



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DO
COMPORTAMENTO DE PLACAS-
SANDUÍCHE**

THIAGO IVO MENEGHELLI

JOINVILLE, SC
2021

THIAGO IVO MENEGHELLI

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DO COMPORTAMENTO DE PLACAS-
SANDUÍCHE**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

JOINVILLE, SC

2021

THIAGO IVO MENEGHELLI

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DO COMPORTAMENTO DE PLACAS-
SANDÚICHE**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC0001) do Curso de Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora:

Orientador:

Prof. Dr. Ricardo de Medeiros
UDESC/CCT

Membros:

Prof.
UDESC/CCT

Prof.
UDESC/CCT

Joinville, 09 de abril de 2021.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer às pessoas que são minha fonte de inspiração e apoio diários: meus pais, Osmar e Maike, que me proporcionaram chegar aonde estou hoje, graças a toda confiança depositada em mim, amor e educação que não foram medidas. Serei eternamente grato.

À minha namorada Camille, que sempre se faz presente nos mais diversos momentos da minha vida e apresenta-se sempre disposta a ajudar no que for necessário. Ao meu amigo e companheiro de apartamento Daniel, que desde o primeiro dia da jornada acadêmica está ao meu lado e ao meu amigo que encara todas as dificuldades de mão dada comigo, Matheus Guerreiro.

Ao Grupo Estudantil de Robótica Móvel, minha primeira experiência com projetos acadêmicos, onde pude desenvolver meus primeiros passos dentro da universidade.

À Equipe Albatroz Aerodesign, não só por ser uma segunda família, mas por abrir um imenso leque de conhecimentos novos, principalmente na área de materiais compósitos, tema desenvolvido neste trabalho.

Agradeço ao meu professor orientador Dr. Ricardo de Medeiros, por toda paciência, confiança e motivação em mim depositados, sempre disposto a me auxiliar nas várias dúvidas e problemas que surgissem durante a elaboração deste trabalho.

Por fim, a todos os meus amigos e familiares que, de forma direta ou indireta, se fizeram presentes não só no desenvolvimento do trabalho, mas durante toda a minha caminhada dentro da universidade.

Muito obrigado!

RESUMO

Os materiais compósitos poliméricos assumem um papel cada vez mais importante em quase todos os segmentos da indústria moderna, principalmente a aeronáutica e marítima. As estruturas do tipo placa-sanduíche são projetadas para terem baixo peso, com rigidez e resistência relativamente altas, sendo constituídos por duas camadas externas de lâminas, também denominadas de faces, com elevadas rigidez e pouco espessas separadas e unidas por um núcleo polimérico de baixa rigidez e de maior espessura. Por conta disso, este trabalho visa apresentar uma análise estática e dinâmica comportamento de placas-sanduíche, utilizando a teoria clássica dos laminados e a teoria de primeira ordem para alguns casos estudados, em que se variam o material do núcleo e o número de lâminas em cada face. Com o auxílio de *softwares* para simulação computacional é possível fazer uma análise linear estática e modal, para obter as frequências naturais, para todos os casos observados e assim, é possível identificar que dentre todas as situações estudadas, a estrutura com núcleo de *Honeycomb* com duas lâminas de carbono em cada face apresenta maior confiabilidade em relação as demais, pois essa configuração apresentou melhor relação entre vibração, deslocamento, fator de segurança e massa.

Palavras-Chave: Placas-sanduíche. Teoria Clássica dos Laminados. Teoria de Primeira Ordem para placas. Vibrações em placas-sanduíche. Simulação computacional.

ABSTRACT

Polymeric composite materials are assuming a much bigger role in almost all departments of modern industry, especially aeronautics and maritime. Sandwich structured composites are designed to be as light as possible and achieve elevated stiffness and resistance. They consist of two outer layers made of very thin and resistant plies, also called faces, which are kept apart and coupled by a polymeric core that is thicker and has low resistance. Thereat, this paper presents a static and dynamic analysis of the behavior of sandwich structured composites, using classic laminates theory and, for some of the studied cases, first order theory, in which the material of the core and the number of plies on each face are varied. Supported by computer simulation softwares, it is possible to perform a modal analysis in order to obtain the natural frequency for all the observed cases, and then identify that the structure with Honeycomb core and two carbon plies on each face presents as the most reliable between them all.

Keywords: Sandwich structured. Classic laminates theory. First order theory. Sandwich structured vibrations. Computer simulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Exemplo de aplicações de materiais compósitos em componentes automobilísticos.....	12
Figura 1.2 – Aeronave da classe Regular de 2019, da Equipe Albatroz Aerodesign.....	13
Figura 1.3 – Manta de fibra de carbono.	13
Figura 1.4 – <i>Honeycomb</i>	14
Figura 2.1 – Classificações dos materiais compósitos.	15
Figura 2.2 – Representação do compósito estrutural do tipo painel sanduíche.....	16
Figura 2.3 – Localização dos materiais usados no Boeing 787 Dreamliner.	16
Figura 3.1 – Carregamentos suportados pelo compósito e pelas fibras e matriz.	18
Figura 3.2 – Tensões presentes nas áreas do compósito, matriz e fibras.	19
Figura 4.1 – Laminado simétrico.....	22
Figura 4.2 – Sistema de eixos de referências da aeronave de 2019.	23
Figura 4.3 – Sistema de eixos de referência para a placa-sanduíche.....	23
Figura 4.4 – Estado Plano de Tensões, Sistema Local de Coordenadas (1-2) e Sistema Global de Coordenadas (x-y).....	27
Figura 4.5 – Esforços de membrana.	29
Figura 4.6 – Distribuição das deformações e tensões.....	30
Figura 4.7 – Esforços de flexão.....	33
Figura 4.8 – Representação das hipóteses.	34
Figura 4.9 – Representação da distribuição de tensão ao longo das camadas.....	39
Figura 5.1 – Estruturas equivalente com aplicações de forças (F) e momentos fletores (M).	43
Figura 5.2 – Análise de “resistência dos materiais” para flexão de placas-sanduíche.....	45
Figura 5.3 – Propriedades geométricas de um painel-sanduíche.	47
Figura 5.4 – Hipótese de distribuição linear e estado antiplano.....	48
Figura 6.1 – Mapeamento do elemento lagrangeano biquadrático e numeração intrínseca dos 9 nós.....	54
Figura 7.1 – Placa do motor construída.....	61
Figura 7.2 – Modelo da placa do motor em elementos finitos.	62
Figura 7.3 – Fluxograma da sequência de estudos.....	62

Figura 7.4 – Modelagem da estrutura sanduiche: (a) com núcleo de <i>Honeycomb</i> e (b) com <i>Divinycell</i>	64
Figura 7.5 – Modelagem da placa com um, duas, três e quatro lâminas, respectivamente.....	64
Figura 7.6 – Modelagem da estrutura com lâminas orientadas a 0° na esquerda e 45° na direita.	65
Figura 8.1 – Gráfico da análise de convergência de malha.	66
Figura 8.2 – Malha para simulação computacional.....	67
Figura 8.3 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso núcleo de <i>Honeycomb</i>	68
Figura 8.4 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso núcleo de <i>Divinycell</i>	68
Figura 8.5 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso com três lâminas.....	70
Figura 8.6 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso com quatro lâminas.....	70
Figura 8.7 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso com lâminas dispostas em $[0/45]_T$	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Notações de resistência para as direções principais.	40
Tabela 5.1 – Modos de falha em placas-sanduíche.	44
Tabela 7.1 – Propriedades da fibra de carbono e do <i>Honeycomb</i>	63
Tabela 7.2 – Propriedades do Divinycell.	63
Tabela 8.1 – Resultado da convergência de malha.	66
Tabela 8.2 – Resultados estáticos para diferentes materiais do núcleo.	67
Tabela 8.3 – Resultados dinâmicos para diferentes materiais do núcleo.	69
Tabela 8.4 – Resultados estáticos para diferentes quantidades de lâminas.	69
Tabela 8.5 – Resultados dinâmicos para diferentes quantidades de lâminas.	71
Tabela 8.6 – Resultados estáticos para a situação com uma das camadas de lâminas a 45° ...	71
Tabela 8.7 – Resultados para a situação com uma das camadas de lâminas a 45°.....	72

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
1.1	OBJETIVO	14
2	MATERIAIS COMPÓSITOS	15
3	ANÁLISE MICROMECAÂNICA	17
3.1	MÓDULO DE ELASTICIDADE NA DIREÇÃO LONGITUDINAL	18
3.2	MÓDULO DE ELASTICIDADE NA DIREÇÃO TRANSVERSAL.....	19
3.3	MÓDULO DE ELASTICIDADE CISALHANTE.....	20
3.4	COEFICIENTE DE POISSON.....	21
4	ANÁLISE MACROMECAÂNICA.....	22
4.1	SISTEMA DE EIXO DE REFERÊNCIA.....	23
4.2	TEORIA CLÁSSICA DOS LAMINADOS (TCL)	24
4.2.1	Comportamento em Membrana	29
4.2.2	Comportamento em Flexão.....	32
4.3	RELAÇÃO TENSÃO X DEFORMAÇÃO	36
4.3.1	Em materiais elástico-lineares	36
4.3.2	Tensão x deformação nas lâminas.....	37
4.4	CRITÉRIOS DE FALHA	40
4.4.1	Teoria da Tensão Máxima	40
4.4.2	Teoria de Hill.....	41
5	COMPORTAMENTO DAS ESTRUTURAS PLACAS-SANDUÍCHE	43
5.1	MODOS DE FALHA	43
5.2	FLEXÃO EM PLACAS-SANDUÍCHE	45
5.3	TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM	47
6	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	53
6.1	FLEXÃO ESTÁTICA	53
6.2	CARREGAMENTOS DINÂMICOS	57
6.3	VIBRAÇÕES EM PLACAS-SANDUÍCHE	58
7	MATERIAIS E MÉTODOS	61

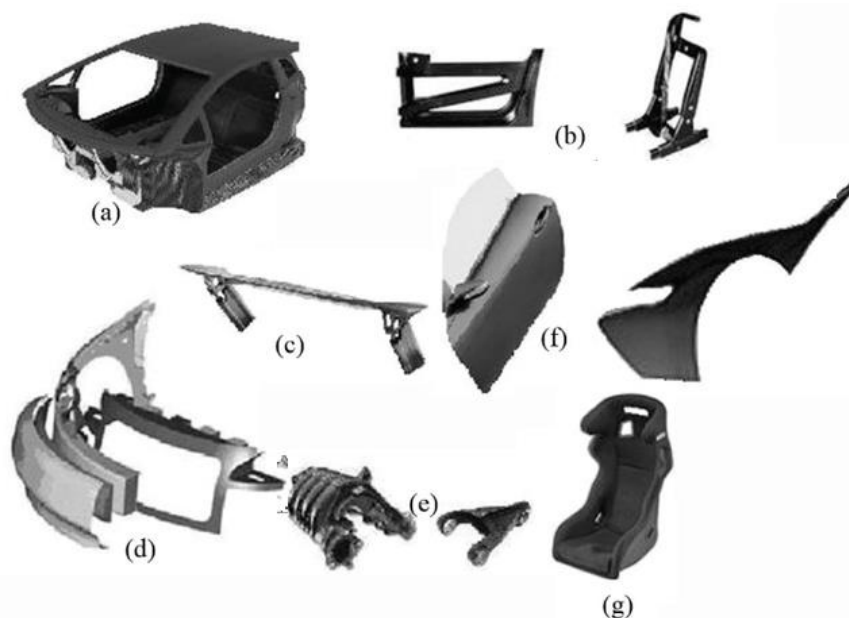
7.1 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	63
7.2 CASO 1: MATERIAL DO NÚCLEO	64
7.3 CASO 2: NÚMERO DE LÂMINAS	64
7.4 CASO 3: DIREÇÃO DAS LÂMINAS	65
8 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	66
8.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE MALHA.....	66
8.2 CASO 1: MATERIAL DO NÚCLEO	67
8.2.1 Análise Estática	67
8.2.2 Análise Dinâmica	68
8.3 CASO 2: NÚMERO DE LÂMINAS	69
8.3.1 Análise Estática	69
8.3.2 Análise Dinâmica	70
8.4 CASO 3:DIREÇÃO DAS LÂMINAS	71
8.4.1 Análise Estática	71
8.4.2 Análise Dinâmica	72
9 CONCLUSÕES.....	73
9.1 TRABALHOS FUTUROS	73
10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	75

1 INTRODUÇÃO

O advento dos materiais compósitos ocorreu na metade do século XX, com os primeiros projetos de polímeros reforçados com fibra de vidro, em que passaram a ser reconhecidos como uma classe específica de materiais.

Desde então, o uso dessa classe de materiais vem crescendo, sendo encontrados em diversos tipos de aplicações e segmentos de indústrias modernas, como a automobilística, aeronáutica, marítima, entre outras. Na Figura 1.1 é possível observar alguns exemplos de componentes automotivos fabricados com materiais compósitos poliméricos. Nas Figuras 1(a) e (b), tem-se o chassi e a célula habitáculo para passageiros feitos de compósito polimérico com fibra de carbono de uma Porsche Carrera. Na Figura 1(c) é visto o aerofólio de uma Bugatti Veyron, na Figura 1(d) e (e) tem-se componentes feitos de fibra de vidro, como suportes de fixação, sistema de amortecimento de impactos e para-choques. Já na Figura 1(f) observa-se uma porta e um para-lamas de matriz polimérica reforçada com fibra de carbono e, por fim, na Figura 1(g) apresenta um assento esportivo fabricado em aramida.

Figura 1.1 – Exemplo de aplicações de materiais compósitos em componentes automobilísticos.



Fonte: Adaptado: Gutiérrez *et al*, 2014.

Além do segmento industrial, os materiais compósitos são aplicados em diversas competições estudantis que são realizadas todos os anos pela Sociedade de Engenheiros de Mobilidade (SAE Brasil) e reúnem alunos de diversas faculdades do Brasil.

Uma dessas competições é o Aerodesign, cujo objetivo é o projeto e a construção de aeronaves rádio controladas cada vez mais leves e que apresentem um fator estrutural alto. Por conta disso, essas aeronaves possuem quase 100% dos seus componentes fabricados por materiais compósitos, como mostra a Figura 1.2, que apresenta o avião da classe Regular de 2019 da Equipe Albatroz Aerodesign.

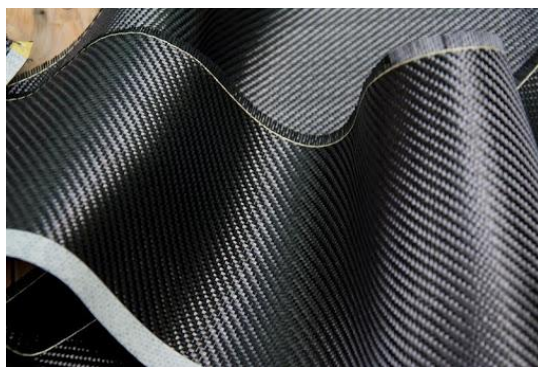
Figura 1.2 – Aeronave da classe Regular de 2019, da Equipe Albatroz Aerodesign.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

A partir da Figura 1.2 é possível observar que o conjunto motopropulsor é preso ao avião através de uma placa do tipo sanduíche, fixada na fuselagem do mesmo, suportando os esforços causados pelo motor. Essa placa-sanduíche é constituída por duas lâminas de fibra de carbono em cada face, como na Figura 1.3, e possui núcleo polimérico do material *Honeycomb*, conforme a Figura 1.4.

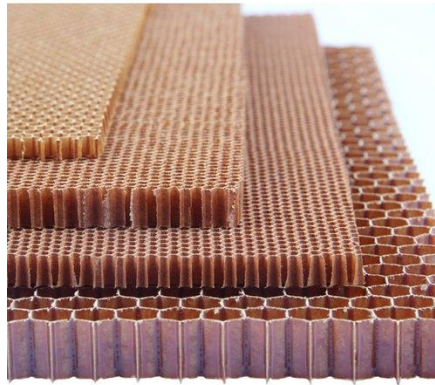
Figura 1.3 – Manta de fibra de carbono.



Fonte: Fibra de Carbono Tecido Manta para Laminação. Disponível em: <<http://www.liderborrachas.com.br/fibra-de-carbono-tecido-manta-para-laminacao>>.

Disponível em: <

Figura 1.4 – Honeycomb.



Fonte: Honeycomb. Disponível em: < <https://www.indiamart.com/proddetail/aramid-honeycomb-core-22504745173.html>>.

