Calculadora de Probabilidade, que trabalha com distribuição de probabilidade e teste de hipóteses.

O GeoGebra também possui uma Janela de Visualização 3D, que pode ser utilizada para a visualização de objetos tridimensionais, de forma análoga à de Visualização. Nesta Janela em particular, o software possui comandos que criam prismas e pirâmides a partir de sua base, poliedros regulares a partir de uma de suas faces e sólidos de revolução a partir da rotação de pontos ou curvas ao redor de um eixo. Além disso, existe um comando que gera a planificação de um poliedro selecionado, com a possibilidade de animar esse processo. Deste modo, essa funcionalidade torna possível simular a atividade de envolver um desses poliedros pela sua respectiva planificação sem a necessidade de possuir o material concreto. No Capítulo 5 abordaremos exemplos dessa função.

3.1.1 O software e algumas possibilidades

Dada sua estrutura, o GeoGebra possui potencial para a exploração da geometria dinâmica, uma vez que suas variadas Janelas de Visualizações, com destaque para as geométricas e algébricas, “permitem ao aluno a manipulação interativa com suas ferramentas sob múltiplas formas de linguagem como algébrica, aritmética, geométrica, estatística e gráfica” (LUCENA, 2017, p. 58). Com essas Janelas, toda mudança feita na representação algébrica gera uma mudança automática na geométrica, e vice-versa, possibilitando uma associação entre as duas formas de representação por parte do estudante. Desse modo, segundo Neide e Quartieiri (2016), aqueles problemas que antes se apresentavam apenas de forma algébrica, hoje podem ser exaustivamente explorados por aplicativos dotados de vários recursos gráficos.

Outra possibilidade para atividades criadas no GeoGebra é o uso de noções básicas de programação aliadas à álgebra para criar animações, organizar e modificar os elementos presentes nas Janelas. Para isso é necessário criar variáveis numéricas (valores inteiros ou reais) ou booleanas (verdadeiro ou falso) e utilizar ferramentas como controles deslizantes, campos de entrada e botões para alterar seus valores. Alguns comandos também auxiliam nesse processo, como o comando “Se(Condição, Então, Senão)” que funciona de forma análoga aos conectivos lógicos condicionais e funções “*if else*” da programação. Com o uso dessas ferramentas, é possível criar OAs nos quais é possível alterar quantidades, observar os padrões que se formam e generalizar conceitos a partir deles.

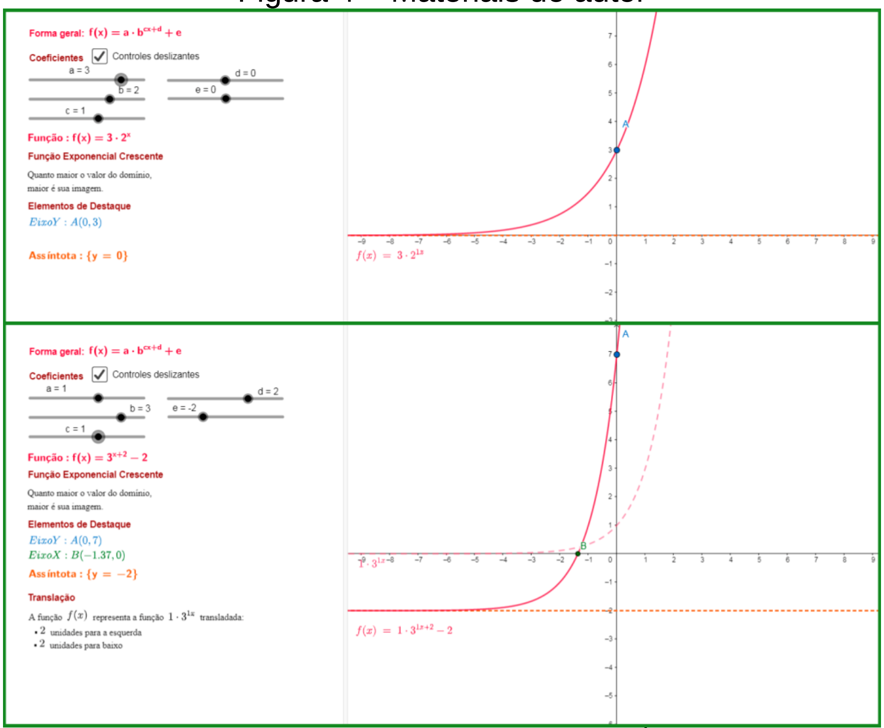
Os objetos na tela podem ser ligados às variáveis numéricas ou booleanas na aba Avançado de suas configurações. Nela podemos escrever uma relação ou inserir uma variável booleana no campo “Condição para Exibir Objeto(s)”, de tal forma que o objeto só será exibido quando a expressão escrita no campo for verdadeira. De forma similar, nos botões são colocados pequenos algoritmos (Figura 3) que alteram os valores de variáveis e iniciam ou param animações de acordo com esses valores. Alternativamente, os valores numéricos ou as etapas da animação podem ser alterados de forma precisa por controles deslizantes e campos de entrada.

Figura 3 – Códigos para animar um objeto com o Controle Deslizante k

Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Essa possibilidade foi descoberta ao conhecer as atividades criadas pelo professor Jorge Cássio, professor adjunto na Universidade Federal de Santa Catarina. Seus materiais utilizam a programação no GeoGebra para criar atividades com feedback imediato, ajudando a identificar erros e acertos. Considerando a facilidade e interesse do autor por programação, esses novos conhecimentos foram utilizados para organizar e alterar as informações presentes na tela de acordo com as modificações feitas pelo usuário. Nas figuras abaixo encontram-se exemplos de um OA criado pelo autor (Figura 4) e uma atividade elaborada pelo professor Jorge Cássio (Figura 5).

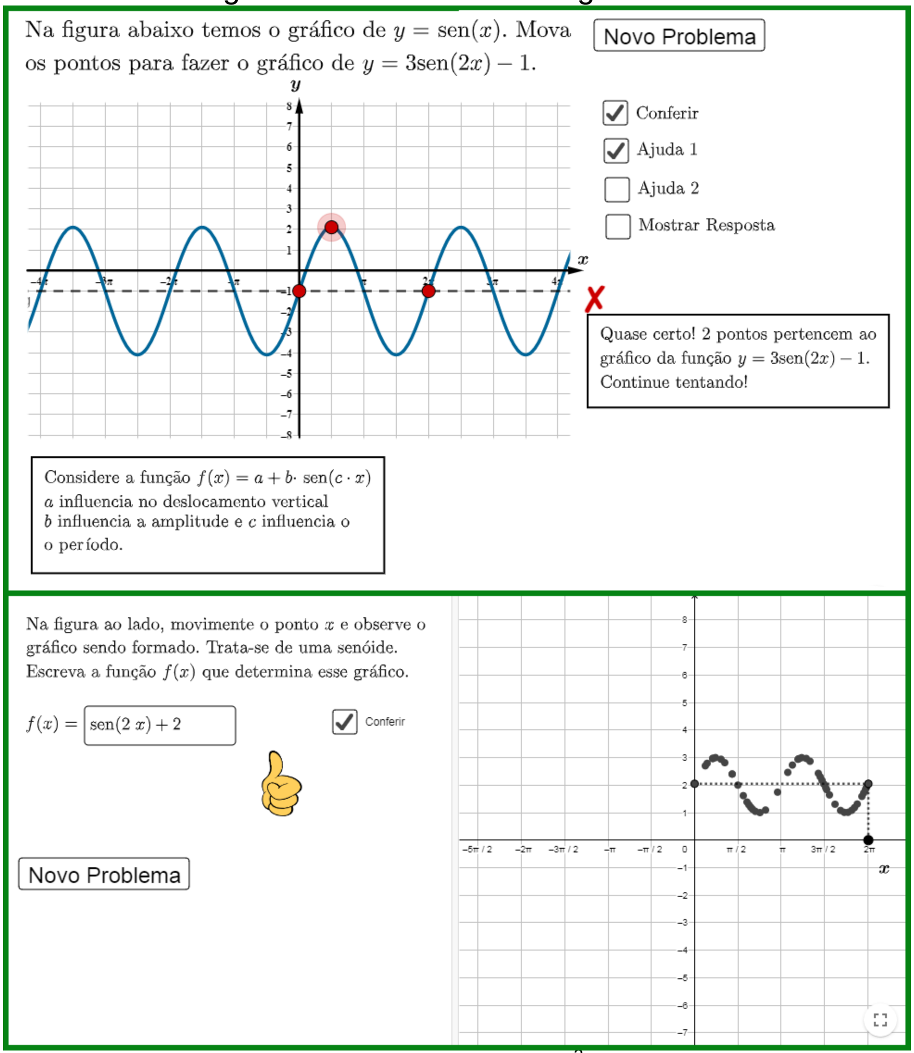
Figura 4 – Materiais do autor



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)[1].

[1] https://www.geogebra.org/m/kf7dwzjm

Figura 5 – Materiais de Jorge Cássio



Fonte: Cássio (2021)[2].

3.2 IMPRESSÃO 3D E CORTE A LASER

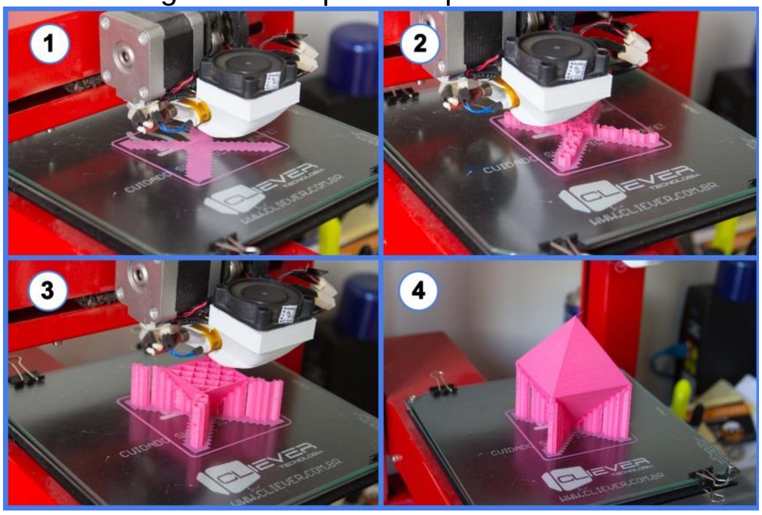
Segundo Aguiar e Yonezawa (2014), a impressão 3D inicia sua história na década de 80, com o processo de esteriolitografia de Charles W. Hull. Essa técnica utiliza a emissão de luz ultravioleta para solidificar camadas de um polímero similar à resina. Assim, sobre uma plataforma imersa no polímero, o modelo é formado camada a camada.

Em 1989 surgiria uma nova técnica de impressão 3D com o estudo de Scott Crump e se popularizaria ao longo dos próximos anos entre impressoras de baixo custo. Por meio de um processo análogo à impressão em papel com

[2] https://www.geogebra.org/m/ewb2fsvq

jatos de tinta, o processo de Crump utilizava um tipo de pistola de cola quente, carregada com um filamento de plástico derretido. Esse filamento era depositado no plano bidimensional e, com a adição de um terceiro eixo de movimento, a pistola pode empilhar camadas de filamento para criar os materiais (AGUIAR; YONEZAWA, 2016). A Figura 6 exemplifica o processo de impressão por camadas de Crump em uma impressora mais moderna.

Figura 6 – Impressão por camadas



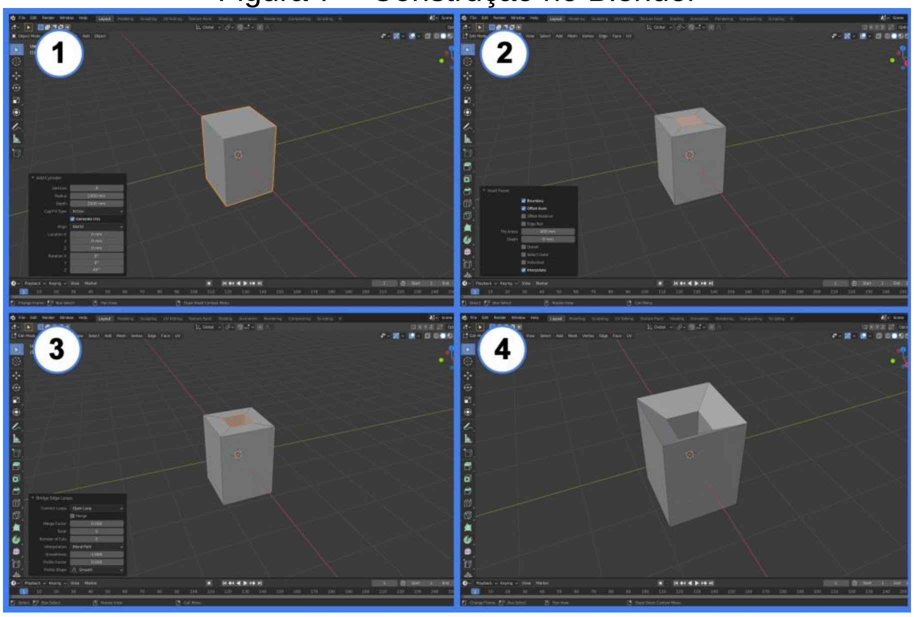
Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Já a tecnologia de corte a laser tem seu início com o descobrimento do laser, no final do século XIX, pela descoberta de Albert Einstein da emissão estimulada de radiação (GERCK; LIMA, 1997). O desenvolvimento das máquinas de corte a laser aconteceu ao longo da década de 80 e de 90, utilizando um feixe laser focalizado por uma lente especial para queimar o material. Atualmente, o tipo de laser mais utilizado para a elaboração de materiais é o de dióxido de carbono (CO_2) e o sistema de corte mais difundido é o projetado para chapas ou folhas para criação de peças planas. Nesses sistemas, a mesa da máquina contendo a chapa do material (metal, madeira, acrílico, entre outros) permanece fixa, enquanto o cabeçote com o laser se movimenta (ou vice-versa) em duas dimensões sobre ela, se mantendo sempre próximo (entre 1 mm e 2 mm).

A construção de objetos utilizando impressão 3D é feita em um processo de várias etapas. Se o modelo não for encontrado em uma comunidade de design como a Thingiverse[3], ele deverá ser modelado virtualmente em softwares como o Blender ou o OpenScad, exigindo planejamento e conhecimento de áreas como a matemática e a computação. Utilizando sólidos geométricos simples como prismas, pirâmides, esferas, cilindros e cones e as operações booleanas é possível criar uma variedade de modelos para serem impressos em 3D.

Por exemplo, na Figura 7 está o exemplo da modelagem de um prisma quadrado com buraco, realizada no Blender, que inicia com a criação de um prisma de 4 lados. Em seguida, selecionando as bases no modo de edição do software, utiliza-se a função *Inset Faces* para criar faces quadradas nas bases do prisma. Para criar o buraco, utiliza-se a função *Bridge Faces* para criar um furo que liga as bases selecionadas. Por fim, para destacar as faces em forma de trapézio formadas, é possível alterar a escala do furo com a função *Scale*, alcançando o resultado final.

