

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DAIANE CRISTINA PILATTI DA ROSA**

**REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE E UTILIZAÇÃO DE VARIÁVEIS MISTAS NA  
OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT DE PÓRTICOS ESPACIAIS TUBULARES COM  
CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS**

**JOINVILLE**

**2021**

**DAIANE CRISTINA PILATTI DA ROSA**

**REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE E UTILIZAÇÃO DE VARIÁVEIS MISTAS NA  
OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT DE PÓRTICOS ESPACIAIS TUBULARES COM  
CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz Rojas

**JOINVILLE**

**2021**

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática  
da Biblioteca Setorial do CCT/UEDESC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

CRISTINA PILATTI DA ROSA, DAIANE  
REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE E UTILIZAÇÃO DE VARIÁVEIS  
MISTAS NA OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT DE PÓRTICOS ESPACIAIS  
TUBULARES COM CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS / DAIANE CRISTINA  
PILATTI DA ROSA. - Joinville, 2021.

112 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz Rojas.

Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado  
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica,  
Joinville, 2021.

1. Otimização. 2. custos de manufatura. 3. redução  
da complexidade. 4. variáveis mistas. I. Muñoz Rojas,  
Pablo Andrés. II. Universidade do Estado de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

**DAIANE CRISTINA PILATTI DA ROSA**

**REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE E UTILIZAÇÃO DE VARIÁVEIS MISTAS NA  
OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT DE PÓRTICOS ESPACIAIS TUBULARES COM  
CONEXÕES SEMI-RÍGIDAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz Rojas

**BANCA EXAMINADORA:** Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas

Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Dr. Gustavo Bono  
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ricardo de Medeiros  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 28 de maio de 2021

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter me concedido forças para trilhar esta caminhada.

Agradeço à minha família por compreender minha ausência durante o período dedicado ao mestrado. Ao meu esposo pela compreensão e pelo companheirismo.

Agradeço imensamente ao meu orientador, professor Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas por toda a sua dedicação em minha formação, pela paciência e por todo conhecimento compartilhado.

Agradeço ao Msc Felipe Faria por todo o auxílio e pela postura sempre aberta em sanar minhas dúvidas com relação ao algoritmo que serviu de base para este trabalho. Sua colaboração foi de suma importância para este estudo.

Agradeço ao professor Msc André Kuhl pelo incentivo e por todo o conhecimento compartilhado durante a minha permanência no programa de pós graduação em engenharia mecânica da UDESC.

Agradeço aos colegas do Laboratório de Mecânica Computacional - LAMEC: João Paulo Weselovski, Gustavo Heiden e Eduardo Menezes, pelos momentos de descontração, conhecimentos compartilhados e companheirismo.

Fica também meu agradecimento a Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) pela excelente infraestrutura e pela qualidade no ensino oferecido. Ao Fundo de Apoio à Manutenção e ao Desenvolvimento da Educação Superior - FUMDES/UNIEDU, pela bolsa de estudo concedida e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC), que possibilitou ao grupo de pesquisa a aquisição dos aparatos computacionais necessários para a realização de seus trabalhos, sob financiamentos 2017TR784 e 2019TR779.

“A verdadeira viagem de descobrimento não  
consiste em procurar novas paisagens, mas  
em ter novos olhos.” (Marcel Proust)

## RESUMO

No presente trabalho propõe-se um procedimento para otimização do layout de estruturas de pórticos tridimensionais com conexões semirrígidas visando minimização de custos de manufatura, redução da complexidade e utilização de variáveis mistas. Consideram-se restrições de deslocamentos, função falha e comprimento mínimo. Adotam-se como variáveis de projeto as áreas das seções transversais dos elementos, fatores de fixação e coordenadas nodais selecionadas. A otimização de layout é entendida como envolvendo simultaneamente, como variáveis de projeto, áreas das seções transversais e coordenadas nodais (dimensional e de forma). A possibilidade de alterar coordenadas nodais pode resultar em elementos com baixa razão de aspecto, requerendo uma função de falha que inclua o efeito do cisalhamento transversal provocado pelas forças cortantes. Poucos trabalhos considerando todos os aspectos acima são encontrados na literatura, mas verifica-se que as estruturas ótimas podem resultar extremamente complexas do ponto de vista geométrico. A complexidade se refere à existência de um alto número de elementos de pequena seção transversal que, individualmente, não têm maior contribuição estrutural, mas que são imprescindíveis no seu conjunto. O alto número de elementos traz associado um alto número de juntas semirrígidas que, por sua vez, são caras. Desta forma, o controle da complexidade da estrutura otimizada é realizado aplicando funções *Heaviside* regularizadas sobre a área e o comprimento de cada elemento. Esta pesquisa baseou-se em um algoritmo preliminar previamente desenvolvido por (FARIA, 2019a), no âmbito da redução da complexidade. A implementação preliminar original, consistia na aplicação de uma função *Heaviside* regularizada aplicada nas áreas de seções transversais e comprimentos, utilizando-se de um mesmo parâmetro de curvatura beta para as duas medidas de redução da complexidade. Com estudos mais aprofundados, notou-se a necessidade de modificar-se a implementação original, inserindo-se uma abordagem com dois parâmetros betas independentes (para áreas e comprimentos), de forma a se obter resultados com redução no número de elementos. Com as modificações propostas, obteve-se resultados com redução no número de elementos, comprovando-se a eficácia da abordagem proposta.

Neste trabalho também emprega-se o tratamento de variáveis mistas (áreas como sendo discretas e as demais contínuas). Com a aplicação de variáveis discretas para as áreas de seção transversal dos perfis, baseando-se em catálogos comerciais, torna-se possível aproximar os resultados obtidos neste trabalho de soluções práticas.

**Palavras-chave:** Otimização, custos de manufatura, redução da complexidade, variáveis mistas, função *Heaviside* regularizada, parâmetro beta.

## ABSTRACT

In this work we propose a procedure for optimizing the layout of three-dimensional frame structures with semi-rigid connections, aiming at the reduction of manufacturing costs, the reduction of geometric complexity and the use of mixed variables. Displacement, failure and minimum length constraints are considered. As design variables we adopt cross section areas, fixity factors and selected nodal coordinates. In layout optimization the design variables include, simultaneously, cross sections and nodal coordinates. The possibility of modifying nodal coordinates can result in elements with a low aspect ratio, requiring a failure measure that includes the effect of transverse shear stresses. Optimized structures can be extremely complex from a geometric point of view, containing a high number of small cross section elements that, individually, do not have a significant structural contribution, but are essential when acting together. The high number of elements brings associated a high number of semi-rigid joints which, in turn, are expensive. Following a preliminary work developed by (FARIA, 2019a), we control the complexity of the optimized structure by applying regularized Heaviside functions on the area and length of each element. The preliminary implementation adopted the same beta curvature parameter for the Heaviside functions related to areas and lengths. However, the studies made in the present work evince that such beta parameters must be independent in order to obtain effectiveness in the reduction of the numbers of elements. This work also introduces the use of mixed design variables (cross section areas being discrete and the rest being continuous). With the application of discrete cross section areas based on commercial catalogues, we are able to analyze problems similar to those found in engineering practice.

**Keywords:** Optimization, manufacturing costs, reduced complexity, mixed variables, regularized Heaviside function, beta parameter.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell (1904): (a) estrutura bi-apoiada com uma força concentrada no centro e (b) estrutura engastada constituída de elementos de viga, com uma força na ponta.	15
Figura 2 – Otimização paramétrica, tendo áreas como variáveis de projeto em uma treliça.	16
Figura 3 – Exemplo de variáveis de projeto em otimização de forma.	16
Figura 4 – Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.	17
Figura 5 – (a) Exemplo de conexões tubulares com ligações aparafusadas, (3a) conexão articulada com pinos, (4) placa de reforço, (5) placa de cobertura e (b) uma conexão com pinos entre quatro elementos tubulares.	18
Figura 6 – Solução ótima encontrada em Achtziger (2007).	23
Figura 7 – Treliça plana de 86 barras. Geometria inicial e final.	24
Figura 8 – Treliça plana de 42 barras. Geometria inicial e final.	24
Figura 9 – Treliça plana de 18 barras. Geometria inicial.	25
Figura 10 – Treliça plana de 18 barras. Geometria final.	25
Figura 11 – (a) Estrutura treliçada totalmente conectada com oito nós e (b) solução ótima.	26
Figura 12 – (a) Condições de geometria e de fronteira; (b) malha inicial $17 \times 5$ nós e 3.570 elementos de treliça.	27
Figura 13 – Otimização estrutural de treliça para o domínio simplesmente apoiado mostrado na Fig. 1 para diferentes valores de custo unitário fabricação $\alpha_F$ .	27
Figura 14 – Modelo matemático linear e curva experimental de conexões aplicadas na prática em estruturas de engenharia.	29
Figura 15 – Modelo matemático linear para conexões semirrígidas.	30
Figura 16 – Diferença entre a rotação do elemento C e o elemento F.	30
Figura 17 – Significado físico do fator de fixação.	30
Figura 18 – Matriz de rigidez para elementos com conexões semirrígidas.	31
Figura 19 – Variação linear do custo conexões.	33
Figura 20 – Mola para rigidez rotacional nos planos $\tilde{x}\tilde{y}$ e $\tilde{x}\tilde{z}$ .	34
Figura 21 – Critério de falha para tubos de parede fina proposto por Irlles e Irlles (2000).	35
Figura 22 – Critério de falha para tubos de parede fina proposto por Faria (2019)	36
Figura 23 – Propriedades da seção transversal usadas na dedução da tensão normal dos momentos fletores.	37

Figura 24 – Propriedades da seção transversal usadas na dedução da tensão de cisalhamento produzida pelas forças de cisalhamento. . . . .	38
Figura 25 – Solução gráfica para um problema de LP. . . . .	46
Figura 26 – Solução gráfica para um problema de LP com restrição modificada. . .	46
Figura 27 – Efeito do aumento do parâmetro $\beta$ sobre as densidades filtradas $\varphi_i$ . . .	49
Figura 28 – Curvas da função <i>Heaviside</i> regularizada de acordo com os valores escolhidos para a área máxima. . . . .	51
Figura 29 – Soluções ótimas com o emprego de um mesmo parâmetro $\beta$ para as duas medidas de redução da complexidade. . . . .	52
Figura 30 – Pórtico 2D com dois apoios de segundo gênero e uma força concentrada.	53
Figura 31 – Soluções ótimas com o emprego de um mesmo parâmetro $\beta$ para as duas medidas de redução da complexidade. . . . .	53
Figura 32 – Análise da remoção de conexões . . . . .	55
Figura 33 – Curva quadrática que define a variação nos custos adicionais referentes à fabricação das conexões . . . . .	61
Figura 34 – Fluxograma referente o procedimento do algoritmo de otimização . . .	62
Figura 35 – Forma com que os limites móveis são determinados neste estudo. . . . .	64
Figura 36 – Pórtico 2D com dois apoios de segundo gênero e uma força concentrada no nó 3 . . . . .	65
Figura 37 – Soluções ótimas de acordo com o aumento no custo adicional de fabricação referente as conexões (CF) para o estudo do pórtico 2D com uma força concentrada no nó 3. . . . .	67
Figura 38 – Comportamento das funções objetivo referentes ao estudo de caso do pórtico 2D com uma força concentrada. . . . .	68
Figura 39 – Comportamento das restrições de deslocamento no nó restrito para cada caso . . . . .	71
Figura 40 – Pórtico 2D com duas forças concentradas . . . . .	72
Figura 41 – Soluções ótimas obtidas no estudo do pórtico 2D com duas forças concentradas de acordo com o aumento no custo adicional de fabricação referente as conexões (CF) . . . . .	72
Figura 42 – Comportamento das funções objetivo referentes - pórtico 2D com duas forças concentradas, mediante diferentes valores de CF. . . . .	76
Figura 43 – Comportamento das restrições de deslocamento no nó restrito para cada caso - pórtico 2D com duas forças concentradas . . . . .	76
Figura 44 – Composição dos carregamentos nos três casos de carga . . . . .	77
Figura 45 – Soluções ótimas obtidas no estudo com três casos de carga. . . . .	78
Figura 46 – Comportamento das funções objetivo referentes ao estudo de caso bidimensional com três casos de carga. . . . .	79

Figura 47 – Comportamento das restrições de deslocamento nos nós restrito ao longo das iterações. . . . .	80
Figura 48 – Domo de 52 barras. . . . .	83
Figura 49 – Solução ótima referente ao problema do domo de 52 barras . . . . .	84
Figura 50 – Comportamento da função objetivo ao longo do processo iterativo (a) e detalhe da região de transição entre a otimização contínua e mista (b) - domo 52 barras . . . . .	87
Figura 51 – Custo da massa e das conexões ao longo do processo iterativo - domo 52 barras . . . . .	87
Figura 52 – Comportamento das restrições de deslocamento nos nós restrito ao longo das iterações - domo 52 barras . . . . .	88
Figura 53 – Diagrama de convergência da restrição de tensão - domo 52 barras . . . . .	88
Figura 54 – Estrutura em balanço baseado em Faria (2019) . . . . .	89
Figura 55 – composição dos casos de carga, baseados em Faria (2019a) e Pedersen e Nielsen (2003), <b> aumentados </b> em 10% neste trabalho. . . . .	91
Figura 56 – Solução ótima - estrutura em balanço . . . . .	91
Figura 57 – Comportamento da função objetivo (custo \$) durante o processo de minimização- estrutura em balanço . . . . .	94
Figura 58 – Detalhamento da região de transição entre a otimização contínua para a discreta- estrutura em balanço. . . . .	94
Figura 59 – Comportamento do custo de massa (a) e custo das conexões (b) ao longo do processo de otimização- estrutura em balanço . . . . .	94
Figura 60 – Diagramas de convergência deslocamento e tensão- estrutura em balanço. . . . .	95
Figura 61 – Comportamento das restrições de deslocamento nos nós restrito ao longo das iterações - estrutura em balanço . . . . .	95
Figura 62 – Catalogo Tupper . . . . .	105
Figura 63 – Catalogo Tupper . . . . .	106
Figura 64 – Catalogo Tupper . . . . .	107
Figura 65 – Catalogo Arcelor Mital . . . . .	108
Figura 66 – arquivo de entrada para o lp solve com uma variável discreta e uma contínua . . . . .	110
Figura 67 – arquivo de saída com uma variável discreta e uma contínua. . . . .	110
Figura 68 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis discretas . . . . .	111
Figura 69 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis discretas . . . . .	112
Figura 70 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis contínuas . . . . .	112
Figura 71 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis contínuas. . . . .	112

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso bidimensional com uma força concentrada e um único parâmetro $\beta$ . . . . .	54
Tabela 2 – Coordenadas respectivas ao estudo do pórtico 2D . . . . .	66
Tabela 3 – Conectividade referente ao estudo do pórtico 2D . . . . .	66
Tabela 4 – Valores iniciais e finais aplicados aos parâmetros $\beta$ referentes ao estudo do pórtico 2D com uma força concentrada no nó 3. . . . .	67
Tabela 5 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso bidimensional com duas forças concentradas . . . . .	69
Tabela 6 – Comprimentos ótimos referentes aos estudos com os custos de fabricação iguais a 0, 1, 10 e 100 . . . . .	70
Tabela 7 – Valores iniciais e finais aplicados aos parâmetros $\beta$ referentes ao estudo do pórtico 2D com duas forças concentradas . . . . .	73
Tabela 8 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso bidimensional com duas forças concentradas . . . . .	74
Tabela 9 – Comprimentos ótimos referentes ao - pórtico 2D com duas forças concentradas, com os custos de fabricação iguais a 0, 1, 10 e 100 . . . . .	75
Tabela 10 – Valores iniciais e finais aplicados aos parâmetros $\beta$ referente ao estudo do pórtico 2D com três casos de carga . . . . .	78
Tabela 11 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso do pórtico 2D com três casos de carga . . . . .	81
Tabela 12 – Comprimentos ótimos referentes aos estudos com os custos de fabricação iguais a 0, 1, 10 e 100 considerando-se três casos de carga. . . . .	82
Tabela 13 – Conectividade do domo de 52 barras. . . . .	83
Tabela 14 – Áreas ótimas - domo 52 barras . . . . .	85
Tabela 15 – Fatores de fixação ótimos obtidos na solução do problema do domo de 52 barras. . . . .	86
Tabela 16 – Coordenadas ótima - domo 52 barras . . . . .	87
Tabela 17 – Conectividade - estrutura em balanço . . . . .	90
Tabela 18 – Composição dos casos de carga, baseados em Faria (2019a) e Pedersen e Nielsen (2003), para a estrutura em balanço . . . . .	90
Tabela 19 – Áreas ótimas referentes ao estudo da estrutura em balanço . . . . .	92
Tabela 20 – Coordenadas ótimas referentes ao estudo da estrutura em balanço . . . . .	92
Tabela 21 – Fatores de fixação ( $\alpha$ ) ótimos referentes ao estudo da estrutura em balanço . . . . .	93
Tabela 22 – Coordenadas dos nós do domo . . . . .	103
Tabela 23 – Coordenadas dos nós estrutura em balanço . . . . .	104

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS</b> . . . . .	<b>19</b>
2.1	OBJETIVO GERAL . . . . .	19
<b>2.1.1</b>	<b>Objetivos específicos</b> . . . . .	<b>19</b>
2.2	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO . . . . .	19
<b>3</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> . . . . .	<b>21</b>
3.1	REDUÇÃO DE CUSTOS EM ESTRUTURAS . . . . .	21
3.2	REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE . . . . .	23
3.3	CONEXÕES SEMIRRIGIDAS . . . . .	28
3.4	OTIMIZAÇÃO DE CONEXÕES SEMIRRÍGIDAS . . . . .	32
3.5	CRITÉRIO DE FALHA . . . . .	34
3.6	VARIÁVEIS DISCRETAS . . . . .	39
3.7	ASPECTOS DA FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO PARA VARIÁVEIS DISCRETAS . . . . .	44
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÕES PROPOSTAS</b> . . . . .	<b>47</b>
4.1	FORMULAÇÃO PARA REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE NA OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS . . . . .	47
<b>4.1.1</b>	<b>Atualização do parâmetro <math>\beta</math></b> . . . . .	<b>49</b>
<b>4.1.2</b>	<b>Área máxima e comprimento máximo na função <i>Heaviside</i> regularizada</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.1.3</b>	<b>Utilização de dois parâmetros <math>\beta</math></b> . . . . .	<b>51</b>
<b>4.1.4</b>	<b>Remoção de conexões</b> . . . . .	<b>54</b>
4.2	FORMULAÇÃO PARA O TRATAMENTO DAS VARIÁVEIS MISTAS . . . . .	55
<b>4.2.1</b>	<b>Lp Solve</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>5</b>	<b>PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO TRATADOS</b> . . . . .	<b>59</b>
5.1	OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT COM REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE - TODAS AS VARIÁVEIS CONTÍNUAS E FATORES DE FIXAÇÃO CONSTANTES . . . . .	59
5.2	OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT E FATORES DE FIXAÇÃO - VARIÁVEIS DE PROJETO MISTAS . . . . .	60
5.3	ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO . . . . .	61
<b>5.3.1</b>	<b>Estratégia adotada para os limites móveis</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Critério de convergência</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	<b>65</b>
6.1	REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE ATRAVÉS DE FUNÇÕES <i>HEAVISIDE</i> REGULARIZADAS . . . . .	65
<b>6.1.1</b>	<b>Pórtico 2D com apenas uma força concentrada</b> . . . . .	<b>65</b>

<b>6.1.2</b>	<b>Pórtico 2D com duas forças concentradas . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>6.1.3</b>	<b>Pórtico 2D com três casos de carga . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>6.2</b>	<b>OTIMIZAÇÃO MISTA . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>6.2.1</b>	<b>Domo de 52 barras . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>6.2.2</b>	<b>Estrutura em balanço . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>96</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>97</b>

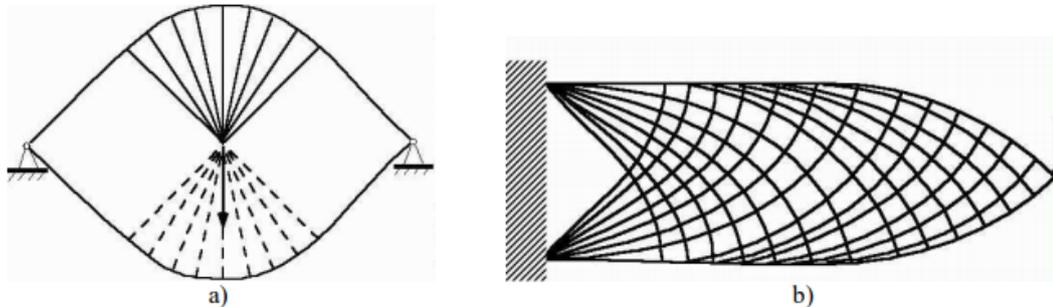
## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, devido à acirrada competitividade do mercado e à escassez de recursos, as ferramentas computacionais para simulação numérica têm ganhado significativo destaque, pois permitem automatizar procedimentos repetitivos, com significativo ganho de tempo e produção. Nota-se uma crescente demanda pela busca por projetos ótimos, visando redução de custos e complexidade.

O conceito de otimização é baseado na busca pelo melhor resultado de uma operação, satisfazendo determinadas restrições impostas pelo problema. A solução ótima pode ser tanto a maximização dos lucros e da produção de uma companhia, como também, a minimização do peso em uma determinada estrutura.

A aplicação da técnica de otimização tem sido um campo de estudos desde tempos remotos. Neste contexto, invenções como a alavanca ou os mecanismos de polia são manifestações claras do desejo do homem de maximizar a eficiência mecânica (HAFTKA; GURDAL, 1996). Um dos problemas de otimização mais populares, relacionados às estruturas de engenharia, é a minimização de peso em uma viga. Galilei (1990) apud Rizzo (2009) em seu livro *Discorsi et Dimonstrazioni Matematiche* enfrentou esse problema fascinante, pela primeira vez, no século XVII. Ele percebeu que existiam algumas proporções entre as dimensões das seções transversais da viga que poderiam ser otimizadas para uma dada força. Na sequência, Maxwell (1870), aplicou em suas pesquisas, o conceito de otimização, e sua proposta foi a minimização da massa de uma ponte. Além disso, desenvolveu o cálculo das tensões neste problema e sugeriu, de forma conceitual, que a estrutura ótima seria constituída de elementos de treliça. A solução permitiu, também, maximizar a rigidez da estrutura da ponte. Em 1904, Michell (1904) retomou os estudos de Maxwell (1870) aplicando o conceito de minimização do volume. Na figura 1(a) tem-se uma estrutura bi-apoiada com uma força concentrada no centro, e pode-se perceber que a solução obtida apresenta uma geometria curva. Uma estrutura engastada constituída de elementos de viga, com uma força na ponta, é visualizada na figura 1(b) e, neste caso, a proposta era minimizar a massa e maximizar a resistência à força externa aplicada. Na década de 60, com o surgimento dos computadores e do Método dos Elementos Finitos, a otimização começou a ser difundida com mais profundidade. Em meados da década de 80, *softwares* comerciais emergiram com alguns pacotes de otimização, dentre eles Ansys, Abaqus e VirtualPXYIS.

Figura 1 – Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell (1904): (a) estrutura bi-apoiada com uma força concentrada no centro e (b) estrutura engastada constituída de elementos de viga, com uma força na ponta.



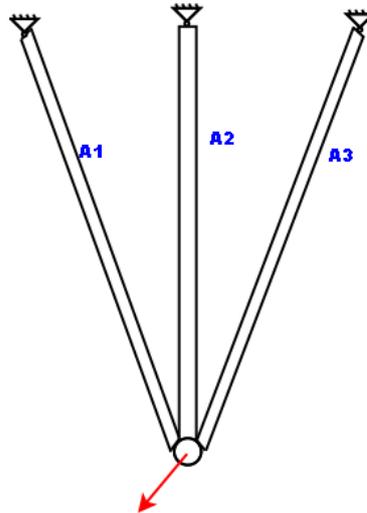
Fonte: Silva (2003).

A maioria destes *softwares* comerciais utilizam como base em sua plataforma o Método dos Elementos Finitos (MEF), o qual tem sido amplamente utilizado como uma ferramenta matemática para encontrar soluções aproximadas nos mais diversos problemas de engenharia. Na análise estrutural, o MEF pode fornecer ao projetista detalhes do comportamento de uma estrutura, tais como deslocamentos, deformações e esforços internos dos elementos (RANGEL, 2018). Ao modelar vigas, alguns projetistas desconsideram o efeito do esforço cortante. Entretanto, essa abordagem pode ser ineficaz em alguns casos, pois do algoritmo de otimização pode-se ter elementos curtos e a desconsideração dos efeitos das forças cortantes é incorreta. Logo, é de importante relevância o desenvolvimento e aplicação de um critério de falha que avalie não somente o tipo da seção transversal do perfil, mas também o comprimento do elemento. Foi proposto em Faria (2019a) um critério de falha com restrição de tensão, que avalia além da área de seção transversal, o comprimento. Visando redução de custo computacional, analisa-se o elemento em três pontos estratégicos: início, meio e final.

De acordo com Haftka e Gurdal (1996), a otimização estrutural pode ser dividida em quatro grupos:

- Paramétrica: altera parâmetros tais como área de um perfil de seção transversal tubular, espessura de uma chapa, módulo de elasticidade ( $E$ ), módulo de elasticidade transversal ( $G$ ), *etc.*, modificando o aspecto da peça e mantendo sua forma e topologia. Uma treliça com as áreas  $A_1, A_2, A_3$  como variáveis de projeto pode ser vista na figura 2. A alteração destas áreas configura otimização paramétrica, desde que nenhuma área vá a zero, situação na qual haveria mudança de topologia;

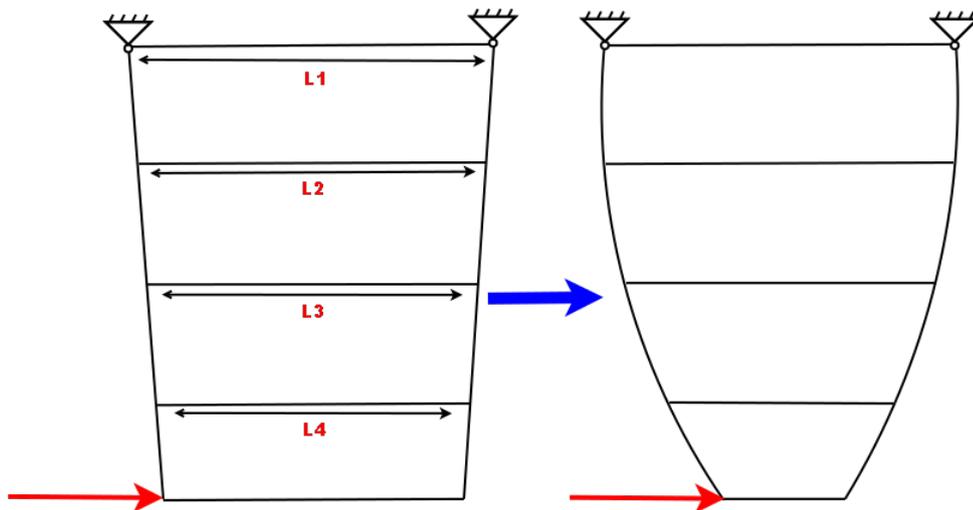
Figura 2 – Otimização paramétrica, tendo áreas como variáveis de projeto em uma treliça.



Fonte: Produção do autor (2021)

- Forma: modifica os contornos internos ou externos da estrutura, porém, não há alteração da sua topologia. As variáveis de projeto podem ser as coordenadas de alguns pontos pertencentes ao contorno da peça ou parâmetros como coeficientes de uma curva que representa o formato da peça, Haftka e Gurdal (1996). Um exemplo de otimização de forma pode ser visto na figura 3, onde  $L_1, L_2, L_3$  e  $L_4$  são variáveis de projeto ;

Figura 3 – Exemplo de variáveis de projeto em otimização de forma.

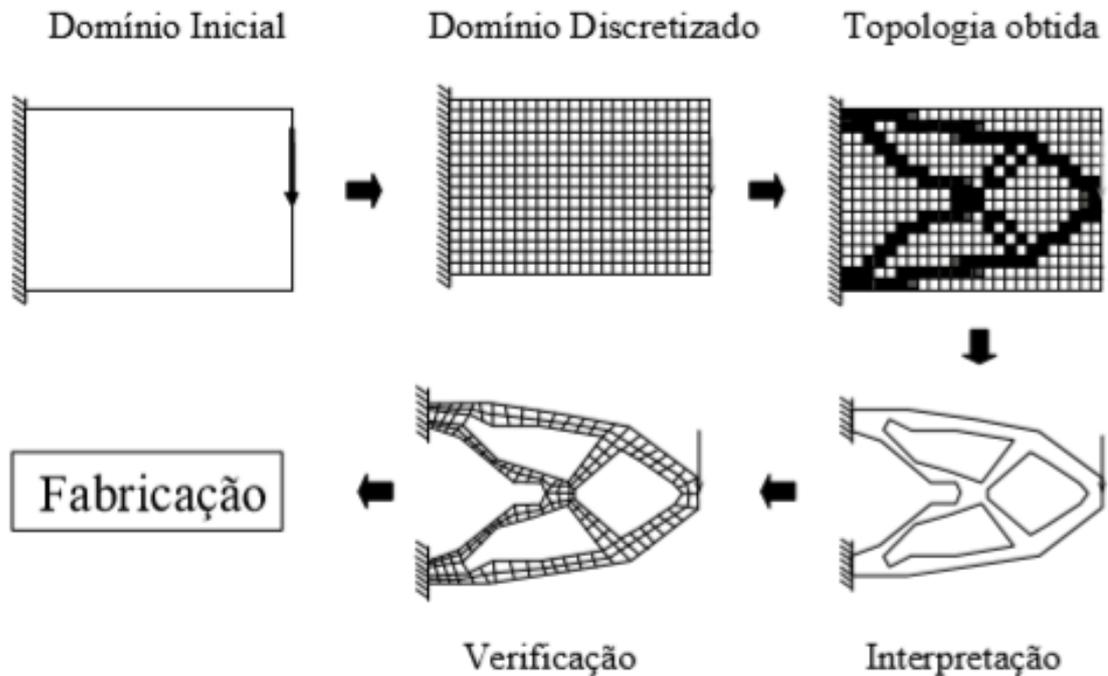


Fonte: Produção do autor (2021).

- Topológica: permite alterar a distribuição do material em um domínio fixo inicial, podendo variar de vazio até sólido em cada ponto. Um procedimento de projeto estrutural utilizando otimização topológica é apresentado na figura 4. O passo inicial consiste no projetista definir o domínio do problema, o qual é limitado pelas

condições de contorno da estrutura e pelos pontos de aplicação de carga. Outras limitações podem estar relacionadas com a restrição do espaço ocupado (SILVA, 2003).

Figura 4 – Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.

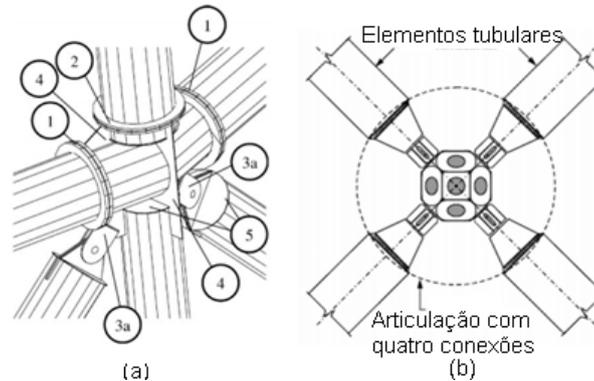


Fonte: Silva (2003).

- Layout: na otimização de *layout* (paramétrica + forma), além das variáveis dimensionais, os contornos da estrutura também podem ser alterados. Para exemplificar, pode-se utilizar como base a figura 3 onde, na otimização do *layout*, as coordenadas dos nós e as áreas de seção transversal dos elementos poderiam ser alterados.

Na otimização de estruturas reticuladas, o estudo do real comportamento das conexões (detalhe construtivo que unem partes da estrutura entre si, ou a ligação da estrutura com elementos externos a ela) pode levar a um resultado ótimo eficaz, com níveis de segurança adequados ao projeto e menor peso (SIMOES, 1996). Considera-se, geralmente, que todas as conexões são totalmente flexíveis ou totalmente rígidas. Entretanto, esta não é uma abordagem realista, pois todas as conexões apresentam um determinado grau de rigidez e de flexibilidade. O desenvolvimento de um modelo matemático apropriado para o comportamento das conexões permite uma redistribuição dos esforços internos, podendo levar a uma estrutura mais leve e com menor custo associado. Na figura 5, tem-se alguns exemplos práticos de conexões.

Figura 5 – (a) Exemplo de conexões tubulares com ligações aparafusadas, (3a) conexão articulada com pinos, (4) placa de reforço, (5) placa de cobertura e (b) uma conexão com pinos entre quatro elementos tubulares.



Fonte: (VIGH; DUNAI, 2004).

Sob a ótica da otimização de custos, considerar apenas a parcela referente à massa pode ser uma abordagem insuficiente. Na composição de uma estrutura, outros fatores importantes devem ser analisados, além da quantidade de material empregado, tais como grau de complexidade, tipo de conexão, quantidade necessária de conexões, processos de fabricação envolvidos, etc. É proposto, em Asadpoure, Guest e Valdevit (2015), um procedimento de otimização em modelos de topologia discreta, incorporando, na função objetivo, a minimização de custo de materiais e conexões. A abordagem adotada pelos autores, consistiu na variação da diferença entre os dois custos referidos, e mostrou-se a possibilidade da remoção controlada de elementos e conexões, através da seguinte relação, quanto maior for o custo das conexões, maior será a remoção de elementos/conexões e conseqüentemente, obtém-se redução da complexidade final da estrutura.

Do resultado do algoritmo de otimização, pode-se ter estruturas complexas, compostas por uma densa rede de elementos. Conseqüentemente, do ponto de vista prático tais estruturas se tornam inviáveis, devido ao alto custo de fabricação (TORII; LOPEZ; MIGUEL, 2016). O desenvolvimento de um método matemático que possibilite a redução de complexidade de projeto em estruturas de engenharia, pode levar a resultados práticos com menor custo de fabricação e tempo computacional. Este será o primeiro aspecto tratado no presente trabalho.

Outro aspecto relevante na otimização estrutural, especificamente para otimização de estruturas reticuladas, é que, sob condições mercadológicas, a área e espessura de um tubo são encontradas em dimensões padronizadas. Logo, a definição do problema deve levar em conta este aspecto. Assim, o segundo foco deste trabalho visa tratar de problemas de natureza mista, onde as áreas e espessuras comerciais são de natureza discreta.

## 2 JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

A elaboração desta dissertação está fundamentada na melhoria do modelo de otimização implementado por Faria (2019a), cujo trabalho foi otimização de layout e conexões considerando custos de manufatura. Serão estudadas estruturas de pórtico com uma abordagem para redução da complexidade e o tratamento de variáveis mistas, onde são adotadas áreas de seção discretas. Este trabalho pode impactar positivamente a economia das áreas de construção civil e mecânica. A região em que esta pesquisa é desenvolvida apresenta alto potencial de aplicação na indústria metal mecânica, com diversas empresas atuando no ramo de perfis metálicos, como Gerdau, Arcelor Mitall e Ocel do Brasil, e com grandes perspectivas de crescimento no setor de construções de edifícios em aço, justificando ainda mais o seu estudo. Adicionalmente, com base em pesquisas realizadas relacionadas com as contribuições científicas referentes ao tema proposto, observa-se que diversas pesquisas já abordaram os aspectos relacionados ao objetivo da proposta, como por exemplo, em John, Ramakrishnan e Sharma (1987) e Souza (2009), porém, nenhuma integra simultaneamente a minimização de custos, redução da complexidade estrutural e o tratamento de variáveis mistas. Sendo assim, o presente trabalho visa preencher esta lacuna, visando uma contribuição para o grupo de pesquisa (LAMEC- Laboratório de Mecânica Computacional) da Universidade do Estado de Santa Catarina.

### 2.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem por objetivo propor um procedimento de otimização de pórticos e inserir aspectos práticos associados à redução da complexidade de projeto e o tratamento de variáveis discretas para as áreas das seções transversais.

#### 2.1.1 Objetivos específicos

- Estudo e aplicação de um procedimento de filtragem da estrutura otimizada, de forma a reduzir a complexidade da mesma, evitando reforços de pequeno diâmetro ou comprimento;
- Formulação de uma estratégia que possibilite a utilização de variáveis discretas na otimização das áreas das seções transversais das barras da estrutura;
- Avaliação de casos propostos na literatura com o intuito de analisar o comportamento das metodologias propostas, apresentando suas vantagens e limitações.

### 2.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Após ter apresentado a introdução, justificativa e objetivos, nos capítulos 1 e 2, os capítulos seguintes serão organizados da seguinte forma:

- Capítulo 3 - Referencial Teórico: Neste capítulo faz-se uma revisão teórica de desenvolvimentos correlatos para situar o estado da arte em diversos tópicos;
- Capítulo 4 - Formulações Propostas: Neste capítulo são apresentadas as formulações para a de redução da complexidade através de uma função *Heaviside* regularizada e para a otimização mista;
- Capítulo 5 - Problemas de Otimização Tratados: neste capítulo são descritos exemplos selecionados para demonstrar a aplicação das propostas do presente trabalho;
- Capítulo 6 - Resultados e Discussões: Neste capítulo são resolvidos os problemas de otimização propostos e discutidas as soluções obtidas;
- Capítulo 7 - Conclusão: Nesta parte da dissertação é feita a conclusão do trabalho, com base na proposta sugerida e nos resultados obtidos.

