

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA - PPGEM**

CARLOS ROGÉRIO JAHN

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÕES LOCAIS DE ÂNGULO DE
FABRICAÇÃO EM MANUFATURA ADITIVA**

**JOINVILLE - SC
2020**

CARLOS ROGÉRIO JAHN

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÕES LOCAIS DE ÂNGULO DE
FABRICAÇÃO EM MANUFATURA ADITIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, área de concentração em modelagem e simulação numérica.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso

**JOINVILLE - SC
2020**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Jahn, Carlos Rogério

Otimização topológica com restrições locais de ângulo de fabricação em manufatura aditiva / Carlos Rogério Jahn. -- 2021.

98 p.

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2021.

1. Otimização topológica. 2. Overhang. 3. Manufatura aditiva. 4. Restrições. 5. Lagrangiano aumentado. I. Cardoso, Eduardo Lenz. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CARLOS ROGÉRIO JAHN

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM RESTRIÇÕES LOCAIS DE ÂNGULO DE
FABRICAÇÃO EM MANUFATURA ADITIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, área de concentração em modelagem e simulação numérica.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso

Universidade do Estado de Santa Catarina - CTT/UDESC

Membros:

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz-Rojas

Universidade do Estado de Santa Catarina - CCT/UDESC

Dr. Gustavo Assis da Silva

Universidade de São Paulo Campus de São Carlos - USP

Joinville, 16 de dezembro de 2020

Dedico este trabalho a todas as pessoas
que buscam algo a mais em suas vidas

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer ao professor Dr. Eduardo Lenz Cardoso por ter me aceitado, orientado e acreditado no trabalho proposto. Agradeço sua paciência e vontade de ensinar a todos que querem aprender, principalmente nos momentos de incertezas e dúvidas.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), Gostaria de agradecer aos meus colegas do departamento, durante as aulas e durante a elaboração deste trabalho. A UDESC, pela disponibilidade e oportunidade do programa de pós-graduação. A FAPESC (Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina), pelo apoio financeiro 2019TR000779, entre outros programas de apoio que auxiliaram meus colegas durante seus estudos.

Agradeço imensamente ao Instituto SENAI de Inovação em Sistemas de Manufatura pela oportunidade de realização deste trabalho.

Gostaria de agradecer aos meus colegas de trabalho, por todos os momentos de apoio durante o curso, e principalmente meu coordenador Ariel Paulo Rezende, por me incentivar e acreditar no trabalho aqui apresentado.

Agradeço ao Dr. André Marcon Zanatta por me fazer entender a importância do mestrado e ao Dr. Edson Costa Santos por me apresentar a essa área de estudo.

Finalmente, gostaria de agradecer aos meus pais e a minha esposa, Andiará Meyer, por todo carinho e paciência nos momentos difíceis e por toda força e incentivo durante o tempo investido nesse trabalho.

RESUMO

A manufatura aditiva é um processo de fabricação que adiciona matéria prima sobre uma região pré-determinada para formar o componente final. O processo é executado camada a camada, proporcionando assim maior liberdade geométrica à forma final do componente, gerando uma sinergia com os resultados propostos pela otimização topológica. Porém, mesmo com a liberdade proporcionada pelo processo, algumas restrições devem ser observadas para garantir a qualidade final do componente. Uma dessas restrições é denominada de *overhang*, caracterizada pela diferença angular excessiva entre camadas adjacentes. Caso esta diferença seja maior que um limite imposto, podem ocorrer falhas entre essas camadas. Existem algumas formas de tratar o *overhang*, sendo uma delas considerar seu efeito na otimização, na forma de uma ou mais restrições. Este trabalho aborda o uso da otimização topológica de estruturas contínuas sob restrições locais de ângulo de fabricação (*overhang*), voltado ao processo de manufatura aditiva. A metodologia proposta neste trabalho é uma variação da proposta de Zhang, Cheng e Xu (2019), aplicada em forma local, com o uso do método do Lagrangiano Aumentado e *steepest descent* adaptado. Diferentes tamanhos de domínios e condições de contorno foram utilizados para estudar as propriedades da formulação proposta.

Palavras-chaves: Otimização topológica. *Overhang*. Manufatura Aditiva. Restrições. Lagrangiano Aumentado

ABSTRACT

Additive manufacturing is a process that adds raw material over a predetermined region to form the final component. The process is carried out layer by layer, providing greater geometric freedom to the final shape of the component, thus presenting a synergy with the results proposed by the topological optimization. However, even with the freedom provided by the process, some constraints must be observed to guarantee the final quality of the component. One of these constraints is called *overhang*, characterized by the excessive angular difference between two adjacent layers. If this difference is greater than an imposed limit, failures may occur between these layers. There are some ways to account for the *overhang*, one of which is to consider its behavior in the optimization as one or more constraints. This work addresses the use of topology optimization of continuous structures under local constraints of manufacturing angle (*overhang*), focused on the additive manufacturing process. The solution proposed in this work is a variation of the Zhang, Cheng e Xu (2019), applied in local form, using the Augmented Lagrangian and an adapted *steepest descent* methods. Different domain sizes and boundary conditions are used to study the properties of the proposed formulation.

Key-Words: Topology Optimizaton. *Overhang*. Additive Manufacturing. Constraint. Augmented Lagrangian

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Modelo digital original (esquerda) e modelo otimizado e manufaturado através da impressão metálica (direita)	17
Figura 1.2 - Efeito de escada. Modelo digital (esquerda); Modelo fatiado com maior espessura de camada (centro); Modelo fatiado com menor espessura de camada (direita)	18
Figura 1.3 - Exemplo de componente fabricado via impressão metálica, utilizando suportes externos (esquerda). Componente após a remoção dos suportes (direita)	19
Figura 2.4 - Modelo genérico de distribuição de material em um domínio fixo (Ω)	22
Figura 2.5 - Valores de $\rho(\mathbf{X})$ com diferentes valores de p	23
Figura 2.6 - Comportamento da equação (2.10) com $\eta = 0.5$ e, $\beta = 5.0$ no lado esquerdo, $\beta = 15.0$ no centro e $\beta = 25.0$ no lado direito. . .	25
Figura 3.7 - Modelo de manufatura aditiva	29
Figura 3.8 - Exemplo do modelo de um componente (esquerda) e seu respectivo modelo fatiado para manufatura aditiva (direita).	30
Figura 3.9 - Defeito de impressão gerado por <i>overhang</i> em manufatura aditiva de polímeros (esquerda) e metálica (direita)	30
Figura 3.10 - Alteração da posição do componente da figura 3.8	31
Figura 3.11 - Variação para $\bar{\alpha}$ sendo a) 35° , b) 45° e c) 70°	32
Figura 3.12 - Resultados obtidos no estudo sobre $\bar{\alpha}$ para FDM (Mazlan <i>et al.</i> (2020)).	32
Figura 3.13 - Resultados da variação de velocidades de processo em relação ao valor de $\bar{\alpha}$	33
Figura 3.14 - ângulos limites em função de variações de potência e velocidade de deposição.	34
Figura 3.15 - Comparação entre valores limites para <i>overhang</i> entre as zonas de transição	35
Figura 3.16 - Critério de busca para os elementos de suporte das camadas anteriores usando valor do ângulo limite	36
Figura 3.17 - Resultados obtidos por Gaynor <i>et al.</i> (2014)	36

Figura 3.18 - Resultado obtido pela otimização (esquerda) e resultados obtidos após o uso do corte de densidade relativa (direita)	37
Figura 3.19 - Definição dos contornos da estrutura obtida pelo processo de corte	37
Figura 3.20 - Valores angulares obtidos no contorno através do método proposto por Leary <i>et al.</i> (2014)	38
Figura 3.21 - Estruturas modificadas conforme a metodologia proposta por Leary <i>et al.</i> (2014)	38
Figura 3.22 - Metodologia aplicada por Qian (2017), onde n é o sentido de fabricação e $\nabla\tilde{\rho}$ o gradiente de densidades sobre uma região no contorno do componente	39
Figura 3.23 - Resultados obtidos considerando as restrições de <i>overhang</i> por Qian (2017)	40
Figura 3.24 - Sistema de busca onde i e j são posições no domínio fixo e $S_{(i,j)}$ elementos do suporte interno para elemento (i,j)	40
Figura 3.25 - Resultados apresentados por Langelaar (2017)	41
Figura 3.26 - Sequência de operadores utilizados por Pellens <i>et al.</i> (2019)	42
Figura 3.27 - Resultados obtidos por Pellens <i>et al.</i> (2019)	42
Figura 3.28 - Método de identificação utilizado por Garaigordobil <i>et al.</i> (2019).	43
Figura 3.29 - Resultados, (a) sem o uso de restrições para <i>overhang</i> , porém com suportes externos, (b) com uso de restrições com ângulo limite de 45° e (c) região de falha devido a ausência de restrições e de suportes externos	44
Figura 3.30 - Formação dos sistemas locais à esquerda e à direita no entorno do elemento local 1.	45
Figura 3.31 - Exemplo da definição dos pacotes no domínio fixo, com referência o elemento 162	47
Figura 3.32 - Exemplo sobre o elemento 6, não sendo possível definir o pacote a esquerda	47
Figura 3.33 - Demonstração do efeito <i>dripping</i> (esquerda) e os resultados através das restrições para o efeito de <i>dripping</i> aplicadas (direita)	49
Figura 3.34 - Exemplo de aplicação da restrição de <i>dripping</i>	49
Figura 3.35 - Resultados apresentados por Zhang, Cheng e Xu (2019)	52
Figura 4.36 - Domínio e condições de contorno utilizadas por Zhang, Cheng e Xu (2019) e nos testes iniciais deste trabalho.	56

Figura 4.37 - Resultados obtidos para a malha de 80×40 e os dados da tabela 4.2.	57
Figura 4.38 - Resultados obtidos com a malha 100×50 e dados da tabela 4.2.	57
Figura 4.39 - Exemplo utilizado para demonstração do comportamento entre restrições de Zhang, Cheng e Xu (2019) e deste trabalho	58
Figura 4.40 - Posição do vetor gradiente (tracejado) em relação ao máximo ângulo (vermelho)	59
Figura 4.41 - Exemplo de restrições aplicados ao elemento 35	60
Figura 4.42 - Distribuições de material obtidas para valores de β_{max} maiores do que 6, 0.	61
Figura 4.43 - Região de transição entre sólido e vazio no contorno da topologia.	62
Figura 4.44 - Gráfico do comportamento da relaxação linear utilizada por Zhang, Cheng e Xu (2019)	63
Figura 4.45 - Gráfico da restrição com relaxação (vermelho) e sem o uso de relaxação (azul)	64
Figura 4.46 - Comportamento de uma restrição sem relaxação (azul), relaxação linear (vermelho), utilizando os coeficientes $v = 0,01$ e $u = 0,025$, e a nova relaxação (verde), utilizando P igual a 4, 0 e ϵ de 0, 5.	66
Figura 4.47 - Comportamento da equação 4.82 com o valor de ϵ , para $\epsilon = 0,2$ (verde), $\epsilon = 0,4$ (vermelho) e $\epsilon = 0,6$ (rosa). A curva em azul não apresenta relaxação.	67
Figura 5.48 - Domínio e condições de contorno utilizadas para o primeiro caso de teste.	69
Figura 5.49 - Resultados iniciais apresentados na seção 4.1.2.	69
Figura 5.50 - Resultados obtidos utilizando a equação (4.80), para $\bar{\alpha} = 30^\circ$, com os valores de R da tabela 5.4 e dados gerais da tabela 5.5.	71
Figura 5.51 - Gráfico das restrições violadas referente ao resultado ilustrado na figura 5.50	72
Figura 5.52 - Violações das restrições referente ao resultado ilustrado na figura 5.50.	73
Figura 5.53 - Resultados obtidos utilizando a equação (4.80) para $\bar{\alpha} = 45^\circ$, com tamanho de malha 80×40 , valores de R referentes a tabela 5.4 e dados gerais da tabela 5.5.	73

Figura 5.54 - Resultados obtidos com o uso da equação de relaxação proposta com $\bar{\alpha}$ de 30° , com valores de R da tabela 5.4, dados gerais da tabela 5.6 e tamanho de malha 80×40	75
Figura 5.55 - Gráfico do comportamento das restrições com a proposta de relaxação referente a figura 5.54	75
Figura 5.56 - Violações das restrições para malha 80×40 referente ao resultado ilustrado na figura 5.54.	76
Figura 5.57 - Violações das restrições ativas sem uso da relaxação referente ao resultado ilustrado na figura 5.54.	77
Figura 5.58 - Resultados obtidos com o uso da equação de relaxação proposta e $\bar{\alpha} = 45^\circ$, com valores de R da tabela 5.4, dados gerais da tabela 5.6 e tamanho de malha 80×40	77
Figura 5.59 - Gráfico do comportamento das restrições obtidas com a nova proposta de relaxação e $\bar{\alpha} = 45^\circ$ referente aos resultados ilustrados na figura 5.58	78
Figura 5.60 - Resultados obtidos para tamanho de malha de 100×50 utilizando os valores de R da tabela 5.7 e dados gerais da tabela 5.6.	80
Figura 5.61 - Resultados obtidos com o tamanho de malha de 120×60 , sem o uso das relações para β_{lim} , com os dados gerais da tabela 5.6.	80
Figura 5.62 - Efeito na variação escala de cinza imposta por Qian (2017)	81
Figura 5.63 - Comparação entre resultados iniciais (lado esquerdo) e resultados com a presença de oscilações, regiões em vermelho (lado direito)	82
Figura 5.64 - Efeito da restrição de perímetro proposta por Allaire <i>et al.</i> (2017)	82
Figura 5.65 - Resultados obtidos por Mezzadri e Qian (2020) com uso de filtros locais, ($\bar{\alpha} = 30^\circ$ esquerda, e $\bar{\alpha} = 45^\circ$ a direita)	83
Figura 5.66 - Resultados para a malha 120×60 utilizando o valor de R da tabela 5.8 e dados gerais da tabela 5.6	84
Figura 5.67 - Nova condição de carregamento proposto	84
Figura 5.68 - Resultados para malha 100×50 obtidos com a força na ponta utilizando o valor de R da tabela 5.7 e dados da tabela 5.9	85
Figura 5.69 - Resultados obtidos para malha de 120×60 para o problema com a força na ponta, sem o uso da relação da equação (4.80) com dados da tabela 5.9	86
Figura 5.70 - Resultados obtidos por Pellens <i>et al.</i> (2019), onde regiões em vermelho contem violações de <i>overhang</i>	86

Figura 5.71 - Resultados obtidos para malha de 120×60 para o estudo com a força na ponta, com o uso do valor de R da tabela 5.8 e dados da tabela 5.9.	87
Figura 5.72 - Comparativo entre resultados da metodologia proposta neste trabalho (figura da esquerda) com o resultado obtido por Zhang, Cheng e Xu (2019) (figura da direita)	88
Figura 5.73 - Resultado obtido utilizado $\beta_{max} = 12,0$ (figura da esquerda) e $\beta_{max} = 6,0$ (figura da direita).	89
Figura 5.74 - Comparativo entre o resultado obtido com a metodologia proposta neste trabalho (figura da esquerda) e o resultado obtido por Zhang, Cheng e Xu (2019) (figura da direita).	90

LISTA DE TABELAS

Tabelas 3.1 - Dados utilizados por Zhang, Cheng e Xu (2019) (le é o tamanho do elemento)	51
Tabelas 4.2 - Dados utilizados para os testes iniciais	56
Tabelas 4.3 - Pacotes que contém o elemento 35	60
Tabelas 5.4 - Modelos para o estudo da equação (4.80), para $\bar{\alpha}$ de 30° e 45°	70
Tabelas 5.5 - Dados utilizados para os testes com o uso da equação (4.80).	70
Tabelas 5.6 - Dados utilizados para os testes com o uso das equações (4.80) e (4.82).	74
Tabelas 5.7 - Modelos utilizados para o estudo de dependência de malha.	79
Tabelas 5.8 - Dados utilizados para o estudo do efeito de <i>dripping</i> para a malha 120×60 com a relação de β_{lim}	83
Tabelas 5.9 - Dados utilizados para o estudo ilustrado na figura 5.67	85
Tabelas 5.10 -Dados utilizados para o estudo comparativo com Zhang, Cheng e Xu (2019)	88
Tabelas 5.11 -Dados utilizados para o estudo comparativo com Qian (2017).	90

