UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ANA CAROLINA VILA DO AMARAL

OS INDO-ARÁBICOS, OS IRRACIONAIS E OS REAIS: APANHADO HISTÓRICO E PROPOSTAS DE ENSINO

JOINVILLE
2021

ANA CAROLINA VILA DO AMARAL

OS INDO-ARÁBICOS, OS IRRACIONAIS E OS REAIS: APANHADO HISTÓRICO E PROPOSTAS DE ENSINO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC.

Orientadora: Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

JOINVILLE

2021

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,

com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Amaral, Ana Carolina Vila do
Os indo-arábicos, os irracionais e os reais : apanhado histórico e propostas de ensino / Ana Carolina Vila do Amaral. -- 2021.
130 p.

Orientador: Elisandra Bar de Figueiredo
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2021.

1. Sistema indo-arábico. 2. Irracionais. 3. Reais. 4. História da matemática. 5. Produto educacional. I. Figueiredo, Elisandra Bar de. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

ANA CAROLINA VILA DO AMARAL

OS INDO-ARÁBICOS, OS IRRACIONAIS E OS REAIS: APANHADO HISTÓRICO E PROPOSTAS DE ENSINO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)

Profa. Dra. Viviane Maria Beuter
CCT/UDESC

Prof. Dr. Mateus Bernardes
UTFPR/Curitiba

Joinville, 25 de agosto de 2021.

Àqueles que amo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e ao Peter, que desde sempre tem me apoiado e me motivado a seguir estudando a área que tanto amo. Agradeço também às minhas gatas, Kim e Lua, por terem me distraído com momentos de diversão.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, em especial Talita, Jonathan e Alemão, por terem sido grandes companheiros nas aulas presenciais.

Agradeço à minha orientadora Elisandra, pelas correções e melhorias deste trabalho e, mais além, pela amizade e preocupação que faz dela não só uma professora especial, mas também uma pessoa incrível.

Agradeço à UDESC e à CAPES, pela concessão da bolsa que contemplou grande parte do período em que realizei meu mestrado.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todas as outras pessoas que me apoiaram, direta ou indiretamente: amigos, colegas, professores... Obrigada!

“A matemática é um aspecto único do pensamento humano, e sua história difere da essência de todas as outras histórias”.

Isaac Asimov

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo histórico acerca de três grandes marcos no desenvolvimento da matemática: a descrição dos números através do sistema indo-arábico, a descoberta dos irracionais e a completude dos reais. Acredita-se que utilizar o contexto histórico para introduzir a teoria pode fazer crescer nos alunos a motivação para a aprendizagem. Desta forma, o principal objetivo deste trabalho é fornecer o contexto histórico no qual se deu cada um dos marcos para que, assim, fosse possível construir um produto educacional que unisse a história e a teoria no desenvolvimento dos três marcos citados. Realizou-se inicialmente uma revisão de literatura em dissertações do PROFMAT, com o objetivo de pontuar possíveis melhorias para este trabalho, além de identificar as referências utilizadas para o suporte teórico. Em seguida, desenvolveu-se o embasamento teórico, contendo o contexto histórico de cada um dos três marcos e tendo como suporte referências reconhecidas na comunidade acadêmica. Visto que este trabalho está inserido no PROFMAT, cujo foco consiste em aprimorar a formação do professor de matemática do Ensino Básico, o produto educacional desenvolvido, disposto no Apêndice deste trabalho, foi pensado de forma a atender tal nível de escolaridade, além da possibilidade de ser usado em cursos de formação de professores de matemática. O produto consiste em três propostas de atividades, cada uma contemplando um marco específico. Cada uma das três propostas é composta por contexto histórico – baseado neste trabalho –, teoria, atividades e exemplos, bem como uma seção destinada ao professor, com gabarito e sugestões.

Palavras-chave: Sistema indo-arábico. Irracionais. Reais. História da matemática. Produto educacional.

ABSTRACT

This work presents a historical study about three major milestones in the development of mathematics: the description of numbers through the Indo-Arabic system, the discovery of irrationals and the completeness of the real numbers. Using the historical context to introduce theory is believed to increase students' motivation for learning. Thus, the main objective of this work is to provide the historical context in which each one of the milestones took place, so that creating an educational product joining history and theory in the development of those three milestones would be possible. Initially, a literature review was carried out on PROFMAT dissertations, with the aim of pointing out possible improvements for this work, in addition to identifying the references used for theoretical support. Then, the theoretical background was developed, containing the historical context of each of the three milestones and supported by references recognized in the academic community. Since this work is a part of PROFMAT, whose focus is to improve the training of mathematics teachers in Basic Education, the developed educational product, shown in the Appendix of this work, was designed for that level of education, in addition to the possibility of being used in math teacher training courses. The product consists of three activity proposals, each contemplating a specific milestone. Each of the three proposals is composed of historical context – based on this work –, theory, activities and examples, as well as a section for the teacher, with answers and suggestions.

Keywords: Indo-arabic system. Irrationals. Real numbers. History of mathematics. Educational product.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho se propõe a estudar historicamente três grandes marcos no que diz respeito ao desenvolvimento da matemática, a saber: a descrição dos números através do sistema indo-arábico, a descoberta dos irracionais e a completude dos reais.

A escolha por escrever sobre os três marcos se dá pela motivação de discorrer a respeito do desenvolvimento da matemática, mais especificamente o desenvolvimento da numeração. Iniciamos falando do sistema indo-arábico pois, ao utilizar-se da lógica posicional, ele possibilitou que pudéssemos escrever todos os números em forma de dízima periódica. Assim, com o posterior descobrimento dos irracionais, foi possível descrever este conjunto de números a partir de uma soma infinita de frações. Finalmente, torna-se viável falar a respeito do conjunto dos números reais, composto de racionais e irracionais, e da sua completude.

Acredito que estudar e escrever sobre a história da matemática pode fazer com que o professor a veja como algo mais amplo e contextualizado, possibilitando visualizar a matemática como um conjunto de conteúdos que se articulam, e não somente como blocos isolados ou como “uma coleção arbitrária de pedaços de informação” [1]. Aprender sobre a história da matemática e sua influência na atualidade permite que o professor aborde cada conteúdo a partir de seu contexto histórico, fazendo crescer nos alunos a motivação para a aprendizagem, já que eles poderão então compreender todo o desenvolvimento de um conceito, e não apenas recebê-lo pronto.

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2008, p. 1),

> Para ensinar matemática em qualquer nível é necessário ajudar os estudantes a entenderem as questões e formas de pensamento que ligam os detalhes. [...] Muitos estudantes [...] têm uma curiosidade natural sobre de onde vieram as coisas. Com sua ajuda, essa curiosidade pode levá-los a entender processos matemáticos que eles precisam conhecer.

---

[1] Expressão utilizada em Berlinghoff e Gouvêa (2008, p. 3).

Além de se sentirem motivados, os alunos podem inclusive se interessar pela investigação em matemática, a partir do momento em que percebem que todo conceito é fruto de estudo, e não de simples sorte ou genialidade.

Para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC – Base Nacional Comum Curricular – cita que “[...] é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática.” (BRASIL, 2018, p. 298).

A principal razão para escrever sobre o desenvolvimento da matemática é a possibilidade de inseri-lo em sala de aula, fornecendo um contexto para o conteúdo teórico a ser abordado, concordando com a proposta da BNCC, ao considerar que

> [...] para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. (BRASIL, 2018, p. 299).

Como estudante do Ensino Básico, eu praticamente não tive contato com a história da matemática durante as aulas, o que tornava o aprendizado do conteúdo algo abstrato e isolado, pois não entendia o seu desenvolvimento e a sua ligação com outros conteúdos. O estímulo para escrever esse trabalho se dá no fato de que professores podem utilizar esse material como base para elaborar seus planos de aula, com o foco na relação dos conteúdos matemáticos com o contexto histórico no qual se desenvolveram, tornando assim o aprendizado mais interessante e motivador para o aluno e contribuindo “[...] para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.” (BRASIL, 1998, p. 43).

Ao aprender sobre a história da matemática, o professor pode levar seus alunos a obterem um conhecimento mais profundo sobre o conteúdo abordado. Mais além,

> Conhecer os obstáculos enfrentados pelo homem na produção e sistematização desse conhecimento também pode levar o professor a uma melhor compreensão e aceitação das dificuldades enfrentadas pelos alunos e pensar em estratégias mais adequadas para favorecer

> a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. (BRASIL, 1998, p. 33).

O objetivo geral deste trabalho é identificar e investigar três grandes marcos no desenvolvimento da matemática. Quando se trata da história da matemática, há muito o que discorrer e, por esta razão, foram definidos os seguintes objetivos específicos, discutidos ao longo do desenvolvimento:

- Investigar historicamente a descrição dos números através do sistema de numeração indo-arábico.
- Ressaltar a importância e a necessidade da adoção do sistema de numeração indo-arábico.
- Investigar historicamente a descoberta dos irracionais com os pitagóricos.
- Interpretar a necessidade dos números irracionais.
- Demonstrar que $\sqrt{2}$ não é racional.
- Demonstrar que a relação entre o lado e a diagonal do pentágono regular é irracional.
- Investigar historicamente a completude dos reais através da convergência de sequências de Cauchy.
- Relacionar os números reais à soma de infinitas frações da forma $\frac{p}{10^m}$.
- Mostrar que todo número real pode ser aproximado por sequências (x_n) de racionais.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 2 estão descritos os procedimentos metodológicos utilizados; no Capítulo 3 é feita a revisão de literatura, utilizando dissertações do PROFMAT; no Capítulo 4 é desenvolvido o embasamento teórico, dividido em três partes, cada uma tratando de um marco específico; no Capítulo 5 apresentamos a ideia do produto educacional, disposto integralmente no Apêndice A, ao final do trabalho; e no Capítulo 6 estão presentes algumas considerações acerca deste trabalho.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada no trabalho realiza um estudo qualitativo acerca do tema que, segundo Moreira (2011, p. 77), tem o objetivo de procurar “[...] a compreensão do fenômeno social segundo a perspectiva dos autores através de participação em suas vidas [...]”. Além disso, procura “[...] a explicação interpretativa; heurísticas em vez de algoritmos [...]”.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 2), há cinco características que definem a investigação qualitativa. São elas:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
2. A investigação qualitativa é descritiva;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

A estratégia utilizada no trabalho é a da pesquisa bibliográfica, pois trata-se de um trabalho de caráter teórico. O trabalho inicia com uma revisão de literatura, onde procura-se estabelecer uma relação entre os trabalhos com temática semelhante, destacando os pontos relevantes de cada um, além daqueles considerados insuficientes. O objetivo é pontuar o diferencial que será encontrado no meu trabalho, ou seja, em quais aspectos o meu trabalho se diferencia e, de certo modo, se sobressai ao demais semelhantes já publicados.

Para a revisão de literatura, inicialmente busquei trabalhos na base de dissertações do PROFMAT, pois é o programa de mestrado no qual este trabalho está inserido e, por isso, o objetivo da maioria dos trabalhos conversa com o objetivo deste. No Quadro 1, estão relacionadas as palavras-chave e a quantidade de resultados retornados em cada uma. Vale ressaltar que, no site do PROFMAT, a busca por palavras-chave se dá apenas no título da dissertação.

Quadro 1 - Busca por dissertações do PROFMAT

Palavra-chave	**Número de dissertações**
Completude	0
Construção dos números reais	7
Dedekind	4
Descoberta dos irracionais	0
Desenvolvimento da matemática	3
Evolução histórica	3
Incomensuráveis	1
Irracionais	17
Numeração	16
Sequências de Cauchy	1
Sistema indo-arábico	0

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

Com base no título de cada dissertação, filtrei 23 dissertações para analisar os respectivos resumos e, assim, definir se o trabalho poderia contribuir para a escrita deste, além de descartar trabalhos de temática semelhante. Alguns títulos possuíam mais de uma palavra-chave relacionada no Quadro 1 e, por isso, a soma da Coluna 2 não condiz com o total de dissertações selecionadas.

Dessa forma, 6 dissertações foram selecionadas para embasar esta revisão de literatura, presente no capítulo seguinte. Na seleção das dissertações, optou-se por delimitar a duas dissertações para cada um dos três grandes marcos no desenvolvimento da matemática que serão tratados neste trabalho (sistema indo-arábico, descoberta dos irracionais e completude dos reais). No Quadro 2, estão relacionadas as 6 dissertações citadas, com o respetivo autor e os tópicos considerados relevantes para a sua seleção.

Quadro 2 - Dissertações selecionadas e respectivos pontos relevantes

Autor	**Tópicos relevantes do trabalho**
Ana Cláudia Guedes dos Santos *Santos (2013)*	• Segmentos comensuráveis e incomensuráveis; • Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ geometricamente; • Representação decimal de frações; • Sugestão de atividades.
André Valner Ruis *Ruis (2014)*	• Evolução histórica do número real; • Possui uma seção sobre o sistema de numeração indo-arábico.
Aroldo Eduardo Athias Rodrigues *Rodrigues (2013)*	• Evolução histórica dos sistemas de numeração; • Possui uma seção sobre os algarismos indo-arábicos.
Aurenildo Bezerra dos Santos *Santos (2018)*	• Aborda de formas distintas a irracionalidade de $\sqrt{2}$; • Traz diversas demonstrações interessantes, inclusive da irracionalidade de $\sqrt{p}$, com p primo.
Bruno Pereira da Silva *Silva (2018)*	• Estuda a construção dos reais por Cauchy e Dedekind; • Trata sobre a completude dos reais.
Murilo Morais Roriz *Roriz (2014)*	• Aborda a evolução do conceito de número; • Estuda a construção dos Reais na escola e suas aplicações; • Mostra a carência no ensino-aprendizagem dos irracionais.

Fonte: Elaborado pela autora (2020)

Em seguida, para o embasamento teórico, o objetivo é usar fontes mais conhecidas e renomadas na comunidade acadêmica para basear a teoria tratada no trabalho. Uma das referências para encontrar tais fontes foram os próprios trabalhos da revisão de literatura, que também procuravam usar autores renomados para embasar seus trabalhos. Outros autores que posteriormente foram selecionados foram sugeridos tanto pela professora orientadora da dissertação, quanto pela professora da disciplina de Projeto de Pesquisa.

Os livros utilizados para embasar a teoria deste trabalho são tanto analíticos quanto históricos, visto que o objetivo é relacionar a teoria matemática com o contexto no qual ela foi desenvolvida.

O embasamento teórico é dividido em três seções. Cada uma das seções tem o objetivo de discutir o desenrolar histórico de um marco específico para o desenvolvimento da matemática. Optou-se por esta divisão pois cada marco tem as suas próprias peculiaridades, e deixar tudo num mesmo texto poderia causar confusão ao leitor.

Por fim, será elaborado um produto educacional, que irá consistir em três propostas de atividades, cada uma tratando de um marco específico, destinado aos alunos no Ensino Básico. O produto educacional irá conter contexto histórico, teoria, atividades e exemplos, além de uma seção para o professor, com gabarito e sugestões.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem por objetivo analisar brevemente alguns trabalhos de temática semelhante. Para isto, foram selecionadas 6 dissertações, 2 para cada marco histórico, com o intuito de verificar a teoria desenvolvida, destacar pontos relevantes encontrados nos trabalhos e pontuar possíveis diferenciais encontrados neste trabalho.

Como primeiro grande marco no desenvolvimento da matemática, cita-se o sistema de numeração indo-arábico, pois é o sistema utilizado atualmente. Para Ruis (2014, p. 19), era necessário adotar um sistema de numeração adequado, pois "[...] o homem desde o princípio, mesmo que de forma intuitiva, já se preocupava em organizar e quantificar objetos e animais campestres para sua subsistência.". Inicialmente, utilizava os dedos de uma mão, agrupando suas contagens em um sistema de numeração de base cinco.

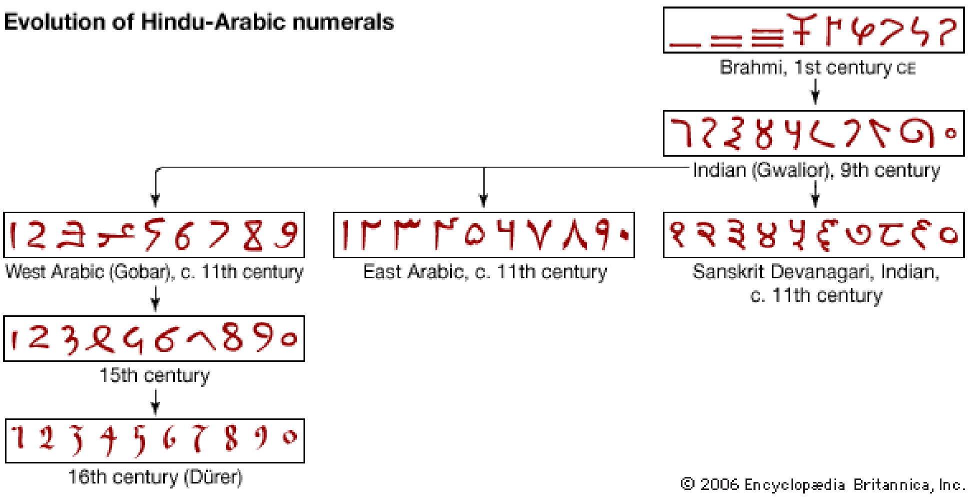
Além desta citada, no trabalho de Ruis (2014) há diversas referências históricas que embasam a consolidação do sistema de numeração indo-arábico, citando alguns dos problemas verificados nos demais sistemas numéricos ao longo do tempo e exemplificando as vantagens de escolher um sistema posicional de base 10.

O sistema de numeração indo-arábico é um sistema posicional de base 10, isto é, caracteriza-se "[...] pelo *princípio de posição*, segundo o qual os algarismos assumem valores relativos à posição que ocupam no numeral [...]" (RODRIGUES, 2013, p. 27, grifo do autor), além de usar a quantidade de 10 números para efetuar cada agrupamento. Para Rodrigues (2013, p. 21), o agrupamento de dez em dez foi uma prática adotada que se tornou natural para o homem, visto que "[...] suas mãos sempre foram calculadoras naturais da qual poderia ele dispor no momento que bem entendesse.".

