



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEM
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE
INÉRCIA DE AERONAVES RÁDIO
CONTROLADAS PELO MÉTODO DE
PÊNULO SIMPLES.**

OTÁVIO AUGUSTO LIMA DE OLIVEIRA

JOINVILLE, SC
2021

OTÁVIO AUGUSTO LIMA DE OLIVEIRA

**DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE AERONAVES
RÁDIO CONTROLADAS PELO MÉTODO DE PÊNULO SIMPLES.**

Trabalho de conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

JOINVILLE, SC

2021

OTÁVIO AUGUSTO LIMA DE OLIVEIRA

**DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE AERONAVES
RÁDIO CONTROLADAS PELO MÉTODO DE PÊNDBULO SIMPLES.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC0001) do Curso de Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora:

Orientador:

Prof. Dr. Ricardo de Medeiros
UDESC/CCT

Membros:

Me Eng. Douglas Negri
Senai/Joinville

Eng. Kleison Antonio Possenti
UDESC/CCT

Joinville, 13 de abril de 2021.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família por todo o apoio dado a mim durante a jornada que percorri até este momento tão importante, e por terem tornado toda essa experiência muito mais fácil com vocês ao meu lado. A minha incrível namorada Isabel, por todo o incentivo durante esse período de TCC, embora tenhamos passado essa etapa separados por 10.000 Km, o seu apoio foi essencial para essa conquista.

Agradeço aos amigos que fiz durante a faculdade por todo o companheirismo nos momentos bons e ruins desses últimos anos.

Agradeço ao professor orientador Dr. Ricardo de Medeiros, por toda ajuda, apoio e a confiança em mim depositada.

Por fim, agradeço a Equipe Albatroz, por todo o crescimento pessoal e profissional que obtive lá dentro. Também, por todas as amizades incríveis que fiz e que com certeza levarei para o resto da minha vida.

A todos vocês, meu mais sincero obrigado!

RESUMO

Para que uma aeronave apresente uma ótima qualidade de voo é essencial que ela tenha uma boa manobrabilidade. Para tal, o dimensionamento das superfícies sustentadoras e das superfícies de controle devem ser feitos de maneira correta e com dados fiéis. Quando se faz o dimensionamento das superfícies de controle o momento de inércia é importante na consideração dos movimentos de decolagem e de manobras da aeronave. Este dado dentro da Equipe Albatroz é comumente obtido através de *softwares* de *CAD*. Entretanto, este dado pode ser obtido através de ensaio realizados em laboratórios. Como forma de refinar os cálculos de estabilidade e controle, aumentando a confiabilidade do projeto e consequentemente aprimorar a nota de relatório da equipe na competição *SAE Brasil AeroDesign*. Neste estudo buscou-se quantificar o momento de inércia ao longo do *eixo y* da aeronave do ano de 2018 da Equipe Albatroz *AeroDesign*. A aquisição deste dado deu-se através da construção de um aparato que permitiu a medição do período de oscilação da aeronave por meio do método de pêndulo simples. Tendo os resultados dessas análises, quantificou-se o valor real do momento de inércia da aeronave em torno do *eixo y*, paralelo a envergadura da asa. De forma geral, o valor do momento de inércia quantificado teve uma diferença menor que 5% em relação ao computacional, que vinha sendo usado pela equipe. Portanto, a utilização deste método experimental seria adequada para a obtenção desta propriedade da aeronave ainda na fase conceitual do projeto, onde protótipos são construídos ainda sem o modelamento das aeronaves no *software*.

Palavras-Chave: Momento de inércia. Pêndulo simples. Análise experimental. Aeronave rádio controlada.

ABSTRACT

For an aircraft to provide great flight quality it is essential that it has good maneuverability. For this, the design of the control surfaces must be done correctly and with reliable data. When the design of the control surfaces is made, the moment of inertia is important in considering the takeoff and maneuvering movements of the aircraft. This data within the Albatroz Team is commonly obtained through *CAD software*. However, this data can be obtained through tests performed in laboratories. To refine the stability and control calculations, increasing the reliability of the project and consequently improving the team's report score in the *SAE Brazil AeroDesign* competition. This research sought to quantify the moment of inertia along the *y-axis* of the 2018 aircraft of the Albatroz *AeroDesign* Team. The acquisition of this data occurred through the construction of an apparatus that allowed the measurement of the period of oscillation of the aircraft through the simple pendulum method. With the results of these analyses, the real value of the aircraft moment of inertia around the *y-axis*, parallel to the wingspan, was quantified. In general, the quantified value of the moment of inertia had a difference of less than 5% in relation to the computational one, which was being used by the team. Therefore, the use of this experimental method would be appropriate to obtain this property of the aircraft still in the conceptual phase of the project, where prototypes are built without modeling the aircraft in the *software*.

Keywords: Moment of inertia. Simple pendulum. Experimental analysis. Radio controlled aircraft.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Aeronave da Classe Regular 2018 (Equipe Albatroz <i>AeroDesign</i>).	12
Figura 2.1 – Sistema com um grau de liberdade (a) e digrama de corpo livre (b).	19
Figura 2.2 – Sistema massa-mola – Oscilação.	20
Figura 2.3 – Período de oscilação.....	21
Figura 2.4 – Forças atuantes na partícula.	22
Figura 2.5 – Eixos de coordenadas.....	25
Figura 2.6 – Um McDonnell Douglas MD-11 com nariz levantado.	26
Figura 2.7 – Aeronave e aparato inclinadas.	27
Figura 2.8 – Diagrama esquemático do ângulo de inclinação.....	28
Figura 2.9 – Teorema dos Eixos Paralelos.	29
Figura 3.1 – Fluxograma do estudo.....	30
Figura 3.2 – Estrutura modelada do aparato.....	31
Figura 3.3 – Estrutura construída do aparato.....	32
Figura 3.4 – Condições de pêndulo simples (cabo de aço inextensível).....	33
Figura 3.5 – Setup de configuração do pêndulo.....	34
Figura 4.1 – Propriedades da Asa.....	38
Figura 4.2 – Propriedades da Fuselagem.....	38
Figura 4.3 – Propriedades da Empenagem Horizontal.....	39
Figura 4.4 – Propriedades do Motor.....	39
Figura 4.5 – Propriedades do Avião.....	40
Figura 4.6 – Momento de inércia teórico.	40
Figura 4.7 – Modelagem do corpo padrão (placa plana).....	41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Histórico de classificação da Equipe Albatroz	12
Tabela 3.1 – Propriedades do Aparato.....	32
Tabela 4.1 – Propriedades da Aeronave.	40
Tabela 4.2 – Propriedades do corpo padrão.....	41
Tabela 4.3 – Parâmetros para determinação de $Z'W$ e $ZUAV$	42
Tabela 4.4 – Valores de $Z'W$ e $ZUAV$ para a aeronave inclinada.....	42
Tabela 4.5 – Valores obtidos nas 10 medições de oscilação do aparato e do conjunto (10 oscilações).....	43
Tabela 4.6 – Determinação do momento de inércia pelo método do pêndulo composto.....	43
Tabela 4.7 – Erro relativo ao momento de inércia da Aeronave.	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	MOTIVAÇÃO	10
1.2	OBJETIVOS	13
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	ESTADO DA ARTE.....	15
2.2	VIBRAÇÕES	16
2.2.1	Movimento Harmônico Simples	17
2.2.2	Vibração Livre Não Amortecida	18
2.3	PÊNDULO	21
2.4	ESTABILIDADE E CONTROLE	24
2.4.1	Centro de Gravidade	27
2.4.2	Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner)	28
3	METODOLOGIA	30
3.1	MATERIAIS E EQUIPAMENTOS	31
3.2	PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL.....	33
3.3	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.....	34
3.3.1	Momento de Inércia	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	37
4.1	ANÁLISE INERCIAL	37
4.1.1	Análise inercial computacional.....	37
4.1.2	Análise Inercial Experimental	41
4.1.3	Comparação entre os resultados computacional e experimental	43
5	CONCLUSÕES	45
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	46

1 INTRODUÇÃO

A necessidade de acuracidade na medição das propriedades inerciais das aeronaves se tornou evidente por meados de 1926 devido ao crescente número de projetos de novas aeronaves durante o período das guerras. Características de massa e inércia (localização do centro de gravidade, momento de inércia) devem ser conhecidos para prever o desempenho e as condições de voo limitantes para as aeronaves (WOLOWICZ; YANCEY, 1974).

Em outras palavras, eles expressam a resposta do avião e sua capacidade de realizar a missão, seja em voo nivelado ou em uma manobra. A estimativa de massa e das propriedades inerciais de uma aeronave devem ser examinados durante a fase de projeto conceitual a fim de ter um dimensionamento adequado das superfícies ou para determinar a complexidade do sistema de controle.

Para todas as aeronaves já construídas no Projeto Albatroz *AeroDesign* foram estimadas através de cálculos simplificados ou do modelamento em softwares de Desenho Assistido por Computador (DAC; em inglês: *Computer Aided Design - CAD*), mas essas estimativas nunca foram confirmadas através de experimentos. Portanto, o uso desses dados para os cálculos de estabilidade e controle deixa um elemento de dúvida nos resultados. Desta forma, com este estudo buscar-se-á quantificar e validar as propriedades inerciais da aeronave através de um ensaio experimental.

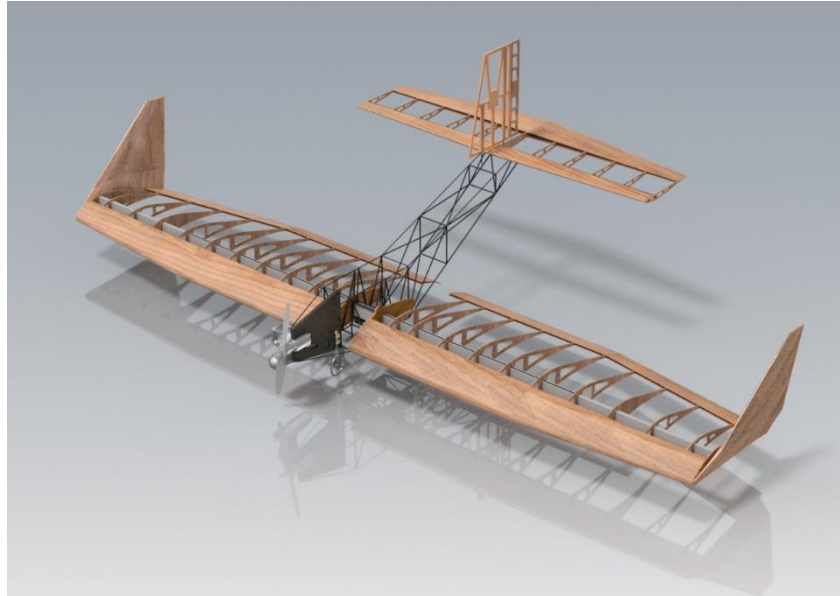
1.1 MOTIVAÇÃO

De forma a garantir o entendimento da motivação deste trabalho e sua aplicação, é necessário que se conheça sobre a competição SAE Brasil *AeroDesign*, a Equipe Albatroz e a área que se beneficiará deste trabalho.