SUMÁRIO

1.0	INTRODUÇÃO	17
1.1	OBJETIVOS	20
2.0	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
2.1	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	21
2.2	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	21
2.2.1	Filtro e projeção	23
2.2.2	Minimização de flexibilidade com restrição de volume	25
2.2.3	Método do Lagrangiano Aumentado (LA)	26
2.2.4	Restrições locais e globais	27
3.0	REVISÃO DO ESTADO DA ARTE	28
3.1	CONCEITO DE <i>OVERHANG</i>	29
3.1.1	Valores para limite de ângulo para manufatura aditiva	31
3.2	METODOLOGIAS PARA CONSIDERAÇÃO DO <i>OVERHANG</i> NO MÉTODO DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	35
3.2.1	Trabalho de Gaynor <i>et al.</i> (2014)	36
3.2.2	Trabalho de Leary <i>et al.</i> (2014)	36
3.2.3	Trabalho de Qian (2017)	38
3.2.4	Trabalho de Langelaar (2017)	40
3.2.5	Trabalho de Pellens <i>et al.</i> (2019)	41
3.2.6	Trabalho de Garaigordobil <i>et al.</i> (2019)	43
3.2.7	Trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019)	44
3.2.8	Resultados obtidos por Zhang, Cheng e Xu (2019)	49
4.0	EQUACIONAMENTO PROPOSTO	52
4.1	ALTERAÇÕES PROPOSTAS PARA EQUACIONAMENTO DE Zhang, Cheng e Xu (2019)	53

4.1.1	Dados para resultados iniciais	55
4.1.2	Resultados iniciais	57
4.1.3	Avaliação da formulação proposta neste trabalho	57
4.1.4	Nova proposta para função de relaxação	64
5.0	RESULTADOS	67
5.1	DADOS INICIAIS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA GERAL	68
5.1.1	Resultados obtidos com a relação proposta pela equação (4.80)	71
5.2	ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA PROPOSTA DE FUNÇÃO DE RELAXAÇÃO	74
5.2.1	Resultados obtidos através do uso da equação (4.82)	75
5.3	INFLUÊNCIA DO TAMANHO DE MALHA E EFEITO DE <i>DRIPPING</i>	79
5.3.1	Efeito de R para os tamanhos de malha de 100×50 e 120×60	79
5.3.2	Efeito <i>dripping</i> pela restrição de <i>overhang</i>	81
5.3.3	Impacto da equação (4.80) sobre o efeito <i>dripping</i>	83
5.4	AVALIAÇÃO DA FORMULAÇÃO EM UMA NOVA CONDIÇÃO DE CAR- REGAMENTO	84
5.5	COMPARAÇÃO COM RESULTADOS de Zhang, Cheng e Xu (2019)	87
6.0	CONCLUSÃO	91
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	93
	REFERÊNCIAS	94

1.0 INTRODUÇÃO

A manufatura aditiva pode ser descrita como um processo de fabricação que utiliza informações de um modelo digital, seccionado em várias camadas, para produzir um componente físico por meio de deposição do material camada a camada (THOMPSON *et al.*, 2016). Esse processo, diferente de outros processos tais como subtrativos e de conformação, adiciona material na sua área de trabalho, permitindo assim maior liberdade geométrica ao componente fabricado.

O processo de manufatura aditiva engloba uma série de técnicas distintas, com vários tipos de materiais empregados e métodos de união de matéria prima. Nos últimos anos, uma das principais técnicas em desenvolvimento é a impressão metálica, que faz uso de pó metálico como matéria prima, aplicado sobre um substrato como base (*build*), sendo fundido através de um feixe laser, camada a camada.

A otimização topológica busca a distribuição ótima de material em um domínio fixo fornecido pelo usuário (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Normalmente seus resultados apresentam geometrias complexas e de difícil fabricação, restringindo sua adoção generalizada na indústria.

Assim, a união entre esses dois métodos, através da inclusão dos parâmetros de manufatura no processo de otimização, pode aumentar a inserção da otimização topológica na indústria. Um exemplo dessa união pode ser visto na figura 1.1, onde o componente original é ilustrado à esquerda, e no lado direito é ilustrado um resultado gerado da união entre esses dois métodos.

Figura 1.1: Modelo digital original (esquerda) e modelo otimizado e manufaturado através da impressão metálica (direita)



Fonte: Thompson *et al.* (2016)

Mesmo com o processo de manufatura aditiva, nem todos os componente provenientes da otimização apresentam uma relação de custo/benefício positiva ou podem ser diretamente fabricados. Segundo Atzeni *et al.* (2013), o cálculo do custo associado a manufatura aditiva pode ser avaliado pela quantidade de material a ser

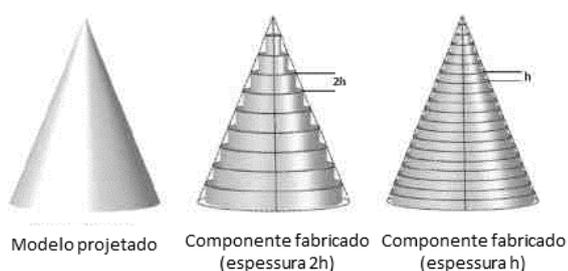
utilizado, tempo de processamento e de pós-processamento. A quantidade de material, além do volume do componente, é calculada considerando também o uso de suportes. Por sua vez, o tempo de processamento depende da quantidade de componentes e/ou posicionamento dos mesmos na máquina. O pós-processamento, por sua vez, depende de fatores tais como a remoção de suportes, o tratamento térmico de alívio de tensões térmicas residuais e o acabamento final. Uma forma de melhorar o custo/benefício do componente pode ser a inclusão de alguns desses fatores no processo de otimização.

Vários autores abordam a necessidade de inserir informações do processo de fabricação no projeto mecânico. Thompson *et al.* (2016) comentam a importância de projetos dedicados para impressão metálica, pois existem condições e parâmetros específicos que devem ser considerados durante o projeto de um componente. Rosen (2007) afirma que um dos agravantes no custo da impressão metálica consiste na falta de avaliação das restrições do processo durante a fase de projeto do componente a ser manufaturado.

Segundo Steen e Mazumder (2010), alguns fatores a serem avaliados durante o projeto são:

- a) Efeito de escada: Consiste na quantidade de divisões feitas no modelo digital, influenciando na qualidade final do componente. É um fator inerente a processos de manufatura aditiva como um todo. A figura 1.2 ilustra essa condição;

Figura 1.2: Efeito de escada. Modelo digital (esquerda); Modelo fatiado com maior espessura de camada (centro); Modelo fatiado com menor espessura de camada (direita)



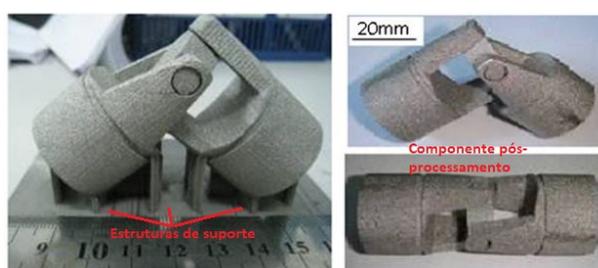
Fonte: Quan *et al.* (2015), adaptado

- b) Espessura entre camadas: Quanto maior a quantidade de camadas (menor espessura), melhor será a qualidade do componente, porém maior será o custo ao processo;
- c) Acurácia: O encolhimento, a distorção e as ondulações são problemas comuns na manufatura aditiva, normalmente associados ao resfriamento e, conseqüentemente, à mudança de fase do material. Existe um agravante onde o resfriamento,

se não controlado, pode gerar tensões residuais no componente, ocasionando trincas;

- d) Estrutura de suporte: Algumas partes do componente podem necessitar de suporte adicional. As estruturas de suporte também influenciam na capacidade de controle térmico do componente. Essas estruturas de suporte, se não avaliadas corretamente, podem gerar uma complexidade em sua remoção (durante a fase de pós-processamento), além de aumentar o uso de material. A figura 1.3 ilustra algumas regiões de um componente que necessitam de suporte para sua fabricação.

Figura 1.3: Exemplo de componente fabricado via impressão metálica, utilizando suportes externos (esquerda). Componente após a remoção dos suportes (direita)



Fonte: Wang *et al.* (2013), adaptado

- e) Orientação do componente: A quantidade necessária de suportes pode ser afetada pela posição e orientação do componente em relação à base, influenciando o custo e a qualidade do componente;

Cada fator citado acima pode ser tratado de diversas formas tais como, por exemplo, ajuste de parâmetros do processo, alterações na geometria do componente projetado, entre outras. A premissa deste trabalho é transcrever um desses fatores em restrições, a serem aplicadas no método de otimização topológica.

Quando uma camada não é perfeitamente suportada pelas camadas anteriores podem ocorrer problemas na solidificação. Essa situação é chamada de *overhang*, pois o ângulo formado entre as camadas é maior do que um valor limite possível de ser fabricado sem o uso de suportes externos. Para evitar os problemas de impressão decorrentes de excesso de ângulo, pode-se utilizar suportes externos, implicando em custo de material e de pós-processamento, ou modificar o projeto, visando a redução do valor angular efetivo entre camadas.

Gaynor *et al.* (2014), Langelaar (2017) e Pellens *et al.* (2019) propõem métodos que modificam a distribuição de material através de técnicas de projeção para cada elemento, de tal forma que sempre exista o suporte da camada anterior. Qian (2017) e Zhang, Cheng e Xu (2019) descrevem restrições para o cálculo do *overhang* na forma

de restrições globais utilizando informações da distribuição do material. Leary *et al.* (2014) sugerem uma abordagem diferente, utilizando o resultado da otimização sem restrições de fabricação para mapear as regiões de *overhang* e adicionar material em uma etapa de pós-processamento.

Nesses trabalhos, o objetivo é evitar o uso de qualquer suporte externo, reorganizando o material do componente para que as camadas entre si formem o suporte necessário. O presente trabalho apresenta o mesmo objetivo, porém, propondo uma solução para controle local das restrições, tratando o efeito de *overhang* ponto a ponto no domínio.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral desse trabalho é desenvolver uma metodologia que permita a imposição de restrições locais de *overhang*, baseada na metodologia proposta por Zhang, Cheng e Xu (2019). Como objetivos específicos pode-se listar:

- a) Realizar uma pesquisa sobre as principais estratégias desenvolvidas na literatura para tratar o problema de *overhang*;
- b) Propor uma metodologia para restrições de *overhang* na forma local, baseada no trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019);
- c) Avaliar a possibilidade de melhorias na formulação proposta;
- d) Comparar as topologias obtidas com as presentes na literatura consultada;
- e) Avaliar o uso de restrições locais com as metodologias que consideram as restrições de forma global.

2.0 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Otimização é o processo de obtenção do valor extremo de um funcional sujeito a um conjunto de restrições (ARORA, 2007). Pode-se apresentar o problema de otimização como

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad F(\mathbf{x}) \\ T.q \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1 \dots N_g \\ \quad \quad h_j(\mathbf{x}) = 0; j = 1 \dots N_h \\ \quad \quad \underline{x}_s \leq x_s \leq \overline{x}_s; s = 1 \dots N_s \end{array} \right. , \quad (2.1)$$

onde $F(\mathbf{x})$ é denominada função objetivo, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_s}$ é o vetor das variáveis de projeto, N_s o número de variáveis de projeto, $g_i(\mathbf{x})$ são as restrições de desigualdade, N_g é a quantidade de restrições de desigualdade, $h_i(\mathbf{x})$ são as restrições de igualdade sendo N_h a quantidade de restrições de igualdade do problema e \underline{x}_s e \overline{x}_s são as restrições laterais inferiores e superiores, respectivamente.

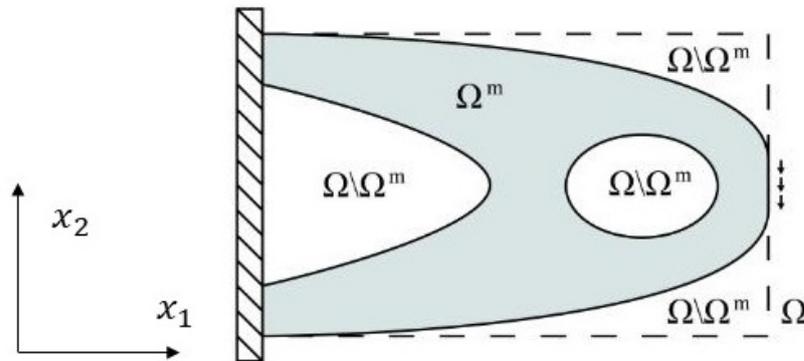
Existem vários métodos disponíveis para solucionar os problemas de otimização, sendo eles normalmente iterativos. Usualmente, os processos iterativos iniciam com uma estimativa das variáveis de projeto, gerando uma sequência de estimativas até uma solução. A estratégia utilizada para o aprimoramento da estimativa dos valores das variáveis de projeto determina o método de otimização a ser utilizado (SILVA, 2016).

Quando as variáveis de projeto e função objetivo são associados a respostas estruturais, o problema é denominado otimização estrutural, sendo geralmente dividido em 3 classes: paramétrica, forma e topológica. Neste trabalho é abordada a otimização topológica de estruturas contínuas.

2.2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização topológica busca a melhor distribuição de material em um domínio fixo de projeto Ω . A figura 2.4 ilustra o domínio fixo com material, Ω^m , partes sem material, $\Omega \setminus \Omega^m$, e o domínio completo Ω .

Figura 2.4: Modelo genérico de distribuição de material em um domínio fixo (Ω)



Fonte: Silva (2016), adaptado

Conforme Sigmund e Bendsøe (2003), a obtenção da melhor distribuição de material isotrópico deveria utilizar uma parametrização discreta na forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \chi(\mathbf{X})\mathbf{E}^0; \quad \chi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } \mathbf{X} \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ é o tensor constitutivo efetivo em um ponto \mathbf{X} , \mathbf{E}^0 é o tensor constitutivo do material base e $\chi(\mathbf{X})$ é uma função indicadora. Através dessa definição, cada ponto \mathbf{X} irá conter o material base ou vazio. Essa abordagem leva a dificuldades teóricas e de implementação numérica.

Como a solução ótima só pode ser obtida através do uso de material anisotrópico, Bendsøe e Kikuchi (1988) propuseram uma parametrização do material para descrever a variação espacial de um material anisotrópico periódico, onde as propriedades em cada ponto do domínio são descritas por parâmetros geométricos de uma célula unitária. Porém, essa parametrização torna difícil a interpretação da solução. Para evitar essa abordagem, uma parametrização que relaxa a equação (2.2) foi proposta por Bendsøe (1989), denominada como SIMP (*Solid Interpolation Material with Penalization*) e tem como forma

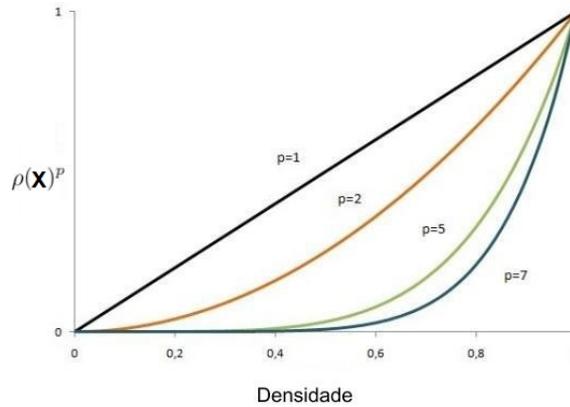
$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{X})^p \mathbf{E}^0, \quad (2.3)$$

onde $\rho(\mathbf{X}) \in (0, 1]$ são densidades relativas em cada ponto \mathbf{X} e p é um expoente de penalização. Através do SIMP o espaço de solução aumenta em relação a parametrização discreta e torna o problema contínuo e diferenciável em $(0, 1]$.