Foi apenas no século V d.C., no norte da Índia, que a civilização hindu criou e disseminou o sistema de numeração posicional de base 10. Sua consolidação se deu por conta da sua lógica posicional, mas também por possuir símbolos bem distintos e por admitir um símbolo para o zero (RUIS, 2014). Entretanto, a padronização dos cálculos utilizando o sistema indo-arábico ocorreu somente no século XVI, mais de mil anos após a sua criação, com a sua chegada na Europa por meio dos árabes e, a partir daí, espalhado para o restante do mundo.

Assim como conhecemos, o sistema indo-arábico é composto por dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Vale ressaltar que “[...] a forma desses algarismos sofreu profundas alterações ao longo do tempo [...]”, conforme pode-se notar na Figura 1, e “[...] só tiveram a sua forma estabilizada com o advento da imprensa.” (RODRIGUES, 2013, p. 34). Ainda para o autor, tal sistema se sobressaiu aos outros criados pois seus algarismos não permitem que surjam ambiguidades, além de possibilitarem uma extensa gama de representação dos números e de realização dos cálculos.

Figura 1 - Evolução dos algarismos indo-arábicos



Extraído de: Rodrigues (2013, p. 34)

Rodrigues (2013) dedica uma seção para contextuar a evolução histórica dos sistemas de numeração, citando as civilizações que os criaram. Além disso, durante todo o trabalho o autor traz diversas referências históricas, com imagens e exemplos, para descrever o desenrolar do desenvolvimento dos diversos sistemas de numeração. O interessante do seu trabalho é que ao final de cada seção há um tópico apenas para sugestão de atividades, com a justificativa da importância da sua aplicação, permitindo ao professor que lê o trabalho ter uma ideia de como aplicar em sala de aula a teoria tratada no trabalho.

Ruis (2014) também propõe atividades, neste caso para serem aplicadas no primeiro ano do Ensino Médio. Para isto, o autor descreve a metodologia utilizada e cria uma espécie de roteiro para nortear o professor. A atividade proposta tem como principal objetivo fazer o aluno entender como se originou e porque foi definido como padrão o sistema indo-arábico, além de compreender a sua estrutura e funcionalidade.

O segundo grande marco no desenvolvimento da matemática tratado neste trabalho é a descoberta dos irracionais por parte dos pitagóricos. Sobre este tema, inicialmente Santos (2013, p. 6) destaca que "Poucos autores de livros de Matemática [...] abordam [...] os conceitos de segmentos comensuráveis e de segmentos incomensuráveis.". Em seu trabalho, a autora introduz uma série de definições para embasar a teoria que segue. Para definir um segmento comensurável, a autora escreve: "Dizemos que os segmentos AB e CD são **comensuráveis** se existir um terceiro segmento, que cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD." (SANTOS, 2013, p. 10, grifo da autora).

A partir daí, a autora desenvolve e demonstra alguns teoremas para concluir que "A medida de um segmento é um número racional se, e somente se, ele é comensurável com o segmento unitário." (SANTOS, 2013, p. 12), ou seja, relaciona a medida de um segmento comensurável com os números racionais. Da mesma forma, posteriormente a medida dos segmentos não comensuráveis, ou seja, os incomensuráveis, é relacionada com os números irracionais, visto que "Se um segmento não é comensurável com o segmento unitário, então sua medida é um número irracional." (SANTOS, 2013, p. 13).

Além de desenvolver este lado teórico dos segmentos comensuráveis e incomensuráveis, a autora também destaca diversos trechos históricos, com a finalidade de contextualizar o conteúdo abordado. De acordo com ela, em torno de 350 a.C., no sul da Itália despontava a seita filosófico-religiosa dos pitagóricos, que defendiam o lema "os números governam o mundo". Foi deles que surgiu o famoso Teorema de Pitágoras, responsável por contradizer a ideia de que dois segmentos quaisquer eram comensuráveis, difundida na época de Euclides (323 – 283 a.C.).

Assim como Santos (2013), Santos (2018) também destaca alguns pontos históricos interessantes com relação a este tema. Ele cita que foi o pitagórico Hipasus de Metapontum (470 – 400 a.C.) o responsável por verificar que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis e que tal descoberta gerou uma crise na sociedade da época, levando à expulsão de Hipasus da seita pitagórica (SANTOS, 2018).

Para definir um segmento incomensurável, Santos (2013, p. 15, grifo da autora) escreve: “Dizemos que dois segmentos AB e CD são **incomensuráveis** se não for possível encontrar um terceiro segmento, que cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD.”.

Assim, é possível concluir que, dado um quadrado de lado igual a 1 cm, pelo Teorema de Pitágoras (570 – 495 a.C.) afirma-se que sua diagonal tem lado $\sqrt{2}$ cm e, portanto, tais segmentos – lado e diagonal – são incomensuráveis. Finalmente, a autora define um número irracional como: “[...] um número que representa a medida de um segmento incomensurável com o segmento unitário. Logo, não é possível representá-lo por uma razão $\frac{n}{m}$ com $n, m \in \mathbb{N}$ e $m \neq 0$.” (SANTOS, 2013, p. 21). Tal definição conversa com a de Santos (2018, p. 10), que generaliza a demonstração da incomensurabilidade entre o lado l e a diagonal d de um quadrado da seguinte forma:

> Suponhamos que exista um número $k \neq 0$ [...] tal que $d = m \cdot k$ e $l = n \cdot k$ com m e n inteiros não nulos e primos entre si [...]. Segue que $d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2$. Assim, temos que $m^2 \cdot k^2 = 2n^2k^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$, isto é, [...] m é par. Dessa forma, existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2u$, daí obtemos a igualdade $(2u)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4u^2 = 2n^2 \Rightarrow 2u^2 = n^2$, o que implica n um número par, provocando uma contradição, pois m e n são primos entre si, por hipótese. Portanto, l e d são medidas incomensuráveis.

Santos (2018, p. 46) ainda declara que “[...] não há motivos para o ensino de números irracionais [...] serem tão obsoletos no ensino básico [...]”, afirmando que algumas das demonstrações feitas em seu trabalho podem ser compreendidas por alunos do Ensino Médio, sem qualquer conhecimento aprofundado no tema. Vale destacar que o trabalho deste autor foi um dos selecionados para a revisão de literatura exatamente porque desenvolve diversos teoremas cujas demonstrações que, segundo ele, são perfeitamente entendíveis por alunos do Ensino Básico, especificamente do Ensino Médio.

É interessante citar que no trabalho de Santos (2013) há uma seção que tem como foco analisar livros textos no que diz respeito a números racionais, irracionais e comensurabilidade. Assim, autora não apenas desenvolve e contextualiza a teoria, mas também verifica como ela é ensinada na escola. Acredito que essa análise é de suma importância em um trabalho voltado a professores da rede básica, pois a teoria que acreditamos dever ensinar nem sempre concorda com aquela ditada pelos livros didáticos.

Como terceiro marco no desenvolvimento da matemática, destaca-se a completude dos números reais. Silva (2018) demonstra por meio de diversos teoremas a completude dos números reais. Para isso, o autor utiliza dois métodos: sequências de Cauchy (1789 – 1857) e cortes de Dedekind (1831 – 1916).

Para demonstrar a completude dos reais por meio de sequências de Cauchy, o autor utiliza uma seção para definir sequências racionais de Cauchy e suas propriedades, e uma seção seguinte para construir o Conjunto de Cauchy, demonstrando que tal conjunto é um corpo ordenado completo. Em uma seção seguinte, o autor descreve a construção dos números reais através de Cortes de Dedekind. Da mesma forma como ocorreu com as sequências de Cauchy, diversos teoremas são citados e provados, servindo de base teórica para o que vai sendo afirmado durante o trabalho.

Finalmente, Silva (2018, p. 44) conclui que, de fato, o conjunto dos números reais é completo, já que “[...] possui a propriedade da menor cota superior.”. Ainda para o autor “Essa propriedade é de fundamental importância para análise real, pois [...] acarreta no conceito de limites de funções e assim de derivadas, integrais, etc.”.

O trabalho de Silva (2018) mostra sua importância por conta da base teórica desenvolvida, entretanto, a meu ver, peca ao não contextualizar historicamente a importância dos teoremas e das conclusões reveladas. Em suas conclusões, o autor afirma que “[...] a construção rigorosa desses números possibilitou a base sólida matemática necessária para a exploração de novos horizontes na matemática moderna [...]” (SANTOS, 2018, p. 44), todavia não comenta a respeito da possibilidade de se trabalhar tal formalização do conjunto dos reais no Ensino Médio. Acredito que, para o estudante, muitas vezes a matemática precisa ser contextualizada para que sua importância seja entendida. Dessa forma, o objetivo do meu trabalho se distancia do de Silva

(2018), já que tem como base relacionar o desenvolvimento tanto do conjunto dos números reais, quanto dos outros dois marcos já citados, com os eventos históricos que o contextualizaram.

Outro trabalho selecionado para embasar este terceiro marco foi o de Roriz (2014) pois, diferente de Silva (2018), ele discorre como ocorre e como se aplica a construção dos números reais na escola. O autor também cita em suas introduções alguns marcos históricos que contextualizam a construção de tal conjunto, o que facilita para o leitor entender o contexto histórico no qual a teoria foi sendo desenvolvida.

Roriz (2014) inicia sua teoria com a essência mais básica da caracterização dos números naturais: os axiomas de Peano (1858 – 1932). A principal razão para citá-los é desenvolver o Princípio da Indução, que permite demonstrar uma diversidade de teoremas e, assim, embasar de forma concreta a teoria. Além disso, diferentemente do trabalho anterior, Roriz (2014) inicia sua sequência teórica a partir de definições e teoremas mais simples. De forma clara, ele define um corpo da seguinte forma: “Um corpo é um conjunto K, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação que satisfazem a certas condições, chamadas os axiomas do corpo.” (RORIZ, 2014, p. 17). Além disso, “[...] chama-se completo quanto todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, [...] possui supremo em K.” (RORIZ, 2014, p. 20).

Assim como Silva (2018), Roriz (2014) também descreve a construção dos números reais por cortes de Dedekind, adicionando uma pequena parte histórica para introduzir a seção. É interessante destacar que após a finalização de algumas demonstrações de teoremas, o autor procura concluir a importância deles e chega a dar exemplos para que o leitor entenda de fato a importância do que foi discorrido.

Em um capítulo intitulado “A Construção de $\mathbb{R}$ da Escola”, Roriz (2014) parte do conteúdo de expressões decimais, com definições, teoremas e exemplos, e utiliza tal base teórica para demonstrar a completude e unicidade dos reais. Note que, desta vez, a aplicação no Ensino Médio mostra-se viável, visto que o conteúdo de expressões decimais faz parte do currículo escolar.

Por fim, o autor desenvolve um plano de aula roteirizado como sugestão ao professor que deseja ministrar uma aula referente aos conjuntos numéricos.

Em seu roteiro, destaca-se a importância de o professor contextualizar historicamente a teoria para que o aluno entenda a sua importância. Roriz (2014, p. 45), que aplicou o plano de aula, revela ao final os dados obtidos e conclui que houve “[...] uma melhora significativa no índice de acertos e na facilidade com que as perguntas foram respondidas pelos alunos que participaram da aula teórica sugerida.”.

Acredito que a sugestão de um plano de aula ao final do trabalho é muito interessante para professor que o lê, pois resume os objetivos do trabalho em forma de roteiro e, além disso, revela o mais importante: como aplicar toda a teoria desenvolvida na realidade da sala de aula.

A partir da análise dos trabalhos realizada, foi possível estabelecer os diferenciais e complementos que irão compor este trabalho. Pude identificar as partes mais importantes de cada trabalho e em quais aspectos cada um foi insuficiente, para assim poder desenvolver um trabalho mais completo, tanto no âmbito teórico, quanto no histórico. Visto que o principal objetivo deste programa de mestrado é a qualificação do professor de Educação Básica, é de suma importância que ao final do meu trabalho haja sugestões de aplicação do que foi teorizado durante a dissertação.

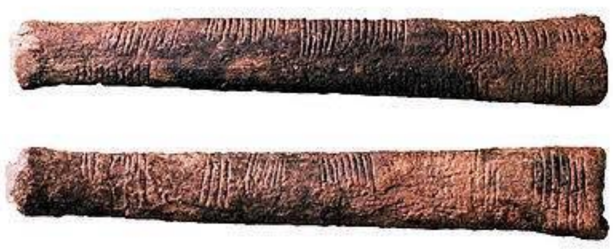
4 EMBASAMENTO TEÓRICO

O objetivo deste capítulo é embasar a teoria que fundamenta o escopo do trabalho, usando autores conhecidos da comunidade acadêmica no contexto de história da matemática. O embasamento está dividido em três seções, cada uma tratando sobre um dos marcos no desenvolvimento da matemática.

4.1 O SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

A história da origem dos números é geralmente associada à necessidade da contagem, principalmente no que diz respeito à contagem de ovelhas por parte dos pastores, relacionando cada animal a uma pedra ou um nó, por exemplo. Posteriormente, eles substituíram as pedras por marcas, precursoras dos números, como observado no osso mostrado na Figura 2, datado entre 20.000 a.C. e 10.000 a.C., encontrado em Ishango, na África.

Figura 2 - Osso de Ishango



Extraído de: Roque e Pitombeira (2012, p. 1)

Destaca-se, entretanto, que tais histórias não são seguras, pois as fontes a respeito da origem dos números são limitadas e fragmentadas (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012), porém revelam-se como um grande potencial para as aulas de matemática da Educação Básica, pois uma situação lúdica pode ser capaz de despertar interesse nos estudantes e motivá-los a entender a teoria envolvida no processo.

Em torno de 4000 a.C., a civilização egípcia já registrava nomes, bens materiais e quantidades. Porém, com o tempo observou-se a necessidade de quantificar e registrar bens e, assim, culminou-se o desenvolvimento de sistemas de medidas, como o sistema sexagesimal posicional na antiga Babilônia, por volta de 2000 a.C. a 1600 a.C., o sistema decimal aditivo no Antigo Egito, por volta de 3000 a.C., entre outros menos difundidos ao longo da história.

Ifrah (1997, p. 672, grifo do autor) destaca que

> No início, as numerações escritas repousaram sobre o *princípio aditivo*, regra segundo a qual o valor de uma representação numérica é obtido através da soma dos valores de todos os algarismos contidos nela. Eram, portanto, rudimentares [...].

Desta forma, os usuários deveriam repetir os algarismos quantas vezes necessário, já que eles eram livres uns dos outros. Entretanto, quando se tratava de um número muito grande, este tipo de numeração causava um aglomero de sinais.

Para entender como funciona um sistema de numeração que tem como base o princípio aditivo, considere o Quadro 3 abaixo, que relaciona um símbolo específico a cada potência de 10.

Quadro 3 - Relação entre símbolo e valor

Potência de 10	**Símbolo**
10^0	!
10^1	@
10^2	#
10^3	$
10^4	%
10^5	&

Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Assim, para escrever o número 514632, por exemplo, deveríamos proceder da seguinte forma:

$$514632 = 5 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 =$$

$$\&\&\&\&\&\%\$\$\$\$\#\#\#\#\#\#@@@!!$$

Outro exemplo de sistema de numeração que tem como base o princípio aditivo é o sistema de numeração romano, ensinado nas escolas até os dias atuais. Neste caso, escolheremos um número menor, como por exemplo o número 4999, e procedemos da seguinte forma:

$$4999 = 4000 + 900 + 90 + 9$$
$$4999 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + (1000 - 100) + (100 - 10) + (10 - 1)$$
$$4999 = \mathrm{M} + \mathrm{M} + \mathrm{M} + \mathrm{M} + \mathrm{CM} + \mathrm{XC} + \mathrm{IX}$$
$$4999 = \mathrm{MMMMCMXCIX}$$

Nota-se, portanto, que o método aditivo era exaustivo e tomava grande parte do tempo de seus usuários, como também demandava muito espaço para seus registros. Além disso, não haveria como imaginar o desenvolvimento da aritmética com o uso de tal sistema de numeração.

Para resolver este problema, algumas civilizações adotaram símbolos que representavam unidades intermediárias, mas que ainda exigiam repetições maçantes. Os egípcios até tentaram contornar esta adversidade, ao simplificar a grafia e a estrutura do seu sistema numérico, mas acabaram por criar um sistema baseado em desenhos extremamente minuciosos, contrapondo a ideia de uma escrita rápida e prática (IFRAH, 1997).

Com o passar do tempo, várias modificações gráficas foram ocorrendo, culminando em uma notação numérica abreviada, conhecida por numeração hierática egípcia, que atribuía um sinal para cada número. Havia nove sinais para as unidades, nove para as dezenas, nove para as centenas, e assim por diante (IFRAH, 1997). Para escrever o número 9684, por exemplo, bastava justapor os algarismos 9.000, 600, 80 e 4. A desvantagem dessa notação se dá pelo fato de que o usuário deveria decorar todos os sinais criados.

A principal dificuldade dos povos antigos com relação à notação de grandes números se dava pelo fato da utilização somente do sistema aditivo. Por isso, passaram a adotar um sistema “híbrido”, que se baseava na adição – para números inferiores a 100 – e na multiplicação – para os superiores a 100 –, simultaneamente, como exemplificado abaixo:

$$
\begin{gathered}
9684 = (1+1+1+1+1+1+1+1+1) \times 1.000 \\
+(1+1+1+1+1+1) \times 100 \\
+(10+10+10+10+10+10+10+10) \\
+(1+1+1+1).
\end{gathered}
$$

Posteriormente, os chineses, os tâmeis e os malayâlî

> [...] tiveram a idéia (sic) de estender o princípio multiplicativo à notação de todas as ordens de unidades superiores ou iguais à base de sua numeração [...] É o que se chama numeração de tipo “híbrido completo”, em que a representação dos números é feita seguindo a expressão dos diversos valores numéricos de um polinômio, tendo por variável a base da numeração correspondente. (IFRAH, 1997, p. 676).