A competição SAE *AeroDesign* começou a ser realizada no Brasil no ano de 1999 e ao longo dos anos vem crescendo no país, tanto em quantidade de equipes participantes quanto em qualidade dos projetos. O principal objetivo é possibilitar intercâmbio de técnicas e conhecimentos de Engenharia Aeronáutica, por meio das aplicações práticas e da competição entre equipes.

A competição é composta por três categorias distintas: Regular, Micro e *Advanced*. Nela, as equipes são avaliadas de duas formas: Competição de Projeto e Competição de Voo. O desafio ocorre anualmente, iniciando no período entre janeiro e fevereiro quando é liberado para as equipes o regulamento que contém as restrições específicas para cada classe, restrições estas que se modificam todos os anos, e o se encerra no final do ano, na cidade de São José dos Campos, em uma competição que dura quatro dias entre os meses de outubro e novembro, quando acontece a apresentação do projeto para os jurados da SAE e a competição de voos das aeronaves.

A classe Regular é a categoria mais tradicional da competição com o maior número de equipes competidoras, costumeiramente é exigido que as aeronaves dessa categoria tenham as características de um avião cargueiro, como mostra a Figura 1.1, transportando a maior quantidade possível de carga, estando limitada à 20 Kg, além de respeitar restrições geométricas e volumétricas, como soma de dimensões máximas. A classe Micro, habitualmente, é a categoria mais inovadora e tem a tendência de apresentar aeronaves menores. Nos últimos anos o regulamento exigiu dessa categoria aviões desmontáveis, que coubessem em caixas e possuísse um sistema para ejetar a carga em voo. Mais recentemente as aeronaves da classe Micro deveriam ejetar a carga através da manobra LAPES (*Low-Altitude Parachute-Extraction System*). A classe *Advanced* é a que possui menos limitações, porém exige a utilização de tecnologia de telemetria embarcada na aeronave para aquisição de dados durante o voo. Como por exemplo, medição de velocidade, geolocalização por GPS, e mais recentemente a missão de reconhecimento com um sistema de câmeras.

Figura 1.1 – Aeronave da Classe Regular 2018 (Equipe Albatroz *AeroDesign*).

Fonte: Produção do próprio autor.

A Equipe Albatroz *AeroDesign* foi criada em 2001, composta por estudantes do Centro de Ciências e Tecnologia da UDESC, a Universidade do Estado de Santa Catarina. Desde o ano de sua criação a equipe já participou de 18 edições da Competição SAE Brasil *AeroDesign*, tendo competido inicialmente apenas na classe Regular. Devido a falhas no repasse de conhecimento entre os integrantes, em 2008 a Equipe fechou as portas, mas acabou retornando em 2009 com uma nova equipe da classe Regular e desde 2013 vem competindo também na classe Micro. A partir do seu retorno as competições em 2009 a Equipe vem apresentando bons resultados. A Tabela 1.1 apresenta as classificações da equipe na competição de *AeroDesign* desde o seu retorno e 2009.

Tabela 1.1 – Histórico de classificação da Equipe Albatroz

Ano	Classificação
2013	19 ^a colocação na Classe Regular, 16 ^a colocação na Classe Micro Primeira competição com a presença das classes Regular e Micro do Albatroz
2014	24 ^a colocação na Classe Regular, 5 ^a colocação na Classe Micro
2015	18 ^a colocação na Classe Regular, 3 ^a colocação na Classe Micro
2016	12 ^a colocação na Classe Regular, 9 ^a colocação na Classe Micro
2017	15 ^a colocação na Classe Regular, 9 ^a colocação na Classe Micro
2018	36 ^a colocação na Classe Regular, 1 ^a colocação na Classe Micro
2019	5 ^a colocação na Classe Regular, 3 ^a colocação na Classe Micro Primeira participação da equipe na SAE East AeroDesign, Classe Micro

Fonte: Autoria própria.

O nível da competição entre as equipes vem se elevando ano após ano, por isso, para se manter entre as melhores equipes do país é fundamental garantir uma boa nota nos relatórios. Desta forma, pretende-se com esse trabalho garantir a qualidade dos dados de momento de inercia e posição do CG da aeronave. Tais dados são cruciais para os cálculos desenvolvidos em todas as áreas, em especial a área de Estabilidade e Controle, que será abordada mais à frente.

Atualmente tais dados são obtidos de forma computacional, através do qual não é possível garantir a precisão. Sob esta perspectiva, esse trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia que permita submeter as aeronaves a um ensaio a fim de quantificar os valores reais de momento de inercia e posição de CG. Este tipo de análise além de garantir a qualidade dos dados utilizados em projeto, também é bem-visto pelos jurados da competição, uma vez que os ensaios práticos para a área de Estabilidade e Controle são de difícil execução, logo, a implementação desta metodologia no relatório da área, contribuirá para uma boa pontuação nas notas de relatório da equipe.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma metodologia para a quantificação dos valores de momento de inércia e posição do centro de gravidade para aeronaves radio controladas. Com isso, aumentar a qualidade dos modelos computacionais empregados no projeto de aeronaves da Equipe Albatroz *AeroDesign* construídas para a competição.

Assim, esta pesquisa possui como objetivos complementares:

- ✓ Determinar o CG e Momento de Inércia da aeronave numericamente utilizando a teoria de pêndulo simples;
- ✓ Desenvolver uma metodologia prática através de um aparato de ensaio;
- ✓ Contribuir para aprimorar a fidelidade dos cálculos de estabilidade da aeronave, mecânicas de voo e rotação na decolagem;

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura deste trabalho é planejada de tal forma que o leitor possa ser habituado aos conceitos matemáticos necessários para o entendimento da metodologia proposta, a fim de determinar o momento de inércia e posição do CG de uma aeronave radio controlada. Assim, o trabalho é estruturado da seguinte forma:

- **Primeiro Capítulo** – Neste capítulo, apresenta-se um breve retrato a respeito da competição e da trajetória da Equipe Albatroz AeroDesign, bem como a motivação e os objetivos da produção deste trabalho. Por fim, através dos objetivos, são resumidos os pontos principais a serem vencidos pela metodologia empregada.
- **Segundo Capítulo** – Neste capítulo, conceitos do fenômeno da vibração são expostos, bem como a dedução do movimento oscilatório através das equações horárias de posição velocidade e aceleração. Apresenta-se a teoria do movimento harmônico simples, que é base para o entendimento do modelo de pêndulo simples. Conceitos e importâncias da área de estabilidade e controle para a aeronave. Por fim, é exposta a importância do posicionamento correto do Centro de Gravidade de uma aeronave e o equacionamento para quantificação da sua posição vertical.
- **Terceiro Capítulo** – Neste capítulo, apresenta-se um fluxograma da metodologia utilizada para realizar o trabalho, os materiais utilizados, bem como o detalhamento dos procedimentos computacional e experimental. Por fim, mostra-se o equacionamento do momento de inércia da aeronave em torno do seu *eixo y*.
- **Quarto Capítulo** – Neste capítulo, mostra-se dois estudos de caso. O primeiro é realizado através do *software*, com o objetivo de validar a modelagem computacional anteriormente empregada pela equipe. São expostos os valores de inércia e massa calculadas pelo *software*. O segundo consiste nos dados obtidos experimentalmente em laboratórios. São expostas tabelas com os valores de distância essenciais para o equacionamento, bem como os valores de período de oscilação da aeronave e do aparato coletados empiricamente.
- **Quinto Capítulo** – Neste capítulo apresenta-se as conclusões obtidas através dos resultados e as principais discussões realizadas no Capítulo 4. Desta forma, finaliza-se o trabalho com as principais contribuições e sugestões para trabalhos futuros nesta área.
- **Sexto Capítulo** – Neste capítulo, são referenciadas todas as fontes utilizadas como base neste trabalho, desde as citações indiretas utilizadas em partes do texto, até as citações diretas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 ESTADO DA ARTE

O processo de concepção de uma aeronave requer medições precisas das propriedades inerciais, assegurar que estas medições são confiáveis é um dos problemas cruciais a ser resolvido ao estudar movimentos rotativos de aeronaves ou ao projetar o sistema de controle de voo da aeronave. Por isso, abordagens diversas já foram apresentadas em artigos e trabalhos, a fim de desenvolver uma metodologia confiável para a medição de tais propriedades.

Para isso, realizou-se uma pesquisa nas bases de dados da CAPES e Google Scholar, adotando como descritores, Momento de Inércia Pêndulo, Momento de Inércia Pêndulo UAV, dos 110 artigos trazidos pelas bases de dados, foram selecionados 8 artigos tendo, como critério de inclusão todos os artigos que trouxessem o contexto de determinação do momento de inércia de aeronaves, utilizando-se da teoria física de pêndulos.

Há 3 trabalhos que empregam o método de pêndulo de torção bifilar: no trabalho de Krznar *et al.* (2018) os dados de aceleração angular são adquiridos através do próprio sistema integrado de sensores na aeronave, transmitidos para o rádio controle, também, neste método os componentes da aeronave são ensaiados separadamente. Ma *et al.* (2015) utilizaram de um sensor micro eletromecânico para aquisição dos dados. Ambos os trabalhos realizam a metodologia em aeronaves do estilo quadricoptero. Jarsin e Mueller (2009) empregaram uma abordagem não linear ao levar em consideração a massa adicional de ar retida nas partes internas da aeronave, considerando também o amortecimento no sistema, o que resulta, segundo o artigo, na necessidade de uma resolução computacional da equação não linear de movimento.

Junos, Mohd Suhadis e Zihad (2014) utilizaram do pêndulo de torção bifilar apenas para a determinação do momento de inércia no eixo de guinada da aeronave, para os eixos de arfagem e rolagem o método empregado é o pêndulo físico, para tanto, construiu-se um equipamento de balanço onde a aeronave pôde ser alocada, para realização do ensaio. Desta forma, o momento de inércia da aeronave é obtido subtraindo o valor do momento de inércia desse equipamento, do valor total do sistema. O artigo ainda usa a adição de uma massa desbalanceada ao sistema para localizar a posição do CG do conjunto. A nota técnica de Gracey (1948) apresentou uma abordagem muito semelhante, se diferenciando apenas na forma como

a posição do CG do conjunto é localizada, os pesquisadores utilizaram da suspensão de uma linha de prumo, como um método mais prático para o ensaio.