O fator p controla o grau de não-linearidade de $\rho(\mathbf{X})$, como ilustrado na figura 2.5. O uso da parametrização contínua pode apresentar valores de densidade intermediárias, dificultando a interpretação da topologia resultante. Valores maiores que 1 para p penalizam esses valores intermediários, porém não eliminam totalmente sua

presença na topologia. Contudo, se $p \rightarrow \infty$, o problema retorna a parametrização discreta.

Figura 2.5: Valores de $\rho(\mathbf{X})$ com diferentes valores de p



Fonte: Meneghelli (2013), adaptado

O método dos elementos finitos é utilizado neste trabalho para obtenção das respostas estruturais. Considera-se que $\rho(\mathbf{X})$ é uma densidade relativa constante dentro do domínio Ω_e de cada elemento e da malha utilizada, sendo associado a uma posição e de um vetor $\boldsymbol{\rho}$, ρ_e . A matriz de rigidez global pode ser descrita como

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \uplus_{e=1}^{N_e} \mathbf{k}_e(\rho_e), \quad (2.4)$$

onde \uplus é o operador de sobreposição, N_e é o número total de elementos utilizados e \mathbf{k}_e é a matriz de rigidez local de cada elemento, dada por

$$\mathbf{k}_e(\rho_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E}_e(\rho_e) \mathbf{B}_e d\Omega_e, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{B}_e é o operador deformação-deslocamento. Como ρ_e é constante em cada elemento, é possível escrever

$$\mathbf{k}_e(\rho_e) = \rho_e^p \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{E}_e^0 \mathbf{B}_e d\Omega_e. \quad (2.6)$$

2.2.1 Filtro e projeção

O uso da parametrização SIMP pode levar ao problema de dependência de malha, onde a variação na quantidade de elementos utilizados para discretizar o domínio leva a diferentes topologias. Sigmund (2007) faz uma revisão nos métodos de restrição do espaço de solução, sendo alguns deles utilizados para tratar esse problema. Algumas abordagens propostas são métodos de filtros para densidade, sensibilidade, métodos restritivos (exemplo controle de perímetro) entre outros. Neste trabalho é

utilizado o filtro para densidade apresentado na revisão de Sigmund (2007), onde a densidade relativa do elemento e é definida pela média ponderada das variáveis de projeto de seus vizinhos. Para definir o numero de vizinhos (N_v) de cada elemento, são avaliados quais elementos estão dentro de um raio R

$$N_v = \{i \mid \| \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_e \| \leq R\}, \quad (2.7)$$

sendo \mathbf{X}_i o centroide do elemento de referência i , \mathbf{X}_e o centroide de outros elementos no domínio e R valor do raio de vizinhança. O valor da densidade relativa filtrada é descrito como

$$\rho_e = F_e(x_i) = \frac{\sum_{i \in N_v} w_{e_i}(\mathbf{X}_i) x_i}{\sum_{i \in N_v} w_{e_i}(\mathbf{X}_i)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_v, \quad (2.8)$$

sendo x_i a variável de projeto do elemento i e w_{e_i} uma função da distância entre os centroides dos elementos e e i ,

$$w_{e_i}(\mathbf{X}_i) = R - \| \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_e \|. \quad (2.9)$$

Essa equação faz com que o problema deixe de ser dependente de malha e passe a ser dependente de R (SILVA, 2016).

A utilização de filtro não impede que os elementos contenham densidades relativas intermediárias, já que a relação entre as variáveis de projeto \mathbf{x} e as densidades relativas ρ é linear. Em várias aplicações estruturais o resultado obtido deve, preferencialmente, constituir de elementos com densidades discretas. Para amenizar o efeito das densidades intermediárias, uma abordagem utilizada são os métodos de projeção. Esses métodos são utilizados para projetar as densidades intermediárias para os valores limites máximos ou mínimos. Existem vários métodos propostos na literatura, sendo que neste trabalho é utilizado a proposta apresentada por Wang, Lazarov e Sigmund (2011)

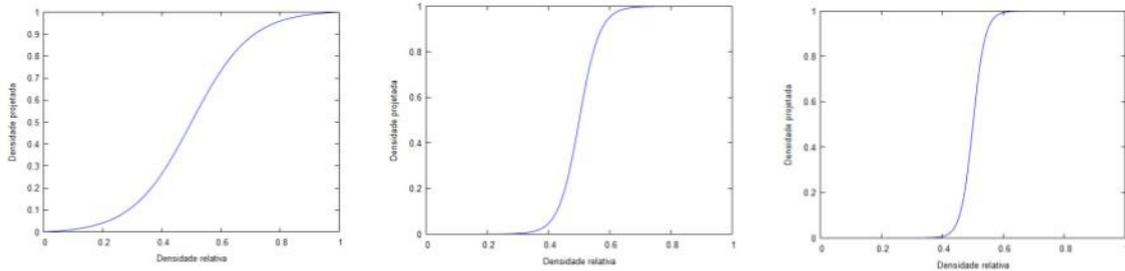
$$\hat{\rho}_e = \hat{H}(\rho_e, \beta, \eta) = \frac{\text{tahn}(\beta\eta) + \text{tahn}(\beta(\rho_e - \eta))}{\text{tahn}(\beta\eta) + \text{tahn}(\beta(1 - \eta))}; \quad e = 1, 2, \dots, N_e, \quad (2.10)$$

onde β controla a aproximação em relação a função Heaviside, H , e η é um fator de translação, tal que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \hat{H}(\rho_e, \beta, \eta) \rightarrow H(\rho_e - \eta). \quad (2.11)$$

A figura 2.6 ilustra a influência de β na relação entre as variáveis projetadas e as variáveis filtradas, para $\eta = 0, 5$.

Figura 2.6: Comportamento da equação (2.10) com $\eta = 0.5$ e, $\beta = 5.0$ no lado esquerdo, $\beta = 15.0$ no centro e $\beta = 25.0$ no lado direito.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Para evitar problemas de singularidade no problema de equilíbrio, é atribuído um valor de densidade mínima, ρ_{min} , para a densidade relativa efetiva de cada elemento e da malha,

$$\tilde{\rho}_e = \rho_{min} + (1 - \rho_{min})\hat{\rho}_e. \quad (2.12)$$

O valor para ρ_{min} adotado neste trabalho é de 1×10^{-3} . Por simplificação, $\tilde{\rho}$ é referenciada como densidade relativa projetada neste trabalho. O valor de $\tilde{\rho}_e$ é utilizado para o cálculo das equações de equilíbrio e, conseqüentemente, para o cálculo da função objetivo, restrições e nas sensibilidades. Como o otimizador utiliza as informações em relação a \mathbf{x} , é necessário efetuar uma correção na sensibilidades. Considerando uma função genérica $f(\tilde{\rho})$ sua derivada em termos da variável x_m é obtida com

$$\frac{df(\tilde{\rho})}{dx_m} = \frac{\partial f(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}_i} \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \hat{\rho}_j} \frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_c} \frac{d\rho_c}{dx_m}, \quad (2.13)$$

com somatórios implícitos em i (já que os somatórios em j e em c são reduzidos devido as dependências diretas das equações (2.10) e (2.12)).

2.2.2 Minimização de flexibilidade com restrição de volume

O problema base utilizado neste trabalho consiste na minimização de flexibilidade com restrição de volume. Para estruturas em regime linear elástico o problema é descrito por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(\tilde{\rho}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\tilde{\rho}) \\ T.q. \quad V(\tilde{\rho}) \leq \bar{V} \\ \mathbf{K}(\tilde{\rho}) \mathbf{U}(\tilde{\rho}) = \mathbf{F} \\ 0 < \rho_{min} \leq \tilde{\rho}_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{array} \right. , \quad (2.14)$$

onde $C(\tilde{\rho})$ é a flexibilidade, $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}^{N_e}$ o vetor de densidades relativas projetadas, F o vetor de forças externas, $U(\tilde{\rho})$ o vetor de deslocamentos, $V(\tilde{\rho})$ o volume da estrutura e \bar{V} o volume máximo. O volume é descrito pelo valor normalizado

$$V(\tilde{\rho}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} \tilde{\rho}_i V_i}{\sum_{i=1}^{N_e} V_i}, \quad (2.15)$$

onde V_i é o valor do volume do elemento i . Para solucionar esse problema existem várias opções de métodos, tais como SLP (*Sequential Linear Programming*), SQP (*Sequential Quadratic Programming*), MMA (*Method of Moving Asymptotes*), entre outros. Os métodos citados conseguem solucionar problemas com poucas restrições porém não são indicados quando existe uma grande quantidade de restrições aplicadas. No decorrer deste trabalho serão inseridas outras restrições ao problema, que podem dificultar o uso dos métodos supra citados. Desta forma, de modo a tornar a solução o mais geral possível em relação ao número e tipo de restrições, será utilizado o método do Lagrangiano Aumentado.

2.2.3 Método do Lagrangiano Aumentado (LA)

Segundo Martínez (2009), o método do Lagrangiano Aumentado converte a função objetivo e suas restrições em uma única função, transformando o problema restrito em uma forma irrestrita equivalente. A função LA pode ser apresentada como

$$L(\mathbf{x}, r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \frac{r}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{N_m} \left[h_i(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_i}{r} \right]^2 + \sum_{i=1}^{N_p} \left\langle g_i(\mathbf{x}) + \frac{\mu_i}{r} \right\rangle^2 \right\}, \quad (2.16)$$

onde r é um fator de penalização, $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ são multiplicadores para as restrições de igualdade e desigualdade respectivamente, N_m e N_p são as quantidades de restrições de igualdade e desigualdade respectivamente e $\langle a \rangle = \max(0, a)$. Sua solução consiste na resolução de subproblemas, onde a solução do último subproblema (k) é utilizada como estimativa inicial para o próximo subproblema ($k + 1$) (SILVA, 2016). Pode-se reescrever a equação (2.1) de subproblema (k) como

$$\begin{cases} \min & L^k(\mathbf{x}, r^k, \boldsymbol{\mu}^k, \boldsymbol{\lambda}^k) = f(\mathbf{x}) + \frac{r^k}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{N_m} \left[h_i(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_i^k}{r^k} \right]^2 + \sum_{i=1}^{N_p} \left\langle g_i(\mathbf{x}) + \frac{\mu_i^k}{r^k} \right\rangle^2 \right\}, \\ T.q & \underline{x}_s \leq x_s \leq \overline{x}_s; \quad s = 1 \dots N_s \end{cases} \quad (2.17)$$

onde os valores r , $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ são atualizados ao final do subproblema k , aqui chamado de iteração externa. Convertendo o problema (2.14) na forma de (2.17) temos

$$\begin{cases} \min & L_p^k(r^k, \tilde{\boldsymbol{\rho}}, \mu^k) = C(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) + \frac{r^k}{2} \left\langle V(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) + \frac{\mu^k}{r^k} \right\rangle^2 \\ T.q & \mathbf{K}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})\mathbf{U}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbf{F} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \tilde{\rho}_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{cases}, \quad (2.18)$$

e os multiplicadores e penalização são atualizados a cada iteração externa através de,

$$\begin{aligned} r^{k+1} &= r^k \delta; \delta > 1, \\ \mu^{k+1} &= \langle \mu^k + r^{k+1} V(\tilde{\boldsymbol{\rho}}^k) \rangle', \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde δ é um coeficiente de atualização. Como otimizador é adotado o método *Steepest Descent*, adaptado para considerar as restrições laterais, devido a sua fácil implementação para funções irrestritas. O método *Steepest Descent* é modificado na forma,

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + |\phi^i \mathbf{d}^i|_s, \quad (2.20)$$

onde \mathbf{x}^{i+1} são valores das variáveis na próxima iteração interna, ϕ^i o passo da otimização, $\mathbf{d}^i = -\nabla L_p^i$ o negativo do gradiente da função Lagrangiano Aumentado e $|\cdot|_s$ o operador de projeção, com função de corrigir o valor de \mathbf{x} caso ultrapasse as restrições laterais. O *line search* é realizado com o método de *armijo backtracking*.

2.2.4 Restrições locais e globais

Algumas grandezas têm o seu significado global, como energia e frequência natural, por exemplo. Seu comportamento utiliza informações de todo o domínio para suas definições. Para outras grandezas, o comportamento é avaliado localmente, como por exemplo tensões e o *overhang*. Caso sejam aplicadas restrições sobre valores com significado local, pode-se ter um problema de otimização com um número elevado de restrições.

Como os métodos tradicionais não conseguem lidar com um número grande de restrições, diversos autores têm tratado restrições locais por meio de restrições globais equivalentes. Um exemplo dessa abordagem é apresentada no artigo de Le *et al.* (2010), onde as restrições de tensão são agrupadas através do uso da norma-P. A proposta dos autores é utilizar a norma-P para obter um valor global de tensão equivalente máxima. Como o número de restrições locais de tensão é maior ou igual ao número de elementos de malha, o uso da norma-P representa uma redução no custo computacional, porém não é adequado para controle local das tensões. Conforme discutido no trabalho de Pereira e Cardoso (2018), o uso de restrições locais de tensão apresenta resultados superiores ao de um conjunto reduzido de restrições globais.

Nas restrições aplicadas para *overhang*, a mesma abordagem é observada em alguns trabalhos. Apesar do efeito de *overhang* ser uma decorrência da distribuição

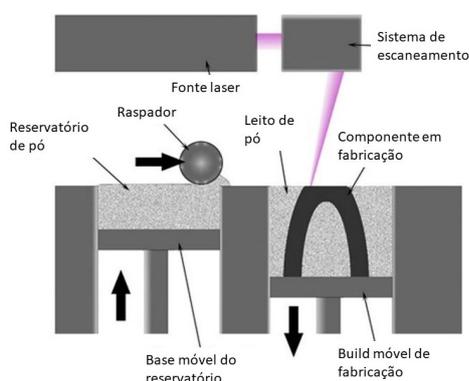
local de material, em trabalhos como o de Qian (2017) e Zhang, Cheng e Xu (2019), são definidas restrições para *overhang* de forma global equivalente.

Por isso, o presente trabalho se propõe a estudar o efeito de se considerar as restrições locais de *overhang* na otimização topológica como restrição de manufatura, e comparar seu resultado aos resultados de trabalhos que abordam essa restrição local em forma global equivalente.

3.0 REVISÃO DO ESTADO DA ARTE

Métodos de manufatura aditiva consistem na deposição de material sobre uma base específica de trabalho, camada por camada. A figura 3.7 representa uma simplificação do sistema de manufatura aditiva que utiliza pó-metálico e uma fonte laser, comumente denominado de impressão metálica.

Figura 3.7: Modelo de manufatura aditiva



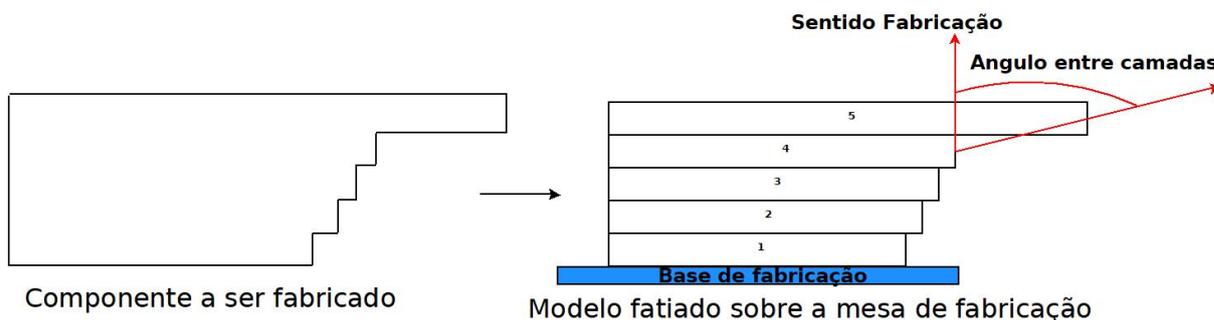
Fonte: Gaynor e Guest (2016), adaptado

O sentido de fabricação do componente em relação a base impacta diretamente na qualidade e no custo final do componente. Dependendo da estratégia de fabricação, algumas regiões podem apresentar falha devido a ausência de sustentação entre camadas (suporte interno) ou a ausência de suporte externo ao componente, ocasionando problemas durante a solidificação do material.