Assim, o número 9684 seria escrito na base decimal como:

$$
\begin{gathered}
9684 = 9 \times 1.000 + 6 \times 100 + 8 \times 10 + 4 \\
9684 = 9 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0
\end{gathered}
$$

Generalizando o processo, dados os números inteiros a e b com $a > 0$ e $b > 1$, existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \cdots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$ univocamente determinados tais que

$$a = r_0 + r_1 b^1 + r_2 b^2 + \cdots + r_{n-1} b^{n-1} + r_n b^n.$$

Para entender por que o sistema de numeração decimal posicional se consolidou no mundo todo, devemos analisar a vantagem sobre dois aspectos: a utilização da base decimal e a adoção de um sistema numérico posicional. Além destes dois aspectos, vale ressaltar que a grafia dos algarismos utilizados atualmente também contribui para a facilidade da utilização do sistema indo-arábico, além do fato de que o nosso sistema possui um *zero*, elemento fundamental para os cálculos e as operações aritméticas.

Inicialmente, é preciso compreender o significado de base em um sistema posicional. De acordo com Aaboe (2013, p. 15–16, grifos do autor),

> [...] qualquer inteiro *b* maior do que 1 pode servir de base de um sistema *posicional* [...]. Em um tal sistema necessitaremos de *b*

> símbolos ou algarismos distintos, cujos valores principais são 0, 1, 2, ..., *b* – 1. Mover um algarismo uma casa para a esquerda significará multiplicar seu valor por *b*, e movê-lo uma casa para a direita [...] significará dividir seu valor por *b*.

O autor toma como exemplo o *sistema posicional binário*, cuja utilização se destaca na linguagem computacional. Neste caso, são necessários 2 algarismos, cujos valores são 0 e 1 e, assim, os dez primeiros números deste sistema são:

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.$$

Para traduzir, por exemplo, o número 1001011, escrito na base binária – representada pelo número 2 subscrito –, para a base decimal, realiza-se o seguinte procedimento:

$$1001011_2 = \mathbf{1} \cdot 2^6 + \mathbf{0} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = 75.$$

No processo contrário, para traduzir o número 75 para a base binária, é preciso decompô-lo em potências de 2, da seguinte forma:

$$75 = 2^6 + 11 = 2^6 + 2^3 + 3 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0 =$$
$$\mathbf{1} \cdot 2^6 + \mathbf{0} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = 1001011_2.$$

A principal vantagem da base decimal sobre as outras – sessentena, trintena, vintena etc. – é o fato de que a quantidade de algarismos que a compõe é mais fácil de ser decorada pela memória humana. Se comparada a bases pequenas, como aquelas compostas de dois ou três números, a base dez também se sobressai, pois evita o esforço de consideráveis representações (IFRAH, 1997), como exemplificado no Quadro 4 a seguir. Por exemplo, se a nossa numeração tivesse sido construída sobre uma base dois, teríamos uma palavra para a unidade (1 – "um") e uma palavra para a base (2 – "dois"). Então, utilizar-se-ia apenas duas cifras – 0 e 1 – e cada potência de dois teria uma palavra particular.

Quadro 5 - Representação numérica numa base dois

Número	**Base dois**	**Por extenso**
1	1	um
2	10	dois
3	11	dois-um
4	100	quatr
5	101	quatr-um
6	110	quatr dois
7	111	quatr dois-um
8	1000	oit
9	1001	oit-um
10	1010	oit dois
11	1011	oit dois-um
12	1100	oit quatr
13	1101	oit quatr-um
14	1110	oit quatr dois
15	1111	oit quatr dois-um
16	10000	sei
17	1001	sei-um

Adaptado de: IFRAH (1997, p. 79)

Perceba que a complexidade de tal base é grande para representar até os menores números, que são representados com certa facilidade na base decimal. Ifrah (1997, p. 85) ainda cita que "[...] tendo a humanidade aprendido a contar com seus dez dedos, essa preferência quase geral pelos agrupamentos de dez foi comandada por este 'acidente da natureza' que é a anatomia de nossas mãos.".

Além da facilidade da base decimal, a ideia de sistema posicional também contribuiu para que o sistema utilizado atualmente tenha se popularizado. De acordo com Ifrah (1997, p. 286), o princípio da nossa numeração escrita é o de que "[...] os algarismos empregados têm um valor variável, que depende da posição que ocupam na escrita dos números [...]", ou seja, a partir dos dez algarismos existentes – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 – é possível representar toda a numeração escrita, simplesmente trocando-os de posição. Assim, “[...] por meio de um número muito reduzido de algarismos de base, ela permite [...] uma representação simples e perfeitamente racional de qualquer número, por maior que seja.” (IFRAH, 1997, p. 676), solucionando então a dificuldade dos povos antigos no que diz respeito à notação de grandes números.

Aaboe (2013, p. 17) destaca a importância do sistema posicional nos cálculos aritméticos, visto que basta “[...] aprender [...] as tabelas que dão os produtos e as somas de dois números quaisquer de um algarismo.”. Como exemplo, são trazidas as tabelas de adição e multiplicação das bases binária (*b* = 2) e ternária (*b* = 3):

Tabela 1 - Adição da base binária

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela 2 - Multiplicação da base binária

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 3 - Adição da base ternária

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Tabela 4 - Multiplicação da base ternária

·	0	1	2

0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Logo, a adição e a multiplicação das bases binária e ternária se dão da seguinte forma:

Tabela 5 - Soma binária de 1101 e 110

	1	1	0	1
	+	1	1	0
1	0	0	1	1

Tabela 6 - Multiplicação binária entre 1101 e 110

			1	1	0	1
			·	1	1	0
			0	0	0	0
		1	1	0	1	+
	1	1	0	1	+	
1	0	0	1	1	1	0

Tabela 7 - Soma ternária de 2201 e 102

	2	2	0	1
	+	1	0	2
1	0	0	1	0

Tabela 8 - Multiplicação ternária entre 2201 e 102

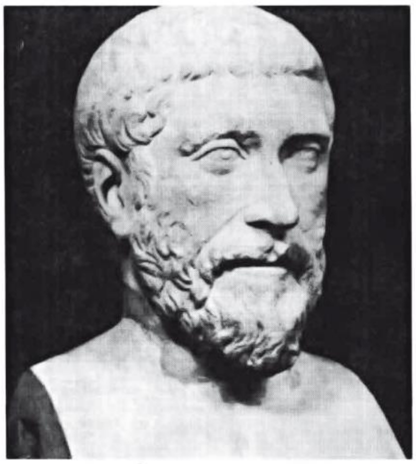
			2	2	0	1
			·	1	0	2
		1	2	1	0	2
		0	0	0	0	+
	2	2	0	1	+	

1	0	0	2	2	0	2

4.2 A DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

Pouco se sabe, até hoje, sobre a vida de Pitágoras, um ilustre matemático nascido por volta de 572 a.C., na ilha egeia de Samos, e citado no *Sumário Eudemiano* de Proclo, contido no início do livro *Comentário sobre Euclides, Livro I*, principal referência no que diz respeito aos primeiros passos do desenvolvimento da geometria grega até Euclides. Em Crotona, uma colônia grega no sul da Itália, o matemático fundou a escola pitagórica, com estudos direcionados em filosofia, matemática e ciências naturais (EVES, 2011).

Figura 3 - Pitágoras

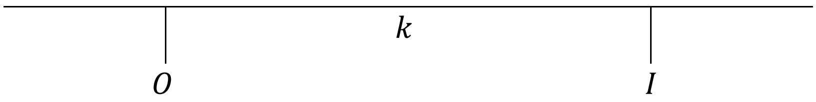


Extraído de: Eves (2011, p. 98)

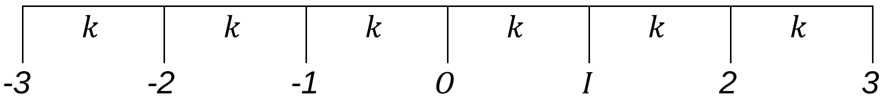
A filosofia de Pitágoras – ou, como define Boyer (2012), o artigo de fé fundamental do pitagorismo – tinha como princípio o pensamento de que a base do homem e da matéria são os números inteiros, já que tudo o que existe no mundo concreto é contado utilizando este conjunto de números. Posteriormente, tanto os pitagóricos como outros povos, como os egípcios, por exemplo, observaram que os números inteiros não eram suficientes para determinar a medida exata de segmentos, pesos e até do tempo.

Logo, houve a necessidade de se utilizarem frações das partes inteiras e, para isso, definiu-se um *número racional* como o quociente $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$. Com auxílio de Eves (2011, p. 104-105), interpretaremos geometricamente o comportamento dos números racionais da seguinte forma:

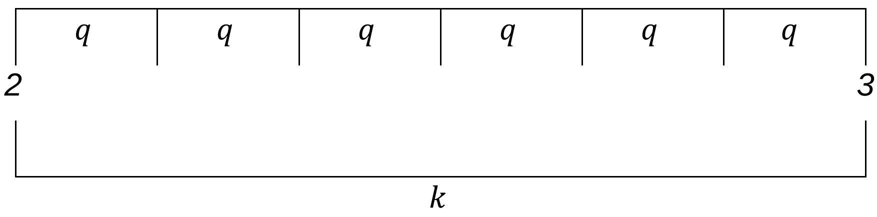
– Marque dois pontos distintos O e I numa reta horizontal (I à direita de O) e tome o segmento OI como unidade de comprimento (neste caso chamaremos de k).



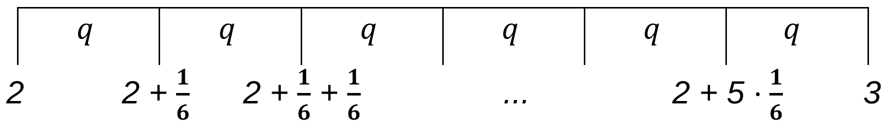
– Admitindo-se que os pontos O e I representem os 0 e 1, respectivamente, então os inteiros positivos e negativos podem ser representados por pontos da reta espaçados a intervalos de tamanho k, os positivos à direita de O e os negativos à esquerda de O.

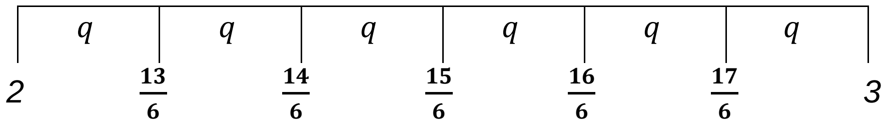


– As frações de denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos de tamanho k em q partes. Por exemplo, dividiremos o intervalo de *2* a *3* em seis partes:



– Então, para cada número racional, há um ponto da reta correspondente. Neste exemplo, teremos os pontos:





Aguilar e Dias (2015, p. 53, grifos dos autores) resumem a interpretação anterior da seguinte forma:

> Dados dois objetos quaisquer, de comprimentos a e b, sempre existia alguma unidade u, suficientemente pequena, de tal forma que ambos objetos pudessem ser medidos de modo "*exato*" com essa unidade u. Ou seja, $\forall a$ e b, $\exists u$ tal que $a = m \cdot u$ e $b = n \cdot u$, onde $m, n \in \mathbb{N}$. Desse modo, usando a medida u, um objeto mediria m vezes u e o outro n vezes u. Os objetos (números) a e b são ditos *comensuráveis*.

Note que esta unidade suficientemente pequena, que os autores chamam de u, trata-se da unidade representada pela letra q no exemplo dado anteriormente e, naquele caso, mede $\frac{1}{6}$. Seguindo este raciocínio, é imediato concluir que, se não for possível determinar um segmento u, tão pequeno quanto se queira, que caiba um número inteiro de vezes em a e um número inteiro de vezes em b, os segmentos (ou números) a e b são ditos não comensuráveis, isto é, incomensuráveis, cuja representação na reta real não pode ser feita através de números racionais.

De acordo com Boyer (2012, p. 70), "[...] os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo propriedade básicas simples.". O contexto no qual se deu a primeira ideia sobre incomensurabilidade não é exato, visto que as anotações desta época são limitadas. Porém, supõe-se que foi através de uma conexão com a aplicação teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles que se percebeu a necessidade de considerar segmentos incomensuráveis (BOYER, 2012). Dado um triângulo retângulo de hipotenusa h cujos catetos ambos medem a, temos do teorema de Pitágoras que:

$$h^2 = a^2 + a^2$$

$$h^2 = 2a^2$$

$$\frac{h^2}{a^2} = 2$$

$$\frac{h}{a} = \sqrt{2}\,.$$

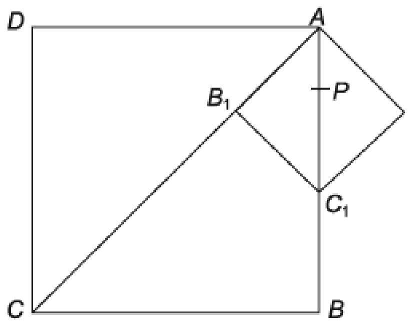
Para alguns autores, a descoberta dos irracionais pode ter gerado uma ruptura tão grande na matemática da época que, por muito tempo, foi mantida em sigilo, citando até mesmo uma lenda, na qual "[...] o pitagórico Hipaso [...] foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) [...] ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto." (EVES, 2011, p. 107).

Por outro lado, outros autores acreditam que, para os pitagóricos daquela época, a descoberta a respeito dos números incomensuráveis não tenha sido tão importante, visto que o foco dos estudos destes matemáticos girava em torno de teorias sobre o cosmos (ROQUE, 2012).

Porém, é claro que a revelação desse novo conjunto de números revolucionou o que se ensinava nas escolas, e fez com que "[...] todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes." (EVES, 2011, p. 107).

Utilizando a técnica da demonstração por absurdo, Eves recorre à geometria para provar a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.

Figura 4 - Demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado



Extraído de: Eves (2011, p. 106)

Considere a Figura 4 e suponha, por absurdo, que a diagonal e o lado do quadrado $ABCD$ são comensuráveis. Logo, existe

> [...] um segmento AP tal que tanto a diagonal AC como o lado AB do quadrado $ABCD$ são múltiplos inteiros de AP; isto é, AC e AB são comensuráveis com relação a AP. Em AC tomemos o ponto B_1 de modo que $CB_1 = AB$ e tracemos B_1C_1 perpendicular a CA. Pode-se provar facilmente que $C_1B = C_1B_1 = AB_1$. Então $AC_1 = AB - AB_1$ e AB_1 são comensuráveis com relação a AP. Mas AC_1 e AB_1 são uma diagonal e um lado de um quadrado de dimensões menores que a metade daquelas do quadrado original. Segue-se então que, repetindo-se o processo, podemos obter finalmente um quadrado cuja diagonal AC_n e cujo lado AB_n são comensuráveis com relação a AP e $AC_n < AP$. Esse absurdo prova o teorema. (EVES, 2011, p. 106).

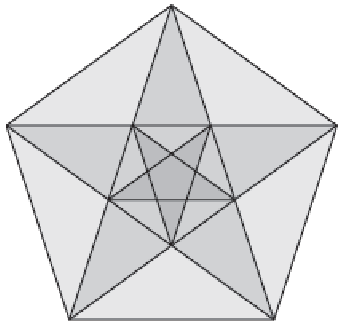
Ainda neste sentido, Boyer (2012) também utiliza a técnica do absurdo, mas se aproveita da paridade para demonstrar a incomensurabilidade entre o lado l e a diagonal d de um quadrado. Suponha que tais segmentos sejam comensuráveis, isto é, que a razão $\frac{d}{l}$ é racional e igual a $\frac{p}{q}$, sendo p e q inteiros sem fator comum.

> Agora, do teorema de Pitágoras, sabe-se que $d^2 = l^2 + l^2$; logo, $\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ ou $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 deve ser par, e então p é par. Portanto, q deve ser ímpar. Fazendo $p = 2r$ e substituindo na equação $p^2 = 2q^2$ vem $4r^2 = 2q^2$, ou $q^2 = 2r^2$. Então q^2 deve ser par; logo q é par. Mas tínhamos demonstrado acima que q deve ser ímpar e um inteiro não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar. Resulta, pois, pelo método indireto, que a hipótese de d e l serem comensuráveis deve ser falsa. (BOYER, 2012, p. 70).

No entanto, o autor acredita que, dado o nível de abstração desta demonstração, é possível que a base da descoberta original a respeito de segmentos incomensuráveis tenha sido outra. Ele cita, por exemplo,

> a simples observação de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono, elas formam um pentágono regular menor [...], e as diagonais do segundo pentágono, por sua vez, formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado em um pentágono regular não é racional. (BOYER, 2012, p. 70).

Figura 5 - Resultado do traçado das diagonais de um pentágono

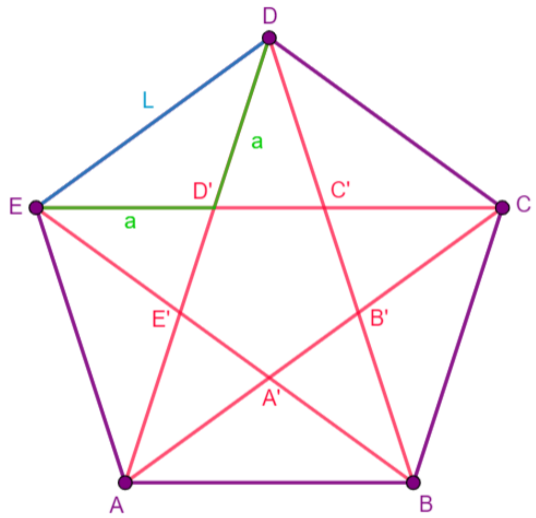


Extraído de: Boyer (2012, p. 71)

Portanto, é possível que o primeiro irracional que revelou a existência de segmentos incomensuráveis tenha sido a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular e não $\sqrt{2}$ como alguns pesquisadores têm suposto.

Para compreender a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um pentágono regular, considere a Figura 6, em que $ABCDE$ é um pentágono regular e A', B', C', D' e E' são as interseções das suas diagonais.