Uma abordagem diferente foi desenvolvida por Dantsker *et al.* (2018), nessa metodologia a aeronave não permanece suspensa em fios, mas sim, acoplada diretamente ao eixo de rotação. Para que ocorram as oscilações na aeronave, um disco acoplado ao eixo está conectado à um contrapeso através de um cabo, dessa forma quando o cabo é enrolado ao disco, o contrapeso exerce a sua função de retornar o conjunto ao estado inicial, promovendo assim a oscilação no sistema. O emprego desse método implica na necessidade de calibrar o contrapeso para corresponder ao momento de inércia da aeronave ensaiada. Ademais, visto que a aeronave está acoplada diretamente ao eixo é necessário a medição separada dos momentos de inércia da fuselagem e da asa.

Quanto ao erro dos valores obtidos, Habeck e Seiler (2016), que também usaram do método de pêndulo de torção bifilar, destacam que o valor do período para 3, 5 e 10 oscilações nunca excederam uma diferença maior que um centésimo de segundo. Destacou também que a quantidade mínima de amortecimento no sistema resultou em um erro inferior a 0,01% no momento de inércia e, por isso, foi negligenciado.

2.2 VIBRAÇÕES

Vibrações são quaisquer movimentos oscilatórios dos corpos como resposta de forças que a eles estão associadas (THOMSON, 1978). Sendo assim, os sistemas vibratórios, como podem ser tratados estes corpos, incluem meios para armazenar energia potencial (molas ou elasticidade), meios para armazenar energia cinética (massas ou inércias) e um meio para a dissipação da energia (amortecedores). Logo, a vibração de um sistema vibratório consiste na alternância entre as duas formas de energia de potencial para cinética e vice-versa. No caso de um sistema amortecido após cada ciclo ocorre a dissipação de tais energias (RAO, 2009).

As classificações das principais vibrações que ocorrem nos sistemas mecânicos são as seguintes:

- **Vibrações livres ou forçadas:** vibrações livres ocorrem quando após uma perturbação inicial o sistema continua a oscilar por conta própria sem a atuação de forças externas. No caso em que houver a atuação de uma força externa após o início da oscilação, a vibração é dita forçada (RAO, 2009).

- **Amortecidas ou não amortecidas:** no caso em que não houver dissipação de energia durante a oscilação, a vibração é considerada não amortecida. Porém, se houver qualquer perda de energia, ela é denominada amortecida. É válido ressaltar que sistemas reais sempre apresentam perdas de energia, por menores que sejam (RAO, 2009).
- **Lineares e não lineares:** são consideradas lineares quando todos os componentes básicos do sistema se comportam de maneira linear. Caso algum componente se comporte de forma não linear a vibração é denominada não linear. Se a vibração for linear, as técnicas matemáticas são bem desenvolvidas e o princípio da superposição é válido para este caso (RAO, 2009).
- **Determinísticas e aleatórias:** se o valor ou magnitude da excitação aplicada no sistema é conhecido em qualquer instante de tempo, a excitação é dita determinísticas. Caso isto não ocorra, a vibração é conhecida como aleatória, e o valor da excitação em dado instante não pode ser previsto (RAO, 2009).

Classificadas as vibrações, pode-se então listar algumas definições e terminologias referentes ao movimento harmônico simples, necessários para o estudo de vibrações. Partiu-se inicialmente de uma análise mais básica através de sistema de vibrações livres e estendeu-se mais especificamente para um sistema pendular.

2.2.1 Movimento Harmônico Simples

O Movimento Harmônico Simples (MHS) é restrito a sistemas conservativos, onde não está presente a ação de forças dissipativas, isto é, sistemas não amortecidos. No MHS, há a presença de uma força restauradora que atua impondo com que o sistema retorne para a posição de equilíbrio, onde a posição do corpo é uma função periódica.

As grandezas mais relevantes para o estudo do MHS são as que ajudam na descrição da posição do corpo durante as oscilações, por meio das funções horárias do MHS. Funções horárias são as equações que dependem do tempo t como variável independente. Tais grandezas estão listadas a seguir:

- **Amplitude:** maior deslocamento que um corpo vibratório atinge em relação à sua posição de equilíbrio, indicado como A .

- **Período de oscilação:** tempo transcorrido pelo corpo para completar um ciclo de movimento. Retratado como T e definido pela equação $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- **Frequência de oscilação:** número de ciclos que o corpo realiza por unidade de tempo, indicado por f e definido pela equação $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.
- **Frequência angular:** velocidade com que o ângulo de fase é percorrido. Indicado por ω e definido por $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

A equação horária da posição, velocidade e aceleração nos permite determinar tais parâmetros de um corpo em MHS em determinado instante de tempo, definidas por

$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi_0), \quad (2.1)$$

$$\dot{u}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0), \quad (2.2)$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0), \quad (2.3)$$

onde $u(t)$, $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$ representam a posição, velocidade e aceleração, respectivamente.

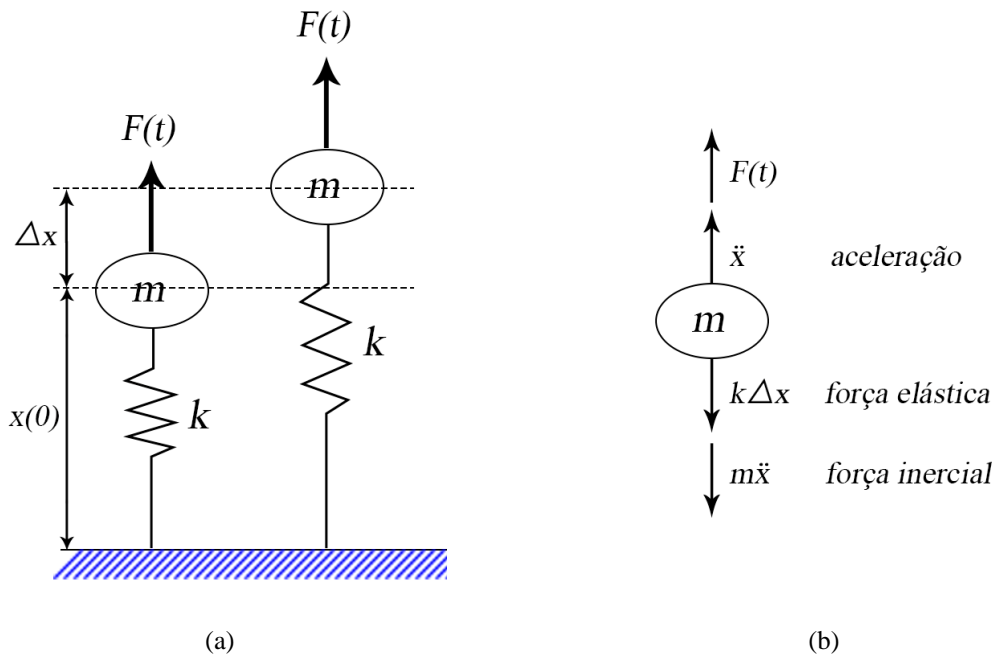
2.2.2 Vibração Livre Não Amortecida

As vibrações livres ocorrem em sistemas nos quais o movimento resulta apenas de perturbação inicial, não havendo nenhuma atuação externa após essa perturbação inicial (RAO, 2009).

Ao se conceder ao pêndulo um ângulo inicial ele entrará em movimento tendendo a retornar à sua posição de equilíbrio. Ao passar por ela o movimento não se interrompe, pois, a massa do pêndulo transformou a energia potencial gravitacional armazenada, em energia cinética. Como conceituado anteriormente, no caso em que não há dissipação, enquanto essas energias permanecerem no sistema o movimento oscilatório continuará. Porém em sistemas reais de vibração livre o sistema perturbado tende ao repouso, isto é, quando a resultante de todas as forças atuantes sobre o sistema é nula.

A Figura 2.1 mostra um modelo simples de um sistema de um grau de liberdade sem o amortecimento, o conhecido sistema massa-mola.

Figura 2.1 – Sistema com um grau de liberdade (a) e digrama de corpo livre (b).



Fonte: Produção do próprio autor.

Iniciando com a elaboração do DCL da massa mostrado na Figura 2.1, aplica-se a Segunda Lei de Newton para obter a equação de movimento como

$$-k\Delta x - m\ddot{x} + F(t) = 0, \quad (2.4)$$

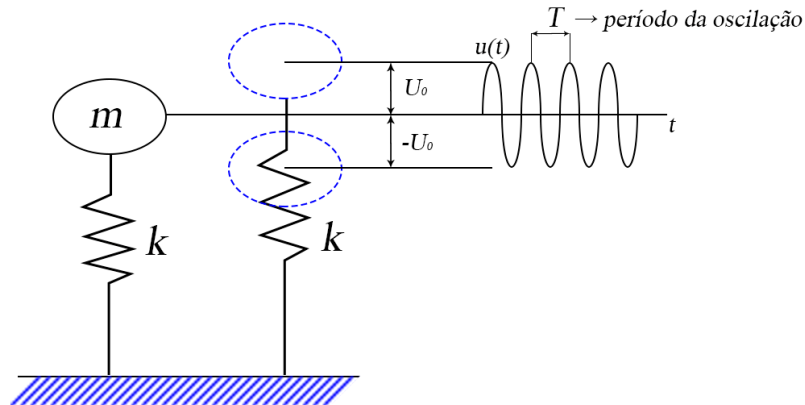
ou

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F(t), \quad (2.5)$$

desta forma, pode-se definir: m a massa do sistema, k a rigidez, $F(t)$ a força em função do tempo, \ddot{x} a aceleração e Δx o deslocamento. Obtemos assim a equação de equilíbrio.

Portanto, pode-se verificar o que acontece quando o sistema é tirado da posição de equilíbrio. Isto é, implicando um deslocamento inicial U_0 , causando um movimento oscilatório a resposta segue um padrão, como ilustrado na Figura 2.2, mas com $F(t) = 0$ para todo e qualquer instante de tempo.

Figura 2.2 – Sistema massa-mola – Oscilação.



Fonte: Produção do próprio autor.