3.1 CONCEITO DE *OVERHANG*

Overhang é um efeito originado pelo excesso do ângulo formado entre a direção de deposição das camadas (sentido de fabricação) e o vetor normal a uma região do componente. Avaliando a figura 3.8, nota-se que as camadas 2, 3 e 4 são suportadas pelas camadas anteriores (suportes internos), porém a camada 5 apresenta falta de suporte pela camada 4 em algumas regiões, bem como ausência de suportes externos.

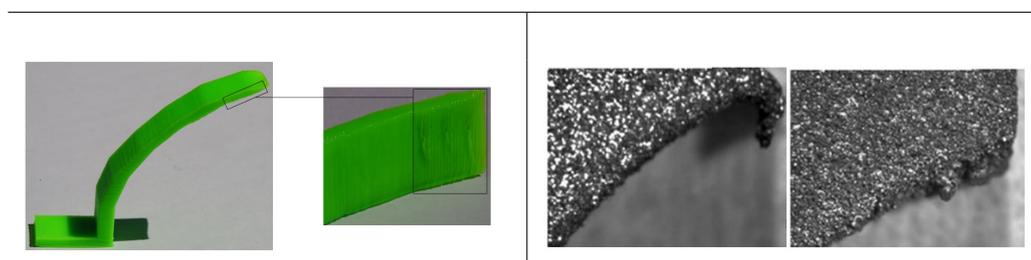
Figura 3.8: Exemplo do modelo de um componente (esquerda) e seu respectivo modelo fatiado para manufatura aditiva (direita).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Em cada ponto (ou elemento no caso discreto), pode-se calcular o ângulo α entre duas camadas como sendo o produto interno do gradiente de densidades relativas (variação espacial de material) e o sentido de fabricação n . Se o valor obtido for demasiado, essa região pode apresentar problemas na qualidade final do componente e, em casos extremos, falha do processo de manufatura, conforme ilustrado na figura 3.9.

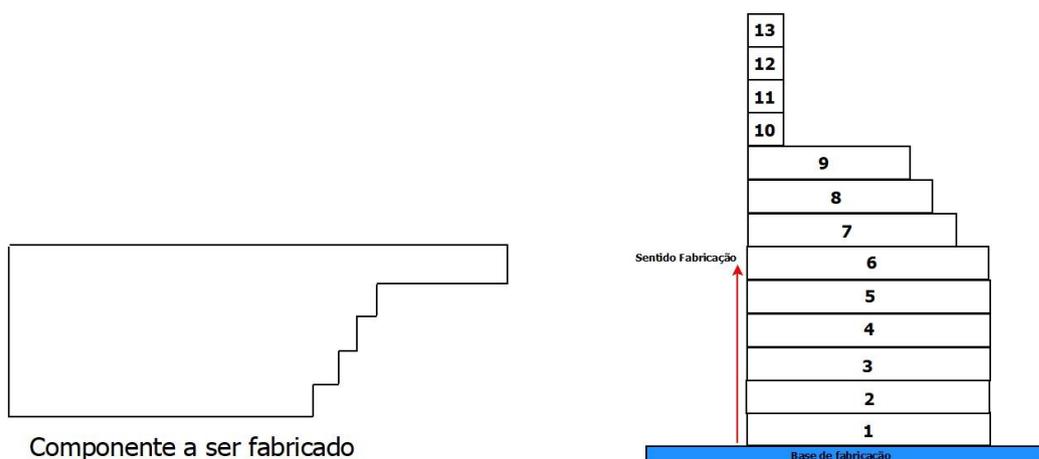
Figura 3.9: Defeito de impressão gerado por *overhang* em manufatura aditiva de polímeros (esquerda) e metálica (direita)



Fonte: Leary *et al.* (2014) (esquerda) e Calignano (2014) (direita)

Existe um valor limite que define a região de suporte interno máximo entre camadas, que envolve um conjunto de fatores, como parâmetros de processo e fatores geométricos do componente. Quanto maior o ângulo gerado acima desse limite, maior a necessidade de suportes, para evitar falhas nessas regiões. Outra alternativa é o reposicionamento do componente sobre a base da máquina, alterando assim o valor angular entre camadas. Usando o exemplo da figura 3.8, porém rotacionando as camadas em 90° , observa-se que não existe problema de ângulo excessivo entre camadas, conforme ilustrado na figura 3.10.

Figura 3.10: Alteração da posição do componente da figura 3.8



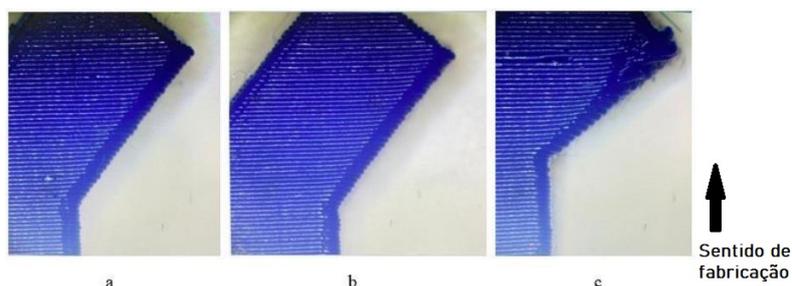
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Porém, essa estratégia nem sempre é possível pois dependendo do tamanho do componente, projeto ou da máquina, não é possível reposicionar o componente sobre a base. Dependendo do componente, sendo o caso deste exemplo, o número de camadas irá aumentar pelo reposicionamento, impactando no tempo de fabricação. Da mesma forma, o uso de suportes externos tem impacto no tempo de processo e quantidade de material utilizado. Uma maneira de evitar o surgimento de *overhang* é garantir que o ângulo entre camadas não ultrapasse um valor limite (definido aqui como $\bar{\alpha}$), sendo estratégia adotada por vários autores, ou seja, reorganizar o material do componente durante a fase de projeto para gerar suportes internos. Algumas dessas estratégias serão apresentadas no decorrer deste trabalho.

3.1.1 Valores para limite de ângulo para manufatura aditiva

Dentro da manufatura aditiva, existe uma grande variação de técnicas e materiais. Porém, o efeito de *overhang* é presente em todas as técnicas, sendo tratado de forma similar. O trabalho de Mazlan *et al.* (2020) estuda a variação de ângulo limite, $\bar{\alpha}$, entre 10° e 70° para FDM (*fused deposition modeling*), que utiliza polímeros como material base. O autor executa testes variando o valor de $\bar{\alpha}$, fixando os parâmetros do processo como velocidade, temperatura e tamanho de camada. A figura 3.11 ilustra 3 valores de $\bar{\alpha}$, onde o valor de 70° apresenta uma falha entre as camadas.

Figura 3.11: Variação para $\bar{\alpha}$ sendo a) 35° , b) 45° e c) 70°



Fonte: Mazlan *et al.* (2020)

Um dos resultados apresentados por Mazlan *et al.* (2020) é ilustrado na figura 3.12, onde as variações angulares impostas no modelo digital são medidas em relação ao componente fabricado.

Figura 3.12: Resultados obtidos no estudo sobre $\bar{\alpha}$ para FDM (Mazlan *et al.* (2020)).

Valor para ângulo limite	Valor obtido na região	Avaliação de falha
10	6.46	
15	12.31	
20	16.48	
25	26.01	
30	30.87	Fabricado
35	36.84	
40	37.16	
45	37.64	
50	-	
55	-	
60	-	Falha
65	-	
70	-	

Fonte: Mazlan *et al.* (2020), adaptado

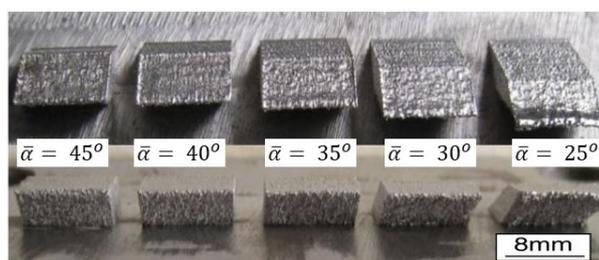
É possível verificar que até o ângulo de 45° é possível fabricar o componente, porém com vários erros associados a geometria. Segundo resultados de Mazlan *et al.* (2020), o valor para $\bar{\alpha}$ de 30° foi o que apresentou menor diferença entre o modelo digital e o fabricado. De acordo com os Mazlan *et al.* (2020), resultados para $\bar{\alpha} \leq 45^\circ$ indicam que as camadas contém suporte efetivo da camada inferior. Porém, Mazlan *et al.* (2020) avaliam apenas um conjunto de parâmetros de fabricação, não sendo possível determinar se esse resultado pode ser aplicado a outros parâmetros.

Outra técnica que tem sido muito difundida nos últimos anos é a impressão metálica, que foi ilustrada na figura 3.7. Apesar dessas duas técnicas serem diferentes, existe uma similaridade para as condições de *overhang* entre FDM e impressão me-

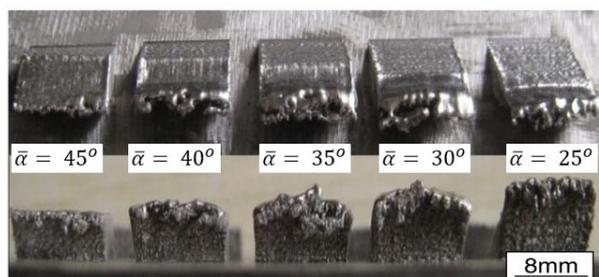
tálica. Para ilustrar essa similaridade, são apresentados dois trabalhos com foco em estudar o valor de $\bar{\alpha}$, porém variando parâmetros entre estudos.

O trabalho de Wang *et al.* (2013) avalia a relação entre parâmetros de fabricação com os valores máximos aplicados a $\bar{\alpha}$. Os autores testam variações de velocidade, potência e $\bar{\alpha}$, mantendo espessura entre camadas, com objetivo de avaliar se as alterações nos parâmetros do processo influenciam o valor máximo de $\bar{\alpha}$ sem gerar falha no componente. Os testes são executados no material aço inox 316L. Em primeira análise, os autores avaliam a diferença entre velocidades, mantendo a mesma potência do processo. Os resultados dessa relação são apresentados na figura 3.13.

Figura 3.13: Resultados da variação de velocidades de processo em relação ao valor de $\bar{\alpha}$



(a) Velocidade do processo – 600 mm/s



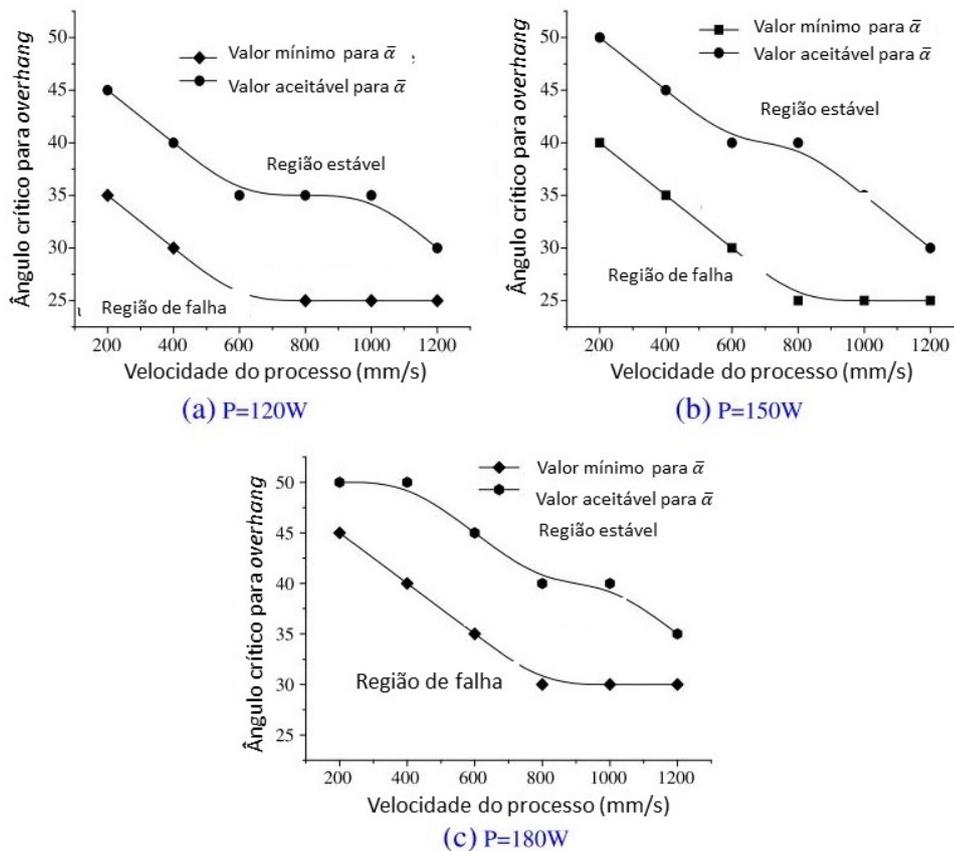
(b) Velocidade do processo – 200 mm/s

Fonte: Wang *et al.* (2013), adaptado

Conforme ilustra a figura 3.13 e segundo Wang *et al.* (2013), o uso de velocidades maiores para fabricação tornam necessários o uso de $\bar{\alpha}$ maiores que 45° , conforme ilustrado na figura 3.13 b. Para velocidades menores, figura 3.13 a, valores de $\bar{\alpha}$ podem ser reduzidos. Avaliando os resultados apresentados, pode se notar que velocidades maiores geram uma melhor qualidade no resultado para o processo de impressão metálica, porém faz com que o valor máximo de $\bar{\alpha}$ seja reduzido. Existe outros fatores a serem considerados, como a influência do material, o que demanda outros ensaios para verificar essa discussão.

Os autores estudam também a variação de potência em conjunto com a velocidade e valor limite. O gráficos da figura 3.14 ilustram essas relações.

Figura 3.14: ângulos limites em função de variações de potência e velocidade de deposição.



Fonte: Wang *et al.* (2013), adaptado

Comparando os resultados da figura 3.13 com os gráficos ilustrados na figura 3.14, verifica-se que o aumento de velocidade e da potência faz com que sejam necessários valores maiores de $\bar{\alpha}$ para manter a mesma qualidade. Os autores não apresentam imagens da qualidade superficial dos resultados de cada gráfico, não sendo possível relacionar o aumento da velocidade com a qualidade final do componente.

O trabalho de Wang *et al.* (2013) apresenta que os parâmetros de fabricação contiveram uma influência direta na definição de $\bar{\alpha}$ dentro do processo de impressão metálica.

Outro trabalho que estuda os limites para $\bar{\alpha}$ é o de Wang *et al.* (2020). Os autores utilizam resultados de ensaios para descrever uma zona de transição entre uma falha e uma região robusta considerando efeito *overhang*. Através desses dados, os autores descrever um método de projeção para otimização topológica, para evitar regiões de falha na topologia. Porém, esta subseção dará foco sobre os resultados dos ensaios dos autores. Wang *et al.* (2020) utilizam uma potência (150W), velocidade de operação (800mm/s) similares as de Wang *et al.* (2013) e material base 316L. Os autores avaliam que a zona de transição, entre uma região estável (*Robust zone*) e

uma região de falha (*Failed zone*), é determinada em função do perímetro gerado pelo ângulo entre camadas. Na figura 3.15, Wang *et al.* (2020) apresentam seus resultados em relação aos experimentos executados.

Figura 3.15: Comparação entre valores limites para *overhang* entre as zonas de transição

Zona do perímetro gerado por diferentes <i>overhang</i>				
Overhang angle (°)	Total de camadas impressas	Comprimento zona robusta	Comprimento zona intermediária	Comprimento zona de falha
26	20	–	0–0.6	≥0.6
27	50	≤0.3	0.3–1.5	≥1.5
28	70	≤0.7	0.7–2.1	≥2.1
29	150	≤1.5	1.5–3.5	≥3.5
30	330	≤2.3	2.3–9.9	≥9.9
31	600	≤8.0	> 8.0	–
32	600	≤11	> 11	–
33	600	≤15	> 15	–
34	1000	≤18	> 18	–
35	1000	30	–	–

Fonte: Wang *et al.* (2020), adaptado

De acordo com os autores em seus ensaios, valores limites para α menores que 27° apresentam alguma falha durante a fabricação. Um valor igual a 27° pode ser fabricado, desde que o comprimento da camada não seja maior que 0.3 mm. Os testes dos autores indicam que valores limites maiores que 34° apresentam regiões livres de falhas, mas em vários casos, a relação entre 27° e 34° é satisfatória, desde que tenha um controle sobre o comprimento da região em estudo.