Figura 6 - Demonstração da incomensurabilidade entre lado e diagonal de um pentágono regular



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Basta observar o paralelogramo $BAEC'$ para concluir que os triângulos isósceles AED' e ABD são semelhantes e, dessa forma,

$$\frac{AD'}{ED'} = \frac{AD}{AB}.$$

Substituindo pelos valores a e L indicados na figura, temos

$$\frac{L}{a} = \frac{L+a}{L}$$
$$a^2 + La - L^2 = 0$$
$$a = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-L^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-L \pm \sqrt{5L^2}}{2} = \frac{-L \pm \sqrt{5}L}{2} = \frac{L\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}.$$

Como $a > 0$, temos que

$$a = \frac{L\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{2}$$
$$\frac{L}{a} = \frac{2}{\left(\sqrt{5} - 1\right)}.$$

Portanto, a relação[1] entre o lado e a diagonal de um pentágono é uma medida irracional, logo, incomensurável.

Por preencherem os “buracos” na reta deixados pelos números racionais, os irracionais também são infinitos. Ora, visto que $\sqrt{2}$ é irracional, basta considerar um número $r = n\sqrt{2}$, com $n \in \mathbb{N}$. É claro que r não é racional, pois assim chegaríamos ao absurdo de que $\sqrt{2} = \frac{r}{n}$ é racional. Assim, $r = n\sqrt{2}$ é irracional para todo $n \in \mathbb{N}$ e, como $\mathbb{N}$ é infinito, o conjunto dos números irracionais é infinito.

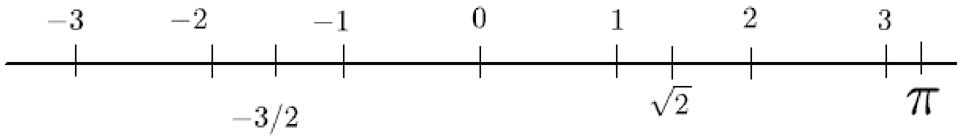
4.3 A COMPLETUDE DOS REAIS

Em termos geométricos, o conjunto dos números reais geralmente é associado à reta real. Dessa forma, cada número real pode ser representado por um ponto desta reta, como exemplificado na Figura 7.

---

[1] a e L estão em razão áurea de valor constante $\frac{L}{a} = \phi$.

Figura 7 - Números na reta real



Extraído de: Aguilar e Dias (2015, p. 57)

Roque e Pitombeira (2012, p. 264) explicam que “A palavra usada para designar a propriedade da reta que distingue os reais dos racionais é ‘continuidade’, que seria equivalente ao que chamamos de ‘completude’.”

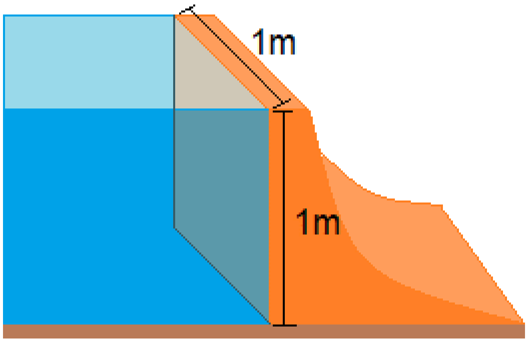
No Ensino Médio, costuma-se ensinar aos alunos sobre os números reais a partir da sua representação decimal. Visto que o foco deste trabalho é auxiliar o professor do Ensino Básico em suas aulas, seguiremos com a construção dos reais a partir do método das expansões decimais e sequências de Cauchy (1789 – 1857).

Muito antes de Stevin (1548 – 1620) explicar de forma elementar e completa o sistema de frações decimais, este já era utilizado na China antiga, na Arábia medieval e na Europa do Renascimento. Entretanto, foi apenas após a publicação de seus escritos, em 1585, que as frações decimais se tornaram amplamente conhecidas (BOYER, 2012).

O problema resolvido por Stevin, que posteriormente lhe daria fama e o levaria a criar o método infinitesimal, envolvia encontrar a força total da água sobre um dique. Com base em Boyer (1992), apresentamos a seguir o raciocínio utilizado por Stevin.

– Considere um dique com a forma de um quadrado, de lado unitário, com um dos lados na superfície da água.

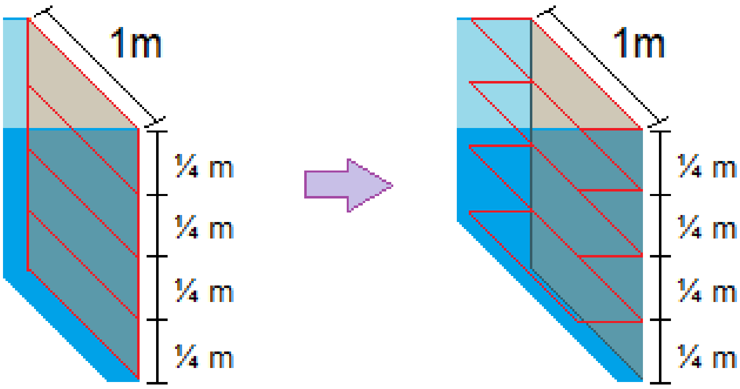
Figura 8 - Ilustração de um dique



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

– Imagine o quadrado dividido em 4 faixas horizontais e suponha que cada faixa sofra uma rotação de 90° em torno de seu lado superior, ficando sujeita ao peso da água situada sobre ela.

Figura 9 - Rotação das 4 faixas horizontais



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

– A faixa superior fica na superfície e sustenta um volume de água dado por $1m \times \frac{1}{4}m \times \frac{0}{4}m = 0m^3$; a segunda faixa fica à profundidade de $\frac{1}{4}m$ abaixo da superfície e sustenta um volume de água dado por $1m \times \frac{1}{4}m \times \frac{1}{4}m = \frac{1}{16}m^3$; a terceira, $1m \times \frac{1}{4}m \times \frac{2}{4}m = \frac{2}{16}m^3$; e a quarta, $1m \times \frac{1}{4}m \times \frac{3}{4}m = \frac{3}{16}m^3$. Assim, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{0}{16}m^3 + \frac{1}{16}m^3 + \frac{2}{16}m^3 + \frac{3}{16}m^3 = \frac{6}{16}m^3.$$

– Generalizando o problema para o caso de n faixas, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{0}{n^2}m^3 + \frac{1}{n^2}m^3 + \frac{2}{n^2}m^3 + \cdots + \frac{n-1}{n^2}m^3 = \frac{1}{n^2}(0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1)m^3$$

– Note que o problema se resume a uma progressão aritmética de razão 1. Logo,

$$\frac{1}{n^2}(0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1)m^3 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

– Procedendo de maneira análoga, porém desta vez rotacionando cada faixa em 90° em torno de seu lado inferior, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

– No primeiro processo, cada faixa foi movida para uma posição acima da original e, no segundo processo, cada uma foi movida para uma posição abaixo da original. Assim, é de se esperar que a força real da água sobre o dique seja um valor intermediário entre os dois resultados encontrados e que seja encontrado ao fazer o número de faixas aumentarem.

O problema apresentado permite concluir que o peso total de água sustentado pelo dique – e qualquer outro valor real – pode ser aproximado através da soma de infinitas frações. Em 1585, Stevin recomendou que tais frações fossem utilizadas com escalas decimais, ou seja, que fossem da forma $\frac{p}{10^m}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Desta forma, atribui-se a um número real uma soma de infinitas frações decimais, como definido a seguir (note que a definição se restringe a reais positivos, pois o caso para reais negativos é análogo).

Definição 1: Considere $x > 0$ real. Seja n_0 o maior inteiro tal que $n_0 \leq x$ e $0 \leq n_i \leq 9$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, a expansão decimal de x é dada por:

$$x = n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} + \cdots$$

Exemplo 1: A expansão decimal de $8{,}6451$ é:

$$8{,}6451 = 8 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{1}{10^4}.$$

Exemplo 2: A expansão decimal de $\frac{1}{3} = 0{,}333$ ... é:

$$\frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^k} + \cdots$$

Exemplo 3: Dada a expansão decimal, é possível encontrar a fração correspondente da seguinte forma:

$$4{,}25\overline{25} = 4 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots + \frac{2}{10^{2k-1}} + \frac{5}{10^{2k}} + \cdots =$$
$$4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{2k-1}} + \cdots\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{2k}} + \cdots\right) =$$
$$4 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 4 + 2 \cdot \frac{10}{99} + 5 \cdot \frac{1}{99} = 4 + \frac{25}{99} = \frac{421}{99}.$$

Quando tratamos de números irracionais, é possível chegar apenas em uma aproximação do seu valor a partir da expansão decimal, visto que não são dízimas periódicas, isto é, sua parte decimal não apresenta um padrão de repetição. Definimos, portanto, os números irracionais como segue.

Definição 2: Seja $x \notin \mathbb{Q}$. Assim,

$$x \neq n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3} + \cdots + \frac{n_m}{10^m} + \cdots$$

No entanto, ao considerarmos a expressão finita

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3} + \cdots + \frac{n_m}{10^m},$$

é possível atingirmos uma aproximação de x, cujo nível de precisão dependerá de quão grande seja o valor de m.

Considere, por exemplo, a aproximação de quatro casas decimais de $\sqrt{2} = 1{,}4142$. A partir daí, pode-se criar uma sequência de expansões racionais que se aproxima de $\sqrt{2}$, como:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}4 = 1 + \frac{4}{10} \\ x_2 = 1{,}41 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} \\ x_3 = 1{,}414 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} \\ x_4 = 1{,}4142 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Note que, quanto mais frações são somadas, mais precisa é a aproximação do valor de $\sqrt{2}$. Portanto, é possível aproximar qualquer número real por sequências (x_n) de Cauchy de números racionais.

> Para que (x_n) seja uma sequência de Cauchy, é preciso que seus termos x_m, x_n, para valores suficientemente grandes dos índices m, n se aproximem arbitrariamente uns dos outros. Ou seja, se impõe uma condição sobre os termos da própria sequência (AGUILAR; DIAS, 2015, p. 59).

É com base nas sequências de Cauchy que Cantor (1845 – 1918) construiu o conjunto dos números reais, ao defini-los “[...] como o conjunto de todas as sequências de aproximações racionais e definir operações algébricas e ordenação linear para essas sequências." (AGUILAR; DIAS, 2015, p. 60).

Como Cantor se dedicou aos estudos de teoria de conjuntos, era de se esperar que a sua maneira de construir o conjunto dos reais fosse através de classes de equivalência. Seus incríveis resultados inclusive o fizeram estabelecer a teoria dos conjuntos como uma disciplina matemática, impactando drasticamente o ensino da matemática a partir do século XX.

Como exemplo deste impacto, está o fato de que ele notou que os conjuntos infinitos não têm o mesmo tamanho, construindo uma hierarquia de conjuntos infinitos de acordo com a "potência" de cada um. Boyer (2012) justifica através da demonstração de Cantor esta hierarquia citada, ao revelar que o conjunto dos reais tem potência maior do que o conjunto das frações racionais. Com a seguinte demonstração, Cantor provou que o conjunto dos números reais não é enumerável:

> Suponhamos que os números reais entre 0 e 1 sejam contáveis, e que estejam expressos como decimais infinitos [...], e que estejam numerados como: $a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \ldots, a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \ldots, a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \ldots, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$, onde a_{ij} é um algarismo entre 0 e 9, inclusive. Para mostrar que nem todos os números reais entre 0 e 1 estão incluídos acima, Cantor exibiu uma fração decimal infinita diferente de todas as da lista. Para isso, formemos $b = 0, b_1b_2b_3 \ldots$, onde $b_k = 9$ se $a_{kk} = 1$ e $b_k = 1$ se $a_{kk} \neq 1$. Esse número real estará entre 0 e 1 e, no entanto, será diferente de todos os do arranjo que se presumia conter todos os números reais entre 0 e 1. (BOYER, 2012, p. 397).

Observe a seguinte sequência das aproximações decimais de π:

$$(p_n) = (3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; 3{,}14159; \ldots).$$

Note que a sequência

$$(q_n) = \left(3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \cdots\right)$$

também aproxima π. Dizemos que duas sequências estão contidas na mesma classe de equivalência se elas possuem o mesmo limite, ou seja, tendem para o mesmo número.

Finalmente, define-se que “O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é o conjunto das classes de equivalência $[(x_n)]$ das sequências de Cauchy de números racionais. Isto é, cada classe de equivalência é um número real.” (AGUILAR; DIAS, 2015, p. 61). Construiu-se, desta forma, o conjunto dos números reais.

Os resultados apresentados a seguir podem ser verificados de forma mais detalhada em Aguilar e Dias (2015) e em Lima (2009).

O conjunto dos números reais é um corpo, pois as operações de adição e multiplicação entre as classes de equivalência das sequências de Cauchy de números racionais estão bem definidas e obedecem às propriedades de um corpo. Além disso, $\mathbb{R}$ é ordenado, pois, sendo $s, t \in \mathbb{R}$ e sequências de Cauchy (x_n), (y_n) de números racionais com $s = [(x_n)]$ e $t = [(y_n)]$, há uma relação de ordem em $\mathbb{R}$, já que se $s - t$ é uma sequência positiva, então $s > t$. A partir daí, pode-se verificar que todos os axiomas de ordem valem para $\mathbb{R}$.

Por fim, $\mathbb{R}$ é completo pois, dado qualquer subconjunto não-vazio e limitado superiormente de classes de equivalência de sequências racionais de Cauchy $K \subset \mathbb{R}$, este possui supremo em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4: Considere as seguintes sequências racionais de Cauchy que aproximam π:

$$(p_n) = (3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; 3{,}14159; \dots)$$

$$(q_n) = \left(3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \cdots\right)$$

Pela definição, estas sequências pertencem à mesma classe de equivalência, digamos $[(r_n)]$. Note que (p_n) e (q_n) possuem $3{,}15$ como supremo, ou seja, são limitadas superiormente por $3{,}15$, por exemplo. Assim, $3{,}15$ também é o supremo de $[(r_n)]$. Logo, $[(r_n)]$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, não-vazio e limitado superiormente, cujo supremo está em $\mathbb{R}$ (pois $3{,}15 \in \mathbb{R}$).

Desta maneira, conclui-se que o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, composto por classes de equivalências de sequências racionais de Cauchy é um corpo ordenado e completo, ou seja,

- $\mathbb{R}$ é um corpo;
- Existe uma relação de ordem $<$ em $\mathbb{R}$; e
- Toda sequência de Cauchy de elementos de $\mathbb{R}$ converge para um elemento de $\mathbb{R}$.

5 PRODUTO EDUCACIONAL

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – exige por parte dos seus alunos que a dissertação de mestrado contenha um produto educacional.

Num mestrado profissional, a dissertação deve ser o resultado de uma pesquisa

> [...] aplicada, descrevendo o desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional, visando a melhoria do ensino na área específica, sugerindo-se fortemente que, em forma e conteúdo, este trabalho se constitua em material que possa ser utilizado por outros profissionais. (MOREIRA, 2004, p. 134).

Neste sentido, o produto final do trabalho de conclusão do curso de um mestrado profissional deve ter relação com a pesquisa realizada, além de possuir aplicabilidade no sistema de educação, objetivando aproximar a pesquisa à realidade escolar (BISOGNIN, 2013).

Assim, desenvolveu-se um produto educacional resultado da pesquisa realizada, intitulado “OS INDO-ARÁBICOS, OS IRRACIONAIS E OS REAIS”, disposto no Apêndice A deste trabalho. O principal objetivo desse produto é oferecer algumas sugestões de atividades, inseridas no contexto histórico apresentado ao longo desta dissertação e precedidas pela teoria correspondente.

O produto foi dividido em três propostas, de forma que cada uma delas contextualize um dos três marcos tratados no decorrer deste trabalho. Seguindo a mesma sequência adotada no Capítulo 4, a Proposta 1 apresenta sugestões de atividades a respeito do sistema de numeração indo-arábico, a Proposta 2 trata sobre a descoberta dos irracionais e a Proposta 3 trabalha com a completude dos números reais por meio de expansões decimais. O professor possui a liberdade para utilizar o material disposto da forma que achar conveniente, tanto integralmente quanto em partes, se assim preferir.

Cada uma das três propostas possui contexto histórico – embasado no Capítulo 4 deste trabalho –, teoria, exemplos e atividades. Além disso, ao final de cada uma das propostas, há uma seção destinada ao professor com sugestões de respostas aos exercícios propostos. Ao final do produto, estão dispostas as referências utilizadas para a construção das três propostas.

O produto educacional desenvolvido não constitui por si só o material didático a ser utilizado pelo professor, mas serve como um complemento ao abordar tais temas em sala de aula. Por esta razão, as três propostas apresentadas podem ser utilizadas em momentos diferentes do ensino, ou seja, a mesma proposta pode ser aplicada em diferentes anos do Ensino Básico, com as devidas alterações, caso necessário.

Vale ressaltar que o produto educacional desenvolvido também é indicado para uso em cursos de formação de professores de matemática, como o curso de Licenciatura em Matemática ou cursos de formação continuada, pois as três propostas apresentadas tratam sobre temas que costumam ser discutidos em disciplinas da graduação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho objetivou investigar historicamente três grandes marcos no desenvolvimento da numeração: a descrição dos números através do sistema indo-arábico, a descoberta dos irracionais e a completude dos reais para que, assim, fosse possível construir um produto educacional, em forma de proposta de ensino, que relacionasse contexto histórico e teoria.

Para tal, inicialmente realizou-se a revisão de literatura em dissertações do PROFMAT que também tratavam, separadamente, dos marcos selecionados. A partir desta revisão, foi possível perceber a importância de relacionar a teoria com o contexto histórico no qual ela foi desenvolvida quando se objetiva motivar o aluno, além da necessidade de oferecer ao professor alguma sugestão de como aplicar em sala de aula o que foi desenvolvido durante o trabalho. Mais ainda, a revisão de literatura permitiu identificar alguns autores renomados na comunidade acadêmica, referenciados ao longo dos trabalhos, que poderiam servir de referencial teórico para este trabalho.

Em seguida, desenvolveu-se o embasamento teórico, utilizando como referência autores conhecidos na comunidade acadêmica no que se refere ao ensino e à história da matemática. O embasamento teórico foi dividido em três seções, cada uma tratando de um marco específico. Cada seção foi desenvolvida com foco no contexto histórico e como ele afetou o desenrolar daquele marco, além de trazer a teoria que o permeia.