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

Otimização de *layout* em treliças ou pórticos é a junção de otimização paramétrica e de forma, onde além das variáveis dimensionais, pode-se ter também alteração na geometria através da modificação das coordenadas dos nós. Neste trabalho, em virtude do procedimento de redução da complexidade (onde elementos cuja área ou comprimento que tenderem a zero podem ser removidos da topologia), pode-se ter a otimização topológica. No entanto, não se trata de otimização topológica no sentido convencional, em que os elementos podem simplesmente existir ou não (0 ou 1), sem variações da área inicial. No caso abordado neste estudo, as áreas dos elementos podem ter variações. Essa é considerada como uma classe de problemas desafiadora na mecânica estrutural, pois há uma infinidade de topologias possíveis, sendo elas difíceis de classificar e quantificar. Além disso, é um método de otimização de considerável importância, pois resulta em maior economia de material do que resultados ótimos advindos da otimização paramétrica.

#### 3.1 REDUÇÃO DE CUSTOS EM ESTRUTURAS

Devido à concorrência dos mercados e à escassez de recursos, muitos projetistas têm caminhado em busca de estruturas economicamente viáveis. Neste contexto, é preciso realizar uma minuciosa estimativa de custos (ALI; SELLAMI; CUTTING-DECELLE; MANGIN, 2009). Muitos autores consideram, na redução de custos, apenas a minimização de massa, peso ou volume. Entretanto, considerar que a redução de custos decorre somente destes fatores pode levar a uma avaliação incompleta, pois em diversas ocasiões, questões como o processo de fabricação, transporte e equipamentos, podem ter significativa influência. Quando se fala de custos relacionados a estruturas, estes advêm de vários fatores, tais como: maquinários e equipamentos necessários para montagem da estrutura, mão de obra especializada, tipo e quantidade de material e o número de conexões necessárias (HAVELIA, 2016).

Estudos voltados para a minimização de custos aplicados a treliças espaciais em aço podem ser vistos em Lipson e Gwin (1977). O funcional de minimização de custo é composto pelo custo do material dos membros estruturais (vigas e colunas) e o custo de fabricação (material das conexão, parafusos, eletrodos e o custo da mão-de-obra). No custo de fabricação pode-se incluir o gasto com resistência oxidativa, como o processo de galvanização, por exemplo.

A otimização de custos de treliças projetadas em alumínio e aço, sujeitas restrições de deslocamento e tensão é alvo de investigação em Imai (1983). O objetivo do autor foi combinar o alumínio leve, porém mais caro, com o aço mais pesado, porém mais barato, de maneira econômica. A função objetivo é a soma dos custos e peso dos materiais presentes na estrutura.

Em Jarmai e Farkas (1999), é apresentado um funcional de minimização de custos

visando, além da redução de peso, considerar outros fatores advindos do processo de fabricação. O custo é definido por,

$$K = K_m \rho V + K_f \sum_i T_i, \quad (1)$$

onde  $K_m$  e  $K_f$  são fatores de custo de material e fabricação, respectivamente,  $\rho$  é a densidade do material,  $V$  o volume da estrutura e  $T_i$  representa os seguintes tempos de produção:  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  são tempos de fabricação para montagem e soldagem,  $T_4$  para aplainamento de chapas,  $T_5$  preparação de superfície,  $T_6$  pintura e corte e  $T_7$  desbaste. Nesta abordagem, não há custos adicionais de material incluídos, tais como consumíveis de solda, consumo de gás e tinta. Pavlovcic, Krajnc e Beg (2004) desenvolveram um funcional de minimização que abrange os custos mais importantes da estrutura relacionados aos estágios de produção. Estes abrangem soldagem, corte, perfuração, preparação de superfície, montagem, alinhamento de flanges e pintura, juntamente com custos de material de aparafusamento e transporte e custos provenientes da montagem.

Hasançebi (2017) investigou, em seu trabalho, a minimização de custos aplicados a projetos de edifícios de aço. O autor avaliou o comportamento de 13 estruturas de aço com diferentes tipos de conexão coluna-viga (rígida e flexível), e propôs uma função objetivo com as seguintes contribuições: material, processo de fabricação das ligações semirrígidas, transporte, montagem e custos adicionais. Em relação à fabricação das conexões, é incluído o custo necessário para o processo de soldagem (mão de obra especializada e o tipo de soldagem), aparafusamento, esticadores e chapas para as conexões. No âmbito dos custos adicionais, podem ser considerados, por exemplo, pintura e tratamentos de superfície. A otimização é realizada através de um algoritmo baseado em estratégia de evolução (ES).

Faria (2019a) apresentou uma função objetivo para otimização de pórticos espaciais formados por seções tubulares em aço sujeitos a vários casos de carga, conexões semirrígidas e restrição de deslocamento, tensão e comprimento mínimo. A função objetivo, baseada em Simoes (1996) é dada por,

$$W = \sum_{i=1}^{nel} (c_{M_i} \rho_i A_i L_i + c_{S_i}), \quad (2)$$

$$c_{S_i} = \sum_{c=1}^4 (V_0 + V_1 \alpha_c + V_2 \alpha_c^2), \quad (3)$$

onde  $c_M$  é o custo de material (\$/kg),  $c_s$  é o custo monetário das conexões,  $A_i$  é a área do elemento  $i$ ,  $L_i$  é o comprimento do elemento  $i$ ,  $\rho_i$  é a densidade de um dado elemento  $i$ , e o índice  $c$  representa quatro fatores de fixação, sendo dois para cada conexão semirrígida. Os coeficientes  $V_0$ ,  $V_1$  e  $V_2$  definem uma variação quadrática entre o custo das conexões articuladas e totalmente rígidas. Mais detalhes do trabalho de Faria (2019a), são dados no capítulo 5.

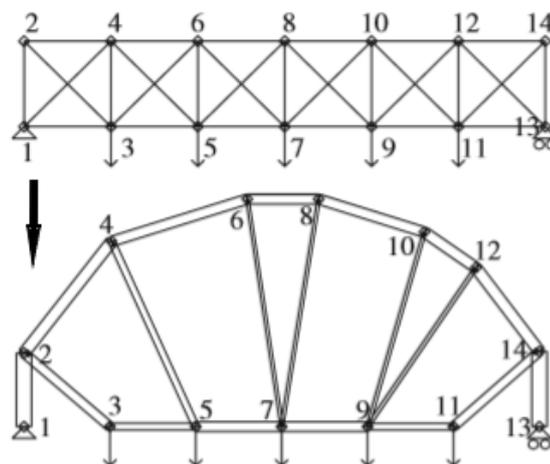
### 3.2 REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE

Em 1964, Dorn (1964) propôs o GSM (*Ground structure method*), como um procedimento para remoção de elementos na otimização de treliças, acarretando desta forma, na redução de custos provenientes do material empregado e número de conexões necessárias.

O método do GSM faz a remoção de elementos cuja área da seção transversal é menor do que um limiar pré-definido pelo projetista. A partir desse ponto, um novo procedimento de otimização é aplicado, tendo essa nova topologia como ponto inicial (ASADPOURE; GUEST; VALDEVIT, 2015). Desde a formulação do GSM, autores como Achtziger (2007), Hagishita e Ohsaki (2009), Asadpoure, Guest e Valdevit (2015), Havelia (2016), Torii, Lopez e Miguel (2016) e Faria (2019a) buscaram dar um enfoque especial para a questão da complexidade estrutural. Do ponto de vista prático, estruturas complexas são inviáveis, se consideradas questões como o custo de produção para o processo de fabricação. Segundo Torii, Lopez e Miguel (2016), em alguns casos, é possível uma redução significativa da complexidade de projeto, sem grandes impactos no desempenho estrutural.

Com a intenção de fugir da complexidade estrutural, Bendsoe, Ben-Tal e Zowe (1994), Muñoz-Rojas (2000), Achtziger (2007) e He e Gilbert (2015) realizaram um procedimento de otimização, onde as variáveis de projeto consideradas foram as áreas de seção transversal e as posições das articulações. Os autores empregaram o método de otimização de layout (paramétrica + forma) para a otimização topológica. De acordo com Achtziger (2007), em problemas de tamanho moderado, essa abordagem tem se mostrado eficaz, pois produz como resultado uma estrutura com redução no número de elementos, conforme a figura 6.

Figura 6 – Solução ótima encontrada em Achtziger (2007).

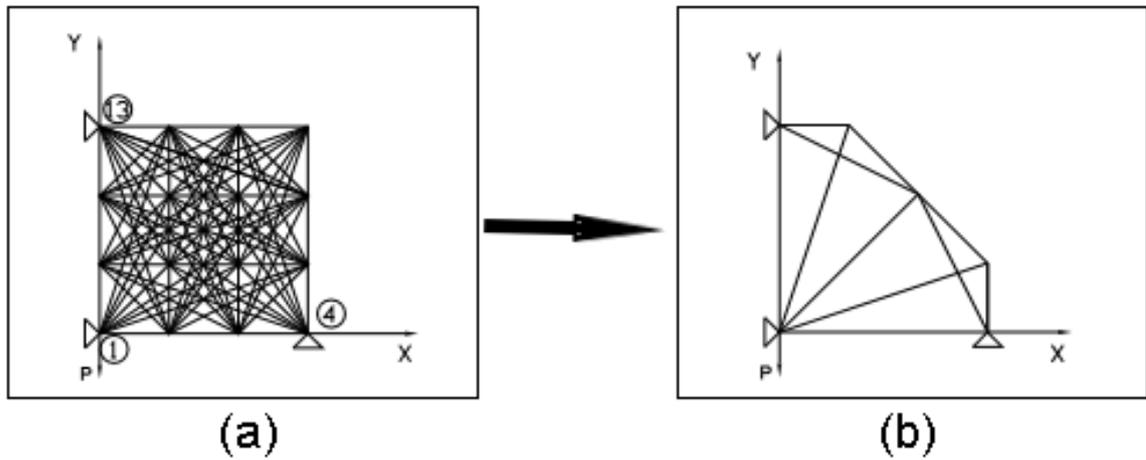


Fonte: Achtziger (2007).

Dando continuidade ao trabalho de Muñoz-Rojas (2000), em Wildemann e Muñoz-Rojas (2004) é proposta a otimização do *layout* e topologia de treliças espaciais, usando programação linear sequencial (SLP). Pode-se ver um dos estudos na figura 7 onde tem-se

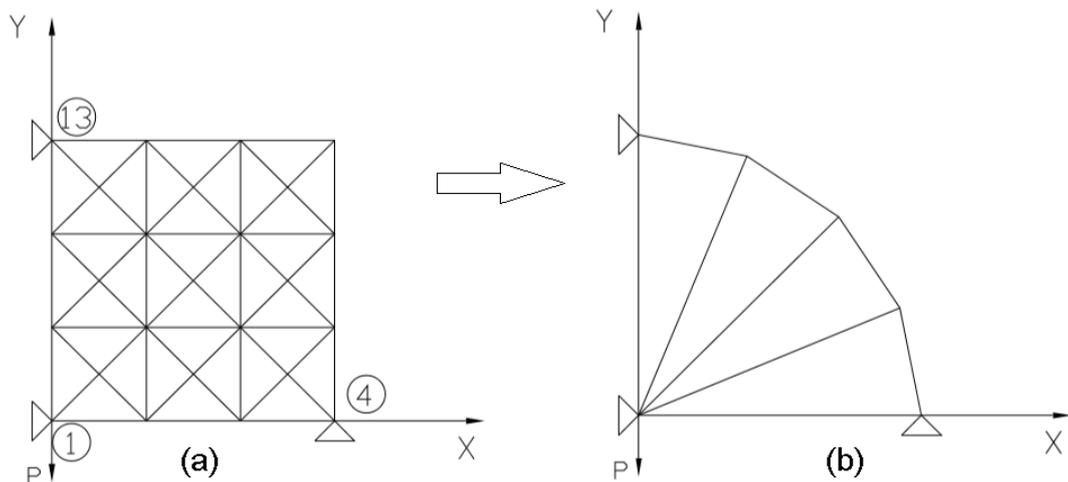
uma estrutura inicial com com 86 barras, tendo áreas como variáveis de projeto, visando mostrar um processo de otimização topológica. Uma treliça plana com 42 barras e grau de vizinhança 1 pode ser vista na figura 8, a qual visa mostrar otimização de layout, e tem como variáveis de projeto as áreas e todas as coordenadas, com exceção das coordenadas dos 3 nós, 1, 4 e 13.

Figura 7 – Treliça plana de 86 barras. Geometria inicial e final.



Fonte: Wildemann e Muñoz-Rojas (2004).

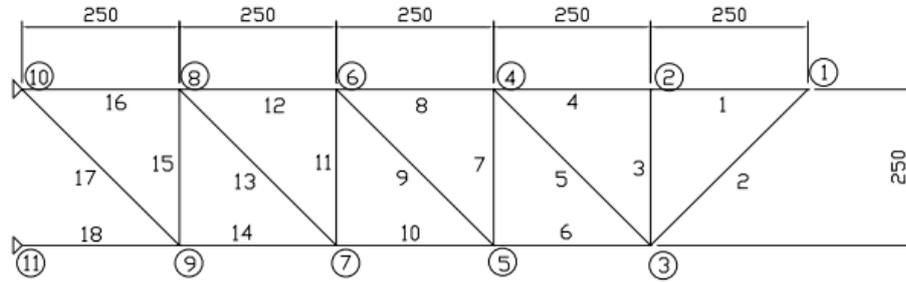
Figura 8 – Treliça plana de 42 barras. Geometria inicial e final.



Fonte: Wildemann e Muñoz-Rojas (2004).

Wildemann e Muñoz-Rojas (2004) introduzem, adicionalmente, restrições de flambagem local. Na figura 9, tem-se a configuração inicial de uma treliça sujeita a restrições de tensão admissível e de flambagem local. São aplicadas forças concentradas de 250 *lbf* nos nós 1, 2, 4, 6 e 8. Na figura 10, tem-se a solução ótima.

Figura 9 – Treliça plana de 18 barras. Geometria inicial.



Fonte: Wildemann e Muñoz-Rojas (2004).

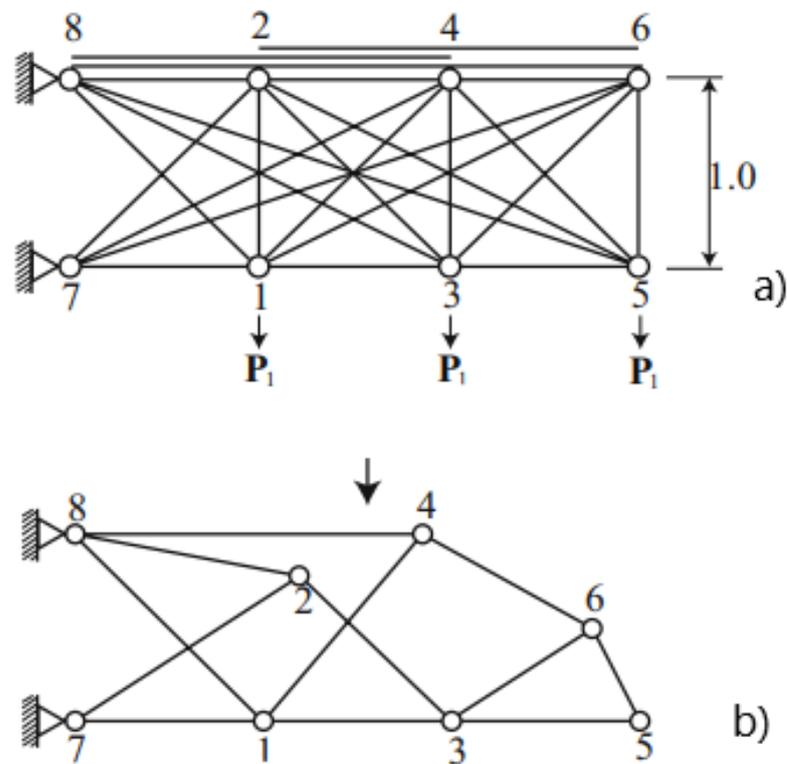
Figura 10 – Treliça plana de 18 barras. Geometria final.



Fonte: Wildemann e Muñoz-Rojas (2004).

Uma estratégia baseada no GSM aplicada à remoção, adição de elementos e nós na otimização do *layout* de estruturas treliçadas sujeitas a carregamento estático é vista em Hagishita e Ohsaki (2009). O método se baseia na avaliação de propriedades mecânicas para determinar as barras e nós a serem adicionados ou removidos da estrutura. Para a validação da estratégia proposta, seis exemplos numéricos são estudados. Dentre eles, destaca-se o exemplo mostrado na figura 11 que apresenta a geometria inicial com 24 barras e 8 nós totalmente conectados, e a solução ótima.

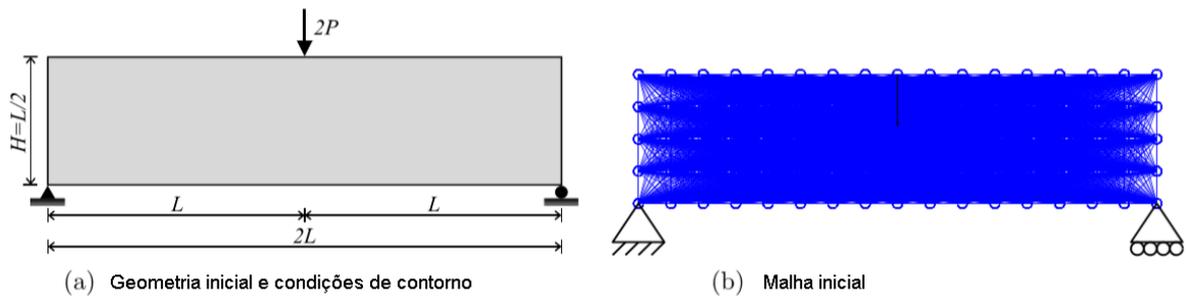
Figura 11 – (a) Estrutura treliçada totalmente conectada com oito nós e (b) solução ótima.



Fonte: Hagishita e Ohsaki (2009).

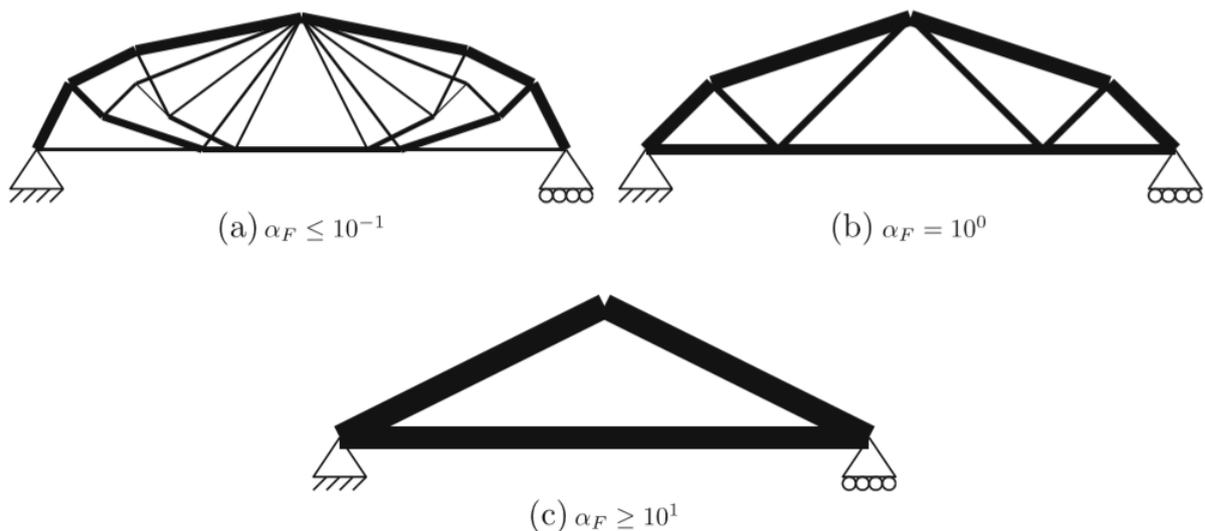
A complexidade geralmente está associada com um número excessivo de barras. Embora amplamente utilizadas na literatura, estruturas treliçadas tendem a ser complexas em sua forma final. Asadpoure, Guest e Valdevit (2015) abordaram o controle de complexidade, incluindo na função objetivo os custos de material e manufatura das conexões, o custo de manufatura das conexões são proporcionais ao número de elementos na estrutura, através de uma função *Heaviside* regularizada. Os custos de manufatura das conexões são proporcionais ao número de barras em uma estrutura. Logo, a minimização da função objetivo leva à redução de complexidade de projeto, pois qualquer membro existente na estrutura incorre em um custo de montagem e fabricação das duas ligações por elemento, sendo uma em cada extremidade. De acordo com o aumento do custo de fabricação por elemento, nota-se significativa redução do número de elementos na geometria final. Nas figuras 12 e 13, pode-se observar claramente a redução da complexidade em uma treliça 2D empregando essa técnica.

Figura 12 – (a) Condições de geometria e de fronteira; (b) malha inicial  $17 \times 5$  nós e 3.570 elementos de treliça.



Fonte: Asadpoure, Guest e Valdevit (2015).

Figura 13 – Otimização estrutural de treliça para o domínio simplesmente apoiado mostrado na Fig. 1 para diferentes valores de custo unitário fabricação  $\alpha_F$ .



Fonte: Asadpoure, Guest e Valdevit (2015).

Tanto Asadpoure, Guest e Valdevit (2015) como Torii, Lopez e Miguel (2016), afirmam que um meio potencial de redução da complexidade de projeto pode ser através da remoção de elementos cuja área de seção transversal está abaixo de um limiar pré-estabelecido pelo projetista.

Torii, Lopez e Miguel (2016) propuseram duas medidas de complexidade, sendo essas baseadas no número de barras e de nós. Os autores afirmam que uma medida de complexidade pode ser construída pela contagem do número de barras, sendo facilmente implementada se algoritmos de otimização discreta forem empregados. Já na medida de complexidade baseada em nós, um nó é considerado inativo quando apenas barras inativas estiverem conectadas a ele.

Na implementação de Torii, Lopez e Miguel (2016), a primeira etapa na construção das medidas de complexidade consistiu em definir se uma barra está ou não ativa. Uma barra pode ser considerada inativa quando sua área de seção transversal é menor do que um limiar estabelecido pelo projetista. A medida de complexidade para as barras foi estabelecida como,

$$C_b(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m C(x_i), \quad (4)$$

onde  $C_b$  é uma medida de complexidade de projeto relacionada ao número de barras presentes na estrutura,  $m$  é o número de barras,  $x_i$  são as áreas da seção transversal das barras, e  $C$  é uma função contínua e diferenciável com o objetivo de indicar se uma barra está ativa ou não. Conforme a área de seção transversal aumenta,  $C(x_i)$  se aproxima de 1 e a barra é contabilizada.

A outra medida de redução da complexidade desenvolvida pelos autores, é através do número de nós. A soma das áreas de seção transversal das barras conectadas a um determinado nó  $i$  é dada por,

$$b_i(\mathbf{x}) = \sum_{j \in N_i} x_{ji}, \quad (5)$$

onde  $b_i$  é a soma das áreas de seção transversal conectadas a um determinado nó  $i$ ,  $N_i$  é o conjunto de barras conectadas ao nó  $i$ . Para que um nó seja considerado inativo, a soma das áreas dos elementos conectados a ele deve fornecer um valor pequeno próximo a zero. A medida de complexidade desenvolvida pelo autor deu-se da seguinte forma,

$$C_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q C(b_i(\mathbf{x})), \quad (6)$$

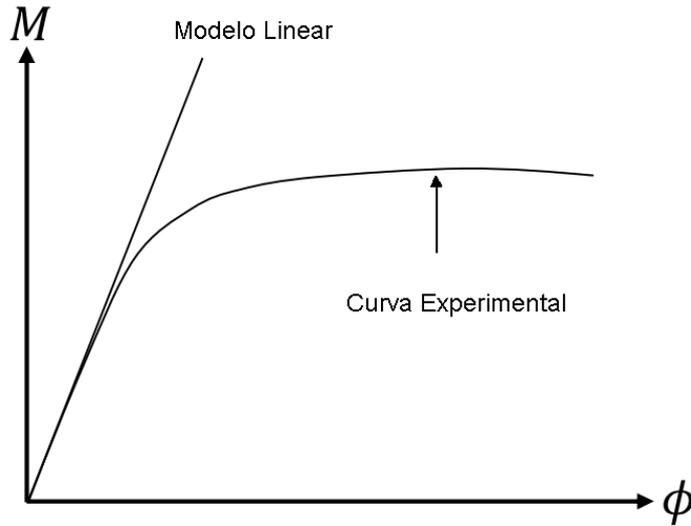
onde  $C_n$  é a medida de complexidade relacionada ao número de nós,  $q$  é o número total de nós e  $C$  é a função contador.

### 3.3 CONEXÕES SEMIRRIGIDAS

As conexões estruturais desempenham um papel fundamental no comportamento global das estruturas de aço, (SAVIO, 2004). Com o intuito de simplificar a análise de projetos estruturais, as ligações são tratadas geralmente, como ligações totalmente flexíveis (nenhum momento é transmitido entre os membros adjacentes à ligação) ou totalmente rígidas (o ângulo entre os membros adjacentes a ligação permanece imutável). Porém, na prática, as ligações flexíveis têm um determinado grau de rigidez rotacional, e as ligações rígidas possuem um determinado grau de flexibilidade.

Para analisar pórticos sujeitos a pequenos deslocamentos e deformações, pode-se considerar uma relação linear entre momento e rotação, como pode ser visto na figura 14 (PINHEIRO, 2003).

Figura 14 – Modelo matemático linear e curva experimental de conexões aplicadas na prática em estruturas de engenharia.



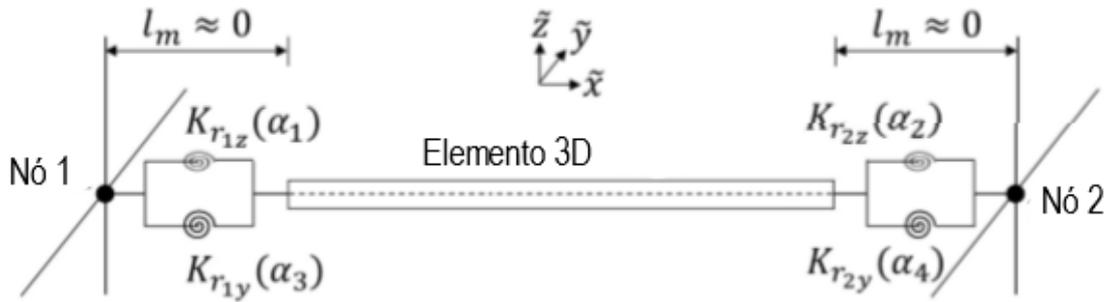
Fonte: Pinheiro (2003)

O modelo linear para estruturas treliçadas tem sido motivo de estudos por parte de vários autores, tais como Xu e Grierson (1993), Mello (1999), Simoes (1996), Csébfalvi (2007), Kartal, Basaga e Bayraktar (2010) e Artar e Daloğlu (2018). Sekulovic e Salatic (2001) e Savio (2004) afirmaram que em estruturas de aço, em diversas situações, o efeito causado por momentos fletores tem maior impacto do que os efeitos das forças axiais e de cisalhamento na deformação das conexões. Neste contexto, os efeitos de esforços axiais e de cisalhamento podem ser desprezados, considerando-se apenas a deformação rotacional.

Para formular o elemento finito 3D com ligações semirrígidas para estruturas tridimensionais, Faria (2019a) baseou-se no modelo matemático proposto por Chan e Chui (2000), e este pode ser visualizado na figura 15. No modelo, há duas molas rotacionais em cada conexão, relacionada aos planos  $\tilde{x} \tilde{y}$  ( $K_{R_z}$ ) e  $\tilde{x} \tilde{z}$  ( $K_{R_y}$ ), que têm os momentos fletores  $M_z$  e  $M_y$  e as rotações  $\theta_z$  e  $\theta_y$ , respectivamente, Faria (2019a).  $K_R$  é um termo referente à rigidez de cada mola.

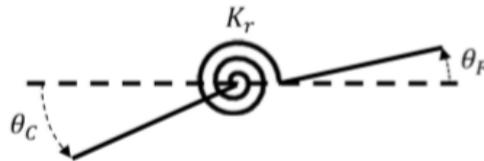
Em uma conexão entre dois elementos, existem duas rotações, sendo uma rotação  $\theta_C$  proveniente de um dado elemento C, e outra  $\theta_F$  advinda de um elemento F e as mesmas podem ser vistas na figura 16.

Figura 15 – Modelo matemático linear para conexões semirrígidas.



Fonte: Chan e Chui (2000).

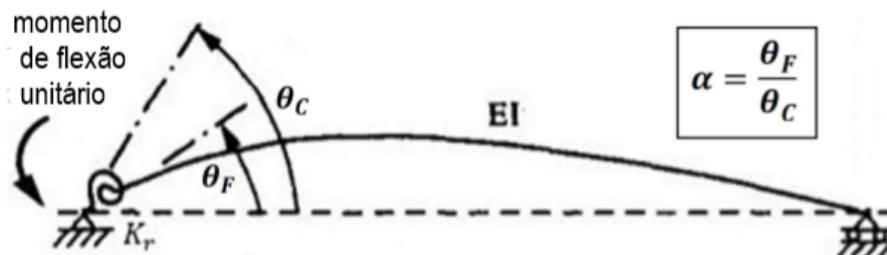
Figura 16 – Diferença entre a rotação do elemento C e o elemento F.



Fonte: Chan e Chui (2000).

Pesquisadores como Sekulovic e Salatic (2001) e Kartal et. al. (2010), utilizam um fator de fixação  $\alpha$  para quantificar a rigidez de uma ligação semirrígida. Para conexões totalmente rígidas, o valor do fator de fixação é 1 e para totalmente flexíveis é 0. (MON-FORTON, 1962), deduz a relação entre rigidez rotacional e o fator de fixação, através do quociente entre rotações dos elementos  $\theta_F$  e  $\theta_C$  representados na Figura 17, devido a um momento de flexão unitário.

Figura 17 – Significado físico do fator de fixação.



Fonte: Adaptado de Simoes (1996).

Faria (2019a) desenvolveu um código numérico para avaliar estruturas 3D formadas por elementos de pórticos com conexões semirrígidas em cinemática linear, através da formulação de um elemento finito pelo método direto. A formulação é baseada em Chan e Chui (2000), e idealiza as conexões com duas molas rotacionais em cada elemento, atuando nos plano de flexão. Como em cada elemento há duas conexões, há quatro fatores de



onde,

$$a_e = \frac{E_e A_e}{L_e}, \quad (7)$$

$$o_e = \frac{G_e J_e}{L_e}, \quad (8)$$

$$b_e = \frac{E_e I_e}{L_e^3 \left( \frac{1}{1+\zeta} \right)}, \quad (9)$$

$$f_{c_e}^1 = \frac{\alpha_{1_e} + \alpha_{2_e} + \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}{4 - \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}, \quad (10)$$

$$f_{c_e}^2 = \frac{\alpha_{3_e} + \alpha_{4_e} + \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}{4 - \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}, \quad (11)$$

$$f_{c_e}^3 = \frac{2\alpha_{1_e} + \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}{4 - \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}, \quad (12)$$

$$f_{c_e}^4 = \frac{2\alpha_{2_e} + \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}{4 - \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}, \quad (13)$$

$$f_{c_e}^5 = \frac{2\alpha_{3_e} + \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}{4 - \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}, \quad (14)$$

$$f_{c_e}^6 = \frac{2\alpha_{4_e} + \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}{4 - \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}, \quad (15)$$

$$f_{c_e}^7 = \frac{3\alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}{4 - \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}, \quad (16)$$

$$f_{c_e}^8 = \frac{3\alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}{4 - \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}, \quad (17)$$

$$f_{c_e}^9 = \frac{3\alpha_{1_e}}{4 - \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}, \quad (18)$$

$$f_{c_e}^{10} = \frac{3\alpha_{2_e}}{4 - \alpha_{1_e} \alpha_{2_e}}, \quad (19)$$

$$f_{c_e}^{11} = \frac{3\alpha_{3_e}}{4 - \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}, \quad (20)$$

$$f_{c_e}^{12} = \frac{3\alpha_{4_e}}{4 - \alpha_{3_e} \alpha_{4_e}}. \quad (21)$$

Em aplicações práticas, não são empregados valores 0 ou 1 para os fatores de fixação  $\alpha$ . Utiliza-se valores como por exemplo, 0,99 e 0,01 para evitar problemas numéricos.

### 3.4 OTIMIZAÇÃO DE CONEXÕES SEMIRRÍGIDAS

Em otimização estrutural, em casos onde se tem pequenas deformações e deslocamentos, modelos lineares vêm sendo aplicados para análises em conexões semirrígidas, nos mais diversos métodos de otimização, sejam eles baseados em gradientes ou meta-heurísticos.

Apresentou-se, em Xu e Grierson (1993), um procedimento para minimizar o custo das conexões semirrígidas de estruturas planas de aço, sujeitas a restrições de tensão e deslocamento. Empregou-se o tratamento de variáveis discretas para as seções transversais dos perfis, com base nos catálogos americanos, e como variável contínua avaliou-se a rigidez

rotacional de cada conexão. Um algoritmo de otimização mista foi aplicado através de um método Lagrangeano baseado em gradiente. Os autores constataram que a otimização das conexões semirrígidas pode levar a estruturas mais leves e com menor custo. A função objetivo avalia o custo de cada conexão com base em sua rigidez rotacional, sendo definida por,

$$W = \sum_{i=1}^{nel} [c_{M_i} \rho_i A_i L_i + \sum_{c=1}^2 (V_0 + V_1 \alpha_c)_i (c_{M_i} \rho_i A_i L_i)], \quad (22)$$

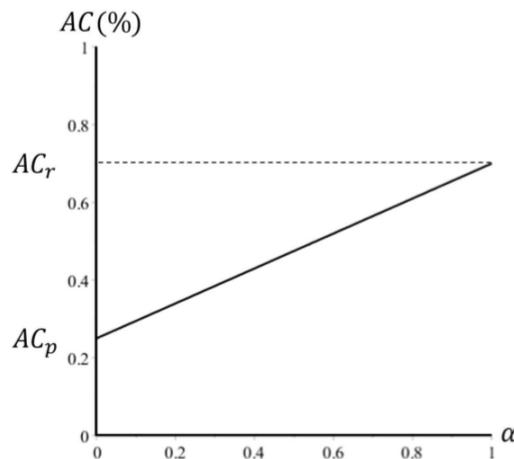
onde  $W$  é a função objetivo,  $\rho$  é a massa específica,  $A_i$  é a área da seção transversal respectiva a cada elemento  $i$ ,  $nel$  representa o número total de elementos,  $c$  é o índice relacionado a cada mola rotacional,  $V_0$  e  $V_1$  são parâmetros que controlam o custo das conexões de cada elemento, a variável  $c_{M_i}$  representa o custo do material ( $\frac{\$}{kg}$ ) e  $\alpha_c$  é o termo respectivo as rigidezes das molas nas conexões (pode variar de 0 a 1). Considerou-se que o custo de uma conexão flexível seria menor do que uma conexão rígida, e o custo das conexões dependente de forma linear em relação ao custo de material. O custo adicional, relativo às conexões, é de 25 por cento para conexões flexíveis ( $AC_p$ ) e 70 por cento para conexões rígidas ( $AC_r$ ), de acordo com

$$0.25 \rho_i A_i L_i \leq AC_i \rho_i A_i L_i \leq 0.70 \rho_i A_i L_i, \quad (23)$$

$$AC_i = \sum_{c=1}^2 (V_0 + V_1 \alpha_c). \quad (24)$$

A figura 19, representa graficamente essa variação, onde  $AC$  é o percentual de custos adicionais referente às conexões (pode variar de 0 a 100% do custo de material).

Figura 19 – Variação linear do custo conexões.

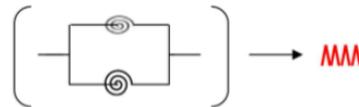


Fonte: Faria (2019a).

Da abordagem proposta por Faria (2019a) para o efeito das conexões semirrígidas, algumas considerações foram realizadas:

- Pequenos deslocamentos e deformações;
- Todos os elementos possuem duas molas em cada extremidade, totalizando quatro por elemento;
- Rigidez rotacional nos planos de flexão local  $\tilde{x}\tilde{y}$  e  $\tilde{x}\tilde{z}$  (local), provenientes das conexões.
- A fim de facilitar a forma com que as conexões semirrígidas são representadas, o referido autor propôs, para as molas com rigidez rotacional nos planos  $\tilde{x}\tilde{y}$  e  $\tilde{x}\tilde{z}$ , o símbolo de uma única mola, como apresentado na figura 20.

Figura 20 – Mola para rigidez rotacional nos planos  $\tilde{x}\tilde{y}$  e  $\tilde{x}\tilde{z}$ .



Fonte: Faria (2019a).

### 3.5 CRITÉRIO DE FALHA

Nos trabalhos de Saka (1990) e Pedersen e Nielsen (2003) foram implementados critérios de falha de tensão axial como restrição de projeto na otimização de treliças. Foi proposta, em Saka (1990), a restrição de tensão axial usando padrões dinamarqueses para perfis de seção transversal específicos e adicionando restrição de flambagem, aderindo aos padrões norte-americanos e alemães específicos para as treliças de aço. De maneira análoga, Pedersen e Nielsen (2003) inseriram a restrição de tensão axial usando padrões dinamarqueses para perfis de seção transversal específicos. Em muitos países há normas regulamentadoras que especificam a tensão admissível que deve ser satisfeita nas mais diversas situações em projetos estruturais (PEDERSEN; NIELSEN, 2003).