Desta forma, verifica-se que o valor limite para o ângulo (restrição de *overhang*) depende dos parâmetros do processo de fabricação. Com esta informação, pode-se então impor esta restrição ao processo de otimização topológica.

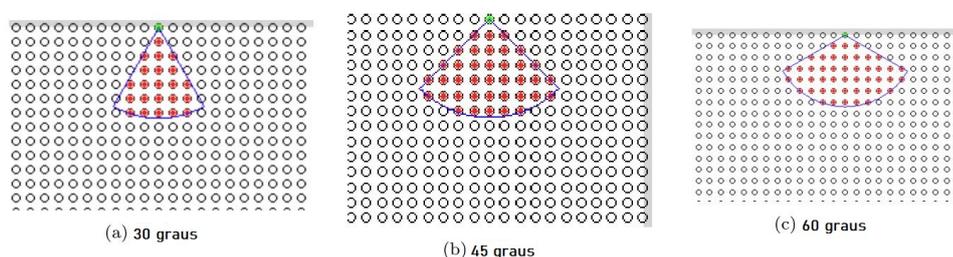
3.2 METODOLOGIAS PARA CONSIDERAÇÃO DO *OVERHANG* NO MÉTODO DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Para o processo de manufatura aditiva em geral, qualquer alteração que tenha como objetivo minimizar/remover o uso de suportes externos representa uma redução direta no custo de fabricação. Nesta seção são revisadas metodologias para reorganizar o material do componente, e evitar o uso de suportes externos, através da otimização topológica.

3.2.1 Trabalho de Gaynor *et al.* (2014)

Um dos primeiros trabalhos a abordar esse tema é o de Gaynor *et al.* (2014), utilizando técnicas de projeção para garantir a existência de material como suporte interno. Para isso, os autores definem um critério de busca sobre um elemento central junto às camadas anteriores, para que os elementos dentro da área de busca formem o suporte interno. A figura 3.16 demonstra o critério de busca em função do ângulo limite imposto.

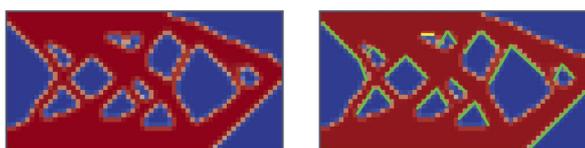
Figura 3.16: Critério de busca para os elementos de suporte das camadas anteriores usando valor do ângulo limite



Fonte: Gaynor *et al.* (2014), adaptado

Os elementos são selecionados através de um espaço de busca definido pelo ângulo máximo permitido. Para garantir material na região, os autores aplicam uma técnica de projeção *heaviside* sobre estes elementos, fazendo com que os elementos contenham um valor de densidade relativa projetada igual ou superior ao elemento de referência. A figura 3.17 demonstra alguns resultados obtidos pelos autores utilizando um ângulo para suporte de 45° .

Figura 3.17: Resultados obtidos por Gaynor *et al.* (2014)



Fonte: Gaynor *et al.* (2014)

A proposta apresentada não impõe nenhum tipo de restrição a otimização, apenas faz uso de projeções sobre elementos para impor uma determinada distribuição de material.

3.2.2 Trabalho de Leary *et al.* (2014)

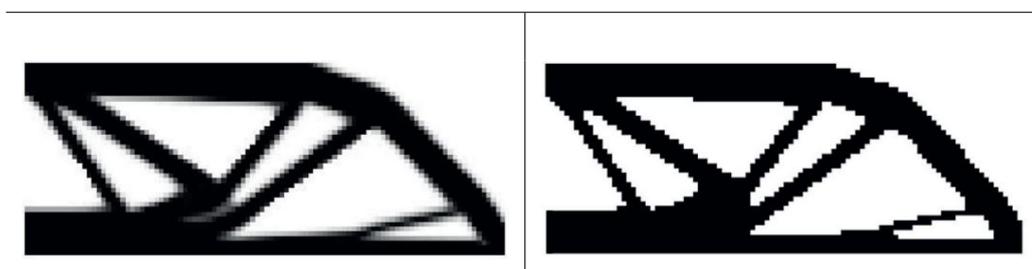
A proposta de Leary *et al.* (2014) aborda uma estratégia diferente de Gaynor *et al.* (2014). Para tratativa do *overhang*, é realizado uma etapa de pós-processamento

do resultado da otimização topológica com foco em adicionar material, na forma de suportes internos. Na primeira etapa dessa proposta, os autores realizam um corte nos valores da densidade relativa obtidas na otimização topológica conforme,

$$\rho_e = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho_e < \rho_{lim} \\ 1 & \text{se } \rho_e \geq \rho_{lim} \end{cases}, \quad (3.21)$$

onde ρ_{lim} é igual a 0,5. A figura 3.18 ilustra o resultado desse corte.

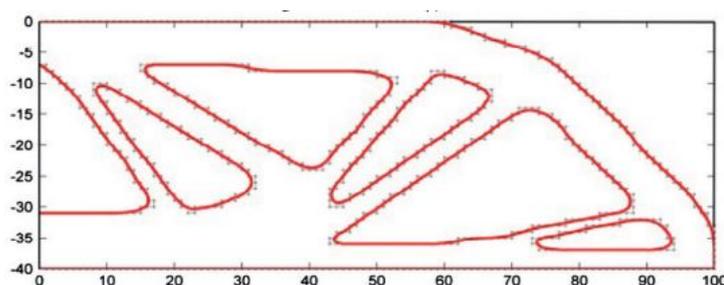
Figura 3.18: Resultado obtido pela otimização (esquerda) e resultados obtidos após o uso do corte de densidade relativa (direita)



Fonte: Leary *et al.* (2014)

Após o corte efetuado nas densidades, o autor utiliza técnicas similares ao de processamento de imagem para mapear o contorno do resultado, através dos valores de densidade relativa em cada elemento. O resultado deste mapeamento é observado na figura 3.19.

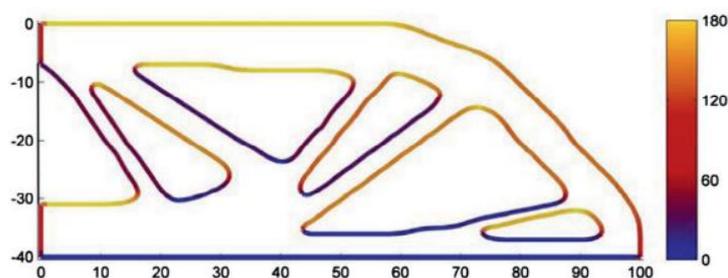
Figura 3.19: Definição dos contornos da estrutura obtida pelo processo de corte



Fonte: Leary *et al.* (2014)

Os elementos que formam o contorno são utilizados para o cálculo do valor angular ponto a ponto. Para identificar regiões no contorno que contenham *overhang*, os autores utilizam a informação do centroide entre um elemento e seus vizinhos, aproximando uma reta entre os pontos. Então, Leary *et al.* (2014) calcula o ângulo da reta formada entre os pontos e a direção de manufatura. A figura 3.20 ilustra o resultado deste método de cálculo para o contorno formado.

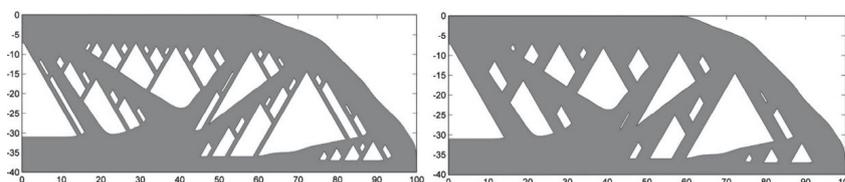
Figura 3.20: Valores angulares obtidos no contorno através do método proposto por Leary *et al.* (2014)



Fonte: Leary *et al.* (2014)

Para cada ponto violado, os autores inserem material traçando uma reta, com inclinação igual ao valor limite, até uma região oposta ao ponto. Cada reta criada contém uma espessura mínima determinada para formação de suportes internos. Suportes próximos são agregados para modelar um suporte interno com maior espessura. Como resultado final, Leary *et al.* (2014) apresentam uma nova estrutura livre de *overhang*, conforme ilustrado na figura 3.21.

Figura 3.21: Estruturas modificadas conforme a metodologia proposta por Leary *et al.* (2014)



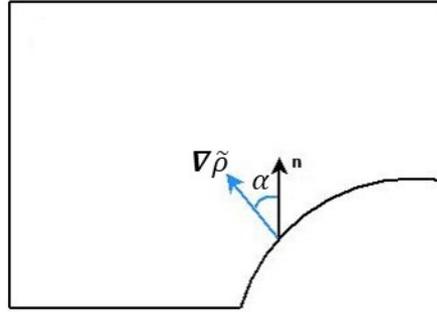
Fonte: Leary *et al.* (2014)

Essa metodologia visa a solução para os efeitos de *overhang* adicionando o material em um pós-processamento, porém não leva em consideração outras restrições impostas pela otimização topológica, o que pode inviabilizar o uso da topologia.

3.2.3 Trabalho de Qian (2017)

Esse artigo desenvolve uma metodologia para restrições de *overhang*, utilizando informações do gradiente de densidades (definido como $\nabla \tilde{\rho}$), em conjunto com o sentido de fabricação (n) para calcular o valor angular α . A figura 3.22 ilustra essa metodologia graficamente, onde o valor de α é o ângulo formado entre $\nabla \tilde{\rho}$ e n . Caso α ultrapasse $\bar{\alpha}$, a região pode apresentar uma falha durante sua fabricação.

Figura 3.22: Metodologia aplicada por Qian (2017), onde \mathbf{n} é o sentido de fabricação e $\nabla\tilde{\rho}$ o gradiente de densidades sobre uma região no contorno do componente



Fonte: Qian (2017), adaptado

Utilizando as informações de $\nabla\tilde{\rho}$ e \mathbf{n} o autor define a restrição local para *overhang* como o produto interno entre as duas grandezas

$$\frac{\langle \nabla\tilde{\rho}, \mathbf{n} \rangle}{\|\nabla\tilde{\rho}\|} = \cos(\alpha) \leq \cos(\bar{\alpha}), \quad (3.22)$$

onde $\bar{\alpha}$ é o valor do ângulo limite para evitar o *overhang*. Apesar do comportamento local dessa restrição, Qian (2017) reescreve a equação (3.22) em uma forma global equivalente. Para isso, o autor utiliza uma função indicadora aproximada de *heaviside*

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta\nu}}, \quad (3.23)$$

onde o valor de β define a agressividade da projeção, comportamento similar a equação (2.10), para $\nu \in [0, 1]$. Com isso, Qian (2017) insere a restrição para *overhang* na equação (3.23) com um comportamento descrito por

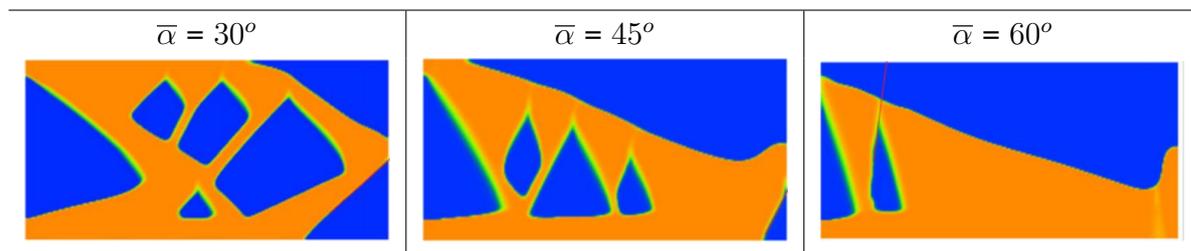
$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} H\left(\frac{\langle \nabla\tilde{\rho}, \mathbf{n} \rangle}{\|\nabla\tilde{\rho}\|} - \cos(\bar{\alpha})\right) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{\langle \nabla\tilde{\rho}, \mathbf{n} \rangle}{\|\nabla\tilde{\rho}\|} < \cos(\bar{\alpha}) \\ 0.5 & \text{se } \frac{\langle \nabla\tilde{\rho}, \mathbf{n} \rangle}{\|\nabla\tilde{\rho}\|} = \cos(\bar{\alpha}) \\ 1 & \text{se } \frac{\langle \nabla\tilde{\rho}, \mathbf{n} \rangle}{\|\nabla\tilde{\rho}\|} > \cos(\bar{\alpha}) \end{cases} . \quad (3.24)$$

Qian (2017) propõe o uso do perímetro gerado pelo valor de $\bar{\alpha}$, sendo a restrição global definida por uma integral de todas as regiões do domínio

$$\int_{\Omega} H\left(\frac{\langle \nabla\tilde{\rho}, \mathbf{n} \rangle}{\|\nabla\tilde{\rho}\|}\right) \langle \nabla\tilde{\rho}, \mathbf{n} \rangle d\Omega \leq P_{\bar{\alpha}}, \quad (3.25)$$

onde $P_{\bar{\alpha}}$ é um limite imposto para quantidade de pontos que apresentem perímetros formados por *overhang* violados. Os resultados obtidos por Qian (2017) através dessa proposta podem ser observados na figura 3.23.

Figura 3.23: Resultados obtidos considerando as restrições de *overhang* por Qian (2017)



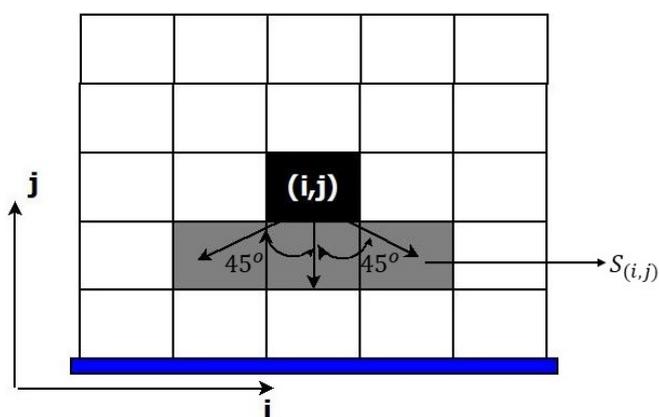
Fonte: Qian (2017)

A proposta de Qian (2017) apresenta resultados que contém oscilações na distribuição de material nas regiões de *overhang*, sendo esse efeito avaliado no capítulo de resultados deste trabalho.

3.2.4 Trabalho de Langelaar (2017)

A formulação proposta por Langelaar (2017) adapta a metodologia de Gaynor *et al.* (2014) com o mesmo conceito de projeção e suportes internos para regiões de *overhang*. A figura 3.24 ilustra o mesmo sistema de busca para elementos de suporte, considerando um ângulo de 45° . A linha azul da figura 3.24 representa o base de fabricação, $S_{(i,j)}$ é o conjunto de elementos de suporte interno de (i,j) , sendo i ou j posições discretas no domínio. Uma definição proposta por Langelaar (2017) é que todos os elementos da primeira linha do domínio podem ser manufaturados sem efeitos de falha por *overhang*, sendo possível pular a busca na primeira linha.