Que pode ser descrito na forma

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t), \quad (2.6)$$

como não temos a aplicação de forças externas ao longo de todo o tempo do movimento ($F(t) = 0$) e, derivando a Eq. (2.6) e na sequência substituindo em (2.5) e evidenciando $U_0 \cos(\omega t)$,

$$(k - \omega^2 m) U_0 \cos(\omega t) = 0, \quad (2.7)$$

a fim de garantir essa igualdade, em qualquer situação não trivial ($U_0 = 0$ ou $\cos(\omega t) = 0$). Obtemos,

$$k = \omega^2 m, \quad (2.8)$$

ou

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (2.9)$$

onde ω_n é denominado a frequência angular natural do sistema de 1 grau de liberdade. Cujas unidade é,

Sendo assim o período de oscilação, como mostra a Figura 2.3 é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.10)$$

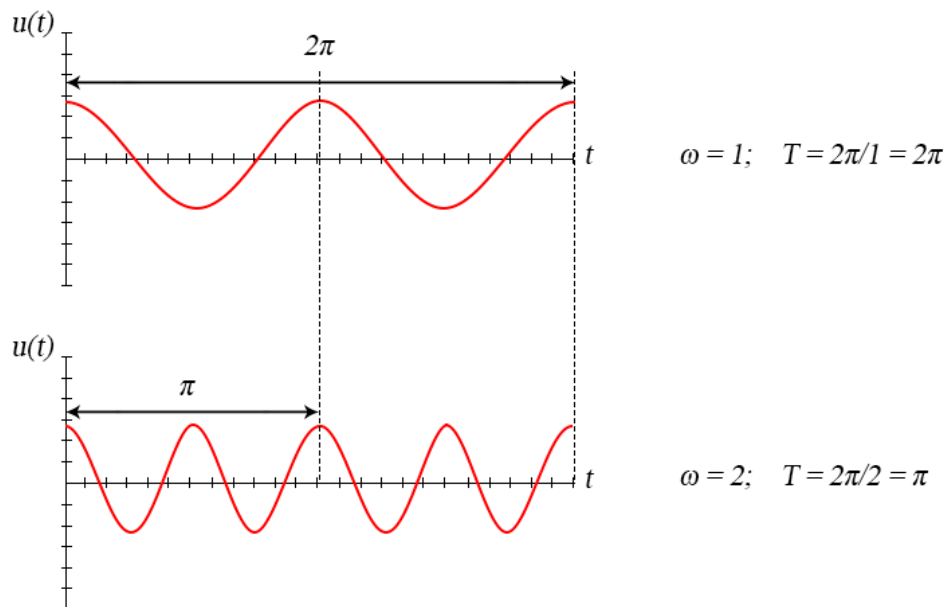
e a frequência (inverso do período) equivale a

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.11)$$

Portanto, tem-se a frequência natural de vibração do sistema como sendo,

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}, \quad \left[\frac{1}{s} \right] \text{ ou } [Hz]. \quad (2.12)$$

Figura 2.3 – Período de oscilação.



Fonte: Produção do próprio autor.

2.3 PÊNDULO

O pêndulo simples é um mecanismo oscilatório ideal, que executa um MHS. O mecanismo de restauração do sistema, neste caso, é a força gravitacional. O sistema consiste em uma massa “partícula” suspenso por um fio inextensível e de massa desprezível. A outra

extremidade do fio é fixa. A respeito de um pêndulo executando MHS, pode-se afirmar que a energia mecânica do sistema oscilante é conservada, e que o torque devido à gravidade é proporcional ao negativo do deslocamento angular.

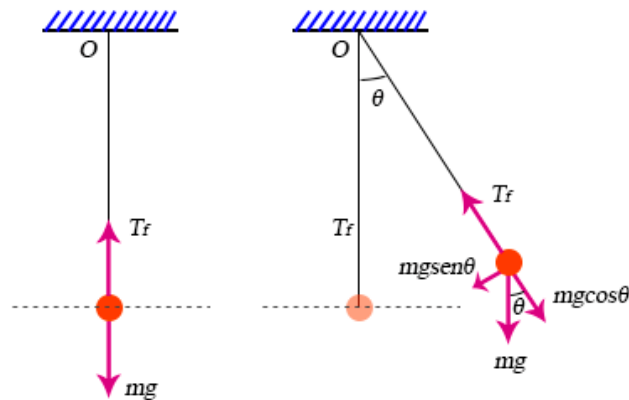
O cumprimento total dos requisitos, como referido, impõe certas limitações à construção e funcionamento do pêndulo simples. Pode inferir-se que não é possível cumprir os requisitos com rigor, mas pode-se aproximar ao caso ideal.

Como ilustra a Figura 2.4, no sistema há duas forças atuando na massa da partícula, conforme

$$T_f - mg = 0, \quad (2.13)$$

sendo uma a força gravitacional mg que atua verticalmente para baixo. A outra é a tensão T_f no fio. Em posição de equilíbrio a partícula repousa na posição vertical com força resultante zero.

Figura 2.4 – Forças atuantes na partícula.



Fonte: Produção do próprio autor.

Em uma posição deslocada, um torque T_f sobre o ponto 'O', atua na partícula com a tendência de reestabelecer a posição de equilíbrio. A fim de calcular esse torque, é necessário decompor a força peso em duas componentes perpendiculares, (i) $mg\cos(\theta)$ ao longo do fio e (ii) $mgsen(\theta)$ tangente ao caminho do movimento da partícula.

Juntamente com a tensão no fio e as componentes da gravidade, há três forças atuantes no sistema de pêndulo simples. As linhas de ação da tensão e da componente da gravidade ao longo do fio passam pelo ponto 'O'. Dessa forma, o torque em torno desse ponto causado por

essas duas forças é nulo. O torque na massa da partícula é produzido apenas pela componente tangencial da gravidade. Assim, o torque é:

$$T_f = -L * mg \text{sen}(\theta), \quad (2.14)$$

onde L é o comprimento do fio. Pode-se agora usar a relação $T_f = I\alpha$, a fim de obter relação com a aceleração angular,

$$T_f = I\alpha = -mgL \text{sen}(\theta), \quad (2.15)$$

$$\alpha = -\frac{mgL}{I} \text{sen}(\theta). \quad (2.16)$$

Para pequenos deslocamentos, é admissível considera que $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, linearizando assim a equação para,

$$\alpha = -\frac{mgL}{I} \theta, \quad (2.17)$$

comparando a equação obtida para aceleração angular com $\alpha = -\omega^2 \theta$, obtemos,

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{mgL}{I}\right)}. \quad (2.18)$$

Assim, substituindo a Eq. (2.18) em (2.10),

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{mgL}{I}\right)}}, \quad (2.19)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\left(\frac{mgL}{I}\right)}, \quad (2.20)$$

$$I = \frac{T^2 mgL}{4\pi^2}, \quad (2.21)$$

ou

$$I = \frac{T^2 b}{4\pi^2}, \quad (2.22)$$

onde $b = WL$, produto entre o peso da partícula e o comprimento do fio, e T é o período, ou seja, o tempo que a massa leva para completar uma oscilação. Essa equação mostra que o momento de inércia de qualquer corpo rígido pode ser determinado utilizando esta teoria se o valor para T é conhecido. Portanto, esta teoria do pêndulo simples pode ser utilizada para determinar o momento de inércia para uma aeronave.

Em resumo, sumariza-se as requisições de pêndulo simples, quer surjam devido à exigência de MHS ou devido a exigência de frequência independente da massa, como sendo:

- O ponto ‘O’ está livre de qualquer perda de energia devido a fricção.
- O fio é inextensível e de massa desprezível.
- Não há outra força externa atuante, além da gravidade.
- A amplitude angular do movimento é pequena.

2.4 ESTABILIDADE E CONTROLE

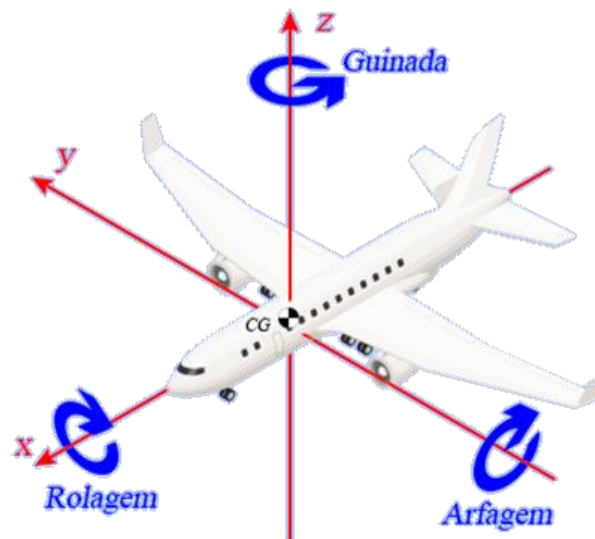
Qualidade de voo e facilidade de controle durante as manobras de uma aeronave, são assuntos estudados na estabilidade e controle. Por estabilidade podemos compreender como sendo a tendência da aeronave em retornar ao seu estado de equilíbrio depois de uma perturbação. Esta perturbação pode ser gerada pela ação de controle do piloto ou por fenômenos atmosféricos. Uma aeronave deve ter estabilidade suficiente para que o piloto não precise constantemente tomar o controle da aeronave devido distúrbio externos.

Duas condições são necessárias para a aeronave voar com sucesso. A aeronave deve ser capaz de atingir o equilíbrio no voo e ter a capacidade de manobra para uma grande faixa de velocidades de voo e altitudes. Para atingir o equilíbrio ou para desempenhar a manobra, a aeronave deve ser equipada com controles propulsivos e aerodinâmicos. O conceito e performance do sistema de controle é uma parte integrante da estabilidade e controle da aeronave.

Estabilidade é uma propriedade de um estado de equilíbrio. Para que um avião permaneça em voo uniforme constante, a força resultante, bem como o momento resultante sobre o centro de gravidade, deve ser igual a zero (NELSON, 1989). Uma aeronave que satisfaça esse requisito é dita como em estado de equilíbrio ou em um voo na condição de trimagem. Contudo, se as forças e momentos não equivalem a uma soma zero, a aeronave será sujeitada a aceleração translacionais e rotacionais.

Desta forma, o CG (centro de gravidade) é o pilar para a estabilidade e controle da aeronave, bem como avaliação das qualidades de manuseio. Todas as análises e avaliações tem como objetivo determinar os aspectos de navegabilidade da aeronave. Além disso, o CG é o centro do sistema de eixo de coordenadas no qual todos os cálculos são baseados, como ilustrado da Figura 2.5. Todos os momentos não aerodinâmicos são medidos em relação ao CG da aeronave. Segundo Sadrey (2013), a determinação do CG é uma tarefa vital no processo de projeto de aeronaves.

Figura 2.5 – Eixos de coordenadas.



Fonte: Produção do próprio autor.

O centro de massa ou centro de gravidade de um sistema complexo é a localização principal de todas as massas de um sistema. O termo centro de massa frequentemente usado como forma intercambiável com o centro de gravidade, mas eles são conceitos fisicamente diferentes. Ocorre de esses dois centros se coincidirem em um campo gravitacional uniforme, mas onde a gravidade não é uniforme, o centro de gravidade se refere a principal posição da força gravitacional no objeto. O centro de massa de um corpo nem sempre coincide com o centro geométrico. No caso de uma distribuição móvel de massa em um sistema composto, como os passageiros de uma aeronave de transporte, a posição do centro de massa não

corresponde a posição de nenhuma massa individual. A aplicação do centro de gravidade muitas vezes permite o uso de equações de movimento simplificados (por exemplo, lineares) para análises o movimento de um sistema dinâmico. O CG é também um ponto de referência conveniente para muitos outros cálculos em dinâmica, tais como o momento de inércia da massa.