Em posse do contexto histórico no qual se deu cada um dos três marcos, foi possível elaborar um produto educacional, em forma de três propostas de ensino, dispostas no Apêndice A deste trabalho. Cada uma das três propostas foi desenvolvida individualmente de forma que o aluno entenda a origem e a sucessão dos acontecimentos no desenvolvimento de cada marco. Por esta razão, cada proposta conta com contexto histórico, teoria, exemplos e atividades, permitindo ao aluno relacionar a história e a teoria de cada um dos três marcos, além de fixar o que aprendeu ao realizar as atividades propostas.

Ao final de cada proposta, há uma seção para o professor com respostas das atividades, além de algumas sugestões pertinentes. Vale ressaltar que as propostas podem ser aplicadas em diferentes níveis de ensino, tanto no Ensino

Básico quanto no Superior, visto que tais marcos históricos são discutidos em cursos de formação de professores, como o curso de Licenciatura em Matemática, por exemplo. Além disso, o professor também pode alterar as propostas ou as atividades da forma que achar conveniente de acordo com o nível da turma, aplicando-as integralmente ou em partes, se assim preferir.

Espera-se que, futuramente, seja possível aplicar as três propostas desenvolvidas, em diferentes momentos, tanto no Ensino Básico quanto no Superior. Desta forma, seria possível pontuar melhorias e adaptar o produto de acordo com as exigências da sala de aula. Além disso, também seria interessante identificar e comparar as dificuldades encontradas, tanto pelos alunos quanto pelos professores, nos diferentes níveis de ensino nos quais as propostas seriam aplicadas.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Título original: *Early History of Mathematics*.

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. *A Construção dos Números Reais e suas Extensões*. 2015. 4º Colóquio da Região Centro-Oeste. Universidade Federal Fluminense.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Tradução de Elza Gomide e Helena Castro. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2008. Título original: *Math through the ages: a gentle history for teachers and others.*

BISOGNIN, Eleni. Produtos educacionais: análise da produção do Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. Polyphonía, Goiás, v. 24, n. 2, p. 269-284, jul./dez. 2013.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação Qualitativa em Educação*. Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994. Título original: *Qualitative Research for Education*.

BOYER, Carl. *História da matemática*. Tradução de Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012. Título original: *A history of mathematics*.

BOYER, Carl. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. Título original: *Historical Topics for the Mathematics Classroom*.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Título original: *Introduction to the History of Mathematics*.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. 2º v. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Título original: *Histoire universalle des chiffres*.

LIMA, Elon Lages. *Análise Real volume 1: Funções de uma variável*. 10ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

MOREIRA, Marco Antonio. *Metodologias de pesquisa em ensino*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
MOREIRA, Marco Antonio. *O mestrado (profissional) em ensino*. Revista Brasileira de Pós-Graduação, Brasília, v. 1, n. 1, p. 131-142, jul. 2004.

RODRIGUES, Aroldo Eduardo Athias. *Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino*. 2013. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências da Educação. Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. *Tópicos de História da Matemática*. 1ª ed. Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

RORIZ, Murilo Morais. *A Construção dos Números Reais*. 2014. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas. Universidade de Brasília, Brasília.

RUIS, André Valner. *Sistemas de numeração e grandezas incomensuráveis*. 2014. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto.

SANTOS, Ana Cláudia Guedes dos. *Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio*. 2013. 147 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

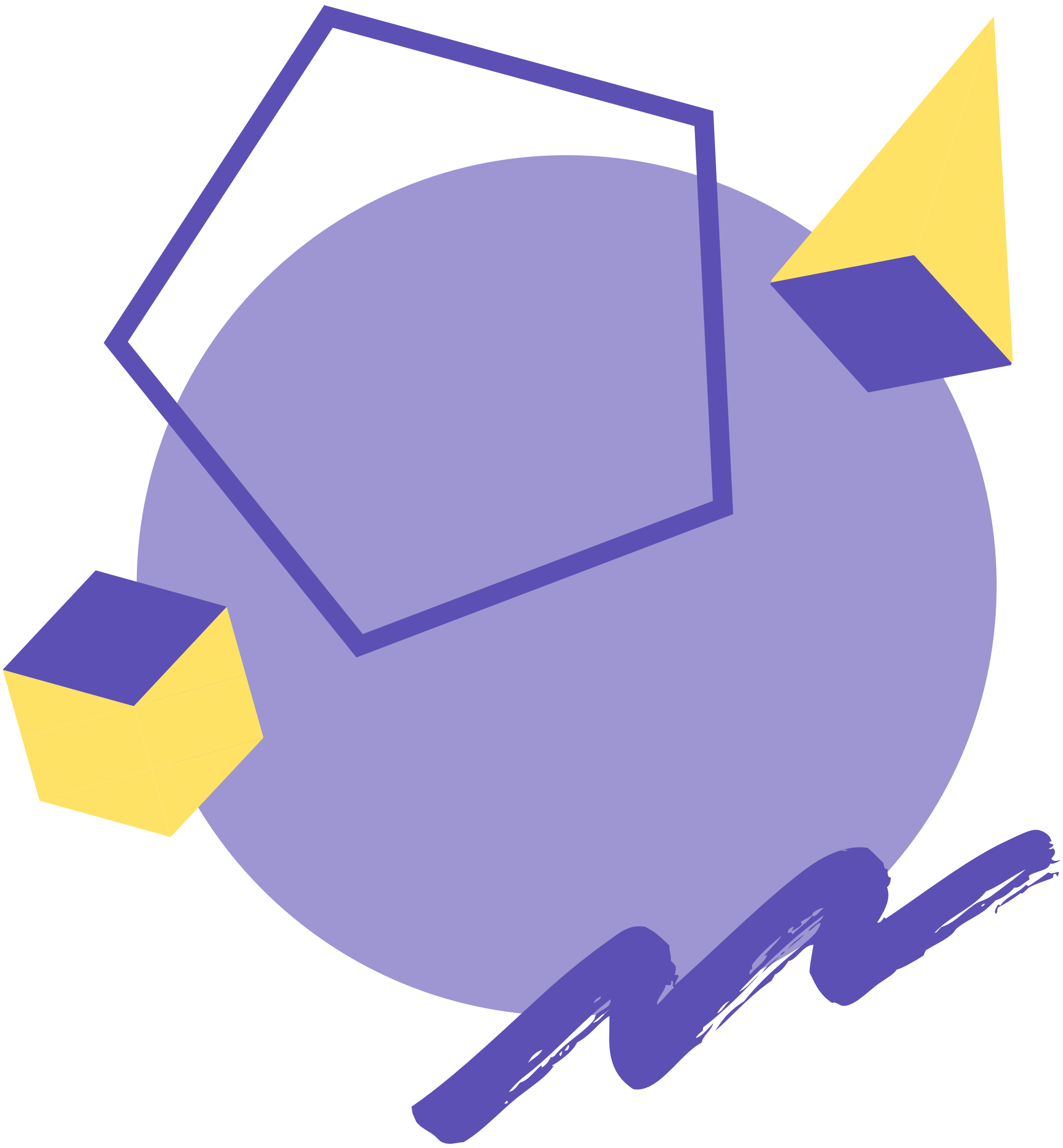
SANTOS, Aurenildo Bezerra dos. *Números irracionais: Da Irracionalidade de Números Algébricos aos Primeiros Transcendentes*. 2018. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ambiente, Tecnologia e Sociedade. Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró.

SILVA, Bruno Pereira da. *Construção dos números reais por sequências de Cauchy e por Cortes de Dedekind*. 2018. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

ANA CAROLINA VILA DO AMARAL

OS INDO-ARÁBICOS, OS IRRACIONAIS E OS REAIS



Três propostas de atividades para o professor do Ensino Básico

APRESENTAÇÃO

Caro leitor,

Este Produto Educacional é parte da dissertação de mestrado intitulada "Uma investigação histórica acerca de três grandes marcos no desenvolvimento da matemática", desenvolvida no Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina, sob a orientação da Profª Drª Elisandra Bar de Figueiredo.

O objetivo desse material é oferecer ao professor do Ensino Básico algumas sugestões de atividades em três diferentes contextos: o sistema de numeração indo-arábico, a descoberta dos irracionais e a completude dos reais.

O produto foi dividido em 3 propostas e cada uma delas aborda um dos três contextos citados. Assim sendo, a Proposta 1 apresenta sugestões de atividades a respeito do sistema de numeração indo-arábico, a Proposta 2 trata sobre a descoberta dos irracionais e a Proposta 3 trabalha com a questão da completude dos números reais.

Cada uma das três propostas possui contexto histórico, teoria, exemplos e atividades para os alunos. Além disso, ao final de cada uma delas, há uma seção destinada ao professor com sugestões de respostas aos exercícios propostos. Ao final, estão dispostas as referências utilizadas para a construção das três propostas.

Sinta-se à vontade para utilizar o material disposto da forma que achar conveniente, tanto integralmente quanto em partes, se assim preferir!

Ana Carolina Vila do Amaral

SUMÁRIO

PROPOSTA 1

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

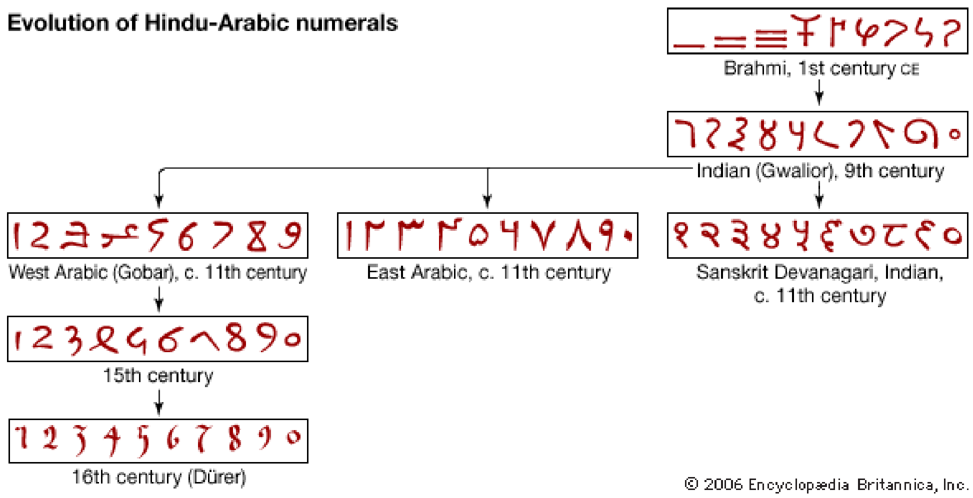
> "O homem desde o princípio, mesmo que de forma intuitiva, já se preocupava em organizar e quantificar objetos e animais campestres para sua subsistência".
>
> (RUIS, 2014, p. 19)

O sistema indo-arábico, composto pelos dez algarismos

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

teve sua forma modificada ao longo do tempo, até culminar no modelo que utilizamos atualmente, conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Evolução dos algarismos indo-arábicos



Extraído de: Rodrigues (2013, p. 34)

Além dos indo-arábicos, no decorrer da história, outros algarismos foram criados a fim de suprir a necessidade de contagem, como os hieróglifos egípcios (Quadro 1) e os gregos alfabéticos (Quadro 2).

O sistema de numeração egípcia surgiu por volta de 3000 a.C. Utilizavam elementos da fauna e da flora nilótica, provando que a escrita foi desenvolvida nas margens do Nilo. Eles reproduziam seus algarismos esculpindo-os com cinzel e martelo em monumentos de pedra ou com caniço, molhado em colorante, em rochas, cerâmicas ou folhas de papiro.

(IFRAH, 1997)

Quadro 1 - Algarismos hieróglifos egípcios

Símbolo egípcio	Número decimal
	1
	10
	100
	1.000
	10.000
	100.000
	1.000.000

Adaptado de: Ifrah (1997, p. 342)

A numeração grega surgiu por volta de 3300 a.C. Utilizava vinte e sete sinais, dentre os quais estavam as vinte e quatro letras do alfabeto grego e os três sinais alfabéticos (*digama, kopa* e *san*), e os dividia em três classes numéricas (unidades, dezenas e centenas).

(IFRAH, 1997)

Quadro 2 - Algarismos gregos alfabéticos

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	um	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	épsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϝ	ϝ	digama*	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	o	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϙ	ϙ	kopa	90	Ϡ	ϡ	san	900

* Nos manuscritos bizantinos, esse algarismo é indicado por ς, condensado de *sigma* e de *tau*. Os gregos de hoje, que conservaram o alfabeto cifrado para alguns usos particulares (um pouco como nós para os algarismos romanos) chamam-no *stigma*.

Adaptado de: Ifrah (1997, p. 467)

1. Imagine que você viva em uma grande fazenda e precise registrar a quantidade de ovelhas que possui. Determine o número de ovelhas presentes na sua fazenda e escreva este número utilizando algarismos:

a) indo-arábicos

____

b) hieroglíficos gregos

____

c) gregos alfabéticos

____

2. O que ocorre em cada caso se a posição dos algarismos for alterada?

a) indo-arábicos

____

____

____

b) hieroglíficos gregos

____

____

____

c) gregos alfabéticos

____

____

____

3. Entre os três sistemas de algarismos apresentados, qual deles é o mais simples de ser utilizado e por quê?

____

____

____

____

A ideia de sistema posicional contribuiu para que o sistema indo-arábico, utilizado atualmente, tenha se popularizado. Logo, a partir dos dez algarismos existentes, é possível representar toda a numeração escrita, simplesmente trocando-os de posição.

"por meio de um número muito reduzido de algarismos de base, ela permite [...] uma representação simples e perfeitamente racional de qualquer número, por maior que seja".

(IFRAH, 1997, p. 676)

A adoção do sistema decimal posicional auxiliou não só na representação dos números escritos, como também na aritmética, bastando apenas aprender as **tabelas de adição e multiplicação** de dois números quaisquer em uma determinada base.

A base decimal se sobrepõe às outras pois a sua quantidade de algarismos é mais fácil de ser decorada, além de evitar consideráveis repetições de símbolos.

(IFRAH, 1997)

"[...] qualquer inteiro b maior do que 1 pode servir de base de um sistema posicional [...]. Em um tal sistema necessitaremos de b símbolos ou algarismos distintos, cujos valores principais são 0, 1, 2, ..., $b - 1$. Mover um algarismo uma casa para a esquerda significará multiplicar seu valor por b, e movê-lo uma casa para a direita [...] significará dividir seu valor por b".

(AABOE, 2013, p. 15-16)

Sabe-se que, no sistema posicional utilizado atualmente, adotamos a base decimal, ou seja, b = 10. Na base 2 temos que b = 2 e, portanto, esta base necessita de 2 símbolos distintos: 0 e 1. Este sistema posicional é chamado binário e possui ampla utilização na linguagem computacional, pois a máquina compreende apenas os valores 0 (desligado) e 1 (ligado).

A base binária utiliza apenas os algarismos 0 e 1, e a base ternária, por sua vez, utiliza os algarismos 0, 1 e 2. A sequência dos números nestas bases é da forma:

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Binária	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
Ternária	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100

Você já aprendeu na escola como realizar a adição e a multiplicação entre números da base decimal. A seguir, apresentamos as tabelas de adição e multiplicação das bases binária e ternária, ou seja, para b = 2 e para b = 3.

Tabela de adição da base binária

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela de multiplicação da base binária

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela de adição da base ternária

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Tabela de multiplicação da base ternária

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

No exemplo a seguir, mostramos como obter a sequência de números nas bases 4 e 5. Este método pode ser utilizado para qualquer base.

Na sequência, propomos que você construa as tabelas de adição e multiplicação das bases 4 e 5. Inicialmente, devemos definir quais algarismos irão compor estas bases. Para a base 4, os algarismos utilizados serão 0, 1, 2 e 3; para a base 5, os algarismos utilizados serão 0, 1, 2, 3 e 4.

Exemplo 1: Como obter a sequência de números da base 4 e da base 5?

- Escrevemos a sequência de números decimais que já conhecemos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

- Os números na base 4 possuem apenas os algarismos 0, 1, 2 e 3. Eliminamos os números da sequência que possuem algarismos não pertencentes à base 4:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

  Assim, a sequência de números da base 4 é:

  0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, ...

- Na base 5, temos apenas os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4. Procedemos da mesma forma, eliminando os números que possuem algarismos não pertencentes à base 5:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

  Assim, a sequência de números da base 5 é:

  0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, ...

4. Relacione os números da base decimal com os números das bases 4 e 5, seguindo o método do Exemplo 1.

Decimal	Base 4	Base 5
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

5. Construa a tabela de adição da base 4.

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

6. Construa a tabela de multiplicação da base 4.

×	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

7. Construa a tabela de adição da base 5.

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

8. Construa a tabela de multiplicação da base 5.

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Agora que as tabelas de adição e multiplicação das bases 4 e 5 foram desenvolvidas, podemos realizar operações entre números destas bases.

9. Efetue as operações abaixo.

a) $(3012)_4 + (231)_4$

b) $(2033)_4 \times (13)_4$

c) $(4310)_5 + (1442)_5$

d) $(1441)_5 \times (42)_5$

No Exemplo 1, descobrimos como obter a sequência de números nas bases 4 e 5 para preencher a tabela do Exercício 4 e, em seguida, para realizar operações entre estes números. Este método funcionou pois buscávamos correspondentes de números pequenos.

Reflita...

É viável utilizar o método apresentado para encontrar números maiores, como 84652, por exemplo, nas bases 4 e 5?

O método descrito a seguir converte a base de um número decimal, ou seja, relaciona um número em uma base qualquer $b > 1$ com o seu correspondente na base 10.

a) Encontrar o representante decimal Y de um número X na base b.

$$(X)_b \rightarrow (Y)_{10}$$

1. Multiplique o algarismo da **unidade** de X por b^0;
2. Multiplique o algarismo da **dezena** de X por b^1;
3. Multiplique o algarismo da **centena** de X por b^2;
4. Continue o processo até multiplicar todos os algarismos de X pela potência de b correspondente;
5. A soma destas multiplicações é Y.

Exemplo 2: Determine o representante decimal do número $(1472)_8$.