Figura 7 – Construção no Blender



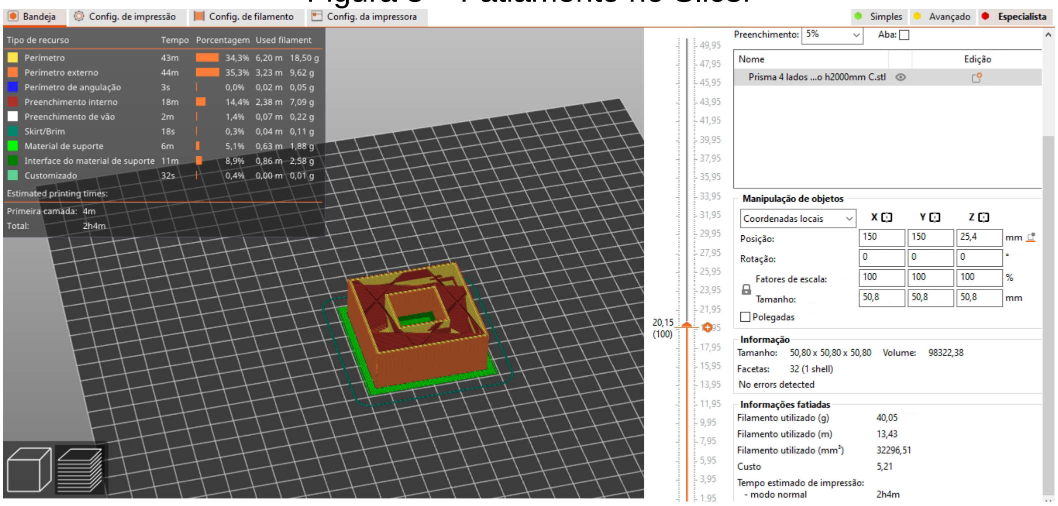
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Após finalizar a modelagem no Blender, o projeto pode ser exportado para formato STL (sigla para STereoLitography), o padrão para impressão 3D, ou para SVG (sigla para Scalable Vector Graphics), opção que converte o projeto em uma planificação do modelo como uma imagem vetorial.

[3] https://thingiverse.com

Caso seja optado pela impressão 3D, o modelo será preparado para a impressão com o uso de softwares como o Slic3r ou o Repetier, onde eventuais defeitos serão consertados. Em seguida, o modelo será posicionado de forma que facilite a sobreposição de camadas e, caso necessário, serão criados suportes para tornar a impressão possível. Ao final do processo, o modelo é “cortado” em camadas que permitem a sua impressão pela sobreposição de filamentos, camada a camada, por uma impressora 3D. Na Figura 8 temos um exemplo de fatiamento no Slic3r, onde o programa já apresenta as estimativas de consumo de filamento e tempo de impressão.

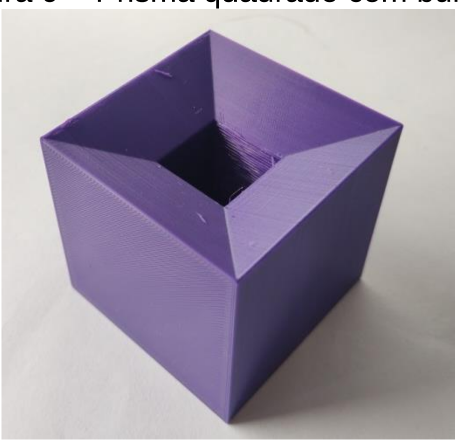
Figura 8 – Fatiamento no Slic3r



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

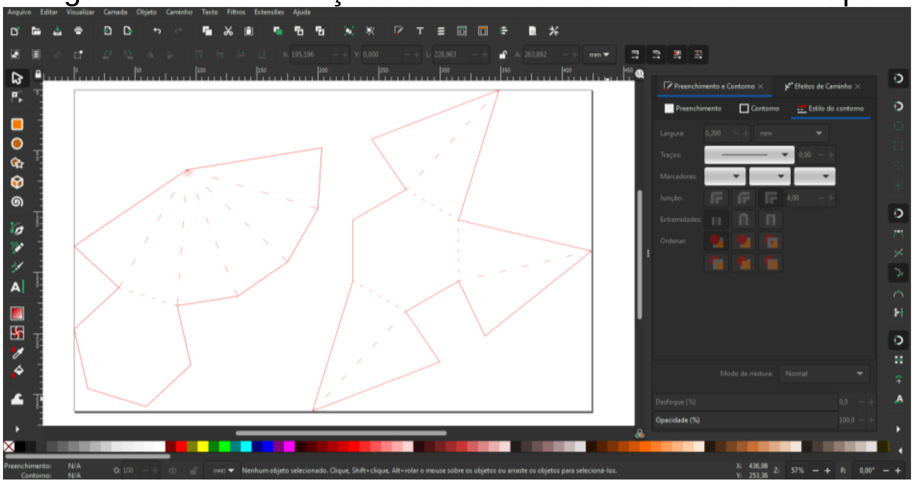
A Figura 9 ilustra o resultado impresso da modelagem descrita acima.

Figura 9 – Prisma quadrado com buraco


Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Por outro lado, ao se optar pelo formato SVG, o modelo pode ser editado em softwares de desenho vetorial, como o Inkscape, onde é preparado para o corte em uma máquina de corte e gravação a laser. Neste software é possível alterar a posição de pontos e segmentos, criar e editar novas linhas utilizando a função *Caneta Bèzier* e adaptar a coloração dos elementos ao padrão de cores lido pela máquina de corte a laser. Na Figura 10 temos o exemplo de uma planificação correta (à esquerda) e outra incorreta (à direita) de uma pirâmide hexagonal. As linhas em cor vermelha indicam os locais nos quais serão realizados os cortes a laser.

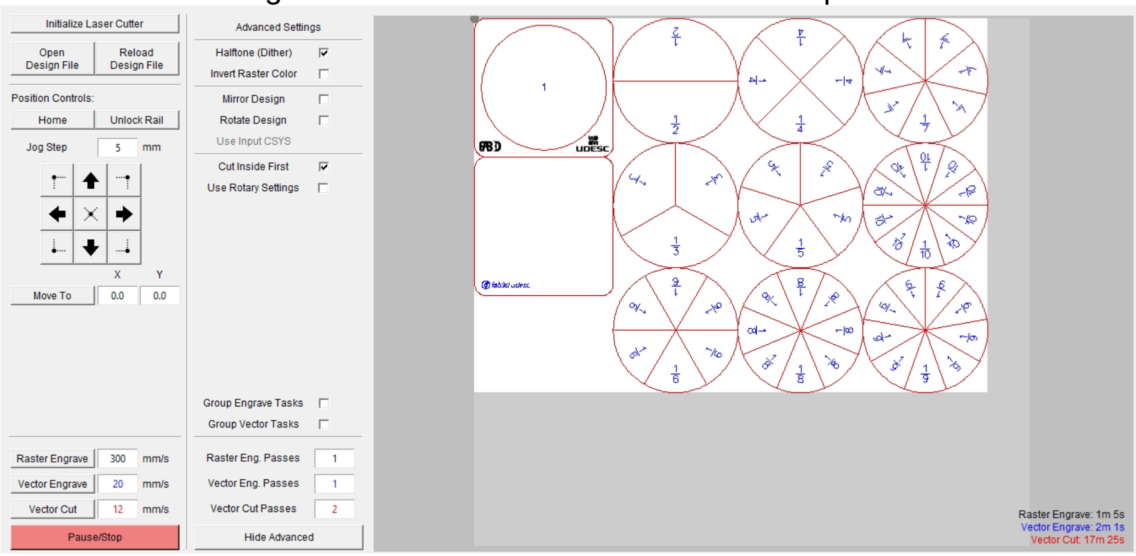
Figura 10 – Planificações corretas e incorretas no Inkscape



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Ao enviar o arquivo para o software K40 Whisperer, que faz a comunicação entre o computador e a máquina de corte a laser, a máquina seguirá o caminho definido pelos esquemas de cores fazendo o corte (desenho em vermelho), queima (desenho em preto) ou gravação (desenho em azul) dependendo da intensidade definida para o laser (Figura 11). Nesse software configura-se a potência do laser, o número de passagens e escolhe-se a opção desejada: *raster engrave* – queima, *vector engrave* – gravação ou *vector cut* - corte. O *raster engrave* é um processo semelhante ao usado pelas impressoras a jato de tinta, onde uma imagem é impressa pixel por pixel. O *vector engrave* é a gravação de um arquivo gráfico composto por vetores (linhas e curvas de uma geometria), marcados como linhas finas nos gráficos e o *vector cut* é semelhante ao *vector engrave*, porém usa uma potência maior de corte.

Figura 11 – Janela do software K40 Whisperer



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

4 CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo apresentamos os conceitos matemáticos envolvidos nas propostas de atividades elaboradas. Usaremos como referências os livros Fundamentos da Matemática Elementar 9 (DOLCE; POMPEO, 2013), Fundamentos da Matemática Elementar 10 (DOLCE; POMPEO, 2013), A Matemática do Ensino Médio, volume 2 (LIMA, et al, 2006), a dissertação Poliedros e Teorema de Euler (MIALICH, 2013) e o artigo O Teorema de Euler sobre Poliedros (LIMA, 1985).

4.1 POLÍGONOS

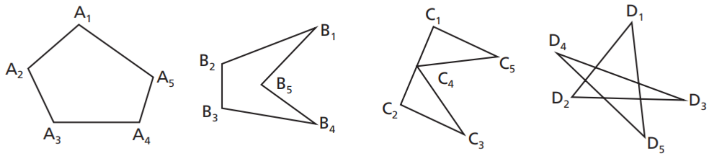
Uma das pesquisas que se mostrou essencial para elaboração e desenvolvimento das atividades foi a busca das definições de polígono, polígono regular, polígono convexo, poliedro, poliedro regular e poliedro de Platão. A definição a seguir é adotada por Dolce e Pompeo (2013, p. 129) no livro Fundamentos da Matemática Elementar 9.

Definição 5.1:

Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *com* $n \geq 3$, *todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos* A_{n-1}, A_n *e* A_1, *assim como* A_n, A_1 *e* A_2, *chama-se polígono à reunião dos segmentos* $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

Ao contrário da definição de poliedro que abordaremos em seguida, não há muitas figuras não usuais que surgem com a Definição 5.1. Como a Definição 5.1 não exige que os segmentos de reta não se interceptem, além dos polígonos mais familiares, é possível formar polígonos estrelados como o exibido na Figura 12.

Figura 12 – Exemplos de Polígonos



$A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$ e $D_1D_2D_3D_4D_5$ são polígonos.

Fonte: Dolce e Pompeo (2013, p. 129).

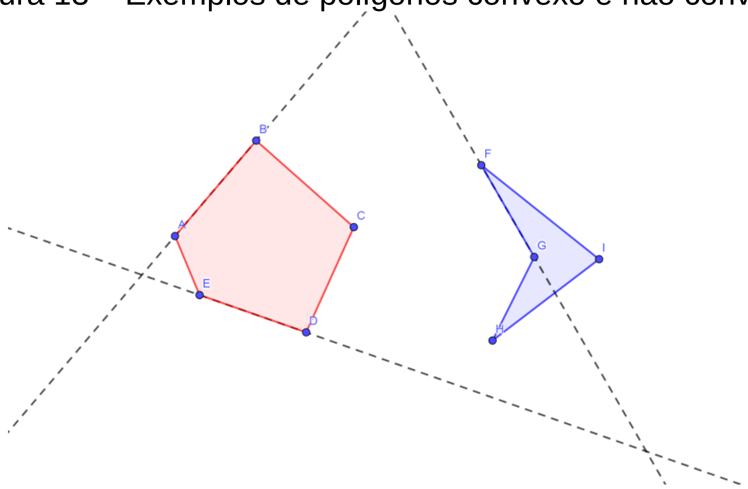
Outras duas definições apresentadas são a de polígono convexo e a de polígono regular.

Definição 5.2:

*Um polígono simples, ou seja, um polígono cujos lados se interceptam somente nos vértices, é um **polígono convexo** se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais vértices num mesmo semiplano.*

Segundo a Definição 5.2, o polígono em vermelho na Figura 13 é um polígono convexo, enquanto que o polígono em azul não é convexo.

Figura 13 – Exemplos de polígonos convexo e não convexos



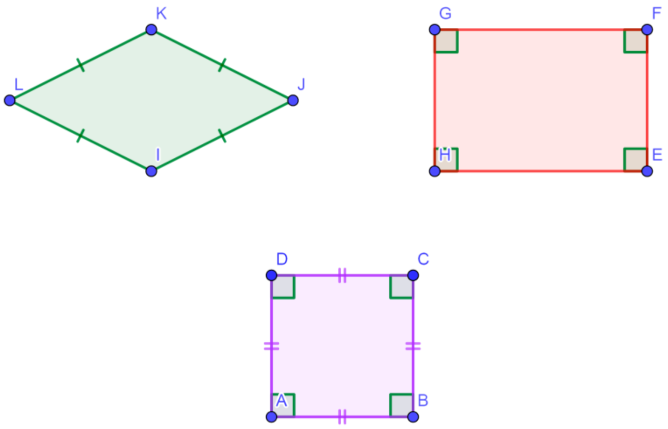
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Definição 5.3:

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes (é equilátero) e todos os ângulos congruentes (é equiângulo).

Segundo a Definição 5.3, os polígonos em verde e em vermelho da Figura 14 não são polígonos regulares, enquanto o polígono em roxo é regular.

Figura 14 – Exemplos para polígono regular



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

4.2 POLIEDROS

“Dizer apenas que poliedros são sólidos formados por faces (partes limitadas de um plano), pode dar uma ideia do que eles sejam, mas não serve absolutamente como definição” (LIMA, et al, 2006, p. 231). Com esta citação, os autores introduzem o problema que dificultou as atividades de matemáticos por muito tempo: a falta de uma definição precisa do significado de poliedro. A escolha de uma definição problemática pode causar complicações para a prova de teoremas e propriedades que dependem de sua descrição e abrangência.

Logo, em busca de uma definição que não permita grandes generalizações, mas seja o suficiente para estudar poliedros convexos e demonstrar teoremas e propriedades importantes da geometria para estudantes, os autores utilizaram a seguinte definição em seu livro A Matemática do Ensino Médio, volume 2.