Figura 3.24: Sistema de busca onde i e j são posições no domínio fixo e $S_{(i,j)}$ elementos do suporte interno para elemento (i,j)



Fonte: Langelaar (2017), adaptado

No trabalho de Gaynor *et al.* (2014) são utilizadas técnicas de projeção para as densidades dos elementos de suporte. Porém, Langelaar (2017) altera essa operação e utiliza operadores de maximização e minimização para a projeção das densidades dos elementos de suporte interno. Nesse caso, a densidade relativa do elemento (i, j) deve ser menor do que a densidade relativa máxima dentro dos suportes, tal que,

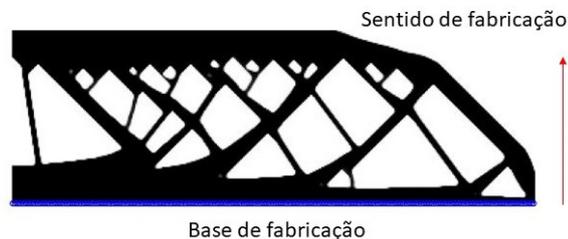
$$S_{max} = \max(\mathbf{S}_{(i,j)}), \quad (3.26)$$

e,

$$\tilde{\rho}_{(i,j)} = \min(\tilde{\rho}_{(i,j)}, S_{max}), \quad (3.27)$$

onde $\tilde{\rho}_{(i,j)}$ representa a densidade projetada do elemento suportado. Considerando a figura 3.24 como exemplo, $\mathbf{S}_{(i,j)}$ são as densidades projetada dos 3 elementos que irão suportar o elemento $\tilde{\rho}_{(i,j)}$, não sendo maior que a densidade projetada máxima de seus elementos de suporte, e S_{max} é a densidade projetada máxima entre os elementos de suporte. A figura 3.25 apresenta um dos resultados obtidos utilizando a metodologia proposta pelo autor.

Figura 3.25: Resultados apresentados por Langelaar (2017)



Fonte: Langelaar (2017), adaptado

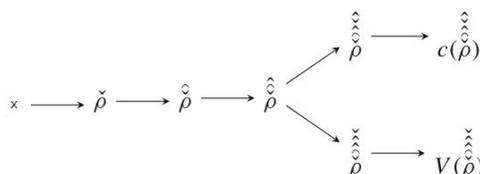
3.2.5 Trabalho de Pellens *et al.* (2019)

O autor adapta a metodologia proposta por Langelaar (2017) em conjunto com operadores para controle de escala propostos por Sigmund (2007), sendo eles:

- Operador *dilate*: Representa a projeção da máxima densidade relativa de seus vizinhos sobre o elemento e .
- Operador *erode*: Utiliza as mesmas informações que o operador anterior, porém seu resultado projeta a densidade relativa do elemento ao valor mínimo.
- Combinação de operadores: Sigmund (2007) apresenta uma estratégia onde o uso destes dois operadores em sequência cria um efeito de redução (*close*) ou maximização (*open*) de espaços vazios dentro do domínio.

Utilizando os operadores descritos, em conjunto com a proposta de Langelaar (2017), Pellens *et al.* (2019) afirmam que densidades relativas projetadas usadas para o cálculo da função objetivo e da restrição do volume podem ser diferentes, de acordo com cada estratégia adotada pelo usuário. Um dos exemplos da sequência de operações é apresentada na figura 3.26.

Figura 3.26: Sequência de operadores utilizados por Pellens *et al.* (2019)

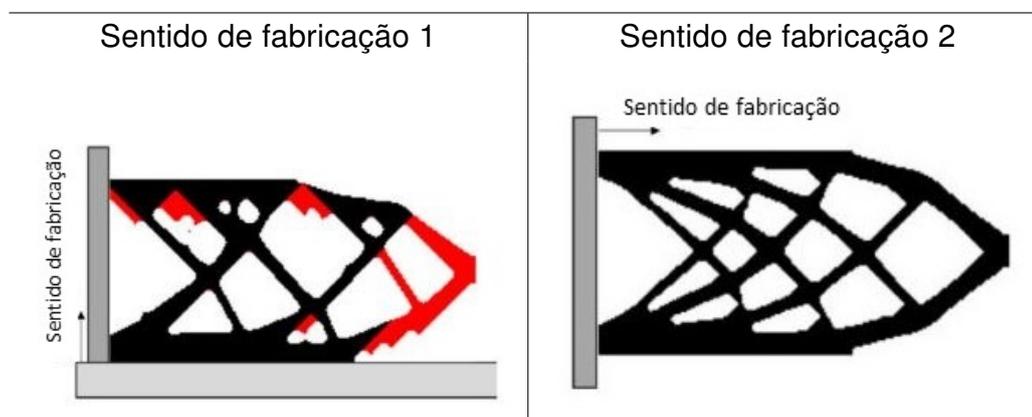


Fonte: Pellens *et al.* (2019), adaptado

Conforme o artigo descreve, primeiro é utilizado operador de *erode* sobre as variáveis de projeto x obtendo $\check{\rho}$. Em seguida são calculados os valores para *overhang* utilizando $\check{\rho}$ resultando em $\hat{\rho}$. Para evitar suportes internos com tamanhos pequenos, é aplicado o operador *dilate* nas densidades relativas, obtendo $\hat{\hat{\rho}}$. Por último, para o cálculo da função de minimização de flexibilidade, o autor aplica o operador *open* para obter $\check{\check{\hat{\hat{\rho}}}}$. O cálculo da restrição de volume utiliza o operador *close* obtendo $\check{\check{\hat{\hat{\rho}}}}$.

No artigo, os autores apresentam uma série de variações para ordem das projeções, sendo que um de seus resultados é apresentado na figura 3.27. Em avaliação pelos autores, as regiões em vermelho da figura 3.27, lado esquerdo, representam violações de *overhang*, porém ao alterar o sentido de fabricação, o *overhang* é satisfeito sobre essas regiões. É possível notar que o sentido de fabricação tem um papel importante para redução das regiões onde ocorre o *overhang*

Figura 3.27: Resultados obtidos por Pellens *et al.* (2019)

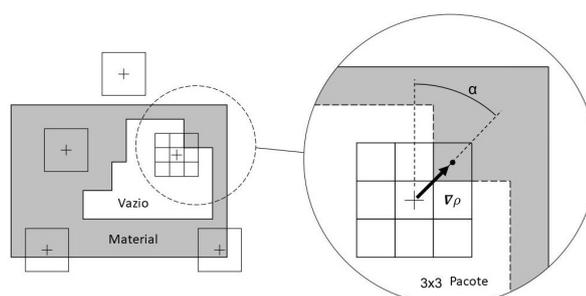


Fonte: Pellens *et al.* (2019), adaptado

3.2.6 Trabalho de Garaigordobil *et al.* (2019)

Essa metodologia apresenta similaridades com o proposto por Leary *et al.* (2014), onde a identificação do efeito de *overhang* é realizada através de técnicas de detecção de contornos utilizando densidades relativas como informação. Para cada elemento no domínio fixo, o autor utiliza seus elementos vizinhos para detectar variações de densidade, como ilustrado na figura 3.28.

Figura 3.28: Método de identificação utilizado por Garaigordobil *et al.* (2019).

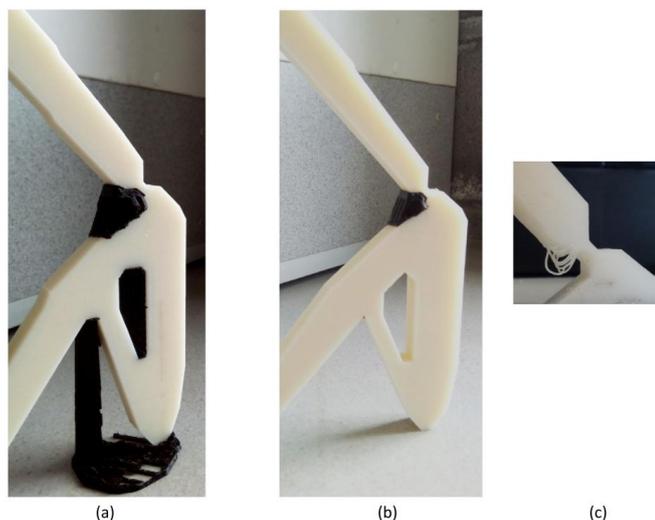


Fonte: Garaigordobil *et al.* (2019), adaptado

Os autores utilizam métodos para identificar as regiões de transição entre as zonas de material e de vazio do componente, utilizando as informações do gradiente de densidades e das coordenadas dos centróides, de forma semelhante a Leary *et al.* (2014). Os autores também utilizam a proposta de cálculo do ângulo baseado no uso do gradiente de densidades ($\nabla \tilde{\rho}$) em torno de um ponto, similar a Qian (2017). Porém, diferente de Leary *et al.* (2014), a informação de mapeamento entre elementos é utilizada para calcular o valor de α e reescrita em forma de restrição global equivalente, criando uma razão entre regiões com suportes entre si e regiões sem suporte.

Os resultados apresentados pelo autores podem ser observados na figura 3.29, onde a diferença do uso das restrições, otimização sem restrições de manufatura e uma região com falha por *overhang* é ilustrada.

Figura 3.29: Resultados, (a) sem o uso de restrições para *overhang*, porém com suportes externos, (b) com uso de restrições com ângulo limite de 45° e (c) região de falha devido a ausência de restrições e de suportes externos



Fonte: Garaigordobil *et al.* (2019)

Essa abordagem melhora os resultados em relação a Leary *et al.* (2014), pois a restrição de *overhang* é avaliada durante a otimização, respeitando outras restrições impostas ao problema.

3.2.7 Trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019)

Este artigo é utilizado como base no presente trabalho para o cálculo das restrições de *overhang*, sendo definido através do uso de gradiente de densidades, similarmente ao proposto por Qian (2017). O uso do valor de α , calculado através do produto interno entre $\nabla\tilde{\rho}$ e n , para avaliar o efeito de *overhang* é similar ao proposto por Qian (2017), e ilustrado na figura 3.22. Para calcular o gradiente do campo de densidades projetadas em torno de um ponto, os autores propõem uma forma explícita para uma aproximação local das densidades projetadas utilizando uma função bilinear

$$\tilde{\rho}_o(r, s) \approx ar + bs + c = \zeta^T \begin{bmatrix} r \\ s \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

onde a , b e c são os coeficientes da função, r e s são posições em um domínio local o . Assim, o gradiente de densidades relativas é descrito por

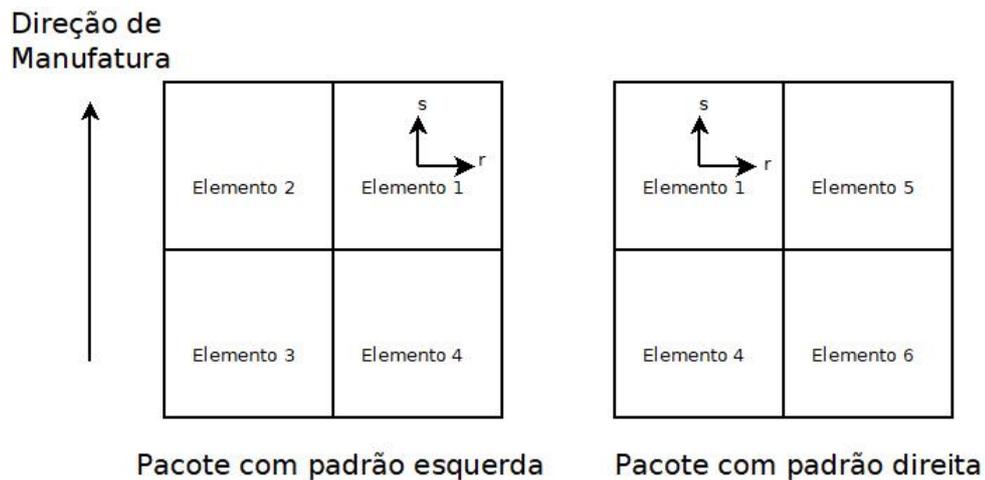
$$\nabla\tilde{\rho}_o = [a, b]^T. \quad (3.29)$$

Para implementar essa função bilinear local, os autores propõem dividir o domínio em várias distribuições locais o , definidas aqui como pacotes. Cada elemento na malha

irá conter dois pacotes para formar o suporte interno deste elemento. Essa divisão é realizada para obter os índices da equação (3.28), mapeando a posição dos elementos localmente dentro de cada pacote.

Para formar cada pacote, os autores propõem o uso de 4 elementos para calcular os coeficientes da equação (3.28) pelo método de mínimos quadrados. A figura 3.30 demonstra a formação dos pacotes, utilizando o elemento local 1 para referência do sistema de coordenadas locais. Para cada elemento da malha são construídos 2 pacotes, sendo denominados como pacote da esquerda, índice l , e pacote da direita, índice d . Como exemplo, a figura 3.30 apresenta os elementos 1, 2, 3 e 4 como pacote com padrão esquerda e os elementos 1, 5, 6 e 4 para o pacote com padrão direita, sendo o elemento 1 o elemento central para ambos os pacotes.

Figura 3.30: Formação dos sistemas locais à esquerda e à direita no entorno do elemento local 1.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O método de mínimos quadrados é utilizado para obter os coeficientes das aproximações da equação (3.28). Para um pacote com padrão esquerda temos

$$\xi_o^l = \mathbf{Z}^l \tilde{\rho}_o^l; \quad (3.30)$$

onde \mathbf{Z}^l é definido por

$$\mathbf{Z}^l = (\mathbf{A}^{lT} \mathbf{A}^l)^{-1} \mathbf{A}^{lT} \mathbf{e} \quad (3.31)$$

e \mathbf{A}^l e $\tilde{\rho}_o^l$ são definidos por

$$\mathbf{A}^l = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & 1 \\ r_2 & s_2 & 1 \\ r_3 & s_3 & 1 \\ r_4 & s_4 & 1 \end{bmatrix}; \tilde{\rho}_o^l = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_1^l \\ \tilde{\rho}_2^l \\ \tilde{\rho}_3^l \\ \tilde{\rho}_4^l \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

onde $r_1 \dots r_4$ e $s_1 \dots s_4$ são as coordenadas locais dos centroides dos elementos e $\tilde{\rho}_1^d \dots \tilde{\rho}_4^d$ são as densidades projetadas dos elementos do pacote com padrão esquerda. O mesmo é realizado para os elementos 1, 4, 5 e 6, que compõe um pacote com padrão direita

$$\xi_o^d = \mathbf{Z}^d \tilde{\rho}_o^d; \quad (3.33)$$

com

$$\mathbf{Z}^d = (\mathbf{A}^{dT} \mathbf{A}^d)^{-1} \mathbf{A}^{dT}, \quad (3.34)$$

onde \mathbf{A}^d e $\tilde{\rho}_o^d$ são definidos por,

$$\mathbf{A}^d = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & 1 \\ r_5 & s_5 & 1 \\ r_6 & s_6 & 1 \\ r_4 & s_4 & 1 \end{bmatrix}; \tilde{\rho}_o^d = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_1^d \\ \tilde{\rho}_5^d \\ \tilde{\rho}_6^d \\ \tilde{\rho}_4^d \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Como são necessários apenas os coeficientes a e b para obter $\nabla \tilde{\rho}_o$, é possível desconsiderar o coeficiente c em ξ_o , através da redução da matriz \mathbf{Z} em ambos os padrões (l, d)

$$\mathbf{Z}_{(3,4)}^{(l,d)} = \bar{\mathbf{Z}}_{(2,4)}^{(l,d)}. \quad (3.36)$$

Reescrevendo as equações (3.30) e (3.33) com $\bar{\mathbf{Z}}$,

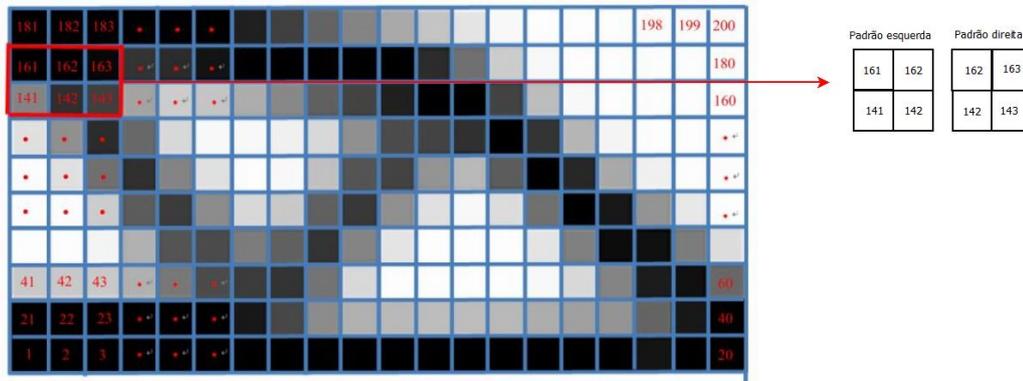
$$\bar{\xi}_o^{(l,d)} = \bar{\mathbf{Z}}^{(l,d)} \tilde{\rho}_o^{(l,d)}, \quad (3.37)$$

tal que

$$\nabla \tilde{\rho}_o^{(l,d)} = \bar{\xi}_o^{(l,d)} = \begin{bmatrix} a^{(l,d)} \\ b^{(l,d)} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

A figura 3.31 ilustra a formação de pacotes para o elemento central 162.