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é realizar uma análise computacional do comportamento estático e dinâmico de placas-sanduíche fabricadas de fibra de carbono e núcleo de *Honeycomb*. Para isso, apresenta-se a introdução aos materiais compósitos e as teorias que regem esse tipo de estrutura. Então, realiza-se a análise de diferentes casos para essa estrutura, variando o material do núcleo, a quantidade de lâminas de fibra de carbono e a direção das lâminas, com o auxílio do *software* de elementos finitos, Altair Hyperworks®. Por fim, apresenta-se os resultados das análises modais para obtenção das frequências naturais de cada caso para possíveis comparações afim de avaliar as potencialidades e limitações da utilização desses materiais para a estrutura analisada.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS

Segundo Tita (2006), os materiais compósitos são usados a fim de obter os melhores arranjos de propriedades mecânicas através da combinação de dois ou mais materiais diferentes. “Um compósito pode ser considerado como qualquer material multifásico que exibe uma proporção significativa das propriedades de ambas as fases constituintes, de modo que é obtida a melhor combinação de propriedades” (CALLISTER, 2018). Esse processo é conhecido como o princípio da ação combinada.

Há uma diversidade de materiais compósitos, sendo possível classificá-los como compósitos reforçados por partículas, compósitos reforçados por fibras, compósitos estruturais e nanocompósitos, que podem ser vistos na Figura 2.1, junto com suas subdivisões.

Figura 2.1 – Classificações dos materiais compósitos.

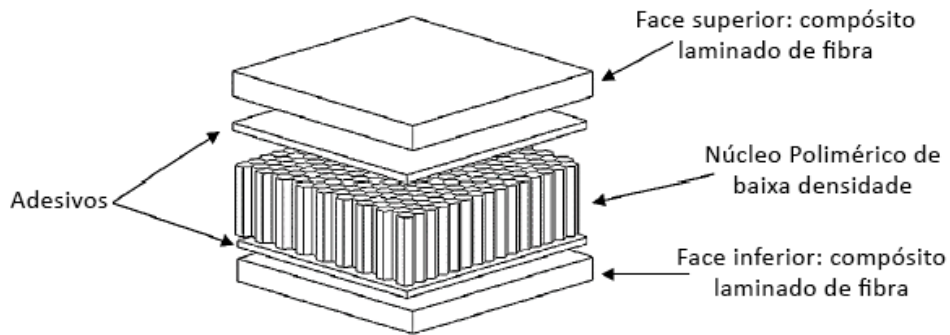


Fonte: Callister, 2018.

O objeto de estudo desse trabalho, uma placa do tipo sanduíche para fixação do motor de um aeromodelo, é classificado como compósito estrutural do tipo painel ou placa sanduíche, que são projetadas para apresentarem uma boa relação peso vs. rigidez e resistência. A placa consiste em duas lâminas externas, também conhecidas como faces, finas com uma rigidez e resistência relativamente altas, que têm a função de suportar as cargas de flexão aplicadas à estrutura. Essas faces são separadas por um núcleo, ou matriz, de maior espessura, mas com baixa densidade e módulo de elasticidade, que possui algumas funções, como: serve como suporte mantendo as faces unidas; resistente às tensões de cisalhamento transversais,

apresentando uma alta resistência ao cisalhamento e; o núcleo precisa ser espesso o suficiente para prevenir a flambagem da placa. A Figura 2.2 representa esquematicamente uma estrutura do tipo placa-sanduíche.

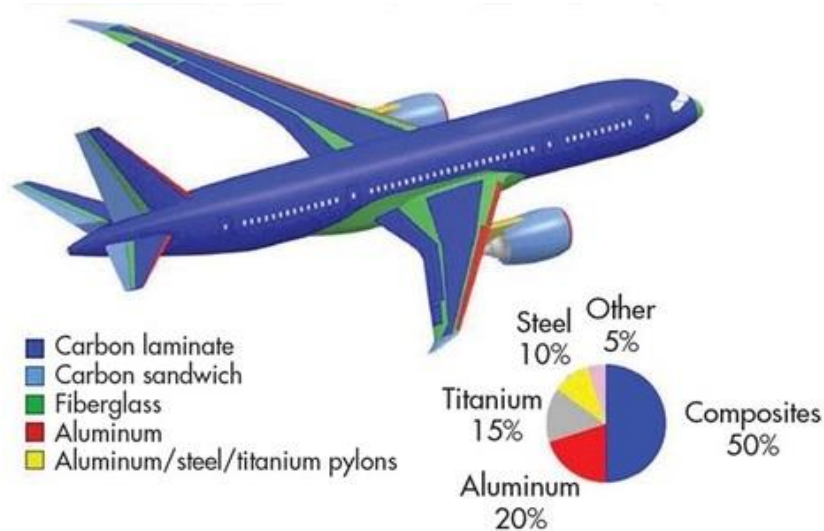
Figura 2.2 – Representação do composto estrutural do tipo painel sanduíche.



Fonte: Dias *et al*, 2016.

As placas sanduíche, por apresentarem alta resistência e rigidez com baixa massa específica, são muito utilizadas em diversas aplicações na construção civil e nas indústrias automotiva, marítima e aeronáutica. Pode-se citar como exemplo de aplicação do segmento aeronáutico o Boeing 787 Dreamliner. Conforme representado na Figura 2.3, os materiais compostos correspondem a 50% do seu peso.

Figura 2.3 – Localização dos materiais usados no Boeing 787 Dreamliner.



Fonte: Boeing 787 Carbon Fiber Reinforced Plastic. Disponível em: <<https://boeing787dreamlinerinterior.blogspot.com/2020/11/boeing-787-carbon-fiber-reinforced.html>>.

3 ANÁLISE MICROMECAÂNICA

A abordagem micromecânica consiste em analisar as propriedades da lâmina, que é constituída por reforço (fibra), matriz e interface fibra-matriz (MENDONÇA, 2005). Segundo Tita (2006), o principal objetivo da Regra das Misturas é a determinação das propriedades mecânicas dos plásticos reforçados. A partir de Cardoso (2003), são realizadas as seguintes hipóteses para determinação das propriedades elásticas dos materiais:

- a matriz e as fibras são consideradas isotrópicas, elásticas, lineares e homogêneas;
- assume-se que as fibras estão perfeitamente alinhadas e espaçadas e;
- não são considerados os defeitos na interface das fibras ou inclusões com a matriz.

Para determinar as propriedades do material, é necessário conhecer a proporção volumétrica e a proporção mássica de cada componente do laminado, como mostram

$$1 = \frac{V_f}{V_c} + \frac{V_m}{V_c} + \frac{V_v}{V_c}, \quad (3.1)$$

$$1 = \frac{M_f}{M_c} + \frac{M_m}{M_c}, \quad (3.2)$$

em que M é a proporção mássica, V a proporção volumétrica e os subíndices f, m, v e c são correspondentes a fibra, matriz, vazio e compósito, respectivamente. As frações de volume e massa para cada constituinte descritas por

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{V_f}{V_c}, \\ v_m &= \frac{V_m}{V_c}, \\ v_v &= \frac{V_v}{V_c}, \\ m_f &= \frac{M_f}{M_c}, \\ m_m &= \frac{M_m}{M_c}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Onde v é a fração de volume e m é a fração de massa.

Para relacionar as frações de volume com as de massa, é preciso determinar a densidade do compósito ρ_c , como

$$\rho_c = \frac{M_c}{V_c} = \frac{M_f + M_m}{V_c} = \frac{\rho_f V_f + \rho_m V_m}{V_c} = \rho_f v_f + \rho_m v_m. \quad (3.4)$$

A partir da obtenção das frações é possível, então, encontrar as propriedades mecânicas da fibra e da matriz.

3.1 MÓDULO DE ELASTICIDADE NA DIREÇÃO LONGITUDINAL

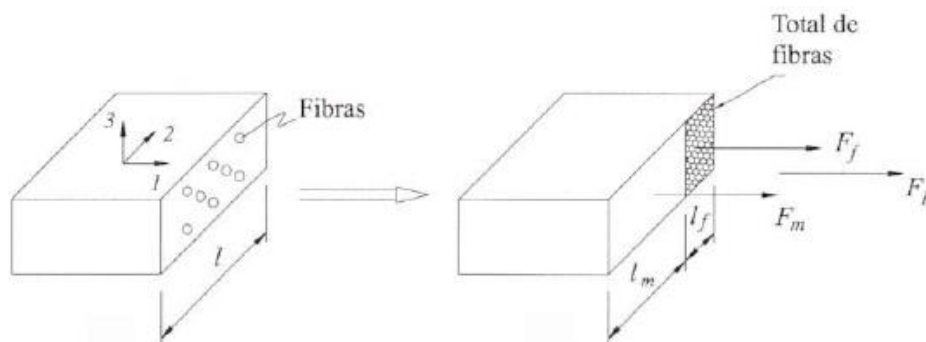
Segundo Mendonça (2005), para o equacionamento do problema assume-se que as fibras têm propriedades mecânicas e diâmetro uniformes, são contínuas, perfeitamente paralelas e perfeitamente aderidas à resina.

Ao se aplicar um carregamento F_1 na direção longitudinal, uma parcela será suportada pelas fibras, F_f , e outra parte pela matriz, F_m , como mostram a Figura 3.1 e definida por

$$F_1 = F_f + F_m. \quad (3.1.1)$$

As deformações ε das fibras, da matriz e do compósito são iguais, $\varepsilon_c = \varepsilon_f = \varepsilon_m$.

Figura 3.1 – Carregamentos suportados pelo compósito e pelas fibras e matriz.



Fonte: Christoff, 2012.

A Equação (3.1.1) pode ser escrita relacionando as respectivas tensões e áreas de cada aplicação do carregamento, resultando em

$$F_1 = \sigma_1 A_1 = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m, \quad (3.1.2)$$

onde σ é a tensão e A é a área de cada carregamento atuante.

Dividindo-se a Eq. (3.1.2) por A_1 , tem-se:

$$\sigma_1 = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m. \quad (3.1.3)$$

Como as deformações serão as mesmas para todos os constituintes da lâmina, (3.1.3) pode ser escrita em função da diferencial da deformação, obtendo

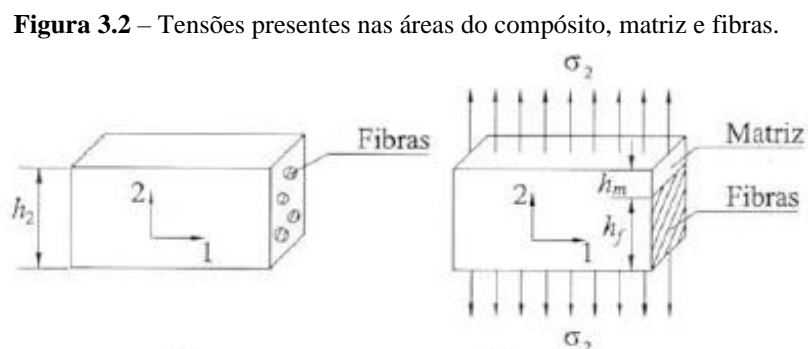
$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma_f}{d\varepsilon} v_f + \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon} v_m. \quad (3.1.4)$$

Com isso, é possível encontrar o módulo de elasticidade longitudinal, por

$$E_1 = E_f v_f + E_m v_m. \quad (3.1.5)$$

3.2 MÓDULO DE ELASTICIDADE NA DIREÇÃO TRANSVERSAL

Agora, assume-se o carregamento perpendicular à fibra, como pode ser visto na Figura 3.2.



Fonte: Christoff, 2012.

Cada camada de fibra e matriz é perpendicular ao carregamento e apresenta a mesma área de atuação deste. Desse modo, cada camada suporta a mesma carga, resultando em tensões

iguais para o compósito, fibra e matriz, $\sigma_c = \sigma_f = \sigma_m$. Assim, o deslocamento δ_2 total do compósito será igual à soma dos deslocamentos da matriz e da fibra

$$\delta_2 = \delta_f + \delta_m. \quad (3.2.1)$$

Sabendo que $\delta = \varepsilon \cdot h$, que as deformações são ε_2 , ε_f e ε_m e que as espessuras são h_2 , h_f e h_m , tem-se

Sabendo que as deformações no compósito são ε_2 , ε_f e ε_m e que suas espessuras são h_2 , h_f e h_m , tem-se $\delta = \varepsilon \cdot h$. Assim, substituindo na equação (3.2.1), chega-se a

$$\varepsilon_2 h_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m. \quad (3.2.2)$$

Dividindo a Equação (3.2.2) por h_2 , encontra-se:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f v_f + \varepsilon_m v_m. \quad (3.2.3)$$

Considerando que a fibra e a matriz se comportam de forma linear, obtém-se

$$\frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_f}{E_f} v_f + \frac{\sigma_m}{E_m} v_m. \quad (3.2.4)$$

Por fim, como as tensões são iguais, o módulo de elasticidade transversal E é determinado

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f v_f + E_m v_m}. \quad (3.2.5)$$

3.3 MÓDULO DE ELASTICIDADE CISALHANTE

De forma semelhante à utilizada para determinar o módulo de elasticidade transversal, o módulo de elasticidade cisalhante G é definido por

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f \nu_f + G_m \nu_m}. \quad (3.3.1)$$

3.4 COEFICIENTE DE POISSON

Como visto na Figura 3.1, quando a carga é aplicada na direção longitudinal, consideram-se as deformações iguais. Já na direção transversal, as deformações causadas por σ_1 são diferentes e são definidas por

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_1 \quad e \quad \varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_1 \quad (3.4.1)$$

em que ν_m e ν_f são os coeficientes de Poisson da matriz e da fibra, respectivamente.

Para um comprimento L na direção transversal, os comprimentos correspondentes da fibra e da matriz serão L_f e L_m , respectivamente. Desse modo, as deformações transversais serão

$$\varepsilon_{2m} = \frac{\Delta_{2m}}{L_m} = -\nu_m \varepsilon_1 \quad e \quad \varepsilon_{2f} = \frac{\Delta_{2f}}{L_f} = -\nu_f \varepsilon_1, \quad (3.4.2)$$

onde Δ_{2m} e Δ_{2f} são as variações de comprimento.

Para a variação de comprimento total, a Equação (3.4.2) torna-se

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta_{2m} + \Delta_{2f}}{L} = \frac{-\nu_m \varepsilon_1 L_m - \nu_f \varepsilon_1 L_f}{L} \quad (3.4.3)$$

Sabendo que por definição $\nu_{12} = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$ e evidenciando ε_1 , tem-se o coeficiente de Poisson definido por

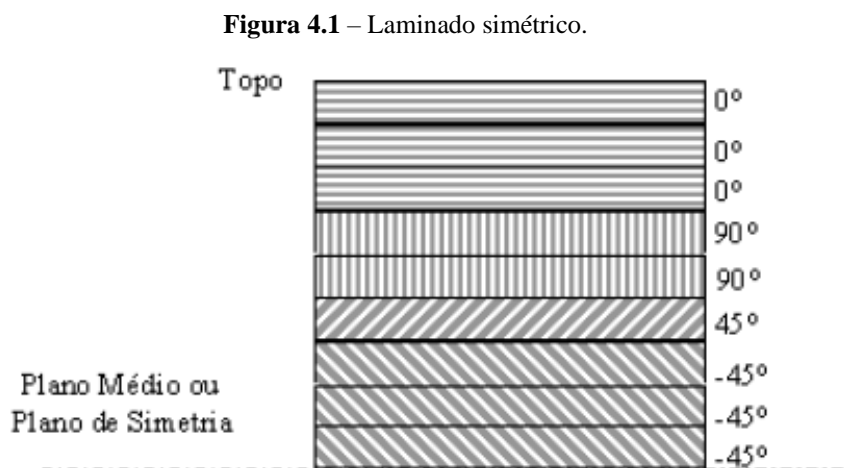
$$\nu_{12} = V_m \nu_m + V_f \nu_f \quad (3.4.4)$$

4 ANÁLISE MACROMECAÂNICA

Para a análise Macromecânica, é considerado o comportamento mecânico da estrutura, que é constituída por sequências de lâminas empilhadas. As lâminas empilhadas em diferentes direções constituem um laminado multidirecional, com resistência e rigidez que se comportam em função dos carregamentos nele aplicados. Segundo Tita (2006), para identificar a disposição das lâminas é utilizado o SLC (*Standard Laminate Code*), em que são especificados:

- Orientação de uma camada específica com relação aos eixos de referência;
- Número de camadas para cada orientação;
- A sequência de empilhamento para formar o laminado.

O laminado apresentado na Figura 4.1 é dito como simétrico, pois o plano médio, que divide a espessura ao meio, é espelhado. Por conta disso, ele pode ser representado por $[0_3/90_2/45/-45_3/-45_3/45/90_2/0_3]_T$ ou $[0_3/90_2/45/-45_3]_S$, em que os subíndices que acompanham os ângulos de orientação da fibra de cada camada representam quantas camadas estão associadas aos seus ângulos respectivos. Já o subíndice *S* indica simetria e o subíndice *T* que todas as camadas foram representadas.