Definição 5.4:

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

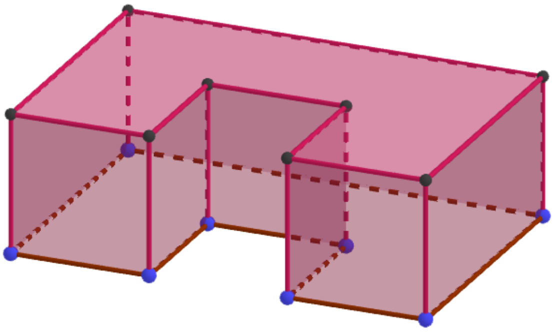
a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado aresta, e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

A Definição 5.4 exige que as faces que compõem o poliedro sejam polígonos, mas não necessariamente restringe que sejam convexos ou regulares, permitindo que sólidos como o exibido na Figura 15 sejam considerados poliedros.

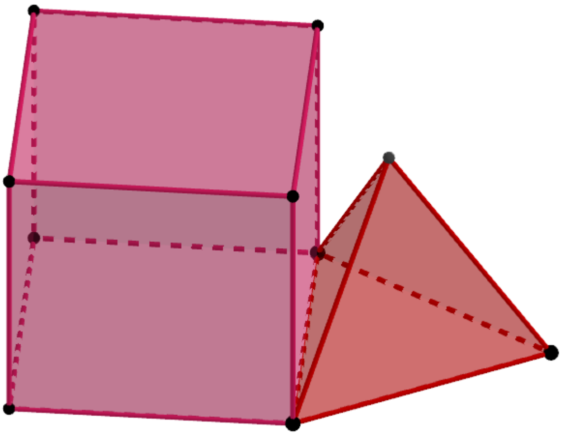
Figura 15 – Poliedro com face não convexa



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Por sua vez, a exigência de cada lado de um polígono ser lado de apenas um outro polígono impede que sólidos como o exibido na Figura 16 sejam considerados poliedros.

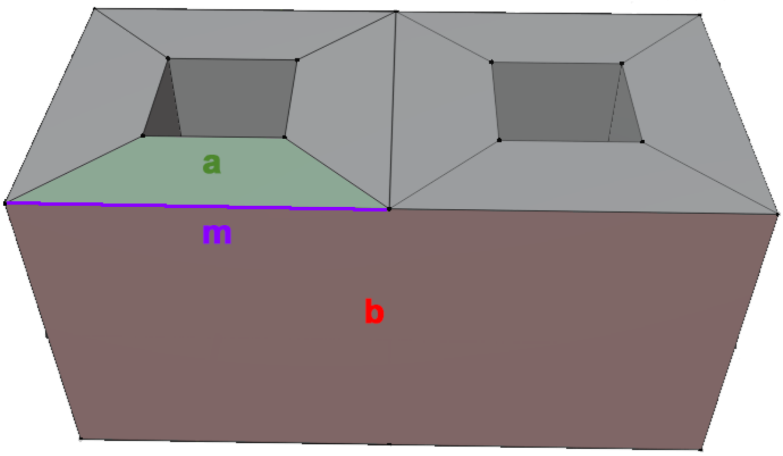
Figura 16 – Poliedros ligados por uma aresta



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Já a condição sobre a interseção de duas faces ser sempre um lado comum, um vértice comum ou vazia, faz com que sólidos como o exibido na Figura 17 não sejam poliedros. O sólido da Figura 17 atende aos demais critérios, porém a interseção das faces a e b resultam na aresta m que, por mais que seja lado de a, é apenas metade do lado de b, então não é lado comum.

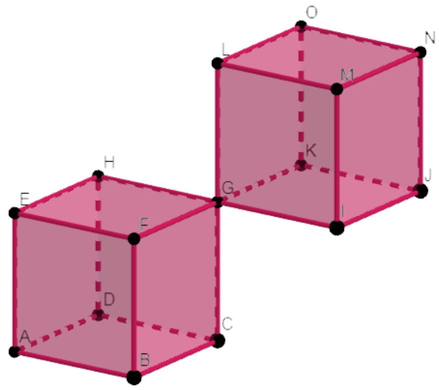
Figura 17 – Sólido que não satisfaz o item b da Definição 5.4



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

A última condição da Definição 5.4 impede que um novo poliedro seja formado ao “conectar” dois poliedros diferentes utilizando apenas um vértice, como observado na Figura 18.

Figura 18 – Poliedros ligados por um vértice



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Outra definição para poliedros é a citada por Elon Lages Lima (LIMA, 1985, p. 66) em seu artigo “O Teorema de Euler sobre Poliedros”, no qual, para abordar seus objetivos, exige que os polígonos que formam as faces devem ser convexos, resultando na definição descrita a seguir.

Definição 5.5:

*Um **poliedro** P é a reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as **faces** de P. Os lados desses polígonos são chamados as **arestas** de P. Os vértices do poliedro são os vértices de suas faces.*

Exige-se ainda de um poliedro P que suas faces estejam “regularmente dispostas”, isto é, que a interseção $F \cap G$ de duas faces distantes de P seja uma aresta comum, um vértice comum a F e G ou seja vazia.

A principal diferença da Definição 5.5 em contraste com a Definição 5.4 é a exigência que as faces sejam polígonos convexos. Com esta condição, os sólidos das Figuras 15 e 17 não são considerados poliedros, mas os sólidos das Figuras 16 e 18 se tornam poliedros.

Por fim, as últimas duas definições pesquisadas são as de poliedro de Platão e poliedro regular. A primeira é descrita no livro Fundamentos da Matemática Elementar 10 (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 127) e a segunda está presente na dissertação Poliedros e Teorema de Euler (MIALICH, 2013).

Definição 5.6:

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;

b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas;

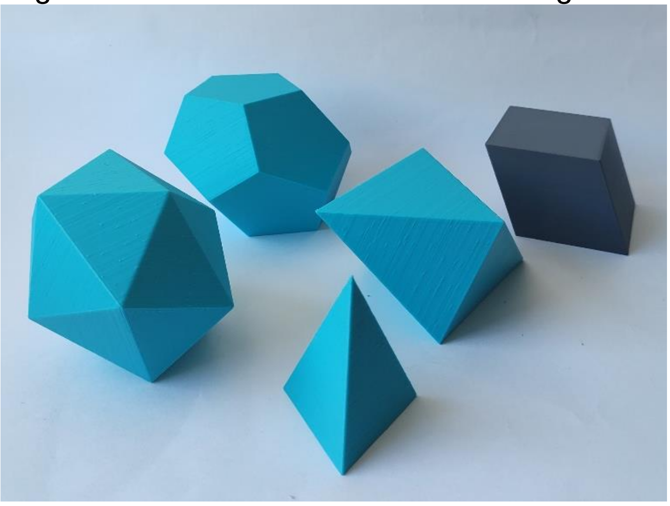
c) vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

Definição 5.7:

Um poliedro convexo[4] *é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais (mais precisamente, congruentes) e, além disso, em cada vértice do poliedro concorre o mesmo número de arestas.*

Embora ambos os conceitos costumem ser exemplificados com os mesmos poliedros no Ensino Básico, as definições são de fato diferentes. Por não exigir polígonos regulares como suas faces, os poliedros de Platão formam um conjunto maior do que os poliedros regulares, ou seja, os poliedros regulares são um caso particular de poliedros de Platão. Deste modo, os sólidos retratados na Figura 19 são poliedros de Platão, mas só se tornam poliedros regulares no caso particular em que suas faces são polígonos congruentes (Figura 20).

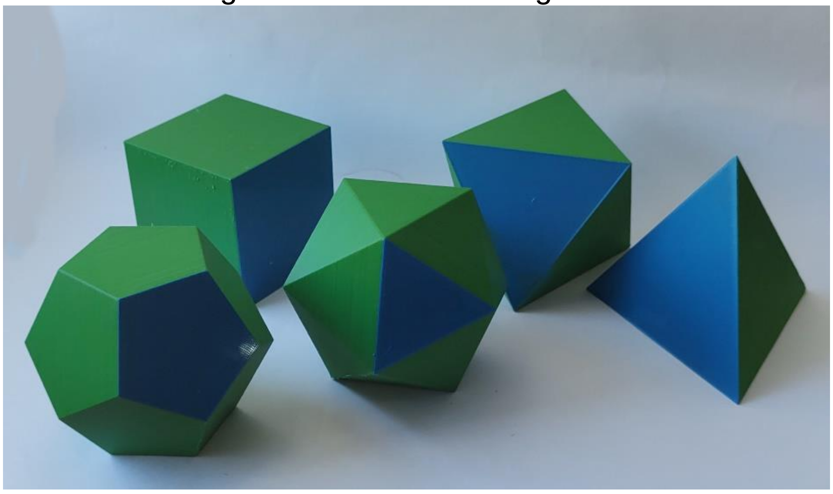
Figura 19 – Poliedros de Platão não regulares



Fonte: Acervo do Fab3D (2022).

[4] Um poliedro é convexo se o plano determinado por cada face deixa as demais faces num mesmo semi-espaço.

Figura 20 – Poliedros regulares

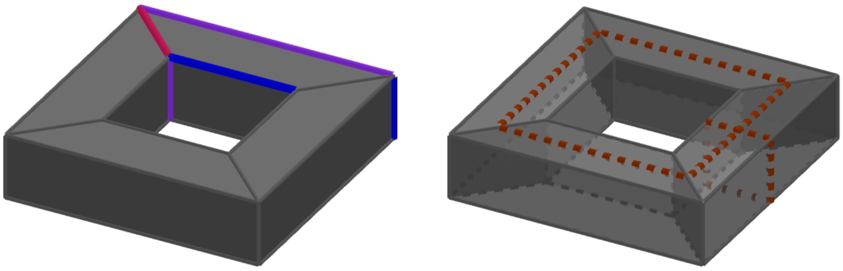


Fonte: Acervo do Fab3D (2022).

4.3 POLIEDROS COM BURACO

Uma informação descoberta ao fazer as pesquisas foi o caso particular dos poliedros com buraco. Esses poliedros peculiares podem atender simultaneamente a Definição 5.4 e a Definição 5.5 apresentadas anteriormente, como o caso da Figura 21, formada ao criar um buraco quadrado em um prisma de base quadrangular e dividir as faces superior e inferior em quatro trapézios. A condição do primeiro item da Definição 5.4 é satisfeita nas interseções destacadas à esquerda e as restantes são simétricas a elas. O último item pode ser satisfeito por caminhos iguais ou simétricos aos destacados no poliedro da direita. Como todas as faces são retangulares ou trapezoidais, todas são convexas e atendem a condição exigida pela Definição 5.5.

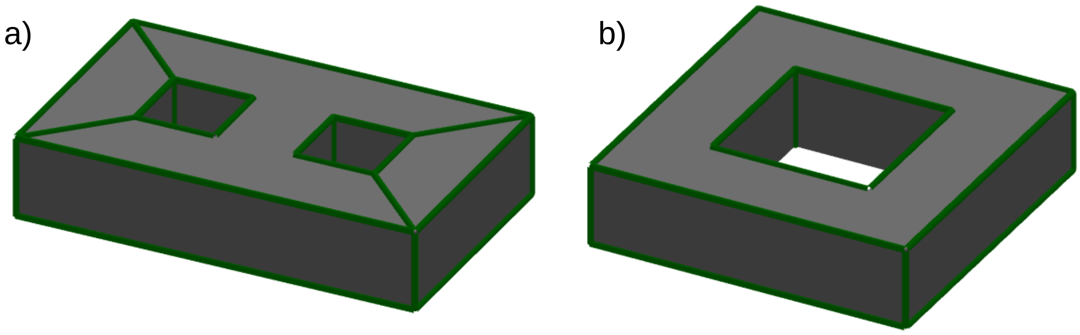
Figura 21 – Itens da definição no poliedro com buraco



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Por outro lado, o sólido com dois buracos apresentado na Figura 22a só pode ser considerado um poliedro de acordo com a Definição 5.4, pois uma de suas faces é um polígono não convexo. Porém, a divisão das faces e arestas do sólido não pode ser feito de qualquer forma. O sólido da Figura 22b é um exemplo de um sólido com buraco que não é um poliedro, pois a sua face superior não é um polígono (é formada por duas linhas poligonais).

Figura 22 – Sólidos: a) Poliedro com buraco b) Sólido com buraco



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

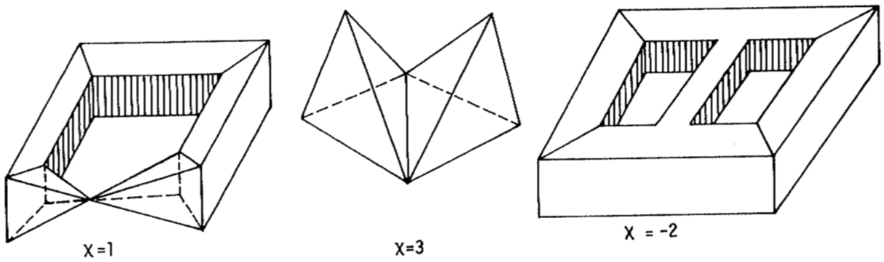
Com isso, podemos perceber que os poliedros com buraco surgem como um caso contraintuitivo da definição de poliedro. Além disso, outra discussão curiosa surge com o comportamento desses poliedros quando testamos a relação de Euler, que abordaremos na próxima seção.

4.4 RELAÇÃO DE EULER

O Teorema de Euler é um enunciado ensinado há décadas no estudo de Geometria do Ensino Médio. Como destacado por Lima (1985, p. 59), o resultado do teorema é simples, com uma demonstração elegante e fácil de ilustrar com desenhos de poliedros ou verificar visualmente com materiais concretos, fatores que o tornam atraente e popular na geometria. Porém, a sua relação $V - A + F = 2$ não tem validade tão ampla quanto Euler imaginava quando a descobriu. Isso acontece justamente por Euler não ter definido precisamente o que entendia como poliedro, fazendo com que sólidos como os poliedros com buraco citados na seção anterior não atendam a relação de Euler.

O poliedro da Figura 21, por exemplo, possui 16 faces, 32 arestas e 16 vértices, então a relação resulta em $16 - 32 + 16 = 0$. Outros poliedros podem resultar em valores diferentes, como o poliedro da Figura 18, para o qual $15 - 24 + 12 = 3$, e o poliedro da Figura 22a, que fornece $24 - 44 + 18 = -2$. Não obstante, sólidos que não são considerados poliedros podem, coincidentemente, atender à relação de Euler, como o caso da Figura 22b se considerarmos a forma que não é um polígono como uma face com 8 arestas. A Figura 23 traz outros exemplos da característica de Euler-Poincaré em poliedros diversos.

Figura 23 – Poliedros e Característica de Euler-Poincaré



Fonte: Lima (1985, p. 62).

Porém, a maior descoberta realizada durante a pesquisa foi que o Teorema de Euler pode ser visto como um teorema da Topologia, não só da

Geometria. Em seu artigo abordando a relação de Euler sobre poliedros, Lima (1985, p. 60) destaca que o número $X = V - A + F$ é um invariante topológico, ou seja, uma característica que se mantém ao realizar uma transformação homeomorfa entre duas figuras, e recebe o nome de Característica de Euler-Poincaré. Uma analogia que podemos associar à transformação é como inflar o sólido como um balão, desse modo, prismas, pirâmides e outros poliedros convexos podem se transformar em esferas e poliedros com um buraco podem se tornar toros (formato de um pneu). A característica particular dos poliedros com buraco é que a relação se reconfigura para $V - A + F = 2 - 2n$, em que n representa o número de buracos.