- $2 \times 8^0 = 2 \times 1 = 2$
- $7 \times 8^1 = 7 \times 8 = 56$
- $4 \times 8^2 = 4 \times 64 = 256$
- $1 \times 8^3 = 1 \times 512 = 512$
- $2 + 56 + 256 + 512 = 826$

O representante decimal de $(1472)_8$ é o número 826.

b) Encontrar o representante S na base b de um número T na base decimal

$$(T)_{10} \rightarrow (S)_b$$

1. Divida o número T pela base b. O resto desta divisão é a **unidade** do número na base b;
2. Divida o quociente obtido em 1 pela base b. O resto desta divisão é a **dezena** do número na base b;
3. Divida o quociente obtido em 2 pela base b. O resto desta divisão é a **centena** do número na base b;
4. Continue o processo até que o quociente obtido seja 0;
5. A concatenação dos restos das divisões, de baixo para cima, é S.

Exemplo 3: Determine o representante na base 15 do número decimal 6720.

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r}
6720 & 15 & & & \\
-\,6720 & 448 & 15 & & \\
0 & -\,435 & 29 & 15 & \\
 & 13 & -\,15 & 1 & 15 \\
 & & 14 & -\,0 & 0 \\
 & & & 1 &
\end{array}
$$

Suponha que a correspondência entre os algarismos da base 15 e os algarismos da base decimal são dados conforme a tabela a seguir. Observação: para bases maiores que 10, é usual utilizar letras do alfabeto para representar os algarismos maiores do que 9.

Decimal	Base 15
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E

Logo, o representante na base 15 do número decimal 6720 é $(1ED0)_{15}$.

Um modo simples de efetuar a mudança de base entre dois números em duas bases diferentes de 10 é converter o número dado para a base decimal, para em seguida convertê-lo para a base desejada.

10. Encontre o representante de $(3012)_5$ na base 8.

Passo 1: encontre o representante de $(3012)_5$ na base decimal.

Passo 2: encontre o representante na base 8 do número obtido no Passo 1.

11. Em que base se tem...

a) $3 \times 3 = 10$?

b) $3 \times 3 = 11$?

c) $3 \times 3 = 12$?

12. Determine b de maneira que $79 = (142)_b$.

13. Explique o truque: Pede-se a uma pessoa que pense num número de dois algarismos. Solicita-se então a ela para multiplicar o algarismo das dezenas do número pensado por 5, somar 7, dobrar, somar o algarismo das unidades do número original e anunciar o resultado. Subtraindo-se 14 desse resultado, descobre-se o número pensado.

____

____

____

____

____

____

____

Para o professor:

1. No primeiro item, o aluno definirá o número de ovelhas que possui em sua fazenda. Exemplo: 38. A partir daí, ele irá verificar no Quadro 1 a correspondência dos algarismos. Exemplo: ∩ ∩ ∩ | | | | | | | |. Para o último item, novamente o aluno irá fazer a correspondência com os algarismos, desta vez tomando como base o Quadro 2. Exemplo: $\lambda\eta$.

2. Neste item, é importante lembrar o aluno de que o sistema indo-arábico é posicional e, por isso, a ordem dos algarismos altera o seu valor. Por outro lado, o sistema de numeração egípcio é aditivo e, assim como a soma de duas parcelas, a ordem não interfere no resultado. Por fim, no sistema de numeração grego alfabético, as unidades, dezenas e centenas já possuíam algarismos próprios e, portanto, não faz sentido alterar a ordem dos seus algarismos.

3. O aluno tende a inferir, com base nos itens 1 e 2, que o sistema de numeração indo-arábico é o mais prático de ser utilizado, pois possui a menor quantidade de algarismos a serem decorados, já que é um sistema de numeração posicional e cada um dos dez algarismos pode ser reutilizado para expressar um valor específico.

4.

Decimal	Base 4	Base 5
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	10	4
5	11	10
6	12	11
7	13	12
8	20	13
9	21	14
10	22	20
11	23	21
12	30	22
13	31	23
14	32	24
15	33	30
16	100	31
17	101	32
18	102	33
19	103	34
20	110	40

5.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

6.

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

7.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

8.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

9. Para este item, é preciso utilizar as tabelas criadas nos itens anteriores.

a) $(3012)_4 + (231)_4$

3	0	1	2
+	2	3	1
3	3	0	3

b) $(2033)_4 \times (13)_4$

	2	0	3	3
		×	1	3
1	2	2	3	1
2	0	3	3	+
3	3	2	2	1

c) $(4310)_5 + (1442)_5$

	4	3	1	0
+	1	4	4	2
1	1	3	0	2

d) $(1441)_5 + (42)_5$

		1	4	4	1
			×	4	2
		3	4	3	2
1	2	4	1	4	+
1	3	3	1	2	2

10. Passo 1:

- $2 \times 5^0 = 2 \times 1 = 2$
- $1 \times 5^1 = 1 \times 5 = 5$
- $0 \times 5^2 = 0 \times 25 = 0$
- $3 \times 5^3 = 3 \times 125 = 375$
- $2 + 5 + 0 + 375 = 382$

O representante decimal de $(3012)_5$ é o número 382.

Passo 2:

382	8			
- 376	47	8		
6	- 40	5	8	
	7	- 0	0	
		5		

O representante na base 8 do número decimal 382 é $(576)_8$.

Desta forma, $(3012)_5 = (576)_8$.

11. Neste item, pode-se sugerir aos alunos que encontrem qual o nono número da sequência em bases pequenas, assim como feito no Exemplo 1.

a) Base 9

b) Base 8

c) Base 7

12. Basta aplicar a técnica descrita no item **a)**. Logo,

$$2 \times b^0 + 4 \times b^1 + 1 \times b^2 = 79$$

$$b^2 + 4b + 2 = 79$$

$$b^2 + 4b - 77 = 0$$

O problema agora resume-se a resolver uma equação de segundo grau. Teremos que $b = -11$ ou $b = 7$. Como a base de um número deve ser sempre maior do que 1, concluímos que $b = 7$.

13. Traduzindo o truque em expressão matemática, temos:

- Pede-se a uma pessoa que pense num número de dois algarismos: digamos **ab**
- Solicita-se então a ela para multiplicar o algarismo das dezenas do número pensado por 5: **5**a
- Somar 7: 5a **+ 7**
- Dobrar: **2 ×** (5a + 7)
- Somar o algarismo das unidades do número original: $2 \times (5a + 7)$ **+ b**
- Subtraindo-se 14 desse resultado: $2 \times (5a + 7) + b$ **- 14**

A expressão encontrada pode ser simplificada:

$$2 \times (5a + 7) + b - 14$$

$$10a + 14 + b - 14$$

$$10a \cancel{+14} + b \cancel{-14}$$

$$10a + b$$

Perceba que $10a + b$ é o número pensado, sendo apenas uma forma diferente de representá-lo.

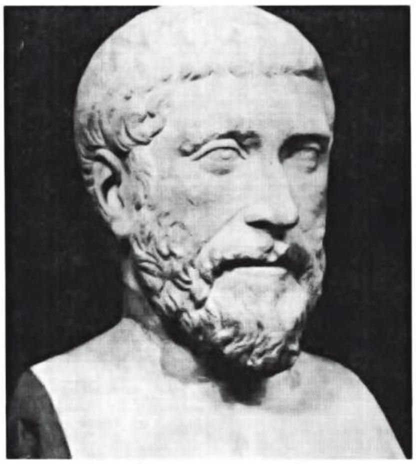
PROPOSTA 2

A DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

A DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

Pitágoras foi um ilustre matemático nascido por volta de 572 a.C., na Grécia.

Figura 1 - Pitágoras



Extraído de: Eves (2011, p. 98)

Sua filosofia tinha como princípio o pensamento de que a base do homem e da matéria são os números inteiros, já que tudo o que existe no mundo concreto é contado utilizando este conjunto de números.

1. Dê exemplos do seu dia a dia que contra-argumentam a filosofia de Pitágoras de que todas as medidas são inteiras.

____

____

____

Observa-se, portanto, que o conjunto dos números inteiros não é suficiente para traduzir determinadas medidas do nosso cotidiano. Por esta razão, houve a necessidade de utilizar frações destas partes inteiras, que agora compõem um novo conjunto de números, chamados **racionais**.

Um número racional é aquele escrito da forma

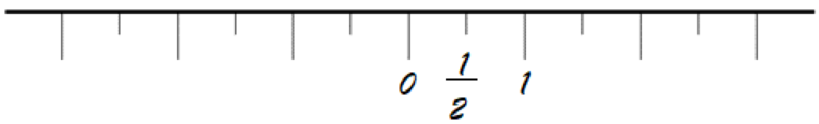
$$\frac{p}{q},$$

com $p,\ q \in \mathbb{Z}$.

Observação 1: lembre-se que q não pode ser 0, pois não é possível realizar uma divisão por 0.

Observação 2: note que se $q = 1$ a fração representa um número inteiro. Portanto, números inteiros também são números racionais.

2. Complete a reta real com números racionais.

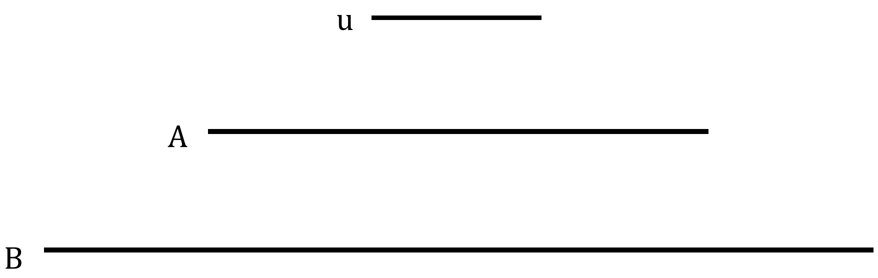


3. Marque com um X os números racionais.

( ) 2	( ) $\frac{3}{8}$
( ) $\frac{1}{8}$	( ) e
( ) π	( ) 0
( ) $\frac{0}{7}$	( ) $8{,}74$
( ) $\frac{74}{0}$	( ) $\frac{3}{\pi}$
( ) $-\frac{1}{50}$	( ) $\frac{975}{1}$
( ) $6{,}3$	( ) -46

O conceito de número racional surgiu através da comensurabilidade entre segmentos. Isto é, dados dois segmentos - A e B - é possível determinar um segmento u que cabe uma quantidade inteira de vezes dentro de A e dentro de B.

4. Com o auxílio de um compasso, verifique quantas vezes o segmento u cabe dentro dos segmentos A e B.



O segmento u cabe ______ vezes dentro do segmento A. Logo

$$A = \_\_\_\_\_\_ \times u$$

O segmento u cabe ______ vezes dentro do segmento B. Logo

$$B = \_\_\_\_\_\_ \times u$$

Você percebeu que o segmento u coube um número inteiro de vezes dentro dos segmentos A e B? Por esta razão, dizemos que A e B são **segmentos comensuráveis**, ou seja, é possível determinar uma medida (neste caso, a medida do segmento u) que caiba um número inteiro de vezes em A e um número inteiro de vezes em B.

Dados dois objetos quaisquer, de comprimentos a e b, sempre existia alguma unidade u, suficientemente pequena, de tal forma que ambos objetos pudessem ser medidos de modo "exato" com essa unidade u. [...] Desse modo, usando a medida u, um objeto mediria m vezes u e o outro n vezes u. Os objetos (números) a e b são ditos comensuráveis.

(AGUILAR; DIAS, 2015, p. 53)

Ao calcularmos a razão entre a medida do segmento $\mathbf{A}$ e a medida do segmento $\mathbf{B}$, obtemos

$$\frac{A}{B} = \frac{3 \times u}{5 \times u}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{3 \cancel{\times u}}{5 \cancel{\times u}}$$

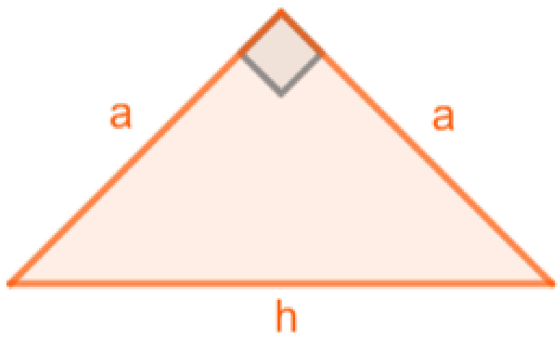
$$\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$$

que é racional. Assim, a razão entre segmentos comensuráveis é um número racional.

Será que esta medida $\mathbf{u}$ sempre pode ser determinada, independentemente do tamanho dos segmentos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$?
Ou seja, a razão entre dois segmentos sempre será um número racional?

Acreditava-se que a resposta para esta pergunta era afirmativa. Vamos verificar que, na verdade, a resposta é NÃO. Para isso, considere um triângulo retângulo isósceles, cuja hipotenusa mede h e os catetos medem a, como na Figura 2.

Figura 2 - Triângulo retângulo isósceles



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Do teorema de Pitágoras, temos que

$$\mathrm{h}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{a}^2$$
$$\mathrm{h}^2 = 2\mathrm{a}^2$$
$$\frac{\mathrm{h}^2}{\mathrm{a}^2} = 2$$
$$\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}} = \sqrt{2}$$

Como visto anteriormente, um número racional é da forma $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$, com p e q inteiros. Vamos verificar que a razão entre a hipotenusa e o cateto deste triângulo não é racional.

5. Prove por contradição que o número $\sqrt{2}$ não é racional.

Dicas:

- Para provar por contradição, admita que a hipótese é verdadeira, ou seja, que $\sqrt{2}$ é racional para, ao final, chegar em uma contradição.
- Todo número racional pode ser escrito como um quociente de termos primos entre si.
- Todo número par é da forma 2k.
- Se k^2 é par, então k é par.

Então, a razão entre a hipotenusa **h** e o cateto **a** de um triângulo retângulo isósceles não é um número racional e, por isso, **h** e **a** são segmentos não comensuráveis, ou ainda, incomensuráveis.

"Os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo propriedade básicas simples"

(BOYER, 2012, p. 70)

Estes números não racionais, ou seja, números que não admitem serem reescritos como uma fração, foram denominados **irracionais**.

A descoberta dos irracionais gerou uma grande ruptura na matemática da época. A revelação desse novo conjunto de números revolucionou o que se ensinava nas escolas e, além disso, derrubou por terra a teoria pitagórica de que as razões se limitavam a grandezas comensuráveis.

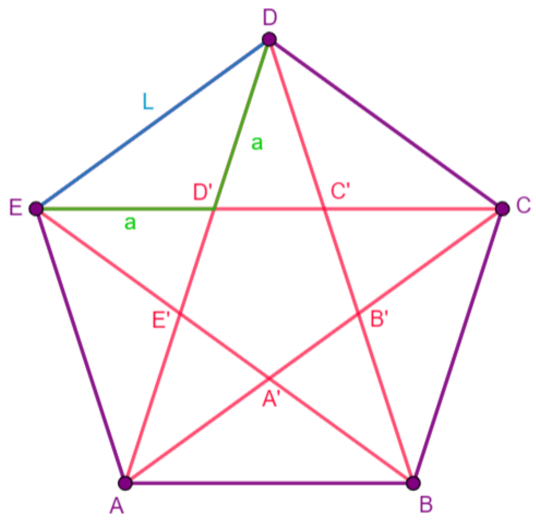
"Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido. Mais tarde, [...] Teodoro de Cirene (425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais".

(EVES, 2011, p. 107)

Ainda se discute como, de fato, ocorreu a descoberta a respeito de segmentos incomensuráveis. Alguns autores acreditam que, ao invés da razão entre hipotenusa e cateto de um triângulo retângulo isósceles, a descoberta sobre tais segmentos tenha se dado através da razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, como visto a seguir.

Considere o pentágono regular $\mathbf{ABCDE}$ da Figura 3, onde $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$, $\mathbf{D'}$ e $\mathbf{E'}$ são as interseções das suas diagonais.

Figura 3 - Pentágono regular



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Observando o paralelogramo $\mathrm{BAEC'}$ e utilizando as propriedades de paralelogramos, concluímos que os triângulos isósceles $\mathrm{AED'}$ e ABD são semelhantes e, dessa forma,

$$\frac{\mathrm{AD'}}{\mathrm{ED'}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

Substituindo pelos valores a e L indicados na figura, temos

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{L}+\mathrm{a}}{\mathrm{L}}$$

$$\mathrm{a}^2 + \mathrm{La} - \mathrm{L}^2 = 0$$

$$\mathrm{a} = \frac{-\mathrm{L} \pm \sqrt{\mathrm{L}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\mathrm{L}^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-\mathrm{L} \pm \sqrt{5\mathrm{L}^2}}{2} = \frac{-\mathrm{L} \pm \sqrt{5}\mathrm{L}}{2} = \frac{\mathrm{L}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}.$$

Como $\mathrm{a} > 0$, temos que

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{L}\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} = \frac{2}{\left(\sqrt{5} - 1\right)}.$$

6. Generalize a demonstração do Exercício 5, provando que $\sqrt{p}$ é irracional para todo p primo.

Logo, pode-se concluir que $\sqrt{5}$ é irracional, pois 5 é primo. Portanto, a relação

$$\frac{L}{a} = \frac{2}{(\sqrt{5} - 1)}$$

é uma medida irracional. Assim, o lado e a diagonal de um pentágono regular são medidas incomensuráveis.

Demonstraram-se assim duas maneiras que possivelmente revelaram a existência de segmentos incomensuráveis nos tempos pitagóricos.

Além de saber identificar um número racional e um irracional, devemos também verificar o que acontece quando realizamos operações entre estes números.

Você já aprendeu que a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão entre números racionais retornam um outro número racional, como mostrado a seguir.

Operações entre números racionais

Considere os números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, com p, q, r e s sendo números inteiros e q e s diferentes de zero.

a) Adição e subtração

$$\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s \pm r \cdot q}{q \cdot s}$$

Como p, q, r e s são números inteiros, então $p \cdot s$, $r \cdot q$ e $q \cdot s$ são inteiros. Logo, $p \cdot s \pm r \cdot q$ é um número inteiro e, assim, $\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}$ é um número racional.

b) Multiplicação e divisão

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s \cdot r \cdot q}{q \cdot s}$$

Segue que $p \cdot s \cdot r \cdot q$ e $q \cdot s$ são números inteiros. Logo, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$ é um número racional.