As aeronaves devem ser estáveis, controláveis, e seguras para todos as posições de CG permissíveis durante o envelope de voo (NELSON, 1989). A segurança de uma aeronave é influenciada por vários fatores, incluindo a localização do CG, e a sobrecarga causará sérios problemas. Se o CG está posicionado, erroneamente, para frente na aeronave, a corrida de decolagem se tornará mais longa, devido à grande resistência inercial de rotação. Em alguns casos, a pista pode não ser suficiente para efetuar a decolagem. O ângulo de subida e a taxa de subida será reduzida.

Entretanto, no caso de o CG estar localizado, demasiadamente, para trás na aeronave durante o movimento de rotação para decolagem, o piloto pode não ter o controle e ocasionar que a cauda colida com o solo. Além disso, com a aeronave em repouso no solo e uma configuração de trens de pouso em triciclo, se as cargas forem alocadas de tal forma que o CG se mova para trás do trem de pouso principal, ocorrerá o tombamento da aeronave (SADREY, 2013). Um exemplo deste incidente com um McDonnell Douglas MD-11 é mostrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Um McDonnell Douglas MD-11 com nariz levantado.

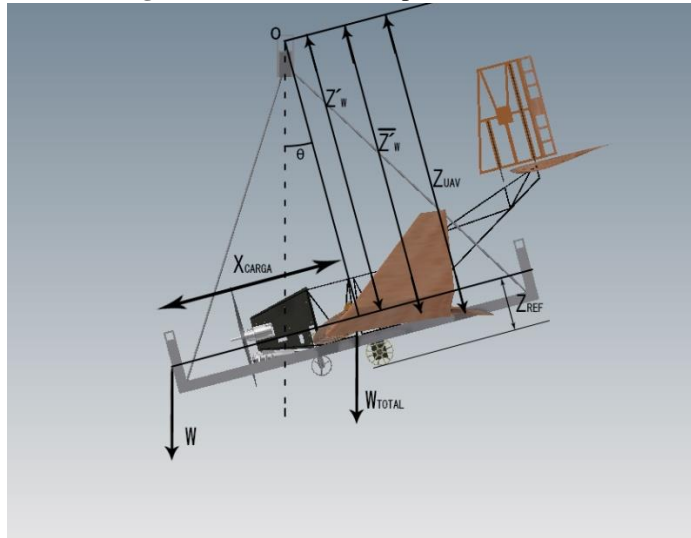


Fonte: Associação Internacional de Segurança na Aviação

2.4.1 Centro de Gravidade

A posição vertical do centro de gravidade para a montagem \bar{Z}'_W e da aeronave Z_{UAV} pode ser determinada utilizando o mesmo setup mostrado na Seção 3.3. Um nível foi utilizado para garantir que a montagem estava perfeitamente horizontal, assim o centro de gravidade do aparato de balanço e da aeronave estavam verticalmente alinhados. A montagem foi inclinada ao longo do *eixo y* da aeronave com a adição de um peso W sobre a aeronave, com uma distância de carga, X_{carga} do CG do aparato de balanço como mostrado na Figura 2.7, respectivamente.

Figura 2.7 – Aeronave e aparato inclinadas.



Fonte: Produção do próprio autor

Com base no equilíbrio de momentos, a posição vertical do CG da montagem conforme a Figura 2.7, é definida como

$$\bar{Z}'_W = \frac{W}{W_{Total}} \left(\frac{X_{carga}}{\tan\theta} - Z'_W \right), \quad (2.23)$$

onde W_{Total} é o peso total da montagem, θ é o ângulo de inclinação e Z'_W é a distância vertical do pino de rotação até o CG do aparato de balanço.

Note que o ângulo de inclinação, θ é determinado conforme o diagrama esquemático mostrado na Figura 2.8, onde

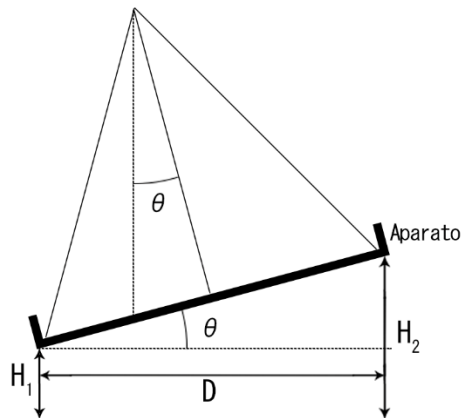
$$\theta = \tan\left(\frac{H_2 - H_1}{D}\right), \quad (2.24)$$

desta forma, o centro de gravidade da aeronave pôde ser calculado por

$$Z_{UAV} = \frac{\bar{Z}'_W W_{Total} - Z'_W W_{AP}}{W_{UAV}}, \quad (2.25)$$

onde W_{AP} é o peso do aparato de balanço e W_{UAV} é o peso da aeronave.

Figura 2.8 – Diagrama esquemático do ângulo de inclinação.

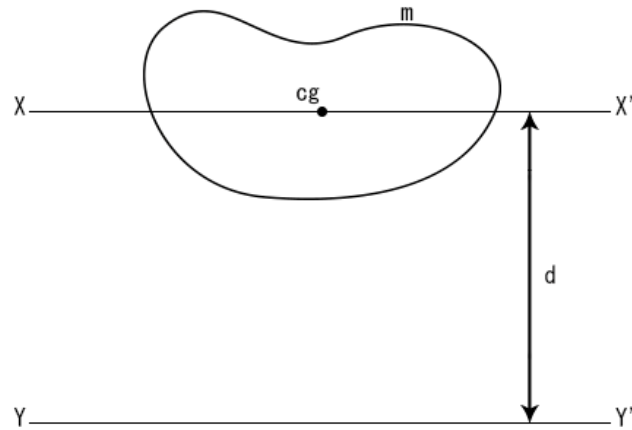


Fonte: Produção do próprio autor

2.4.2 Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner)

O teorema do eixo paralelo é um teorema que permite calcular que o momento de inércia de um corpo em relação a qualquer eixo. É o momento de inércia em torno de um eixo paralelo através do centro de massa, mais o momento de inércia que o corpo teria sobre o eixo dado, se toda a massa de um o corpo estivesse localizado no centro de massa. Também conhecido como teorema de Steiner.

Figura 2.9 – Teorema dos Eixos Paralelos.



Fonte: Produção do próprio autor

$$I_y = I_x + md^2, \quad (2.26)$$

Onde:

I_y é o momento de inércia de área através do eixo paralelo,

I_x é o momento de inércia de área através do centro de massa,

m é a massa do corpo, e

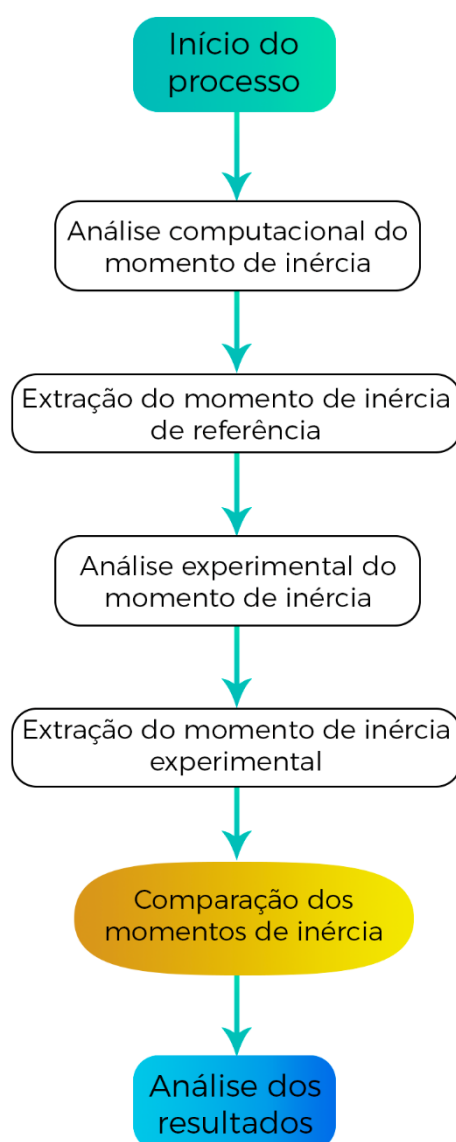
d é a distância do novo eixo z ao centro de massa.

A aplicação deste teorema é fundamental para os cálculos deste trabalho, visto que, tem-se como objetivo determinar o valor do momento de inércia em torno do CG da aeronave e primariamente, o valor encontrado do momento de inércia será em relação ao ponto de giro do aparato de balaço, o ponto 'O', como mostra a Figura 2.7. Portanto, faz-se necessário a aplicação do teorema dos eixos paralelos como forma de deslocar o momento de inércia para o eixo de análise.

3 METODOLOGIA

Nesta seção serão descritos os materiais e equipamentos utilizados, também, como foram realizados a análise computacional e procedimento experimental. A Figura 3.1 representa a esquematização deste estudo.

Figura 3.1 – Fluxograma do estudo.

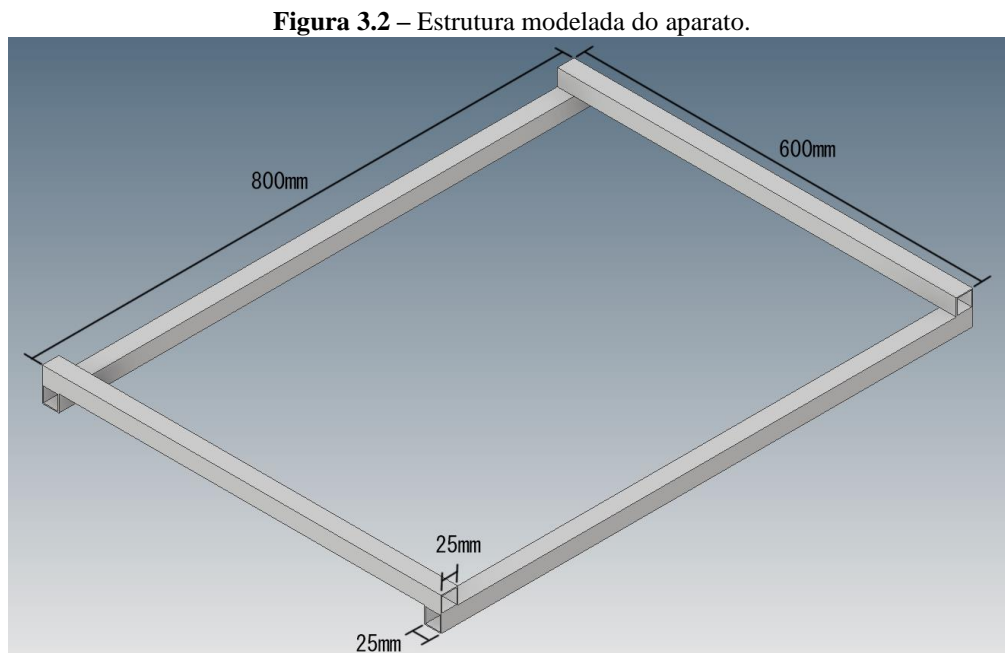


Fonte: Produção do próprio autor.