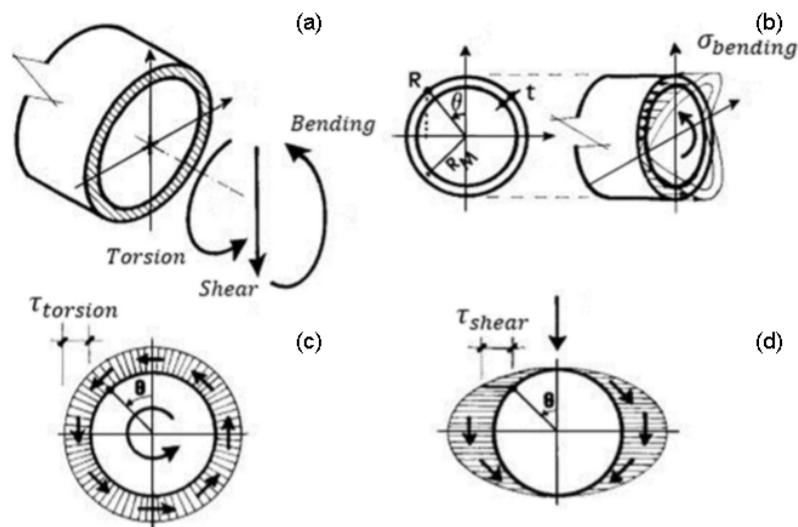
Moses e Onoda (1969) otimizaram estruturas submetidas a cargas concentradas e distribuídas, sujeitas a restrições de tensão baseadas na norma britânica. De maneira semelhante, Xu e Grierson (1993) adicionaram em seus estudos o efeito das ligações semirrígidas nos momentos fletores.

Desconsiderando o efeito das tensões cisalhantes, Pedersen e Jorgenseng (1984) implementaram um critério de falha baseado no estado de tensão unidimensional, considerando apenas as tensões normais produzidas pelas forças axiais  $N$  e momentos fletores. De forma análoga, Simoes (1996) adotou o mesmo critério de falha, e acrescentou o efeito de conexões semirrígidas.

No que se refere a estruturas 3D sujeitas a tensões combinadas, Sagioglu e Abdulkadir (2015) desenvolveram sua pesquisa respeitando o código de construção turco para estruturas de aço. Irlles e Irlles (2001) desenvolveram um critério de falha especificamente

para tubos de material dúctil e parede fina, englobando o caso particular onde a seção transversal é submetida a dois esforços internos provenientes de momentos fletores e um esforço interno axial. Os autores apresentaram diagramas de interação elástica para o caso onde se submete a seção transversal simultaneamente aos esforços internos fletor e torsor. Na figura 21 é apresentado um sistema de referência polar, onde a tensão equivalente crítica para este determinado tipo de seção transversal, encontra-se localizado no raio externo.

Figura 21 – Critério de falha para tubos de parede fina proposto por Irles e Irles (2000).



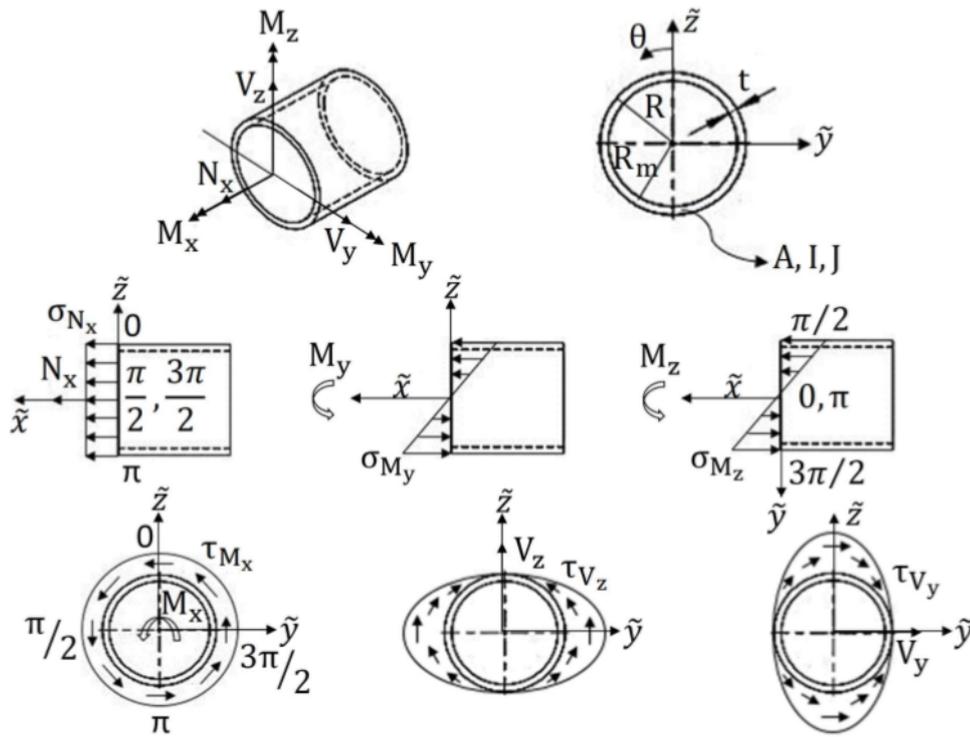
Fonte: Irles e Irles (2000).

Faria (2019a) desenvolveu em seu trabalho, um critério de falha para tubos de parede fina e comprimento variável. O mesmo, foi fundamentado na teoria de *von Mises* e na proposta de Irles e Irles (2001). Na figura 22, pode ser observado o sistema de referência proposto por Faria (2019a). Para tal proposta, algumas considerações foram realizadas, tais como:

- 1 - Elemento com seção transversal simétrica e prismática ao longo do eixo longitudinal;
- 2 - Material dúctil, homogêneo e isotrópico;
- 3 - Concentrações e tensões residuais são negligenciadas;
- 4 - Tensões normais e de cisalhamento distribuídas de acordo com o sistema de referência de forças internas acoplado ao sistema de referência angular  $\theta$  (apresentado na figura 22);
- 5 - Distribuição constante da tensão normal da força axial, distribuição linear da tensão normal dos momentos fletores, distribuição linear da tensão de cisalhamento resultante da torção e distribuição parabólica das tensões de cisalhamento relacionadas às forças de cisalhamento;

- 6 - No contorno do raio externo, as tensões de cisalhamento das forças de cisalhamento e torção são tangenciais;
- 7 - A seção transversal permanece plana durante a deformação da tensão axial;
- 8 - A distorção da seção transversal é insignificante e a espessura da parede fina ( $t$ ) é pequena o suficiente para assumir que não há variação das tensões de cisalhamento ao longo da espessura;
- 9 - Pequenos ângulos de torção em que o comprimento e o raio externo do elemento permanecem inalterados;
- 10 - O ponto crítico da sollicitação mecânica localizado no raio externo e dependente da posição angular  $\theta$ , inserido na faixa fixa de  $[0, 2\pi]$  e da posição ao longo do eixo local.

Figura 22 – Critério de falha para tubos de parede fina proposto por Faria (2019)



Fonte: Faria (2019a).

Para a formulação do critério de falha formulado por Faria (2019a), foi utilizada a teoria de von Mises, a qual sob um estado de tensão multiaxial é,

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \quad (25)$$

onde tem-se que as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  são as tensões normais, e os termos  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  são as tensões cisalhantes.

A tensão normal é dada por,

$$\sigma_{N_{x_i,k}} = \frac{N_{x_i,k}}{A_i}, \quad (26)$$

onde  $A_i$  é a área do  $i$ -ésimo elemento, e  $N_{x_i,k}$  é o esforço axial no elemento  $i$  e na posição  $k$ . A tensão cisalhante é dada por,

$$\tau_{M_{x_i,k}} = \frac{M_{x_i,k} R_i}{J_i}, \quad (27)$$

onde  $M_{x_i,k}$  é momento torsor no elemento  $i$  e na posição  $k$ ,  $R_i$  é o raio do elemento  $i$ , e  $J_i$  é o momento polar de inércia do elemento  $i$ . O momento resultante no elemento  $i$  e na posição  $k$   $M_{R_i,k}$  é dado pela soma vetorial dos momentos  $M_y$  e  $M_z$ ,

$$M_{R_i,k} = \sqrt{M_{y_i,k}^2 + M_{z_i,k}^2}, \quad (28)$$

e o ângulo  $\gamma_{M_i,k}$  é dado por,

$$\gamma_{M_i,k} = \tan^{-1} \left( \frac{M_{z_i,k}}{M_{y_i,k}} \right). \quad (29)$$

Para o cálculo da tensão normal associada à flexão, é necessário determinar previamente o parâmetro  $\bar{c}$ , que é a distância do ponto em  $\theta$  até a linha de ação do vetor  $M_R$  ( $\bar{c}$  deve ser perpendicular a  $M_R$ ), conforme pode ser visto na figura 23. A determinação do parâmetro  $\bar{c}$  é dada por

$$c_{i,k}^- = R_i \sin(\phi_{i,k}), \quad (30)$$

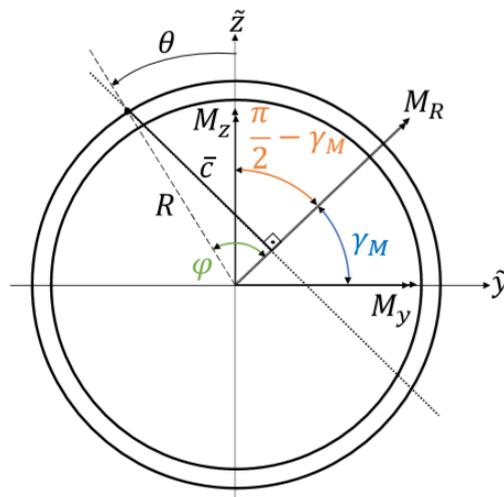
onde

$$\phi_{i,k} = \theta_{i,k} + \left( \frac{\pi}{2} - \gamma_{M_i,k} \right), \quad (31)$$

Assim, pode-se calcular a tensão normal resultante  $\sigma_{M_R}$  mediante a expressão

$$\sigma_{M_{R_i,k}} = \frac{M_{R_i,k} c_{i,k}^-}{I_i}. \quad (32)$$

Figura 23 – Propriedades da seção transversal usadas na dedução da tensão normal dos momentos fletores.



Fonte: Faria (2019a).

A soma vetorial dos esforços cisalhantes  $V_y$  e  $V_z$  fornece o esforço cisalhante resultante  $V_R$

$$V_{R_{i,k}} = \sqrt{V_{y_{i,k}}^2 + V_{z_{i,k}}^2}, \quad (33)$$

com o ângulo  $\gamma_{V_{i,k}}$  dado por

$$\gamma_{V_{i,k}} = \tan^{-1} \frac{V_{z_{i,k}}}{V_{y_{i,k}}}. \quad (34)$$

Conforme pode ser visto na figura 24, o vetor resultante  $V_R$  é decomposto no sistema auxiliar  $y'/z'$  pelas componentes  $V_R^{y'}$  e  $V_R^{z'}$ ,

$$V_{R_{i,k}}^{y'} = V_{R_{i,k}} \cos \lambda_{i,k} \quad (35)$$

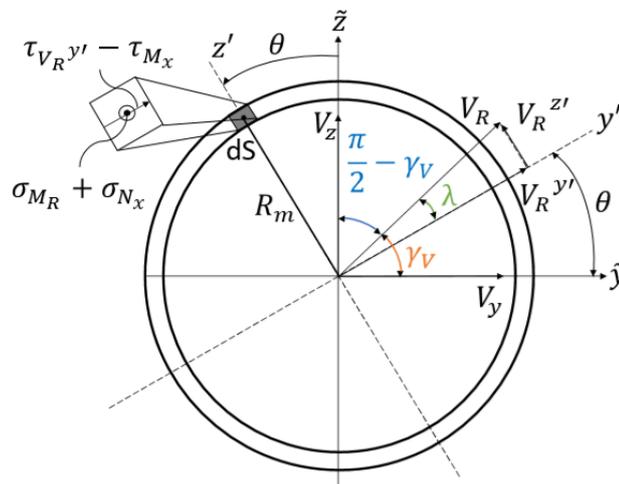
$$V_{R_{i,k}}^{z'} = V_{R_{i,k}} \sin \lambda_{i,k} \quad (36)$$

onde

$$\lambda_{i,k} = \gamma_{V_{i,k}} - \theta_{i,k} \quad (37)$$

e  $k = 1 \dots 3$ .

Figura 24 – Propriedades da seção transversal usadas na dedução da tensão de cisalhamento produzida pelas forças de cisalhamento.



Fonte: Faria (2019a).

A tensão cisalhante na direção  $z'$  é nula no ponto  $\theta$ . Isto se dá pela forma com que ocorre a distribuição de tensão, que pode ser observada na figura 22. Para o cálculo da tensão cisalhante resultante na direção  $y'$  na equação (42) é necessário o cômputo do momento estático  $Q$  calculado conforme a equação (41), do esforço cisalhante resultante

$V_R^{yI}$  conforme a equação (35) e do momento de inércia  $I$ ,

$$\bar{y}'_i = \frac{4t_i}{3\pi}, \quad (38)$$

$$\bar{A}'_i = \pi R_{m_i} t_i, \quad (39)$$

$$Q_i = \bar{y}'_i \bar{A}'_i, \quad (40)$$

$$Q_i = \frac{4t_i^2 R_{m_i}}{3}. \quad (41)$$

A tensão cisalhante resultante  $\tau_{V_R}^{yI}$  são calculados por,

$$\tau_{V_{R_{i,k}}}^{yI} = \frac{V_{R_{i,k}}^{yI} Q_i}{I_i t_i}, \quad (42)$$

onde  $V_{R_{i,k}}$  é o esforço cortante resultante no elemento  $i$  e posição  $k$ ,  $Q_i$  é o momento estático no elemento  $i$ ,  $I_i$  é o momento de inércia no elemento  $i$ , e  $t_i$  é a espessura do elemento  $i$ . Como a tensão normal  $\sigma_{yy}$  e as tensões cisalhantes  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{zx}$  são nulas, o momento de inércia  $I$ , o momento polar de inércia  $J$ , o raio médio  $R_m$  e o raio externo  $R$  são calculados por

$$R_i = \frac{1}{2} \frac{(A_i + \pi t_i^2)}{\pi t_i}, \quad (43)$$

$$R_{m_i} = R_i - \frac{t_i}{2}, \quad (44)$$

$$I_i = \pi R_{m_i}^3 t_i, \quad (45)$$

$$J_i = 2I_i. \quad (46)$$

Logo, o critério de falha desenvolvido por Faria (2019a) é,

$$\left( \frac{N_{i,k}}{A_i} + \frac{M_{R_{i,k}} \bar{C}_{i,k}}{I_i} \right)^2 + 3 \left( \frac{M_{x_{i,k}} R_i}{2I_i} - \frac{V_{R_{i,k}}^{yI} Q_i}{I_i t_i} \right)^2 \leq \sigma^2. \quad (47)$$

Nota-se que a equação 47 depende de fatores geométricos como a área da seção transversal  $A$ , a espessura da parede fina  $t$ , o ponto crítico  $\theta$  e a posição axial no elemento. Este critério é adotado como restrição de tensão no presente trabalho.

### 3.6 VARIÁVEIS DISCRETAS

Em muitas aplicações práticas, variáveis de projeto discretas e inteiras ocorrem naturalmente na formulação do problema. Neste contexto, a variável discreta tem seu valor selecionado a partir de um conjunto finito de valores. Por exemplo, a área da seção transversal de um perfil tubular e a espessura de um tubo de parede fina, são selecionados a partir de um catálogo comercial, pois suas dimensões são padronizadas. A presença de variáveis mistas e/ou discretas dificulta a solução de problemas de otimização, e por esse

motivo, tem sido alvo de estudo por diversos pesquisadores, alguns dos quais serão aqui citados.

John, Ramakrishnan e Sharma (1987) propuseram em seu trabalho, a aplicação de programação linear sequencial (SLP) com junção de *Branch and Bound* para otimização estrutural de treliças com variáveis de projeto discretas. A função objetivo empregada foi a minimização do peso com restrição de flambagem. A abordagem adotada para o tratamento das variáveis discretas foi a consideração do espaço de busca contínuo, de forma a obter como solução inicial um projeto ótimo com variáveis contínuas. A próxima etapa sugerida foi a escolha de seções comerciais para a seção transversal de área de cada elemento, sendo que estas deveriam ser maiores do que as contínuas advindas do processo de otimização. Entretanto, esta abordagem pode vir a ser ineficaz, induzindo a um erro, onde o ponto discreto mais próximo não é a solução do problema. Desta forma, fica evidente a importância da utilização de um método próprio para o tratamento de variáveis discretas, e não somente tratar o problema como contínuo e proceder com o arredondamento para a variável discreta mais próxima do ponto ótimo contínuo.

Um método numérico é apresentado para a solução de problemas discretos não-lineares de otimização em Rajeev e Krishnamoorthy (1992). Esses autores utilizaram o método dos algoritmos genéticos (AG) para otimização de treliças. Os autores transformaram problemas restritos em irrestritos, através de uma formulação baseada nas violações de restrições, de forma a ser possível a utilização dos algoritmos genéticos. Uma das aplicações da metodologia proposta pelos autores, foi uma torre de transmissão composta por 160 barras.

Bennage e Dhingra (1995) propuseram o desenvolvimento de uma metodologia de otimização multiobjetivo baseada em busca tabu aplicada em projetos estruturais de treliça com variáveis de projetos discretas. A abordagem proposta pelos autores foi desenvolvida considerando várias condições de carga, tensão, deslocamento e restrições locais/globais de flambagem.

Lemonge e Barbosa (2004) propuseram um Método de Penalidade Adaptativo (APM – *Adaptive Penalty Method*) para algoritmos genéticos aplicados a problemas de otimização restritos com minimização de peso e tratamento de variáveis mistas. Os coeficientes de penalidade são adaptativos, calculados de forma a promover uma ponderação entre as restrições. O algoritmo genético utilizado na referida pesquisa foi baseado em codificação binária, mutação padrão e operadores cruzados. O algoritmo foi aplicado ao problema minimização de peso em treliças de 10, 25 e 52 barras. Nos estudos de casos desenvolvidos pelos autores, apresentaram-se resultados similares aos disponíveis na literatura existente até a data de desenvolvimento da pesquisa referida.

Kripka (2004) propôs a utilização do algoritmo Recozimento Simulado para minimização de peso em treliças, com restrições de tensão e deslocamentos. A minimização do peso em estruturas treliçadas sujeitas a restrições de tensão, deslocamento e vários casos de

carga pode ser encontrada em Juang e Chang (2006). Realizou-se, na referida pesquisa, o tratamento de variáveis discretas através do método Lagrangiano discreto (DLM). O DLM é uma adaptação do método multiplicador usual de Lagrange para problemas contínuos. Uma estratégia adotada foi a utilização de uma tabela com propriedades das seções transversais dos perfis empregados na análise. A cada perfil na tabela é atribuído um número exclusivo, o qual é usado como variável de projeto inteira para cada um dos membros estruturais. O autor faz estudo de cinco exemplos com o intuito de demonstrar a viabilidade do método proposto. É mostrado que, tanto para funções de restrição monotônica quanto não monotônica, o DLM pode ser eficiente para o tratamento de variáveis discretas em estruturas de engenharia. A principal contribuição do trabalho de Juang e Chang (2006) foi uma revisão do algoritmo DLM usando ponderação estática para o projeto ótimo discreto de estruturas treliçadas sujeitas a restrições de tensão e deslocamento com vários casos de carga.

A eficiência do método dos algoritmos genéticos está diretamente ligada aos parâmetros utilizados, tais como tamanho da população, taxa de mutação, fator de penalização da função objetivo, função de recombinação (*crossover*) e critérios de parada. Todos estes são parâmetros heurísticos que dependem da habilidade do projetista. Guerra (2008) aplicou o método dos algoritmos genéticos ajustando alguns dos parâmetros citados acima, a fim de obter um melhor desempenho na otimização de treliças planas e espaciais, com restrições de tensões, flambagem e deslocamentos. Dentre os exemplos apresentados pelo autor, destaca-se um problema com características mais realistas sob o ponto de vista prático, composto de uma treliça espacial otimizada, com restrições impostas pela norma NBR8800:2008. Verificou-se que na maioria dos casos, com o aumento do número de indivíduos da população, obteve-se melhores resultados (menor massa). Também, na maior parte dos casos, outro fator influenciador foi a taxa de mutação. Com o aumento da referida taxa obteve-se melhores resultados.

Souza (2009) apresentou, uma formulação para a otimização de treliças planas e espaciais. A função objetivo visava a minimização da massa com restrições de tensão e deslocamento, considerando variáveis mistas. Foram realizados estudos de casos em duas etapas, sendo a primeira baseada em programação linear sequencial (SLP) e a segunda baseada na aplicação dos algoritmos genéticos (AG) com emprego do método das funções penalizadas para transformar problemas restritos em irrestritos. Utilizam-se os resultados encontrados na primeira etapa com o intuito de melhor convergência na segunda etapa. Comprovou-se que o emprego dos Algoritmos Genéticos (AG), com a inicialização de uma população composta pelas soluções encontradas no SLP, levou a uma considerável redução de custo computacional quando comparado com a aplicação de uma população inicial aleatória.

Hasançebi *et al.* (2009) propuseram a implementação de sete algoritmos baseados em meta-heurísticas:

- Algoritmos genéticos (SGA);
- Método do recozimento simulado (SA);
- Estratégias de evolução (ESs);
- Enxame de partículas (PSO);
- Busca tabu (TS);
- Otimização de colônias de formigas (ACO);
- Busca harmonica (HS).

Fez-se comparação e avaliação das sete técnicas de otimização acima mencionadas, através de estudos de casos propostos na literatura, aplicadas a estruturas com juntas de pinos, com o tratamento de variáveis discretas. Nos estudos desenvolvidos pelos autores, as técnicas de otimização baseados em recozimento simulado e estratégia de evolução demonstraram que podem ser poderosas. Por outro lado, os algoritmos baseados em busca harmônica e algoritmos genéticos demonstraram lenta taxa de convergência.

O algoritmo ABC é uma técnica de otimização meta-heurística que imita o processo de colônia de abelhas. Originalmente, o algoritmo ABC foi desenvolvido para problemas de otimização de função contínua. No artigo de Sonmez (2011) é proposta a aplicação do método de otimização baseado no algoritmo de colônia de abelhas (ABC) para estruturas treliçadas com restrições de tensão e deslocamento. O algoritmo foi adaptado para o tratamento de variáveis discretas através de uma lista de perfis disponíveis, atendendo às restrições de projeto. Quatro exemplos são estudados a fim de comprovar a eficácia da proposta e os resultados foram comparados com os obtidos usando outras técnicas de pesquisa meta-heurística propostas na literatura. O algoritmo ABC com aplicações para o tratamento de variáveis discretas forneceu bons resultados e demonstrou ser uma alternativa para projetistas que desejam trabalhar com variáveis de projeto discretas e/ou mistas, desde que para um número moderado de restrições e variáveis de projeto.

Martins e Cardoso (2012) propuseram a utilização do método de otimização lagrangeano aumentado, com funções de penalização (seno e produtório) e o *restart probabilístico* com detecção de vizinhança para reinício através da janela de Parzen, para a solução de problemas estruturais com variáveis discretas. Estudou-se a melhor relação entre os parâmetros, densidade ( $\rho_x$ ) e largura ( $h$ ) da janela Parzen para evitar já se ter percorrido determinada região do espaço de solução. Para as variáveis discretas, adotou-se a estratégia de transformá-las em contínuas e tratá-las através do Lagrangeano Aumentado. Assim, cada variável discreta é tratada como uma variável contínua e esta é associada a uma restrição que faz com que na solução final a variável tenda a um valor do conjunto discreto. A cada restrição atribui-se um valor dinâmico de penalização, de modo a satisfazer o conjunto

discreto previamente definido. Para cada um dos casos estudados inicializou-se o problema discreto a partir do ponto ótimo encontrado pela abordagem contínua, atualizaram-se os parâmetros de Lagrange e variaram-se os conjuntos discretos quanto ao número de elementos e quanto à proximidade do ótimo.

Silva (2009) utilizou Algoritmos Genéticos (AG) para aproximar o ponto de mínimo global e, posteriormente, um método de programação não linear para realizar uma busca local. A função objetivo considerada foi a minimização do peso, com restrição de falha, flambagem e deslocamentos. O autor solucionou problemas com variáveis discretas para as seções transversais dos perfis, de forma a aproximá-los dos padrões comerciais.

Geem, Kim e Loganathan (2001) desenvolveram uma metodologia de otimização para aplicação de derivada estocástica em variáveis de projeto discretas, usando o algoritmo *Harmony Search*. O código foi desenvolvido através da analogia do processo de apresentação musical, tal como o observado em um trio de jazz, onde cada músico busca a harmonia perfeita entre eles. Os próprios parâmetros do método juntamente com uma memória de soluções interagem entre si produzindo novas harmonias. Cada possível solução é denominada harmonia. O conjunto de todas as soluções é denominado memória harmônica, sendo associada a cada uma delas uma nota de performance que mede sua capacidade harmônica. Partindo da ideia do algoritmo referido acima, Cheng, Prayogo, Wu e Lukito (2016) propuseram uma nova abordagem para o algoritmo *Harmony Search* (HS) na otimização de estruturas treliçadas. A proposta *Hybrid Harmony Search* (HHS) segue uma nova abordagem para a improvisação: ao reter as funções *Harmony Memory* e de ajuste de afinação do algoritmo HHS, ele substitui a função de randomização do algoritmo HS pela melhor busca global e melhor otimização de enxame de partículas (PSO) e pesquisa de vizinhança. O desempenho do algoritmo HHS é testado em seis problemas discretos de otimização da estrutura de treliça sob várias condições de carregamento. Demonstrou-se nos resultados da otimização um excelente desempenho do algoritmo HHS em termos de solução ótima e comportamento de convergência.

Rangel (2018) propôs, em sua dissertação, uma metodologia para dimensionamento ótimo de pórticos planos de aço com perfis metálicos comerciais e ligações semirrígidas. Considerou-se a minimização do custo de fabricação como função objetivo da estrutura estudada, tendo como variáveis de projeto as seções transversais dos perfis I e as rigidezes das ligações viga-coluna. Empregou-se o método de algoritmos genéticos (AG) com variáveis mistas considerando, como variáveis de projeto discretas, os identificadores dos perfis de vigas e colunas obtidos em catálogos de fabricantes e, como variáveis de projeto contínuas, as rigidezes rotacionais das ligações viga-coluna, que devem estar no intervalo semirrígido.

Almeida, Vargas e Braun (2019) propuseram a aplicação do algoritmo *Harmony Search* no dimensionamento de perfis I soldados submetidos à compressão, flexão, ou à combinação de ambos. Baseou-se o problema de otimização em programação não linear e variáveis mistas. O autor adotou espessuras como variáveis discretas, e altura e largura

como contínuas.

### 3.7 ASPECTOS DA FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO PARA VARIÁVEIS DISCRETAS

Segundo Arora (2007), um problema de variáveis mistas (MV-OPT) pode ser definido e tratado pelos métodos padrão de otimização, com restrições de igualdade e desigualdade estendidas, definindo algumas variáveis como contínuas e outras discretas. Sendo assim tem-se,

$$\text{Min} \quad W, \quad (48)$$

$$t.q \quad h_i = 0, \quad i = 1 \dots p, \quad (49)$$

$$g_j \leq 0, \quad j = 1 \dots m, \quad (50)$$

$$x_i \in D_i, \quad D_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq_i}), \quad i = 1..nd, \quad (51)$$

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu}, \quad i = (nd + 1)..n, \quad (52)$$

onde  $W$  é a função objetivo,  $h_i$  é uma restrição de igualdade,  $g_j$  é uma restrição de desigualdade,  $x_{il}$  e  $x_{iu}$  são os limites inferior e superior da variável de projeto contínua  $x_i$ ,  $p$  é o número de restrições de igualdade,  $m$  é o número de restrições de desigualdade,  $n$  é o número de variáveis de projeto,  $nd$  é o número de variáveis de projeto discretas,  $D_i$  é o conjunto de valores para a  $i$ -ésima variável discreta,  $q_i$  é o número de valores disponíveis para a variável discreta  $i$ ,  $d_{ik}$  é o  $k$ -ésimo valor possível para a  $i$ -ésima variável discreta.

Em Rao (2009), há referência de alguns métodos para resolução de programação linear inteira, que é o caso particular de programação linear com variáveis discretas. Dentre eles, destacam-se os métodos de Balas (1965) e Gomory (1963).

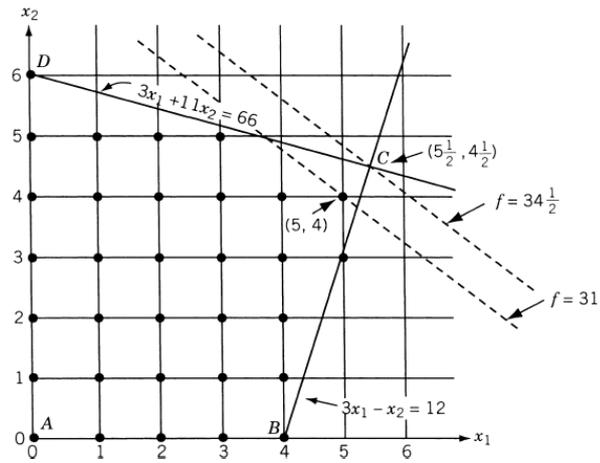
O método de Balas (1965) consiste em se ter um problema de programação linear com variáveis binárias, cujos valores podem ser somente 0 ou 1. Se houver  $n$  variáveis binárias em um problema, um processo de enumeração explícita envolverá o teste de  $2n$  possíveis soluções em relação às restrições declaradas e à função objetivo. No método Balas, todas as  $2n$  soluções possíveis são enumeradas, explícita ou implicitamente. A eficiência do método surge da estratégia inteligente adotada ao selecionar apenas algumas soluções para enumeração explícita. O método começa definindo todas as  $n$  variáveis iguais a zero e consiste em um procedimento sistemático de atribuir sucessivamente a certas variáveis o valor 1, de tal maneira que, após tentar uma (pequena) parte de todas as  $2n$  combinações possíveis, obtém-se: uma solução ótima ou evidência do fato de que não existe solução viável. As únicas operações necessárias no cálculo são adições e subtrações e, portanto, os erros de arredondamento não estarão lá.

O método de Gomory (1963) consiste na resolução inicial de um problema de programação linear, negligenciando o requisito inteiro. Se a solução do problema for inteira,

não há nada a ser feito, pois já se obteve a solução inteira. Entretanto, se a resposta for composta por uma ou mais variáveis não inteiras (valores fracionários), o método consiste em aplicar restrições adicionais, as quais irão forçar o problema para uma solução inteira. Após encontrar a nova solução ideal aplicando o método simplex dual, testes são realizados para verificar se a nova solução é totalmente inteira ou não. Se a nova solução ideal for totalmente inteira, o processo será encerrado. Por outro lado, se alguma das variáveis básicas da nova solução assumir valores fracionários, uma nova restrição de Gomory será derivada do novo quadro simplex e o método simplex dual será aplicado novamente. Este procedimento continua até que seja obtida uma solução inteira ideal ou o método simplex dual indique que o problema não possui uma solução inteira viável.

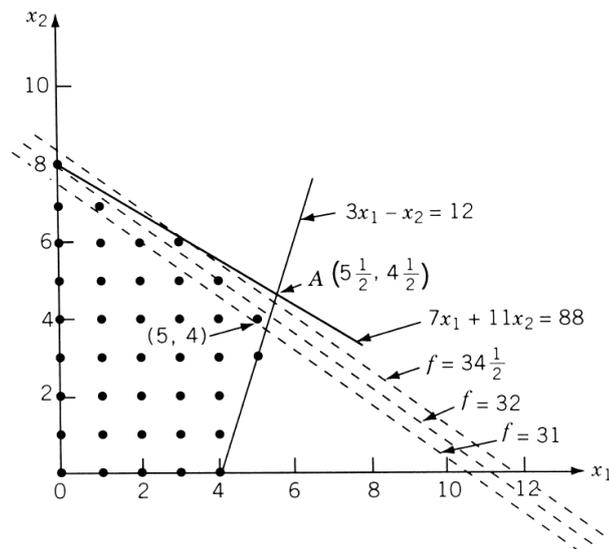
Na otimização estrutural com o tratamento de variáveis discretas, a abordagem sugerida por Asadpoure, Guest e Valdevit (2015) e Torii, Lopez e Miguel (2016) em que elementos cuja área de seção transversal menores do que um limiar pré-estabelecidos pelo projetista são eliminados, pode ser ineficaz. É ilustrado um exemplo em Rao (2009), onde pode-se ter maior clareza deste fato. Na figura 25 tem-se que a solução contínua de um problema de otimização inteira é  $(5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ , e o valor mínimo para a função objetivo é  $34\frac{1}{2}$ . Arredondando-se para a solução discreta mais próxima, tem-se o ponto ótimo em  $(5, 4)$ . Ao comparar esta solução com todas as outras soluções possíveis de número inteiro (mostradas por pontos na figura 25), descobre-se que esta solução é ideal para o problema de LP (programação linear) inteiro proposto. Entretanto, deve-se notar que o truncamento da parte fracionária de um problema de LP nem sempre dará a solução do problema de LP inteiro correspondente. Com alteração das restrições, pode ser ilustrado na figura 26 a região viável e a solução contínua do problema de LP o ponto ótimo  $(5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$  e o valor mínimo para a função objetivo é  $34\frac{1}{2}$ . O truncamento da variável contínua para a variável inteira mais próxima seria no ponto  $(5, 4)$ . Para o problema inteiro correspondente no caso anterior, esta foi a solução ótima, entretanto, não é para o caso atual. Nesta situação, representado pela figura 26, o ponto de ótimo inteiro é em  $x_1 = 0, x_2 = 8$  e o valor da função objetivo neste ponto é  $f = 32$ . Pode-se observar assim, a importância de se trabalhar com um método de otimização adequado para o tratamento de variáveis discretas, e não somente tratar como um problema de variáveis contínuas e proceder com o arredondamento para a variável discreta mais próxima.

Figura 25 – Solução gráfica para um problema de LP.



Fonte: Rao (2009).

Figura 26 – Solução gráfica para um problema de LP com restrição modificada.



Fonte: Rao (2009).

## 4 FORMULAÇÕES PROPOSTAS

### 4.1 FORMULAÇÃO PARA REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE NA OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS

Como solução do algoritmo de otimização, pode-se ter estruturas complexas, compostas por uma densa rede de elementos. Do ponto de vista prático, essas estruturas seriam inviáveis, devido ao alto custo de fabricação associado. Com o objetivo de aproximar esta pesquisa de aspectos práticos, propõe-se uma abordagem para a redução da complexidade.

Para a solução pretendida, a proposta é o emprego da função *Heaviside* regularizada aplicada na área, tal como realizado por Asadpoure, Guest e Valdevit (2015) e Torii, Lopez e Miguel (2016), e o mesmo procedimento será estendido aos comprimentos dos elementos ( $L$ ). O emprego da função *Heaviside* tem como objetivo estimar o número de elementos existentes no espaço de projeto, associando os mesmos ao custo de fabricação. Se existir um elemento, então há um custo de fabricação associado a este, ou seja, se a saída da função *Heaviside* for zero, incorre-se na inexistência de um dado elemento e não há um custo de fabricação envolvido. Por outro lado, se a saída for unitária, incide-se na existência do elemento e em um custo de fabricação associado.

Com base no relatório interno de Faria (2019b) e no trabalho de Asadpoure, Guest e Valdevit (2015), nesta dissertação aprimora-se um código de otimização desenvolvido por Faria, de forma a dar robustez à redução da complexidade em problemas de otimização de pórticos espaciais tubulares com conexões semirrígidas. O problema de otimização considerado por Faria (2019b) é a minimização de custo, conforme a equação 53, sujeita a restrições de tensão e deslocamento. A função objetivo é definida por

$$W(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{nel} c_{W_i} \rho_i A_i L_i + c_{F_i} H_{1_i} H_{2_i}, \quad (53)$$

$$H_{1_i}(A_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta A_i}{A_{máx}}}\right) + \frac{A_i}{A_{máx}} e^{-\beta}, \quad (54)$$

$$H_{2_i}(L_i) = \left(1 - e^{\frac{-\beta L_i}{L_{máx}}}\right) + \frac{L_i}{L_{máx}} e^{-\beta}, \quad (55)$$

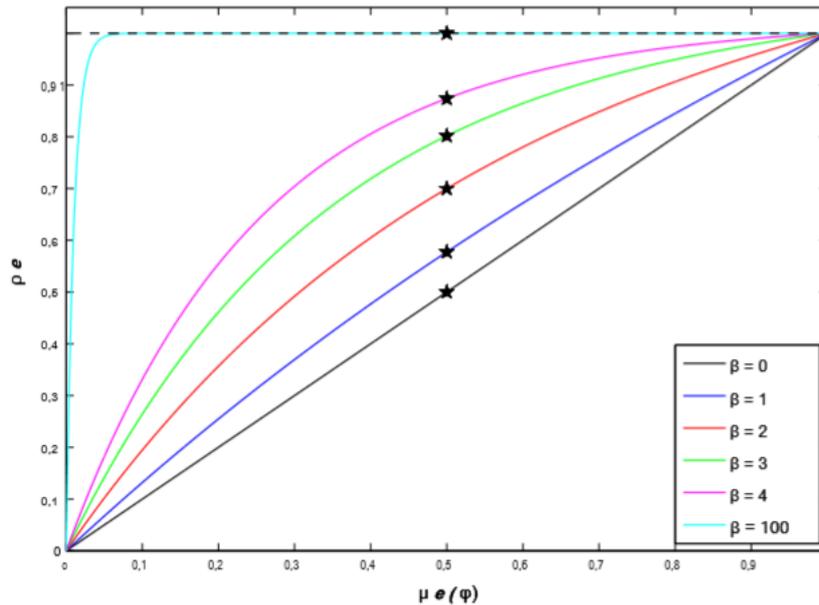
onde  $nel$  é o número de elementos,  $H_{1_i}$  é a aproximação contínua da função *Heaviside* aplicada sobre as áreas dos elementos,  $H_{2_i}$  é a aproximação contínua da função *Heaviside* aplicada sobre os comprimentos,  $c_W$  é o custo monetário do material por unidade de massa,  $c_F$  é o custo monetário por unidade de conexão,  $A_i$  é a área de cada elemento  $i$ ,  $L_i$  é o comprimento de cada elemento  $i$ ,  $L_{máx}$  é o comprimento máximo para normalização dos elementos,  $A_{máx}$  é a área máxima para normalização das áreas e  $\beta$  é o parâmetro que define a curvatura da função *Heaviside* regularizada. É importante ressaltar que a medida de complexidade aplicada ao comprimento dos elementos é inovadora, tendo sido aprimorada no presente trabalho.