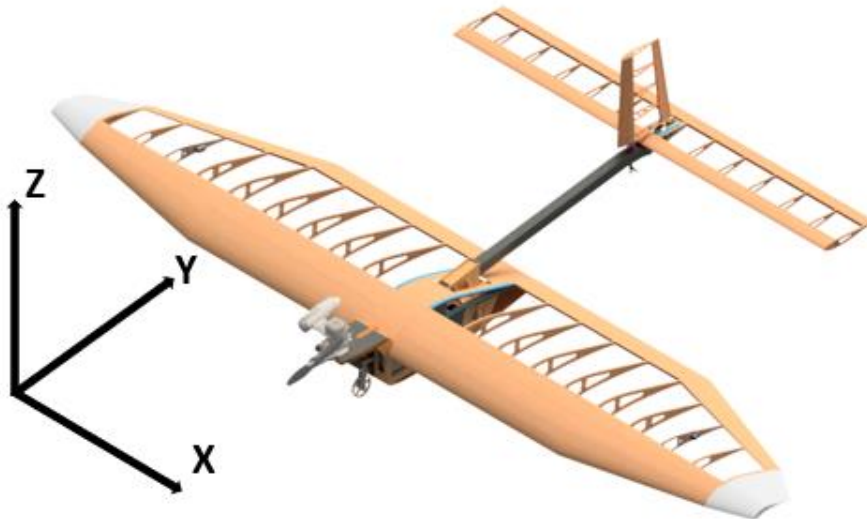
Fonte: Tita, 2006.

Além dos simétricos, os laminados também podem ser antissimétricos, em que as lâminas estão dispostas de uma maneira em que haja uma antissimetria geométrica em relação ao plano médio, ou assimétricos, em que a disposição das lâminas é totalmente aleatória.

4.1 SISTEMA DE EIXO DE REFERÊNCIA

O sistema de referência dos eixos adotado é o comumente utilizado para os projetos de aeronaves dentro da Equipe Albatroz, conforme representada na Figura 4.1.

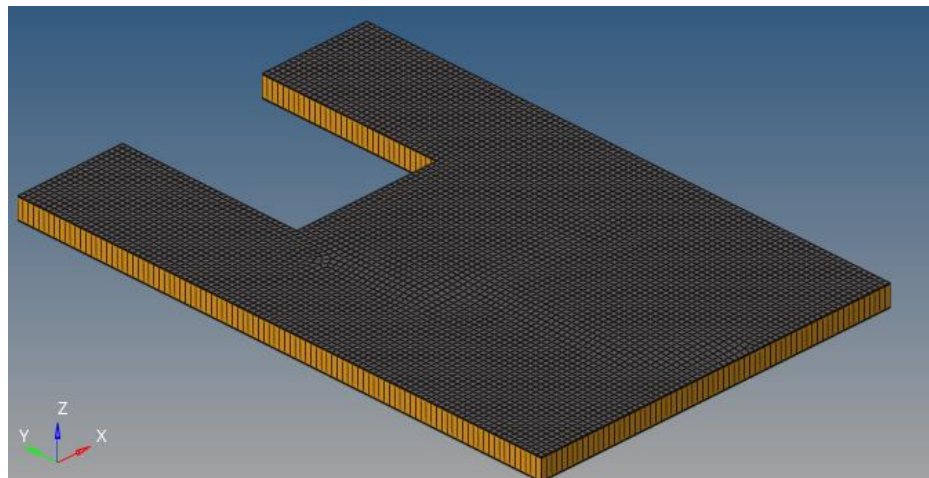
Figura 4.2 – Sistema de eixos de referências da aeronave de 2019.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Desse modo, o desenvolvimento das teorias e o modelo por elementos finitos seguirá a mesma orientação, como mostra a Figura 4.2.

Figura 4.3 – Sistema de eixos de referência para a placa-sanduíche.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

4.2 TEORIA CLÁSSICA DOS LAMINADOS (TCL)

Para determinar a rigidez de um laminado com lâminas em diferentes ângulos de orientação, Tita (2006) e Pereira (2005) indicam que seja usada a TCL. Essa teoria se baseia na Teoria da Elasticidade, em que um sólido (meio contínuo) com carregamentos externos produz tensões internas para compensar tais carregamentos.

Portanto, qualquer ponto dentro do sólido apresentará o seu estado de tensões como um Tensor de Tensões

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.2.1)$$

onde τ é a tensão cisalhante.

De acordo com as equações de equilíbrio

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases}, \quad (4.2.2)$$

o Tensor de Tensões será simétrico e poderá ser reduzido, através da notação de Voigt, ao vetor

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \text{ ou } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \text{ ou } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Isto também ocorre com o Tensor de Deformações

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.2.4)$$

onde γ é a deformação angular e que a simetria permite reduzir ao vetor

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \text{ ou } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \text{ ou } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Em materiais anisotrópicos as tensões e deformações podem ser relacionadas através da Lei de Hooke Generalizada

$$\{\sigma_i\} = [C_{ij}]\{\varepsilon_j\}, \quad (4.2.6)$$

em que C_{ij} é a relação constitutiva. Representando em forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}. \quad (4.2.7)$$

O Tensor Constitutivo C representa a rigidez do material sólido e é simétrico ($C_{ij} = C_{ji}$), podendo ser reduzido a 21 componentes. O material utilizado no presente trabalho é um compósito polimérico, caracterizado como um material ortotrópico, possuindo três planos de simetria ortogonais distintos entre si. Além disso, os eixos de ortotropia impedem que tensões normais (σ) produzam torções angulares (γ) e tensões de cisalhamento (τ) produzam deformações longitudinais (ε), fazendo com que a matriz C possua apenas 9 componentes

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Como o tensor C é a representação da rigidez, C^{-1} representa a flexibilidade do material, sendo caracterizado pelo Tensor S , na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (4.2.9)$$

Em que cada componente é definido como

$$\begin{aligned} S_{11} &= 1/E_{11}; & S_{21} &= -\nu_{12}/E_{11}; & S_{31} &= -\nu_{13}/E_{11}; \\ S_{12} &= -\nu_{21}/E_{22}; & S_{22} &= 1/E_{22}; & S_{32} &= -\nu_{23}/E_{22}; \\ S_{13} &= -\nu_{13}/E_{33}; & S_{23} &= -\nu_{32}/E_{33}; & S_{33} &= 1/E_{33}; \\ S_{44} &= 1/G_{23}; & S_{55} &= 1/G_{31}; & S_{66} &= 1/G_{12}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

A partir da Equação (4.2.10) é possível identificar a simetria do tensor S, mostrada em

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}. \quad (4.2.11)$$

A matriz de rigidez para compósitos poliméricos, chamada de Q é definida como

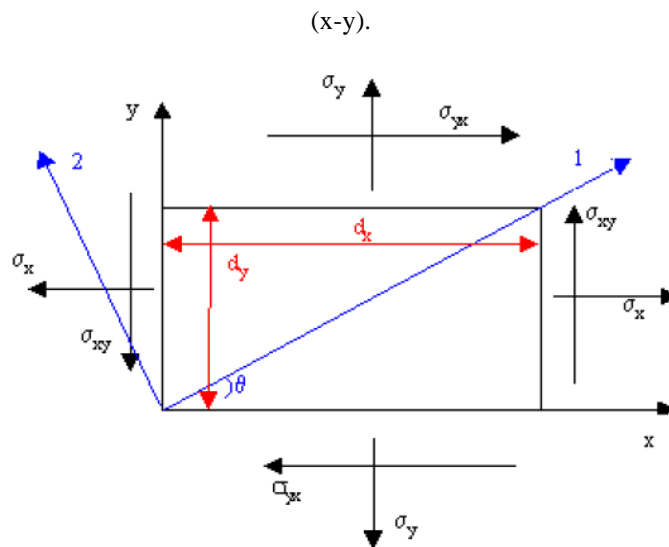
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}, \quad (4.2.12)$$

obtida a partir da inversa da matriz de flexibilidade. Cada componente é definido por

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}; & Q_{12} &= \frac{E_{11}(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} = \frac{E_{22}(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})}{\Delta}; \\
Q_{22} &= \frac{E_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13})}{\Delta}; & Q_{13} &= \frac{E_{11}(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} = \frac{E_{22}(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{\Delta}; \\
Q_{33} &= \frac{E_{33}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}; & Q_{23} &= \frac{E_{22}(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} = \frac{E_{33}(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})}{\Delta}; \\
Q_{44} &= G_{23}; \\
Q_{55} &= G_{13}; & \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}; \\
Q_{66} &= G_{12}.
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Considerando que a lâmina de polímero reforçado seja transversalmente isotrópica e que sua espessura seja muito fina, tem-se que $E_{22} = E_{33}$, $G_{13} = G_{23}$ e $\nu_{12} = \nu_{13}$. Desse modo, o estado plano de tensões pode ser visto na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Estado Plano de Tensões, Sistema Local de Coordenadas (1-2) e Sistema Global de Coordenadas



Fonte: Tita, 2006.

A Lei de Hooke pode ser escrita em função da Matriz de Rigidez Reduzida definida por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}, \tag{4.2.14}$$

onde cada componente é definido por

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_{11}^2}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}; \\
Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_{11}E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}; \\
Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_{11}E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}; \\
Q_{66} &= G_{12}; \\
\frac{\nu_{12}}{E_{11}} &= \frac{\nu_{21}}{E_{22}}.
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Considerando-se que o eixo 1 seja paralelo à direção das fibras e o eixo 2 perpendicular em relação às mesmas, utiliza-se uma matriz de transformação T, definida por

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix}, \tag{4.2.16}$$

quando o carregamento não está alinhado com as fibras, como é possível ver em

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{Local} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{Local}. \tag{4.2.17}$$

De forma análoga, as relações de deformação podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6/2 \end{bmatrix}_{Local} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}_{Global} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}_{Global} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6/2 \end{bmatrix}_{Local}. \tag{4.2.18}$$

Substituindo a Equação (4.2.17) e a Equação (4.2.18) na Equação (4.2.14) obtém-se a equação constitutiva no sistema global x-y em função da Matriz de Rigidez Reduzida Transformada, como

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{Global} \quad \text{ou} \tag{4.2.19}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} [T].$$

Cada componente da matriz de rigidez $[\bar{Q}]$ definido por,

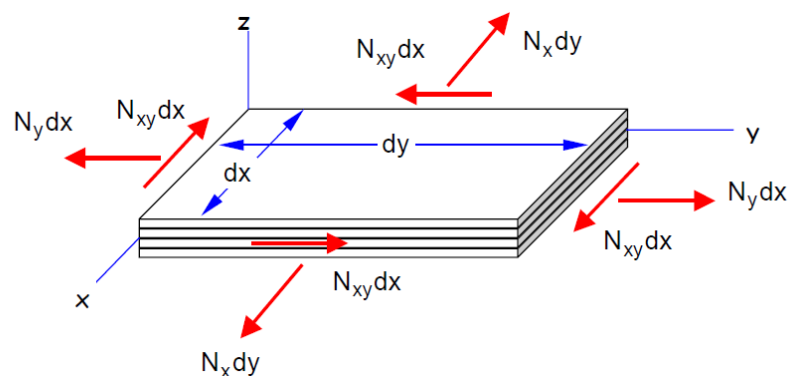
$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2m^2n^2(Q_{12} + 2Q_{66}) + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})n^2m^2 + Q_{12}(n^4 + m^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12})nm^3 + (Q_{12} - Q_{22})n^3m - 2mn(m^2 - n^2)Q_{66} \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12})n^3m + (Q_{12} - Q_{22})nm^3 + 2mn(m^2 - n^2)Q_{66} \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{66}(n^4 + m^4), \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

sendo possível demonstrar que todos sofrerão influência da orientação das fibras, variando as propriedades elásticas e, conseqüentemente, a matriz de rigidez da lâmina e a rigidez do laminado.

4.2.1 Comportamento em Membrana

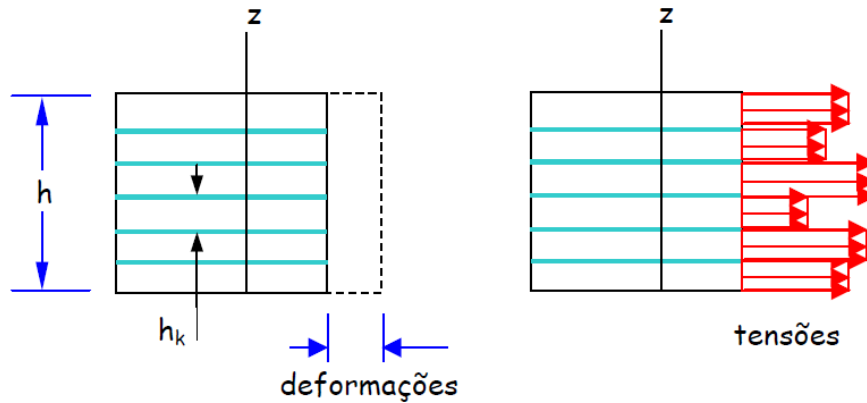
Considerando agora um laminado com espessura h com n lâminas, de espessura h_k cada. No plano do laminado atuam esforços internos, como forças normais por unidade de comprimento (N_x e N_y) e forças cortantes por unidade de comprimento transversal (N_{xy} e N_{yx}), como pode ser observado na Figura 4.5.

Figura 4.5 – Esforços de membrana.



Supondo colagem perfeita entre as lâminas e a diferença de rigidez de cada lâmina, as distribuições de tensão e deformação comportam-se como mostra a Figura 4.6.

Figura 4.6 – Distribuição das deformações e tensões.



Fonte: Pereira, 2005.

A partir do balanceamento das forças atuantes em uma seção transversal considerando equilíbrio estático, são determinados os esforços, por

$$\begin{aligned}
 N_x * 1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x (dz * 1) = \sum_{k=1}^n \sigma_x^k h_k; \\
 N_y * 1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y (dz * 1) = \sum_{k=1}^n \sigma_y^k h_k; \\
 N_{xy} * 1 &= N_{yx} * 1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} (dz * 1) = \sum_{k=1}^n \tau_{xy}^k h_k.
 \end{aligned} \tag{4.2.1.1}$$

Considerando que u e v são os deslocamentos na direção x e y , respectivamente, as deformações normais e angulares são representadas por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{4.2.1.2}$$

Os esforços N_x , N_y e N_{xy} são determinados em função das constantes elásticas de cada lâmina, de acordo com

$$\begin{aligned}
 N_x &= \sum_{k=1}^n \{ \bar{Q}_{11}^k \varepsilon_x + \bar{Q}_{12}^k \varepsilon_y + \bar{Q}_{16}^k \gamma_{xy} \} h_k; \\
 N_y &= \sum_{k=1}^n \{ \bar{Q}_{21}^k \varepsilon_x + \bar{Q}_{22}^k \varepsilon_y + \bar{Q}_{26}^k \gamma_{xy} \} h_k; \\
 N_{xy} &= \sum_{k=1}^n \{ \bar{Q}_{61}^k \varepsilon_x + \bar{Q}_{62}^k \varepsilon_y + \bar{Q}_{66}^k \gamma_{xy} \} h_k,
 \end{aligned} \tag{4.2.1.3}$$

que podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 N_x &= A_{11} \varepsilon_x + A_{12} \varepsilon_y + A_{16} \gamma_{xy}; \\
 N_y &= A_{21} \varepsilon_x + A_{22} \varepsilon_y + A_{26} \gamma_{xy}; \\
 N_{xy} &= A_{61} \varepsilon_x + A_{62} \varepsilon_y + A_{66} \gamma_{xy}.
 \end{aligned} \tag{4.2.1.4}$$

Sendo as componentes especificadas por

$$\begin{aligned}
 A_{1j} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{1j}^k h_k; \\
 A_{2j} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{2j}^k h_k; \\
 A_{6j} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{6j}^k h_k.
 \end{aligned} \tag{4.2.1.5}$$

Na forma matricial, os esforços são representados por

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{4.2.1.6}$$

Considerando o laminado homogêneo, os esforços podem ser usados para determinar as tensões globais, a partir de

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{N_x}{h}; \\ \sigma_y &= \frac{N_y}{h}; \\ \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{h},\end{aligned}\tag{4.2.1.7}$$

e representado na forma matricial por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}.\tag{4.2.1.8}$$

Através da matriz inversa da Equação (4.2.1.8), é possível obter as constantes elásticas homogeneizadas do laminado, representadas por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\bar{E}_x & -\bar{\nu}_{yx}/\bar{E}_y & \bar{\eta}_{xy}/\bar{G}_{xy} \\ -\bar{\nu}_{xy}/\bar{E}_x & 1/\bar{E}_y & \bar{\mu}_{xy}/\bar{G}_{xy} \\ \bar{\eta}_x/\bar{E}_x & \bar{\mu}_y/\bar{E}_y & 1/\bar{G}_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix},\tag{4.2.1.9}$$

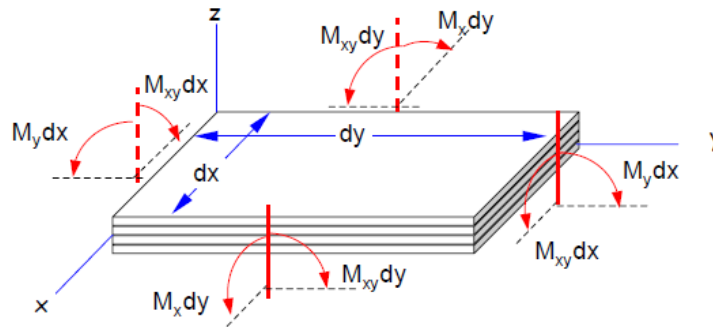
em que η e μ são os termos de acoplamento.