Tendo as propriedades dos componentes da aeronave e suas geometrias, a primeira etapa consiste em modelá-los dentro do *software* e analisar computacionalmente o momento de inércia. O resultado encontrado servirá como uma referência para verificar a qualidade dos ensaios experimentais. Na etapa experimental, buscou-se analisar o período de oscilação do conjunto, aeronave e aparato. Com os resultados coletados experimentalmente, eles foram comparados com os obtidos via método computacional. As análises serão discutidas na Seção 0.

3.1 MATERIAIS E EQUIPAMENTOS

A estrutura do estudo consiste inicialmente na construção de um aparato para realização dos ensaios oscilatórios em qualquer configuração de aeronave que venha a ser projetada pela equipe. A fim de simplificar a execução do projeto escolheu-se a aeronave da Classe Regular do ano de 2018 (Figura 1.1). A estrutura do aparato (Figura 3.2 e Figura 3.3) possui dimensões e propriedades descritas na Tabela 3.1, os valores de massa foram quantificados por meio da medição do aparato construído em laboratório, enquanto o momento de inércia foi quantificado através do modelamento do aparato no *software*.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 3.3 – Estrutura construída do aparato.

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 3.1 – Propriedades do Aparato.

Característica	Valor	Unidade
Massa	1,375	<i>Kg</i>
Momento de Inércia (I_{yy})	539.653,6	<i>Kg. mm²</i>

Fonte: Produção do próprio autor.

A fim de se obter a condição de pêndulo simples, foi utilizado um cabo de aço inextensível (Figura 3.4), como sustentação do aparato, com comprimento de $1,5m$, porém é importante ressaltar que a distância do pêndulo utilizada para os cálculos se encontra na Tabela 4.3, uma vez que essa distância necessário para o cálculo é uma distância decomposta do comprimento do cabo, como ilustrado na Figura 2.7

Figura 3.4 – Condições de pêndulo simples (cabo de aço inextensível).



Fonte: Produção do próprio autor.

3.2 PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

A modelagem e análise computacional foram realizadas no *software Autodesk Inventor*. A primeira etapa foi modelar a aeronave com a maior quantidade de detalhes. Visto a dificuldade de incluir na modelagem todos os elementos de fixação presentes na aeronave como, cola (cianoacrilato), entelagem, parafusos, fitas, velcros etc., o método empregado foi, já com o avião construído na oficina, dividir a aeronave em grupos menores (asa, fuselagem, cauda, compartimento de carga e peças soltas como, hélice, trens de pouso e motor), realizou-se a pesagem desses itens reais, já construídos e fabricados, e alterado a densidade dessas partições e peças na modelagem dentro do *software*.

Dessa forma garantiu-se que ambas as aeronaves, real e virtual, possuíam a mesma massa. Obviamente a distribuição de massa não permaneceu idêntica visto que no *software* a massa de componentes omitidos como, a cola para união das chapas de madeira e os parafusos da fuselagem não foram representados volumetricamente na modelagem, mas suas massas foram distribuídas dentro dos respectivos subgrupos. Assim apesar de não ter todos os componentes perfeitamente modelados, pode-se garantir que a massa é idêntica e a sua distribuição pela aeronave ficou suficientemente próxima do real.

Dentro do *software* já com a modelagem completa, utilizou-se a ferramenta interna do *Inventor* que calcula de maneira automática as propriedades inerciais dos corpos.

3.3 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Um pêndulo é composto por um corpo rígido qualquer oscilando livremente em torno de um ponto. A aeronave foi alojada para rotacionar ao longo do *eixo* y da aeronave como mostra a Figura 3.5. Essa configuração é chamada de montagem que consiste na aeronave e no aparato de balanço, esse último é formado basicamente por quatro cabos, a moldura de metal e o pino de rotação.

Com a aeronave alocado no aparatado, em estado de repouso e nivelada paralelamente em relação ao solo, pode-se dar início aos testes. Inicialmente, foi realizado o ensaio para determinar a posição vertical do CG da aeronave, de acordo como demonstrado na Seção 2.4.1.

Figura 3.5 – Setup de configuração do pêndulo.



Fonte: Produção do próprio autor

3.3.1 Momento de Inércia

Este método foi usado na sequência, para determinar o momento de inércia da aeronave em torno do *eixo y* da aeronave. Como base teórica foi utilizado a dedução que resultou na equação (2.23). Desta forma o momento de inércia da aeronave pode ser expressa como sendo, a inércia do conjunto subtraída da inércia do aparato, com $m_{UAV}Z_{UAV}^2$, sendo um termo derivado do teorema dos eixos paralelos, explicado na Seção 2.4.2:

$$I_{yy} = \frac{T^2 W_{Total} \bar{Z}'_W}{4\pi^2} - \frac{T^2_{AP} W_{AP} Z'_W}{4\pi^2} - m_{UAV} Z_{UAV}^2, \quad (3.1)$$

sendo m_{UAV} a massa da aeronave. Note que para o experimento do pêndulo composto, o período requerido para determinação do momento de inércia foi de 10 oscilações

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos após a realização dos procedimentos computacionais e experimentais. As discussões foram subdivididas em análise computacional e análise experimental dos momentos de inércia ao longo do *eixo y*. Os parâmetros serão comparados entre os resultados obtidos do *Autodesk Inventor* com os obtidos em ensaios.

4.1 ANÁLISE INERCIAL

Inicialmente serão expostos os dados coletados através do *software* e, posteriormente os resultados obtidos experimentalmente. Por fim, será feita uma análise comparativa entre esses dados.

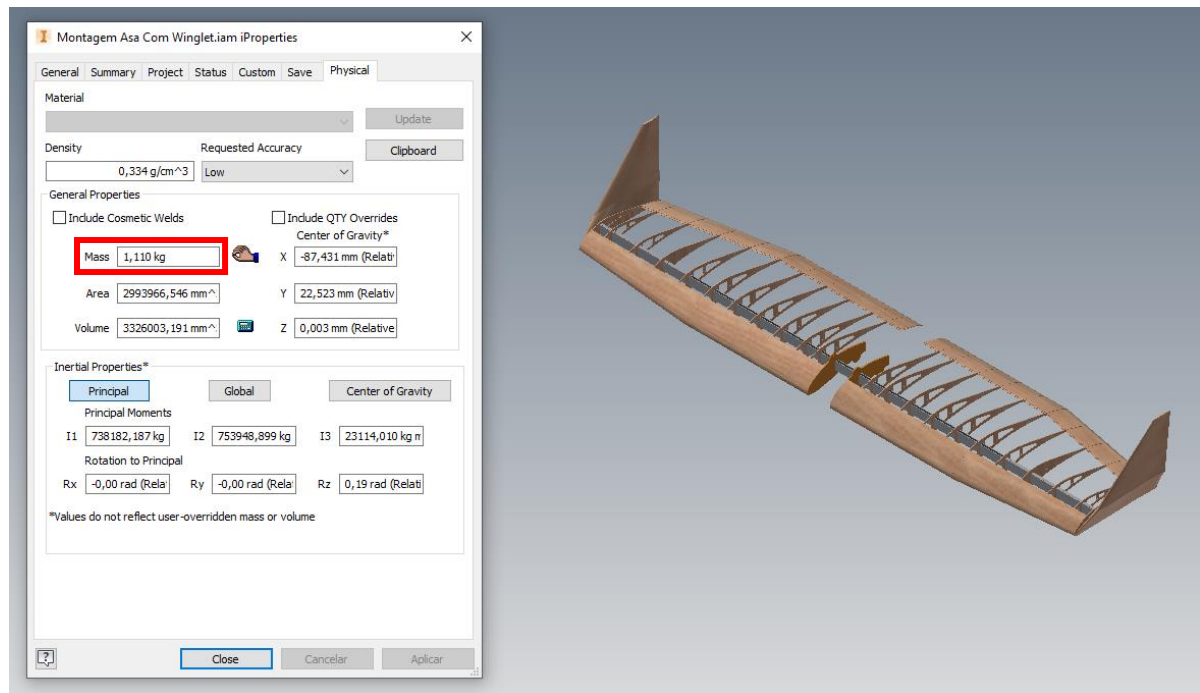
4.1.1 Análise inercial computacional

Após a realização dos procedimentos descritos na Seção 3.2, foi possível obter as propriedades inerciais dos componentes e da aeronave como um todo. Dessa forma garantir que tanto a aeronave modelada no *software* e a construída pela equipe possuíam a mesma massa.

Tendo em vista que neste estudo a intenção era analisar as propriedades inerciais da aeronave, como dito anteriormente na Seção 3.2, o objetivo foi de garantir que a distribuição de massa dos componentes se aproximasse o máximo possível do real, porém, sabendo da complexidade de garantir a exatidão. Uma vez que representar na modelagem todos os elementos presentes na aeronave construída pela equipe, se torna um trabalho praticamente impossível.

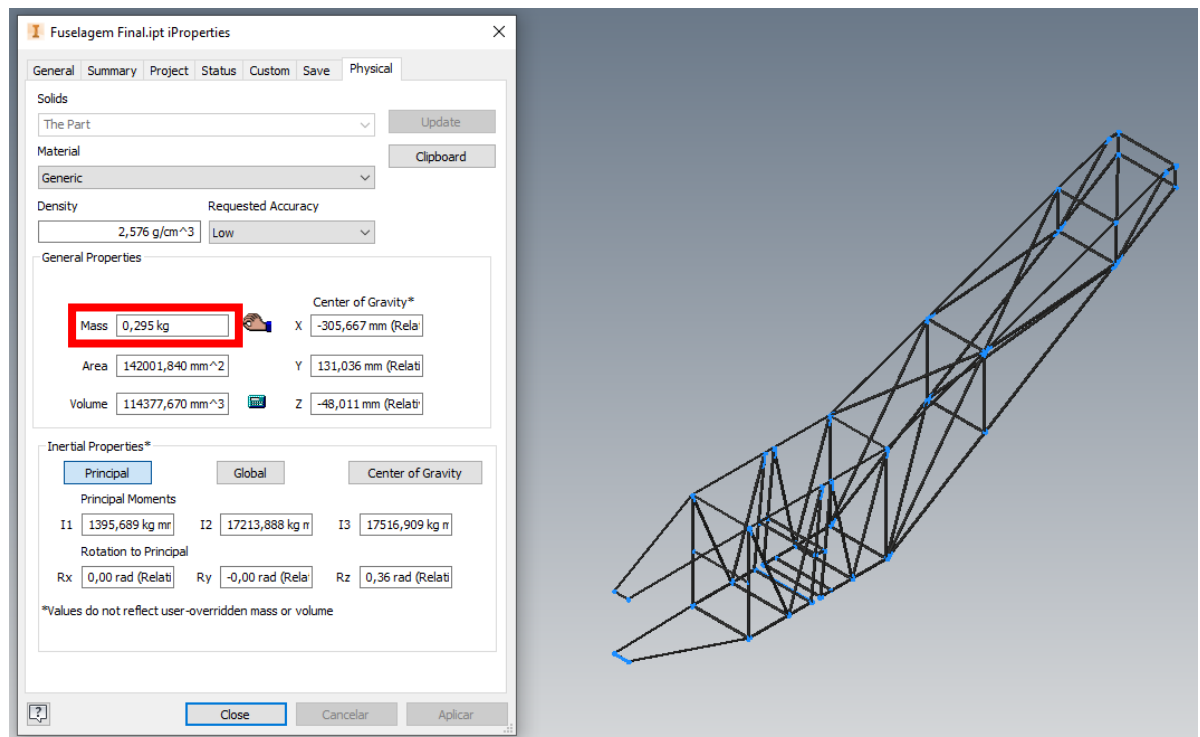
A Figura 4.1 até Figura 4.5 representam os componentes modelados em software e suas propriedades. Os valores obtidos aqui, foram sintetizados na Tabela 4.1 e serão utilizados como padrão para a comparação com os resultados experimentais.