Um inconveniente da função *Heaviside*, é que geralmente um método de continuação deve ser aplicado para a aproximação contínua de modo a não se aproximar bruscamente da função degrau unitário, e evitar a convergência para uma solução ótima local de baixa qualidade. Apesar da simplicidade de implementação, tal método produz perturbações artificiais nas variáveis de projeto normalizadas, o que pode influenciar na solução ótima resultante, e maior custo computacional devido ao aumento significativo no número de iterações necessárias para a convergência do processo, podendo ser uma abordagem ineficiente.

A fim de evitar o método da continuação e assim, obter redução de custo computacional, diversas propostas são sugeridas na literatura. Uma delas, apresentada por Guest, Asadpoure e Ha (2011), sugere aplicar na função *Heaviside* regularizada, um parâmetro  $\beta$  fixo e suficientemente alto (maior ou igual a 20, por exemplo) durante todo o processo de otimização. Os autores empregam o método das assintotas móveis (MMA) sugerindo, adicionalmente, adotar assintotas apertadas de modo a evitar instabilidades durante a sequência de otimização. O trabalho deixa claro que a estratégia pode ser implementada em outros métodos de otimização baseadas em gradientes. A proposta permite eliminar o método da continuação do parâmetro  $\beta$ , mantendo o mesmo constante durante todo o processo de otimização. Desta forma, há um ganho significativo no custo computacional. Esta abordagem foi implementada no código desenvolvido por Faria (2019a), com adaptações para programação linear sequencial. Uma estratégia diferente, que também evita continuação, foi empregada nesta dissertação, atualizando o parâmetro  $\beta$  ao longo da otimização, como será descrito na seção 4.1.1.

Na figura 27, são ilustrados diferentes valores para o parâmetro de curvatura  $\beta$ . Pode-se observar que o parâmetro  $\beta \geq 0$  dita a curvatura de aproximação, sendo linear para  $\beta = 0$  e aproximando-se da função salto unitário *Heaviside* à medida em que  $\beta$  tende a infinito.

Figura 27 – Efeito do aumento do parâmetro  $\beta$  sobre as densidades filtradas  $\varphi_i$ .



Fonte: Guest, Asadpoure e Ha (2011)

Tendo como base o trabalho preliminar de Faria (2019b), as modificações realizadas neste trabalho, para redução de complexidade, podem ser vistas em maiores detalhes nas seções 4.1.1 e 4.1.3. Deve-se notar que a segunda parte tratada nesta dissertação, que diz respeito à utilização de variáveis mistas, é completamente nova.

#### 4.1.1 Atualização do parâmetro $\beta$

Há na literatura, diversas abordagens voltadas para atualização do parâmetro de curvatura  $\beta$ , cujo intuito é evitar o método da continuação. Esses tratamentos consistem em atualizar  $\beta$  ao longo das iterações do algoritmo de otimização. O objetivo dessas propostas é que a função *Heaviside* regularizada inicie linear e no decorrer do processo de otimização, a função vai se aproximando da função salto unitário (0 ou 1). Wang e Qian (2020) utilizaram em estudos de otimização topológica 2D,  $\beta = 0$  nas primeiras 50 iterações, aumentando-o em 1,25 vezes a partir de 1 a cada 25 iterações, até atingir o valor máximo igual a 32. No trabalho de Schevenels, Lazarov e Sigmund (2011), o processo de otimização foi iniciado com o parâmetro  $\beta$  igual a 1, e teve seu valor dobrado a cada 50 iterações, até que o valor máximo foi atingido ( $\beta = 32$ ). Em outro estudo de otimização topológica 2D, dos autores Wang *et al.* (2021), o parâmetro de projeção da função *Heaviside* é iniciado igual a 1 nas primeiras 100 iterações. Posteriormente,  $\beta$  é multiplicado por um fator de 1.7 a cada 50 iterações, até atingir um valor limite superior, que é  $\beta = 40$ . Em Niu, Liu, Wallin e Wadbro (2020), duas formas de atualização da curvatura da função *Heaviside* são abordadas. Uma, consiste em  $\beta$  ser iniciado igual a 1 e dobrar seu valor a cada 50 iterações, até atingir o valor máximo permitido. A outra, consiste em  $\beta$  iniciar igual a 1 e

aumentar em 8 a cada 10 iterações, tendo como limite máximo,  $\beta = 100$ .

A tratativa do parâmetro  $\beta$  implementada por Faria (2019a) é considerando-o fixo durante todo o processo de otimização. Entretanto, será empregada uma abordagem em que o parâmetro  $\beta$  é atualizado ao longo das iterações do processo de otimização.

#### 4.1.2 Área máxima e comprimento máximo na função *Heaviside* regularizada

Considerando-se que as funções *Heaviside* regularizadas, aplicadas nas áreas de seção transversal e comprimentos, são dadas pelas equações

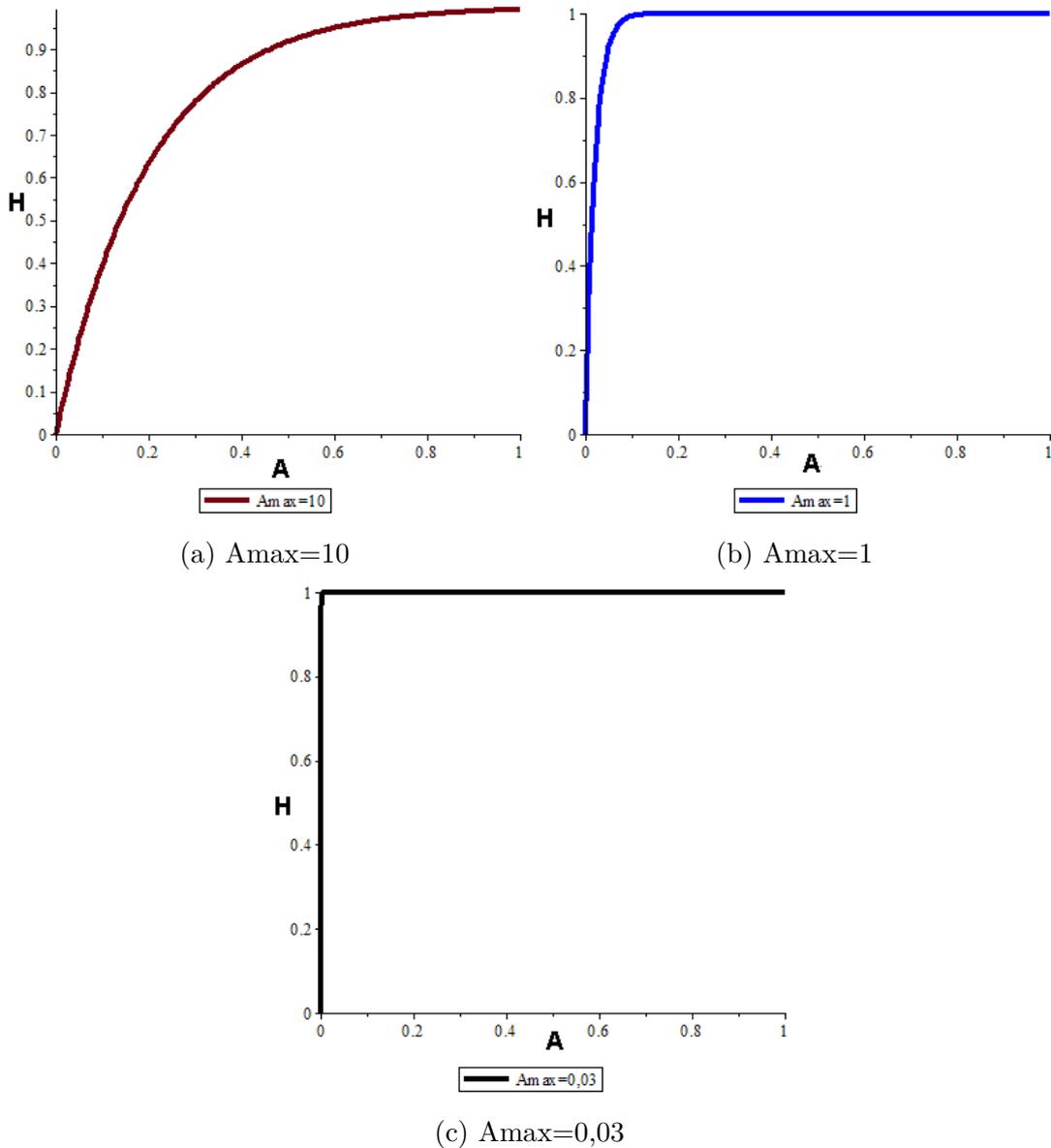
$$H_{1_i}(A_i) = (1 - e^{\frac{-\beta A_i}{A_{máx}}}) + \frac{A_i}{A_{máx}} e^{-\beta} \quad (56)$$

$$H_{2_i}(L_i) = (1 - e^{\frac{-\beta L_i}{L_{máx}}}) + \frac{L_i}{L_{máx}} e^{-\beta}, \quad (57)$$

observa-se que, além do parâmetro de curvatura  $\beta$ , outros elementos com características heurísticas são a área e o comprimento máximos (quando se tem um processo de otimização em que as coordenadas também podem ser variáveis de projeto). Estes valores máximos são usados para adimensionalizar áreas e comprimentos e têm efeito marcante na relaxação das funções *Heaviside*. Se for utilizado um valor relativamente alto para esses parâmetros, tem-se uma região maior de transição entre a solução 0 - 1 e um intervalo maior para que as variáveis de projeto possam transitar. Com área máxima e comprimento máximo suficientemente pequenos, a região de transição entre 0 e 1 é menor, e tem-se uma curvatura semelhante a função *Heaviside* original. Este comportamento é facilmente compreendido analisando-se os gráficos na figura 28, onde  $H$  representa a função *Heaviside* associada a uma área e regularizada pelo parâmetro  $\beta$ ,  $A$  representa a área da seção transversal e  $A_{max}$  o valor adotado para área máxima. Conforme o gráfico da figura 28, uma área máxima permitida de  $0,03m^2$  tem uma menor região de transição quando comparada com as curvas cujas áreas máximas são  $1m^2$  e  $10m^2$ . Este comportamento tem significativo impacto na redução da complexidade, pois quanto mais próximo ao comportamento da função *Heaviside*, maiores são as chances de se ter uma solução ótima com menor número de elementos.

É importante observar que os valores de áreas e comprimentos adimensionalizados dependem dos valores máximos adotados. Assim, empregar um mesmo valor de  $\beta$  para as duas equações não é adequado.

Figura 28 – Curvas da função *Heaviside* regularizada de acordo com os valores escolhidos para a área máxima.



Fonte: Produção do autor

#### 4.1.3 Utilização de dois parâmetros $\beta$

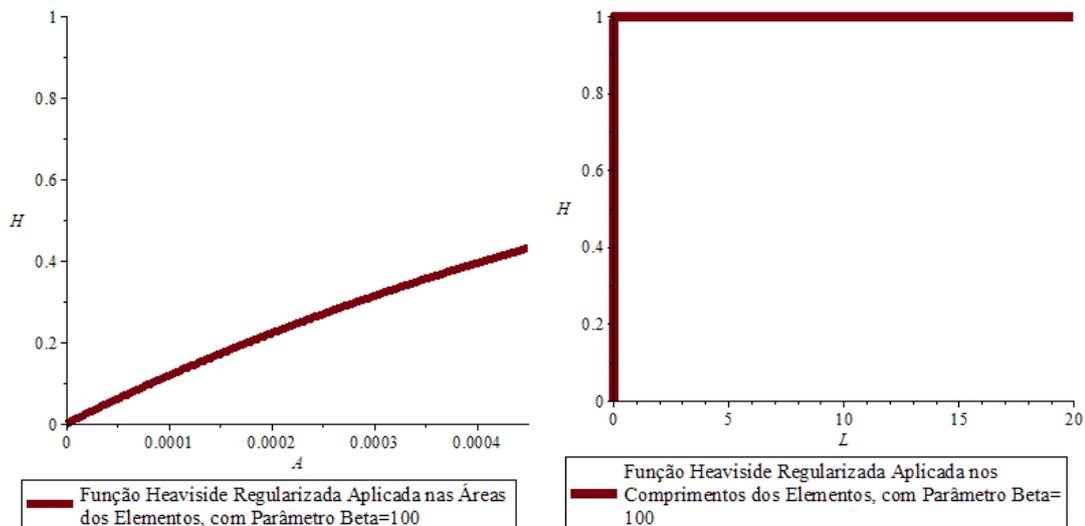
Encontra-se na literatura, como por exemplo em Asadpoure, Guest e Valdevit (2015), a implementação da função *Heaviside* regularizada aplicada nas áreas. Entretanto, sua extensão aos comprimentos dos elementos, com o objetivo de reduzir a complexidade estrutural, é uma proposta inédita deste trabalho. No decorrer dos estudos de casos, observou-se a necessidade da utilização de dois parâmetros  $\beta$ . Um aplicado na área dos elementos, e outro no comprimento. Isso se deve ao fato de que as duas medidas de redução da complexidade estão associadas a valores adimensionalizados  $\frac{A}{A_{max}}$  e  $\frac{L}{L_{max}}$  diferentes. Se for utilizado um parâmetro  $\beta$  igual a 100 para ambas, é possível ter na área uma função

suavizada, com uma larga região de transição, e nos comprimentos dos elementos, uma função *Heaviside* com transição brusca e com possibilidade de ocasionar problemas nas derivadas.

O esperado, é que no início das iterações do algoritmo, tenha-se uma função *Heaviside* regularizada relaxada, com uma região de transição onde os elementos possam transitar livremente entre 0 e 1, e ao fim do processo de otimização, tenha-se um comportamento semelhante ao da função degrau unitário, assumindo apenas valores zero ou um.

Observando-se as figuras 29a e 29b, verifica-se que o mesmo parâmetro  $\beta$  causa comportamentos distintos nas funções *Heaviside* regularizadas aplicadas nas áreas e nos comprimentos dos elementos. Logo, nos estudos da redução da complexidade apresentados neste trabalho foi implementado, para cada medida de redução da complexidade, um parâmetro  $\beta$  diferente. Foram realizadas análises onde foram testados diversos valores para os  $\beta$ , com diferentes formas de atualização.

Figura 29 – Soluções ótimas com o emprego de um mesmo parâmetro  $\beta$  para as duas medidas de redução da complexidade.



(a) Curvatura da função *Heaviside* regularizada com parâmetro  $\beta=100$  para as áreas de seção transversal.

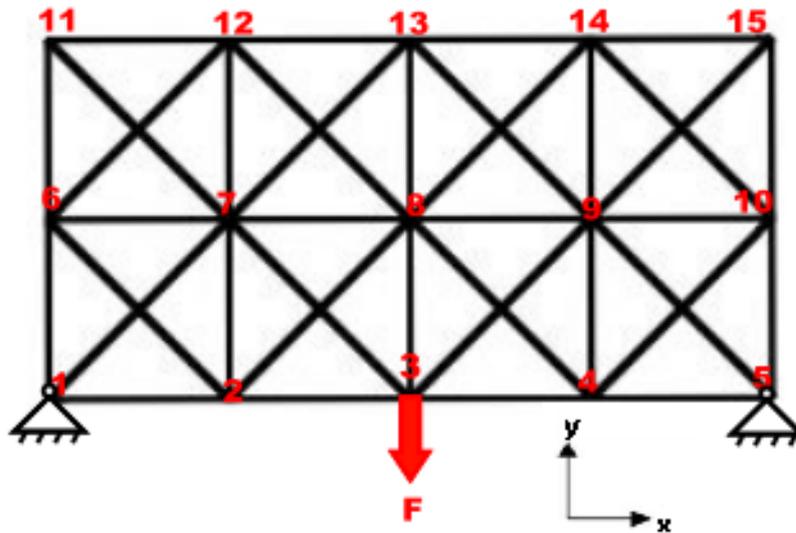
(b) Curvatura da função *Heaviside* regularizada com parâmetro  $\beta=100$  para os comprimentos.

Fonte: Produção do autor

Diversos casos foram analisados com a abordagem original de redução da complexidade proposta por Faria (2019a), a qual sugeria utilizar o mesmo parâmetro  $\beta$  para as duas medidas de redução da complexidade (funções *Heaviside* regularizadas aplicadas nas áreas de seção transversal e comprimentos dos elementos). Um deles, será apresentado a seguir. Trata-se de uma estrutura de pórtico bi-apoiada, com uma carga pontual de  $200KN$  aplicada no nó 3, na direção  $y$  negativa, conforme figura 30. As propriedades do material são  $E = 200GPa$ ,  $G = 80GPa$ ,  $\rho = 7800Kg/m^3$ , parâmetro  $\beta = 50$  fixo durante todo o processo de otimização e  $\sigma_{esc} = 300MPa$ . O problema tem como variáveis de projeto

todas as áreas e coordenadas X e Y dos nós 6 a 15. A restrição lateral tem como áreas mínimas admissíveis, a magnitude de  $1 \cdot 10^{-5} m^2$  e tem como comprimento mínimo  $0,05m$ . O problema teve como valor inicial das áreas,  $0,03m^2$  e restrição de deslocamento na direção Y do nó 3, cujo valor é de  $15mm$ . O tipo de ligação considerada para este exemplo, é do tipo totalmente rígida.

Figura 30 – Pórtico 2D com dois apoios de segundo gênero e uma força concentrada.



Fonte: Produção do autor

Figura 31 – Soluções ótimas com o emprego de um mesmo parâmetro  $\beta$  para as duas medidas de redução da complexidade.



Fonte: Produção do autor

Na figura 31 pode-se ver as soluções ótimas obtidas para custos de fabricação de conexões iguais a 0 e 100 quando considerado o mesmo parâmetro de curvatura  $\beta$  para as duas medidas de complexidade. A tabela 1, mostra a magnitude das áreas ótimas correspondentes. Nota-se que nenhum elemento foi projetado para a área mínima ( $10^{-4} mm^2$ ). Logo, não houve redução no número de elementos. O mesmo exemplo foi solucionado com atualização no parâmetro beta ao longo do processo iterativo. Entretanto, ainda assim não foi possível obter solução satisfatória. Será visto adiante, que a utilização de parâmetros betas diferentes para áreas e comprimentos soluciona este problema.

Tabela 1 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso bidimensional com uma forças concentrada e um único parâmetro  $\beta$

Elemento	CF=1	CF=100	Elemento	CF=1	CF=100
6	$0,4806 \cdot 10^{-4}$	$0,2089 \cdot 10^{-4}$	23	$0,4780 \cdot 10^{-2}$	$0,3030 \cdot 10^{-2}$
7	$0,2849 \cdot 10^{-4}$	$0,1084 \cdot 10^{-4}$	26	$0,4178 \cdot 10^{-3}$	$0,6100 \cdot 10^{-3}$
12	$0,1032 \cdot 10^{-4}$	$0,1019 \cdot 10^{-4}$	27	$0,7033 \cdot 10^{-3}$	$0,1303 \cdot 10^{-2}$
13	$0,1329 \cdot 10^{-4}$	$0,1299 \cdot 10^{-4}$	30	$0,1435 \cdot 10^{-2}$	$0,1304 \cdot 10^{-2}$
15	$0,9559 \cdot 10^{-3}$	$0,7003 \cdot 10^{-3}$	33	$0,1519 \cdot 10^{-2}$	$0,1313 \cdot 10^{-2}$
17	$0,2113 \cdot 10^{-4}$	$0,1410 \cdot 10^{-4}$	36	$0,1747 \cdot 10^{-4}$	$0,1520 \cdot 10^{-4}$
20	$0,9333 \cdot 10^{-3}$	$0,6879 \cdot 10^{-3}$	38	$0,1415 \cdot 10^{-2}$	$0,1289 \cdot 10^{-2}$
22	$0,1047 \cdot 10^{-4}$	$0,1021 \cdot 10^{-4}$			

Considerando a utilização de dois parâmetros beta diferentes, as funções regularizadas definidas nas equações 54 e 55 são modificadas para

$$H_{1_i}(A_i) = \left(1 - e^{-\frac{\beta_1 A_i}{A_{máx}}}\right) + \frac{A_i}{A_{máx}} e^{-\beta_1}, \quad (58)$$

$$H_{2_i}(L_i) = \left(1 - e^{-\frac{\beta_2 L_i}{L_{máx}}}\right) + \frac{L_i}{L_{máx}} e^{-\beta_2}. \quad (59)$$

Para que seja possível o emprego de métodos de otimização baseados em gradientes, é fundamental que ambas as medidas de complexidade sejam contínuas e diferenciáveis. Este requisito é satisfeito, sendo que suas derivadas são

$$\frac{dH_1(A_i)}{dA_i} = \beta_1 e^{\beta_1} \frac{A_i}{A_{max}} + e^{-\beta_1}, \quad (60)$$

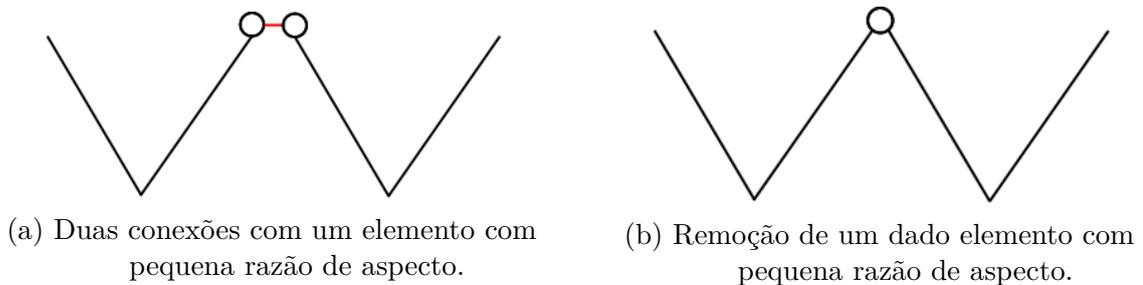
$$\frac{dH_2(L_i)}{dL_i} = \beta_2 e^{\beta_2} \frac{L_i}{L_{max}} + e^{-\beta_2}. \quad (61)$$

#### 4.1.4 Remoção de conexões

A proposta de redução da complexidade através de uma função *Heaviside* regularizada e um custo de fabricação associado as conexões dos elementos, é que o algoritmo tenha a tendencia de limpeza de uma dada estrutura inicial, com o efeito do desaparecimento de elementos cuja área de seção transversal tenha um valor próximo a zero (restrição lateral de área pré definida pelo projetista). De forma análoga, são tratados os comprimentos dos elementos. De acordo com Asadpoure, Guest e Valdevit (2015), conforme aumenta-se a magnitude do custo de fabricação, o algoritmo entende que a solução ótima tende para o menor número possível de elementos na estrutura, pois para cada elemento, há um custo associado de duas conexões. Conforme aumenta-se o custo de fabricação das juntas, na função objetivo, passa a ter maior peso a parte relacionada ao custo adicional de

fabricação, com relação ao custo da massa. Logo, é esperado que no decorrer do aumento no custo de fabricação adicional, ocorra uma redução do número de elementos, aumento no valor da função objetivo e um provável acréscimo na massa da estrutura. Isso pode ser explicado pelo fato de que, com a remoção de um alguns elementos, o aumento na seção transversal possa ser necessário para suprir a necessidade estrutural. É importante ressaltar que quando não há um custo associado a um dado elemento, o mesmo pode ocorrer com as conexões. Conforme a figura 32a, da solução do algoritmo de otimização, é possível a ocorrência de um determinado elemento com comprimento relativamente pequeno, menor do que o limite inferior imposto pelo projetista, como por exemplo, o elemento em destaque na figura 32a. Na remoção deste dado elemento, tem-se também a remoção de uma conexão, conforme a figura 32b. A mesma análise pode ser feita por analogia para as áreas de seção transversal.

Figura 32 – Análise da remoção de conexões



Fonte: Produção do autor

## 4.2 FORMULAÇÃO PARA O TRATAMENTO DAS VARIÁVEIS MISTAS

Esta formulação considera que as áreas de seção transversal dos perfis são discretas, e as demais variáveis de projeto (coordenadas e os fatores de fixação  $\alpha$ 's provenientes das conexões) são contínuas. A abordagem que será descrita neste capítulo não é novidade, entretanto, sua aplicação em pórticos tridimensionais com conexões semirrígidas pode ser considerado como uma nova contribuição. Primeiramente, são organizadas as variáveis de projeto em um vetor, onde as primeiras componentes são referentes às variáveis discretas,

$$\{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_c \end{Bmatrix}, \quad (62)$$

com  $\mathbf{x}_d$  e  $\mathbf{x}_c$  representados da seguinte forma,

$$\{\mathbf{x}_d\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{nd} \end{Bmatrix}, \quad (63)$$

$$\{\mathbf{x}_c\} = \begin{Bmatrix} x_{nd+1} \\ x_{nd+2} \\ \vdots \\ x_{nd+nc} \end{Bmatrix}, \quad (64)$$

onde  $nd$  e  $nc$  são o número de variáveis discretas e contínuas. Para cada variável discreta, poderá ser atribuído um valor contido em conjunto discreto de possibilidades. O problema é formulado de forma que em cada iteração do processo de otimização, as variáveis discretas são transformadas de acordo com a equação 65, onde  $d_{i2}$  é o valor corrente,  $d_{i1}$  e  $d_{i3}$  são os valores adjacentes inferiores e superiores, respectivamente. Com isso, a  $i$  –ésima variável de projeto discreta pode ser representada por

$$x_i = y_{i1}d_{i1} + y_{i2}d_{i2} + y_{i3}d_{i3} = \{\mathbf{d}_i\}^T \{\mathbf{y}_i\}, \quad (65)$$

onde o vetor das seções transversais é dado por

$$\{\mathbf{d}_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \end{Bmatrix}, \quad (66)$$

e o vetor das variáveis de transformação  $y_{ik}$  é

$$\{\mathbf{y}_i\} = \begin{Bmatrix} y_{ik} \\ y_{ik} \\ y_{ik} \end{Bmatrix}, \quad (67)$$

As variáveis  $y_{i1}, y_{i2}$  e  $y_{i3}$  são binárias e podem assumir apenas valores 0 ou 1 e, para que somente um valor do conjunto discreto de possibilidades seja atrelada a cada variável discreta, somente uma das variáveis  $y_{ik}$  pode assumir valor 1. O vetor de variáveis de projeto discretas é transformado de acordo com o vetor de variáveis de projeto binárias,

$$\{\mathbf{x}_d\} = \{\mathbf{x}_d(\mathbf{y})\}, \quad (68)$$

onde o vetor das variáveis de transformação pode ser representado por

$$\{\mathbf{y}\} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{y}_1\} \\ \{\mathbf{y}_2\} \\ \vdots \\ \{\mathbf{y}_d\} \end{Bmatrix}, \quad (69)$$

e o vetor de variáveis de projeto do problema de otimização pode ser reescrito como

$$\{\mathbf{x}\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\mathbf{y}\} \\ \{\mathbf{x}_c\} \end{array} \right\}. \quad (70)$$

Para que apenas uma variável do conjunto discreto seja acessada, devem ser impostas novas restrições para cada variável de projeto discreta  $x_i$ . Assim tem-se,

$$g_{nr+1} = y_{11} + y_{12} + y_{13} - 1 = 0, \quad (71)$$

$$g_{nr+2} = y_{21} + y_{22} + y_{23} - 1 = 0, \quad (72)$$

$\vdots$

$$g_{nr+nd} = y_{nd1} + y_{nd2} + y_{nd3} - 1 = 0. \quad (73)$$

onde  $nr$  é o número de restrições originais do problema, e  $g_{nr+1}$  até  $g_{nr+nd}$  são as restrições relacionadas às variáveis discretas. Resumindo, pode-se estabelecer o seguinte problema de otimização

$$\text{Min} \quad W(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y}, \mathbf{x}_c), \quad (74)$$

$$\text{t.q} \quad h_j(\mathbf{x}) = h_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}_c) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n_{ri}, \quad (75)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}_c) \leq 0 \quad j = n_{ri+1}, n_{ri+2}, \dots, n_{ri+nr}, \quad (76)$$

$$h_j(\mathbf{y}) = y_{j1} + y_{j2} + y_{j3} - 1 = 0 \quad j = n_{r+1}, n_{r+2} + n_{r+nd}, \quad n_r = n_{ri} + n_{rd} \quad (77)$$

com  $y_{ik}$  binárias,

onde  $n_{ri}$  é o número de restrições de igualdade,  $nr$  é o número de restrições originais do problema e  $nd$  representa as restrições relacionadas com as variáveis discretas. A solução encontrada neste trabalho para o tratamento das variáveis  $y_{ik}$  na forma binária, foi o emprego do software lp solve, que trabalha com o método *Branch and Bound*. Logo, para cada variável  $y_{ik}$  são solucionados dois problemas adicionais: um onde é considerado  $y_{ik} = 0$  e outro onde  $y_{ik} = 1$ . A solução do problema de otimização da equação (74) é realizado por programação linear sequencial. Uma vez solucionado, a imposição dos valores discretos nas variáveis  $y_{ik}$  é realizada adotando como estimativa inicial a solução da equação (74), novamente por programação linear sequencial.

O problema linearizado fica

$$\text{Min} \quad W(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\sum_{j=1}^3 y_{ij} d_{ij} - x_i^0) + \sum_{i=nd+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - x_i^0), \quad (78)$$

$$\text{t.q} \quad g(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} (\sum_{l=1}^3 y_{il} d_{il} - x_i^0) + \sum_{i=nd+1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \leq 0, \quad (79)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = h_k(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{nd} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} (\sum_{l=1}^3 y_{il} d_{il} - x_i^0) + \sum_{i=nd+1}^n \frac{\partial h_k}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0, \quad (80)$$

$$h_j(\mathbf{y}) = y_{j1} + y_{j2} + y_{j3} - 1 = 0, \quad (81)$$

onde  $nd$  é o número de variáveis discretas,  $n$  é o número total de variáveis de projeto, a equação (78) é a função objetivo linearizada, as equações (79) e (80) são as restrições de desigualdade e de igualdade, respectivamente e a equação (81) trata das restrições impostas nas variáveis de transformação  $\mathbf{y}$ .

Do ponto de vista de custo computacional, solucionar um problema inteiro-misto é mais caro do que um contínuo. Isso ocorre, pois, para solucionar um problema inteiro utilizando métodos como o *Branch and Bound*, são calculados problemas adicionais. Logo, para otimizar o custo computacional, primeiramente é solucionado o problema contínuo. Considera-se que o ótimo discreto está na vizinhança do ótimo contínuo. Uma vez resolvido o problema contínuo, é então, solucionado o problema inteiro-misto. Desta forma, o número de iterações necessárias para a convergência do problema inteiro misto, é significativamente reduzida.

#### 4.2.1 Lp Solve

Neste trabalho, é proposta a utilização de variáveis discretas para as áreas de seção transversal dos elementos. O intuito desta pesquisa, é trazer aplicações práticas no âmbito da otimização estrutural. Há na literatura, diversas abordagens voltadas para processos de otimização envolvendo variáveis mistas. Na grande maioria, são métodos baseados em meta-heurísticas, como por exemplo, algoritmos genéticos. Entretanto, um inconveniente comumente encontrado nessas propostas, a limitação no número de variáveis de projetos e restrições. Tem-se no presente estudo, uma quantidade consideravelmente alta de variáveis de projetos (áreas de seção transversal, coordenadas dos nós e os fatores de fixação das conexões). Adicionalmente, são disponíveis no algoritmo restrições de deslocamento, tensões e comprimento mínimo (de forma a evitar singularidade na matriz de rigidez).

Neste capítulo foi apresentado o SLP misto, que é baseado em gradientes. Uma opção encontrada para a solução do problema proposto, foi o lp solve. Trata-se de um software de programação linear sequencial de acesso livre, que permite resolver problemas lineares inteiros e inteiros mistos. O lp solve, é baseado nos métodos simplex e *Branch and Bound*.

O lp solve é utilizado em conjunto com as rotinas desenvolvidas por Faria (2019a) na linguagem FORTRAN. O professor Pablo Andrés Muñoz Rojas, orientador deste trabalho, disponibilizou as rotinas de interface entre o lp solve e o algoritmo pré-existente. Como o lp solve tem em sua interface método combinatório *Branch and Bound*, foi possível tratar as variáveis  $y_{ik}$  como binárias.

Para o processo de otimização contínua, utiliza-se do algoritmo previamente desenvolvido por Faria (2019a), o qual faz uso de uma rotina imsl disponível na biblioteca numérica do FORTRAN para programação linear.

## 5 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO TRATADOS

Neste trabalho, abordam-se duas alternativas de problemas de otimização, as quais são descritas a seguir.

### 5.1 OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT COM REDUÇÃO DE COMPLEXIDADE - TODAS AS VARIÁVEIS CONTÍNUAS E FATORES DE FIXAÇÃO CONSTANTES

O primeiro tipo de problema trata da otimização de *layout* com minimização de custos de manufatura e aproximação contínua das funções *Heaviside*. A função objetivo é definida como

$$W(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{nel} c_{M_i} \rho_i A_i L_i + c_{F_i} H_{1_i} H_{2_i}, \quad (82)$$

$$H_{1_i}(A_i) = \left(1 - e^{-\frac{\beta_1 A_i}{A_{máx}}}\right) + \frac{A_i}{A_{máx}} e^{-\beta_1} \quad (83)$$

$$H_{2_i}(L_i) = \left(1 - e^{-\frac{\beta_2 L_i}{L_{máx}}}\right) + \frac{L_i}{L_{máx}} e^{-\beta_2}, \quad (84)$$

onde  $H_1$  é a função *Heaviside* regularizada aplicada nas áreas de seção transversal e  $H_2$  nos comprimentos de cada elemento  $i$ ,  $v_p$  é o vetor de variáveis de projetos,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os parâmetros beta associados às áreas e comprimentos. Os parâmetros  $A_{máx}$  e  $L_{máx}$  são as áreas e comprimentos máximos, respectivamente. Nesta abordagem,  $c_F$  é considerado como uma constante. A função *Heaviside* serve para determinar se um determinado elemento  $i$  existe ou não. Se existir, há um custo adicional de fabricação associado a este. O segundo termo do lado direito da função objetivo da igualdade da equação 82, serve como um fator de penalização na função objetivo. Quanto mais caro for o custo de fabricação de uma conexão, maior será a tendência do algoritmo em reduzir o número de elementos. A primeira abordagem de otimização, é sujeita a restrições de deslocamento e comprimento mínimo.

O problema de otimização é definido por

$$\text{Minimize} \quad \frac{W}{W_{SF}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}), \quad (85)$$

$$t.q \quad \frac{U_d^{LC}}{|U_{ld}|} + 1.0 \leq 0, \quad (86)$$

$$-\frac{U_d^{LC}}{|U_{Ud}|} + 1.0 \leq 0, \quad (87)$$

$$\frac{L_i}{L_L} - 1 \leq 0, \quad (88)$$

onde  $W_{SF}$  é o valor da função objetivo no ponto inicial, o índice  $d$  está relacionado às restrições de deslocamento, o índices  $i$  representa o  $i$ -ésimo elemento,  $U_{L_d}$  e  $U_{U_d}$  são parcelas referentes aos limites inferior e superior das restrições de deslocamento e  $L_L$  é o limite inferior do comprimento dos elementos.