Figura 3.31: Exemplo da definição dos pacotes no domínio fixo, com referência o elemento 162



Fonte: Zhang, Cheng e Xu (2019), adaptado

Apenas um tipo de pacote (padrão esquerda ou direita) é considerado para elementos nos limites do domínio. Um exemplo é mostrado na figura 3.32, onde não é possível definir um pacote a esquerda para o elemento 6. Para esse caso, apenas o pacote com padrão direita do elemento 6 é considerado.

Figura 3.32: Exemplo sobre o elemento 6, não sendo possível definir o pacote a esquerda



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Elementos que estão sobre a base de fabricação não são considerados nas restrições. Usando a figura 3.32 como exemplo, os elementos 1 até 5 não contêm nenhuma restrição. Essa definição é apresentada por Langelaar (2017) que, segundo autor, assume que os elementos em contato com a base não apresentam *overhang*. Esse efeito também considerado por Zhang, Cheng e Xu (2019).

Com o valor de $\nabla \tilde{\rho}_o^{(l,d)}$ e \mathbf{n} , é possível obter o valor de α , e avaliar o efeito de *overhang* na região. A restrição local é definida como produto interno entre $\nabla \tilde{\rho}_o^{(l,d)}$ e \mathbf{n} , também utilizada por Qian (2017),

$$\cos(\alpha)^{(l,d)} = \frac{\langle \nabla \tilde{\rho}_o^{(l,d)}, \mathbf{n} \rangle}{\|\nabla \tilde{\rho}_o^{(l,d)}\|} \leq \cos(\bar{\alpha}). \quad (3.39)$$

Considerando a restrição local da equação (3.39), e o método apresentado para o cálculo de $\nabla \tilde{\rho}_o$, pode-se definir a restrição local do pacote com padrão esquerda como

$$t_o^l = \langle \nabla \tilde{\rho}_o^l, \mathbf{n} \rangle - \cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o^l\| \leq 0; \quad o = 1 \dots N_l, \quad (3.40)$$

e para o pacote com padrão direita

$$t_o^d = \langle \nabla \tilde{\rho}_o^d, \mathbf{n} \rangle - \cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o^d\| \leq 0; \quad o = 1 \dots N_d. \quad (3.41)$$

Os autores propõem que seja utilizada uma condição de relaxação para as restrições, pois em vários casos a restrição pode apresentar um valor pequeno de violação, o que manteria a restrição ativa mesmo quando está quase satisfeita. Reescrevendo as equações (3.40) e (3.41) com uma função de relaxação, ζ_o , para o pacote da esquerda temos,

$$t_o^l = \langle \nabla \tilde{\rho}_o^l, \mathbf{n} \rangle - \cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o^l\| \leq \zeta_o^l; \quad o = 1 \dots N_l, \quad (3.42)$$

e para o pacote com padrão direita

$$t_o^d = \langle \nabla \tilde{\rho}_o^r, \mathbf{n} \rangle - \cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o^r\| \leq \zeta_o^d; \quad o = 1 \dots N_d. \quad (3.43)$$

A definição do valor de $\zeta_o^{(l,d)}$, proposta por Zhang, Cheng e Xu (2019) em ambas as equações, é feita utilizando uma equação linear. O cálculo do valor de relaxação utiliza a densidade do elemento central (onde o sistema local de coordenadas está fixado) definido por,

$$\zeta_o^{(l,d)} = v \tilde{\rho}_{o(1)}^{(l,d)} + u, \quad (3.44)$$

sendo os valores dos coeficientes v e u definidos pelo usuário. Segundo Zhang, Cheng e Xu (2019), uma das vantagens da utilização desse critério de relaxação é que seu valor acompanha o da densidade projetada do elemento central, auxiliando na convergência nas iterações finais.

A utilização deste método pode ser expandida para maiores quantidades de elementos em cada pacote, porém, segundo Zhang, Cheng e Xu (2019), o aumento na quantidade de elementos gera um aumento no custo computacional. Em seus estudos os autores avaliam que, para o problemas como estudados neste trabalho, o uso de quantidade maiores de elementos não representou uma melhora significativa, dando preferência a menor quantidade de elementos por pacote para melhora do custo computacional.

Os autores descrevem um outro efeito criado pelas restrições de *overhang*, onde a distribuição de material pode ser afetada devido algumas violações no contorno, porém não afetando o valor da função objetivo. Este efeito é denominado como *dripping*, sendo ilustrado na figura 3.33. Zhang, Cheng e Xu (2019) utilizam a nomenclatura de *hanging*, porém será utilizado a nomenclatura de *dripping* neste trabalho. Este efeito será discutido posteriormente neste trabalho.

Figura 3.33: Demonstração do efeito *dripping* (esquerda) e os resultados através das restrições para o efeito de *dripping* aplicadas (direita)



Fonte: Zhang, Cheng e Xu (2019)

Para correção desse efeito, os autores aplicam novas restrições sobre os elementos centrais de cada pacote, para um efeito de mínimo tamanho de escala. A restrição de *dripping* sobre o pacote da esquerda é definida por,

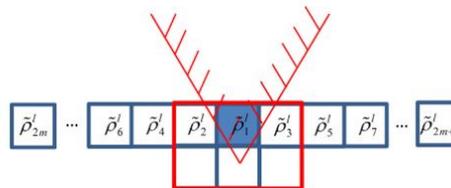
$$\tau_o^l(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}_1^l - \frac{\tilde{\rho}_2^l + \tilde{\rho}_4^l + \tilde{\rho}_6^l + \dots + \tilde{\rho}_{2m}^l}{m} \leq \zeta_o^l; \quad o = 1, 2, \dots, N_l, \quad (3.45)$$

e para o pacote da direita

$$\tau_o^d(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}_1^d - \frac{\tilde{\rho}_3^d + \tilde{\rho}_5^d + \tilde{\rho}_7^d + \dots + \tilde{\rho}_{2m+1}^d}{m} \leq \zeta_o^d; \quad o = 1, 2, \dots, N_d, \quad (3.46)$$

onde m é o número de elementos em cada pacote. A proposta dessa restrição é forçar a adição de material quando houver problemas na distribuição de material, ou seja, na formação das regiões em vermelho ilustradas na figura 3.33, lado esquerdo, apresentando assim a solução conforme a figura 3.33, lado direito. A figura 3.34 ilustra a região onde as equações (3.45) e (3.46) são utilizadas. O uso dessas restrições faz com que a média das densidades projetadas dos elementos vizinhos não seja menor que o elemento central do pacote.

Figura 3.34: Exemplo de aplicação da restrição de *dripping*



Fonte: Zhang, Cheng e Xu (2019)

3.2.8 Resultados obtidos por Zhang, Cheng e Xu (2019)

Avaliando a quantidade de restrições aplicadas, Zhang, Cheng e Xu (2019) consideraram que as restrições locais tornam o problema de alto custo computacional e dificultam a obtenção da solução, além do fato que valores pequenos para violação

tornam a convergência demorada. Os autores utilizam o MMA para solucionar o problema proposto. Assim, é proposto o uso de uma abordagem de agregação das restrições locais, similar a Qian (2017). Os autores reescrevem as restrições de *overhang* e *dripping* respectivamente como

$$y(\tilde{\rho}) = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\rho}_e \psi_e V_e}{\sum_{e=1}^{N_e} V_e} \leq 0, \quad (3.47)$$

e

$$q(\tilde{\rho}) = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\rho}_e \gamma_e V_e}{\sum_{e=1}^{N_e} V_e} \leq 0, \quad (3.48)$$

onde $y(\tilde{\rho})$ e $q(\tilde{\rho})$ são as frações de volume que violam as restrições de *overhang* e *dripping* respectivamente. Como a metodologia dos autores utiliza duas restrições em cada elemento para formar o suporte, Zhang, Cheng e Xu (2019) utilizam duas funções indicadores, ψ_e para as duas restrições de *overhang* e γ_e para as duas restrições de *dripping*, definidas como

$$\psi_e = h(t_e^l - \zeta_e^l)h(t_e^d - \zeta_e^d), \quad (3.49)$$

e

$$\gamma_e = h(\tau_e^l - \zeta_e^l)h(\tau_e^d - \zeta_e^d). \quad (3.50)$$

Em cada restrição de *overhang* e *dripping*, respectivamente, é utilizado uma terceira função indicadora, com comportamento similar ao utilizada por Qian (2017), descrita por

$$h(\nu) = \frac{1}{1 + e^{-\mu\nu}}, \quad (3.51)$$

onde μ tem a mesma função de β na função de *heaviside*, sendo seu comportamento descrito por,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \psi_e \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } h(t_e^l - \zeta_e^l) \leq 0 \text{ ou } h(t_e^d - \zeta_e^d) \leq 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.52)$$

e

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \gamma_e \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } h(\tau_e^l - \zeta_e^l) \leq 0 \text{ ou } h(\tau_e^d - \zeta_e^d) \leq 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.53)$$

Quando $\psi_e = 1$, $\tilde{\rho}_e \lambda_e V_e = \tilde{\rho}_e V_e$, implicando em $t_e^l - \zeta_e^l > 0$ e $t_e^d - \zeta_e^d > 0$, ou seja, ambos os pacotes violam o valor de $\bar{\alpha}$. Interessante ressaltar que, para que $\psi_e = 1$ ambas as

restrições de *overhang* (pacote com padrão direita e esquerda) devem ser violadas, caso contrário, $\psi_e = 0$, tornando a restrição global não violada para o elemento e para o otimizador. A mesma análise é válida para γ_e .

Através dessas alterações, o problema geral proposto pelos autores pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(\tilde{\rho}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\tilde{\rho}) \\ \text{T.q} \quad V(\tilde{\rho}) \leq \bar{V} \\ \quad \quad \mathbf{K}(\tilde{\rho}) \mathbf{U}(\tilde{\rho}) = \mathbf{F} \\ \quad \quad y(\tilde{\rho}) \leq 0 \\ \quad \quad q(\tilde{\rho}) \leq 0 \\ \quad \quad 0 < \rho_{min} \leq \tilde{\rho}_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{array} \right. \quad (3.54)$$

A tabela 3.1 apresenta os dados utilizados por Zhang, Cheng e Xu (2019) em seus estudos.

Tabela 3.1: Dados utilizados por Zhang, Cheng e Xu (2019) (l_e é o tamanho do elemento)

Direção de fabricação (n)	$[0, 1]^T$
Ângulos limites ($\bar{\alpha}$)	$30^\circ, 45^\circ$ e 60°
Raio para filtro (R)	$8.1l_e$
Valor para equação de relaxação <i>overhang</i>	$v = 0.1$ e $u = 0.025$
Valor para equação de relaxação <i>dripping</i>	$v = 0.12$ e $u = 0.2$
Valor de μ para equação (3.51)	100 para $y(\tilde{\rho})$ e 50 para $q(\tilde{\rho})$
Quantidade de elementos para restrição de <i>overhang</i>	4
Quantidade de elementos para restrição de <i>dripping</i>	$m = 3$ e 5

Fonte: Zhang, Cheng e Xu (2019)

Os autores também utilizam uma função de projeção *heaviside* para reduzir a escala de cinza

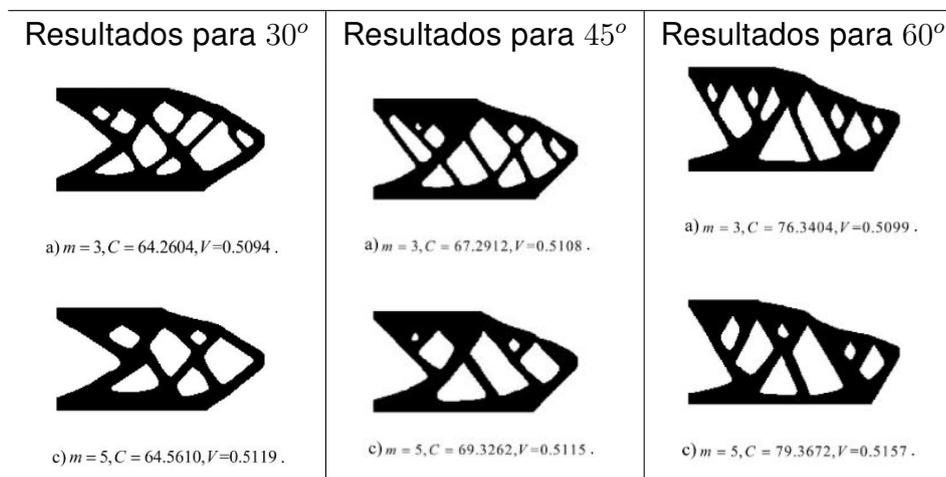
$$\tilde{\rho}_e = \begin{cases} \eta(e^{-\beta(1-\frac{\rho_e}{\eta})} - (1 - \frac{\rho_e}{\eta})e^{-\beta}) & \text{se } 0 \leq \rho_e < \eta \\ (1 - \eta)(1 - e^{-\beta(1-\frac{\rho_e-\eta}{1-\eta})} + \frac{(\rho_e-\eta)e^{-\beta}}{(1-\eta)}) + \eta & \text{se } \eta \leq \rho_e \leq 1 \end{cases}, \quad (3.55)$$

onde o valor de β inicia em 0,2 para as primeiras 100 iterações. Após isso, seu valor é incrementado pelo menor valor entre $\beta + 1$ e 2β a cada 20 iterações, até o limite de 40. Os autores aplicam um corte nos valores de densidade projetada em seu pós-processamento, similar ao realizado por Leary *et al.* (2014), conforme,

$$\rho_e^* = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde{\rho}_e \geq 0,5 \\ 0 & \text{se } \tilde{\rho}_e < 0,5 \end{cases}, \quad (3.56)$$

onde ρ_e^* é a densidade final utilizada nos resultados, sendo alguns apresentados na figura 3.35.

Figura 3.35: Resultados apresentados por Zhang, Cheng e Xu (2019)



Fonte: Zhang, Cheng e Xu (2019)

4.0 EQUACIONAMENTO PROPOSTO

Neste capítulo é apresentada a metodologia utilizada neste trabalho. Alguns resultados preliminares são apresentados para discussões prévias sobre a formulação.