Conhecendo o carregamento aplicado no laminado e as constantes elásticas, determinam-se as deformações do material.

4.2.2 Comportamento em Flexão

Para o comportamento em flexão, os esforços internos atuantes são momentos fletor por unidade de comprimento em torno dos eixos x e y (M_x e M_y , respectivamente) e os momentos torçores por unidade de comprimento (M_{xy} e M_{yx}), vistos na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Esforços de flexão.



Fonte: Pereira, 2005.

A partir do balanceamento dos momentos atuantes em uma seção transversal, são determinados os esforços, definidos por

$$M_x * 1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x (dz * 1) z;$$

$$M_y * 1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y (dz * 1) z; \quad (4.2.2.1)$$

$$M_{xy} * 1 = M_{yx} * 1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} (dz * 1) z.$$

Considerando a hipótese de que as seções transversais que são planas e perpendiculares à superfície média antes da aplicação do carregamento permanecem planas e perpendiculares após a aplicação do carregamento, de acordo com a Figura 4.8, o deslocamento de um ponto genérico a uma distância z da superfície média é representado por

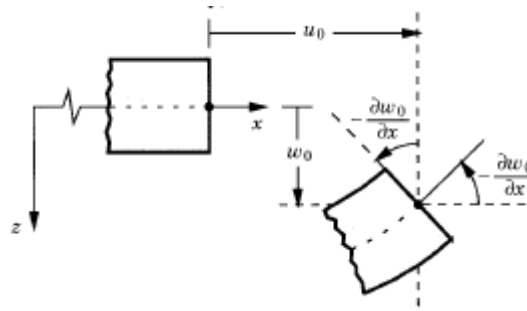
$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x};$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}; \quad (4.2.2.2)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y),$$

sendo as direções x , y e z são representadas pelos deslocamentos da superfície média u_0 , v_0 e w_0 , respectivamente.

Figura 4.8 – Representação das hipóteses.



Fonte: Reddy, 1997.

A partir da Equação (4.2.2.2) obtém-se o estado de deformações, definidos por

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \\ \gamma_{xz} &= 0; \\ \gamma_{yz} &= 0.\end{aligned}\tag{4.2.2.3}$$

Na forma resumida,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy},\end{aligned}\tag{4.2.2.4}$$

em que as deformações ε_x^0 , ε_y^0 e γ_{xy}^0 são as deformações normais e angular da superfície média, e κ_x , κ_y e κ_{xy} são as curvaturas.

Levando em consideração a matriz de comportamento definida pela Equação (4.2.1.8) no sistema de eixos de referência, os momentos são representados como

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{11}^k \varepsilon_x + \bar{Q}_{12}^k \varepsilon_y + \bar{Q}_{16}^k \gamma_{xy}) z dz \right\}\tag{4.2.2.5}$$

E considerando as deformações da Equação (4.2.2.3), tem-se:

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}_{11}^k (z\varepsilon_x^0 + z^2\kappa_x) + \bar{Q}_{12}^k (z\varepsilon_y^0 + z^2\kappa_y) + \bar{Q}_{16}^k (z\gamma_{xy}^0 + z^2\kappa_{xy})] dz \right\}. \quad (4.2.2.6)$$

Se o laminado for simétrico, as integrais do tipo $\int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{1j}^k z dz$ se anulam com as integrais $\int_{-z_k}^{-z_{k-1}} \bar{Q}_{1j}^k z dz$, para as lâminas simétricas com relação a superfície neutra, obtendo:

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \bar{Q}_{11}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \kappa_x + \bar{Q}_{12}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \kappa_y + \bar{Q}_{16}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \kappa_{xy} \right\}. \quad (4.2.2.7)$$

Compactando, tem-se

$$M_x = D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + D_{16}\kappa_{xy}, \quad (4.2.2.8)$$

$$\text{com } D_{1j} = \bar{Q}_{1j}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3}.$$

De forma análoga, os momentos M_y e M_{xy} podem ser obtidos. Na forma matricial, esses momentos são representados por:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (4.2.2.9)$$

Para laminados não simétricos, a simplificação onde as integrais se anulam não é possível. Com isso o comportamento global do laminado pode ser representado por

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (4.2.2.10)$$

ou de forma compacta, como

$$\begin{bmatrix} [N] \\ [M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\varepsilon_0] \\ [\kappa] \end{bmatrix}, \quad (4.2.2.11)$$

onde as componentes de acoplamento B da matriz são representadas por

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2}, \quad (4.2.2.12)$$

demonstrando que os esforços internos do tipo membrana, atuantes no plano médio de um laminado, causam não apenas deformações normais e distorções angulares, mas também esforços de flexão e torção, produzindo as curvaturas κ_x , κ_y e κ_{xy} . Da mesma forma, os esforços internos de flexão resultam em deformações no plano médio, não apenas em curvaturas.

Para laminados simétricos, a matriz B apresenta valor nulo, resultando em não acoplamentos entre as forças normais e cisalhante com os momentos fletores e torsões. Com isso, faz-se evidente que na matriz A as forças resultantes normais e cisalhantes provocarão deformações normais e distorções angulares, assim como na matriz D os momentos fletores e torsões resultarão em esforços de flexão e torção.

4.3 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

4.3.1 Em materiais elástico-lineares

Segundo Mendonça (2005), a relação tensão-deformação de um material elástico-linear pode ser representada pela matriz

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.3.1.1)$$

em que C_{ij} representam os elementos da matriz rigidez do material, σ_i são as tensões normais, τ_{ij} tensões cisalhantes, ε_i deformações normais e γ_{ij} as deformações cisalhantes.

Para um material ortotrópico, a matriz tensão-deformação é simplificada para

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ & C_{22} & C_{23} & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.3.1.2)$$

sim.

apresentando apenas 9 constantes independentes. Tal simplificação se deve ao fato de um material desse tipo apresentar características de tríplice simetria, ou seja, existem dois planos ortogonais de simetria, então necessariamente existirá uma simetria relativa ao terceiro plano ortogonal aos outros dois.

Materiais ortotrópicos possuem ao menos um sistema de coordenadas em cada ponto em que as tensões normais provocam exclusivamente deformações normais. De forma análoga, nesse mesmo ponto, as tensões cisalhantes causam apenas deformações cisalhantes na direção do carregamento. Tal relação está evidenciada na Equação (4.3.1.2), em que não há coeficientes que relacionam as tensões normais com as cisalhantes.

4.3.2 Tensão-deformação nas lâminas

Conforme Mendonça (2005), a falha das lâminas e, conseqüentemente, do laminado, está ligada às tensões ou deformações nas lâminas. Portanto, segundo Tita (2006), faz-se necessário realizar uma análise das tensões e deformações em cada lâmina em relação ao Sistema Local de Coordenadas (1-2). Baseando-se em

$$[N] = [A][\varepsilon_0] + [B][\kappa], \quad (4.3.2.1)$$

$$[M] = [B][\varepsilon_0] + [D][\kappa], \quad (4.3.2.2)$$

com origem da Equação (4.2.2.11), é possível representar as deformações no plano médio, como

$$[\varepsilon_0] = [A]^{-1}[N] - [A]^{-1}[B][\kappa]. \quad (4.3.2.3)$$

Fazendo a substituição da Eq. (4.3.2.2) na Equação (4.3.2.3), tem-se:

$$[M] = [B][A]^{-1}[N] - \{[B][A]^{-1}[B] - [D]\}[\kappa]. \quad (4.3.2.4)$$

A partir da combinação das equações, obtém-se as equações constitutivas parcialmente invertidas

$$\begin{bmatrix} [\varepsilon_0] \\ [M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^*] & [B^*] \\ [C^*] & [D^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N] \\ [\kappa] \end{bmatrix}. \quad (4.3.2.5)$$

Onde tem-se:

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A]^{-1}; \\ [B^*] &= -[A]^{-1}[B]; \\ [C^*] &= [B][A]^{-1} = -[B^*]^T; \\ [D^*] &= [D] - [B][A]^{-1}[B]. \end{aligned} \quad (4.3.2.6)$$

Portanto, as Equações (4.3.2.3) e (4.3.2.4) são reescritas como

$$[\varepsilon_0] = [A^*][N] + [B][\kappa], \quad (4.3.2.7)$$

$$[M] = [C^*][N] + [D^*][\kappa], \quad (4.3.2.8)$$

$$[\kappa] = [D^*]^{-1}[M] - [D^*]^{-1}[C^*][N]. \quad (4.3.2.9)$$

Fazendo a substituição da Equação (4.3.2.9) na Equação (4.3.2.7), obtém-se:

$$[\varepsilon_0] = \{[A^*] - [B^*][D^*]^{-1}[C^*]\}[N] + [B^*][D^*]^{-1}[M]. \quad (4.3.2.10)$$

E fazendo a combinação da Equação (4.3.2.9) e da Equação (4.3.2.10), tem-se as equações constitutivas completamente invertidas:

$$\begin{bmatrix} [\varepsilon_0] \\ [\kappa] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A'] & [B'] \\ [C'] & [D'] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N] \\ [M] \end{bmatrix}. \quad (4.3.2.11)$$

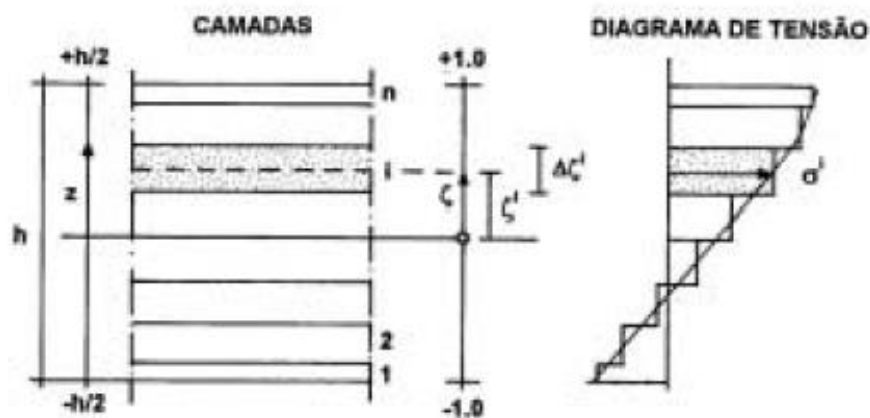
Onde:

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*][D^*]^{-1}[C^*] = [A^*] + [B^*][D^*]^{-1}[B^*]^T; \\ [B'] &= [B^*][D^*]^{-1}; \\ [C'] &= -[D^*]^{-1}[C^*] = [B']^T = [B']; \\ [D'] &= [D^*]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3.2.12)$$

Desse modo, obtém-se as deformações no plano médio e as curvaturas em função dos carregamentos atuantes no laminado em relação ao Sistema de Coordenadas Global. A partir desses valores é possível, também, encontrar as tensões atuantes em cada lâmina k em relação ao sistema, como pode ser observado na Figura 4.9 e representado por

$$[\sigma]_{Global}^k = [\bar{Q}]_{Global}^k \{[\varepsilon_0]_{Global} + z[\kappa]_{Global}\}. \quad (4.3.2.13)$$

Figura 4.9 – Representação da distribuição de tensão ao longo das camadas.



Fonte: Tita, 2006.

Além das tensões, é possível determinar as deformações referentes a esse sistema para cada lâmina, a partir das equações de transformação de coordenadas, como já mostrado nas Equações. (4.2.17) e (4.2.18).

4.4 CRITÉRIOS DE FALHA

Para os critérios de falha, é usado Mendonça (2005) como base. Diferentemente dos materiais isotrópicos, para os quais se obtém as tensões máximas a partir do Círculo de Mohr, nos materiais ortotrópicos o procedimento dependerá dos valores de resistência de uma lâmina ortotrópica, cujas notações nas direções principais podem ser vistas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Notações de resistência para as direções principais.

Notações	Resistências
X_T, X_C	Resistência à tração e compressão na direção 1
Y_T, Y_C	Resistência à tração e compressão na direção 2
Z_T, Z_C	Resistência à tração e compressão na direção 3
S_{12}, S_{13}, S_{23}	Resistência ao cisalhamento nos planos 12, 13 e 23, respectivamente

Fonte: Adaptado de Mendonça, 2005.

4.4.1 Teoria da Tensão Máxima

Segundo Mendonça (2005), a teoria da Tensão Máxima afirma que as tensões aplicadas nas direções principais do material devem ser menores que as resistências nas respectivas direções de carga. Ou seja, em tração, σ_1 deve ser menor que X_T para que a lâmina não falhe por ruptura, caracterizando o modo de falha 1. Já se σ_2 for maior que Y_T , ocorre a falha por separação entre as fibras pela ruptura da matriz, chamado de modo de falha 2. Por fim, quando a tensão cisalhante aplicada excede o limite aceitável do material, ocorre a falha na matriz, denominado modo de falha 3. Os modos de falha são representados por

$$-X_C < \sigma_1 < X_T;$$

$$-Y_C < \sigma_2 < Y_T;$$

$$|\tau_{12}| < S.$$

(4.4.1.1)

São apresentados cinco critérios distintos na Equação (4.4.1.1), em que não há interação entre eles, e o material irá falhar de acordo com o critério que for violado primeiro.

4.4.2 Teoria de Hill

Para os materiais ortotrópicos, a energia de distorção é calculada de forma análoga à obtenção da tensão equivalente do critério de von Mises para materiais isotrópicos, definida por

$$\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \sigma_{EQ}^2. \quad (4.4.2.1)$$

Já a equação proposta por Hill (1948), iguala o lado esquerdo a 1, limiar da falha. Ou seja, para valores menores que 1, o material está em segurança. Esta relação é definida por

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1. \quad (4.4.2.2)$$

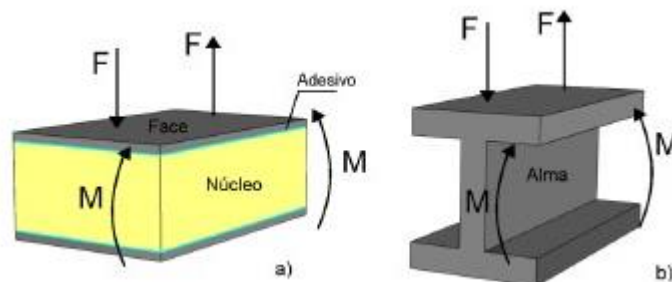
As constantes F , G , H , L , M e N são propriedades do material relacionadas à sua resistência. Relacionando-as às resistências ortotrópicas presentes na Tabela 4.1, e supondo que apenas uma das tensões não é nula, a Equação (4.4.2.2) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\sigma_3^2}{Z^2} - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_2\sigma_3 \\ - \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_1\sigma_3 + \frac{\tau_{23}^2}{S_{23}^2} + \frac{\tau_{13}^2}{S_{13}^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S_{12}^2} = 1. \end{aligned} \quad (4.4.2.3)$$

5 COMPORTAMENTO DAS ESTRUTURAS PLACAS-SANDUÍCHE

As placas sanduíche, como já mencionado na seção (2), possuem três diferentes tipos de componentes: duas faces externas laminadas, os adesivos e o núcleo (CALIRI, 2010), como pode ser visto na figura 5.1(a).

Figura 5.1 – Estruturas equivalente com aplicações de forças (F) e momentos fletores (M).



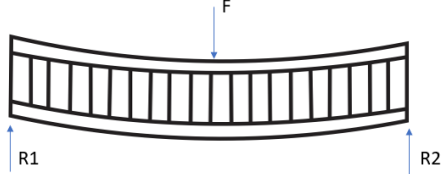
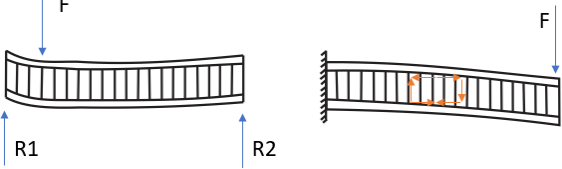
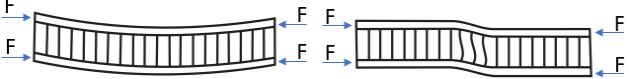
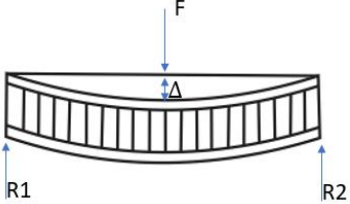


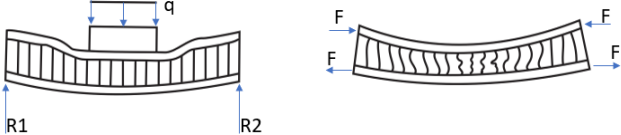
Fonte: Caliri, 2010.