## 5.2 OTIMIZAÇÃO DO LAYOUT E FATORES DE FIXAÇÃO - VARIÁVEIS DE PROJETO MISTAS

O segundo tipo de problema é a otimização de *layout* e conexões com minimização de custos de manufatura, áreas discretas e coordenadas e fatores de fixação contínuos. A função objetivo definida por

$$W = \sum_{i=1}^{nel} (c_{M_i} \rho_i A_i L_i + c_{F_i}), \quad (89)$$

$$c_{F_i} = \left( \sum_{c=1}^4 (V_0 + V_1 \alpha_c + V_2 \alpha_c^2) \right) c_{M_i} \rho_i A_i L_i, \quad (90)$$

onde  $c_{M_i}$  é o custo de material por kg,  $c_{F_i}$  é o custo monetário adicional referente a fabricação das conexões e o índice  $c$  no somatório, é referente aos fatores de fixação das conexões (podem ser totalmente rígidas  $\alpha = 0,99$ , totalmente flexíveis  $\alpha = 0,01$  ou conexões semirrígidas, onde  $\alpha$  pode assumir qualquer valor entre 0,99 e 0,01) para cada elemento. Os coeficientes  $V_0$ ,  $V_1$  e  $V_2$  definem uma curvatura quadrática na variação do custo adicional de conexões, conforme pode ser visto na figura 33. Esses coeficientes, são constantes definidas de acordo com a faixa de variação no custo adicional de conexões, como por exemplo (20% e 60%). Na figura 33,  $AC$  é referente ao percentual de custo adicional de conexões (este percentual está associado ao custo de massa da estrutura, por exemplo, o  $AC$  poderia variar entre 20% e 60% do custo da massa da estrutura), os termos  $AC_p$  e  $AC_r$  são as delimitações da curva, conexão totalmente flexível (pino) e totalmente rígida, respectivamente. Assim, Os termos  $V_0$ ,  $V_1$  e  $V_2$ , de acordo com (FARIA, 2019a), são determinados por

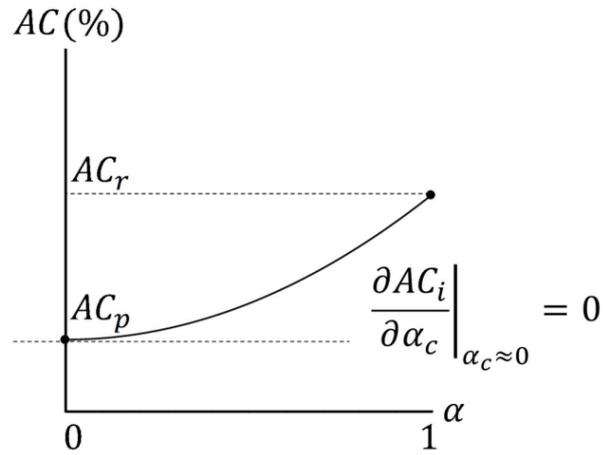
$$V_0 = \frac{AC_p}{4} \quad (91)$$

$$V_1 = 0 \quad (92)$$

$$V_2 = \frac{1}{4}(AC_r - AC_p). \quad (93)$$

O problema de otimização é definido por

Figura 33 – Curva quadrática que define a variação nos custos adicionais referentes à fabricação das conexões



Fonte: (FARIA, 2019b)

$$\text{Minimize} \quad \frac{W}{W_{SF}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \alpha), \quad (94)$$

$$t.q \quad \frac{U_d^{LC}}{|U_{ld}|} + 1.0 \leq 0, \quad (95)$$

$$-\frac{U_d^{LC}}{|U_{Ud}|} + 1.0 \leq 0, \quad (96)$$

$$-\frac{f(\theta)_{i,k}}{\sigma^2} + 1 \leq 0, \quad (97)$$

$$\frac{L_i}{L_L} - 1 \leq 0, \quad (98)$$

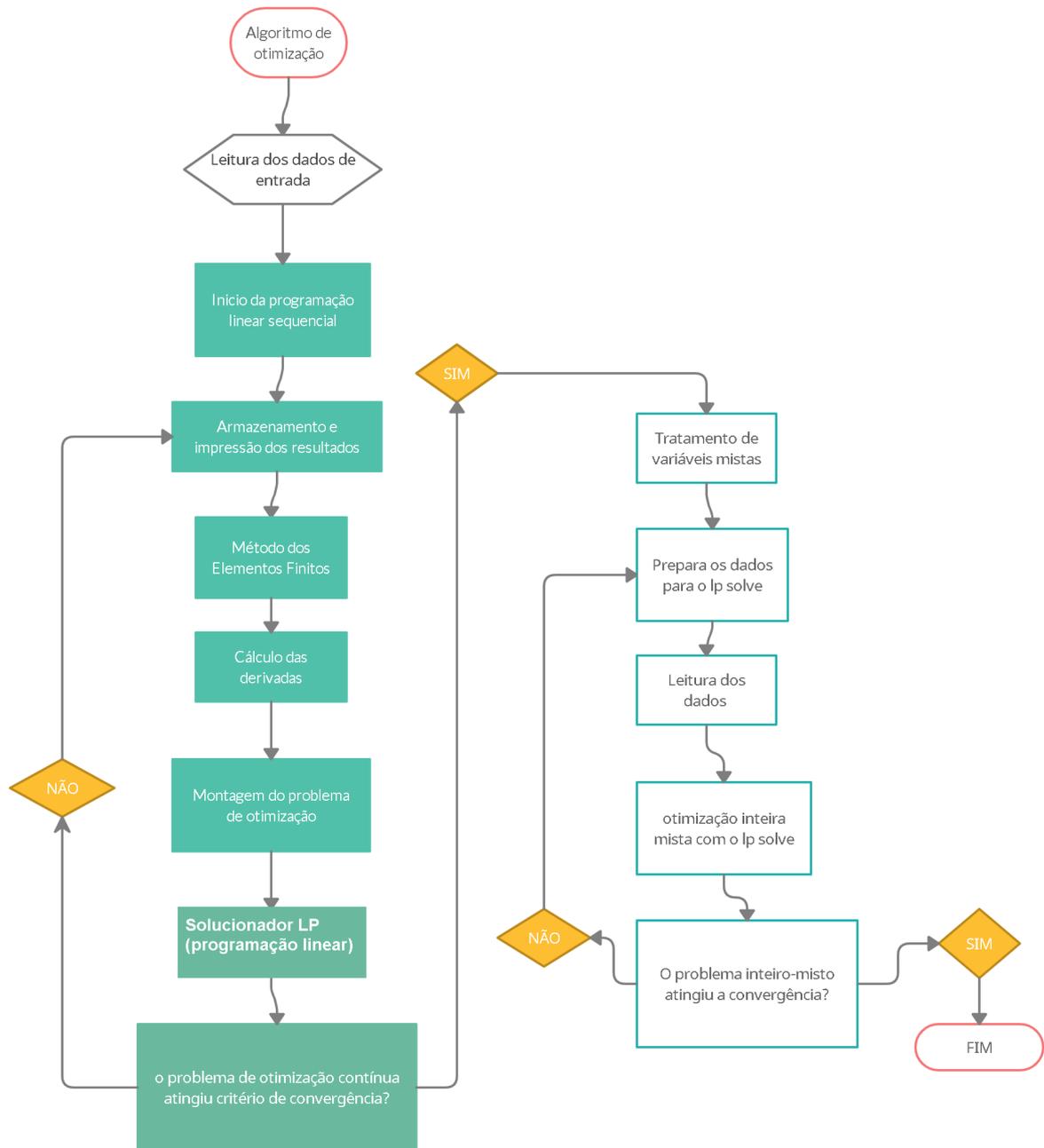
onde  $W_{SF}$  é o valor da função objetivo no ponto inicial, o índice  $d$  está relacionado às restrições de deslocamento, os índices  $i$  e  $k$  representam o  $i$  –ésimo elemento na  $k$  –ésima posição,  $U_{L_d}$  e  $U_{U_d}$  são parcelas referentes aos limites inferior e superior das restrições de deslocamento e  $L_L$  é o limite inferior do comprimento dos elementos.

### 5.3 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO

A sequência do algoritmo de otimização utilizada neste trabalho pode ser vista na figura 34. Solucionam-se, neste estudo, duas abordagens diferentes de otimização de *layout*, e para ambas, o processo de otimização contínua é o mesmo.

A solução do algoritmo de otimização se dá da seguinte forma: Primeiro, é solucionado o problema de otimização contínua, pois dessa forma, tem-se um menor custo computacional envolvido. O algoritmo faz a leitura dos dados do problema (como por exemplo, condições de contorno, função objetivo, propriedades mecânicas e geométricas, número de variáveis de projeto e coeficientes referentes aos limites móveis). Após

Figura 34 – Fluxograma referente o procedimento do algoritmo de otimização



Fonte: Produção do autor (2021)

a leitura dos dados, inicia-se o processo de otimização iterativa. Durante o processo de otimização iterativa, zera-se primeiramente todas as matrizes e vetores, calculando-se e armazenando as saídas iterativas. Desta forma, tem-se dados para o pós-processamento gráfico e monitora-se em tempo real os resultados. Após a etapa de armazenamento e

impressão dos resultados, tem-se a etapa onde é calculada a matriz de rigidez global e os esforços internos, através do método dos elementos finitos. Como utiliza-se neste estudo um método de otimização baseado em gradientes, faz-se necessário o cômputo das derivadas. Lineariza-se a função objetivo e as restrições através do truncamento no primeiro termo da série de Taylor. Após o cálculo das derivadas, faz-se a montagem do problema de otimização e posteriormente, soluciona-se o problema de otimização através da programação linear. Após a convergência do problema de programação linear, faz-se necessário o cômputo dos critérios de convergência através de parâmetros relativos à estabilidade da função objetivo e todas as variáveis de projeto tratadas. Se os critérios de convergência atingirem as tolerâncias solicitadas pelo projetista, o processo de otimização é finalizado e o programa realiza as saídas para o pós-processamento. No entanto, se isso não ocorrer, as variáveis de projeto e os limites móveis são atualizados e as propriedades da seção transversal são recalculadas e tem-se uma continuação do processo iterativo. Quando o problema de otimização contínua atinge a convergência, é solucionado então o problema de otimização inteira-mista. Para o tratamento de variáveis discretas, é utilizado o lp solve, um programa de acesso livre. Então, uma vez solucionado o problema de otimização contínua, faz-se a chamada de rotinas desenvolvidas pelo professor orientador, para preparar, ler e solucionar o problema de otimização inteira-mista.

O tratamento das variáveis mistas é melhor compreendido no Anexo E.

### 5.3.1 Estratégia adotada para os limites móveis

A estratégia adotada para o tratamento dos limites móveis é importante no estudo da otimização, pois pode afetar diretamente na solução do problema. Cada analista pode adotar uma forma diferente para a atualização dos limites móveis, e dependendo de como é abordada, o processo de otimização pode ser eficiente ou não. Neste estudo, empregou-se a proposta utilizada em Muñoz-Rojas (2000).

O caso dos limites móveis aplicados nas coordenadas será explicado para as componentes  $X$ . A mesma abordagem é estendida para as componentes  $Y$  e  $Z$ . Os limites móveis para a coordenada  $X$  do elemento  $j$  são determinados por  $\Delta X_j$ , segundo

$$X_j^0 - \Delta X_j \leq X_j \leq X_j^0 + \Delta X_j. \quad (99)$$

Sugere-se definir  $\Delta X_j$  analisando todos os elementos conectados ao nó  $j$  e fazendo

$$\Delta X_j = \min_{n_{elc}} |X_2 - X_1|, \quad (100)$$

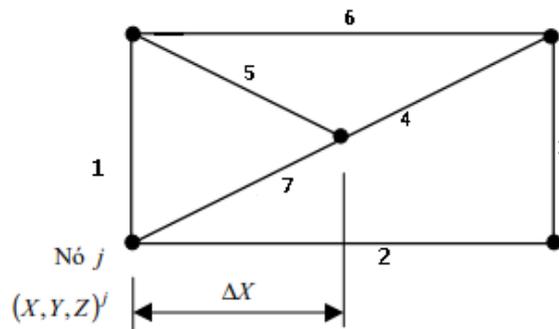
onde  $n_{elc}$  é o número de elementos conectados ao nó  $j$ , e  $X_2$  e  $X_1$  são as coordenadas nodais  $X$  dos nós locais 2 e 1 dos elementos conectados.

Se  $\Delta X_j = 0$ , então  $\Delta X_j = \min_{n_{elc}}(|Y_2 - Y_1|, |Z_2 - Z_1|)$ .

O limite móvel inicial é um fator de  $\Delta X_j$  especificado pelo usuário. Ou seja, se o usuário especifica um fator de 300, o limite móvel inicial será de  $\Delta X_j = \Delta X_j / 300$ . Neste trabalho, esse fator será designado por  $C_x$  para as coordenadas  $X$ , e  $C_y$  e  $C_z$  para as coordenadas  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

De acordo com a Figura 35, tem-se a visualização deste procedimento. Os elementos 2, 1 e 7 estão conectados ao nó  $j$  que tem a coordenada  $X_j$ . No elemento 1 tem-se  $|X_2 - X_1|_1 = 0$ . Assim, este elemento não é considerado. Quando os elementos 2 e 7 são analisados, verifica-se que  $|X_2 - X_1|_2 > |X_2 - X_1|_7$ . Logo, tem-se que  $\Delta X_j = |X_2 - X_1|_7$

Figura 35 – Forma com que os limites móveis são determinados neste estudo.



Fonte: Adaptado de Muñoz-Rojas (2000).

Quando inicia-se o processo de otimização, aplica-se um determinado fator  $\Delta X_j$  sugerido pelo projetista. No decorrer da análise, aplica-se o seguinte critério. Se em duas iterações sucessivas a variável de projeto em questão anda no mesmo sentido, faz-se então  $\Delta X_j = 1,1\Delta X_j$ . Caso ocorra o contrário,  $\Delta X_j = 0,90\Delta X_j$ .

A análise dos limites móveis aplicados nas áreas de seções transversais se dá da seguinte forma,

$$A_j^0 - \Delta A_j \leq A_j \leq A_j^0 + \Delta A_j, \quad (101)$$

onde  $\Delta A_j = Ca\Delta A_j^0$  e  $Ca$  é um fator percentual definido pelo projetista na entrada dos dados dos problemas, como por exemplo, limites móveis para áreas iguais a 0,1 é o equivalente a aplicação de limites móveis de 10% nas áreas.

### 5.3.2 Critério de convergência

A convergência do problema de otimização, se dá somente quando há a estabilização tanto da função objetivo como das variáveis de projeto. A convergência das variáveis de projeto é avaliada pela norma euclidiana do vetor que contém seus valores. O valor da função objetivo e da norma do vetor das variáveis de projeto é monitorado em todas as iterações. Quando, em duas iterações sucessivas, estes valores sofrem uma alteração menor do que uma tolerância prescrita, o problema é considerado convergido.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

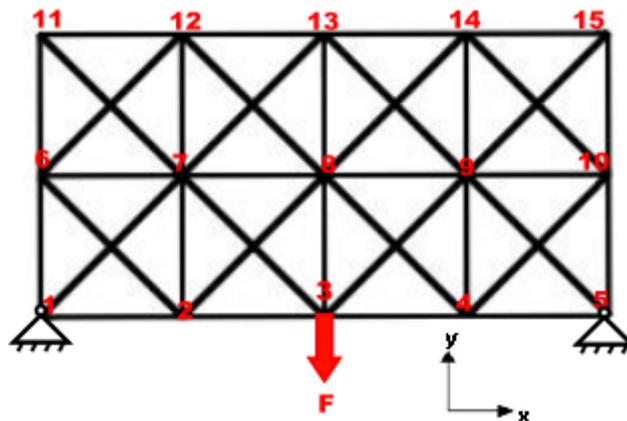
### 6.1 REDUÇÃO DA COMPLEXIDADE ATRAVÉS DE FUNÇÕES *HEAVISIDE* REGULARIZADAS

#### 6.1.1 Pórtico 2D com apenas uma força concentrada

O primeiro problema estudado visa demonstrar a eficácia da proposta de utilização de dois parâmetros  $\beta$  diferentes nas funções *Heaviside* regularizada. Analisa-se o mesmo caso apresentado na seção 4.1.3, porém empregando dois parâmetros  $\beta$  distintos para regularização das funções *Heaviside* associadas às áreas e comprimentos dos elementos. Para maior clareza, a geometria da estrutura inicial é repetida na Figura 36. As propriedades do material são  $E = 200GPa$ ,  $G = 80GPa$ ,  $\rho = 7800Kg/m^3$  e  $\sigma_{esc} = 300MPa$ . As coordenadas iniciais dos nós são mostradas na tabela 2 e a conectividade dos elementos na tabela 3. O problema tem como variáveis de projeto todas as áreas e coordenadas X e Y dos nós 6 a 15. Os fatores de perturbação das áreas de projeto são iguais a  $Ca = 1\%$  e das coordenadas em X e Y são iguais a  $C_x = C_y = 0,25\%$ . A restrição lateral tem como áreas e comprimentos mínimos admissíveis, respectivamente,  $1 \cdot 10^{-5}m^2$  e  $0,05m$ . A área inicial adotada para todos os elementos é de  $0,03m^2$  e são impostas restrições de deslocamento nas direções X e Y do nó 3, cujo valor é de  $15mm$ . O tipo de conexão considerada para este estudo é do tipo totalmente rígida. As tolerâncias para os critérios de convergência foram  $10^{-02}$  para as áreas de seção transversal,  $10^{-03}$  para as coordenadas e  $10^{-02}$  para a função objetivo.

Figura 36 – Pórtico 2D com dois apoios de segundo gênero e uma força concentrada no nó

3



Fonte: Produção do autor

Tabela 2 – Coordenadas respectivas ao estudo do pórtico 2D

Nó	Coord X[m]	Coord Y [m]	Nó	Coord X[m]	Coord Y [m]
1	0,0	0,0	9	15,00	5,00
2	5,0	0,00	10	20,00	5,00
3	10,00	0,00	11	0,00	10,00
4	15,00	0,00	12	5,00	10,00
5	20,00	0,00	13	10,00	10,00
6	0,00	5,00	14	15,00	10,00
7	5,00	5,00	15	20,00	10,00
8	10,00	5,00			

Tabela 3 – Conectividade referente ao estudo do pórtico 2D

Elementos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nós	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14	1
	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	15	6
Elementos	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Nós	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	2	3
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	7	6	8	7
Elementos	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
Nós	3	4	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	
	9	8	10	9	12	11	13	12	14	13	15	14	

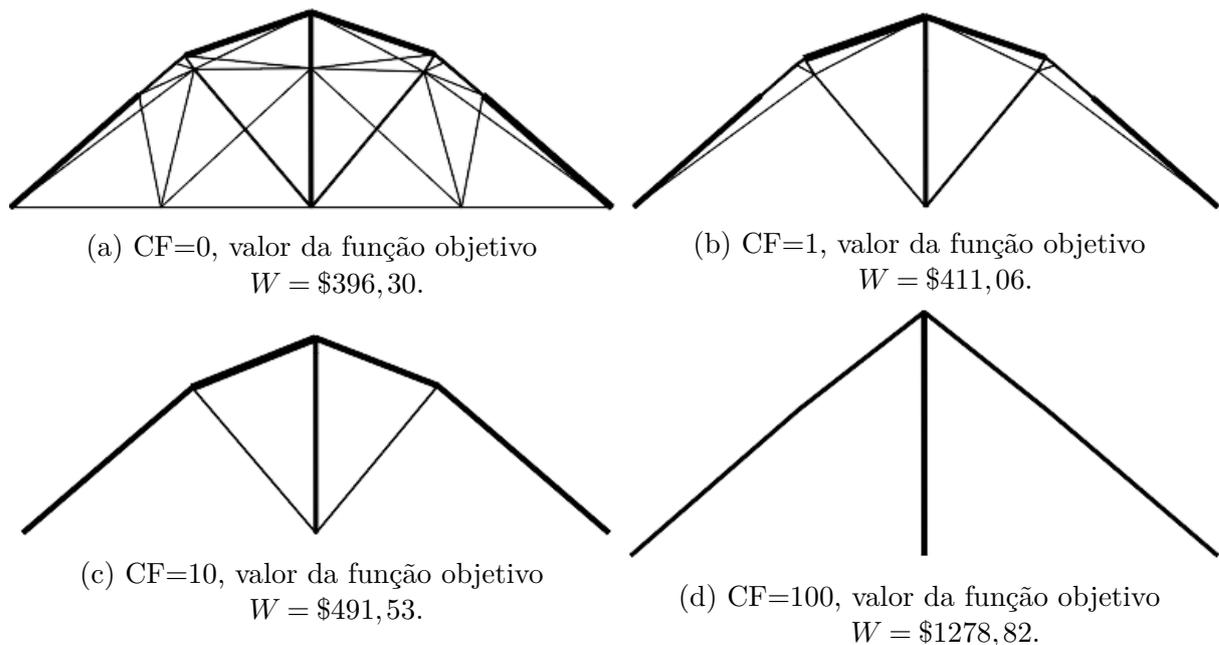
A otimização é desenvolvida para diferentes custos associados às conexões e a tabela 4 mostra os parâmetros  $\beta$  empregados em cada caso, destacando os seus valores no início e no final do processo. Os parâmetros  $\beta$  foram sendo atualizados ao longo do processo iterativo. Para o  $\beta$  associado as áreas de seção transversal, a atualização considerada foi de 1% e para os comprimentos, 0,1%. Para a utilização dos fatores de atualização nos parâmetros  $\beta$  foram realizados estudos de casos e comparadas as soluções obtidas. Inicialmente, teve-se como base formas de atualização baseadas em autores como Wang e Qian (2020), Schevenels, Lazarov e Sigmund (2011) e Niu, Liu, Wallin e Wadbro (2020). Posteriormente, de acordo com os resultados obtidos, adotou-se os valores de 1% para áreas e 0,1% para os comprimentos. A forma de atualização no parâmetro  $\beta$  é igual para todos os exemplos de redução da complexidade.

Tabela 4 – Valores iniciais e finais aplicados aos parâmetros  $\beta$  referentes ao estudo do pórtico 2D com uma força concentrada no nó 3.

	CF=1	CF=10	CF=100
Valor inicial do parâmetro $\beta$ aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos	100,00	100,00	100,00
Valor final do parâmetro $\beta$ aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos	278,01	354,95	495,79
Valor inicial do parâmetro $\beta$ aplicado nos comprimentos dos elementos	40,00	40,00	40,00
Valor final do parâmetro $\beta$ aplicado nos comprimentos dos elementos	49,09	51,56	55,13

As soluções ótimas, de acordo com a variação no custo adicional de fabricação, podem ser vistas na figura 37. Pode-se ver, na figura 37 (d), onde se tem o maior custo de fabricação das conexões, que foi obtida uma estrutura com o menor número de elementos possível. Pode-se verificar, que conforme o custo das conexões é diretamente proporcional ao número de elementos presentes na estrutura, quanto mais caro for o custo das ligações, maior será a tendência do algoritmo em reduzir o número de elementos. Comparando com os resultados da seção 4.1.3, fica claro o sucesso da implementação com dois parâmetros  $\beta$  diferentes.

Figura 37 – Soluções ótimas de acordo com o aumento no custo adicional de fabricação referente as conexões (CF) para o estudo do pórtico 2D com uma força concentrada no nó 3.

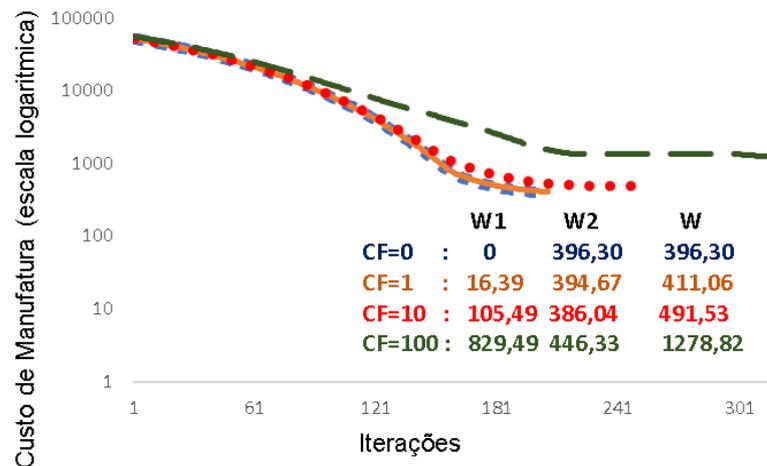


Fonte: Produção do autor

O comportamento das funções objetivo para diferentes valores de custo adicional de

fabricação podem ser vistas na figura 38. W1 é o custo adicional de fabricação associado às conexões, W2 é o custo da massa da estrutura e W é o valor total da função objetivo. Observe que a massa aumenta quando compara-se o custo de massa com  $CF = 0$  e  $CF = 100$ . Observa-se também, na tabela 5, que ocorre um aumento na seção transversal dos elementos restantes na topologia. Isto é, as áreas dos elementos 10, 11, 13, 15, 17, 20, 31 e 38 tiveram um aumento nas suas magnitudes quando comparados seus valores com  $CF = 0$  e  $CF = 100$ .

Figura 38 – Comportamento das funções objetivo referentes ao estudo de caso do pórtico 2D com uma força concentrada.



Fonte: Produção do autor

Os comprimentos ótimos podem ser vistos na tabela 6. Observe que alguns elementos tiveram seus comprimentos ótimos menores do que a restrição de comprimento imposta ( $0,05m$ ). Na tabela de comprimentos ótimos não estão sendo mostrados os resultados obtidos para elementos cuja área ótima correspondente teve sua magnitude na região da restrição inferior de área mínima. Coincidiu em alguns elementos que tanto o comprimento como a área ótima tenderam a zero. Observe, que na solução ótima em que não é considerada a redução da complexidade ( $CF=0$ ), todos esses elementos tiveram seus comprimentos ótimos maiores do que a restrição de comprimento mínimo, e portanto, não poderiam ser removidos da solução ótima. Vê-se mais uma vez, a importância da nova medida de redução da complexidade aplicada aos comprimentos dos elementos, visto a eficácia da mesma.

Tabela 5 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso bidimensional com duas forças concentradas

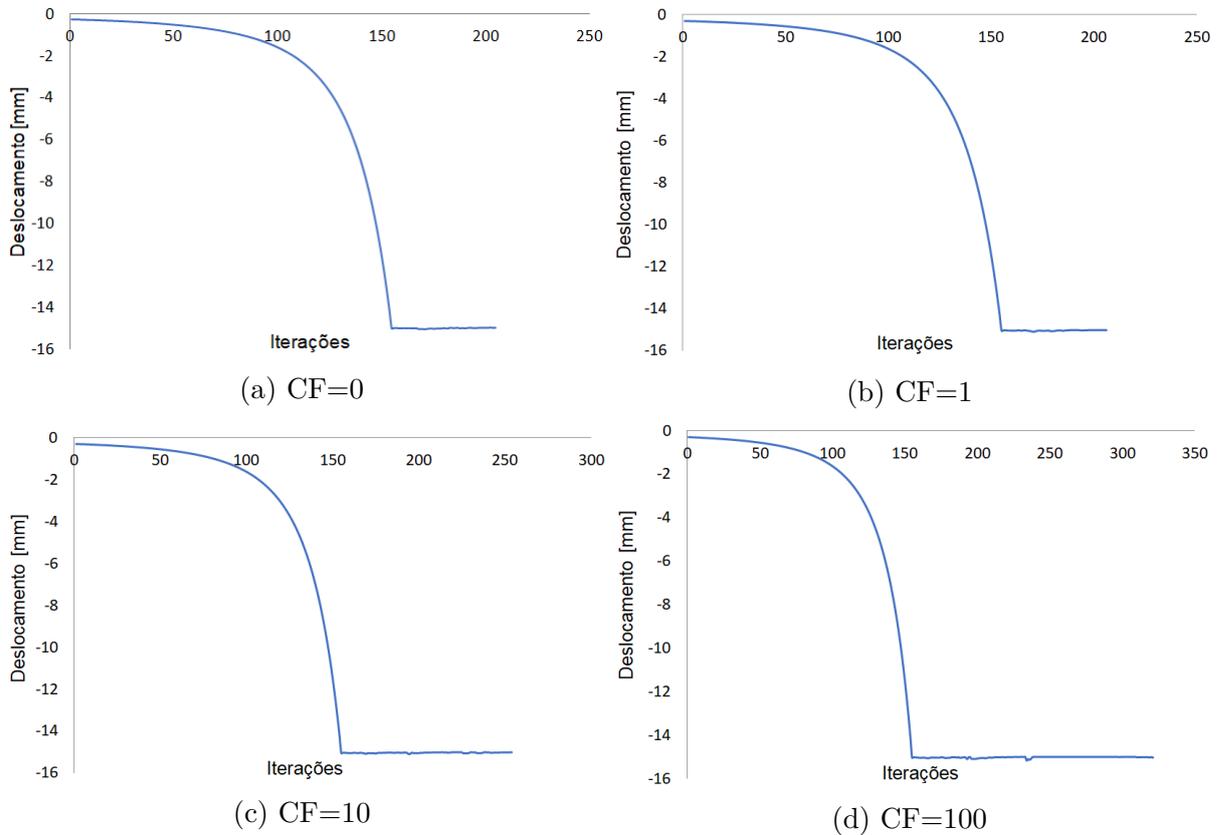
Elemento	CF=0	CF=1	CF=10	CF=100
1	$0,321 \cdot 10^{-4}$	-	-	-
2	$0,321 \cdot 10^{-4}$	-	-	-
9	$0,811 \cdot 10^{-3}$	$0,817 \cdot 10^{-3}$	-	-
10	$0,130 \cdot 10^{-2}$	$0,137 \cdot 10^{-2}$	$0,147 \cdot 10^{-2}$	$0,153 \cdot 10^{-2}$
11	$0,135 \cdot 10^{-2}$	$0,131 \cdot 10^{-2}$	$0,146 \cdot 10^{-2}$	$0,154 \cdot 10^{-2}$
12	$0,803 \cdot 10^{-3}$	$0,816 \cdot 10^{-3}$	-	-
13	$0,127 \cdot 10^{-2}$	$0,134 \cdot 10^{-2}$	$0,142 \cdot 10^{-2}$	$0,152 \cdot 10^{-2}$
14	$0,321 \cdot 10^{-4}$	-	-	-
15	$0,100 \cdot 10^{-2}$	$0,101 \cdot 10^{-2}$	$0,111 \cdot 10^{-2}$	$0,199 \cdot 10^{-2}$
16	$0,321 \cdot 10^{-4}$	-	-	-
17	$0,135 \cdot 10^{-2}$	$0,134 \cdot 10^{-2}$	$0,142 \cdot 10^{-2}$	$0,154 \cdot 10^{-2}$
18	$0,773 \cdot 10^{-3}$	$0,802 \cdot 10^{-3}$	-	-
19	$0,452 \cdot 10^{-3}$	$0,406 \cdot 10^{-3}$	$0,179 \cdot 10^{-3}$	-
20	$0,983 \cdot 10^{-3}$	$0,988 \cdot 10^{-3}$	$0,108 \cdot 10^{-2}$	$0,192 \cdot 10^{-2}$
21	$0,452 \cdot 10^{-3}$	$0,471 \cdot 10^{-3}$	-	-
22	$0,760 \cdot 10^{-3}$	$0,799 \cdot 10^{-3}$	-	-
23	$0,128 \cdot 10^{-3}$	$0,652 \cdot 10^{-4}$	-	-
24	$0,321 \cdot 10^{-3}$	-	-	-
26	$0,544 \cdot 10^{-3}$	$0,547 \cdot 10^{-3}$	$0,456 \cdot 10^{-3}$	-
27	$0,554 \cdot 10^{-3}$	$0,551 \cdot 10^{-3}$	$0,472 \cdot 10^{-3}$	-
28	$0,321 \cdot 10^{-4}$	-	-	-
30	$0,578 \cdot 10^{-4}$	$0,699 \cdot 10^{-4}$	-	-
31	$0,468 \cdot 10^{-3}$	$0,502 \cdot 10^{-3}$	$0,139 \cdot 10^{-2}$	$0,150 \cdot 10^{-2}$
32	$0,109 \cdot 10^{-3}$	$0,120 \cdot 10^{-3}$	-	-
33	$0,158 \cdot 10^{-3}$	$0,107 \cdot 10^{-3}$	-	-
34	$0,321 \cdot 10^{-4}$	-	-	-
36	$0,107 \cdot 10^{-3}$	$0,147 \cdot 10^{-3}$	-	-
37	$0,104 \cdot 10^{-3}$	$0,727 \cdot 10^{-4}$	-	-
38	$0,550 \cdot 10^{-3}$	$0,487 \cdot 10^{-3}$	$0,139 \cdot 10^{-2}$	$0,151 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6 – Comprimentos ótimos referentes aos estudos com os custos de fabricação iguais a 0, 1, 10 e 100

Elemento	CF=0	CF=1	CF=10	CF=100
5	2,021	1,961	1,866	1,509
9	0,389	0,345	0,000	0,000
10	4,445	4,398	4,543	5,421
11	4,347	4,350	4,477	5,424
12	0,421	0,417	0,000	0,000
13	5,691	5,787	4,577	6,093
14	4,730	-	-	-
15	4,621	4,648	6,213	0,000
16	4,713	-	-	-
17	5,701	5,706	5,727	6,133
18	1,607	1,601	-	-
19	0,563	0,648	0,159	0,000
20	1,888	1,868	0,468	8,369
21	0,661	0,561	0,000	0,000
22	1,677	1,678	-	-
23	7,648	7,659	-	-
24	3,831	-	-	-
26	6,021	5,918	6,372	6,581
27	5,894	6,012	6,464	6,512
28	6,813	-	-	-
30	7,726	7,714	-	-
31	1,996	1,945	1,859	1,509
32	0,672	0,715	-	-
33	4,324	4,300	-	-
34	4,226	-	-	-
36	4,243	4,275	-	-
37	0,759	0,642	0,000	0,000
38	2,097	2,096	-	-

O comportamento das restrições de deslocamento no nó restrito (nó 3, grau de liberdade 2 - translação no eixo y) podem ser vistas na figura 39. Observe, que em todas as análises com diferentes valores de CF, as restrições de deslocamento estão ativas.

Figura 39 – Comportamento das restrições de deslocamento no nó restrito para cada caso



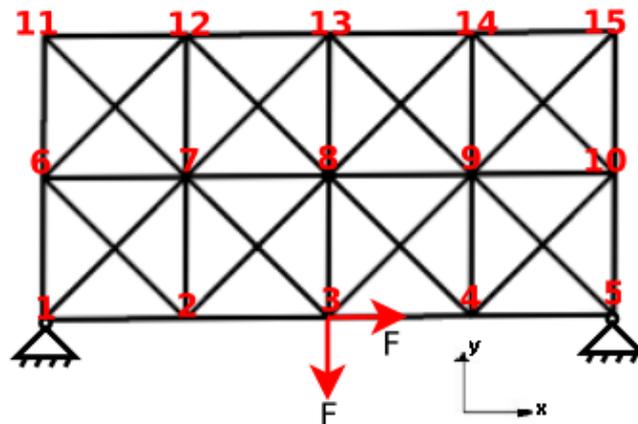
Fonte: Produção do autor

### 6.1.2 Pórtico 2D com duas forças concentradas

O segundo exemplo bidimensional trata da mesma estrutura anterior, mas agora sujeita a duas cargas pontuais de  $200\text{KN}$  aplicadas no nó 3 nas direções  $x$  positiva e  $y$  negativa, conforme figura 40. Como critério de convergência no problema de otimização, fixou-se a tolerância de  $(1 \cdot 10^{-3})$  para estabilização tanto para a função objetivo como para a norma do vetor das variáveis de projeto.

Para este estudo, o parâmetro  $\beta$  inicial adotado para a função *Heaviside* regularizada aplicada nas áreas de seção transversal dos elementos foi de 100, com atualizações de 1(%) a cada iteração. Já para os comprimentos dos elementos, iniciou-se  $\beta$  com valor igual a 40 (exceto para o caso em que foi adotado CF=100), com atualizações de 0,1(%) ao longo das iterações do algoritmo. Para o estudo de caso onde foi adotado CF=100, o algoritmo teve dificuldades de convergência. A solução, foi relaxar a função *Heaviside*, adotando-se um valor menor para o parâmetro  $\beta$ . O valor associado à área máxima foi de  $0,08\text{m}^2$  e o comprimento máximo foi de  $20\text{m}$ .

Figura 40 – Pórtico 2D com duas forças concentradas



Fonte: Produção do autor

Este caso é analisado com diferentes custos de fabricação. Primeiro, com custo adicional de fabricação associado às conexões igual a zero (pois assim, é possível visualizar qual seria a solução ótima sem o emprego de uma análise de redução da complexidade). Posteriormente, são adotados custos adicionais iguais a 1, 10 e 100. As soluções ótimas podem ser vistas na figura 41 (a-d).

Figura 41 – Soluções ótimas obtidas no estudo do pórtico 2D com duas forças concentradas de acordo com o aumento no custo adicional de fabricação referente às conexões (CF)



(a)  $CF=0$ , valor da função objetivo  $W = \$323,63$ .



(b)  $CF=1$ , valor da função objetivo  $W = \$357,13$ .



(c)  $CF=10$ , valor da função objetivo  $W = \$484,71$ .



(d)  $CF=100$ , valor da função objetivo  $W = \$1335,72$ .

Fonte: Produção do autor

É perceptível a redução da complexidade estrutural quando um custo adicional de fabricação igual a 100 é imposto. Basta comparar as figuras 41 (a) e 41 (d). Na solução ótima sem o emprego da função *Heaviside*, estão presentes 22 elementos na estrutura. Em

contrapartida, com  $CF=100$ , reduz-se o número de elementos remanescentes na solução ótima para 11. Ou seja, é possível reduzir 50(%) no número de elementos. Adicionalmente, reduz-se também o número de conexões necessárias. Verifica-se que, da mesma forma que no primeiro exemplo, a aplicação de dois parâmetros  $\beta$  independentes foi, aqui também, eficaz.