Figura 4.1 – Propriedades da Asa.



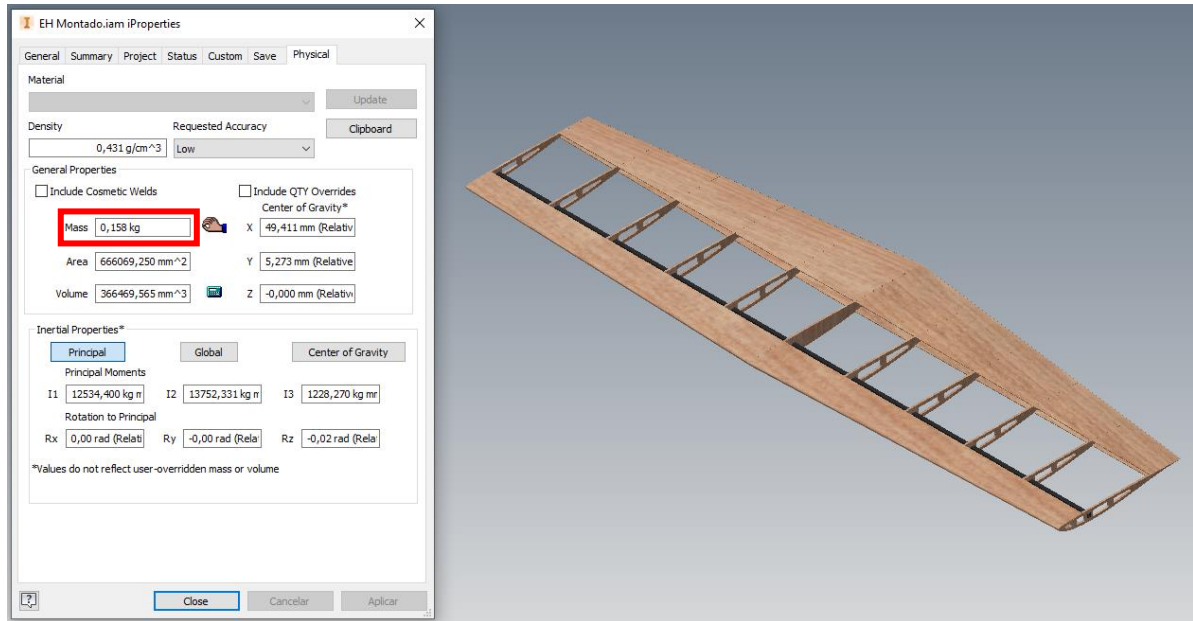
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.2 – Propriedades da Fuselagem.



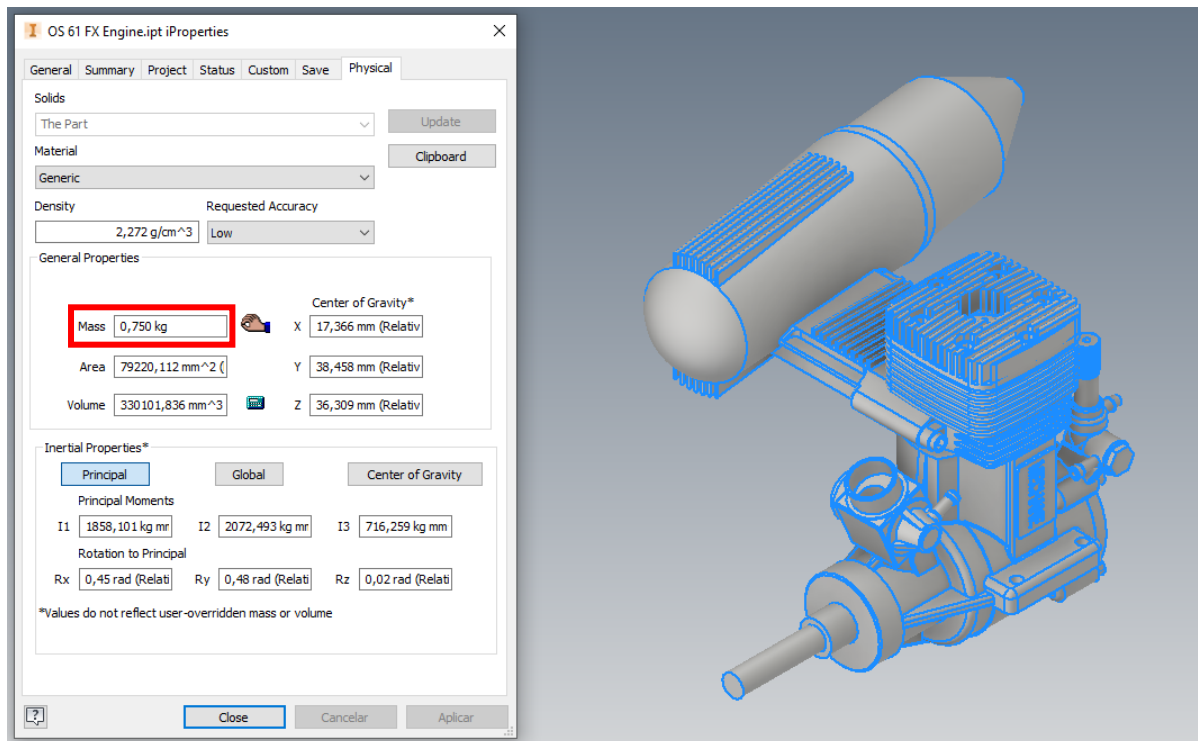
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.3 – Propriedades da Empenagem Horizontal.



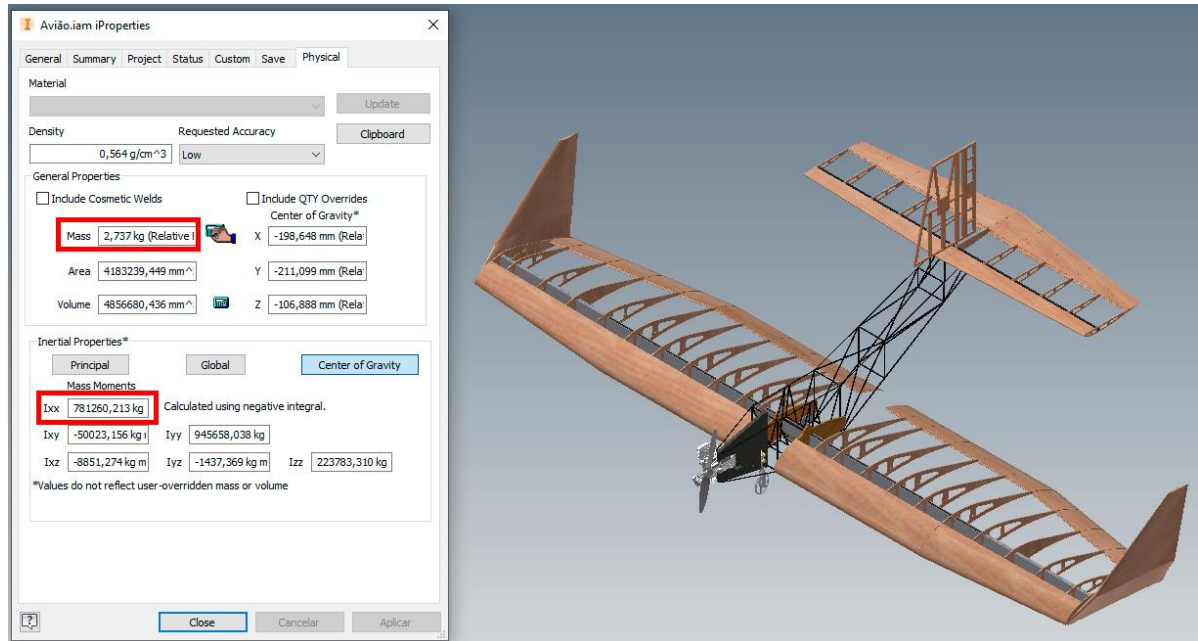
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.4 – Propriedades do Motor.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 4.5 – Propriedades do Avião.



Fonte: Produção do próprio autor.

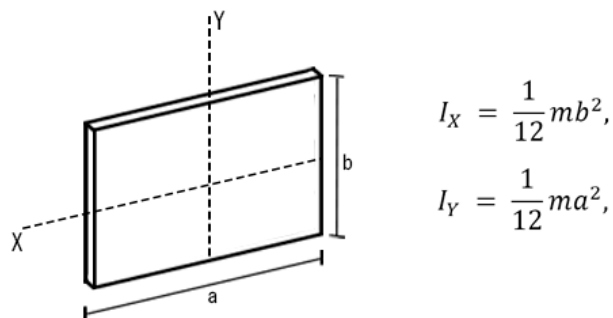
Tabela 4.1 – Propriedades da Aeronave.

Característica	Valor	Unidade
Massa	2,737	Kg
Momento de Inércia (I_{yy})	781.260,2	Kg. mm ²

Fonte: Produção do próprio autor.