As faces, que para o presente trabalho são constituídas por um laminado, têm função de suportar as tensões normais de tração, compressão ou cisalhamento, associadas à flexão da placa. O adesivo deve ter uma ótima compatibilidade química para que haja uma aderência suficiente entre as faces e o núcleo e está sujeito a cisalhamento. Já o núcleo, segundo Mendonça (2005), deve ter uma rigidez na direção perpendicular às faces para evitar o esmagamento precoce e sua rigidez ao cisalhamento transversal deve ser alta para que a estrutura se comporte como uma peça rígida. Além disso, o núcleo geralmente é de um material de baixa densidade, mas que precisa ter uma espessura muito maior que a das faces e do adesivo, para garantir um grande momento de inércia, semelhante à alma de uma viga de perfil I, como na figura 5.1(b).

5.1 MODOS DE FALHA

As placas sanduíche estão sujeitas a diferentes tipos de modos de falha, mais presentes em núcleos de *Honeycomb*, mas ocorrem também em núcleos homogêneos, como o *Divinycell*. Os modos mais frequentes são representados na Tabela 5.1 e os requisitos para evitar tais falhas, segundo Marinucci (2011) e Mendonça (2005), são:

Tabela 5.1 – Modos de falha em placas-sanduíche.

(a) Escoamento ou ruptura das faces;	
(b) Cisalhamento no núcleo;	
(c) Flambagem global do painel;	
(d) Deflexão excessiva;	
(e) <i>Wrinkling</i> das faces;	
(f) Flambagem intracelular da face;	
(g) Esmagamento do núcleo.	

Fonte: Adaptado de Mendonça, 2005.

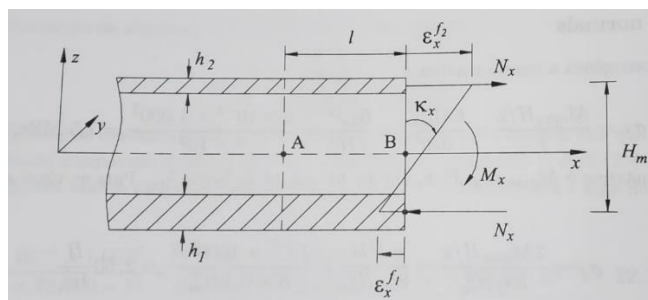
- Em (a), para evitar o escoamento ou ruptura das faces, as placas de face devem ser espessas o suficiente para resistir às tensões de tração, compressão e cisalhamento induzidas pelas cargas.

- Em (b), na figura esquerda, o núcleo deve ter resistência suficiente para resistir às tensões de cisalhamentos induzidas pelas cargas. Já no lado direito, o adesivo precisa suportar o cisalhamento.
- Em (c), o núcleo deve ser espesso e ter módulo de cisalhamento mínimo para suportar as cargas axiais e impedir a flambagem.
- Em (d), a placa deve ter uma rigidez flexural mínima o suficiente para evitar as deflexões excessivas provocadas pelas cargas de projeto.
- Em (e), o enrugamento nada mais é do que uma falha por flambagem local das faces, podendo ocorrer por falha do adesivo ou do núcleo.
- Em (f), para evitar esse modo de falha, a face deve ter uma espessura necessária e as células do núcleo precisam ser pequenas o suficiente para impedir as deformações intercelulares.
- Em (g), o núcleo deve ter resistência suficiente à compressão para resistir ao esmagamento devido às cargas e tensões de compressão induzidas pela flexão.

5.2 FLEXÃO EM PLACAS-SANDUÍCHE

Usando uma aproximação pela teoria da resistência dos materiais e considerando um pequeno trecho de seção de uma placa-sanduíche, Figura 5.2, é possível ver que a seção está submetida a um esforço de flexão M_x que cria uma curvatura κ_x .

Figura 5.2 – Análise de “resistência dos materiais” para flexão de placas-sanduíche.



Fonte: Mendonça, 2005.

Partindo da consideração de que as faces sejam relativamente finas, pode-se dizer que elas não estão atuando sob flexão, apenas tração e compressão, assim, a deformação extensional ϵ , em cada face, que está relacionada ao esforço normal é dada por:

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}^{f1} \epsilon_x^{f1} && \text{na face 1,} \\ N_x &= A_{11}^{f2} \epsilon_x^{f2} && \text{na face 2,} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

em que $f1$ e $f2$ indicam a face 1 e face 2, respectivamente. Desse modo, as faces podem apresentar diferentes espessuras e valores de rigidez, ou seja, diferentes valores para a matriz de rigidez $[A]$ em cada face. A curvatura é dada por

$$\kappa_x = \frac{1}{H_m} (\epsilon_x^{f1} + \epsilon_x^{f2}), \quad (5.2.2)$$

e o momento fletor por

$$M_x = N_x H_m, \quad (5.2.3)$$

em que H_m é a distância média entre as superfícies de cada face.

Substituindo a Equação (5.2.1) e a Equação (5.2.2) na Equação (5.2.3), tem-se:

$$\kappa_x = \frac{M_x}{H_m^2} \left[\frac{1}{A_{11}^{f1}} + \frac{1}{A_{11}^{f2}} \right]. \quad (5.2.4)$$

Assim, é possível obter uma aproximação da rigidez flexural D da placa na direção x , fazendo M_x/κ_x

$$D_x = H_m^2 \left[\frac{1}{A_{11}^{f1}} + \frac{1}{A_{11}^{f2}} \right]^{-1}. \quad (5.2.5)$$

Fazendo a hipótese de que cada face tenha apenas 1 lâmina ou obtendo propriedades elásticas equivalentes E_x^f e ν_{xy}^f para cada face, é possível determinar

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{f1} &= \frac{E_x^{f1} h_1}{\lambda_1}, & \lambda_1 &= \left[1 - (v_{xy}^{f1})^2 \frac{E_y^{f1}}{E_x^{f1}} \right]; \\
 A_{11}^{f2} &= \frac{E_x^{f2} h_2}{\lambda_2}, & \lambda_2 &= \left[1 - (v_{xy}^{f2})^2 \frac{E_y^{f2}}{E_x^{f2}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{5.2.6}$$

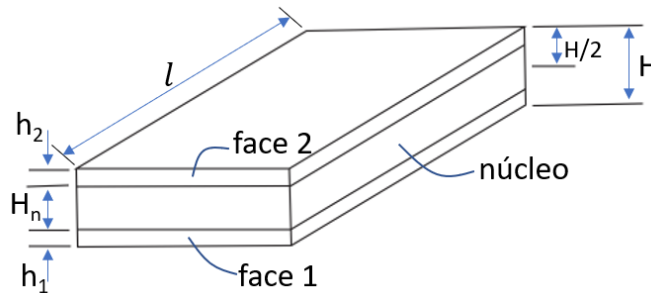
Já para um sanduíche de faces laminadas distintas, tem-se:

$$D_x = \frac{H_m^2}{\left[\frac{\lambda_1}{E_x^{f1} h_1} + \frac{\lambda_2}{E_x^{f2} h_2} \right]}.
 \tag{5.2.7}$$

5.3 TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM

Como indicado em Mendonça (2005), placas-sanduíche não podem ser consideradas placas finas, apenas semiespessas ou espessas, dependendo da relação l/H , em que l é o comprimento característico e H é a espessura da placa, como visto na Figura 5.3. Desse modo, as tensões cisalhantes transversais, τ_{xz} e τ_{yz} , não podem ser desconsideradas.

Figura 5.3 – Propriedades geométricas de um painel-sanduíche.



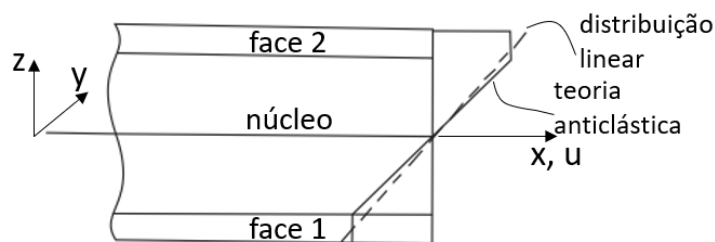
Fonte: Adaptado de Mendonça, 2005.

A partir da Figura 5.3, é possível identificar as demais propriedades geométricas de uma placa-sanduíche, em que h_1 e h_2 são a espessura da face inferior e superior, respectivamente, e H_n é a espessura do núcleo.

Para a análise da Teoria de Primeira Ordem em placas-sanduíche é preciso fazer algumas hipóteses, que segundo Whitney (1987) são:

1. As faces podem ser homogêneo-isotrópicas ou compostas por lâminas ortotrópicas angulares de espessuras constantes h_1 e h_2 ;
2. O núcleo é ortotrópico, com as direções principais alinhadas aos eixos x - y e tem espessura constante e muito maior que a das faces ($H_n \gg h_1$ e h_2);
3. As tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} no núcleo são desprezadas, pois os materiais usados possuem baixo módulo de elasticidade;
4. ε_z é desprezada, pois o deslocamento transversal w é independente de z ;
5. As tensões cisalhantes transversais são nulas nas faces, mas não no núcleo;
6. Hipóteses de teoria linear:
 1. Os deslocamentos transversais são pequenos comparados à espessura da placa ($w \leq H/2$);
 2. As deformações coplanares são pequenas comparadas à unidade ($\varepsilon \leq 2\%$);
 3. O núcleo e as faces obedecem à Lei de Hooke.
7. Hipóteses cinemáticas, visualizadas na Figura 5.4:
 - (a) Os deslocamentos coplanares no núcleo, u_n e v_n , variam de forma linear com z , porém as seções normais à superfície de referência no núcleo não são restringidas a permanecerem normais a esta, caracterizando uma teoria de primeira ordem;
 - (b) Os deslocamentos coplanares nas faces, u_1 , v_1 , u_2 e v_2 , são considerados uniformes ao longo da espessura de cada face.

Figura 5.4 – Hipótese de distribuição linear e estado antiplano.



Fonte: Adaptado de Mendonça, 2005.

Das hipóteses 3 e 5, pode-se definir o estado de tensões antiplano, ou para o caso de placas-sanduíche, o núcleo antiplano, que é o estado de tensões resultante quando o módulo de elasticidade do núcleo for muito pequeno ($E_n = 0$), ou seja, o núcleo é fraco para prover uma influente contribuição na rigidez flexural.

Para a hipótese 7, os deslocamentos coplanares num ponto arbitrário do núcleo são representados por

$$\begin{aligned} u_n &= u^o(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v_n &= v^o(x, y) + z\psi_y(x, y), \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

e num ponto qualquer das faces 1 e 2 é representado por

$$\begin{aligned} u_1 &= u^o - \frac{1}{2}(H - h_1)\psi_x; \\ u_2 &= u^o + \frac{1}{2}(H - h_2)\psi_x; \\ v_1 &= v^o - \frac{1}{2}(H - h_1)\psi_y; \\ v_2 &= v^o + \frac{1}{2}(H - h_2)\psi_y. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

E da hipótese 4, o deslocamento transversal é:

$$w = w(x, y). \quad (5.3.3)$$

Portanto, o comportamento da placa-sanduíche é moldado com base em cinco funções de deslocamento: deslocamentos de membrana da superfície média ($u^o(x, y)$ e $v^o(x, y)$), o deslocamento transversal ($w(x, y)$) e as rotações da normal em relação aos eixos y e x ($\psi_x(x, y)$ e $\psi_y(x, y)$, respectivamente). Desse modo, as deformações são:

$$\begin{cases} \gamma_{xz}^n = \psi_x + w_{,x} \\ \gamma_{yz}^n = \psi_y + w_{,y} \end{cases} \quad (5.3.4)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{f1} = \varepsilon_x^o - \frac{1}{2}(H - h_1)\kappa_x \\ \varepsilon_y^{f1} = \varepsilon_y^o - \frac{1}{2}(H - h_1)\kappa_y \\ \gamma_{xy}^{f1} = \gamma_{xy}^o - \frac{1}{2}(H - h_1)\kappa_{xy} \end{cases} \quad (5.3.5)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{f2} = \varepsilon_x^o + \frac{1}{2}(H - h_2)\kappa_x \\ \varepsilon_y^{f2} = \varepsilon_y^o + \frac{1}{2}(H - h_2)\kappa_y \\ \gamma_{xy}^{f2} = \gamma_{xy}^o + \frac{1}{2}(H - h_2)\kappa_{xy} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

Em que a Equação (5.3.4) representa o cisalhamento transversal no núcleo e Equação (5.3.5) e Equação (5.3.6) são a extensão na face 1 e face 2, respectivamente.

Os esforços normais e de momento são relacionados às tensões da mesma forma que na seção (4.2), porém a partir da hipótese 3, em que as componentes coplanares σ_x , σ_y e τ_{xy} do núcleo são nulas, os esforços normal e de momento são representados por

$$\{N_x; N_y; N_{xy}\} = \int_{-H/2}^{-H/2+h_1} (\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy})dz + \int_{H/2-h_2}^{H/2} (\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy})dz, \quad (5.3.7)$$

$$\{M_x; M_y; M_{xy}\} = \int_{-H/2}^{-H/2+h_1} (\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy})zdz + \int_{H/2-h_2}^{H/2} (\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy})zdz. \quad (5.3.8)$$

A partir da hipótese 5, é visto que apenas o núcleo tem uma distribuição de tensões cisalhantes, assim, os esforços cortantes por unidade de comprimento são:

$$\{Q_x; Q_y\} = \int_{-H_n/2}^{H_n/2} (\tau_{xz}; \tau_{yz})dz. \quad (5.3.9)$$

As tensões coplanares em cada lâmina l_k são dadas por

$$\{\sigma^{xl_k}\} = [\bar{Q}^k]\{\varepsilon^{xl_k}\}. \quad (5.3.10)$$

Como o núcleo está sujeito apenas às tensões cisalhantes transversais, então a relação constitutiva é dada por

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^n \\ \gamma_{xz}^n \end{Bmatrix}. \quad (5.3.11)$$

Substituindo as Equações (5.3.4)-(5.3.6) nas Equações (5.3.10) e (5.3.11) e depois substituindo essas tensões nas Equações (5.3.7)-(5.3.9) e integrando, obtém-se a relação constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ F & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}, \quad (5.3.12)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = H_n \begin{bmatrix} k_2 G_{23} & 0 \\ 0 & k_1 G_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y + w_{,y} \\ \psi_x + w_{,x} \end{Bmatrix}. \quad (5.3.13)$$

Considerando que as faces 1 e 2 sejam laminadas, compostas respectivamente por N_1 e N_2 lâminas de espessuras h_k^{f1} e h_k^{f2} , as submatrizes de rigidez do sanduíche $[A]$, $[B]$, $[F]$ e $[D]$ são:

$$\begin{aligned} [A] &= \sum_{k=1}^{N_1} [\bar{Q}^{kf1}] h_k^{f1} + \sum_{k=1}^{N_2} [\bar{Q}^{kf2}] h_k^{f2}; \\ [B] &= \frac{1}{2} (h_1 - H) \sum_{k=1}^{N_1} [\bar{Q}^{kf1}] h_k^{f1} + \frac{1}{2} (H - h_2) \sum_{k=1}^{N_2} [\bar{Q}^{kf2}] h_k^{f2}; \\ [F] &= \sum_{k=1}^{N_1} [\bar{Q}^{kf1}] h_k^{f1} \bar{z}_k^{f1} + \sum_{k=1}^{N_2} [\bar{Q}^{kf2}] h_k^{f2} \bar{z}_k^{f2}; \\ [D] &= \frac{1}{2} (h_1 - H) \sum_{k=1}^{N_1} [\bar{Q}^{kf1}] h_k^{f1} \bar{z}_k^{f1} + \frac{1}{2} (H - h_2) \sum_{k=1}^{N_2} [\bar{Q}^{kf2}] h_k^{f2} \bar{z}_k^{f2}. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Em que \bar{z}_k^{f1} e \bar{z}_k^{f2} são as cotas da superfície média da lâmina k das faces 1 e 2. Se cada face for constituída por uma única lâmina, $[B] = [F]$, então a Equação (5.3.14) torna-se

$$\begin{aligned} [A] &= h_1 [\bar{Q}^{f1}] + h_2 [\bar{Q}^{f2}]; \\ [B] &= [F] = \frac{1}{2} (h_1 - H) h_1 [\bar{Q}^{f1}] + \frac{1}{2} (H - h_2) h_2 [\bar{Q}^{f2}]; \\ [D] &= \frac{1}{4} (h_1 - H)^2 h_1 [\bar{Q}^{f1}] + \frac{1}{4} (H - h_2)^2 h_2 [\bar{Q}^{f2}]. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

Se as faces forem idênticas e possuírem uma única lâmina cada, então

$$\begin{aligned} [A] &= 2h[\bar{Q}]; \\ [B] &= [F] = [0]; \\ [D] &= \frac{h}{2}(H - h)^2[\bar{Q}], \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

onde h é a espessura e $[\bar{Q}]$ é a rigidez de uma das faces. Para um sanduíche que possui mais de uma lâmina em cada face, desde que ele seja simétrico, $[B] = [F] = [0]$.