Na tabela 7 podem ser vistos os valores iniciais adotados para os parâmetros  $\beta$  para área e comprimentos em cada caso, e também, qual foi o valor final alcançado. Observe que para este estudo, com  $CF=100$ , devido a dificuldades que o algoritmo encontrou para calcular a derivada no elemento 28, tornou-se necessário empregar um relaxamento na função *Heaviside* regularizada, aplicando-se um valor menor ao parâmetro  $\beta$ , quando comparado ao valor inicial adotado no primeiro exemplo.

Tabela 7 – Valores iniciais e finais aplicados aos parâmetros  $\beta$  referentes ao estudo do pórtico 2D com duas forças concentradas

	CF=1	CF=10	CF=100
Valor inicial do parâmetro $\beta$ aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos	100,00	100,00	100,00
Valor final do parâmetro $\beta$ aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos	310,00	301,09	396,12
Valor inicial do parâmetro $\beta$ aplicado nos comprimentos dos elementos	40,00	40,00	10,00
Valor final do parâmetro $\beta$ aplicado nos comprimentos dos elementos	50,18	49,88	13,17

As áreas ótimas referentes ao estudo de caso bidimensional com duas forças concentradas, podem ser vistas na tabela 8. Observe que, conforme aumenta-se o valor do custo adicional de fabricação associado às conexões (CF), o algoritmo reduz o número de áreas acima da restrição lateral imposta ( $10^{-5}m^2$ ). O custo adicional de fabricação de conexões serve como uma espécie de penalização na função objetivo. Com o aumento no CF, a penalização começa a ter maior peso, logo, reduzir o número de elementos, e consequentemente, o custo adicional de fabricação, passa a ser prioridade no processo de otimização.

Tabela 8 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso bidimensional com duas forças concentradas

Elemento	CF=0	CF=1	CF=10	CF=100
1	-	$0,915 \cdot 10^{-4}$	$0,967 \cdot 10^{-4}$	$0,477 \cdot 10^{-3}$
2	$0,192 \cdot 10^{-4}$	$0,105 \cdot 10^{-3}$	$0,957 \cdot 10^{-3}$	$0,496 \cdot 10^{-3}$
3	$0,145 \cdot 10^{-3}$	$0,247 \cdot 10^{-3}$	$0,300 \cdot 10^{-3}$	-
4	$0,149 \cdot 10^{-3}$	$0,250 \cdot 10^{-3}$	$0,290 \cdot 10^{-3}$	-
5	$0,244 \cdot 10^{-3}$	$0,569 \cdot 10^{-4}$	-	-
6	$0,305 \cdot 10^{-3}$	$0,169 \cdot 10^{-3}$	-	-
7	$0,515 \cdot 10^{-3}$	$0,193 \cdot 10^{-3}$	-	-
8	-	-	$0,641 \cdot 10^{-4}$	-
9	$0,793 \cdot 10^{-3}$	$0,958 \cdot 10^{-3}$	$0,107 \cdot 10^{-2}$	-
10	$0,866 \cdot 10^{-3}$	$0,100 \cdot 10^{-2}$	$0,122 \cdot 10^{-2}$	$0,111 \cdot 10^{-2}$
11	$0,910 \cdot 10^{-3}$	$0,479 \cdot 10^{-3}$	$0,853 \cdot 10^{-4}$	$0,136 \cdot 10^{-2}$
12	$0,359 \cdot 10^{-3}$	$0,953 \cdot 10^{-4}$	-	-
13	$0,717 \cdot 10^{-3}$	$0,843 \cdot 10^{-3}$	$0,875 \cdot 10^{-3}$	$0,101 \cdot 10^{-2}$
15	$0,813 \cdot 10^{-3}$	$0,801 \cdot 10^{-3}$	$0,818 \cdot 10^{-3}$	$0,103 \cdot 10^{-2}$
17	$0,921 \cdot 10^{-3}$	$0,489 \cdot 10^{-3}$	$0,285 \cdot 10^{-3}$	$0,139 \cdot 10^{-2}$
18	$0,750 \cdot 10^{-3}$	$0,850 \cdot 10^{-3}$	$0,842 \cdot 10^{-3}$	-
19	$0,305 \cdot 10^{-3}$	$0,183 \cdot 10^{-3}$	-	$0,236 \cdot 10^{-3}$
20	$0,508 \cdot 10^{-3}$	$0,680 \cdot 10^{-3}$	$0,731 \cdot 10^{-3}$	$0,640 \cdot 10^{-3}$
22	$0,361 \cdot 10^{-3}$	$0,114 \cdot 10^{-3}$	-	-
26	$0,917 \cdot 10^{-3}$	$0,879 \cdot 10^{-3}$	$0,843 \cdot 10^{-3}$	$0,602 \cdot 10^{-3}$
30	$0,525 \cdot 10^{-3}$	$0,871 \cdot 10^{-3}$	$0,109 \cdot 10^{-2}$	-
31	-	-	-	$0,952 \cdot 10^{-3}$
32	$0,263 \cdot 10^{-3}$	$0,568 \cdot 10^{-3}$	$0,763 \cdot 10^{-3}$	-
36	$0,183 \cdot 10^{-3}$	$0,684 \cdot 10^{-3}$	$0,121 \cdot 10^{-2}$	-
38	$0,555 \cdot 10^{-3}$	$0,340 \cdot 10^{-3}$	$0,621 \cdot 10^{-4}$	$0,135 \cdot 10^{-2}$

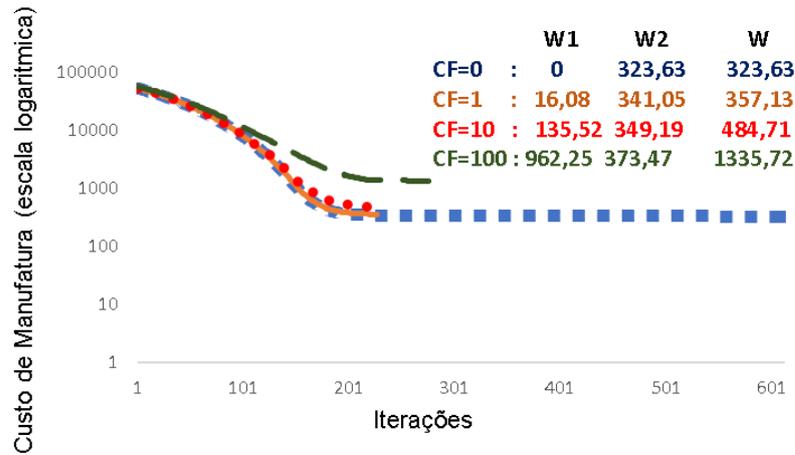
Observe, na tabela 9, que os elementos 12, 20, 21 e 37, têm seus comprimentos abaixo da restrição de comprimento imposta ( $0,05m$ ), e portanto, são removidos da topologia. Nota-se assim, a importância da função *Heaviside* regularizada aplicada também aos comprimentos no âmbito da redução da complexidade.

Tabela 9 – Comprimentos ótimos referentes ao - pórtico 2D com duas forças concentradas, com os custos de fabricação iguais a 0, 1, 10 e 100

Elemento	CF=0	CF=1	CF=10	CF=100
5	4,954	3,175	-	-
6	3,002	4,260	-	-
7	4,191	3,587	-	-
8	-	-	0,645	-
9	1,427	1,207	1,237	-
10	4,939	4,797	4,570	5,065
11	4,154	3,943	4,363	4,671
12	0,112	0,170	-	-
13	4,834	4,970	4,833	5,422
15	3,252	4,828	4,955	7,063
17	6,891	6,885	6,826	6,621
18	1,695	1,807	2,189	-
19	4,403	2,525	-	1,590
20	2,950	1,161	1,247	0,000
22	0,7111	0,656	-	-
26	3,817	5,212	5,539	6,254
30	6,874	7,581	7,456	-
31	-	-	-	2,449
32	4,661	2,862	2,515	-
36	5,515	4,079	4,312	-
38	0,823	0,826	0,615	0,973

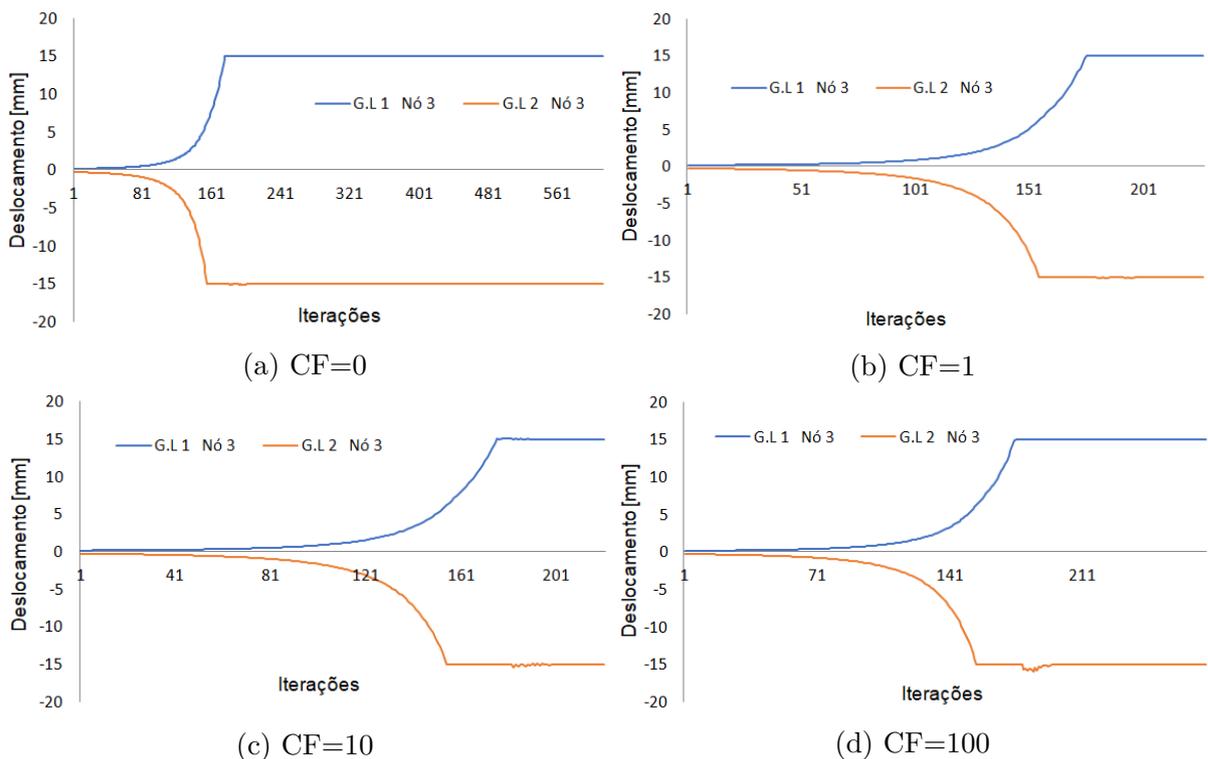
Tem-se na figura 42, o comportamento das funções objetivo ao longo do processo iterativo.  $W1$  é o custo adicional de fabricação associado às conexões,  $W2$  é o custo da massa da estrutura e  $W$  é o valor total da função objetivo. Conforme aumenta-se o custo adicional de fabricação (CF), o algoritmo tende a limpar a estrutura. Entretanto, há um aumento na massa. No caso em que o CF é igual a 100, o custo da massa na estrutura ótima é 15,4% maior que na solução ótima em que não é considerada redução da complexidade(CF=0). Para atender a rigidez necessária da estrutura, torna-se necessário o aumento nas áreas de seção transversal dos elementos, fato que pode ser verificado na tabela 8. As áreas dos elementos 38, 17,15, 13, 11, 10, 2 e 1, tiveram um aumento em suas magnitudes de acordo com o incremento no CF.

Figura 42 – Comportamento das funções objetivo referentes - pórtico 2D com duas forças concentradas, mediante diferentes valores de CF.



Fonte: Produção do autor

Figura 43 – Comportamento das restrições de deslocamento no nó restrito para cada caso - pórtico 2D com duas forças concentradas



Fonte: Produção do autor

O comportamento das restrições de deslocamento nos graus de liberdade do nó restrito, ao longo do processo de otimização, pode ser visto na figura 43. É possível verificar que em todos os casos com diferentes custos adicionais de fabricação, as restrições de deslocamento estão ativas. Em azul, mostra-se o comportamento da restrição de deslocamento no nó 3 e na direção x (grau de liberdade (G.L) 1) e na cor laranja, é

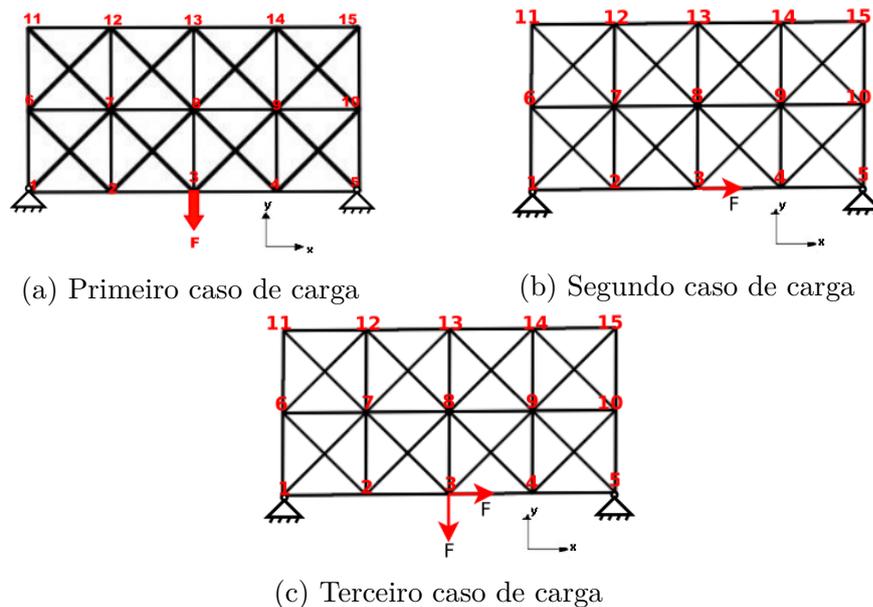
representada a restrição de deslocamento ao longo das iterações no mesmo nó e direção  $y$  (grau de liberdade (G.L) 2).

### 6.1.3 Pórtico 2D com três casos de carga

Em aplicações práticas, é comum ter-se estruturas sujeitas a combinações de carregamentos. Logo, o processo de otimização deve ser realizado, levando-se em conta cada caso de carga de forma independente. A solução ótima deve ser uma estrutura que, em qualquer um dos casos de carregamento, respeite as restrições impostas.

Para este exemplo, mantêm-se as mesmas características dos dois exemplos anteriores, com exceção da composição do carregamento. Nesta análise, serão considerados três casos de carga. Na figura 44(a) tem-se o primeiro caso de carga onde é considerada uma força concentrada de  $200\text{KN}$  aplicada na direção  $y$  negativa do nó 3. No segundo caso de carga, uma força concentrada de  $200\text{KN}$  na direção  $x$  positiva do mesmo nó. O composição do terceiro caso de carga, é a junção dessas duas forças concentradas, conforme a figura 44(c).

Figura 44 – Composição dos carregamentos nos três casos de carga



Fonte: Produção do autor

As soluções ótimas podem ser vistas na figura 45. A solução em que não se aplica nenhum critério de redução da complexidade pode ser vista na figura 45 (a). Observe que para esta análise, não há redução no número de elementos quando um custo adicional de fabricação de uma conexão (CF) igual a 1 é aplicado. Entretanto, ao aumentar-se CF, nota-se um processo de limpeza sendo realizado pelo algoritmo. Com  $CF=100$ , na figura 45 (d), nota-se a solução com o menor número de elementos possível. Quando compara-se este resultado com a resolução em que não há a aplicação de estratégias para redução

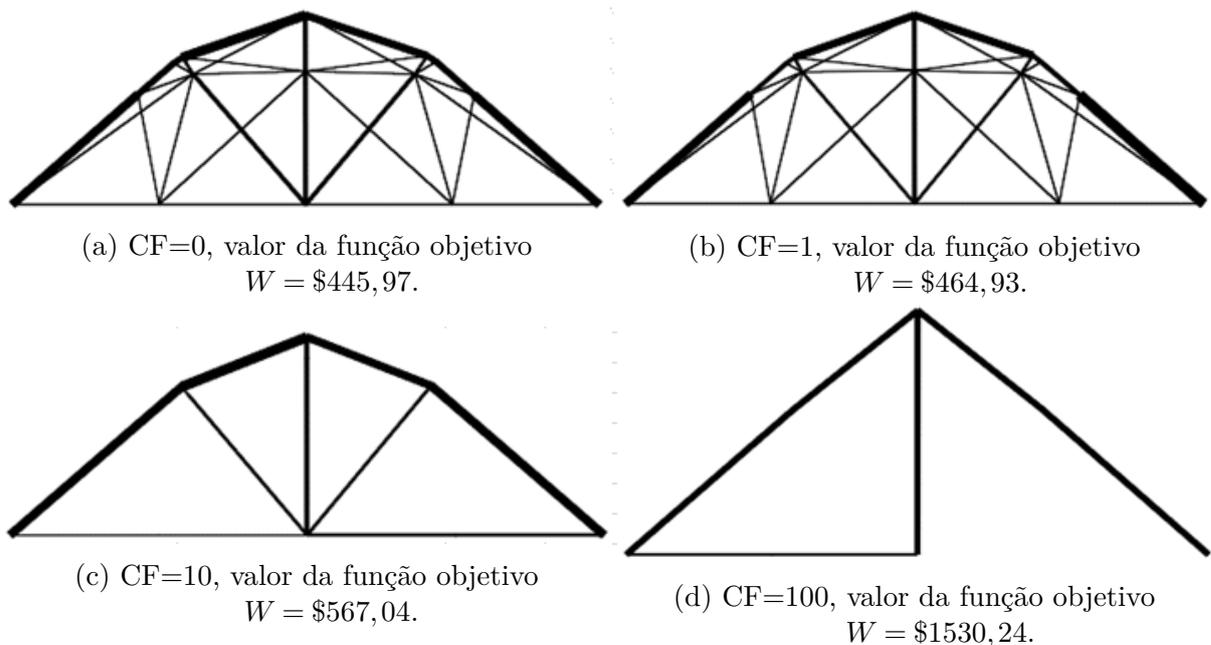
Tabela 10 – Valores iniciais e finais aplicados aos parâmetros  $\beta$  referente ao estudo do pórtico 2D com três casos de carga

	CF=1	CF=10	CF=100
Valor inicial do parâmetro $\beta$ aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos	100,00	100,00	100,00
Valor final do parâmetro $\beta$ aplicado nas áreas de seção transversal dos elementos	273,87	346,21	523,76
Valor inicial do parâmetro $\beta$ aplicado nos comprimentos dos elementos	40,00	40,00	10,00
Valor final do parâmetro $\beta$ aplicado nos comprimentos dos elementos	48,94	51,30	55,74

da complexidade, nota-se a funcionalidade da abordagem proposta, empregando dois parâmetros beta independentes. Em uma estrutura com o menor número de elementos possíveis, há também, redução na quantidade de conexões necessárias. Logo, obtém-se a minimização de custos associados ao processo de fabricação das juntas, onde os principais são: materiais, equipamentos e mão de obra especializada.

Os valores iniciais e finais para os parâmetros de curvatura  $\beta$  aplicados nas áreas de seção transversal e comprimentos dos elementos, podem ser vistos na tabela 10. Utilizou-se para este estudo o mesmo fator de atualização empregado nas duas análises previamente apresentadas.

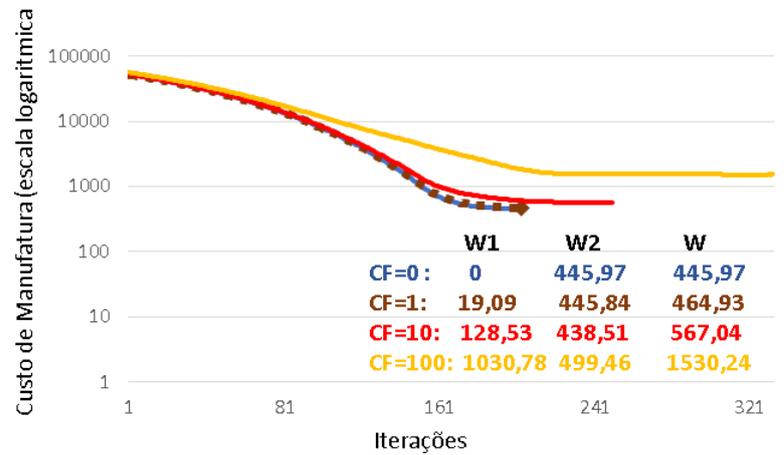
Figura 45 – Soluções ótimas obtidas no estudo com três casos de carga.



Fonte: Produção do autor

O comportamento das funções objetivo ao longo do processo iterativo pode ser

Figura 46 – Comportamento das funções objetivo referentes ao estudo de caso bidimensional com três casos de carga.



Fonte: Produção do autor

vistos na figura 46. Também estão inseridos os valores obtidos para a função objetivo W, custo de conexões W1 e de massa W2 para cada análise. Nota-se que com CF=100, há um aumento em 11,99 % no custo de massa com relação ao estudo com CF=0. Isso ocorre pois, quanto maior for o custo adicional de fabricação das conexões CF, o algoritmo passa a priorizar reduzir o número de conexões ao invés da massa. Adicionalmente, pode ocorrer um aumento na magnitude das áreas de seção transversal dos elementos para que possa ser satisfeita a rigidez necessária da estrutura.

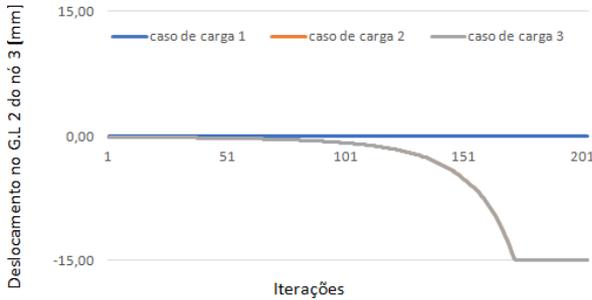
Na figura 47, pode-se observar o comportamento das restrições de deslocamento ao longo do processo iterativo. Fica evidente que em todas as análises deste estudo, as restrições estão ativas. Na figura, G.L 1 é o grau de liberdade 1 (translação no eixo x), e G.L 2 é o grau de liberdade 2 (translação em y).

As áreas ótimas obtidas pelo algoritmo para as quatro análises (CF=0, CF=1, CF=10 e CF=100) da estrutura bidimensional sujeita a três casos de carga podem ser vistas na tabela 11.

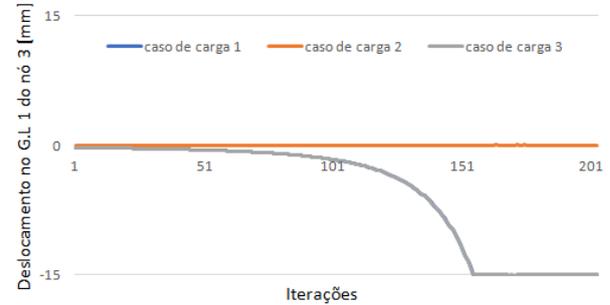
Observe que nos estudos com CF=0 e CF=1 não há nenhum elemento cuja magnitude da área de seção transversal ficou no limiar da restrição lateral imposta ( $1,0 \cdot 10^{-5} m^2$ ). Nota-se que alguns elementos têm áreas ótimas próximas à restrição lateral, como por exemplo, o elemento 14, com área ótima igual a  $0,3761 \cdot 10^{-4} m^2$ . Agora, observe as áreas ótimas advindas do processo de otimização em que um custo adicional de conexões (CF) igual a 100 é aplicado. Os elementos com áreas suficientemente pequenas, próximas à restrição lateral imposta, foram removidas da topologia. Dentre os elementos remanescentes, alguns tiveram aumento na magnitude de suas áreas de seção transversal. Este fato pode ser observado no elemento 20, por exemplo.

Os comprimentos ótimos podem ser visualizados na tabela 12. Observando-se a última coluna, com CF=100, fica evidente a atuação da função *Heaviside* regularizada

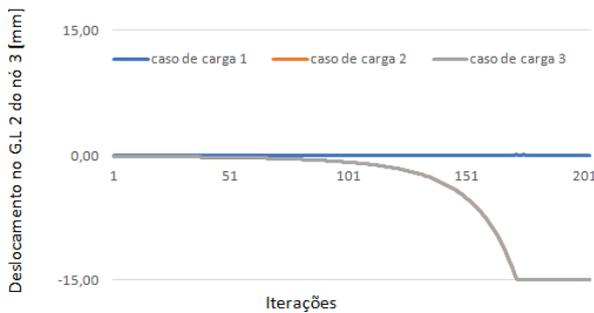
Figura 47 – Comportamento das restrições de deslocamento nos nós restrito ao longo das iterações.



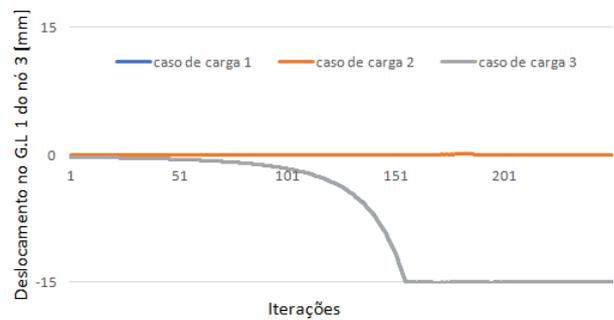
(a) G.L 1 NÓ 3 - CF=0



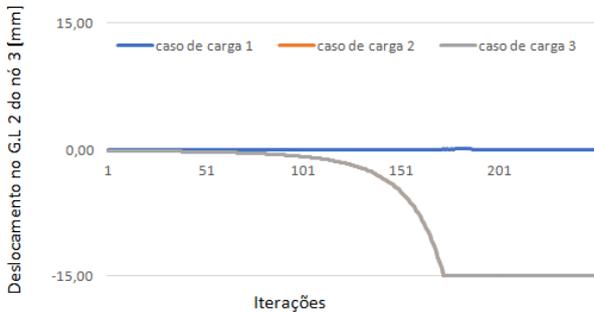
(b) G.L 2 NÓ 3 - CF=0



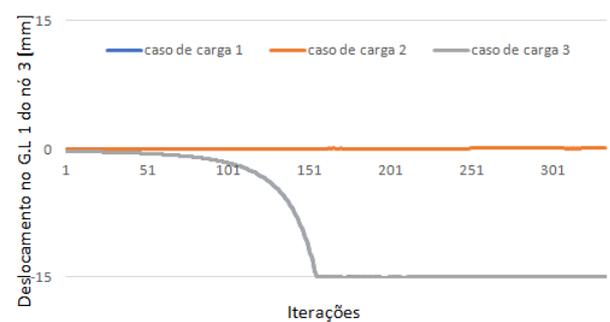
(c) G.L 1 NÓ 3 - CF=1



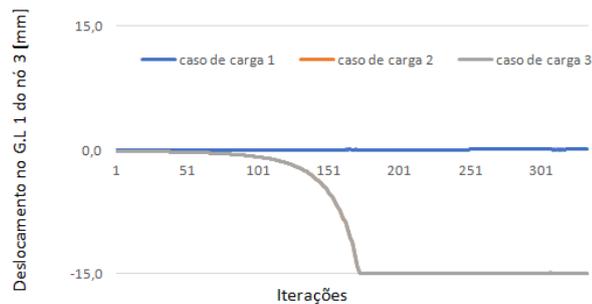
(d) G.L 2 NÓ 3 - CF=1



(e) G.L 1 NÓ 3 - CF=10



(f) G.L 2 NÓ 3 - CF=10



(g) G.L 1 NÓ 3 - CF=100

Fonte: Produção do autor

Tabela 11 – Áreas ótimas referentes ao estudo de caso do pórtico 2D com três casos de carga

Elemento	CF=0	CF=1	CF=10	CF=100
1	$0,3279 \cdot 10^{-3}$	$0,3510 \cdot 10^{-3}$	$0,4939 \cdot 10^{-4}$	$0,6884 \cdot 10^{-3}$
2	$0,3203 \cdot 10^{-3}$	$0,3404 \cdot 10^{-3}$	$0,4406 \cdot 10^{-4}$	$0,67259 \cdot 10^{-3}$
3	$0,3621 \cdot 10^{-3}$	$0,3412 \cdot 10^{-3}$	$0,6537 \cdot 10^{-3}$	-
4	$0,3685 \cdot 10^{-3}$	$0,3481E^{-23}$	$0,6505 \cdot 10^{-3}$	-
5	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	-	-
9	$0,8822 \cdot 10^{-3}$	$0,7697 \cdot 10^{-3}$	-	-
10	$0,1330 \cdot 10^{-2}$	$0,1304 \cdot 10^{-2}$	$0,1464 \cdot 10^{-2}$	$0,1525 \cdot 10^{-2}$
11	$0,1330 \cdot 10^{-2}$	$0,1356 \cdot 10^{-2}$	$0,1453 \cdot 10^{-2}$	$0,1517 \cdot 10^{-2}$
12	$0,8622 \cdot 10^{-3}$	$0,6683 \cdot 10^{-3}$	-	-
13	$0,1309 \cdot 10^{-2}$	$0,1312 \cdot 10^{-2}$	$0,1413 \cdot 10^{-2}$	$0,1523 \cdot 10^{-2}$
14	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	-	-
15	$0,1009 \cdot 10^{-2}$	$0,1032 \cdot 10^{-2}$	$0,1110 \cdot 10^{-2}$	$0,1989 \cdot 10^{-2}$
16	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	-	-
17	$0,1316 \cdot 10^{-2}$	$0,1364 \cdot 10^{-2}$	$0,1411 \cdot 10^{-2}$	$0,1517 \cdot 10^{-2}$
18	$0,8297 \cdot 10^{-3}$	$0,7309 \cdot 10^{-3}$	-	-
19	$0,3645 \cdot 10^{-3}$	$0,3503 \cdot 10^{-3}$	$0,2047 \cdot 10^{-3}$	-
20	$0,9754 \cdot 10^{-3}$	$0,9950 \cdot 10^{-3}$	$0,1070 \cdot 10^{-2}$	$0,1917 \cdot 10^{-2}$
21	$0,4037 \cdot 10^{-3}$	$0,4370 \cdot 10^{-3}$	$0,1776 \cdot 10^{-3}$	-
22	$0,8057 \cdot 10^{-3}$	$0,6502 \cdot 10^{-3}$	-	-
23	$0,1059 \cdot 10^{-3}$	$0,1048 \cdot 10^{-3}$	-	-
24	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	-	-
26	$0,5456 \cdot 10^{-3}$	$0,5287 \cdot 10^{-3}$	$0,4618 \cdot 10^{-3}$	-
27	$0,5535 \cdot 10^{-3}$	$0,5449 \cdot 10^{-3}$	$0,4723 \cdot 10^{-3}$	-
28	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	-	-
30	$0,9011 \cdot 10^{-4}$	$0,5278 \cdot 10^{-4}$	-	-
31	$0,4321 \cdot 10^{-3}$	$0,5167 \cdot 10^{-3}$	$0,1387 \cdot 10^{-2}$	$0,1500 \cdot 10^{-2}$
32	$0,1943 \cdot 10^{-3}$	$0,1184 \cdot 10^{-3}$	-	-
33	$0,1261 \cdot 10^{-3}$	$0,1671 \cdot 10^{-3}$	-	-
34	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	$0,3761 \cdot 10^{-4}$	-	-
36	$0,1171 \cdot 10^{-3}$	$0,1171 \cdot 10^{-3}$	-	-
37	$0,1538 \cdot 10^{-3}$	$0,9248 \cdot 10^{-4}$	-	-
38	$0,4688 \cdot 10^{-3}$	$0,6485 \cdot 10^{-3}$	$0,1381 \cdot 10^{-2}$	$0,1494 \cdot 10^{-2}$

como medida de redução da complexidade aplicada nos comprimentos dos elementos. Das soluções ótimas, elementos com comprimentos menores do que 0,9 metros foram projetados para zero pela função *Heaviside* regularizada. Logo, estes podem ser removidos da topologia na solução ótima com CF=100. Quando as duas medidas de redução da complexidade (aplicadas nas áreas e comprimentos dos elementos) trabalham em conjunto, aumenta-se a possibilidade de ter-se soluções ótimas com menor número de elementos e conexões, e consequentemente, menor complexidade.

Tabela 12 – Comprimentos ótimos referentes aos estudos com os custos de fabricação iguais a 0, 1, 10 e 100 considerando-se três casos de carga.

Elemento	CF=0	CF=1	CF=10	CF=100
5	2,009	1,946	-	-
9	0,368	0,350	0,000	0,000
10	4,426	4,411	4,546	5,482
11	4,377	4,324	4,502	5,440
12	0,365	0,383	0,000	0,000
13	5,727	5,747	4,699	6,063
14	4,655	4,695	-	-
15	4,568	4,568	6,046	0,000
16	4,660	4,671	-	-
17	5,689	5,695	5,724	5,980
18	1,620	1,614	-	-
19	0,668	0,550	0,309	0,000
20	1,955	1,943	0,693	8,482
21	0,758	0,739	0,000	0,000
22	1,734	1,744	-	-
23	7,637	7,624	-	-
24	3,865	3,843	-	-
26	5,916	5,995	6,268	-
27	5,835	5,812	6,525	-
28	6,776	6,770	-	-
30	7,706	7,736	-	-
31	1,984	1,9461	1,967	1,570
32	0,764	0,637	-	-
33	4,323	4,344	-	-
34	4,216	4,187	-	-
36	4,375	4,220	-	-
37	0,839	0,812	0,000	0,000
38	2,097	2,125	2,002	1,683

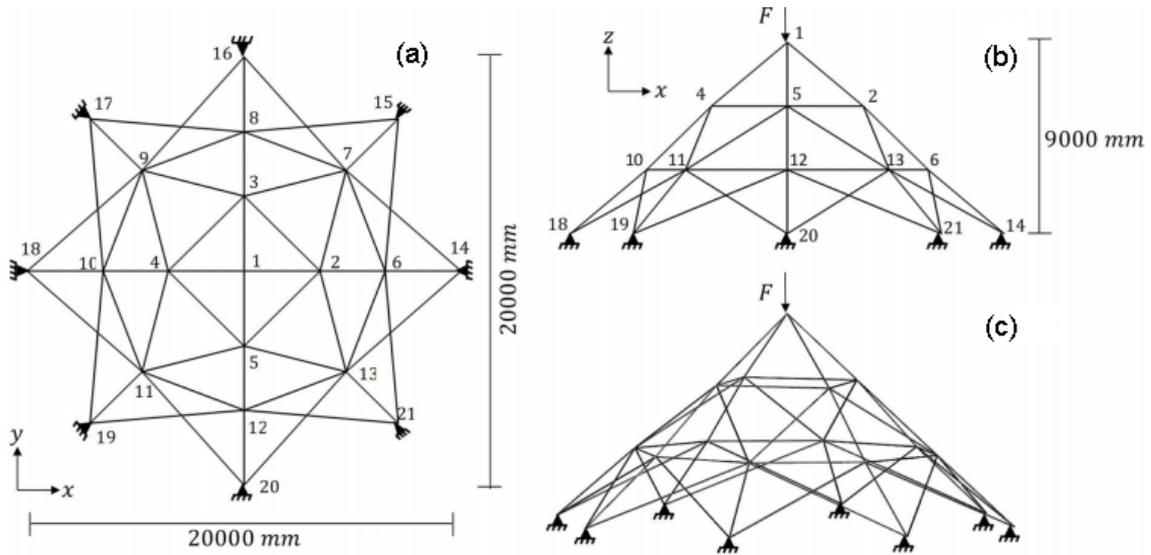
## 6.2 OTIMIZAÇÃO MISTA

Nesta seção são apresentados exemplos para o problema de otimização da seção 5.2, que considera as áreas das seções transversais dos elementos como variáveis discretas. Não foram encontrados, na literatura, resultados que pudessem ser empregados diretamente para validação. Assim, os exemplos aqui expostos têm como referência os estudos realizados por Faria (2019a), com devidas adaptações.

### 6.2.1 Domo de 52 barras

O primeiro exemplo da aplicação da abordagem de variáveis mistas trata do domo treliçado de 52 barras e 21 nós, mostrado na figura 48. Tem-se a matriz de conectividade dos elementos na tabela 13 e as coordenadas dos nós, no anexo A.

Figura 48 – Domo de 52 barras.



Fonte: Faria (2019a)

Tabela 13 – Conectividade do domo de 52 barras.