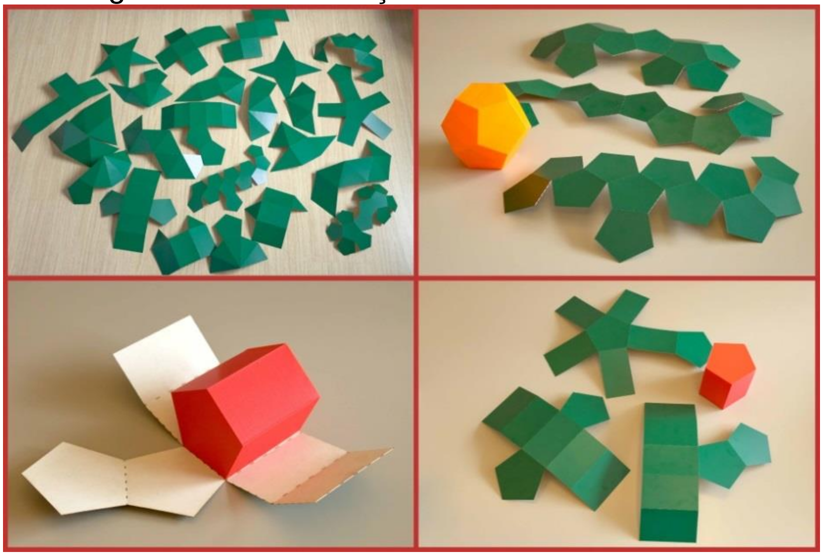
5 MATERIAIS

Para a elaboração de propostas de atividades foi necessário desenvolver diversos materiais concretos, virtuais e de apoio para a execução das atividades. Os materiais concretos foram elaborados no Laboratório Fábrica Matemática (Fab3D) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). O Fab3D é um laboratório de matemática vinculado ao Departamento de Matemática da UDESC, cujo foco está na exploração das potencialidades da tecnologia de impressão 3D e dos softwares de geometria dinâmica e suas aplicações para a educação, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior

5.1 A MODELAGEM DOS MATERIAIS

A elaboração dos materiais começou com a criação de diversas planificações de modelos em 3D de prismas, pirâmides e poliedros regulares do acervo do Fab3D, para serem utilizadas na elaboração de cartões de perguntas e nas propostas de atividades. Com a exportação da planificação dos sólidos na forma de imagens vetoriais a partir do Blender, foi possível editar esses arquivos, com uso do software Inkscape, criando variações corretas e incorretas para a planificação de cada sólido (Figura 24).

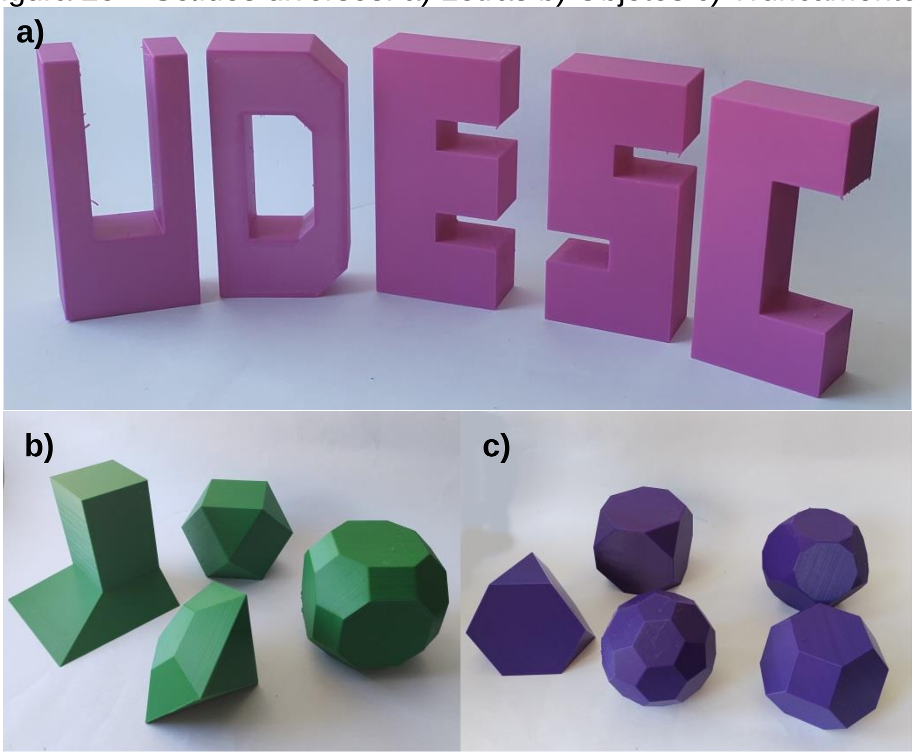
Figura 24 – Planificações corretas e incorretas



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Em seguida, buscando a exploração de sólidos diferentes dos usuais prismas, pirâmides e poliedros regulares, foram elaborados modelos baseados em letras do alfabeto (Figura 25a), em objetos cotidianos (Figura 25b), em truncamentos dos poliedros de Platão (Sólidos de Arquimedes) (Figura 25c) e sólidos com buraco (Figura 9). Esses materiais continham exemplos de poliedros convexos, não-convexos, de Platão, regulares, eulerianos (poliedros que atendem à Relação de Euler) e não-eulerianos ou possuindo faces com polígonos diferentes e ainda, sólidos que não satisfaziam a definição de poliedro. Com esse material e o estudo realizado sobre as definições, foi possível elaborar atividades que possuíam o objetivo de explorar as definições e os sólidos que as satisfazem.

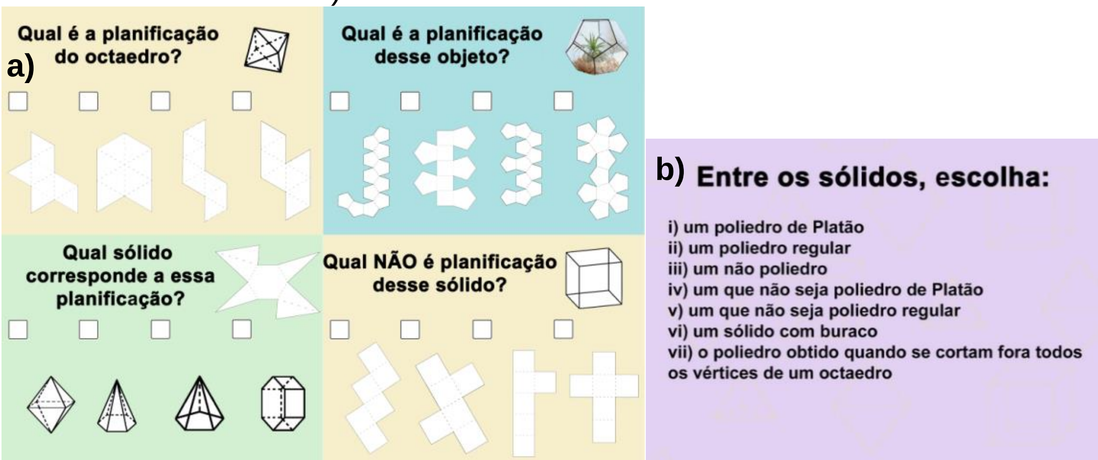
Figura 25 – Sólidos diversos: a) Letras b) Objetos c) Truncamentos



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Além disso, foram elaborados modelos de cartões de perguntas sobre os poliedros e suas planificações (Figura 26a). Esses cartões exploram a habilidade do estudante em relacionar corretamente poliedros, ou objetos reais que lembram poliedros, com suas respectivas planificações, diferenciando as opções corretas das incorretas. Além desses cartões, também foram elaborados cartões que solicitavam a escolha de sete tipos de sólidos diferentes (Figura 26b) que deveriam ser escolhidos de acordo com definições, como por exemplo, de poliedro, poliedro de Platão e poliedro regular. Após a elaboração, todos os cartões foram impressos e plastificados para serem utilizados na aplicação das atividades.

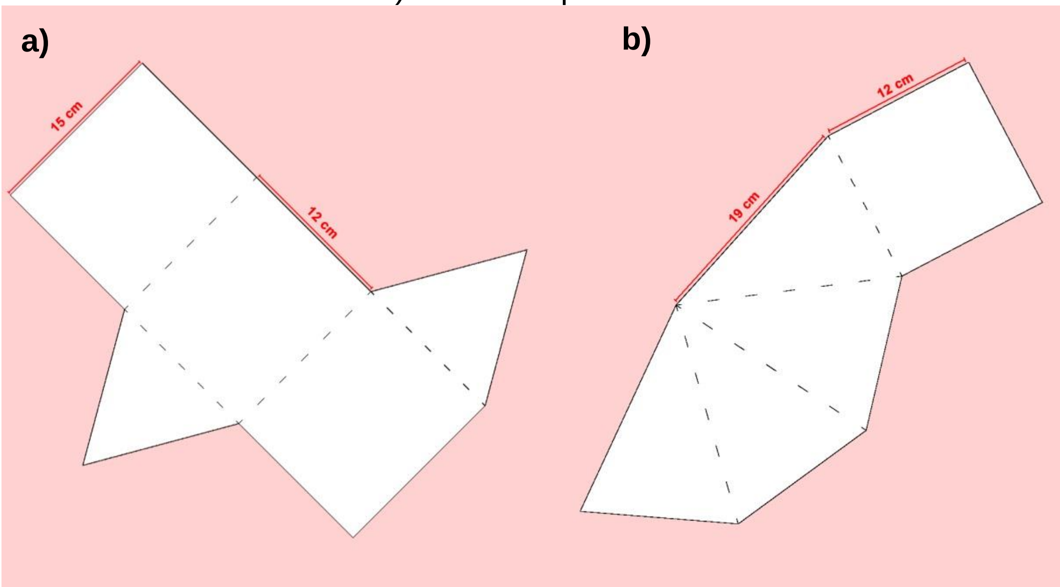
Figura 26 – Cartões: a) Cartões de Planificação
b) Cartões de Escolha de Sólidos



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Após a criação dos cartões de perguntas, foram criados cartões exibindo planificações de sólidos mais simples (pirâmides e prismas com base triangular e quadrada, cubo e octaedro) com algumas medidas fornecidas (Figura 27). Este material foi pensado para uma atividade na qual seria solicitado o cálculo da área e do volume do sólido, a partir da planificação dada, exigindo do aluno a habilidade de visualizar o sólido a partir da sua planificação e identificar suas dimensões.

Figura 27 – Cartões de Cálculo em Planificações: a) Prisma triangular
b) Pirâmide quadrada

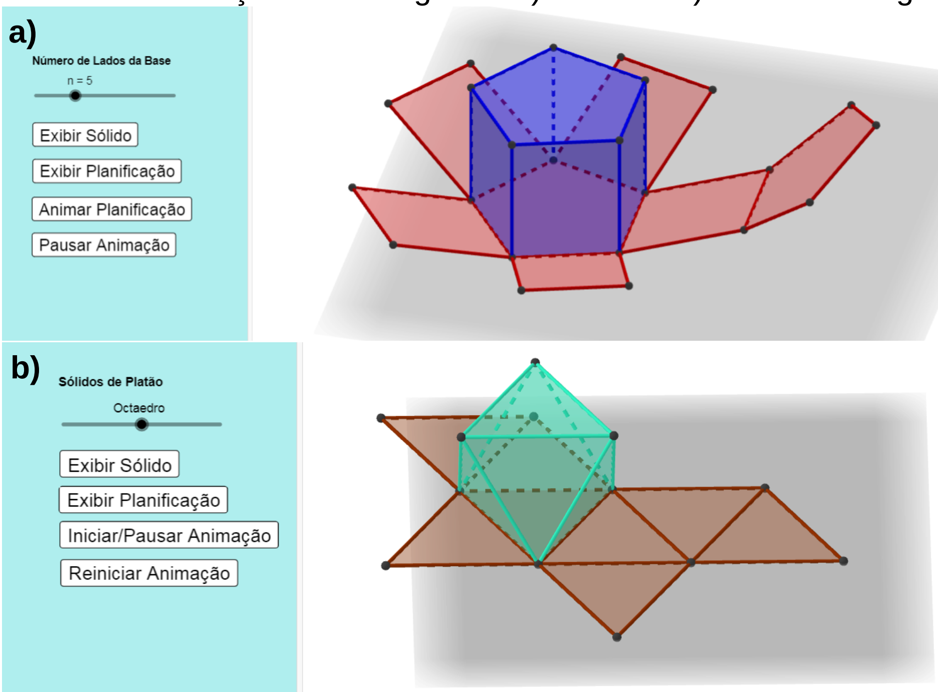


Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Além dos materiais concretos, foram elaborados vários materiais virtuais com o uso do GeoGebra e da plataforma Moodle utilizada pela UDESC. Como destacado anteriormente, o GeoGebra é capaz de oferecer diferentes representações e de forma dinâmica. Levando isso em consideração foram criados diversos OAs para utilizar o seu potencial de geometria dinâmica para auxiliar na visualização dos poliedros e planificações. Alguns OAs incluem aplicações com prismas e pirâmides acompanhados de suas respectivas planificações (Figura 28a[5]), nas quais é possível, por meio de botões e controles deslizantes, tanto alterar o número de lados da base desses poliedros, assim como animar o movimento da planificação “envolvendo” o sólido, simulando a atividade que pode ser feita manualmente com material concreto. Um material semelhante foi criado com os poliedros regulares (Figura 28b[6]), onde o controle deslizante altera o poliedro exibido entre tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