Para a divisão, temos que

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r},$$

com $r \neq 0$, caindo no caso da multiplicação entre números racionais.

O que ocorre, por outro lado, ao realizarmos operações entre números racionais e números irracionais? Verifique no Exercício 7 a seguir.

7. Prove por contradição que a adição e a multiplicação entre números racionais (não nulos) e irracionais retornam números irracionais. Obs.: Os casos da subtração e da divisão são análogos.

Dica: considere a operação entre um número racional R_1 e um irracional I.

a) Prove que **racional + irracional = irracional**

____
____
____
____
____
____
____
____
____

b) Prove que **racional × irracional = irracional**

____
____
____
____
____
____
____
____
____

Por fim, basta saber o que ocorre ao realizarmos tais operações entre números irracionais. No Exercício 8, nos dois primeiros itens o objetivo é compreender o que ocorre ao efetuar a soma e a multiplicação de dois números irracionais e, no terceiro item, relembrar alguns dos conceitos aprendidos até aqui.

8. Analise as sentenças abaixo, justificando as verdadeiras e dando um contraexemplo, caso seja falsa.

I - A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

II - O produto entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

III - Todo número real é um número irracional.

Além das raízes de números primos serem irracionais, também pode-se encontrar números irracionais quando tratamos de logaritmos.

Faça o seguinte teste: com o auxílio de uma calculadora científica, obtenha o valor de $\log_{10}2$ e escreva abaixo o que encontrou:

$\log_{10}2$ = ____

Este número é racional? A primeira resposta que vem à mente seria que sim, já que a calculadora retornou um valor finito. Porém, a calculadora tem um espaço limitado e acaba por mostrar uma quantidade finita de casas, quando na verdade o número em questão possui infinitas casas decimais após a vírgula!

Vamos verificar que o valor de $\log_{10}2$ não é racional e, portanto, trata-se de um número irracional – ou seja, possui infinitas casas decimais após a vírgula –. Para isso, precisamos do teorema a seguir, conhecido como Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema Fundamental da Aritmética: Seja a um inteiro diferente de 1, -1 e 0. Então existem números primos p_1, p_2, ..., p_r e inteiros positivos α_1, α_2, ..., α_r tais que

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

Além disso, esta decomposição é única, a menos de ordem dos fatores.

Para decompor um número em fatores primos, é preciso utilizar a fatoração, conforme exemplificado a seguir.

Exemplo 1: Decomponha os números abaixo em fatores primos.

a) 180

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

b) 234

$$\begin{array}{r|l} 234 & 2 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $234 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 13$.

Munidos do teorema apresentado, verifique no Exercício 9 que o valor de $\log_{10}2$ não é racional, diferentemente do que foi apresentado na calculadora. Logo, possui infinitas casas não periódicas após a vírgula.

9. Mostre, por contradição, que $\log_{10}2$ é irracional.

Dica: lembre-se que $x = \log_{10}2$ é o mesmo que $10^x = 2$.

"O ponto crucial no argumento acima foi o fato de 2 e 10 terem fatores primos diferentes. De forma mais precisa, o fator 5 está na decomposição em primos do número 10, mas não está, evidentemente, na decomposição do número 2".

(PINTO; COSTA, 2018, p. 68)

No Exercício 10, verificaremos a condição de irracionalidade de um logaritmo.

10. Sendo a e b positivos, mostre que, se a ou b apresentam pelo menos um fator que não é comum em sua decomposição de fatores primos, então $\log_b a$ é irracional.

Dica: demonstre a contrapositiva da hipótese, ou seja, se $\log_b a$ é racional, então a e b possuem os mesmos fatores primos.

Dessa forma, podemos concluir que, quando tratamos de logaritmos de base 10, apenas são racionais aqueles da forma

$$\log_{10} 10^{k},$$

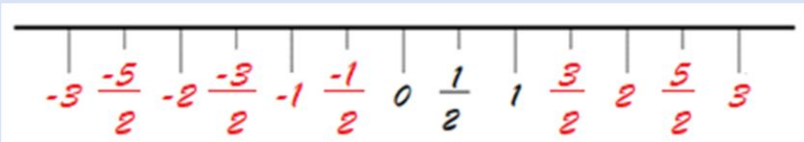
com k racional.

Este conjunto específico de logaritmos é uma pequena fração da totalidade de logaritmos possíveis de serem calculados. Assim, é fácil perceber que a maioria dos logaritmos é, de fato, irracional.

Para o professor:

1. A resposta deste item é livre. Algumas sugestões: ingredientes em receitas, fatias de pizza, notas na escola etc.

2. Os traços maiores correspondem aos números inteiros e os menores aos fracionários.



3. Marque com um X os números racionais.

(X) 2	(X) $\frac{3}{8}$
(X) $\frac{1}{8}$	( ) e
( ) π	(X) 0
(X) $\frac{0}{7}$	(X) $8{,}74 = \frac{874}{100}$
( ) $\frac{74}{0}$	( ) $\frac{3}{\pi}$
(X) $-\frac{1}{50}$	(X) $\frac{975}{1}$
(X) $6{,}3 = \frac{63}{10}$	(X) -46

4. Uma sugestão interessante é iniciar o item instigando o aluno a verificar que o segmento $\mathbf{A}$ não cabe um número inteiro de vezes em $\mathbf{B}$, para que ele conclua que há a necessidade de construir um segmento menor, no caso $\mathbf{u}$, para fazer isso. Em seguida, ele irá verificar que o segmento $\mathbf{A}$ corresponde a 3 vezes o segmento $\mathbf{u}$; e que o segmento $\mathbf{B}$ corresponde a 5 vezes o segmento $\mathbf{u}$.

5. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional. Como visto anteriormente, podemos representar um número racional através da fração $\frac{p}{q}$. Desta forma,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

com p e q primos entre si. Assim,

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2q^2$$

Se $p^2 = 2q^2$, temos que p^2 é da forma 2k. Logo, p^2 é par e, consequentemente, p é par. Podemos então reescrever $p = 2c$. Substituindo na equação acima, teremos

$$p^2 = 2q^2$$

$$(2c)^2 = 2q^2$$

$$4c^2 = 2q^2$$

$$2c^2 = q^2$$

Note que $q^2 = 2c^2$, ou seja, é da forma 2k e, por isso, q^2 é par. Isto significa que q também é par. Concluímos então que p e q são pares. Porém, se isto for verdade, p e q possuem um fator em comum e, assim, não são primos entre si. Logo, chegamos em uma contradição e, por isso, a hipótese inicial de que $\sqrt{2}$ é racional é falsa.

6. Suponha que $\sqrt{p}$ seja racional para qualquer p primo. Podemos então reescrever $\sqrt{p}$ como

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}$$

com a e b primos entre si. Logo,

$$p = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = pb^2$$

Isto significa que a^2 é um múltiplo de p e, portanto, a é um múltiplo de p, ou então, $a = pk$. Substituindo na equação anterior, teremos

$$(pk)^2 = pb^2$$
$$p^2k^2 = pb^2$$
$$pk^2 = b^2$$

Note que $b^2 = pk^2$, ou seja, b^2 é múltiplo de p e, por consequência, b é múltiplo de p. Concluímos então que a e b são múltiplos de p. Porém, se isto for verdade, a e b possuem um fator em comum e, portanto, não são primos entre si. Logo, chegamos em uma contradição e, por isso, a hipótese inicial de que $\sqrt{p}$, com p primo, é racional é falsa.

7.

a) Prove que **racional + irracional = irracional**

Suponha, por contradição, que a soma entre um número racional R_1 e um irracional I retorne um número racional R_2. Ou seja,

$$R_1 + I = R_2 .$$

Podemos reescrever esta equação como

$$I = R_2 - R_1 .$$

Vimos anteriormente que a subtração entre números racionais retorna um número racional. Assim,

$$I = R_3$$

e, portanto, I é um número racional. Isto é um absurdo e, portanto, **a adição entre um número racional e um irracional retorna um número irracional**.

b) Prove que **racional × irracional = irracional**

Suponha, por contradição, que a multiplicação entre um número racional R_1 e um irracional I retorne um número racional R_2.

Ou seja,

$$R_1 \cdot I = R_2 \,.$$

Podemos reescrever esta equação como

$$I = \frac{R_2}{R_1}.$$

Vimos anteriormente que a divisão entre números racionais retorna um número racional. Assim,

$$I = R_3$$

e, portanto, I é um número racional. Isto é um absurdo e, portanto, **a multiplicação entre um número racional e um irracional retorna um número irracional**.

8.

I - Falsa. Nem sempre é um número irracional, como o caso de $\sqrt{p} + (-\sqrt{p}) = 0$, com p primo, além de variações, como $n + \sqrt{p} + (-\sqrt{p}) = n$, com n natural etc.

II - Falsa. A multiplicação de dois números irracionais pode resultar em um número racional, como $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = p$, com p primo, além de variações, como $\sqrt{p} \cdot (n \cdot \sqrt{p}) = n \cdot p$, com n natural etc.

III - Falsa, pois o conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e irracionais, então há números que são reais e não são irracionais.

9. Por contradição, supomos que $\log_{10} 2$ é racional e, portanto, pode ser escrito como

$$\log_{10} 2 = \frac{m}{n},$$

com m e n inteiros. Logo, pela definição de logaritmo,

$$2 = 10^{\frac{m}{n}}\,.$$

Elevando ambos os membros à potência n, obtemos

$$2^n = 10^m = (2 \cdot 5)^m = 2^m \cdot 5^m \,.$$

Para a igualdade ser válida, devemos ter que $5^m = 1$, ou seja, $m = 0$. Desta forma,

$$2 = 10^{\frac{m}{n}} = 10^{\frac{0}{n}} = 10^0 = 1$$

$$2 = 1.$$

Chegamos a uma contradição e $\log_{10} 2$ é, de fato, irracional.

10. Suponha que $\log_b a$ seja racional. Desta forma, existem m e n inteiros tais que

$$\log_b a = \frac{m}{n}.$$

Assim,

$$a = b^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow a^n = b^m \,.$$

Da última igualdade, com o auxílio do Teorema Fundamental da Aritmética, concluímos que a e b possuem exatamente os mesmos fatores primos.

De fato, suponha que o número a seja decomposto da forma

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

e b seja decomposto da forma

$$b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r} \,.$$

Ora, se $a^n = b^m$, então

$$\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}\right)^n = \left(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}\right)^m$$

$$p_1^{n\alpha_1} p_2^{n\alpha_2} \dots p_r^{n\alpha_r} = q_1^{m\beta_1} q_2^{m\beta_2} \dots q_r^{m\beta_r}$$

e, portanto, $p_k^{n\alpha_k} = q_k^{m\beta_k}$, para $k = 1, 2, \dots, r$. Logo, $p_k = q_k$ e $n\alpha_k = m\beta_k$, para $k = 1, 2, \dots, r$. Ou seja, a e b possuem exatamente os mesmos fatores primos.

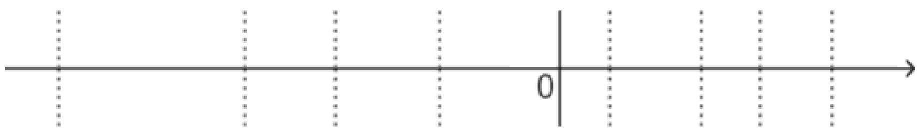
PROPOSTA 3

A COMPLETUDE DOS REAIS

A COMPLETUDE DOS REAIS

O conjunto dos números reais geralmente é associado à reta real. Dessa forma, cada número real pode ser representado por um ponto desta reta.

1. Complete a reta abaixo com os números reais fornecidos.



2	$-\sqrt{5}$	e	-5
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\pi$	$-\frac{6}{5}$

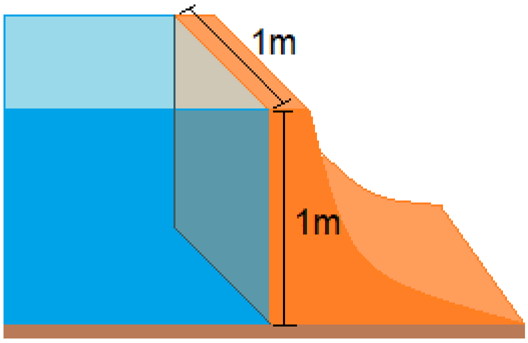
> A "palavra usada para designar a propriedade da reta que distingue os reais dos racionais é 'continuidade', que seria equivalente ao que chamamos de 'completude'."
>
> (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 264).

Você aprendeu sobre os números reais a partir da sua representação decimal. Por isso, seguiremos com a construção dos reais - racionais e irracionais - a partir do método das expansões decimais.

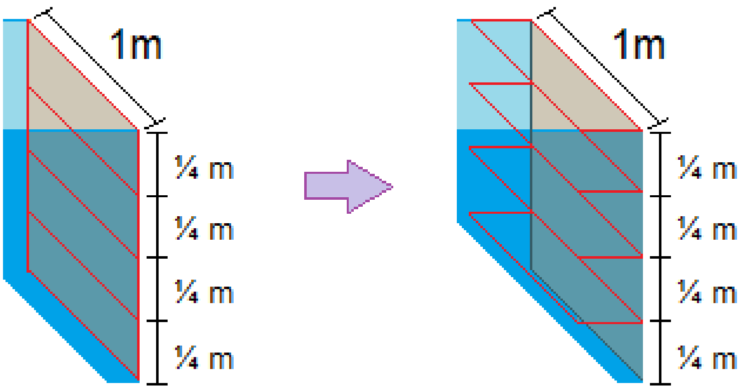
Stevin (1548 - 1620) foi um engenheiro, físico e matemático nascido na Bélgica. Em 1585, ele publicou alguns escritos que explicavam de forma elementar e completa o sistema de frações decimais. Por mais que tal sistema já fosse utilizado na China antiga, na Arábia medieval e na Europa do Renascimento, foi apenas após as suas publicações que as frações decimais se tornaram amplamente conhecidas.

O problema resolvido por Stevin envolvia encontrar a força total que a água aplicava sobre um dique. O passo-a-passo do raciocínio utilizado pelo matemático é descrito a seguir, com base em Boyer (1992).

Considere um dique com a forma de um quadrado, de lado unitário, com um dos lados na superfície da água, como na figura a seguir.



Imagine o quadrado dividido em 4 faixas horizontais e suponha que cada faixa sofra uma rotação de 90° em torno de seu lado superior, ficando sujeita ao peso da água situada sobre ela.



A faixa superior fica na superfície e sustenta um volume de água dado por $1\mathrm{m}\times\frac{1}{4}\mathrm{m}\times\frac{0}{4}\mathrm{m}=\frac{0}{16}\mathrm{m}^3$; a segunda fica à profundidade de $\frac{1}{4}\mathrm{m}$ abaixo da superfície e sustenta um volume de água dado por $1\mathrm{m}\times\frac{1}{4}\mathrm{m}\times\frac{1}{4}\mathrm{m}=\frac{1}{16}\mathrm{m}^3$; a terceira faixa fica à $\frac{2}{4}\mathrm{m}$ abaixo da superfície e sustenta um volume de água dado por $1\mathrm{m}\times\frac{1}{4}\mathrm{m}\times\frac{2}{4}\mathrm{m}=\frac{2}{16}\mathrm{m}^3$; e a quarta faixa fica à profundidade de $\frac{3}{4}\mathrm{m}$ abaixo da superfície e sustenta um volume de água dado por $1\mathrm{m}\times\frac{1}{4}\mathrm{m}\times\frac{3}{4}\mathrm{m}=\frac{3}{16}\mathrm{m}^3$. Assim, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{0}{16}\mathrm{m}^3+\frac{1}{16}\mathrm{m}^3+\frac{2}{16}\mathrm{m}^3+\frac{3}{16}\mathrm{m}^3=\frac{6}{16}\mathrm{m}^3.$$

2. Generalize o problema do dique de Stevin para n faixas horizontais:

a) rotacionadas em 90° em torno de seu lado superior

___

___

___

___

___

___

___

___

___

b) rotacionadas em 90° em torno de seu lado inferior

No item a), cada faixa foi movida para uma posição acima da original e, no item b), cada uma foi movida para uma posição abaixo da original. Assim, é de se esperar que a força real da água sobre o dique seja um valor intermediário entre os dois resultados encontrados e que seja encontrado ao fazer o número de faixas aumentarem infinitamente.

A generalização do problema do dique de Stevin permite concluir que o peso total de água sustentado pelo dique – e **qualquer outro valor real** – pode ser aproximado através da soma de infinitas frações. Em 1585, Stevin recomendou que tais frações fossem utilizadas com escalas decimais, ou seja, que fossem da forma $\frac{p}{10^m}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Concluímos, portanto, que todos os números reais admitem uma aproximação por uma representação decimal. Desta forma, sendo r um número real, podemos escrevê-lo como a soma de frações decimais da seguinte forma:

$$r = \pm a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

onde a_0 é um número natural e $0 \leq a_k \leq 9$, para $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$.

3. Determine a expansão decimal dos números abaixo.

a) $8{,}6451$

b) $\frac{1}{3}$

c) $14{,}09\overline{8}$

4. Utilizando expansões decimais, encontre a fração correspondente dos seguintes números:

a) $8{,}42$

b) $4{,}25\overline{25}$

Você percebeu que, quando tratamos de números **racionais**, a expansão decimal representa o número de forma precisa, sem qualquer tipo de erro. Entretanto, quando nos referimos aos números **irracionais**, é possível chegar apenas em uma **aproximação** do seu valor a partir da expansão decimal, visto que não são dízimas periódicas, isto é, sua parte decimal não apresenta um padrão de repetição.