Ele	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nós	14	7	16	9	18	11	20	13	15	8	17	10	19	12	21	6	6	7
	7	16	9	18	11	20	13	14	8	17	10	19	12	21	6	15	7	8
Ele	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Nós	8	9	10	11	12	13	2	7	3	9	4	11	5	13	2	3	4	5
	9	10	11	12	13	6	7	3	9	4	11	5	13	2	3	4	5	2
Ele	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52		
Nós	14	6	2	18	10	4	20	12	5	16	8	3	15	17	19	21		
	6	2	1	10	4	1	12	5	1	8	3	1	7	9	11	13		

Para simplificar a análise, o custo de material  $\frac{\$}{kg}$  foi considerado como sendo unitário. As seções discretas adotadas para as áreas de seção transversal dos elementos, foram consideradas com base no catálogo comercial da empresa Tuper S/A, disponível no anexo C. Os elementos têm seção tubular, com espessura constante, igual a  $8mm$ . Todos os elementos têm, como área inicial, a magnitude da maior área disponível no catálogo comercial,  $0,00833m^2$ . O problema tem como dados, módulo de elasticidade  $E=200GPa$ , módulo de elasticidade transversal  $G = 80MPa$ , massa específica  $\rho = 7,799 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{mm^3}$  e tensão de escoamento  $\sigma = 355MPa$ . Para o limite inferior nas áreas de projeto, considerou-se a menor seção disponível no catálogo comercial da Tuper  $0,003m^2$ . As tolerâncias adotadas para os critérios de parada, tanto para a função objetivo como para as variáveis de projeto, foram iguais a  $10^{-3}$ . Foram consideradas restrições de tensão, restrição de comprimento mínimo igual a  $5mm$  em todos os elementos e de deslocamento ( $5mm$ ) no

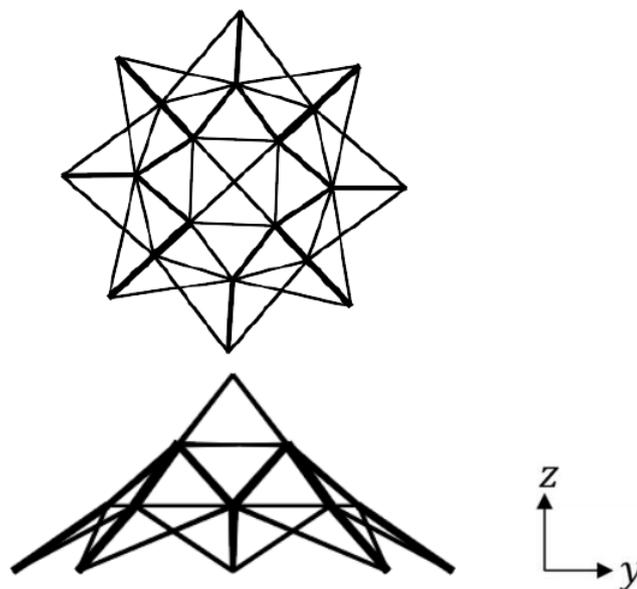
grau de liberdade 3 (translação no eixo  $z$ ) dos nós 2, 3, 4 e 5. A estrutura tem como peso inicial,  $19557,9284kg$ . As variáveis de projeto são as áreas dos 52 elementos, as coordenadas  $x$  e  $y$  dos elementos 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13, e as coordenadas  $z$  dos elementos 2, 3, 4 e 5. São também variáveis de projeto, os seguintes fatores de fixação: 36  $\alpha_1$ , 52 (todos)  $\alpha_2$ , 36  $\alpha_3$  e 52 (todos)  $\alpha_4$ . Não foram considerados como variáveis de projeto, os fatores de fixação  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  dos elementos 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 37, 40, 43, 46, 49, 50, 51 e 52.

Para a composição do carregamento neste estudo, baseou-se no trabalho de Faria (2019a), que consiste em uma força concentrada de  $632,74 \cdot 10^3$  aplicada no nó 1, sentido negativo do grau de liberdade 3 (translação no eixo  $z$ ). Aumentou-se em 6 vezes a magnitude da força aplicada, pois com este carregamento obteve-se restrições de deslocamento e tensões ativas. Aplicou-se, portanto, uma força concentrada de  $3796,44 \cdot 10^3 N$ .

Como mencionado anteriormente, solucionar um problema de otimização mista decorre em aumento no custo computacional. Na proposta deste trabalho, para cada elemento, aumentam-se duas variáveis de projeto e uma restrição. Acrescenta-se ainda, o fato de que utiliza-se o método *Branch and Bound* para solucionar o problema discreto.

Assim, para otimização do custo computacional, de forma a solucionar os problemas propostos em tempo viável, parte-se do princípio de que o ótimo discreto está na vizinhança do ótimo contínuo. Soluciona-se então, primeiramente o problema de otimização contínuo. Uma vez solucionado, parte-se para a solução do problema discreto. Neste caso do domo treliçado de 52 barras, o problema contínuo levou 267 iterações para convergir, e o discreto, 4. Pode-se ver que, desta forma, consegue-se reduzir de forma significativa o tempo computacional. A configuração da solução ótima obtida pelo algoritmo de otimização mista, pode ser vista na figura 49.

Figura 49 – Solução ótima referente ao problema do domo de 52 barras



Fonte: Produção do autor

Note que todos os elementos iniciais, permanecem na solução ótima. Isso ocorre pelo fato de que estabeleceu-se como limite inferior para as áreas de projeto,  $0,003310m^2$ . Mesmo não sendo imposta restrição de simetria, a solução ótima obtida é simétrica.

As áreas ótimas contínuas e discretas obtidas do processo de otimização, podem ser vistas na tabela 14. Aqui, é de fundamental importância observar que um simples arredondamento para o valor discreto mais próximo do valor contínuo nem sempre fornece a resposta ótima. Nota-se que elementos 37, 38, 40, 41, 43, 44, 46 e 47 tiveram como área ótima contínua o mesmo valor de  $0,8330 \cdot 10^{-2}m^2$ . No entanto, a área ótima discreta desses elementos não foi a mesma. Os elementos 38 e 41 convergiram para  $0,8336 \cdot 10^{-2}m^2$ , enquanto que todos os demais convergiram para  $0,7936 \cdot 10^{-2}m^2$ .

Tabela 14 – Áreas ótimas - domo 52 barras

Elemento	Contínuas	Discretas	Elemento	Contínuas	Discretas
1	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	27	$0,5394 \cdot 10^{-2}$	$0,6182 \cdot 10^{-2}$
2	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	28	$0,4806 \cdot 10^{-2}$	$0,5305 \cdot 10^{-2}$
3	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	29	$0,4872 \cdot 10^{-2}$	$0,5305 \cdot 10^{-2}$
4	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	30	$0,5341 \cdot 10^{-2}$	$0,5943 \cdot 10^{-2}$
5	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	31	$0,5513 \cdot 10^{-2}$	$0,5943 \cdot 10^{-2}$
6	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	32	$0,4731 \cdot 10^{-2}$	$0,5305 \cdot 10^{-2}$
7	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	33	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$
8	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	34	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$
9	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	35	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$
10	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	36	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$
11	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	37	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,7936 \cdot 10^{-2}</math></b>
12	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	38	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,8336 \cdot 10^{-2}</math></b>
13	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	39	$0,3810 \cdot 10^{-2}$	$0,4028 \cdot 10^{-2}$
14	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	40	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,7936 \cdot 10^{-2}</math></b>
15	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	41	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,8336 \cdot 10^{-2}</math></b>
16	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	42	$0,3827 \cdot 10^{-2}$	$0,4028 \cdot 10^{-2}$
17	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	43	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,7936 \cdot 10^{-2}</math></b>
18	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	44	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,7936 \cdot 10^{-2}</math></b>
19	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	45	$0,4105 \cdot 10^{-2}$	$0,4028 \cdot 10^{-2}$
20	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	46	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,7936 \cdot 10^{-2}</math></b>
21	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	47	$0,8330 \cdot 10^{-2}$	<b><math>0,7936 \cdot 10^{-2}</math></b>
22	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	48	$0,4105 \cdot 10^{-2}$	$0,4028 \cdot 10^{-2}$
23	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	49	$0,7444 \cdot 10^{-2}$	$0,7936 \cdot 10^{-2}$
24	$0,3310 \cdot 10^{-2}$	$0,3350 \cdot 10^{-2}$	50	$0,7400 \cdot 10^{-2}$	$0,7936 \cdot 10^{-2}$
25	$0,4791 \cdot 10^{-2}$	$0,4905 \cdot 10^{-2}$	51	$0,7412 \cdot 10^{-2}$	$0,7936 \cdot 10^{-2}$
26	$0,5467 \cdot 10^{-2}$	$0,5943 \cdot 10^{-2}$	52	$0,7438 \cdot 10^{-2}$	$0,7936 \cdot 10^{-2}$

Os fatores de fixação ótimos podem ser vistos na tabela 15. Os  $\alpha$ s 2 e 4 não foram plotados na tabela. No entanto, todos tiveram como solução ótima magnitudes iguais a 0,01 (ligações do tipo totalmente flexíveis). Os elementos 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 37, 40,

43, 46, 49, 50, 51 e 52 não tiveram como variáveis de projeto os fatores de fixação  $\alpha$  1 e 2.

Tabela 15 – Fatores de fixação ótimos obtidos na solução do problema do domo de 52 barras.

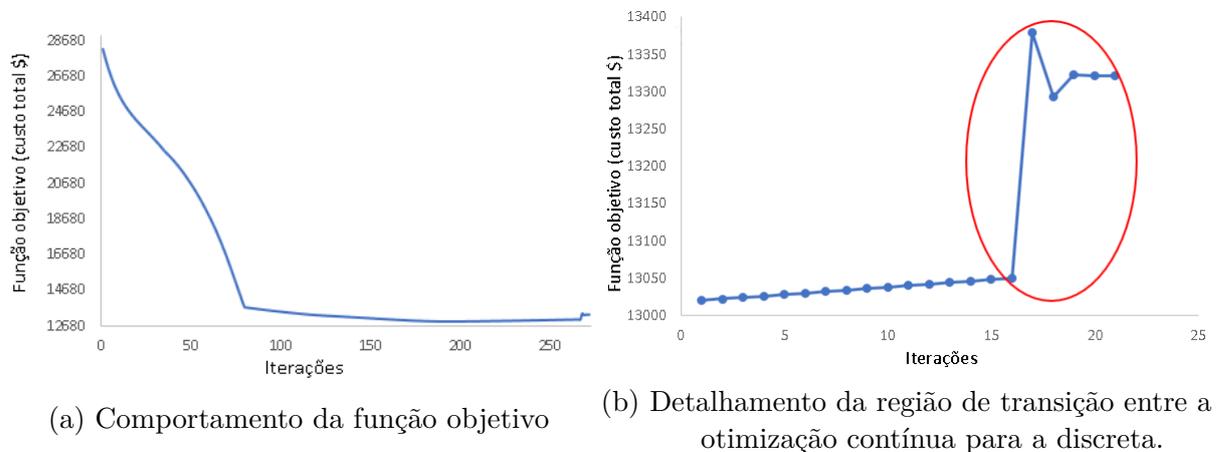
Elemento	$\alpha$ 1	$\alpha$ 3	Elemento	$\alpha$ 1	$\alpha$ 3
1	-	-	14	0,01	0,01
27	0,01	0,01	40	-	-
2	0,01	0,01	15	-	-
28	0,01	0,01	41	0,01	0,01
3	-	-	16	0,01	0,01
29	0,01	0,01	42	0,01	0,01
4	0,01	0,01	17	0,01	0,01
30	0,01	0,01	43	-	-
5	-	-	18	0,01	0,01
31	0,01	0,01	44	0,01	0,01
6	0,01	0,01	19	0,01	0,01
32	0,01	0,01	45	0,01	0,01
7	-	-	20	0,01	0,01
33	0,01	0,01	46	-	-
8	0,01	0,01	21	0,01	0,01
34	0,01	0,01	47	0,01	0,01
9	-	-	22	0,01	0,01
35	0,01	0,01	48	0,01	0,01
10	0,01	0,01	23	0,01	0,01
36	0,01	0,01	49	-	-
11	-	-	24	0,01	0,01
37	-	-	50	-	-
12	0,01	0,01	25	0,01	0,01
38	0,01	0,01	51	-	-
13	-	-	26	0,01	0,01
39	0,01	0,01	52	-	-

As coordenadas ótimas são apresentadas na tabela 16. O comportamento da função objetivo ao longo do processo iterativo, pode ser vista na figura 50 (a). Na figura 50(b), tem-se nitidamente a região de transição entre o processo de otimização contínuo e discreto. Quando o algoritmo inicia a análise de otimização mista, ocorre um aumento no valor da função objetivo. O problema tem como custo de conexões \$2773,47, custo de massa \$10547,57 e custo total \$13321,05. O comportamento do custo da massa e das conexões ao longo do processo iterativo, podem ser vistas na figura 51. O custo de fabricação das ligações, representa 20,82% do total da função objetivo neste estudo. Considerou-se, para o custo adicional das conexões, uma variação quadrática limitada entre 20 e 60% do custo do material. Com isso, pode-se verificar que o custo das ligações ficou próximo ao mínimo possível.

Tabela 16 – Coordenadas ótimas - domo 52 barras

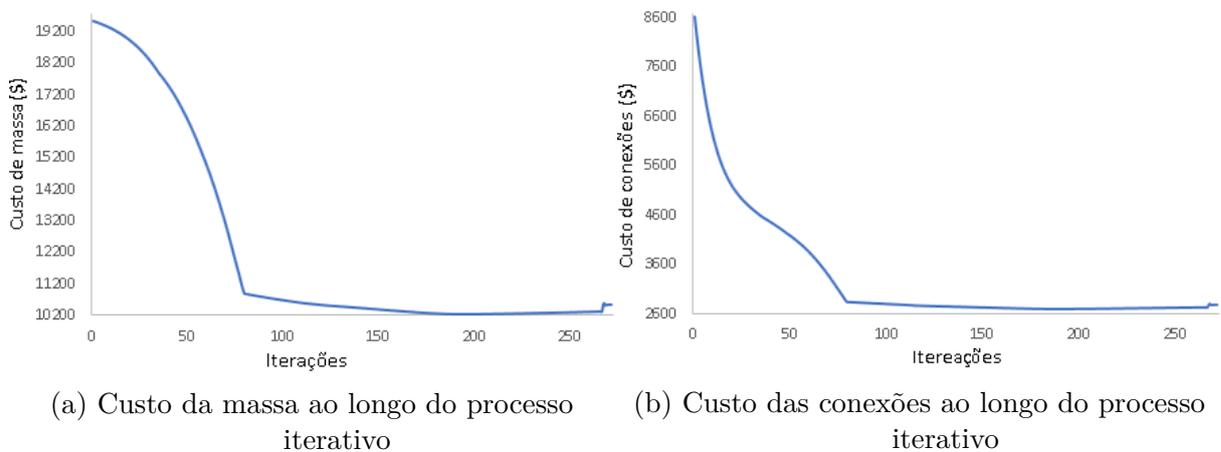
Nós	6	7	8	9	10	11	12	13
x[m]	16,982	15,168	11,260	5,000	3,626	4,831	8,739	14,343
y[m]	8,739	14,757	16,982	15,168	11,260	5,428	3,064	5,229
Nós	2	3	4	5				
z[m]	5,869	6,067	6,068	6,067				

Figura 50 – Comportamento da função objetivo ao longo do processo iterativo (a) e detalhe da região de transição entre a otimização contínua e mista (b) - domo 52 barras



Fonte: Produção do autor

Figura 51 – Custo da massa e das conexões ao longo do processo iterativo - domo 52 barras

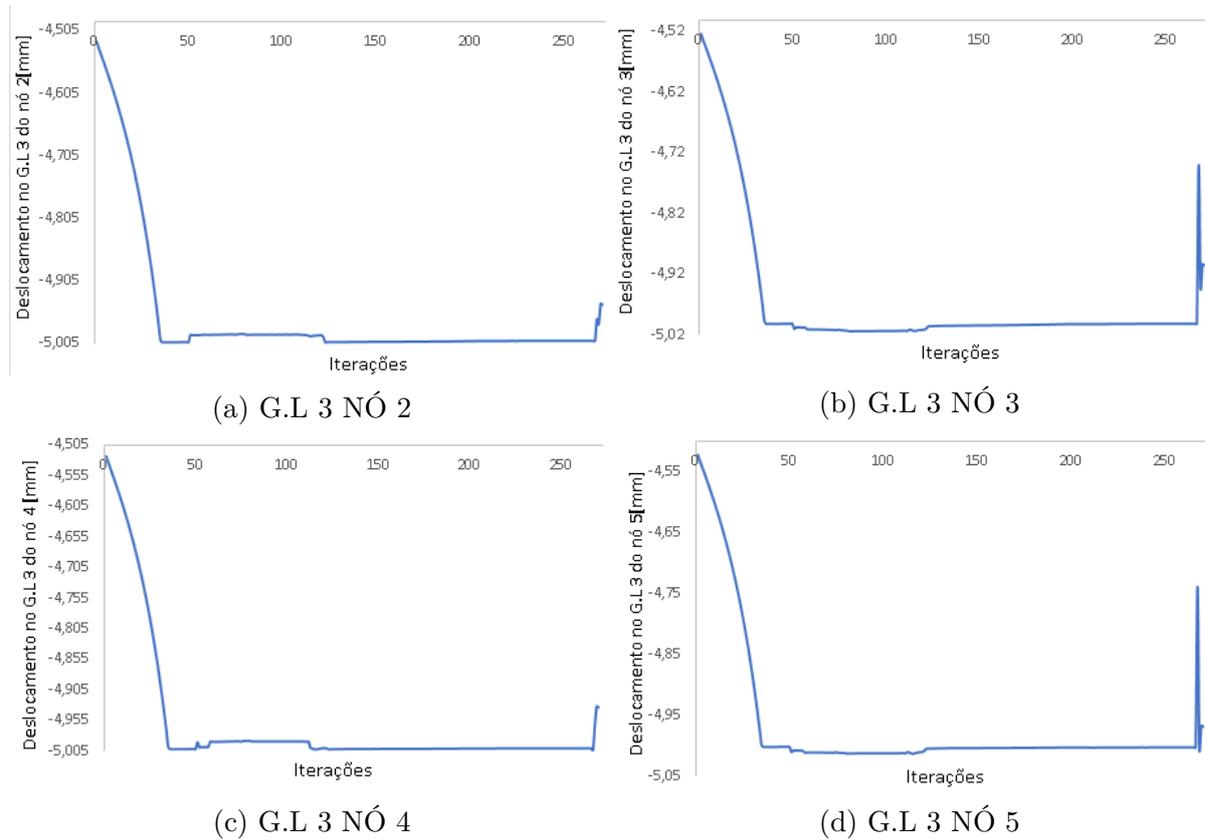


Fonte: Produção do autor

As restrições de deslocamento e de tensão impostas no problema podem ser vistas nas figuras 52 e 53, respectivamente. Pode-se observar que ambas estão ativas. Na restrição de tensão, são analisados todos os elementos, e a curva plotada, é referente aos elementos

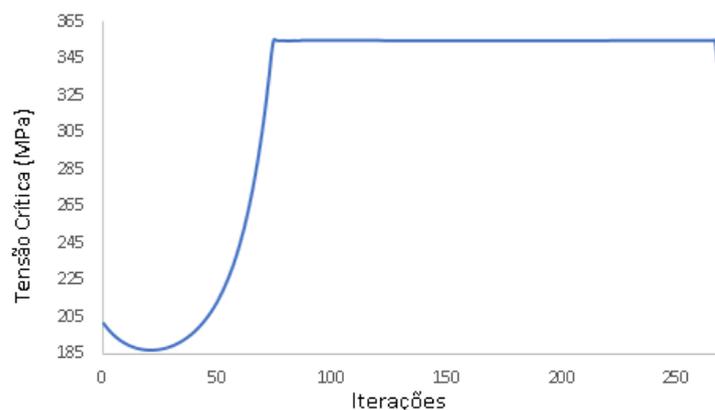
com maiores tensões. O problema teve como estimativa inicial para os fatores de fixação, conexões semirrígidas iguais a 0,90. No entanto, a partir da iteração 34, como resultado do algoritmo de otimização, tem-se uma estrutura com ligações totalmente flexíveis. A solução ótima é, na verdade, uma estrutura composta por elementos de barra, sujeitos somente a esforços axiais.

Figura 52 – Comportamento das restrições de deslocamento nos nós restrito ao longo das iterações - domo 52 barras



Fonte: Produção do autor

Figura 53 – Diagrama de convergência da restrição de tensão - domo 52 barras



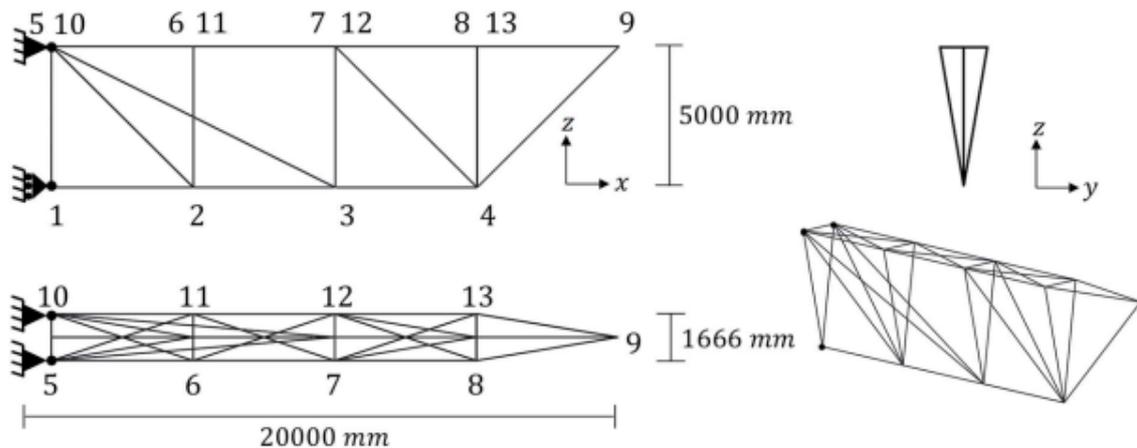
Fonte: Produção do autor

Deve-se destacar que o algoritmo de otimização aplicado no problema contínua mostrou-se muito sensível a perturbações nos dados de entrada, abortando diversas análises por levar a soluções intermediárias inviáveis. Ajustes foram necessários para obter a solução apresentada. Este ponto indica que futuramente, se deve trabalhar com um algoritmo de otimização mais robusto.

### 6.2.2 Estrutura em balanço

O segundo exemplo da abordagem proposta para variáveis mistas, consiste em uma estrutura tipo viga em balanço formada por elementos de pórtico. A estrutura é composta por 36 elementos e 13 nós, como pode ser visto na figura 54. Neste problema, os elementos têm espessura igual a  $4,75\text{mm}$  na seção tubular, constante durante todo o processo de otimização. As dimensões, para áreas de seção transversal dos elementos, foram consideradas de acordo com o catálogo comercial da empresa Arcelor Mittal S/A, o qual encontra-se no anexo D. O problema tem como estimativa inicial, a maior magnitude de área de seção transversal disponível no catálogo comercial para a espessura adotada,  $0,00319\text{m}^2$ . O problema tem como dados, módulo de elasticidade  $E=210\text{MPa}$ , módulo de cisalhamento transversal  $G=80\text{MPa}$ , massa específica  $\rho = 7,799 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$  e tensão de escoamento  $\sigma = 355\text{MPa}$ . Considerou-se o custo de material por kg como sendo unitário. As coordenadas dos elementos, podem ser conferidas no anexo B e a matriz de conectividade dos elementos, está representada na tabela 17.

Figura 54 – Estrutura em balanço baseado em Faria (2019)



Fonte: Faria (2019a)

Tabela 17 – Conectividade - estrutura em balanço

Ele	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nós	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	5	6	7	8	5	10
	2	3	4	9	6	7	8	9	11	12	13	9	10	11	12	13	11	6
Ele	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Nós	6	11	7	12	5	10	6	11	7	12	8	13	5	10	5	10	7	12
	12	7	13	8	1	1	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	4	4

Para restrição lateral de área mínima, considera-se a magnitude da menor área disponível no catalogo comercial para a espessura de  $4.75mm$ . As tolerâncias adotadas para os critérios de parada, tanto para a função objetivo como as variáveis de projeto, foram iguais a  $1 \cdot 10^{-3}$ . Foram consideradas restrições de tensão, restrição de comprimento mínimo igual a  $50mm$  em todos os elementos e de deslocamento ( $50mm$ ) no grau de liberdade 3 (translação no eixo z) do nó 9. São adotadas como variáveis de projeto todas as áreas de seção transversal dos elementos, as coordenadas X e Z dos nós 2, 3 e 4, e os seguintes fatores de fixação: 33  $\alpha_1$ , 36 (todos)  $\alpha_2$ , 33  $\alpha_3$  e 36 (todos)  $\alpha_4$ . Não foram considerados como variáveis de projeto, os fatores de fixação  $\alpha$  dos elementos 1, 5 e 9. A estimativa inicial dos fatores de fixação  $\alpha$ , é de 0,90. Com esses dados, o valor inicial da função objetivo é de \$6834,41, sendo que \$2343,28 são referentes ao custo adicional de fabricação das conexões.

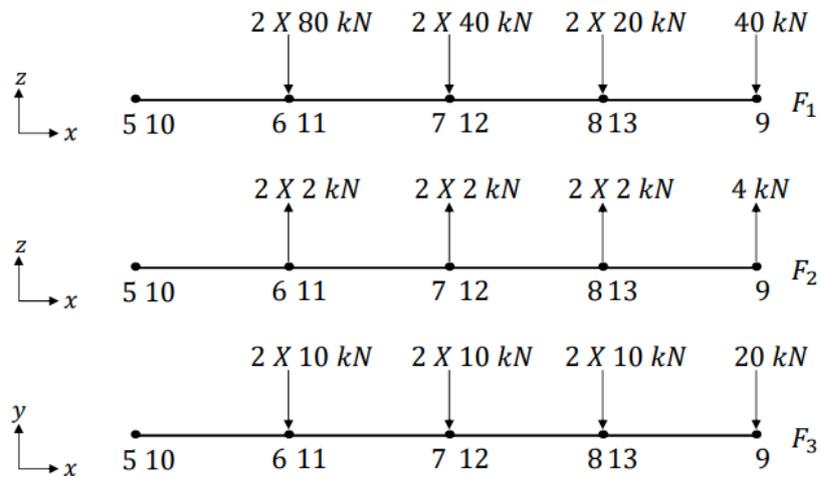
Para este exemplos consideram-se múltiplos casos de carregamento, conforme pode ser visto na tabela 18 e na figura 55. Os casos de carga aplicados foram baseados no trabalho de Faria (2019a), o qual teve como referência o trabalho de Pedersen e Nielsen (2003). No entanto, o valor das forças foi aumentando em 10%, de forma a obter restrições de deslocamento e tensões ativas. Na composição do carregamento, ( $F_1$ ) se refere a uma carga de trabalho, ( $F_2$ ) é uma carga de elevação devido à ação do vento e a ( $F_3$ ) se refere à própria carga de vento.

Tabela 18 – Composição dos casos de carga, baseados em Faria (2019a) e Pedersen e Nielsen (2003), para a estrutura em balanço

Casos de Carga	Condição de Carregamento
1	$F_1$
2	$0.5F_1 + F_3$
3	$0.5F_1 - F_3$
4	$F_2 + F_3$
5	$F_2 - F_3$

Tem-se, na figura 56, o *layout* da solução ótima encontrada. Deve-se destacar que,

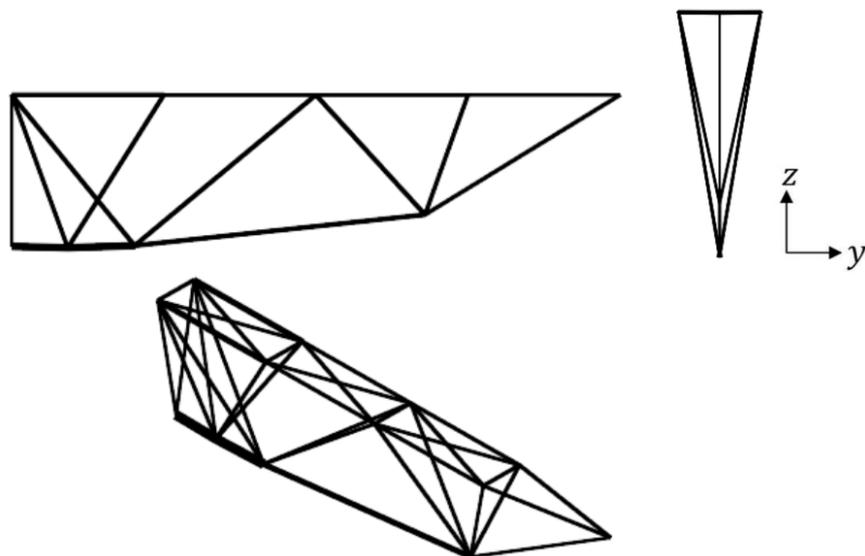
Figura 55 – composição dos casos de carga, baseados em Faria (2019a) e Pedersen e Nielsen (2003),  **aumentados em 10%** neste trabalho.



Fonte: Faria (2019a)

mesmo que as áreas de seção transversal dos elementos não fossem consideradas como sendo discretas, quando se tem uma espessura constante ao longo de todo o processo de otimização, o limite inferior das áreas para seções tubulares de parede fina não pode ser menor do que o valor restrito pela própria espessura.

Figura 56 – Solução ótima - estrutura em balanço



Fonte: Produção do autor

A tabela 19 apresenta as áreas ótimas contínuas e discretas, e as coordenadas ótimas podem ser vistas na tabela 20. Na tabela 21, têm-se os fatores de fixação ótimos encontrados pelo algoritmo de otimização. Não foram considerados como sendo variáveis de projetos os  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  dos elementos 1, 5 e 9. Note que todos os outros elementos tiveram as magnitudes das conexões projetadas para 0,01 ou muito próximo de 0,01, como por

exemplo, o elemento 14, que teve fatores de fixação projetados para 0,03. A estrutura ótima resultante, é formada por elementos de barra. A estrutura inicial é composta por elementos de pórtico, pois a estimativa inicial dos fatores de fixação é 0,90.

Tabela 19 – Áreas ótimas referentes ao estudo da estrutura em balanço

Elemento	Contínuas	Discretas	Elemento	Contínuas	Discretas
1	$0,3190 \cdot 10^{-2}$	$0,2961 \cdot 10^{-2}$	19	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
2	$0,3190 \cdot 10^{-2}$	$0,2961 \cdot 10^{-2}$	20	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
3	$0,1674 \cdot 10^{-2}$	$0,1824 \cdot 10^{-2}$	21	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
4	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	22	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
5	$0,1956 \cdot 10^{-2}$	$0,2037 \cdot 10^{-2}$	23	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
6	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	24	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
7	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	25	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
8	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	26	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
9	$0,1956 \cdot 10^{-2}$	$0,2037 \cdot 10^{-2}$	27	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
10	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	28	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
11	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	29	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
12	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	30	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
13	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	31	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
14	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	32	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
15	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	33	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
16	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	34	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
17	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	35	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$
18	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$	36	$0,1250 \cdot 10^{-2}$	$0,1255 \cdot 10^{-2}$

Tabela 20 – Coordenadas ótimas referentes ao estudo da estrutura em balanço

Nós	2	3	4
x[m]	1,843	4,040	13,588
z[m]	-0,042	0,026	1,047

O comportamento da função objetivo ao longo do processo iterativo pode ser visto na figura 57. Note que nas primeiras 15 iterações, reduz-se significativamente o custo \$. Nas iterações subsequentes, o algoritmo continua trabalhando na minimização, com menor intensidade. Quando o problema de otimização contínua é solucionado, inicia-se a otimização mista, tendo-se como ponto de partida o ótimo contínuo. Conforme descrito no capítulo de formulação para o tratamento das variáveis mistas, as variáveis de projeto área passam a ser transformadas por um conjunto discreto truncado de possibilidades, correspondentes a valores disponíveis em catálogos comerciais. O processo de otimização contínua nesse estudo levou 141 iterações para convergir, e o discreto 4. O valor ótimo

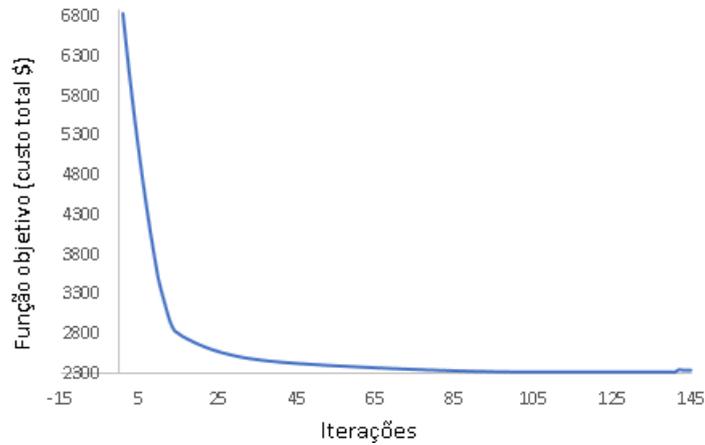
encontrado pelo algoritmo de otimização para a função objetivo foi de \$2342,20, dos quais \$416,92 são referentes ao custo adicional das ligações e \$1925,28 ao custo de material.

Tabela 21 – Fatores de fixação ( $\alpha$ ) ótimos referentes ao estudo da estrutura em balanço

Elemento	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	Elemento	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
1	-	0,01	-	0,01	19	0,01	0,01	0,01	0,01
2	0,01	0,01	0,01	0,01	20	0,02	0,01	0,01	0,01
3	0,01	0,01	0,01	0,01	21	0,01	0,01	0,01	0,01
4	0,01	0,01	0,01	0,01	22	0,01	0,01	0,01	0,01
5	-	0,01	-	0,01	23	0,01	0,01	0,01	0,01
6	0,02	0,01	0,01	0,01	24	0,01	0,01	0,01	0,01
7	0,01	0,01	0,01	0,01	25	0,01	0,01	0,01	0,01
8	0,01	0,01	0,01	0,01	26	0,01	0,01	0,01	0,01
9	-	0,01	-	0,01	27	0,01	0,01	0,01	0,01
10	0,02	0,01	0,01	0,01	28	0,01	0,01	0,01	0,01
11	0,01	0,01	0,01	0,01	29	0,01	0,01	0,01	0,01
12	0,01	0,01	0,01	0,01	30	0,01	0,01	0,01	0,01
13	0,01	0,01	0,01	0,01	31	0,01	0,01	0,01	0,01
14	0,03	0,03	0,02	0,01	32	0,01	0,01	0,01	0,01
15	0,01	0,01	0,01	0,01	33	0,01	0,01	0,01	0,01
16	0,01	0,01	0,01	0,01	34	0,01	0,01	0,01	0,01
17	0,01	0,01	0,01	0,01	35	0,01	0,01	0,01	0,01
18	0,01	0,01	0,01	0,01	36	0,01	0,01	0,01	0,01

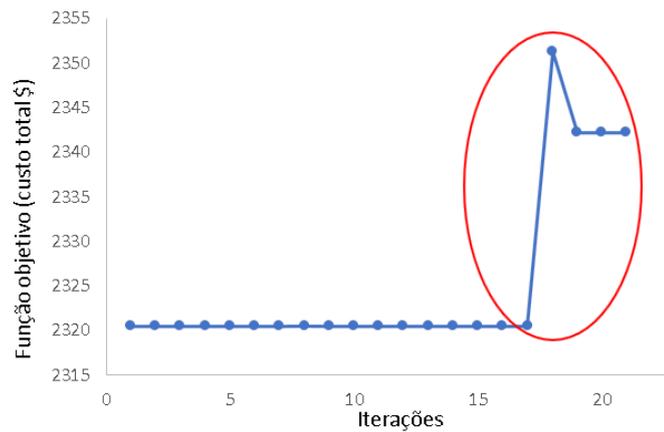
Pode-se ver detalhadamente a região de transição entre a otimização contínua para a discreta na figura 58. Quando inicia-se a análise mista, há um aumento na função objetivo. Os gráficos referentes à minimização do custo de massa e conexões podem ser vistos na figura 59. Para este problema, fixou-se o custo das conexões em uma faixa entre 17 – 60% do custo de material. Pode-se ver que no início do processo de otimização, o custo das conexões representava 34,28% do custo total e ao fim do processo iterativo, representa 17,80% no custo total.

Figura 57 – Comportamento da função objetivo (custo \$) durante o processo de minimização- estrutura em balanço



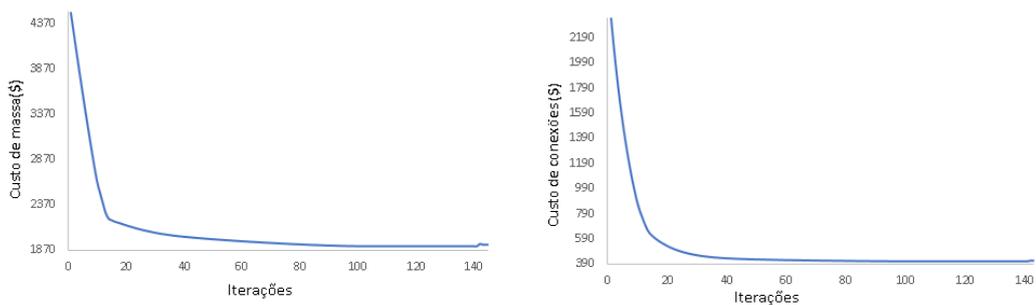
Fonte: Produção do Autor

Figura 58 – Detalhamento da região de transição entre a otimização contínua para a discreta- estrutura em balanço.