6 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

6.1 FLEXÃO ESTÁTICA

Para a análise em elementos finitos de uma placa de material composto, utiliza-se a teoria de Mindlin para placas semiespessas (MENDONÇA, 2005). Tomando o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) para o caso estático linear, tem-se:

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} E_{44} & E_{45} \\ E_{45} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{w} q d\Omega = 0. \quad (6.1.1)$$

O PTV busca a solução de $\{u^o; v^o; w; \psi_x; \psi_y\}^t$, onde funções u^o e v^o em qualquer ponto $(x, y) \in \Omega$, para qualquer conjunto de funções peso $\{\hat{u}^o; \hat{v}^o; \hat{w}; \hat{\psi}_x; \hat{\psi}_y\}^t$, satisfazendo a Equação (6.1.1). O Ω é o domínio da placa e $q(x, y)$ é a carga transversal distribuída por unidade de área.

A superfície de referência da placa (Ω) é particionada em regiões chamadas de elementos finitos (Ω^e), em que:

$$\cup_{e=1}^{ne} \Omega^e = \Omega, \quad (6.1.2)$$

$$\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, i \neq j, \quad (6.1.3)$$

onde e é o contador de elementos e ne é o número total de elementos. Das hipóteses da teoria de primeira ordem e usando a formulação de elementos finitos baseada em deslocamentos, obtém-se:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^o(x, y) + z\psi_x(x, y); \\ v(x, y, z) &= v^o(x, y) + z\psi_y(x, y); \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

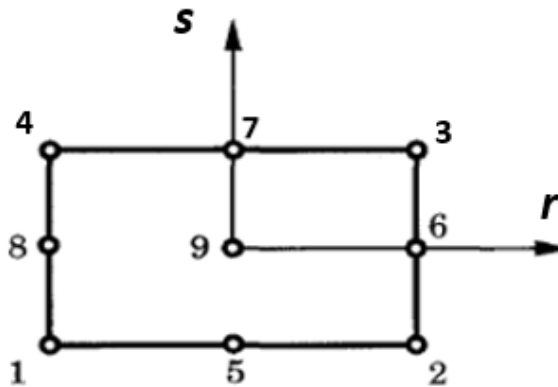
Em vez de obter a solução exata de w, ψ_x e ψ_y para a Eq. (6.1.1), busca-se a determinação de soluções aproximadas $w_h(x, y), \psi_{xh}(x, y)$ e $\psi_{yh}(x, y)$.

No domínio Ω^e de cada elemento finito e , funções base (N_{no}) são definidas, fazendo com que o campo de deslocamento aproximado seja expresso como:

$$\begin{Bmatrix} u^o(x, y) \\ v^o(x, y) \\ w(x, y) \\ \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{Bmatrix}_h^e = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(x, y) \begin{Bmatrix} u_{no} \\ v_{no} \\ w_{no} \\ \psi_{xno} \\ \psi_{yno} \end{Bmatrix}, \quad (6.1.5)$$

onde o subíndice no está associado ao nó do elemento, n_{ne} é o número de nós do elemento e $N_{no}^e(x, y)$ é o conjunto das n_{ne} funções base, em que não estarão em função de (x, y) , mas sim em função de coordenadas intrínsecas (r, s) do elemento, representadas na Figura 6.1.

Figura 6.1 – Mapeamento do elemento lagrangeano biquadrático e numeração intrínseca dos 9 nós.



Fonte: Adaptado de Reddy, 1997.

As funções de interpolação, constituídas por polinômios de Lagrange são

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy + e_i x^2 + f_i y^2 + g_i x^2 y + h_i xy^2 + k_i x^2 y^2, \quad (6.1.6)$$

para um elemento linear e quadrático com 9 nós, como na Figura 6.1, são, segundo Reddy (1997), representados por

$$\begin{aligned}
N_1(r, s) &= \frac{1}{4}rs(r-1)(s-1); & N_2(r, s) &= \frac{1}{4}rs(r+1)(s-1); \\
N_3(r, s) &= \frac{1}{4}rs(r+1)(s+1); & N_4(r, s) &= \frac{1}{4}rs(r-1)(s+1); \\
N_5(r, s) &= \frac{1}{2}s(1-r^2)(s-1); & N_6(r, s) &= \frac{1}{2}r(r+1)(1-s^2); \\
N_7(r, s) &= \frac{1}{2}s(1-r^2)(s+1); & N_8(r, s) &= \frac{1}{2}r(r-1)(1-s^2); \\
N_9(r, s) &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s^2).
\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Com isso, as funções de deslocamento no elemento

$$\{u(x, y)\}_h^e = [\bar{N}^e(x, y)]\{U^e\}, \tag{6.1.8}$$

podem ser obtidas, de forma aproximada, pela Eq. (6.1.7) e pelo vetor de deslocamentos nodais U^e , a partir da Eq. (6.1.5).

Da Equação (6.1.1) do PTV, as deformações, em função dos deslocamentos, são definidas para deformações em membrana e flexão por

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{,x}^o \\ v_{,y}^o \\ u_{,y}^o + v_{,x}^o \\ \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{y,x} + \psi_{x,y} \end{array} \right\}, \tag{6.1.9}$$

e para deformações cisalhantes transversais por

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \psi_y + w_{,y} \\ \psi_x + w_{,x} \end{array} \right\}. \tag{6.1.10}$$

As relações entre os deslocamentos e as deformações podem ser expressas por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{array} \right\}_h^e = [B_f^e(x, y)]\{U^e\} \quad e \quad \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = [B_c^e(x, y)]\{U^e\}, \tag{6.1.11}$$

em que $[B_f^e]$ e $[B_c^e]$ são denominadas matrizes de deformação membrana-flexão e cisalhante. As deformações virtuais, $\{\varepsilon^o\}_n^e$ e $\{\hat{\kappa}\}_h^e$, se relacionam às funções peso no elemento, chamados de deslocamentos virtuais, por

$$\{\hat{u}(x, y)\}_h^e = \{\hat{u}^o, \hat{v}^o, \hat{w}, \hat{\psi}_x, \hat{\psi}_y\}^t. \quad (6.1.12)$$

As funções $[N^e(x, y)]$, da mesma forma como na Equação (6.1.8), são usadas para aproximar $\{\hat{u}\}_h^e$:

$$\{\hat{u}(x, y)\}_h^e = [N^e(x, y)]\{\hat{U}^e\}. \quad (6.1.13)$$

Substituindo a Equação (6.1.13) na Equação (6.1.11), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}_h^e = [B_f^e(x, y)]\{\hat{U}^e\} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix} = [B_c^e(x, y)]\{\hat{U}^e\}. \quad (6.1.14)$$

Com isso, o PTV para um elemento qualquer e , fica na forma:

$$\begin{aligned} \{\hat{U}^e\}^t \left[\int_{\Omega^e} [B_f^e]^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [B_f^e] dx dy + \int_{\Omega^e} [B_c^e]^t [E^e] [B_c^e] dx dy \right] \{U^e\} \\ - \{\hat{U}^e\}^t \int_{\Omega^e} \{N_w^e\} q(x, y) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Ou de forma compacta:

$$\{\hat{U}^e\}^t [K_f^e + K_c^e] \{U^e\} - \{\hat{U}^e\}^t \{F^e\} = 0, \quad (6.1.16)$$

em que $[K_f^e]$, $[K_c^e]$ e $[F^e]$ são as matrizes de rigidez da membrana-flexão, matriz rigidez de cisalhamento transversal e o vetor força nodal do elemento, respectivamente.

Para a solução do PTV ser expressa, utiliza-se um conjunto de funções peso, restrito ao espaço vetorial formado pelas funções de interpolação lagrangeanas. Desse modo, para cada grau de liberdade existirá uma equação referente ao vetor nodal escolhido, ou seja, tem-se n_{ne} equações, que será na forma

$$[K^e]\{U^e\} = \{F^e\}, \quad (6.1.17)$$

em que $[K^e] = [K_f^e + K_c^e]$ e conhecendo as condições de contorno, é possível obter uma solução para o sistema.

6.2 CARREGAMENTOS DINÂMICOS

De forma análoga ao caso estático, a análise dinâmica é feita usando o PTV, mas aplicando o princípio de D'Alembert para decompor forças de corpo em forças de inércia. Assim, a integral dos termos de inércia é:

$$I = \int_{\Omega} [\rho_o(\hat{u}^o\ddot{u}^o + \hat{v}^o\ddot{v}^o + \hat{w}^o\ddot{w}^o) + \rho_1(\hat{u}^o\ddot{\psi}_x + \hat{v}^o\ddot{\psi}_y + \hat{\psi}_x\ddot{u}^o + \hat{\psi}_y\ddot{v}^o) + \rho_2(\hat{\psi}_x\ddot{\psi}_x + \hat{\psi}_y\ddot{\psi}_y)]d\Omega. \quad (6.2.1)$$

Na forma matricial compacta, a Equação (6.2.1) fica:

$$I = \int_{\Omega} \{\hat{u}\}^t [m] \{\ddot{u}\} d\Omega. \quad (6.2.2)$$

Substituindo a Equação (6.2.2) no PTV, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}^t [E] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{w}q(x, y, t) d\Omega + \int_{\Omega} \{\hat{u}\}^t [m] \{\ddot{u}\} d\Omega = 0. \quad (6.2.3)$$

Como pode ser visto na equação (6.2.3), tanto o carregamento transversal q quanto os deslocamentos $\{u\}$ são função do tempo t , isto é:

$$\{u\} = \{u(x, y, t)\} = \begin{Bmatrix} u^o(x, y, t) \\ v^o(x, y, t) \\ w(x, y, t) \\ \psi_x(x, y, t) \\ \psi_y(x, y, t) \end{Bmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Assim, de forma análoga aos deslocamentos da Equação (6.1.8), as acelerações aproximadas são encontradas a partir das funções de interpolação, obtendo:

$$\{\ddot{u}(x, y, t)\}^e = [N^e(x, y)]\{\ddot{U}^e(t)\}. \quad (6.2.5)$$

As três primeiras integrais da Equação (6.2.3) resultarão nas matrizes de rigidez e no vetor força, igual ao caso estático. Já a última integral, que é o termo de inércia I do elemento, é calculado usando a Equação (6.2.5), tornando-se:

$$I = \{\bar{U}^e\}^t \left[\int_{\Omega^e} [N^e]^t [m^e] [N^e] d\Omega \right] \{\ddot{U}^e(t)\}. \quad (6.2.6)$$

Adicionando a Equação (6.2.6) na Equação (6.1.15) e escolhendo os valores nodais da função peso para cada grau de liberdade, encontra-se a equação de movimento algébrico global:

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F(t)\}. \quad (6.2.7)$$

6.3 VIBRAÇÕES EM PLACAS-SANDUÍCHE

A partir da Equação (6.2.7) é possível determinar uma aproximação dos modos e frequências naturais de vibração. Inicialmente, para um sistema com carregamento nulo, $\{F(t)\} = \{0\}$, usando o método de separação de variáveis, a equação do movimento fica na forma:

$$\{U(t)\} = \{\bar{U}\}e^{i\omega t}, \quad (6.3.1)$$

em que ω é a frequência natural de vibração. Substituindo a Equação (6.3.1) na Equação (6.2.7), obtém-se um problema linear de autovalores, definido por.

$$[K - \omega^2 M]\{\bar{U}\} = 0 \quad (6.3.2)$$

Para o caso estudado nesse trabalho, segundo Reddy (1997), a solução é assumida como periódica. O deslocamento transversal é dado como:

$$w_0(x, t) = W(x)e^{i\omega t}. \quad (6.3.3)$$

Para os casos simétricos, considerando o carregamento transversal q , tem-se a solução:

$$-\frac{\partial^2}{\partial^2 x} \left(E_{xx} E_{xx}^b \frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} \right) + b \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} + bq = bI_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - bI_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad (6.3.4)$$

em que \hat{N}_{xx} é a carga axial e os valores de I são determinados por:

$$I_i = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)^i dz. \quad (6.3.5)$$

Para o caso em que não há o carregamento transversal, a Equação (6.3.4) torna-se:

$$E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^4 W}{dx^4} - b \hat{N}_{xx} \frac{d^2 W}{dx^2} = \omega^2 \hat{I}_0 W - \omega^2 \hat{I}_2 \frac{d^2 W}{dx^2}. \quad (6.3.6)$$

E a solução geral é dada por:

$$W(x) = c_1 \text{sen} \lambda x + c_2 \text{cos} \lambda x + c_3 \text{senh} \mu x + c_4 \text{cosh} \mu x, \quad (6.3.7)$$

em que c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes determinadas de acordo com as condições de contorno e λ e μ são, respectivamente:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2p} \left(q + \sqrt{q^2 + 4pr} \right)}, \quad (6.3.8)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2p} \left(-q + \sqrt{q^2 + 4pr} \right)}, \quad (6.3.9)$$

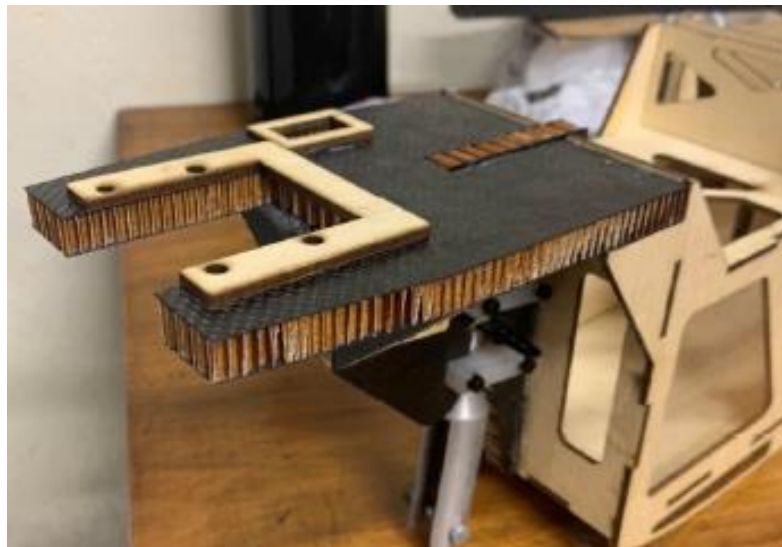
onde $p = E_{xx}^b I_{yy}$, $q = \omega^2 \hat{I}_2 - b \hat{N}_{xx}$ e $r = \omega^2 \hat{I}_0$. Considerando que $\hat{N}_{xx} = 0$ e ignorando os efeitos de inércia rotativa \hat{I}_2 , tem-se $\lambda = \mu$, sendo possível isolar ω . Com isso, as frequências fundamentais de vibração são dadas por:

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{E_{xx}^b I_{yy}}{\hat{I}_0}}. \quad (6.3.10)$$

7 MATERIAIS E MÉTODOS

Conforme mencionado anteriormente, a placa do motor do avião de 2019 da Equipe Albatroz Aerodesign é constituída por um núcleo com espessura de 10mm de *Honeycomb*, fabricado a partir de papel meta-aramida PN1, com duas lâminas, de $0,47\text{mm}$ de espessura cada, de tecido de fibra carbono *200 3k* em cada face, como mostra a Figura 7.1.

Figura 7.1– Placa do motor construída.