[5] https://www.geogebra.org/m/gaakjzrb
[6] https://www.geogebra.org/m/w3dr3jsg

Figura 28 – Planificações no Geogebra: a) Prismas b) Poliedros Regulares

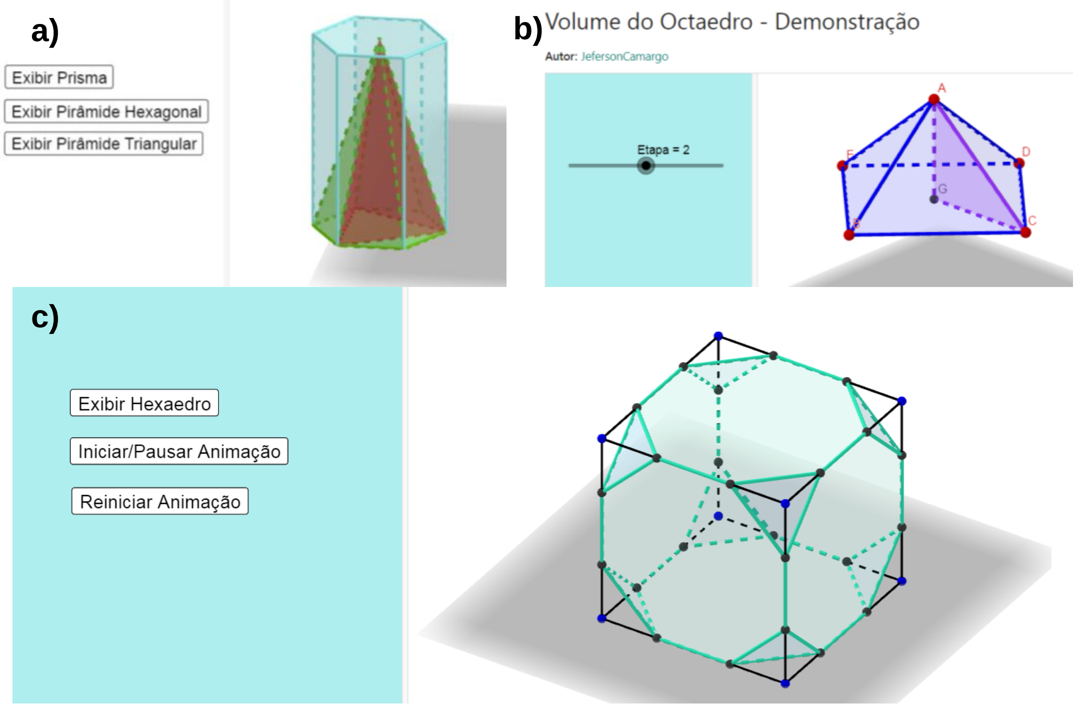


Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Outros OAs e materiais virtuais foram criados para ilustrar sólidos diferentes e possibilitar a inserção destes modelos em questões na plataforma Moodle. A proposta inicial desses materiais era utilizá-los para o cálculo de áreas, volumes, razão e proporção (Figura 29a[7]). Um desses materiais foi pensado como um OA para auxiliar o estudante a resolver um exercício que envolvia uma demonstração da fórmula do volume do octaedro, com os elementos exibidos se alterando a cada nova etapa da demonstração (Figura 29b[8]). Em relação aos Sólidos de Arquimedes, um OA também foi criado para ilustrar o processo de truncamento de um cubo (Figura 29c[9]).

[7] https://www.geogebra.org/m/dkf4yhx6
[8] https://www.geogebra.org/m/fdvajshq
[9] https://www.geogebra.org/m/mnwdqrfk

Figura 29 – Materiais no GeoGebra: a) Prisma e pirâmides inscritas
b) Volume do Octaedro c) Truncamento do cubo

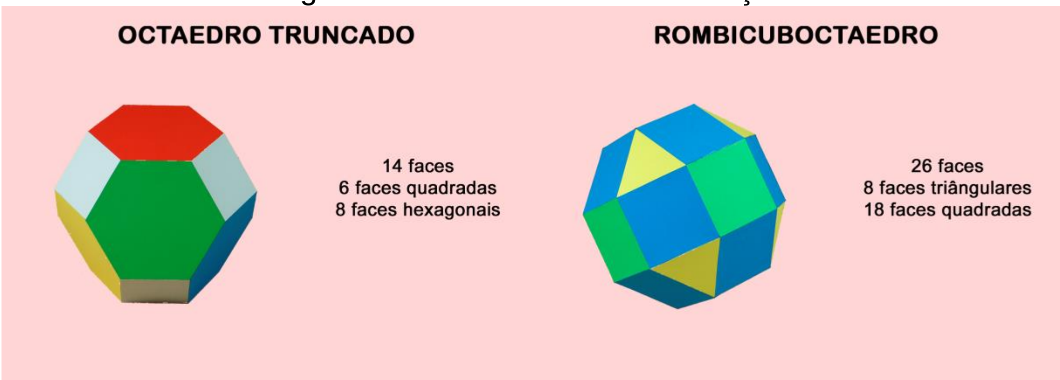


Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Por sua vez, a plataforma Moodle possui várias ferramentas de elaboração de questões e, entre elas, daremos destaque às ferramentas STACK e cloze. As questões elaboradas com STACK possuem o benefício de utilizar variáveis aleatórias para criar uma variedade de questões do mesmo modelo. Já nas questões elaboradas em cloze, é possível inserir diversos campos de entrada, onde o aluno pode inserir um valor, uma palavra ou selecionar entre um número de alternativas a opção que considera correta. Com estas ferramentas, foram criadas questões focadas no cálculo de medidas de prismas e pirâmides, uma questão teórica abordando a definição de sólido de Platão e uma questão focando em verificar a relação de Euler nos poliedros regulares.

Como materiais auxiliares, dada a complexidade dos objetos e seu uso não recorrente na educação, para melhor identificação dos Sólidos de Arquimedes foram elaborados cartões descritivos contendo o nome, imagem e faces que compõem o sólido (Figura 30). Também, foi preparada uma apresentação de slides contendo as definições de polígonos e poliedros, com respectivos exemplos e contraexemplos para cada uma, elaborados com uso do GeoGebra.

Figura 30 – Cartões de Identificação



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Por fim, para a análise dos resultados das aplicações das atividades, foi elaborado um questionário destinado aos alunos. Nele foram feitas indagações a respeito da experiência que tiveram com os materiais e com a sequência de atividades, do quanto os materiais ajudaram na realização das atividades e na compreensão dos conceitos e das possibilidades para futuras aplicações.

Com esses materiais prontos ou idealizados para aplicação, um documento foi elaborado com uma descrição de todos os materiais elaborados até então. Junto a esse documento, as possibilidades para utilização deles foram organizadas em três propostas de atividades com focos em conceitos diferentes: poliedros e suas planificações, cálculo de volumes e relação de Euler. Os materiais, os cartões e as propostas de atividades elaborados foram apresentados aos professores que iriam aplicá-los, de modo que escolhessem o que iriam utilizar, sugerir alterações e adaptações conforme o planejamento da disciplina.

5.2 A ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

As atividades iniciais que formaram a sequência de atividades aplicada se dividiam em três propostas. A primeira abordaria os poliedros, suas planificações e utilizaria os cartões de planificações, dividida em três etapas. Em um primeiro momento, os alunos se reuniriam em grupos e, em meio a diversas planificações expostas em uma mesa, deveriam encontrar a planificação de três sólidos distribuídos paras as equipes. Em seguida, seria feita a identificação e cálculo da área dos poliedros escolhidos e, na última etapa, os alunos resolveriam alguns dos cartões de perguntas (Figura 26a). Ao final de cada etapa seria feito o compartilhamento das estratégias utilizadas.

A segunda proposta lidaria com cálculo de áreas e volumes, com um foco maior no cálculo e com uma transição gradual entre materiais concretos para a abstração e uso de material virtual. Inicialmente, com o auxílio de materiais concretos, os alunos calculariam áreas e volumes de sólidos mais simples como pirâmides e prismas e, na próxima etapa, deveriam elaborar estratégias como a decomposição em sólidos mais simples para realizar o cálculo de áreas e volumes de sólidos não usuais, como por exemplo os da Figura 25b. Por fim, os alunos deveriam utilizar os cartões com planificações para calcular as áreas e volumes de sólidos (Figura 27). Uma adição possível para essa proposta era a aplicação das questões STACK, implantadas no Moodle, que poderia ser utilizada como uma atividade complementar.

A terceira proposta abordaria a relação de Euler e a definição de poliedro. Inicialmente os alunos deveriam definir poliedro, poliedro regular e poliedro de Platão e escolher exemplos de cada caso entre os sólidos expostos. Em seguida, os alunos deveriam verificar a relação de Euler em pirâmides, prismas e sólidos regulares, com a possibilidade de comparar com a planificação e questionar se é possível verificar a relação com uso da planificação. Para a próxima etapa, os alunos deveriam primeiro identificar sólidos truncados a partir da operação de truncamento. Por fim, os alunos verificariam a relação de Euler em sólidos não usuais, truncamentos, com muitos lados, formados por polígonos diferentes ou com buracos. Adicionalmente, poderiam ser utilizadas questões para: encontrar de forma generalizada o número de faces, vértices e arestas de um prisma ou pirâmide de n lados; analisar como sólidos com buracos se comportam com a relação de Euler; e discutir uma estratégia para encontrar o número de arestas de um polígono convexo, conhecendo suas faces.

Os materiais e as propostas foram apresentados para a professora responsável pela disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática I, do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC. A sequência de atividades aplicada na disciplina de LEM I (Apêndice B) teve como objetivos o estudo dos poliedros e suas planificações e a exploração das definições de polígonos, polígonos convexos, polígonos regulares, poliedros, poliedros de Platão e poliedros regulares. No Quadro 1 estão descritos os momentos e atividades no qual a sequência foi dividida.

Quadro 1 – Sequência de atividades aplicada em LEM I

Etapas	Descrição	Tempo estimado
Momento 1	Pesquisa das definições	Extra classe
Momento 2	Apresentação do Fab3D	20 min
Momento 3	Divisão dos alunos equipes e explicação da dinâmica	5 min
Atividade 1	Pareamento de sólidos entregues para as equipes com suas respectivas planificações	20 min
Atividade 2	Cálculo da área de superfície de um dos sólidos e descrição das estratégias para o cálculo das áreas dos sólidos restantes	30 min
Momento 4	Compartilhamento dos resultados das Atividades 1 e 2	30 min
Atividade 3	Resolução dos cartões de perguntas e compartilhamento dos resultados	20 min
Atividade 4	Discussão e escolha das definições pesquisadas	30 min
Momento 5	Apresentação pelos pesquisadores das definições a serem utilizadas na Atividade 5	10 min
Atividade 5	Escolha de sólidos de acordo com o cartão e compartilhamento dos resultados	40 min

Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

A ideia inicial da primeira proposta se manteve, formando as Atividades 1, 2 e 3. A busca de estratégias para cálculo de áreas da segunda proposta ganhou espaço na Atividade 2, assim como a ideia de remover os sólidos e planificações para observar se o contato com material concreto auxiliaria nas atividades seguintes, que se tornou parte da Atividade 3. Já a terceira proposta se reconfigurou nas Atividades 4 e 5, com o foco mudando da relação de Euler para a discussão das definições e o pareamento dos sólidos de acordo com elas.

6 A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Para aplicar a sequência de atividades, a disciplina de LEM I foi uma das primeiras possibilidades cogitadas, tanto pela sua ementa que trabalha com construção de poliedros, sólidos de revolução, planificações e poliedros de Platão, como pelo próprio ambiente gerado pela disciplina, que propõe atividades laboratoriais e formas de ensino mais motivadoras, significativas e compreensíveis para os participantes (SANTOS; GUALANDI, 2016).

> Atividades laboratoriais oportunizam o aluno a partir da experimentação para a generalização, fazendo com que o aluno construa as propriedades de um determinado conceito. Os discentes podem envolver-se nessa construção através de atividades que promovam a abstração. Com esse entendimento, os alunos serão capazes de elaborar pensamentos matemáticos avançados, promovendo, assim, a interação de processos mentais. (SANTOS; GUALANDI, 2016, p. 5).

No contexto da aplicação, a sequência de atividades elaborada para a disciplina de LEM I possui um caráter de formação de professores. Deste modo, além das atividades laboratoriais para o ensino de matemática, a aplicação de uma sequência como essa, que utiliza materiais manipuláveis, pode mostrar possibilidades de como abordá-los em sala de aula, assim como enriquecer o conhecimento matemático dos participantes. Assim, LEM auxilia na concretização da formação para o uso de materiais manipuláveis, uma vez que serve como um suporte metodológico eficaz à prática docente (SANTOS; GUALANDI, 2016).

6.1 CONTEXTO DE APLICAÇÃO

A sequência de atividades foi aplicada em uma turma de Laboratório de Ensino de Matemática I da UDESC. A turma tinha cinco alunos e a aplicação foi feita em quatro horas aula de 50 minutos, ao longo de dois dias, além de uma discussão feita em aula de 100 minutos, em outro dia e sem a participação dos pesquisadores. Durante a aplicação, os pesquisadores acompanharam e mediaram as atividades junto à professora responsável, proporcionando a oportunidade de observar e analisar o desenrolar das atividades da sequência.

6.2 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Antecedendo o início da aplicação foi requisitado que os alunos realizassem uma pesquisa extraclasse sobre as definições de polígono, polígono regular, polígono convexo, poliedro, poliedro de Platão e poliedro regular, apresentando as referências bibliográficas consultadas. Na sequência dessa seção descreveremos como aconteceram as atividades.

6.2.1 Visita guiada ao Fab3D

No primeiro dia de aplicação, para ambientar os alunos com a produção dos materiais que seriam utilizados nas atividades, eles fizeram uma visita guiada ao laboratório Fab3D, conheceram as máquinas de impressão 3D e corte laser, materiais e como funcionam os processos de idealização, modelagem e criação dos materiais.

A apresentação levou mais tempo do que o esperado, devido à curiosidade despertada nos alunos, que ficaram intrigados com as tecnologias e os processos envolvidos na modelagem e fabricação de materiais. Após o retorno à sala de aula, os alunos foram divididos em duas equipes (uma dupla e um trio) e foi dado início às atividades.

6.2.2 Atividade 1 – Pareamento de sólidos e planificações

Para as atividades 1 e 2, os alunos receberam cinco sólidos escolhidos pelos pesquisadores de modo que houvesse diferentes classes de poliedros e formas geométricas em cada grupo, na Figura 31a tem-se os sólidos entregues para uma das equipes. Em seguida, diversas planificações corretas e incorretas foram expostas sobre uma mesa e os alunos foram instruídos a encontrar as planificações dos seus sólidos (Figura 31b).

Figura 31 – Registro da Atividade 1: a) Sólidos entregues
b) Procura de planificações c) Planificação errada

Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Durante a realização da atividade, a principal estratégia observada foi a de diferenciar as planificações pelos polígonos que compõem suas faces e “vesti-las” no sólido para verificar se era correta. Uma das alunas ficou intrigada com uma das planificações erradas, se perguntando: “Que negócio é esse? Como que encaixa esse aqui? Não é esse [que é a planificação do poliedro], mas como que encaixa? [...] Estou instigada em como que monta esse aqui?”. Nesse momento a professora indaga “Lembra que tinham [planificações] certas e erradas?” Com isso a aluna conclui: “Ah tava errado, porque não tem como”. No momento de discussão, a aluna aponta “esse aqui me instigou [se referindo a planificação errada] porque não tem como encaixar. Eu, pelo menos, não consegui um jeito de encaixar”. Neste momento, como os alunos apenas testavam as planificações de um poliedro até encontrar uma planificação correta, eles foram incentivados a testar outras planificações que acharam interessantes e chegaram à conclusão de que “tem mais de uma forma de planificar a mesma peça, mas que a organização dos polígonos não é arbitrária”. Na Figura 31c temos um exemplo de planificação errada de um prisma.