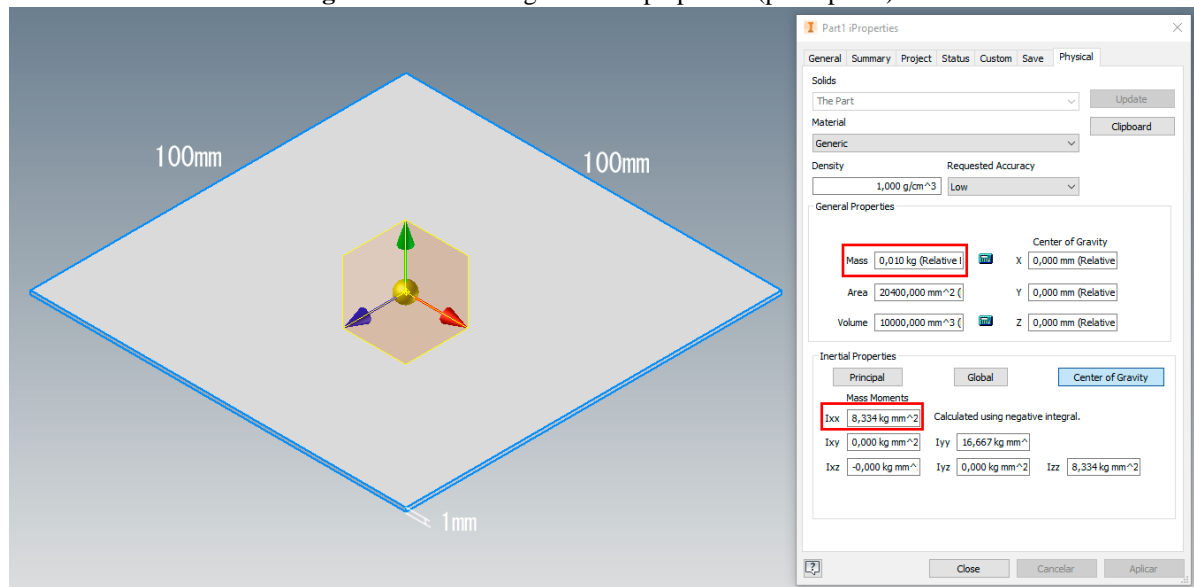
Como forma de verificar a ferramenta interna do *software*, simulou-se inicialmente uma placa plana (Figura 4.7), cuja propriedades inercias eram previamente conhecidas, como mostra a Figura 4.6, a fim de validar o software. Os valores obtidos estão representados na Tabela 4.2.

Figura 4.6 – Momento de inércia teórico.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.7 – Modelagem do corpo padrão (placa plana).



Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 4.2 – Propriedades do corpo padrão.

Característica	Unidade	Resultado Analítico	Resultado Computacional	Diferença Relativa
Massa	<i>Kg</i>	0,010	0,010	0%
Largura (a)	<i>mm</i>	100	100	0%
Comprimento (b)	<i>mm</i>	100	100	0%
Espessura (e)	<i>mm</i>	1	1	0%
Momento de Inércia (I_{yy})	<i>Kg.mm²</i>	8,334	8,334	0%

Fonte: Produção do próprio autor.

Assim, os valores obtidos a partir da análise computacional do *software Autodesk Inventor* podem ser usados como referência para comparação com os valores experimentais. Uma vez que o método foi verificado pelo cálculo analítico apresentando uma diferença relativa nula.

4.1.2 Análise Inercial Experimental

Após o procedimento descrito na Seção 3.3.1, os resultados da análise inercial experimental foram extraídos. A Tabela 4.3 mostra os dados geométricos usados para determinar \bar{Z}'_W e Z_{UAV} , enquanto a Tabela 4.4 mostra os valores de \bar{Z}'_W e Z_{UAV} quando a

aeronave foi inclinada ao longo do seu *eixo y* com a adição da carga como descrito na Seção 2.4.1. Os valores obtidos para \bar{Z}'_W e Z_{UAV} foram utilizados para determinação do momento de inércia da aeronave.

Tabela 4.3 – Parâmetros para determinação de \bar{Z}'_W e Z_{UAV} .

Dados geométricos	Valor	Unidade
W_{UAV}	26.850	$Kg.mm/s^2$
W_{AP}	13.488,8	$Kg.mm/s^2$
W_{Total}	40.338,8	$Kg.mm/s^2$
Z_{ref}	8,334	mm
Z'_w	1.522,5	mm
X_{Carga}	400	mm

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4.4 – Valores de \bar{Z}'_W e Z_{UAV} para a aeronave inclinada.

$W(Kg)$	$\Theta(graus)$	$\bar{Z}'_W(mm)$	$Z_{UAV}(mm)$
5,145	8,35	1.502,3	1.492,3

Fonte: Produção do próprio autor.

Como forma de tentar reduzir o erro relacionado a medição do período de oscilação através do cronometro, foram realizadas 10 medições de 10 oscilações consecutivas. A Tabela 4.5 e Tabela 4.6 resumem os períodos de oscilação tanto do aparato quanto do conjunto (avião e aparato), e os momentos de inércia para o aparato e para a aeronave com base no método de pêndulo composto descrito na Seção 3.3.1.

Tabela 4.5 – Valores obtidos nas 10 medições de oscilação do aparato e do conjunto (10 oscilações).

Parâmetros	Aparato	Conjunto
1ª medição (s)	22,33	24,89
2ª medição (s)	22,35	24,87
3ª medição (s)	22,33	24,92
4ª medição (s)	22,37	24,92
5ª medição (s)	22,29	24,87
6ª medição (s)	22,36	24,91
7ª medição (s)	22,33	24,88
8ª medição (s)	22,35	24,88
9ª medição (s)	22,32	24,81
10ª medição (s)	22,35	24,90
Média (s)	22,34	24,89
Período (s)	2,23	2,49
Desvio Padrão (s)	+/-0,02	+/-0,03

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4.6 – Determinação do momento de inércia pelo método do pêndulo composto.

Parâmetros	Aparato	Aeronave
Momento de Inércia I_{yy} [$Kg \cdot mm^2$]	591.538,6 $Kg \cdot mm^2$	815.476,3 $Kg \cdot mm^2$

Fonte: Produção do próprio autor.

4.1.3 Comparação entre os resultados computacional e experimental

Comparou-se, de forma direta, os valores de momento de inércia da aeronave em torno do eixo *y* obtidos experimentalmente com o coletado através do software. Também foi calculada diferença relativa, buscando comparar os valores obtidos. Tais dados estão representados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Erro relativo ao momento de inércia da Aeronave.

	Computacional	Experimental	Diferença relativa [%]
Momento de Inércia da Aeronave I_{yy} [$Kg \cdot mm^2$]	781.260,2	815.476,3	4,4

Fonte: Produção do próprio autor.

Conforme dito anteriormente na Seção 4.1.2, já era esperado que durante os ensaios experimentais ocorresse o fenômeno de oscilação secundário da montagem em direção do outro eixo, o que poderia interferir nos resultados do período. Porém, pode-se afirmar que o resultado experimental obtido é satisfatório devido à baixa diferença encontrada entre os valores computacional e experimental. Parte deste erro está associado à condição aplicada de que o sistema não apresentaria amortecimento, quando na verdade em um sistema real, por menor que seja sempre haverá a dissipação de energia. Vale ressaltar também, que devido a impossibilidade de representar no *software* todos os elementos reais que compõem a aeronave, isso afetaria no valor da distribuição de massa bem como o volume. Uma vez que, o volume de ar contido dentro da asa, que se desloca junto com a aeronave durante as oscilações, não é considerado na análise computacional. Com isso, pode-se dizer novamente que o momento de inércia experimental, e que a condição de pêndulo simples não amortecido são satisfatórios, validando assim o uso do método experimental, pela Equipe Albatroz, com os aviões protótipos durante a etapa do projeto conceitual.

5 CONCLUSÕES

O objetivo geral deste trabalho consiste em investigar e quantificar o momento de inércia ao longo do eixo de arfagem de uma aeronave radio controlada. Utilizou-se de uma comparação direta entre os resultados experimental e computacional.

Pode-se observar que os ensaios experimentais atenderam às expectativas uma vez que os valores se aproximaram suficientemente do valor de referência obtido através do software. Mesmo que a diferença relativa esteja em torno de 4,4%, pode ser considerado um valor baixo. Pois, como mencionado anteriormente, uma parcela desta diferença está relacionada a diferença da representação, real e virtual, de todos os componentes que compõem a aeronave. Outra parcela desta diferença, está relacionada com a condição teórica imposta da não presença de amortecimentos de energia nos cálculos experimentais.

De forma geral, o valor do momento de inércia quantificado teve uma diferença menor que 5% em relação ao computacional, que vinha sendo usado pela equipe. Portanto, a utilização deste método experimental seria adequada para a obtenção desta propriedade da aeronave ainda na fase conceitual do projeto, onde protótipos são construídos ainda sem o modelamento das aeronaves no *software*.

Para trabalhos futuros que seguem a mesma linha de estudo, é recomendado a implementação de outra fonte de dado para a aquisição do período de oscilação dos corpos. Também recomenda-se realizar os ensaios com uma maior diversidade de aeronaves a fim de se verificar a repetitividade dos experimentos. Em relação ao aparato construído, é recomendado o aperfeiçoamento da estrutura com a implementação de rolamentos no ponto de sustentação do aparato, ou qualquer outra solução, a fim de reduzir o amortecimento das oscilações do conjunto.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DE MEDEIROS, R.; CARDOSO, E. L. **Vibrações**. 2018. Notas de aula.
- DANTSKER, O. D. *et al.* **High fidelity moment of inertia testing of unmanned aircraft**. 2018 Applied Aerodynamics Conference, n. June, 2018.
- GRACEY, W. **The experimental determination of the Moments of Inertia of airplanes by a simplified compound-pendulum method**. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics, , 1948.
- HABECK, J.; SEILER, P. **Moment of Inertia Estimation Using a Bifilar Pendulum**. v. 2, n. 1, p. 7, 2016.
- JARDIN, M. R.; MUELLER, E. R. **Optimized measurements of unmanned-air-vehicle mass moment of inertia with a bifilar pendulum**. Journal of Aircraft, v. 46, n. 3, p. 763–775, 2009.
- JUNOS, M. H.; MOHD SUHADIS, N.; ZIHAD, M. M. **Experimental determination of the moment of inertias of USM e-UAV**. Applied Mechanics and Materials, v. 465–466, p. 368–372, 2014.
- KRZNAR, M. *et al.* **On-line Inertia Measurement of Unmanned Aerial Vehicles using on board Sensors and Bifilar Pendulum**. Interdisciplinary Description of Complex Systems, v. 16, n. 1, p. 149–161, 2018.
- MA, C. *et al.* **Joint unscented Kalman filter for dual estimation in a bifilar pendulum for a small UAV**. 2015 10th Asian Control Conference: Emerging Control Techniques for a Sustainable World, ASCC 2015, n. 1, 2015.
- NELSON, Robert C. **Flight Stability and Automatic Control**. Aerospace and Mechanical Engineering Department, University of Notre Dame: McGraw-Hill Book Company, 1989.
- PERKINS, Courtland D.; HAGE, Robert E. **Airplane Performance: Stability and Control**. Wiley & Sons, 1949.
- RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. 4ª Edição ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.
- SADREY, Mohammad H. **Aircraft design: a systems engineering approach**. Daniel Webster College, New Hampshire, USA. John Wiley & Sons, 2013
- THOMSON, W. T. **Teoria da vibração com aplicações**. 1ª ed. ed. Rio de Janeiro: Interciência,

1978.

WOLOWICZ, C. H.; YANCEY, R. B. **Experimental determination of airplane mass and inertial characteristics.** Washington: [s.n.].