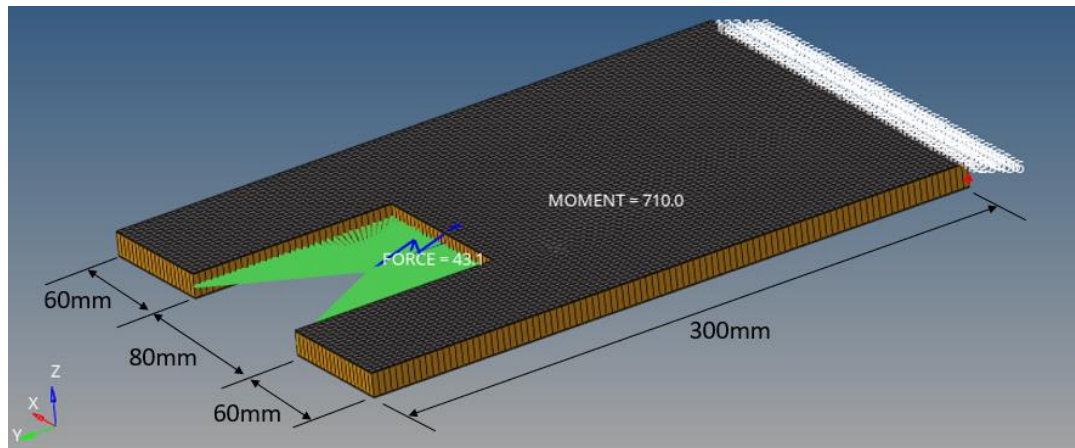
Fonte: Picoli; Tezza; Shimomura, 2019.

Para estudar o comportamento estático e dinâmico de placas-sanduíche são feitas análises estático-lineares e modais em elementos finitos, para diferentes situações em três casos com as seguintes variações:

1. material do núcleo;
2. número de lâminas em cada face e;
3. direção das lâminas.

O *software* Altair Hyperworks é utilizado para modelar o problema em elementos finitos, representado na Figura 7.2, e para obter a solução é usado o *solver* OptiStruct.

Figura 7.2– Modelo da placa do motor em elementos finitos.

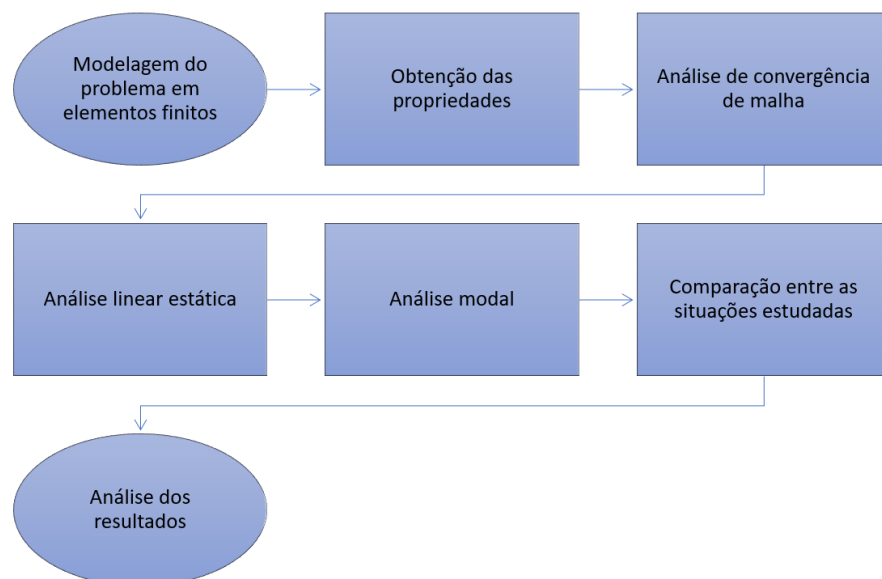


Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Como pode ser observado na Figura 7.2, a placa tem dimensões $200 \times 300\text{mm}$, com uma de suas extremidades engastada, enquanto a outra é livre. A extremidade livre apresenta um rasgo para posicionar o motor, sofrendo apenas os esforços referentes ao mesmo, que segundo Soares (2019), possui uma tração de $43,15\text{N}$ e um torque de $710\text{N}\cdot\text{mm}$. Utilizando um rígido do tipo RBE3, que é um elemento auxiliar que transmite uma força externa ao conjunto em análise, é possível aplicar também a massa do motor de $0,698\text{kg}$. Esse elemento pode ser visto em verde no modelo da placa.

A esquematização da sequência de estudos deste trabalho é representada como fluxograma na Figura 7.3.

Figura 7.3– Fluxograma da sequência de estudos.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

7.1 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Os materiais utilizados para todos os casos analisados neste trabalho são: o tecido de fibra de carbono 200 3k, o *Honeycomb* de papel meta-aramida PN1 e o PVC expandido, também chamado de *Divinycell* H60. As propriedades mecânicas desses materiais são retiradas do relatório de Estruturas e Ensaio Estruturais de 2019, da Equipe Albatroz Aerodesign. No ano em questão, a equipe realizou diversos ensaios mecânicos para os materiais comumente usados na fabricação das aeronaves. As propriedades da fibra de carbono e do *Honeycomb* podem ser vistas na tabela 7.1. As propriedades relativas ao *Honeycomb* consideram o material ensaiado já com uma lâmina de carbono em cada face, pois suas células hexagonais falham rapidamente durante um ensaio mecânico. Já as propriedades do *Divinycell* podem ser vistas na tabela 7.2.

Tabela 7.1 – Propriedades da fibra de carbono e do *Honeycomb*.

Material	Fibra de Carbono	<i>Honeycomb</i> com uma lâmina de carbono em cada face
E_1 [MPa]	49749,50	11073,62
E_2 [MPa]	49749,50	14457,89
G_{12} [GPa]	14500,00	-
X_t [Mpa]	181,74	68,30
Y_t [Mpa]	181,74	93,40
τ_{rup} [MPa]	33,00	-
ρ [kg/m ³]	1120,00	138,31

Fonte: Adaptado de STEIN; TEZZA; SHIMOMURA, 2019.

Tabela 7.2 – Propriedades do *Divinycell*.

E [MPa]	55,00
σ_{esc} [MPa]	1,40
ρ [kg/m ³]	45,00
ν_{12}	0,32

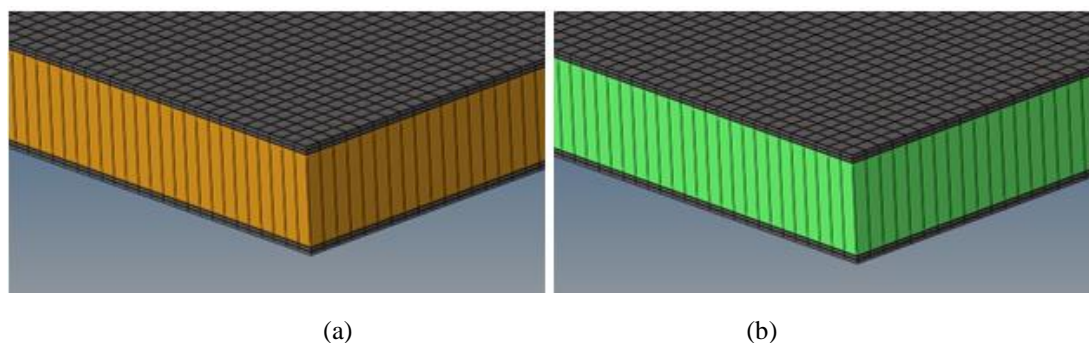
Fonte: Adaptado de STEIN; TEZZA; SHIMOMURA, 2019.

A fibra de carbono possui as propriedades dos módulos de elasticidade iguais por conta de ela ser fabricada em manta trançada, fazendo com que as direções sejam perpendiculares entre si.

7.2 CASO 1: MATERIAL DO NÚCLEO

Inicialmente analisou-se a troca do material do núcleo, de *Honeycomb* para *Divinycell*, ambos com a mesma espessura de 10mm , mantendo a quantidade de lâminas de fibra de carbono, em que a Figura 7.4 representa a modelagem para os dois núcleos. Com isso, a partir da análise linear estática será possível observar a variação no fator de segurança (FS) e no deslocamento máximo da extremidade livre da placa. Já da análise modal, será possível observar a variação nas frequências naturais da estrutura e poderá ser feita uma comparação dos resultados.

Figura 7.4 – Modelagem da estrutura sanduiche: (a) com núcleo de *Honeycomb* e (b) com *Divinycell*.

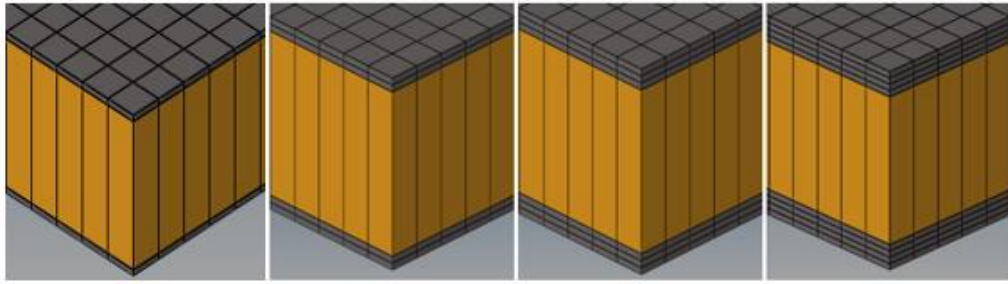


Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

7.3 CASO 2: NÚMERO DE LÂMINAS

Para o segundo caso de estudo, variam-se o número de lâminas em cada face da estrutura, mantendo o núcleo de *Honeycomb*. São analisadas placas com uma, duas, três e quatro lâminas. A Figura 7.5 mostra a modelagem para as 4 situações e cada situação será analisada estática e dinamicamente.

Figura 7.5 – Modelagem da placa com uma, duas, três e quatro lâminas, respectivamente.

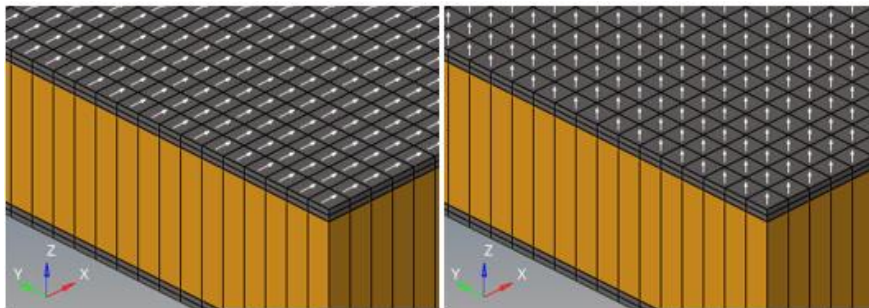


Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

7.4 CASO 3: DIREÇÃO DAS LÂMINAS

Por fim, a última comparação a ser feita é variando a direção das lâminas. A manta de carbono utilizada pela equipe é trançada, formando ângulos retos entre as direções, ou seja, a lâmina de carbono está nas direções 0 e 90° . Mantendo o núcleo de *Honeycomb* e a primeira lâmina na direção original, varia-se a direção da segunda lâmina, deixando-a em 45° . Portanto cada face terá configuração $[0/45]_T$. A figura 7.6 demonstra a direção das duas situações e de mesmo modo como os casos anteriores, são feitas análises estáticas e dinâmicas para cada situação.

Figura 7.6 – Modelagem da estrutura com lâminas orientadas a 0° na esquerda e 45° na direita.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

8 RESULTADOS E DISCUSSÕES

8.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DE MALHA

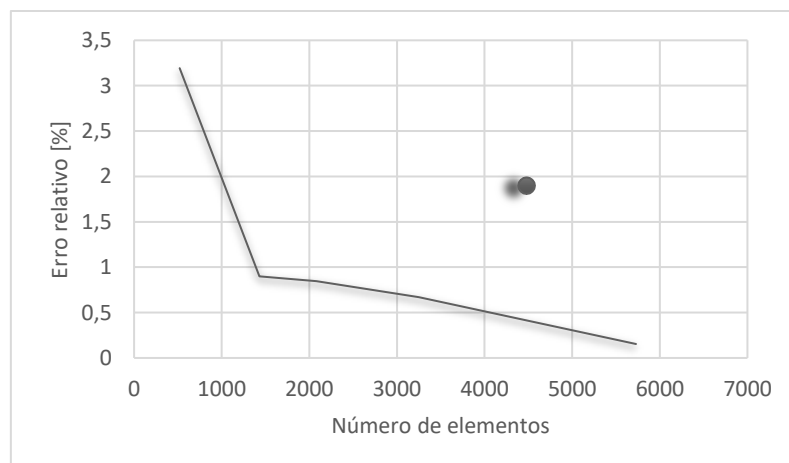
Para realizar as análises estáticas e dinâmicas, no software Altair Hyperworks, em todos os casos de estudo citados é preciso criar a malha do modelo da Figura 7.2, em que é feita a discretização da malha de acordo com o tamanho dos elementos que a constituem. Para isso, é realizada uma análise de convergência de malha, em que a malha é refinada constantemente até alcançar um erro relativo menor que 0,5%, assumido pelo autor. Na tabela 8.1 é possível visualizar os erros relativos de acordo com o deslocamento máximo obtido da análise estática para cada tamanho de elemento, assim como o número de elementos e nós correspondentes. Já a figura 8.1 representa o erro relativo em relação ao número de elementos.

Tabela 8.1 – Resultado da convergência de malha.

Tamanho do elemento	Número de elementos	Número de nós	Deslocamento máximo [mm]	Erro relativo [%]
10	520	581	0,689	-
6	1429	1530	0,667	3,19
5	2080	2201	0,662	0,90
4	3250	3401	0,654	0,85
3	5728	5929	0,651	0,67
2	13000	13301	0,650	0,15

Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

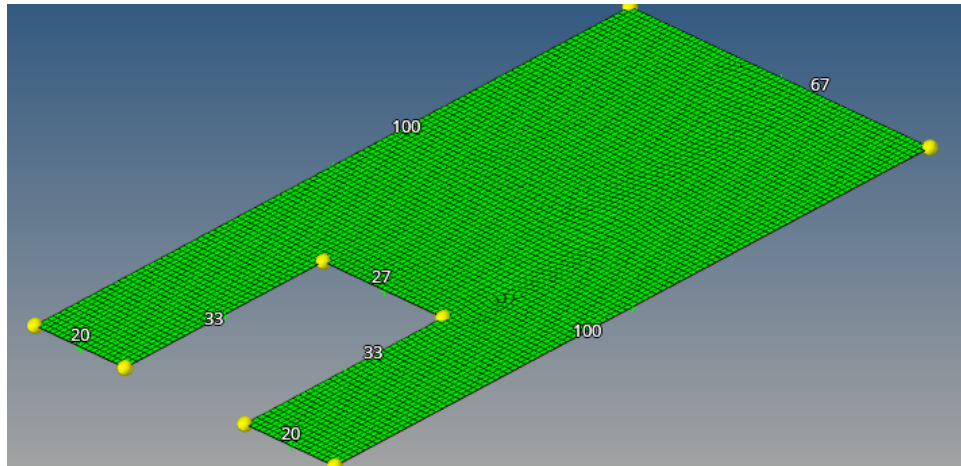
Figura 8.1– Gráfico da análise de convergência de malha.



Fonte: Desenvolvido pelo autor, 2021.

Da análise é possível identificar que o erro entre os tamanhos de elementos 2 e 3 é menor que 0,5%, portanto, o tamanho escolhido é o de 3, com elementos do tipo QUAD4. Assim, a malha escolhida possui 5728 elementos e 5929 nós e sua representação é dada na figura 8.2.

Figura 8.2– Malha para simulação computacional.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Com a obtenção da malha e conhecendo as propriedades dos materiais, é possível realizar as análises em elementos finitos.

8.2 CASO 1: MATERIAL DO NÚCLEO

8.2.1 Análise Estática

Após a realização da análise linear estática nos modelos computacionais demonstrados na seção 7, com o auxílio do *solver* OptiStruct do pacote Altair Hyperworks, foi possível obter o deslocamento máximo e o fator de segurança (FS) de cada estrutura, mostrados na Tabela 8.2.

Tabela 8.2 – Resultados estáticos para diferentes materiais do núcleo.

Núcleo	Deslocamento [mm]	FS [Hill]
<i>Honeycomb</i>	0,651	6,90
<i>Divinycell</i>	0,903	2,89

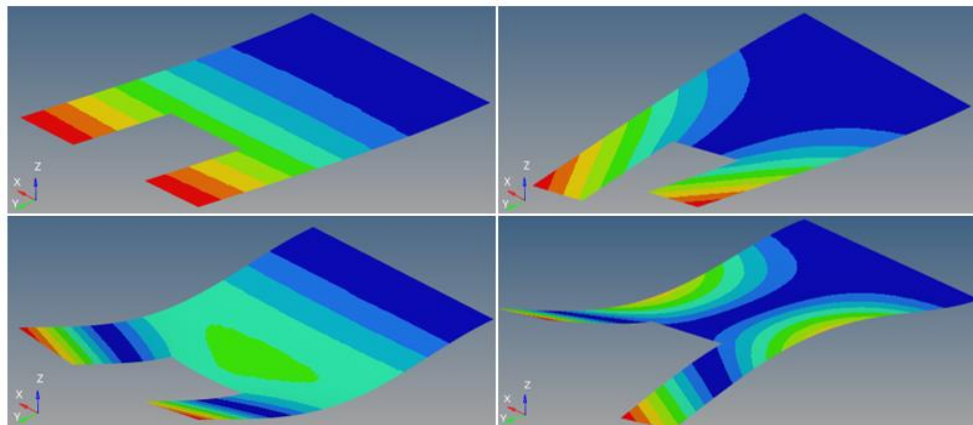
Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

A massa das duas opções analisadas é muito próxima: a estrutura com núcleo de *Honeycomb* tem 0,127kg, enquanto a placa com núcleo de *Divinycell* tem 0,134kg. Porém como é possível observar na tabela 8.2, a segunda situação apresenta deslocamentos muito maiores que a primeira, além de apresentar um fator de segurança menor pelo critério de Hill.