Fonte: Produção do autor

Figura 59 – Comportamento do custo de massa (a) e custo das conexões (b) ao longo do processo de otimização- estrutura em balanço



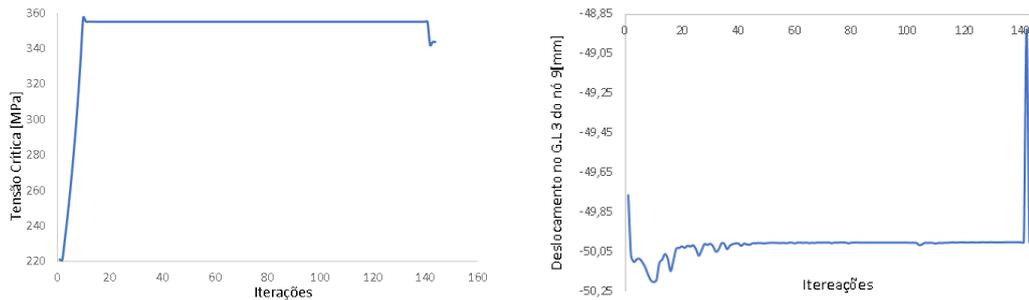
(a) Custo da Massa ao Longo do Processo Iterativo

(b) Custo das Conexões ao Longo do Processo Iterativo

Fonte: Produção do autor

Nas figuras 60a e 60b têm-se os diagramas de convergência da restrição de tensão e da restrição de deslocamento em Z do nó 9, referente ao caso de carga 1. Verifica-se que, ao final, ambas as restrições estão ativas. As restrições de deslocamento, no mesmo grau de liberdade, para os casos de carga 2, 3, 4 e 5, podem ser vistos na figura 61. Pode-se observar nas curvas dos diagramas que quando se entra no processo de otimização discreta, tem-se um deslocamento relativamente menor. Isso ocorre porque há um aumento na área de seção transversal dos elementos.

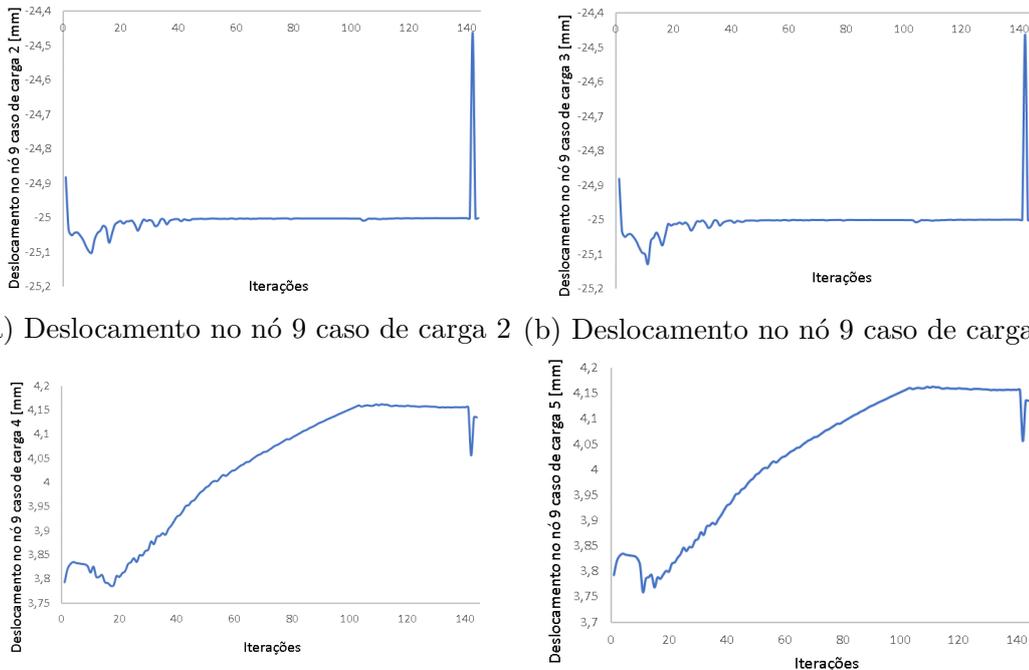
Figura 60 – Diagramas de convergência deslocamento e tensão- estrutura em balanço.



(a) Diagrama de convergência do elemento com maior tensão, a cada iteração. (b) Diagrama de convergência do deslocamento no nó 9 caso de carga 1

Fonte: Produção do autor

Figura 61 – Comportamento das restrições de deslocamento nos nós restrito ao longo das iterações - estrutura em balanço



(a) Deslocamento no nó 9 caso de carga 2 (b) Deslocamento no nó 9 caso de carga 3  
 (c) Deslocamento no nó 9 caso de carga 4 (d) Deslocamento no nó 9 caso de carga 5

Fonte: Produção do autor

## 7 CONCLUSÃO

Dentro da revisão bibliográfica efetuada, a utilização de uma função *Heaviside* regularizada para os comprimentos dos elementos é inédita. O estudo realizado neste trabalho, fez uso de implementação preliminar desenvolvida por Faria(2019b), sendo esta aprimorada para a obtenção de melhores resultados.

A introdução de parâmetros  $\beta$  independentes nas funções *Heaviside* regularizadas para áreas e comprimentos dos elementos mostrou-se eficaz para obter soluções com maior redução no número de elementos. Isso ficou evidente através dos três exemplos realizados. Além disso, a utilização de uma estratégia de atualização crescente dos parâmetros  $\beta$  permitiu a relaxação inicial do problema de otimização de topologia evitando desta forma, a finalização prematura do processo de otimização.

Dentro da revisão bibliográfica efetuada, este é o primeiro trabalho a otimizar, com algoritmo baseado em gradientes, um problema de otimização de layout de pórticos espaciais tubulares com ligações semirrígidas e função falha incluindo o efeito do cisalhamento transversal. O uso de algoritmos de otimização sem derivada tem dificuldade devido ao grande número de variáveis de projeto envolvidas. Desta forma, aplicar neste trabalho metodologias baseadas em meta heurísticas seria inviável. A otimização do problema de variáveis mistas tomando como partida a solução do problema contínuo mostrou-se eficaz e eficiente. Verificou-se, nos exemplos estudados, que o simples arredondamento das áreas contínuas para as áreas discretas não fornece a melhor solução possível. A abordagem apresentada lidou bem com este fato.

Através dos exemplos apresentados nesta pesquisa, fica evidente que ambas as contribuições deste trabalho são relevantes para aproximar as soluções ótimas obtidas de situações práticas na engenharia.

Sugere-se o desenvolvimento de trabalhos futuros, abordando-se os seguintes tópicos:

- Implementação de restrições de flambagem local e global;
- Adaptação ou substituição do algoritmo de programação linear contínuo (utilizado aqui o DLPRS da biblioteca numérica IMSL) por outro mais robusto e eficiente.

## REFERÊNCIAS

- ACHTZIGER, W. On simultaneous optimization of truss geometry and topology. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 33, n. 4-5, p. 285–304, 2007. Citado na página 23.
- ALI, N.B.H; SELLAMI, M; CUTTING-DECELLE, A; MANGIN, J.C. Multi-stage production cost optimization of semi-rigid steel frames using genetic algorithms. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 31, n. 11, p. 2766–2778, 2009. Citado na página 21.
- ALMEIDA, F.S de; VARGAS, G.D; BRAUN, E. Aplicação do algoritmo harmony search no dimensionamento de perfis e soldados. **Revista da Estrutura de Aço-REA [recurso eletrônico]**. Rio de Janeiro, RJ. Vol. 8, n. 2 (ago. 2019), p. 294-310, 2019. Citado na página 43.
- ARORA, J.S. **Optimization of structural and mechanical systems**. [S.l.]: World Scientific, 2007. Citado na página 44.
- ARTAR, M; DALOĞLU, A.T. Optimum weight design of steel space frames with semi-rigid connections using harmony search and genetic algorithms. **Neural Computing and Applications**, Springer, v. 29, n. 11, p. 1089–1100, 2018. Citado na página 29.
- ASADPOURE, A; GUEST, J.K; VALDEVIT, L. Incorporating fabrication cost into topology optimization of discrete structures and lattices. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 51, n. 2, p. 385–396, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 18, 23, 26, 27, 45, 47, 51 e 54.
- BALAS, E. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. **Operations Research, INFORMS**, v. 13, n. 4, p. 517–546, 1965. Citado na página 44.
- BENDSOE, M. P; BEN-TAL, A; ZOWE, J. Optimization methods for truss geometry and topology design. **Structural optimization**, Springer, v. 7, n. 3, p. 141–159, 1994. Citado na página 23.
- BENNAGE, W.A; DHINGRA, A.K. Optimization of truss topology using tabu search. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 38, n. 23, p. 4035–4052, 1995. Citado na página 40.
- CHAN, S.L; CHUI, P.T. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. [S.l.]: Elsevier, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- CHENG, M.Y; PRAYOGO, D; WU, Y.W; LUKITO, M.M. A hybrid harmony search algorithm for discrete sizing optimization of truss structure. **Automation in Construction**, Elsevier, v. 69, p. 21–33, 2016. Citado na página 43.
- CSÉBFALVI, A. Optimal design of frame structures with semi-rigid joints. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 51, n. 1, p. 9–15, 2007. Citado na página 29.
- DORN, W. Automatic design of optimal structures. **J. de Mecanique**, v. 3, p. 25–52, 1964. Citado na página 23.

FARIA, F.C. **Layout and Connections Optimization of Steel Tubular Space Frames Considering Manufacturing Costs**. Dissertação (Mestrado) — College of Technological Science of Santa Catarina State University, Joinville, Santa Catarina, 2019. Citado 29 vezes nas páginas 6, 7, 10, 11, 15, 19, 22, 23, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 48, 50, 52, 58, 60, 82, 83, 84, 89, 90 e 91.

FARIA, F.C. **Relatório Interno Com o Computo das Sensibilidades**. [S.l.]: Internal report, LAMEC – Laboratory of Computational Mechanics, Department of Mechanical Engineering, Santa Catarina State University, 2019., 2019. Citado 3 vezes nas páginas 47, 49 e 61.

GALILEI, G. **Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica ed i movimenti locali**. [S.l.]: Gli Elsevirii, 1990. Citado na página 14.

GEEM, Z.W; KIM, J.H; LOGANATHAN, G.V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. **Simulation**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 76, n. 2, p. 60–68, 2001. Citado na página 43.

GOMORY, R.E. **All-Integer Integer Programming Algorithm"appearing in Industrial Scheduling, John F. Muth and Gerald L. Thompson**. [S.l.]: Prentice-Hall, New York, 1963. Citado na página 44.

GUERRA, C. **Otimização paramétrica de estruturas treliçadas por algoritmos genéticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2008. Citado na página 41.

GUEST; ASADPOURE, A; HA, S.H. Eliminating beta-continuation from heaviside projection and density filter algorithms. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 44, n. 4, p. 443–453, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

HAFTKA, R.T; GURDAL, Z. **Elements of structural optimization**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1996. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

HAGISHITA, T; OHSAKI, M. Topology optimization of trusses by growing ground structure method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 37, n. 4, p. 377–393, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 26.

HASANÇEBI, O. Cost efficiency analyses of steel frameworks for economical design of multi-storey buildings. **Journal of constructional steel research**, Elsevier, v. 128, p. 380–396, 2017. Citado na página 22.

HASANÇEBI, O; ÇARBAŞ, S; DOĞAN, E; ERDAL, F; SAKA, M.P. Performance evaluation of metaheuristic search techniques in the optimum design of real size pin jointed structures. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 87, n. 5-6, p. 284–302, 2009. Citado na página 41.

HAVELIA, P. **A Ground Structure Method to Optimize Topology and Sizing of Steel Frame Structures to Minimize Material, Fabrication and Erection Cost**, M. Eng. Tese (Doutorado) — Thesis, Stanford University, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.

- HE, L; GILBERT, M. Rationalization of trusses generated via layout optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 52, n. 4, p. 677–694, 2015. Citado na página 23.
- IMAI, K. Structural optimization to include material selection. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 19, n. 2, p. 217–235, 1983. Citado na página 21.
- IRLES, R.M; IRLES, F.M. Shear–bending–torsion elastic interaction diagrams in circular steel sections. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 38, n. 3, p. 435–443, 2001. Citado na página 34.
- JARMAI, K; FARKAS, J. Cost calculation and optimisation of welded steel structures. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 50, n. 2, p. 115–135, 1999. Citado na página 21.
- JOHN, K.V; RAMAKRISHNAN, C.V; SHARMA, K.G. Minimum weight design of trusses using improved move limit method of sequential linear programming. **Computers e Structures**, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 583–591, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 40.
- JUANG, D.S; CHANG, W.T. A revised discrete lagrangian-based search algorithm for the optimal design of skeletal structures using available sections. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 31, n. 3, p. 201–210, 2006. Citado na página 41.
- KARTAL, M.E; BASAGA, H.B; BAYRAKTAR, A. Effects of semi-rigid connection on structural responses. **Electronic journal of structural Engineering**, EJSE International Ltd., University of Melbourne Grattan St. Parkville, v. 10, n. 10, p. 22–35, 2010. Citado na página 29.
- KRIPKA, M. Discrete optimization of trusses by simulated annealing. **Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering**, SciELO Brasil, v. 26, n. 2, p. 170–173, 2004. Citado na página 40.
- LEMONGE, A.C.C; BARBOSA, H.J.C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 59, n. 5, p. 703–736, 2004. Citado na página 40.
- LIPSON, S.L; GWIN, L.B. Discrete sizing of trusses for optimal geometry. **Journal of the Structural Division**, v. 103, n. 5, 1977. Citado na página 21.
- MARTINS, L.P; CARDOSO, E.L. **Estudo de Estratégias de Programação Inteira Aplicado a Solução de Problemas Não Convexos**. [S.l.]: Internal report, LAMEC – Laboratory of Computational Mechanics, Department of Mechanical Engineering, Santa Catarina State University, 2012., 2012. Citado na página 42.
- MAXWELL, J.C. I. on reciprocal figures, frames, and diagrams of forces. **Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 26, n. 1, p. 1–40, 1870. Citado na página 14.

MELLO, W.L. **Análise de porticos metálicos planos com conexões semirrígidas considerando a não linearidade física e geométrica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, SP, 1999. Citado na página 29.

MICHELL, A.G.M. Lviii. the limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor e Francis, v. 8, n. 47, p. 589–597, 1904. Citado na página 14.

MONFORTON, G.R. **Matrix analysis of frames with semi-rigid connections**. 1962. Citado na página 30.

MOSES, F; ONODA, S. Minimum weight design of structures with application to elastic grillages. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 1, n. 4, p. 311–331, 1969. Citado na página 34.

MUÑOZ-ROJAS, P.A. **Otimização do Layout de Treliças Espaciais Não-Lineares**. [S.l.]: Relatório Interno GMAp 08/00, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS, pp. 1-15, 2000, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 23, 63 e 64.

NIU, B; LIU, X; WALLIN, M; WADBRO, E. Topology optimization of compliant mechanisms considering strain variance. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 62, n. 3, p. 1457–1471, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 66.

PAVLOVIC, L; KRAJNC, A; BEG, D. Cost function analysis in the structural optimization of steel frames. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 28, n. 4, p. 286–295, 2004. Citado na página 22.

PEDERSEN, N.L; JORGENSEN, L. Minimum mass design of elastic frames subjected to multiple load cases. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Computers & Structures, v. 18, n. 5-6, p. 147–157, 1984. Citado na página 34.

PEDERSEN, N.L; NIELSEN, A.K. Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 25, n. 5-6, p. 436–445, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 34, 90 e 91.

PINHEIRO, L. Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos. Ouro Preto, Minas Gerais, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

RAJEEV, S; KRISHNAMOORTHY, C.S. Discrete optimization of structures using genetic algorithms. **Journal of structural engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 118, n. 5, p. 1233–1250, 1992. Citado na página 40.

RANGEL, J.V.S. **Dimensionamento Ótimo de Pórticos Planos de Aço com Ligações Semi-Rígidas Considerando Análise Não-Linear Geométricas**. Tese (Doutorado) — MSc. Dissertação, Departamento de Engenharia Civil- Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Brasil, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 43.

RAO, S. **Engineering optimization: theory and practice**. [S.l.]: John Wiley e Sons, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 46.

- RIZZO, E. **Optimization Methods Applied to the preliminary design of innovative non conventional aircraft configurations**. [S.l.]: Edizioni ETS, 2009. Citado na página 14.
- SAGIROGLU, M; ABDULKADIR, C.A. Design and analysis of non-linear space frames with semirigid connections. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Steel and Composite Structures, v. 18, n. 5-6, p. 1405–1421, 2015. Citado na página 34.
- SAKA, M.P. Optimum design of pin-jointed steel structures with practical applications. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 116, n. 10, p. 2599–2620, 1990. Citado na página 34.
- SAVIO, A.A Del. **Modelagem Computacional de Estruturas de Aço com Ligações Semi-Rígidas**. Tese (Doutorado) — MSc. Dissertation, Civil Engineering Department—PUC-Rio, Brazil,(in Portuguese), 2004. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- SCHEVENELS, M; LAZAROV, B.S; SIGMUND, O. Robust topology optimization accounting for spatially varying manufacturing errors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 200, n. 49-52, p. 3613–3627, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 66.
- SEKULOVIC, M; SALATIC, R. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. **Computers e Structures**, Elsevier, v. 79, n. 11, p. 1097–1107, 2001. Citado na página 29.
- SILVA, E.C.N. Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos. **Apostila, Departamento de Engenharia Mecatrônica e Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da USP**, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.
- SILVA, F.E.C. **Otimização dimensional, de forma e topologica de estruturas treliçadas utilizando um algoritmo híbrido**. Curitiba, Paraná: [s.n.], 2009. Citado na página 43.
- SIMOES, L.M.C. Optimization of frames with semi-rigid connections. **Computers e structures**, Elsevier, v. 60, n. 4, p. 531–539, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 29, 30 e 34.
- SONMEZ, M. Discrete optimum design of truss structures using artificial bee colony algorithm. **Structural and multidisciplinary optimization**, Springer, v. 43, n. 1, p. 85–97, 2011. Citado na página 42.
- SOUZA, R.P. Otimização de treliças com restrições de falha combinando técnicas de programação de algoritmos contínuos e discretos. Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 41.
- TORII, A.J; LOPEZ, R.I. H; MIGUEL, L.F. Design complexity control in truss optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 54, n. 2, p. 289–299, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 18, 23, 27, 28, 45 e 47.
- VIGH, L.G; DUNAI, L. Finite element modelling and analysis of bolted joints of 3d tubular structures. **Computers & structures**, Elsevier, v. 82, n. 23-26, p. 2173–2187, 2004. Citado na página 18.

WANG, C; QIAN, X. Simultaneous optimization of build orientation and topology for additive manufacturing. **Additive Manufacturing**, Elsevier, v. 34, p. 101246, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 66.

WANG, C; ZHANG, W; ZHOU, L; GAO, T; ZHU, J. Topology optimization of self-supporting structures for additive manufacturing with b-spline parameterization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 374, p. 113599, 2021. Citado na página 49.

WILDEMANN, F; MUÑOZ-ROJAS, P. A. **Otimização de topologia/layout de treliças espaciais com restrições de tensão, deslocamentos e estabilidade local**. [S.l.]: Academic Day-UDESC, Florianópolis,2004, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 25.

XU, L; GRIERSON, D.E. Computer-automated design of semirigid steel frameworks. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 119, n. 6, p. 1740–1760, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.

## ANEXO A-COORDENADAS DOS NÓS DOMO

Tabela 22 – Coordenadas dos nós do domo

Nó	Coord X[m]	Coord Y [m]	Coord Z [m]
1	10,0	10,0	9,00
2	13,5	10,00	6,00
3	10,00	13,50	6,00
4	6,50	10,00	6,00
5	10,00	6,50	6,00
6	16,50	10,00	3,00
7	14,70	14,70	3,00
8	10,00	16,50	3,00
9	5,30	14,70	3,00
10	3,50	10,00	3,00
11	5,30	5,30	3,00
12	10,00	3,50	3,00
13	14,70	5,30	3,00
14	20,00	10,00	0,00
15	17,10	17,10	0,00
16	10,00	20,00	0,00
17	2,90	17,10	0,00
18	0,00	10,00	0,00
19	2,90	2,90	0,00
20	10,00	10,00	0,00
21	17,10	2,90	0,00

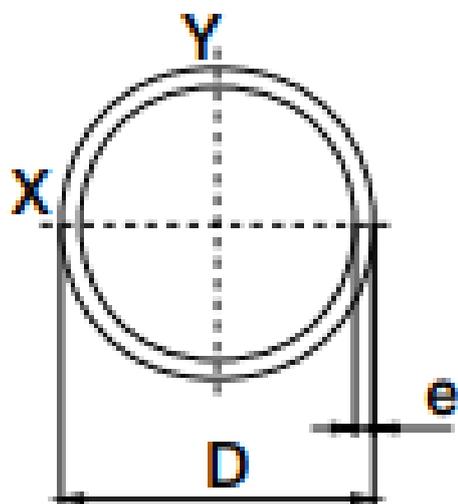
**ANEXO B-COORDENADAS DOS NÓS ESTRUTURA EM BALANÇO**

Tabela 23 – Coordenadas dos nós estrutura em balanço

Nó	Coord X[m]	Coord Y [m]	Coord Z [m]
1	0,00	0,83	0,00
2	5,00	0,83	0,00
3	10,00	0,83	0,00
4	15,00	0,83	0,00
5	0,00	0,00	5,00
6	5,00	0,00	5,00
7	10,00	0,00	5,00
8	15,00	0,00	5,00
9	20,00	0,83	5,00
10	0,00	1,66	5,00
11	5,00	1,66	5,00
12	10,00	1,66	5,00
13	15,00	1,66	5,00

## ANEXO C

Figura 62 – Catalogo Tupper



$e =$  espessura

$p =$  peso teórico



Figura 64 – Catalogo Tupper

Ø 203,20 - 8"		Ø 219,10 - 8.5/8"		Ø 244,48 - 9.5/8"		Ø 254,00 - 10"		Ø 273,05 - 10.3/4"		Ø 323,80 - 12.3/4"		Ø 339,70 - 13.3/8"	
3,75 a 9,50 mm		3,75 a 16,00 mm		4,75 a 16,00 mm		4,75 a 16,00 mm		5,30 a 16,00 mm		6,30 a 16,00 mm		6,30 a 16,00 mm	
e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p	e	p
10	125,113	4,25	135,112	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	132,306	4,50	142,894	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	139,481	4,75	150,656	4,75	168,495	4,75	175,186	-	-	-	-	-	-
5,00	146,637	5,00	158,401	5,00	177,178	5,00	184,221	-	-	-	-	-	-
5,30	155,200	5,30	167,670	5,30	187,573	5,30	195,039	5,30	209,979	-	-	-	-
5,60	163,737	5,60	176,912	5,60	197,942	5,60	205,831	5,60	221,616	-	-	-	-
6,30	183,551	6,30	198,373	6,30	222,033	6,30	230,907	6,30	248,666	6,30	295,975	6,30	310,797
7,10	206,019	7,10	222,723	7,10	249,387	7,10	259,388	7,10	279,402	7,10	332,719	7,10	349,423
8,00	231,068	8,00	249,890	8,00	279,934	8,00	291,203	8,00	313,753	8,00	373,829	8,00	392,651
8,50	244,881	8,50	264,879	8,50	296,801	8,50	308,774	8,50	332,734	8,50	396,564	8,50	416,582
9,00	258,620	9,00	279,795	9,00	313,594	9,00	326,272	9,00	351,641	9,00	419,226	9,00	440,400
9,50	272,285	9,50	294,636	9,50	330,313	9,50	343,695	9,50	370,474	9,50	441,813	9,50	464,164
10,00	285,876	10,00	309,403	10,00	346,958	10,00	361,044	10,00	389,232	10,00	464,327	10,00	487,854
10,60	302,088	10,60	327,026	10,60	366,834	10,60	381,766	10,60	411,645	10,60	491,245	10,60	516,184
11,20	318,193	11,20	344,543	11,20	386,604	11,20	402,381	11,20	433,952	11,20	518,057	11,20	544,408
12,00	339,500	12,00	367,733	12,00	412,798	12,00	429,702	12,00	463,528	12,00	553,641	12,00	581,873
12,70	357,989	12,70	387,868	12,70	435,562	12,70	453,452	12,70	489,251	12,70	584,621	12,70	614,500
13,20	371,106	13,20	402,162	13,20	451,734	13,20	470,328	13,20	507,537	13,20	606,661	13,20	637,717
14,00	391,940	14,00	424,878	14,00	477,455	14,00	497,176	14,00	536,639	14,00	641,771	14,00	674,709
15,00*	417,716	15,00*	453,007	15,00*	509,339	15,00*	530,469	15,00*	572,751	15,00*	685,392	15,00*	720,683
16,00*	443,197	16,00*	480,840	16,00*	540,927	16,00*	563,466	16,00*	608,567	16,00*	728,718	16,00*	766,361

## ANEXO D

Figura 65 – Catálogo Arcelor Mital

Peso (kg/6m)										
Diâmetro (mm)	Espessura (mm)									
	1,50	1,90	2,00	2,25	2,65	3,00	3,35	3,75	4,25	4,75
80,00	17,60	22,20	23,50	26,40	30,90	34,80	38,70	43,10	-	-
88,90	19,60	24,70	26,20	29,40	34,50	38,90	43,20	48,20	54,70	60,30
101,60	22,40	28,30	30,10	33,70	39,60	44,60	49,60	55,30	62,40	69,40
114,30	-	-	33,90	38,00	44,60	50,40	56,10	62,50	70,50	78,50
127,00	28,10	35,50	37,70	42,30	49,70	56,10	62,50	69,70	78,70	87,60
132,00	-	-	-	44,00	51,70	58,40	65,00	72,50	81,90	91,20
141,30	-	-	-	47,20	55,40	62,60	69,70	77,80	87,90	97,80
152,40	-	-	-	-	59,90	67,60	75,30	84,10	95,00	105,80
165,10	-	-	-	-	65,00	73,40	81,80	91,30	103,00	114,90
168,30	-	-	-	-	66,20	74,80	83,40	93,10	105,20	117,20
203,20	-	-	-	-	80,20	90,60	101,00	112,80	127,60	142,20
219,10	-	-	-	-	-	-	-	121,80	137,80	153,60

\*Pode ser fornecido em tamanho especial, mediante consulta

### Legenda

- Laminado a Frio / Galvanizado
- Laminado a Frio / Galvanizado / Laminado a Quente
- Laminado a Quente

## ANEXO E - INTERFACE PARA INTEGRAÇÃO DO PROGRAMA DESENVOLVIDO COM O LPSOLVE

Para maiores esclarecimentos ao leitor com relação aos procedimentos realizados para interfacear o programa desenvolvido com o algoritmo LPSOLVE (segundo o fluxograma da figura 33), será apresentado um exemplo acadêmico.

Seja o problema de otimização

$$\text{Min} \quad -3x_1 - 2x_2 \quad (102)$$

$$\text{s.t} \quad 1x_1 - 1x_2 \leq 5 \quad (103)$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 50 \quad (104)$$

O problema definido acima, pode ser solucionado de três maneiras:

- $x_1$  e  $x_2$  variáveis contínuas;
- $x_1$  variável discreta e  $x_2$  contínua;
- $x_1$  e  $x_2$  variáveis discretas

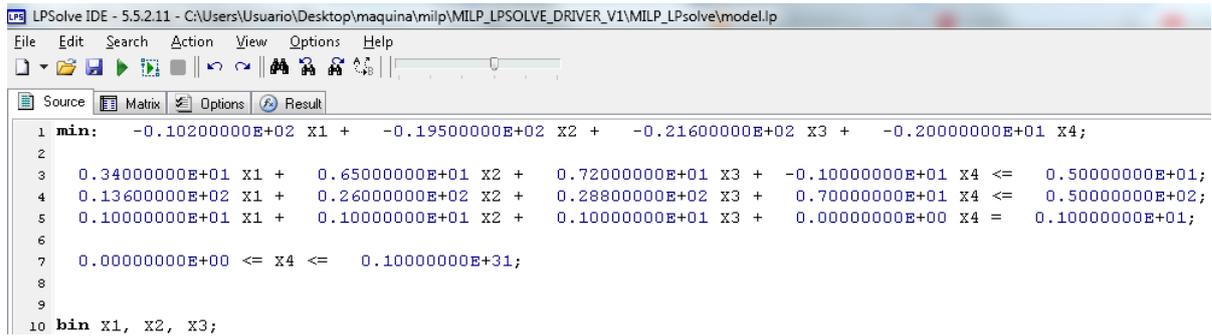
O conjunto discreto de variáveis de projeto é dado por  $\{3, 4; 6, 5; 7, 2\}$ .

### PRIMEIRO CASO: $x_1$ DISCRETA E $x_2$ CONTÍNUA

O primeiro passo do algoritmo, é a leitura dos dados do problema (coeficientes da função objetivo, das restrições e demais dados de entrada). Posteriormente, os dados são preparados para o lp solve. Na rotina de preparo, para cada variável discreta é feita a conversão  $x_i = y_{i1}d_{i1} + y_{i2}d_{i2} + y_{i3}d_{i3}$ , com  $y_{ik}$  binárias e são impostas as restrições que  $\sum_{i=1}^3 y_{ik} = 1$ , de forma que apenas uma seção discreta seja associada a cada elemento. Esta etapa (preparação) é onde começa efetivamente o processo de organização da informação para solução do algoritmo de otimização mista com o lp solve. Um detalhe importante, é que as variáveis discretas devem ser as primeiras no conjunto de variáveis de projeto.

O segundo passo, é a criação de um arquivo de entrada para o lp solve. Uma subrotina do algoritmo foi desenvolvida para criar este arquivo de entrada. Para o exemplo que está sendo ilustrado, o arquivo de entrada gerado por ser visto na figura 66.

Figura 66 – arquivo de entrada para o lp solve com uma variável discreta e uma contínua



```

1 min: -0.10200000E+02 X1 + -0.19500000E+02 X2 + -0.21600000E+02 X3 + -0.20000000E+01 X4;
2
3 0.34000000E+01 X1 + 0.65000000E+01 X2 + 0.72000000E+01 X3 + -0.10000000E+01 X4 <= 0.50000000E+01;
4 0.13600000E+02 X1 + 0.26000000E+02 X2 + 0.28800000E+02 X3 + 0.70000000E+01 X4 <= 0.50000000E+02;
5 0.10000000E+01 X1 + 0.10000000E+01 X2 + 0.10000000E+01 X3 + 0.00000000E+00 X4 = 0.10000000E+01;
6
7 0.00000000E+00 <= X4 <= 0.10000000E+31;
8
9
10 bin X1, X2, X3;

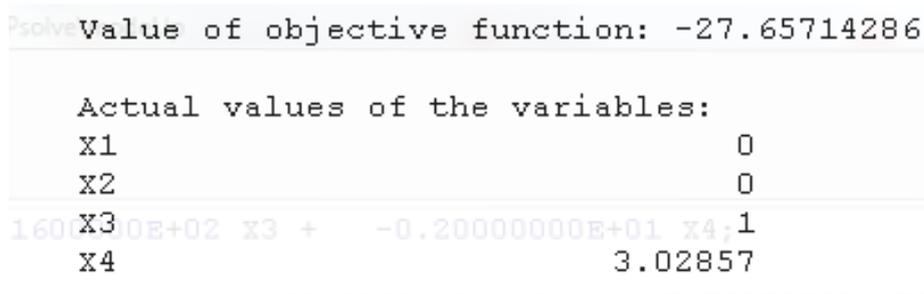
```

Fonte: Produção do autor

Na função objetivo, tem-se três variáveis de projeto adicionais. Trata-se da transformação da variável de projeto área pelas variáveis  $y_{ik}$ . Note na figura 66, a terceira restrição. Ela serve para que apenas uma variável de transformação  $y_{ik}$  seja igual a 1. Conseqüentemente, apenas uma seção discreta é associada a cada elemento.

O terceiro passo, é a otimização através do lp solve gravando o resultado num arquivo de saída, aqui nomeado como 'output', o qual pode ser visto na figura 67. Pode-se ver nessa figura, que a solução obtida para  $x_1$  é 7.2 (terceira opção da tabela de possibilidades),  $x_1$  é 3,02857 e tem como função objetivo  $-27,6571$ . Na figura 67, as variáveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são referentes às variáveis de transformação binárias  $y_{ik}$  e a variável  $X_4$  é relacionada á variável contínua  $x_2$ .

Figura 67 – arquivo de saída com uma variável discreta e uma contínua.



```

Solve Value of objective function: -27.65714286

Actual values of the variables:
X1          0
X2          0
X3          1
X4          3.02857

```

Fonte: Produção do autor

## SEGUNDO CASO: $x_1$ E $x_2$ DISCRETAS

Neste caso, pode-se ver na figura 69 que  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são referentes à variável discreta  $x_1$ , e  $X_4$ ,  $X_5$  e  $X_6$  respectivas à variável  $x_2$ . O valor da função objetivo encontrado pelo algoritmo de otimização foi de  $-26,30$ , e para as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  6,5 e 3,4 respectivamente.

Figura 68 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis discretas

```

1 min: -0.102000000E+02 X1 + -0.195000000E+02 X2 + -0.216000000E+02 X3 + -0.680000000E+01 X4 + -0.130000000E+00 X5 + -0.144000000E+02 X6;
2 0.340000000E+01 X1 + 0.650000000E+01 X2 + 0.720000000E+01 X3 + 0.000000000E+00 X4 + 0.000000000E+00 X5 + 0.000000000E+00 X6 >= 0.000000000E+00;
3 0.000000000E+00 X1 + 0.000000000E+00 X2 + 0.000000000E+00 X3 + 0.340000000E+01 X4 + 0.650000000E+01 X5 + 0.720000000E+01 X6 >= 0.000000000E+00;
4 0.340000000E+01 X1 + 0.650000000E+01 X2 + 0.720000000E+01 X3 + -0.340000000E+01 X4 + -0.650000000E+01 X5 + -0.720000000E+01 X6 <= 0.500000000E+01;
5 0.136000000E+02 X1 + 0.260000000E+02 X2 + 0.288000000E+02 X3 + 0.238000000E+02 X4 + 0.455000000E+02 X5 + 0.504000000E+02 X6 <= 0.500000000E+02;
6 0.100000000E+01 X1 + 0.100000000E+01 X2 + 0.100000000E+01 X3 + 0.000000000E+00 X4 + 0.000000000E+00 X5 + 0.100000000E+01 X6 = 0.100000000E+01;
7 0.000000000E+00 X1 + 0.000000000E+00 X2 + 0.000000000E+00 X3 + 0.100000000E+01 X4 + 0.100000000E+01 X5 + 0.100000000E+01 X6 = 0.100000000E+01;
8 0.000000000E+00 X1 + 0.000000000E+00 X2 + 0.000000000E+00 X3 + 0.000000000E+00 X4 + 0.000000000E+00 X5 + 0.000000000E+00 X6 = 0.000000000E+00;
9
10
11
12 bin X1, X2, X3, X4, X5, X6;

```

Fonte: Produção do autor

Figura 69 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis discretas

```

Value of objective function: -26.30000000

Actual values of the variables:
X1                0
X2                1
X3                0
X4                1
X5                0
X6                0

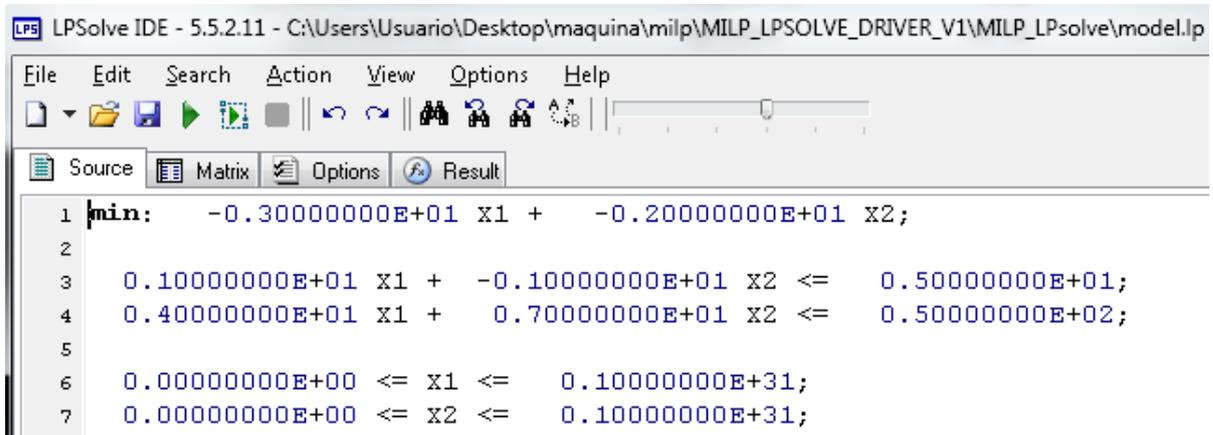
```

Fonte: Produção do autor

### TERCEIRO CASO: $x_1$ E $x_2$ CONTÍNUAS

Neste caso, pode-se observar na figura 71 que  $X_1$  e  $X_2$  são referentes às variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. O valor da função objetivo obtido foi de  $-28,6363$  e para as variáveis de projeto  $x_1$  e  $x_2$  foi de  $7,7272$  e  $2,7272$  respectivamente.

Figura 70 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis contínuas



```

LPSolve IDE - 5.5.2.11 - C:\Users\Usuario\Desktop\maquina\milp\MILP_LPSOLVE_DRIVER_V1\MILP_LPsolve\model.lp
File Edit Search Action View Options Help
Source Matrix Options Result
1 min:  -0.30000000E+01 X1 +  -0.20000000E+01 X2;
2
3  0.10000000E+01 X1 +  -0.10000000E+01 X2 <=  0.50000000E+01;
4  0.40000000E+01 X1 +   0.70000000E+01 X2 <=  0.50000000E+02;
5
6  0.00000000E+00 <= X1 <=  0.10000000E+31;
7  0.00000000E+00 <= X2 <=  0.10000000E+31;

```

Fonte: Produção do autor

Figura 71 – arquivo de entrada para o lp solve com duas variáveis contínuas.

```

Value of objective function: -28.63636364

Actual values of the variables:
X1                7.72727
X2                2.72727

```

Fonte: Produção do autor