Considere, por exemplo, a aproximação de quatro casas decimais de $\sqrt{2} = 1{,}4142$. A partir daí, pode-se criar uma sequência de expansões racionais que se aproxima de $\sqrt{2}$, como:

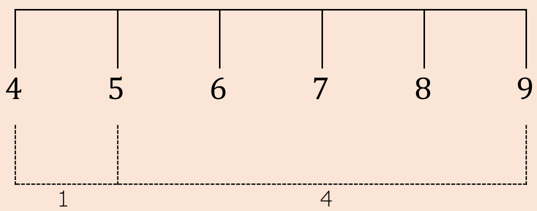
$$\begin{cases} x_1 = 1{,}4 = 1 + \dfrac{4}{10} \\ x_2 = 1{,}41 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} \\ x_3 = 1{,}414 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} \\ x_4 = 1{,}4142 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} + \dfrac{2}{10^4} \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Note que, quanto mais frações são somadas, mais precisa é a aproximação do valor de $\sqrt{2}$. Portanto, é possível aproximar qualquer número real por sequências (x_n) de Cauchy de números racionais.

> Para que (x_n) seja uma sequência de Cauchy, é preciso que seus termos x_m, x_n, para valores suficientemente grandes dos índices m, n se aproximem arbitrariamente uns dos outros. Ou seja, se impõe uma condição sobre os termos da própria sequência.
>
> (AGUILAR; DIAS, 2015, p. 59).

Uma forma de aproximar o valor de uma raiz irracional é através da comparação com outras duas raízes racionais, cujos valores são conhecidos. A seguir, exemplificamos este método para obter o valor de $\sqrt{5}$, com precisão de uma casa decimal.

Exemplo 1: Temos que $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ e, assim, $2 < \sqrt{5} < 3$. Para um bom palpite para o valor de $\sqrt{5}$, vamos analisar a posição do 5 em relação à distância entre 4 e 9:



Note que o número 5 "percorreu" **1 casa** com relação ao percurso total de **5 casas**, do número 4 ao número 9, ou seja, percorreu $\frac{1}{5}$ do percurso. Portanto, um bom palpite para o seu valor é obtido ao somar o valor de partida - $\sqrt{4}$ - com a razão percorrida - $\frac{1}{5}$ -. Assim,

$$\sqrt{4} + \frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{5} = 2{,}2\,.$$

Agora, testamos o valor encontrado:

$$2{,}2^2 = 4{,}84\,.$$

Temos, portanto, que $2{,}2^2 < 5$, ou seja, $2{,}2 < \sqrt{5}$. Seguimos aumentando o palpite inicial: $2{,}21^2 = 4{,}8841$; $2{,}22^2 = 4{,}9284$; $2{,}23^2 = 4{,}9729$ e, por fim,

$$2{,}24^2 = \mathbf{5,0}176$$

Encontramos o valor $2{,}24^2$ que aproxima, em uma casa decimal, o número 5. Portanto, $\sqrt{5} = 2{,}24$, com aproximação de uma casa decimal.

Reflita...

Por que o valor $\sqrt{9} - \frac{4}{5}$ também é um bom palpite para aproximar $\sqrt{5}$?

5. Encontre o valor aproximado das raízes abaixo, com precisão de uma casa decimal.

a) $\sqrt{45}$

b) $\sqrt{7}$

Vimos até então que as expansões decimais descrevem de forma **exata** um número **racional**. Assim, sempre é possível encontrar uma fração correspondente a um número racional.

Por outro lado, para os números irracionais, as expansões decimais são capazes de apenas **aproximar** o número em questão e, por isso, não é possível encontrar uma fração corresponda exatamente a um número irracional.

Porém, assim como aproximamos os valores das raízes irracionais, é possível **aproximar** uma fração correspondente a um número irracional, conforme o esquema a seguir, exemplificado na sequência.

Encontrar uma fração que aproxima um número irracional

1. Obtenha a forma compacta da fração contínua do número:
   i. Destaque a parte inteira
   ii. Subtraia o número escolhido pela sua parte inteira
   iii. Pare se o resultado for zero e continue se for diferente de zero
   iv. Inverta o resultado
   v. Retorne para o item i
   vi. A forma compacta da fração contínua será escrita na forma $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, onde a_k, com $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, são as partes inteiras encontradas nas iterações.
2. Encontre uma fração reduzida do número:
   i. Estabeleça algum a_n da fração contínua como limite
   ii. Inverta o a_n escolhido
   iii. Some ao a_{n-1}
   iv. Inverta o resultado e some ao a_{n-2}
   v. Repita o processo até o somar com a_0
   vi. O resultado é uma fração reduzida do número

Exemplo 2: Encontre uma fração que aproxima $\sqrt{2}$.

1. Obtenha a fração contínua de $\sqrt{2}$:

A parte inteira de $\sqrt{2}$ é:

$$a_0 = 1$$

Subtraindo $\sqrt{2}$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{2} - 1 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

A parte inteira de $\sqrt{2} + 1$ é:

$$a_1 = 2$$

Subtraindo $\sqrt{2} + 1$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Perceba que nas duas inversões foram obtidos os mesmos resultados. Assim, os próximos a_n já ficam determinados, isto é, $a_n = 2$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Logo, a forma compacta da fração contínua de $\sqrt{2}$ é

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots].$$

2. Encontre uma fração reduzida do número:

Estabelecendo a_5 como o limite da aproximação, temos

$$\frac{1}{a_5} = \frac{1}{2}$$

Somando com a_4:

$$\frac{1}{2} + a_4 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Invertendo o resultado e somando com a_3:

$$\frac{2}{5} + a_3 = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5}$$

Invertendo o resultado e somando com a_2:

$$\frac{5}{12} + 2 = \frac{29}{12}$$

Invertendo o resultado e somando com a_1:

$$\frac{12}{29} + 2 = \frac{70}{29}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{29}{70} + 1 = \frac{99}{70}.$$

Assim, a fração $\frac{99}{70}$ aproxima o valor de $\sqrt{2}$.

Vale ressaltar que o esquema apresentado também é válido para obter as frações exatas de números racionais. Para fixar melhor o método apresentado, resolva os exercícios a seguir.

6. Encontre a fração reduzida dos seguintes números racionais:

a) $1,\overline{6}$

b) 2,25

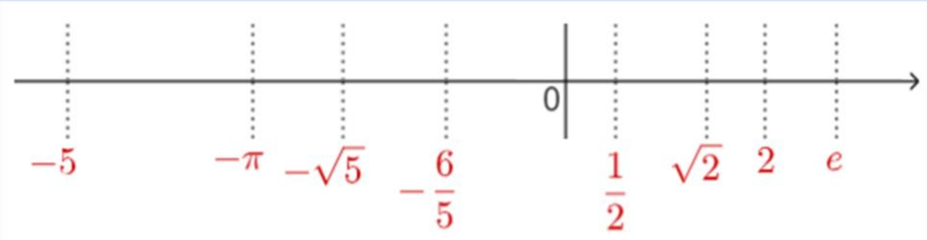
7. Encontre uma fração reduzida que aproxima os seguintes números irracionais:

a) $\sqrt{5}$

b) π

Para o professor:

1.



2.

a) Para n faixas rotacionadas em 90° em torno de seu lado superior, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{0}{n^2}m^3 + \frac{1}{n^2}m^3 + \frac{2}{n^2}m^3 + \cdots + \frac{n-1}{n^2}m^3$$
$$= \frac{1}{n^2}(0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1)m^3$$

Note que o problema se resume a uma progressão aritmética de razão 1. Logo,

$$\frac{1}{n^2}(0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1)m^3 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}m^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}m^3.$$

b) Para n faixas rotacionadas em 90° em torno de seu lado inferior, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{1}{n^2}m^3 + \frac{2}{n^2}m^3 + \frac{3}{n^2}m^3 + \cdots + \frac{n}{n^2}m^3 = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)m^3$$

Novamente devemos resolver a soma de uma progressão aritmética de razão 1:

$$\frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)m^3 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}m^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}m^3.$$

3.

a) $8{,}6451 = 8 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{1}{10^4}$

b) $\frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{3}{10^{\mathrm{n}}} + \cdots$

c) $14{,}09\overline{8} = 14 + \frac{0}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \cdots + \frac{8}{10^{\mathrm{n}}} + \cdots$

4.

a) $8{,}42 = 8 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} = 8 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} = \frac{800}{100} + \frac{40}{100} + \frac{2}{100} = \frac{842}{100} = \frac{421}{50}$

b) $4{,}25\overline{25} = 4 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \frac{5}{10^{2n}} =$

$4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{2n-1}}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}}\right) =$

$4 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 4 + 2 \cdot \frac{10}{99} + 5 \cdot \frac{1}{99} = 4 + \frac{25}{99} = \frac{421}{99}$

5.

a) Note que $\sqrt{36} < \sqrt{45} < \sqrt{49}$, logo $6 < \sqrt{45} < 7$. Um bom palpite para o valor de $\sqrt{45}$ é

$$\sqrt{36} + \frac{45 - 36}{49 - 36} = \sqrt{36} + \frac{9}{13} = 6 + \frac{9}{13} = 6{,}7\,.$$

Testando o valor encontrado:

$$6{,}7^2 = 44{,}89\,.$$

Portanto, $6{,}7 < \sqrt{45}$. Aumentamos o palpite inicial em $0{,}01$:

$$6{,}71^2 = \mathbf{45{,}0}241\,.$$

Logo, $6{,}71$ aproxima o valor de $\sqrt{45}$ com precisão de uma casa decimal.

b) Note que $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$, logo $2 < \sqrt{7} < 3$. Um bom palpite para o valor de $\sqrt{7}$ é

$$\sqrt{9} - \frac{2}{5} = 3 - \frac{2}{5} = 2{,}6\,.$$

Testando o valor encontrado:

$$2{,}6^2 = 6{,}76\,.$$

Portanto, $2{,}6 < \sqrt{7}$. Aumentamos o palpite inicial de $0{,}01$ em $0{,}01$:

$$2{,}61^2 = 6{,}8121$$

$$2{,}62^2 = 6{,}8644$$

$$2{,}63^2 = 6{,}9169$$

$$2{,}64^2 = 6{,}9696$$

$$2{,}65^2 = \mathbf{7{,}0}225$$

Logo, $2{,}65$ aproxima o valor de $\sqrt{7}$ com precisão de uma casa decimal.

6.

a) $1,\overline{6}$

1. A parte inteira de $1,\overline{6}$ é:

$$a_0 = 1$$

Subtraindo $1,\overline{6}$ pela sua parte inteira:

$$1,\overline{6} - 1 = 0,\overline{6} \neq 0$$

O decimal $0,\overline{6}$ pode ser reescrito como:

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \cdots = 6 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = 6 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{9}$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\frac{6}{9}} = \frac{9}{6}$$

A parte inteira de $\frac{9}{6}$ é:

$$a_1 = 1$$

Subtraindo $\frac{9}{6}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{9}{6} - 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

A parte inteira de 2 é:

$$a_2 = 2$$

Subtraindo 2 pela sua parte inteira:

$$2 - 2 = 0$$

Forma compacta da fração contínua de $\mathbf{1,\overline{6}}$:

$$\mathbf{1,\overline{6} = [1; 1, 2]}$$

2. Neste caso, a_2 é o limite da aproximação. Portanto,

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{2}$$

Somando com a_1:

$$\frac{1}{2} + a_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Assim, $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ é a fração reduzida do número $\mathbf{1,\overline{6}}$.

b) 2,25

1. A parte inteira de $2{,}25$ é:

$$a_0 = 2$$

Subtraindo $\mathbf{2{,}25}$ pela sua parte inteira:

$$2{,}25 - 2 = 0{,}25 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{0{,}25} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

A parte inteira de 4 é:

$$a_1 = 4$$

Subtraindo 4 pela sua parte inteira:

$$4 - 4 = 0$$

Forma compacta da fração contínua de $\mathbf{2,25}$:

$$\mathbf{2,25} = [\mathbf{2}; \mathbf{4}]$$

2. Neste caso, a_1 é o limite da aproximação. Portanto,

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{4}$$

Somando com a_0:

$$\frac{1}{4} + a_0 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Assim, $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$ é a fração reduzida do número $\mathbf{2,25}$.

7.

a) $\sqrt{5}$

1. A parte inteira de $\sqrt{5}$ é:

$$a_0 = 2$$

Subtraindo $\sqrt{5}$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{5} - 2 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$$

A parte inteira de $\sqrt{5} + 2$ é:

$$a_1 = 4$$

Subtraindo $\sqrt{5} + 2$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{5} + 2 - 4 = \sqrt{5} - 2$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$$

Perceba que nas duas inversões foram obtidos os mesmos resultados. Assim, os próximos a_n já ficam determinados, isto é, $a_n = 4$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Logo, a forma compacta da fração contínua de $\sqrt{5}$ é

$$\sqrt{\mathbf{5}} = [\mathbf{2}; \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \ldots] .$$

2. Estabelecendo a_5 como o limite da aproximação, temos

$$\frac{1}{a_5} = \frac{1}{4}$$

Somando com a_4:

$$\frac{1}{4} + a_4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

Invertendo o resultado e somando com a_3:

$$\frac{4}{17} + a_3 = \frac{4}{17} + 4 = \frac{72}{17}$$

Invertendo o resultado e somando com a_2:

$$\frac{17}{72} + a_2 = \frac{17}{72} + 4 = \frac{305}{72}$$

Invertendo o resultado e somando com a_1:

$$\frac{72}{305} + a_1 = \frac{72}{305} + 4 = \frac{1292}{305}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{305}{1292} + a_0 = \frac{305}{1292} + 2 = \frac{2889}{1292}$$

Assim, $\frac{\mathbf{2889}}{\mathbf{1292}}$ é uma fração reduzida que aproxima o número $\sqrt{\mathbf{5}}$.

b) π

Obs.: Para este item, é recomendado que o aluno disponha de calculadora científica.

1. Calcularemos até a_5. A parte inteira de π é:

$$a_0 = 3$$

Subtraindo π pela sua parte inteira:

$$\pi - 3 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\pi - 3}$$

A parte inteira de $\frac{1}{\pi-3}$ é:

$$a_1 = 7$$

Subtraindo $\frac{1}{\pi-3}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{1}{\pi - 3} - 7 = \frac{1 - 7(\pi - 3)}{\pi - 3} = \frac{22 - 7\pi}{\pi - 3} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}$$

A parte inteira de $\frac{\pi-3}{22-7\pi}$ é:

$$a_2 = 15$$

Subtraindo $\frac{\pi-3}{22-7\pi}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} - 15 = \frac{\pi - 3 - 15(22 - 7\pi)}{22 - 7\pi} = \frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333}$$

A parte inteira de $\frac{22-7\pi}{106\pi-333}$ é:

$$a_3 = 1$$

Subtraindo $\frac{22-7\pi}{106\pi-333}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} - 1 = \frac{22 - 7\pi - (106\pi - 333)}{106\pi - 333} = \frac{355 - 113\pi}{106\pi - 333} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{106\pi - 333}{355 - 113\pi}$$

A parte inteira de $\frac{106\pi-333}{355-113\pi}$ é:

$$a_4 = 292$$

Subtraindo $\frac{106\pi-333}{355-113\pi}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{106\pi - 333}{355 - 113\pi} - 292 = \frac{106\pi - 333 - 292(355 - 113\pi)}{355 - 113\pi}$$

$$= \frac{33102\pi - 103993}{355 - 113\pi} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{355 - 113\pi}{33102\pi - 103993}$$

A parte inteira de $\frac{355-113\pi}{33102\pi-103993}$ é:

$$a_5 = 1$$

Forma compacta da fração contínua de $\boldsymbol{\pi}$:

$$\boldsymbol{\pi} = [\mathbf{3}; \mathbf{7}, \mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{292}, \mathbf{1}, \dots] .$$

2. Estabelecendo a_5 como o limite da aproximação, temos

$$\frac{1}{a_5} = \frac{1}{1} = 1$$

Somando com a_4:

$$1 + a_4 = 1 + 292 = 293$$

Invertendo o resultado e somando com a_3:

$$\frac{1}{293} + a_3 = \frac{1}{293} + 1 = \frac{294}{293}$$

Invertendo o resultado e somando com a_2:

$$\frac{293}{294} + a_2 = \frac{293}{294} + 15 = \frac{4703}{294}$$

Invertendo o resultado e somando com a_1:

$$\frac{294}{4703} + a_1 = \frac{294}{4703} + 7 = \frac{33215}{4703}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{4703}{33215} + a_0 = \frac{4703}{33215} + 3 = \frac{104348}{33215}$$

Assim, $\boldsymbol{\frac{104348}{33215}}$ é uma fração reduzida que aproxima o número $\boldsymbol{\pi}$.

REFERÊNCIAS

Proposta 1: O SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

AABOE, Asger. Episódios da história antiga da matemática. Tradução de João Bosco Pitombeira. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Título original: Early History of Mathematics.

IFRAH, Georges. História universal dos algarismos. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. 2º v. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Título original: Histoire universalle des chiffres.

RODRIGUES, Aroldo Eduardo Athias. Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. 2013. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências da Educação. Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém.

RUIS, André Valner. Sistemas de numeração e grandezas incomensuráveis. 2014. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto.

Proposta 2: A DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. A Construção dos Números Reais e suas Extensões. 2015. 4º Colóquio da Região Centro-Oeste. Universidade Federal Fluminense.

BOYER, Carl. História da matemática. Tradução de Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012. Título original: A history of mathematics.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Título original: Introduction to the History of Mathematics.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Exercícios sobre números irracionais. Brasil Escola. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-numeros-irracionais.htm>. Acesso em: jul. 2021.

PINTO, Ronald Simões de Mattos; COSTA, Liliana Manuela G. C. da. A irracionalidade e transcendência de certos logaritmos. Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 6, número 1, p. 67-73, 2018.

REFERÊNCIAS

Proposta 3: A COMPLETUDE DOS REAIS

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. A Construção dos Números Reais e suas Extensões. 2015. 4º Colóquio da Região Centro-Oeste. Universidade Federal Fluminense.

Aproximação de raízes quadradas para a segunda casa decimal. Produção de Khan Academy Brasil. 2013. 1 vídeo (7min14s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=img7MMhZnak. Acesso em: jul. 2021.

BOYER, Carl. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. Título original: Historical Topics for the Mathematics Classroom.

CORADO, Jean Ferreira. Números irracionais: uma proposta didática para o ensino médio. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. Universidade Federal do Oeste da Bahia, Barreiras.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos de História da Matemática. 1ª ed. Coleção PROFMAT, SBM, 2012.