8.2.2 Análise Dinâmica

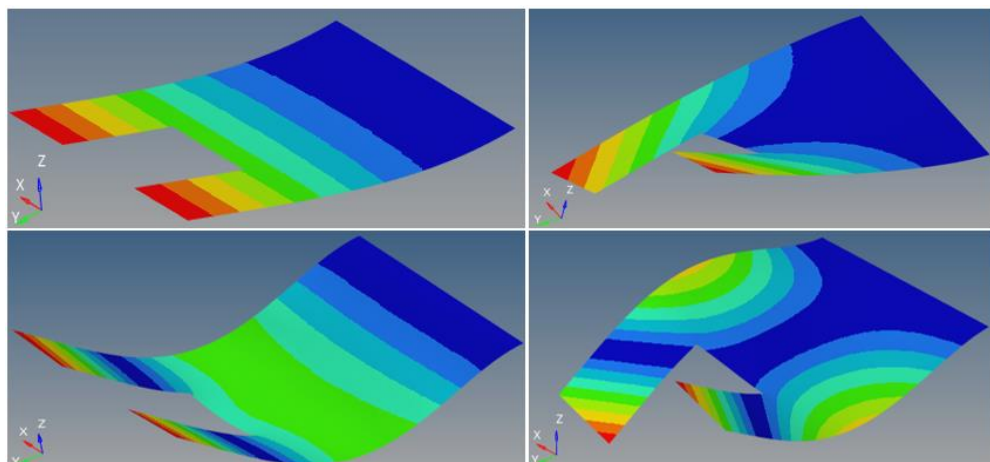
A partir da análise modal realizado no software Hyperworks, os quatro primeiros modos para a situação inicial, em que o núcleo é do material *Honeycomb*, podem ser vistos na figura 8.3. Já os quatro primeiros modos de vibrar da placa com núcleo de *Divinycell* podem ser vistos na figura 8.4. As frequências naturais para os quatro modos de cada situação são mostradas na tabela 8.3.

Figura 8.3 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso núcleo de *Honeycomb*.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Figura 8.4 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso núcleo de *Divinycell*.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Tabela 8.3 – Resultados dinâmicos para diferentes materiais do núcleo.

Modo	<i>Honeycomb</i> Frequência [Hz]	<i>Divinycell</i> Frequência [Hz]
Primeiro	32,76	90,17
Segundo	53,26	175,04
Terceiro	167,50	447,47
Quarto	187,38	516,39

Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

A primeira situação apresenta valores de frequência natural reduzidos quando comparados com a segunda situação. Isso se deve pelas excelentes características que o *Honeycomb* apresenta para amortecimentos de vibrações, por conta da alta fração volumétrica de espaços vazios no interior de cada hexágono.

8.3 CASO 2: NÚMERO DE LÂMINAS

8.3.1 Análise Estática

Para o segundo caso estudado também são obtidos o deslocamento máximo e o fator de segurança para as situações de uma, duas, três e quatro lâminas em cada face, que são observadas na Tabela 8.4. Os valores para o modelo com duas lâminas já foram apresentados na Tabela 8.2, para a situação com núcleo de *Honeycomb*.

Tabela 8.4 – Resultados estáticos para diferentes quantidades de lâminas.

Número de lâminas	Deslocamento [mm]	FS [Hill]
1	0,832	0,95
3	0,344	12,08
4	0,224	17,25

Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

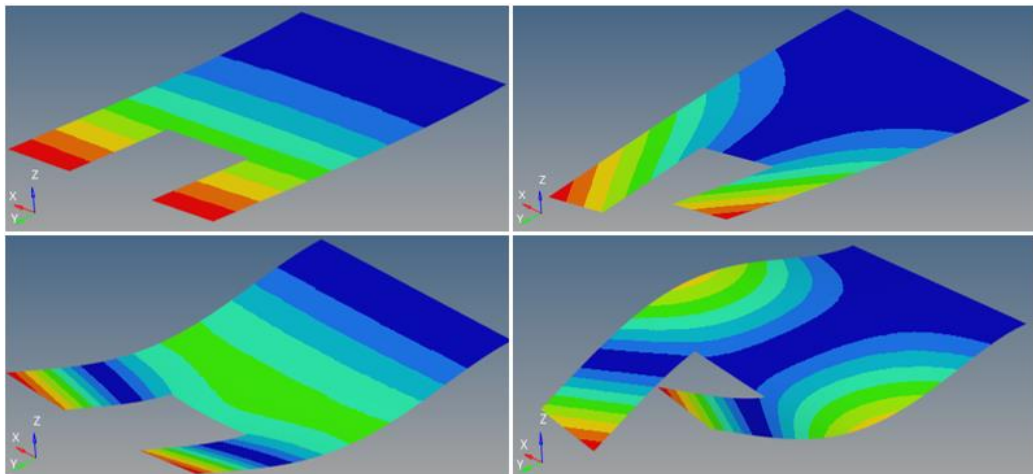
É possível observar que para uma única lâmina de fibra de carbono em cada face tem-se um fator de segurança por Hill menor que 1. É importante observar que esse valor do fator de segurança não é obtido diretamente da equação do critério de Hill, e sim de uma comparação direta do valor obtido com o limiar da falha. Com isso, tem-se que essa configuração pode aguentar até 95% dos esforços apresentados; logo, ela falhará. Nas demais situações, com o

aumento de número de lâminas, o fator de segurança aumenta e os deslocamentos máximos diminuem. Isso ocorre por conta do aumento da rigidez na estrutura com o acréscimo de cada lâmina.

8.3.2 Análise Dinâmica

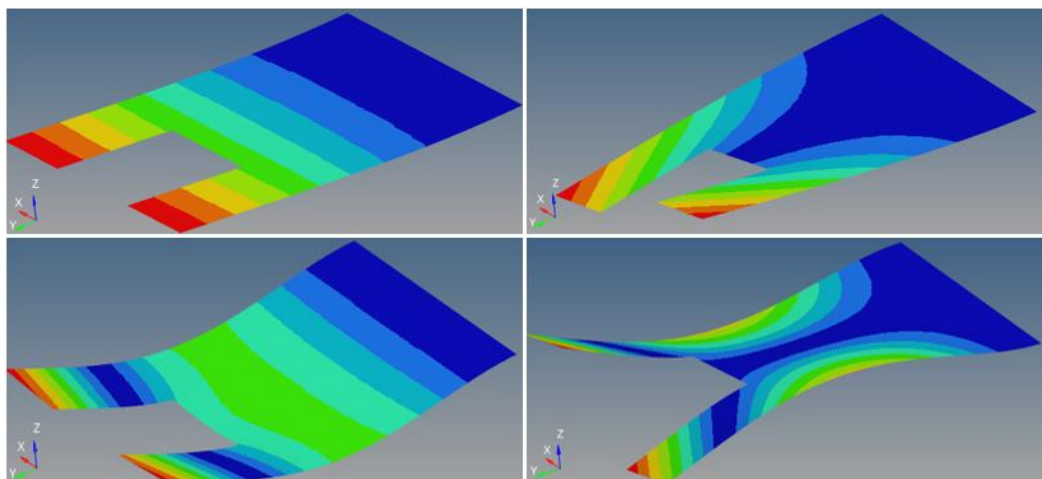
Para a análise dinâmica a situação com uma lâmina foi desconsiderada, visto que a mesma falha. Os modos de vibrar dos modelos com três e quatro lâminas podem ser vistos nas figuras 8.5 e 8.6, respectivamente, enquanto as frequências naturais são mostradas na tabela 8.5. As frequências e os modos de vibrar do modelo com duas lâminas já foi apresentado nos resultados do caso 1, na situação com núcleo de *Honeycomb*.

Figura 8.5 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso com três lâminas.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Figura 8.6 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso com quatro lâminas.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Tabela 8.5 – Resultados dinâmicos para diferentes quantidades de lâminas.

Modo	Três Lâminas Frequência [Hz]	Quatro Lâminas Frequência [Hz]
Primeiro	41,16	49,03
Segundo	74,13	92,22
Terceiro	211,94	253,01
Quarto	241,52	291,18

Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

É possível observar que com o aumento do número de lâminas em cada face a frequência natural aumenta. Isso se deve pelo fato de que a rigidez da estrutura é proporcional ao número de camadas de lâminas, como já mencionado anteriormente.

8.4 CASO 3: DIREÇÃO DAS LÂMINAS

8.4.1 Análise Estática

Por fim, de forma análoga aos demais casos, da análise estática computacional, são obtidos o deslocamento máximo e o fator de segurança da estrutura com lâminas $[0/45]_T$ em cada face, expostos na Tabela 8.6. Os valores para a situação em que as lâminas são todas na mesma direção podem ser encontradas nos resultados do caso 1.

Tabela 8.6 – Resultados estáticos para a situação com uma das camadas de lâminas a 45°.

$[0/45]_T$	
Deslocamento [mm]	0,503
FS [Hill]	9,02

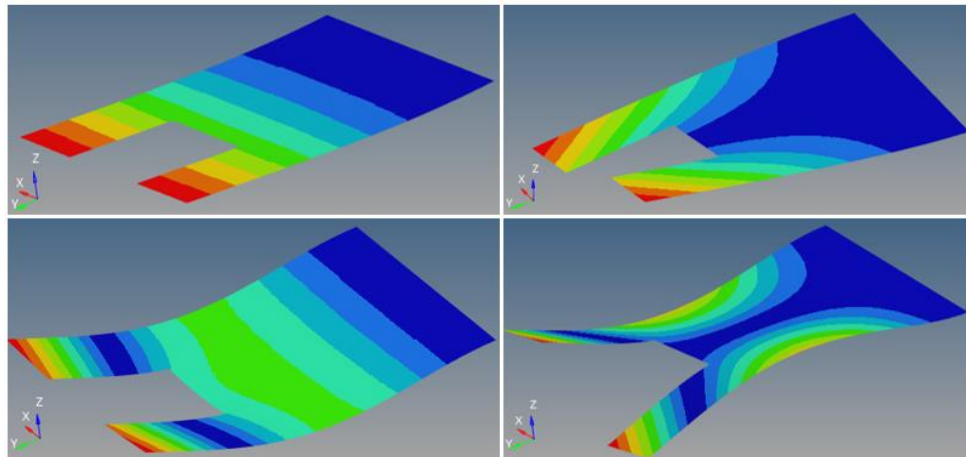
Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Comparando os resultados com os obtidos para as lâminas $[0/0]_T$, percebe-se uma diminuição no deslocamento, enquanto há um aumento no fator de segurança da estrutura, mantendo a mesma massa.

8.4.2 Análise Dinâmica

Já para a análise modal, os quatro primeiros modos de vibrar da estrutura com lâminas $[0/45]_T$, em cada face, são mostrados na Figura 8.7 e os valores das frequências naturais para os modos de vibrar são listados na Tabela 8.7. Para a situação com lâminas na disposição $[0/0]_T$, os valores de frequência e os modos de vibrar são vistos na análise dinâmica do caso 1.

Figura 8.7 – Quatro primeiros modos de vibrar para o caso com lâminas dispostas em $[0/45]_T$.



Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Tabela 8.7 – Resultados para a situação com uma das camadas de lâminas a 45° .

Modo	$[0/45]_T$ Frequência [Hz]
Primeiro	31,83
Segundo	58,36
Terceiro	163,98
Quarto	188,62

Fonte: Desenvolvida pelo autor, 2021.

Comparando os resultados com os obtidos para as lâminas na mesma direção, é possível perceber uma pequena influência nas frequências de cada modo, em que no primeiro e terceiro modos há uma pequena redução nos seus valores, enquanto no segundo e quarto modos ocorre um elevação. Isso ocorre por conta do ângulo de 45° na disposição das lâminas influenciarem as frequências naturais da estrutura, fazendo com que os modos em flexão diminuam, enquanto os dos modos em torção aumentem.

9 CONCLUSÕES

O objetivo geral deste trabalho consiste em apresentar uma análise estática e dinâmica do comportamento de uma estrutura em material compósito do tipo placa-sanduíche, além da realização de comparações para casos em que se varia a estrutura.

Dos resultados obtidos das análises lineares estáticas e modais feitas em elementos finitos por simulação computacional, é possível observar que o núcleo polimérico de material do tipo colmeia, conhecido como *Honeycomb*, mostra-se mais eficaz para as aplicações em placas de motor para aeronaves radio controladas, visto que apresentam uma confiabilidade maior e aumentam a competitividade do projeto.

Em relação ao número de lâminas de fibra de carbono em cada face da placa, é perceptível que com o aumento do número delas o fator de segurança, pelo critério de Hill, apresenta uma elevação, porém há um aumento na massa da estrutura, demonstrando que o aumento de número de lâminas é desnecessário para o tipo de aplicação, visto que diminui a competitividade do projeto.

Para o último caso, a variação da direção das lâminas em 45° para a segunda camada, há uma variação muito pequena nos resultados das frequências naturais obtidas, visto que para os modos de vibrar em flexão essa situação mostra-se mais eficiente, mas para os modos em torção, a situação com as lâminas nas mesmas direções se mostra melhores. Porém, da análise estática, observa-se um comportamento melhor vindo da situação $[0/45]_T$, visto que o fator de segurança é superior com a diminuição no deslocamento máximo da estrutura.

9.1 TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para trabalhos futuros tem-se a fabricação das placas-sanduíche, para todas as situações estudadas, para que sejam feitos corpos de prova, para obtenção das propriedades mecânicas, e a obtenção de uma malha experimental, com o auxílio dos equipamentos do laboratório de acústica da universidade, para que seja possível realizar uma análise modal experimental também, servindo para comparação e validação do modelo computacional.

Outra sugestão é de prender as placas confeccionadas em bancadas de ensaio estáticas e dinâmicas presentes na Equipe Albatroz, com o conjunto moto propulsor acoplado a elas.

Desse modo, pode-se estudar a influência da vibração do motor nos modos de vibração da estrutura, para implementação no modelo de elementos finitos.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CALIRI JUNIOR, Maurício F. **Modelo de Material para Espumas Poliméricas Aplicadas a Estruturas Aeronáuticas em Material Compósito Sanduíche**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- CALLISTER, William D.; RETHWISCH, David G. **Ciência e Engenharia de Materiais: Uma introdução**. 9. ed. São Paulo: LTC, 2016.
- CARDOSO, Eduardo L.; FONSECA, Jun S. O. **Mecânica dos Sólidos III**. Porto Alegre: [s. n.], 2003.
- CHRISTOFF, Bruno G. **Determinação De Propriedades Macromecânicas em um Material Compósito Laminado**. 2012. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.
- DIAS, C. G. B. T.; SANTOS, E. J. S.; BRITOA, R. S.; OLIVEIRA, V. C. C.; TAKETA, V. M. Y. R. **Análise Mecânica de Estruturas Sanduíche com Diferentes Núcleos**. Universidade Federal do Pará, Natal, p. 1-11, 6 nov. 2016.
- GUTIÉRREZ, Juan C. H.; RUBIO, Juan C. C.; FARIA, Paulo E. de; DAVIM, João P. **Usabilidade de Materiais Compósitos Poliméricos para Aplicações Automotivas**. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, p. 1-9, 1 jul. 2014.
- MARINUCCI, Gerson. **Materiais Compósitos Poliméricos: Fundamentos e Tecnologia**. 1. ed. São Paulo: Artliber, 2011.
- MENDONÇA, Paulo de Tarso R. **Materiais Compostos & Estruturas - Sanduíche**. 1. ed. Florianópolis: Orsa Maggiore, 2005.
- PEREIRA, José C. **Curso de projeto estrutural com materiais compostos**. Florianópolis: [s. n.], 2005.
- REDDY, Junuthula N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press LLC, 2004.
- SOARES, Gabriel; DAUFENBACH, Eike. **Desempenho**. Equipe Albatroz AeroDesign, Joinville, p. 1-31, 31 jul. 2019.
- STEIN, Lucas P.; TEZZA, Felipe B.; SHIMOMURA, Rafael Y. K. **Estruturas e Ensaio Estruturais**. Equipe Albatroz AeroDesign, Joinville, p. 1-54, 31 jul. 2019.
- TITA, Volnei. **Projeto e Fabricação de Estruturas em Material Compósito Polimérico**. São Carlos: [s. n.], 2006.