6.2.3 Atividade 2 – Cálculo de áreas

A segunda atividade era o cálculo da área de superfície do poliedro que continha pentágonos em suas faces e a descrição dos procedimentos para determinar a área de superfície dos outros sólidos. Assim como na atividade anterior, houve um momento para a discussão das estratégias ao final dessa atividade.

Nessa atividade surgiram vários pontos interessantes enquanto os grupos calculavam a área da superfície de um dodecaedro e de um prisma de base pentagonal. Na Figura 32 temos o registro da resolução dessa atividade. Um ponto em comum de ambas as equipes foi a dúvida inicial por não se lembrarem de uma fórmula para a área do pentágono e, embora a equipe do dodecaedro tenha feito uma pesquisa na internet em busca de uma fórmula, os dois grupos chegaram à estratégia de dividir o pentágono em triângulos.

Figura 32 – Registro da Atividade 2

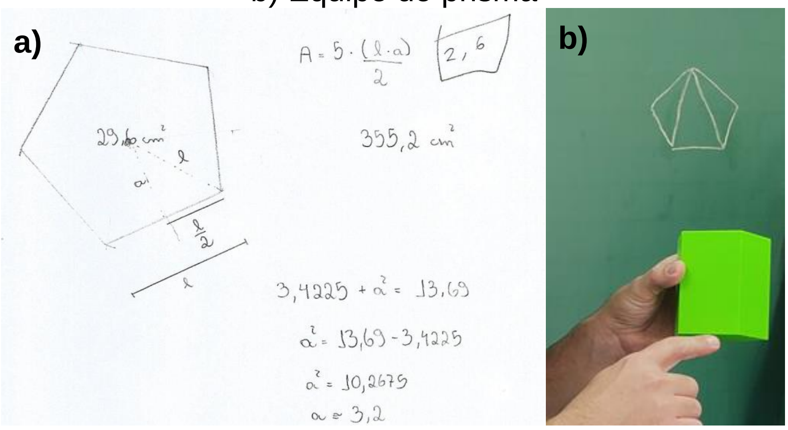
Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Outro momento interessante que surgiu durante essa atividade foi quando o trio chegou ao resultado do seu cálculo e uma das alunas questiona: “será que tem alguma coisa errada, 355 cm² não é muita coisa pra isso aqui? É que não tenho noção nenhuma do quanto é tudo isso”. Diante disso, a professora sugere que a aluna pense na situação usando retângulos como referência. Assim, a aluna tomou uma das planificações de prisma como exemplo e, apontando os retângulos que tinham medidas de 10 cm x 5 cm, utilizou-os como referência para estimar a superfície que 355,2 cm² representa.

Seguindo este momento, a professora questionou se os alunos lembravam os nomes dos poliedros. Os alunos lembraram sem muita dificuldade os nomes dos prismas e pirâmides, associando até mesmo com suas diferentes bases. A dificuldade surgiu para relembrar os nomes dos poliedros regulares, exigindo a consulta das definições pesquisadas previamente. Por fim, o tetraedro truncado e o hexaedro truncado eram desconhecidos para os alunos, mas eles foram capazes de perceber as semelhanças com suas contrapartes “normais” e que suas pontas haviam sido “cortadas”. Com isso, a operação de truncamento foi explicada para os alunos antes de seguir com a atividade.

Na resolução da equipe do dodecaedro, o pentágono foi dividido em cinco triângulos iguais, porém eles cometeram o equívoco de assumir que esses triângulos eram equiláteros (Figura 33a). Na apresentação das estratégias foi questionado se essa informação era verdadeira, gerando dúvida nos alunos, e também foi perguntado de que forma poderiam comprovar que os triângulos eram de fato equiláteros. Os alunos deram algumas sugestões como inscrever o pentágono em uma circunferência e conferir o raio, ou provar que a reta que liga o vértice do polígono ao seu ponto central é a bissetriz do ângulo interno, mas sem sucesso em desenvolver ambas as possibilidades. Após esclarecer o equívoco para a equipe, a professora da disciplina acrescenta que, provavelmente, como a fórmula encontrada pelos alunos precisava da altura, isso levou a conclusão de que o polígono era regular e os triângulos equiláteros, além de que os alunos não possuíam um meio de encontrar precisamente o ponto central do polígono.

Figura 33 – Resoluções da Atividade 2: a) Equipe do dodecaedro b) Equipe do prisma



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Por outro lado, na equipe do prisma a estratégia tomada foi a divisão do pentágono em três triângulos, sendo dois deles congruentes (Figura 33b) e um isósceles. No momento da apresentação o grupo também foi questionado sobre a escolha da estratégia, e justificaram que ambos os triângulos eram iguais, pois os lados eram todos iguais. Essa justificativa caracteriza um dos critérios de congruência de triângulos, mas não foi citada com esse nome em momento algum durante a apresentação. Para os outros poliedros, a estratégia, das duas equipes, consistiu em dividir as faces dos poliedros em triângulos e calcular sua área pela soma da área dos triângulos.

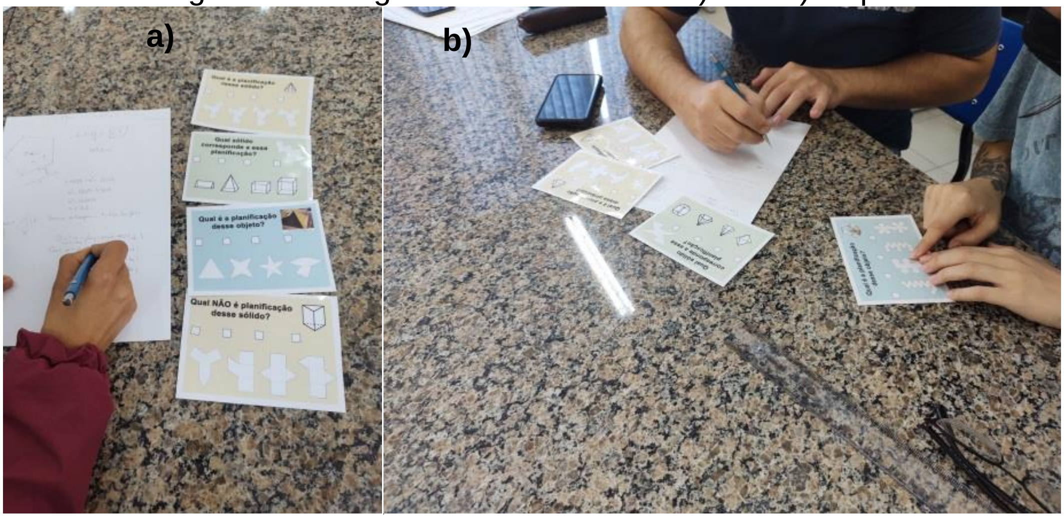
6.2.4 Atividade 3 – Cartões de Planificação

Para a terceira atividade foram recolhidos os sólidos e planificações dos alunos, e sorteados quatro cartões de perguntas para serem resolvidos sem o contato com o material concreto, objetivando a abstração e interpretação usando apenas imagens planas. Ao terminarem as resoluções, os grupos apresentaram suas respostas e raciocínio, com a possibilidade de conferir as eventuais respostas erradas ou alternativas que lhes chamaram mais atenção, usando o material concreto.

Com isso, a terceira atividade foi realizada sem muitas dificuldades. Os alunos, em um primeiro momento, diferenciavam as planificações e sólidos de acordo com o formato e quantidade dos polígonos que os formavam, mas precisavam de outras estratégias para diferenciar algumas das planificações. Nestes casos, os alunos relembraram a atividade anterior e imaginaram o sólido sendo montado a partir da planificação, considerando erradas aquelas onde as faces se sobrepunham ou tinham um lado em aberto.

Os cartões sorteados pelo trio envolviam prismas e pirâmides (Figura 34a), fazendo com que finalizassem a resolução com rapidez, assim, o grupo recebeu um cartão mais desafiador, no qual era necessário encontrar a planificação correta do octaedro. A dupla também não encontrou muita dificuldade na resolução, até tentar resolver o cartão envolvendo a planificação do dodecaedro (Figura 34b) onde, curiosamente, descartaram a resposta correta por acreditarem que era muito óbvia. Ambas as equipes tiveram dificuldade para resolver os casos, que eram um poliedro que não tiveram contato durante as atividades anteriores, e outro que continha um grande número de lados.

Figura 34 – Registro da Atividade 3: a) Trio b) Dupla



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Durante a discussão das estratégias, os alunos comprovaram suas respostas corretas e incorretas utilizando o material concreto, e surpreenderam-se com as respostas incorretas. Nesse momento, uma aluna sintetiza sua estratégia na apresentação ao dizer que “ajudou muito a atividade antes, pois para olhar a planificação tive que imaginar eles [os lados] se desdobrando, alguns tinha como eliminar com as bases de lados diferentes. Nesses aqui [o dodecaedro] eu tentava imaginar uma base e os lados se desdobrando”.

6.2.5 Atividade 4 - Definições

Durante a quarta atividade, os alunos foram instruídos a compartilhar as definições encontradas durante a pesquisa extraclasse com os membros de seu respectivo grupo e discutir as semelhanças e diferenças entre o que encontraram. Ao final, cada grupo deveria selecionar uma definição para apresentar como a que acreditaram ser a mais adequada para definir cada um dos conceitos envolvidos. As definições apresentadas pelos grupos são exibidas no Quadro 2.

Quadro 2 – Definições apresentadas pelas equipes

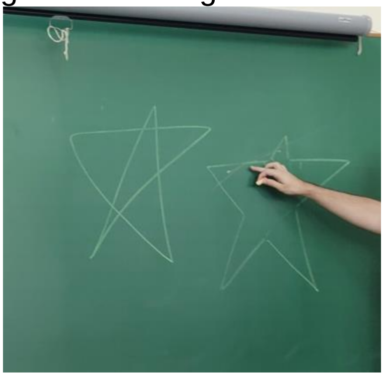
Definição	Dupla	Trio
Polígono	É a figura geométrica plana constituída por linhas consecutivas formando uma poligonal fechada.	São linhas fechadas formadas apenas por segmentos de reta que não se cruzam a não ser em suas extremidades.
Polígono Regular	Quando possui todos os lados são congruentes e todos os ângulos internos com a mesma medida.	Quando todos os lados do polígono têm a mesma medida e todos os seus ângulos internos são congruentes.
Polígono Convexo	Quando é possível construir pelo menos um segmento com as extremidades A e B no interior do polígono e alguma parte desse segmento estiver fora do polígono/ quando todos os ângulos internos forem menores que 180°.	Quando todos os ângulos internos forem menores que 180°.
Poliedro	Sólidos limitados por porções de planos denominados faces.	Sólido limitado por polígonos planos, de modo que: • Dois desses polígonos não estão num mesmo plano; • Cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos.
Poliedro de Platão	• Número de faces é igual ao número de arestas; • Nos vértices partem o mesmo número de arestas;	• Todas as faces têm a mesma quantidade de arestas; • Todos os vértices devem ser formados

	• Vale a relação de Euler.	pela mesma quantidade de arestas; • A relação de Euler deve valer.
Poliedro Regular	• Suas faces são polígonos regulares e congruentes; • Seus ângulos poliédricos são congruentes.	Quando um poliedro de Platão tem todas as suas faces formadas por polígonos regulares idênticos.

Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Na discussão da definição de polígono, as condições apresentadas por cada grupo diferenciam-se pela condição dos segmentos não se interceptarem. Com auxílio da lousa, foi ilustrado o caso particular do polígono estrelado (Figura 35) formado com cinco linhas que se cruzam, um caso que só é possível quando a definição de polígono não exige que as linhas não se interceptem em nenhum ponto. Esse ponto levou a uma discussão sobre a diferença de nomenclaturas e definições dependendo do contexto, com o exemplo do primeiro número natural ser considerado como um no campo da Análise e zero no campo da Álgebra. Assim, o que é considerado como polígono ou poliedro pode depender totalmente da definição utilizada no determinado contexto.

Figura 35 – Polígono estrelado



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Em contraste ao caso anterior, as definições apresentadas pelos grupos para polígono regular eram equivalentes, com pequenas variações na linguagem utilizada. Outro exemplo ilustrado na lousa foi a equivalência entre as definições apresentadas para polígono convexo. Neste momento, a professora da disciplina comenta que vê as duas definições como complementares, pois dependendo do aluno ou do contexto, pode ser mais simples abordar uma do que a outra.

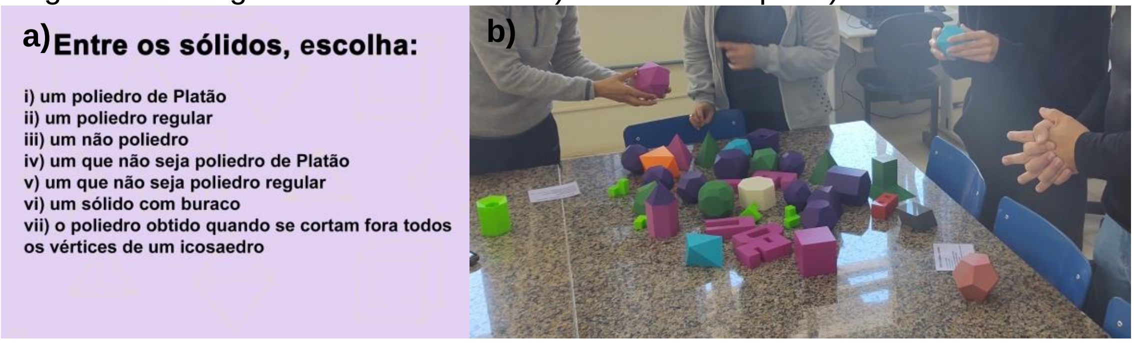
Na apresentação das definições de polígono foi possível perceber alguns dos fatores que levaram os grupos à escolha delas. Uma aluna do trio destacou que não escolheram uma das definições de polígono, pois ela dependia da definição de linha poligonal. Além disso, ela dá destaque para as definições de poliedros que sua colega trouxe, pois elas continham imagens que ilustravam os casos abordados e enunciados mais simples. No caso da dupla, algumas definições foram escolhidas por possuírem uma linguagem mais simples ou por serem mais abrangentes. No caso da definição de polígono convexo, a dupla juntou duas definições por acreditar que elas se complementariam. Além disso, ao sintetizar as ideias da definição de poliedro de Platão, a dupla chegou a uma definição impossível para o conceito, pois não há poliedro que tenha o mesmo número de faces e arestas.

Após as discussões, os pesquisadores apresentaram e explicaram as Definições 5.1, 5.4, 5.6 e 5.7. A maior parte das definições já haviam sido discutidas ao longo da atividade, então o único ponto que chamou a atenção dos alunos foi a condição na Definição 5.4, de poliedro, a respeito de ser possível alcançar qualquer ponto do sólido sem cruzar um vértice.

6.2.6 Atividade 5 – Escolha de sólidos

No segundo dia de aplicação, após a conclusão da discussão sobre as definições matemáticas, cada grupo recebeu um dos cartões apresentados na Figura 26b e na Figura 36a e foram orientados a escolher sólidos de acordo com as instruções do cartão e com as definições apresentadas pelos professores. Com isso, vários sólidos foram expostos sobre uma mesa para que os alunos realizassem as escolhas (Figura 36b), com ao menos duas opções para as primeiras seis alternativas.

Figura 36 – Registro da Atividade 5: a) Cartão da dupla b) Escolha de sólidos



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Os primeiros sólidos que foram selecionados pelos alunos, sem muita dificuldade, foram os poliedros regulares, de Platão e com buraco. O primeiro desafio foi a escolha dos poliedros formados ao cortar as pontas do octaedro e do icosaedro, que exigia a habilidade de visualização dos alunos. O segundo desafio foi encontrar o não poliedro, que nas palavras de uma das alunas, exigia que eles entendessem a definição para achar um sólido que não se encaixasse nela.

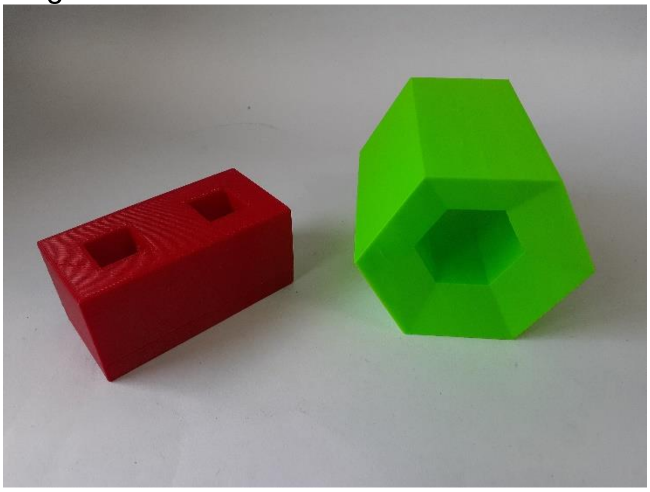
Em seguida, as escolhas de sólidos foram apresentadas, tópico a tópico, e discutidas de acordo com as definições apresentadas. O primeiro caso foram os poliedros de Platão e regulares, onde as equipes justificaram a escolha de acordo com cada condição da definição, porém a dupla inverteu a seleção por confundir os conceitos e o trio escolheu apenas poliedros regulares nos dois casos. Houve uma discussão quanto a diferença entre as definições e sobre a necessidade dos polígonos serem regulares no poliedro regular, mas não nos poliedros de Platão. Com a discussão, um aluno chegou à conclusão que o conjunto dos poliedros regulares está contido no dos poliedros de Platão.

O caso dos não poliedros trouxe as maiores discussões no momento da escolha, pois os alunos tinham que encontrar sólidos que não satisfizessem uma das suas condições e, como citou uma das alunas, eles estão acostumados a identificar quais são poliedros, não os que não são. Durante a procura, a condição que os alunos tentaram negar foi a exigência de “cada lado do polígono deve ser lado de apenas um outro polígono”, porém não souberam justificar muito bem essa escolha, justamente por não compreenderem tão bem as condições. Uma das equipes, por exemplo, escolheu o poliedro em forma de “E” (Figura 25a), mas estavam interpretando de forma equivocada quais eram os lados dos polígonos e os lados do poliedro. Após a explicação, questionando os alunos ao longo dela e destacando o problema que surgia, os alunos perceberam que, na verdade, o problema ocorria com a condição da interseção ser uma face comum.

O caso dos não poliedros de Platão e não regulares foram resolvidos de formas simples, com a seleção de poliedros com faces formadas por polígonos diferentes. Neste momento foi relembrada a discussão anterior e questionado qual poliedro poderia ser escolhido como um que é de Platão, mas não é regular, que são as versões achatadas ou em escalas diferentes dos poliedros regulares.

Os sólidos com buraco foram selecionados sem dificuldade, mas a questão levantada pela professora foi se os sólidos escolhidos também eram poliedros. Os alunos acreditavam inicialmente que sim, mas tiveram dificuldade em verificar as condições da definição. Após verificar cada item da Definição 5.4 com ajuda dos pesquisadores, aparentemente os sólidos escolhidos pelos grupos eram de fato poliedros, porém restava um último item para verificar. Como um poliedro deve ser formado por polígonos, o sólido escolhido pela dupla (à esquerda) não é poliedro, mas o do trio (à direita) sim (Figura 37).

Figura 37 – Sólidos com buraco escolhidos



Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Por fim, embora tenham escolhidos incorretamente, os alunos perceberam um dos padrões que surgem nos poliedros truncados. Uma aluna justificou sua escolha ao apontar no icosaedro que “se ele corta esse aqui [o vértice] ele vai, nesse caso, o que era um vértice vai virar cinco vértices", então concluiu que o poliedro truncado teria muitos vértices e pentágonos e fez sua escolha de acordo com este fato. Com ajuda dos pesquisadores, os alunos chegaram à conclusão que, além dessa característica referente aos vértices, o corte também faz com que as faces do poliedro truncado tenham o dobro do número de lados das faces originais.

6.2.7 Atividade Extra – Relação de Euler

Para complementar as atividades e discussões da sequência aplicada anteriormente, uma última atividade foi realizada abordando a relação de Euler (Apêndice C), desta vez sem a presença dos pesquisadores. As resoluções dos grupos foram organizadas em arquivos pelos alunos e cedidas para análise pela professora da turma. A atividade era composta de cinco perguntas:

1) Nos livros didáticos é usual a Relação de Euler ($V - A + F = 2$) aparecer com enunciado exigindo que o poliedro seja convexo. Verifique se a relação é válida em:
   i) Poliedros não de Platão
   ii) Poliedros não convexos
   iii) Poliedros com buraco

2) Encontre um par de sólidos com o mesmo número de faces, arestas ou vértices (escolha apenas um destes). Se a quantidade escolhida é igual, as outras duas também são obrigatoriamente iguais?

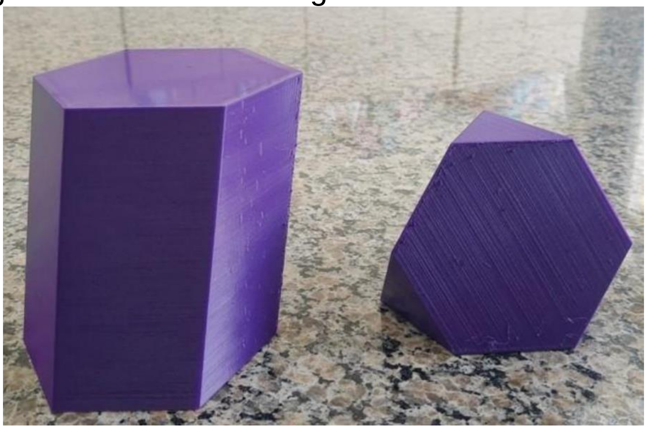
3) Dentre os sólidos, existe algum par que atende a relação de Euler com os mesmos valores (mesmo número de faces, mesmo número de arestas e mesmo número de vértices)?

4) Se um prisma tem uma base de n lados, quantas faces, arestas e vértices ele têm?

5) Se uma pirâmide tem uma base de n lados, quantas faces, arestas e vértices ela têm?

A descoberta do número de faces, arestas e vértices nos poliedros foi efetuada sem muita dificuldade pelos alunos, com apenas um erro de contagem em um dos poliedros com buraco por parte de um dos grupos. Da mesma forma, as equipes escolheram poliedros com o mesmo número de faces e comprovaram que o número de arestas não precisava ser igual. Na terceira questão, uma equipe selecionou o par prisma hexagonal e tetraedro truncado (Figura 38), que de fato satisfazem a relação de Euler da mesma forma, e a outra equipe selecionou o par dodecaedro e octaedro truncado, que verificaram que não atendiam da mesma forma, mas não tiveram tempo suficiente durante a aula para verificar outro par.

Figura 38 – Prisma hexagonal e tetraedro truncado

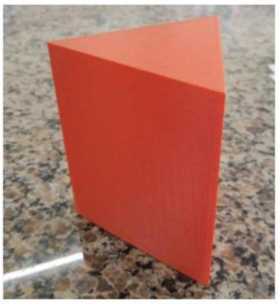


Fonte: Elaborada pelo autor (2022).

Nas questões 4 e 5, cada grupo adotou uma estratégia diferente para descobrir as relações generalizadas para prismas e pirâmides com base de n lados. Ao que indicam as descrições nas atividades entregues, um grupo tentou um processo mais indutivo de supor relações para o número de lados, vértices e arestas a partir de um dos sólidos e verificou se funcionavam em outro até encontrar a relação correta (Figura 39). Enquanto isso, o outro grupo aparentou ter tomado um processo mais dedutivo (Figura 40), utilizando um sólido como referência para visualização e descrevendo as relações a partir dos padrões que surgiriam (por exemplo, uma pirâmide vai ter n faces triangulares e mais a base, logo $n + 1$ faces).

Figura 39 – Resoluções do trio na Atividade Extra

Tomamos como exemplo um prisma triangular



Usamos o próprio sólido para conseguir informações que nos permitissem achar uma relação.

n = 3 A = 9 V = 6 F = 5

Usamos o sólido inicialmente para fazer a relação com os lados e a relação de Euler, se o prisma tem 9 arestas sendo que n = 3, então A = 3n ou A = n² (comprovamos que essa opção não cumpre a relação); para o vértice então vemos que V = 2n.

Aplicando a relação de Euler:

2n - 3n + F = 2 → F = 2 + n, logo F = 5 conferindo que a relação é válida e que podemos usar essa fórmula em função de n, ou seja que V = 2n; A = 3n e F = 2 + n

Achamos essa relação válida, agora vamos usá-la para conferir se é válida com outros prismas, por exemplo um com base octogonal:

n=8

Aplicando a relação achada:

2n - 3n + F = 2 → F = 2 + n → F = 2 + 8 = 10

F = 10 V = 16 A = 24

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 40 – Resoluções da dupla na Atividade Extra

5. Se uma pirâmide tem uma base de *n* lados, quantas faces, arestas e vértices ele têm?

Para obter a relação das pirâmides fizemos a mesma sequência do exercício anterior, construímos uma pirâmide de base menor, de n = 3, fizemos as relações com a equação em função de n, e por fim, repetimos com pirâmides de base n > 3 (as da imagem abaixo) e confirmamos as relações.
Se uma pirâmide tem uma base de *n* lados, vale a seguinte relação em função de *n*:

Faces : F = n + 1
Arestas : A = 2n
Vértices : V = n + 1

Ainda, F = V

Pirâmide de base com n = 10	Pirâmide de base com n = 4	Pirâmide de base com n = 5
F = 10 + 1 = 11	F = 4 + 1 = 5	F = 5 + 1 = 6
A = 2 . 10 = 20	A = 2 . 4 = 8	A = 2 . 5 = 10
V = 10 + 1 = 11	V = 4 + 1 = 5	V = 5 + 1 = 6

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A professora da disciplina adiciona ao relato que:

> Foi preciso apresentar novamente as definições discutidas anteriormente para que os alunos relembrassem e pudessem aplicar. Os alunos tiveram um pouco de dificuldade em responder as questões 2 e 3, pela falta de tempo. Como os sólidos com mais vértices e arestas davam um certo trabalho para fazer a contagem, por vezes eles se perdiam ou erravam, levando a uma ou outra conclusão incorreta que, discutindo com a outra equipe, era corrigida. (Professora da disciplina de LEM I, 2022).

7 ANÁLISE DOS RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO

Com as respostas do questionário (Apêndice D) foi descoberto que apenas dois alunos tiveram contato com material manipulável concreto antes do Ensino Superior, tendo ocorrido nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Os alunos apontaram que o material utilizado nas atividades descritas no Capítulo 6 teve um efeito positivo na visualização e compreensão dos conceitos, tanto pela caracterização das atividades como interessantes, desafiadoras e estimulantes, quanto pelos benefícios elencados pelo seu uso na aplicação (Figura 41).

Figura 41 – Extratos dos questionários

1) As atividades realizadas na sequência foram (você pode marcar mais de uma opção):

☐muito interessantes X interessantes ☐pouco interessantes ☐chatas

X desafiadoras ☐monótonas ☐repetitivas ☐estimulantes

Explique: Interessantes pelo uso de material diferente do que estamos acostumados a ver numa sala de aula. A própria construção dos sólidos se dá por uma tecnologia relativamente nova em que seu produto por si só chama a atenção. As formas e cores também foram bem exploradas na impressão, o que criou sólidos chamativos. As atividades e sua sequencia de execução também foram interessantes e desafiadoras visto que os conceitos e a dificuldade do que era proposto foi aumentando pouco a pouco.

7) Você acha interessante o uso destes tipos de materiais para o ensino de Matemática? Em que outro conteúdo você gostaria considerar que poderia ser usado material manipulável?

R: Muito! É de extrema importância que as crianças tenham contato com esse tipo de material para ajudar a consolidar os conhecimentos matemáticos vistos de maneira teórica em sala de aula. A matemática é uma ferramenta que surgiu a partir da necessidade dos seres humanos, então acredito que esse tipo de material tem muita aplicação em diversos conteúdos, como unidades de medida, mostrando a comparação entre metro, centímetro, milímetro, entre outras.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Dada a sua dificuldade com visualização tridimensional, uma aluna afirmou que ter o material para poder fazer manipulações e comparações a ajudou bastante e explicou que foi possível associar os conceitos com a forma real do objeto, o que nem sempre acontece quando se tem apenas uma figura bidimensional. Outro aluno acrescentou que a atividade ajudou a não ter uma imagem tão abstrata e a pensar de onde surgiram as definições estudadas nas aulas.

Além disso, dois estudantes destacaram que o material ajudou na busca das planificações por proporcionar a sobreposição dos sólidos, observando as similaridades e diferenças entre elas. Um deles afirmou que a atividade, por fazer uso de outros sentidos como o tato, além de permitir a observação dos sólidos de vários pontos de observação distintos, enriqueceu a forma de entender o conteúdo que se propunha apresentar.

Por outro lado, os alunos também citaram algumas de suas dificuldades na realização das atividades. A primeira delas foi relacionar os conceitos formais com os materiais utilizados, que uma estudante acredita ser resultado do pouco contato com materiais concretos e maior contato com figuras “desenhadas” ao longo dos anos de estudo, enquanto outra atribuiu a dificuldade pela atividade ser inédita para ela. Outras dificuldades citadas foram não se lembrar de conceitos estudados há muito tempo ou não compreendidos tão bem, como os polígonos regulares e cálculo de áreas, e também diferenciar definições semelhantes como poliedros regulares e de Platão.

Os alunos foram questionados quanto a parte favorita e que menos gostaram durante a aplicação. As atividades mais apreciadas pelos alunos foram as envolveram os materiais concretos, principalmente a atividade 1 e 5, que são as duas que mais envolviam a manipulação de materiais entre as atividades realizadas. Já os momentos que menos gostaram foram o cálculo de áreas (porém ainda considerada interessante), dado a dificuldade de relembrar conceitos antigos, e as discussões teóricas sobre as definições, justificada pela repetição de algumas delas com mudanças apenas na linguagem, ou pela dificuldade de compreendê-las.

Quanto a importância do uso de materiais como esses, as respostas dos alunos foram unânimes, todos considerando que o uso dos materiais pode contribuir para o ensino de matemática. Além dos benefícios elencados anteriormente, uma aluna acredita que é de extrema importância que as crianças tenham contato com esse tipo de material para ajudar a consolidar os conhecimentos matemáticos vistos de forma teórica em sala de aula. Além disso, elencaram diversos contextos em que gostariam de ver materiais e atividades como essa, por exemplo, em geometria analítica, cálculo de volumes, funções, conversão de unidades de medida, entre outras.

Os alunos também foram convidados a deixar críticas e comentários sobre a atividade. Alguns alunos indicaram que não era tão necessário passar tanto tempo comparando e discutindo as definições (Atividade 4), pois isso fez com que tivessem menos tempo para analisar os materiais na Atividade 5 e o professor poderia escolher a “melhor” definição previamente. Em contraste a essa opinião, uma aluna gostaria de ter mais tempo para toda a atividade, principalmente para a exposição e discussão das definições. Em seus comentários finais, os alunos destacaram que gostaram e aprenderam com a atividade e que acreditam que seu uso possa trazer muitos benefícios para a aprendizagem dos alunos em futuras aplicações.

A professora da disciplina de LEM I afirmou que atividades como essa são importantes para a formação de professores, pois é essencial que estes tenham acesso a uma gama de formas de reconhecer e representar um objeto matemático, enriquecendo o conhecimento sobre ele e as possibilidades de aplicá-lo na vida profissional. A discussão sobre as definições, por exemplo, foi muito rica, pois auxiliou os alunos a entenderem, aprenderem a interpretar e pensar sobre elas:

> Considero bem importante que a atividade tenha trabalhado com diversos tipos de representação dos objetos matemáticos. Alguns alunos apresentam bastante dificuldade em criar uma imagem tridimensional a partir de uma figura desenhada num livro, por exemplo. A questão da planificação também se mostra bem importante para ser trabalhada no curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que os alunos relatam não ter tido contato com planificações durante o Ensino Básico. Como vão aplicar em sala de aula (como professores), algo com o qual nunca tiveram contato? (Professora da disciplina de LEM I, 2022).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos observar que a utilização dos materiais manipuláveis concretos contribuiu positivamente para a aprendizagem dos alunos envolvidos. Os sólidos e planificações facilitaram a visualização, compreensão de conceitos e associação dos conteúdos teóricos com o concreto, auxiliando na execução das atividades. Por sua vez, a sequência de atividades contribuiu para que os alunos pudessem relembrar, discutir e aprofundar os conhecimentos de geometria plana e espacial, tudo isso de uma maneira diferente do habitual e que despertou interesse, estimulou e desafiou os participantes.

Também é importante ressaltar que as atividades descritas na sequência aplicada podem passar por adaptações dependendo de aspectos como: os materiais, estrutura e tempo disponíveis, dos objetivos do professor e da disciplina e do número de participantes. Assim, por mais que os materiais virtuais não tenham sido aplicados com os participantes deste trabalho, eles podem ajudar aos alunos a relembrar a atividade realizada, além de ter um papel semelhante ao simular a manipulação dos modelos e planificações, caso o acesso aos materiais concretos não seja possível ou até mesmo propor atividades novas como a generalização de propriedades, tudo isso dependendo do contexto de aplicação.

Nem todos os materiais descritos nessa dissertação foram utilizados de fato em sala de aula. A intenção inicial era aplicar também os materiais virtuais na sequência de atividades, mas acabaram não sendo utilizados por não se adequarem aos objetivos da disciplina. Porém, embora não seja analisada nesta dissertação, pretende-se organizar uma sequência de atividades com foco no cálculo de áreas e volumes para a disciplina de Geometria Plana e Espacial do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC e utilizar esses materiais nessa adaptação.

O trabalho também proporcionou a descoberta de novos conhecimentos teóricos para o autor, como a variedade de definições encontradas para poliedros e os impactos que essa diversidade pode ter nas provas de teoremas; o curioso caso dos poliedros com buraco e a relação de Euler observada da perspectiva da topologia. Além disso, foi escrito e elaborado um artigo para evento descrevendo e analisando a aplicação das atividades envolvendo os poliedros e suas planificações.

Considerando o que foi discutido ao longo do trabalho, desde a apresentação dos aspectos teóricos, à elaboração dos materiais e propostas de atividades, bem como sua aplicação e análise, espero que os tópicos abordados ao longo do trabalho possam inspirar e auxiliar professores e pesquisadores nos seus trabalhos envolvendo o uso de materiais concretos e virtuais e no ensino de matemática, especialmente de conteúdos de geometria plana e espacial.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, R.; FIGUEIREDO, E. B.; MATTOS, J. P. M. Parabológrafo: um artefato para desenhar parábolas. In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019, Cuiabá. **Anais ...**, 2019. p. 1-15.

AGUIAR, L. de C. D. **Um Processo para Utilizar a Tecnologia de Impressão 3D na Construção de Instrumentos Didáticos para o Ensino de Ciências**. 2016. 226 folhas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2016.

AGUIAR, L. de C. D.; YONEZAWA, W. M. Construção de Instrumentos Didáticos com Impressoras 3D. In: IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2014, Ponta Grossa. **Anais ...**, 2014.

ANGELO. M. S.; SANTOS, M. F. M. dos; BARBOSA R. S. de J. O Ensino de Geometria no Brasil: uma abordagem histórica. In: XIV Colóquio Internacional “Educação e Contemporaneidade”, 2020, Sergipe. **Anais ...**, 2020.

BENK, P. *et al*. O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. In: II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação, 2016, Joinville. **Anais ...** Joinville, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 mar. 2022.

CÁSSIO, J. **Exercícios sobre Gráficos das Funções Circulares**. [*S. l.*] 8 maio 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ewb2fsvq. Acesso em: 15 jun. 2022.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar 9**: geometria plana. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar 10**: geometria espacial, posição e métrica. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

GERCK, E.; LIMA, J. L. O Corte a Laser: da teoria à máquina (tutorial). In: **97 International Seminar** “Láseres: usos y aplicaciones industriales”, 1997, Cidade do México.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008. 220 p.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8ª ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004. 107 p.

HALVERSCHEID, S.; LABS, O. Felix Klein's Mathematical Heritage Seen Through 3D Models. In: Weigand H. G., McCallum W., Menghini M., Neubrand M., Schubring G. (eds.). **The Legacy of Felix Klein**, ICME-13 Monographs, 2019. p. 131-152.

HANNA, G. **Proof, explanation and exploration: an overview**. Educational Studies in Mathematics, Zurique, n.44, p.5-23, 2000. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/226598348_Proof_Explanation_and_Exploration_An_Overview>. Acesso em: 26 jan. 2022.

KALINKE, M. A. et al. Tecnologias e Educação Matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. In: KALINKE, M. A.; MOCROSKY, L. F. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisas e possibilidades. Curitiba: UTFPR, 2015. p. 159-186. Disponível em: <http://paginapessoal.utfpr.edu.br/kalinke/publicacoes/Educacao_Matematica_pesquisas_e_possibilidades.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2022.

KNILL, O.; SLAVKOVSKY, E. A. **Thinking Like Archimedes with a 3D Printer**. Harvard University, 2013.

LEMKE, R. **Objetos de Aprendizagem para o Ensino de Funções de Duas Variáveis**: um diferencial dinâmico. 2015. 158 folhas. (Dissertação) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2015.

LEMKE, R.; SIPLE, I. Z.; FIGUEIREDO, E. B.. OAs PARA O ENSINO DE CÁLCULO: POTENCIALIDADES DE TECNOLOGIAS 3D. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 1, julho, 2016.

LIMA, E. L. O Teorema de Euler sobre Poliedros. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, nº 2, p. 57-74, dez. 1985.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, volume 2. Rio de Janeiro, 6ª ed, SBM, 2006. 308 p.

LUCENA, R. S. **Laboratório de Ensino de Matemática.** Fortaleza, 2017. 94 p.

MIALICH, R. F. **Poliedros e Teorema de Euler**. 2013. 79 folhas. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2013.

NEIDE, I. G.; QUARTIERI, M. T. Recursos Tecnológicos nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática e da física. In: DULLIUS, Maria M.; QUARTIERI, Marli T. (Org.). **Aproximando a Matemática e a Física por meio de recursos tecnológicos**: Ensino Médio. Lajeado: Ed. Da Univates, 2016. p. 9-14. Disponível em: <https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/191/pdf_191.pdf >. Acesso: 24 out. 2021.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012.

SANTOS, R. C.; GUALANDI, J. H. Laboratório de Ensino de Matemática: o uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais ...**, 2016.

SCALDELAI, D. O software GeoGebra. In: BASNIAK, Maria I.; ESTEVAM, Everton J. G. (Orgs.). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica: frações, estatística, círculo e circunferência**. Curitiba: Ithala, 2014. p. 13-23.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa do Departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC/CCT, intitulada: Materiais concretos e virtuais para o ensino de Geometria, tendo como objetivo criar e aplicar sequências didáticas utilizando materiais concretos e virtuais e analisar seus resultados por uma abordagem qualitativa. Serão previamente marcados a data e horário para a aplicação das aplicações.

Você não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula. A sua identidade será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão que os dados gerados a partir dela podem provocar melhorias nos processos de ensino e aprendizagem de geometria, tornando-as mais atrativas e que propiciem a construção da aprendizagem efetiva.

As pessoas que acompanharão os procedimentos serão os pesquisadores Jeferson Camargo da Silva, Elisandra Bar de Figueiredo e Débora Eloisa Nass Kieckhoefel.

Você poderá se retirar da pesquisa a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados para a produção de artigos técnicos e científicos, como as resoluções de atividades, uso de fotos, vídeos e transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula. A sua privacidade será mantida através da não-identificação do nome.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Nome do pesquisador responsável para contato: Elisandra Bar de Figueiredo
Contato: elisandra.figueiredo@udesc.br
Endereço: Sala D16. Rua Paulo Malschitzki, 200. Zona Industrial Norte, Joinville / SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso: ____

Assinatura ___________________________ Local: ___________________ Data: ____/____/___.

APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

UDESC | LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Proposta de sequência de atividades para explorar Poliedros em LEM I

Dia 1

Momento 1 - pesquisa preliminar – a ser feita extraclasse antes da aula: pesquisar as definições de polígono, polígono regular, polígono convexo, poliedro, poliedro de Platão e poliedro regular. Apresentar as referências usadas na definição.

Momento 2 - apresentação do Fab3D: levar os alunos para o Laboratório Fábrica Matemática (Fab3D) para mostrar as máquinas e os materiais produzidos. (20 min)

Momento 3 - organização da sala: dividir os alunos em grupos de dois ou três integrantes e distribuir para as equipes os poliedros para as atividades 1 e 2. (5 min)

Momento 4 – atividades sobre poliedros e suas planificações

Atividade 1: pareamento do poliedro com a sua planificação. Cada grupo que deverá encontrar as planificações dos poliedros que recebeu entre várias expostas em uma mesa. (20 min)

Atividade 2: cálculo da área de um dos poliedros da Atividade 1, que tenha pelo menos uma face sendo um polígono de 5 lados, utilizando as planificações. Explicar brevemente como calculariam a área dos demais poliedros. (30 min)

Momento 5 - compartilhamento dos resultados: Quando os alunos tiverem feito as duas atividades será feito o compartilhamento de estratégias e resolução das respostas. (30 min)

Atividade 3: **r**esolução dos cartões com perguntas sobre poliedros e suas planificações (sem usar o material). (20 min)

Atividade 4: nos grupos os alunos irão comparar os resultados da pesquisa preliminar, observar as diferenças, se houverem. Escolher a definição de cada elemento que considerarem mais pertinente e registrar a numa folha A0 para apresentar. (30 min)

Dia 2 (50 minutos)

Momento 6 – estabelecimento das definições: apresentar as definições (da Pesquisa preliminar) que deverão ser utilizadas para a Atividade 5. (10 min)

Momento 7 – atividade Relação de Euler

Atividade 5: Dentre vários materiais expostos as equipes deverão escolher os sólidos indicados num cartão e verificar a relação de Euler nos Poliedros. Ao final explicar as escolhas. (40 min)

APÊNDICE C – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

QUESTÕES SOBRE RELAÇÃO DE EULER

1) Nos livros didáticos é usual a Relação de Euler ($V - A + F = 2$) aparecer com enunciado exigindo que o poliedro seja convexo. Verifique se a relação é válida em:
    i) Poliedros não regulares
    ii) Poliedros não convexos
    iii) Poliedros com buraco

2) Encontre um par de sólidos com o mesmo número de faces, arestas ou vértices (escolha apenas um destes). Se a quantidade escolhida é igual, as outras duas também são obrigatoriamente iguais?

3) Dentre os sólidos, existe algum par que atende a relação de Euler com os mesmos valores?

4) Se um prisma tem uma base de n lados, quantas faces, arestas e vértices ele têm?

5) Se uma pirâmide tem uma base de n lados, quantas faces, arestas e vértices ele têm?

APÊNDICE D – MODELO DE QUESTIONÁRIO

QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES SOBRE PLANIFICAÇÕES E POLIEDROS

Agradecemos muito a participação de vocês e gostaríamos de ouvir a opinião de vocês sobre as atividades e materiais apresentados.

1) As atividades realizadas na sequência foram (você pode marcar mais de uma opção):

☐muito interessantes ☐interessantes ☐pouco interessantes ☐chatas

☐desafiadoras ☐monótonas ☐repetitivas ☐estimulantes

Explique:____
____
____

2) Já tinha utilizado materiais manipuláveis? Caso sim, em que situação?

R:____
____
____

3) O uso do material manipulável ajudou na visualização e resolução das atividades?

Explique:____
____
____

4) O uso do material manipulável ajudou a compreender os conteúdos de matemática?

Explique:____
____
____

5) Quais foram as suas maiores dificuldades na realização das atividades?

R:____

____

____

6) Qual a parte que mais gostou na aplicação das atividades? E qual a parte que menos gostou?

R:____

____

____

7) Você acha interessante o uso destes tipos de materiais para o ensino de Matemática? Em que outro conteúdo você gostaria/considera que poderia ser usado material manipulável?

R:____

____

____

8) Que mudanças você gostaria de ver na aplicação das atividades se elas fossem feitas novamente?

R:____

____

____

9) Comentários gerais que você gostaria de deixar para os pesquisadores.

R:____

____

____