4.1 ALTERAÇÕES PROPOSTAS PARA EQUACIONAMENTO DE Zhang, Cheng e Xu (2019)

Como mencionado anteriormente, o presente trabalho foi baseado, em parte, na metodologia proposta por Zhang, Cheng e Xu (2019), porém sem consideração das restrições de *dripping* e sem agrupar as restrições de *overhang* na forma global. O método de projeção para densidades é alterado para equação proposta por Wang, Lazarov e Sigmund (2011), através da equação (2.10). A restrição t_o é normalizada com a função de relaxação ζ_o e, generalizando para ambos os pacotes (direita e esquerda), temos

$$t_o(\tilde{\rho}_o) = \frac{\langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle}{\zeta_o} - \frac{\cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o\|}{\zeta_o} - 1 \leq 0; \quad o = 1 \dots N_o. \quad (4.57)$$

O problema geral, equação (3.54), é reescrito considerando as alterações propostas

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(\tilde{\rho}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\tilde{\rho}) \\ \text{T.q} \quad V(\tilde{\rho}) \leq \bar{V} \\ \quad \mathbf{K}(\tilde{\rho}) \mathbf{U}(\tilde{\rho}) = \mathbf{F} \\ \quad t_o(\tilde{\rho}_o) \leq 0; \quad o = 1, 2 \dots N_o \\ \quad 0 < \rho_{min} \leq \tilde{\rho}_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{array} \right. , \quad (4.58)$$

onde $t_o(\tilde{\rho}_o)$ são todas as restrições de *overhang*, tanto para pacotes com padrão direita quanto para a esquerda, e N_o o numero total de restrições de *overhang*. Convertendo o problema (4.58) na forma da equação (2.17) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad L^k(\tilde{\rho}, r^k, \boldsymbol{\mu}^k) = C(\tilde{\rho}) + \frac{r^k}{2} \left\langle \frac{\mu^k}{r^k} + V(\tilde{\rho}) \right\rangle^2 + \frac{r^k}{2} \sum_{o=1}^{N_o} \left\langle \frac{\mu_o^k}{r^k} + t_o^k(\tilde{\rho}_o) \right\rangle^2 \\ \text{T.q} \quad \mathbf{K}(\tilde{\rho}) \mathbf{U}(\tilde{\rho}) = \mathbf{F} \\ \quad 0 < \rho_{min} \leq \tilde{\rho}_e^k \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{array} \right. . \quad (4.59)$$

Como $\tilde{\rho}$ é calculado através de operação de filtro, projeção e correção para ρ_{min} , é necessário realizar uma correção para as variáveis de projeto matemáticas x através

das derivadas das funções utilizando a regra da cadeia. As derivadas das funções seguem o modelo de derivada de uma função genérica apresentada através da equação (2.13). Para derivada referente a correção de ρ_{min}

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \hat{\rho}_j} = (1 - \rho_{min}) \delta_{ij}, \quad (4.60)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Para a derivada da projeção *heaviside*

$$\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_c} = \frac{\beta \sec(\beta(\rho_c - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \delta_{jc}, \quad (4.61)$$

a derivada do filtro de densidades

$$\frac{d\rho_c}{dx_m} = \frac{w(x_m)}{\sum_{i \in N_e} w(x_m)}, \quad (4.62)$$

a derivada da flexibilidade

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{\rho}_i} = -(p\tilde{\rho}_i^{(p-1,0)}) \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i, \quad (4.63)$$

e a derivada da restrição de volume

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\rho}_i} = V_i \delta_{im}. \quad (4.64)$$

Considerando a restrição t_o normalizada, sua derivada pode ser descrita como

$$\frac{\partial t_o}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{\partial(\langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle \zeta_o^{-1})}{\partial \tilde{\rho}_i} - \frac{\partial(\cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o\| \zeta_o^{-1})}{\partial \tilde{\rho}_i}. \quad (4.65)$$

onde, para facilitar o entendimento, $\frac{\partial t_o}{\partial \tilde{\rho}_i}$ é desenvolvido por partes. O primeiro termo é descrito por

$$\frac{\partial(\langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle \zeta_o^{-1})}{\partial \tilde{\rho}_i} = \left(\frac{\partial \nabla \tilde{\rho}_o}{\partial \tilde{\rho}_i} \mathbf{n} \right) \frac{1}{\zeta_o} - \frac{\langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle}{\zeta_o^2} \frac{\partial \zeta_o}{\partial \tilde{\rho}_i}, \quad (4.66)$$

com

$$\frac{\partial \nabla \tilde{\rho}_o}{\partial \tilde{\rho}_i} = \bar{\mathbf{Z}} \frac{\partial \tilde{\rho}_o}{\partial \tilde{\rho}_i} = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_{o_i} \quad (4.67)$$

onde \mathbf{V}_{o_i} é um vetor 4×1 que estende o conceito de delta de Kronecker para o pacote o , que contenha essa variável. A derivada do segundo termo é descrita por

$$\frac{\partial(\cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o\| \zeta_o^{-1})}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{\partial \|\nabla \tilde{\rho}_o\|}{\partial \tilde{\rho}_i} \frac{\cos(\bar{\alpha})}{\zeta_o} - \|\nabla \tilde{\rho}_o\| \frac{\cos(\bar{\alpha})}{\zeta_o^2} \frac{\partial \zeta_o}{\partial \tilde{\rho}_i}, \quad (4.68)$$

onde a derivada de $\|\nabla \tilde{\rho}_o\|$ em relação a $\tilde{\rho}_i$ é

$$\frac{\partial \|\nabla \tilde{\rho}_o\|}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{1}{2 \|\nabla \tilde{\rho}_o\|} \left(\frac{\partial \nabla \tilde{\rho}_o}{\partial \tilde{\rho}_i} \nabla \tilde{\rho}_o + \nabla \tilde{\rho}_o \frac{\partial \nabla \tilde{\rho}_o}{\partial \tilde{\rho}_i} \right), \quad (4.69)$$

onde, devido a simetria,

$$\frac{\partial \|\nabla \tilde{\rho}_o\|}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{\langle \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_{o_i}, \nabla \tilde{\rho}_o \rangle}{\|\nabla \tilde{\rho}_o\|}. \quad (4.70)$$

A derivada da função de relaxação é igual para todos os casos acima, na forma de

$$\frac{\partial \zeta_o}{\partial \tilde{\rho}_i} = v \delta_{oi}, \quad (4.71)$$

onde δ_{oi} é o delta de Kronecker, sendo o valor da derivada $\frac{\partial \zeta_o}{\partial \tilde{\rho}_i}$ diferente de zero apenas quando o elemento central da restrição o for igual ao elemento i . Considerando as correções aplicadas para as variáveis de projeto x_m , demonstrado através da equação (2.13), as derivadas reescritas para LA assumem a forma

$$\frac{dL(\tilde{\boldsymbol{\rho}})}{dx_m} = \frac{dC(\tilde{\boldsymbol{\rho}})}{dx_m} + \langle \mu_v + rV(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) \rangle \frac{dV(\tilde{\boldsymbol{\rho}})}{dx_m} + \sum_{o=1}^{N_o} \langle \mu_o + rt_o(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_o) \rangle \frac{dt_o(\tilde{\boldsymbol{\rho}})}{dx_m}, \quad (4.72)$$

onde μ_v é o multiplicador associado a restrição de volume e μ_o , $o = 1..N_o$ são os multiplicadores associados as restrições de *overhang*. A implementação numérica de todas as derivadas foram comparadas com o método de diferenças finitas centrais para validação.

4.1.1 Dados para resultados iniciais

Os dados da tabela 4.2 são utilizados para uma avaliação inicial da formulação proposta. Para a continuação de β , neste trabalho optou-se por utilizar um valor de incremento contínuo ($\% \beta$) de 35% em cada iteração externa, diferente do utilizado por Zhang, Cheng e Xu (2019). O limite para β (β_{max}) também foi definido conforme estudos preliminares, sendo discutido posteriormente nesta subseção. Outro fator avaliado nos testes preliminares foi o custo computacional para a metodologia proposta, em que o uso de malhas refinadas dificultou a obtenção de uma solução. Por esse motivo, optou-se em utilizar malhas mais grosseiras, como indicadas na tabela 4.2, para as avaliações iniciais. Os valores iniciais para $\bar{\alpha}$ foram baseados nos que Zhang, Cheng e Xu (2019) utilizaram em seu trabalho, junto com os coeficientes para a função de relaxação (v e u). Foram utilizados propriedades mecânicas realísticas para o problema mecânico, diferentes dos utilizados no trabalho de referência.

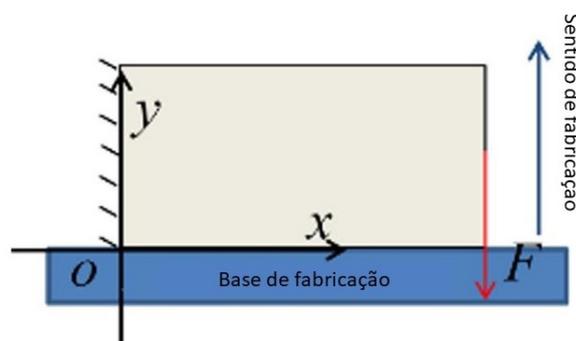
Tabela 4.2: Dados utilizados para os testes iniciais

Dados para o problema	
Dimensões do domínio Ω	$1,0\text{ m} \times 0,5\text{ m}$
Discretização do domínio Ω	80×40 ; 100×50
Ângulo limite ($\bar{\alpha}$)	30° ; 45° ; 60°
Valor inicial de β	1,0
Porcentagem para incremento de β ($\% \beta$)	1,35
Valor de β_{max}	6,0
Valor para η	0,5
Quantidade de elementos por pacote	4
Coefficientes para relaxação da restrição	$v = 0,01$; $u = 0,025$
Direção de fabricação	$\mathbf{n} = [0\ 1]^T$
Modulo de elasticidade	$E = 1 \times 10^5\text{ Pa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Força aplicada	$F = 100\text{ N}$
Espessura do componente	0,1 m
Valor SIMP	$p = 3$
Raio utilizado	0,1 m
Valor inicial para penalização (r)	15,0
Valor inicial para multiplicadores de lagrange (μ)	0,0

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

As condições de contorno aplicadas nos testes iniciais são similares as utilizadas pelos autores, conforme ilustrado na figura 4.36.

Figura 4.36: Domínio e condições de contorno utilizadas por Zhang, Cheng e Xu (2019) e nos testes iniciais deste trabalho.



Fonte: Zhang, Cheng e Xu (2019), adaptado

4.1.2 Resultados iniciais

A figura 4.37 mostra os resultados obtidos para o tamanho de malha de 80×40 , utilizando os dados da tabela 4.2.

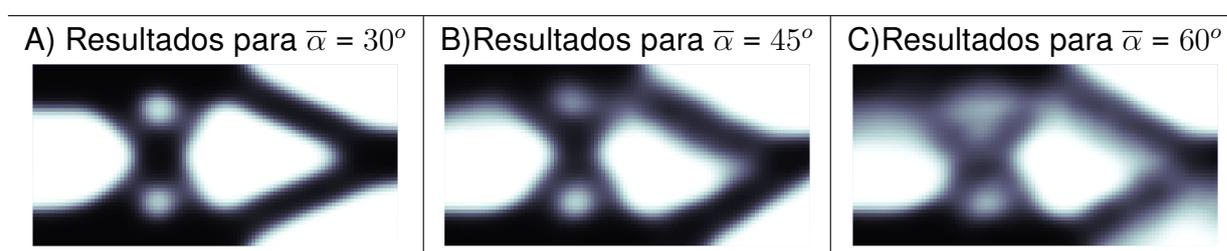
Figura 4.37: Resultados obtidos para a malha de 80×40 e os dados da tabela 4.2.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Pode-se verificar que algumas regiões apresentam escala de cinza. Com a alteração do tamanho da malha para 100×50 , obtemos os resultados apresentados na figura 4.38.

Figura 4.38: Resultados obtidos com a malha 100×50 e dados da tabela 4.2.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

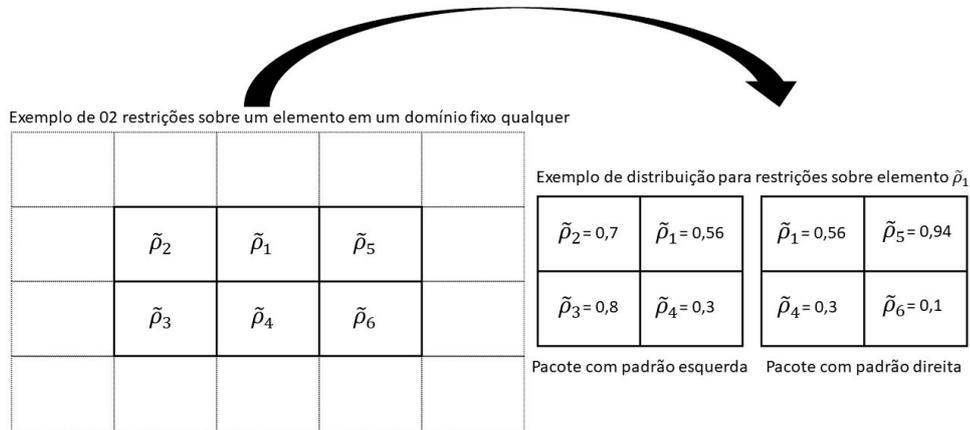
Apesar da pequena diferença do tamanho de malha, não se verifica alteração de topologia entre os resultados apresentados, tampouco melhora significativa na escala de cinzas.

4.1.3 Avaliação da formulação proposta neste trabalho

No trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019), as restrições locais de *overhang* são consideradas na forma global somente quando os dois pacotes (pacote com padrão esquerda e direita) formarem um valor de α maior que $\bar{\alpha}$. Isto é, ambos os pacotes devem violar a restrição para que sejam considerados na composição da restrição global. No caso deste trabalho, cada pacote contém uma restrição independente, ou seja, qualquer pacote que formar um valor de α maior que $\bar{\alpha}$ irá violar a restrição local (não necessitamos de que dois pacotes adjacentes sejam ativados) e será conside-

rado localmente. Um exemplo, ilustrado na figura 4.39, é utilizado para ilustrar esta diferença.

Figura 4.39: Exemplo utilizado para demonstração do comportamento entre restrições de Zhang, Cheng e Xu (2019) e deste trabalho



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Utilizando o exemplo ilustrado na 4.39, obtemos

$$A^l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\rho}_o^l = \begin{bmatrix} 0,56 \\ 0,7 \\ 0,8 \\ 0,3 \end{bmatrix}; \quad A^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\rho}_o^d = \begin{bmatrix} 0,56 \\ 0,94 \\ 0,1 \\ 0,3 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Considerando um sentido de fabricação $\mathbf{n} = [0, 1]^T$, um valor limite $\bar{\alpha} = 45^\circ$, e as equações de restrição locais (3.42) e (3.43), obtemos

$$t_o^l = 0.1753 \quad \text{e} \quad t_o^d = -0.1338, \quad (4.74)$$

tal que a restrição do pacote da esquerda é violada, enquanto a restrição do pacote da direita não. Na formulação proposta neste trabalho, o otimizador irá considerar t_o^l (restrição ativa) e não irá considerar t_o^d , que será desativada no Lagrangino Aumentado. No entanto, considerando a proposta de Zhang, Cheng e Xu (2019), através das equações (3.51) e (3.49), utilizando $\mu = 100$, $v = 0.01$ e $u = 0.025$, o valor da função indicadora para esse elemento de referencia é

$$\psi_e = 7.2201 \times 10^{-8}, \quad (4.75)$$

tal que nenhuma das restrições será adicionada na medida global. Assim, verifica-se que a formulação proposta neste trabalho é mais restritiva do que a proposta original de Zhang, Cheng e Xu (2019), sendo que as análises realizadas nesta subseção são particulares para o presente trabalho.

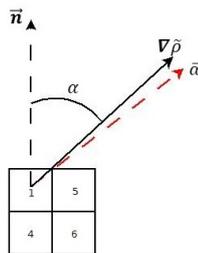
Relação entre $\bar{\alpha}$, n e escala de cinzas.

Um comportamento observado ao longo deste trabalho é a presença de grandes regiões com densidades intermediárias a medida que o valor de ângulo limite $\bar{\alpha}$ aumenta. Para ilustrar este comportamento, consideramos a distribuição de material em um pacote à direita, figura 4.40, com

$$\mathbf{A}^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

e direção de fabricação $\mathbf{n} = [0 \ 1]^T$.

Figura 4.40: Posição do vetor gradiente (tracejado) em relação ao máximo ângulo (vermelho)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Considerando valores limites $\bar{\alpha} = 30^\circ$, $\bar{\alpha} = 45^\circ$ e $\bar{\alpha} = 60^\circ$, e sem o uso da função de relaxação, observamos que as distribuições de material

$$\tilde{\rho}_o^d = [0,51 \ 0,89 \ 0,32 \ 0,2]^T; \quad \alpha = 29,60^\circ, \quad (4.77)$$

$$\tilde{\rho}_o^d = [0,6 \ 0,55 \ 0,59 \ 0,1]^T; \quad \alpha = 43,72^\circ, \quad (4.78)$$

e

$$\tilde{\rho}_o^d = [0,6 \ 0,4 \ 0,625 \ 0,3]^T; \quad \alpha = 59,03^\circ, \quad (4.79)$$

satisfazem as restrições, porém com uma distribuição de material que leva a regiões com mais cinzas a medida que o ângulo aumenta. Considerando esse comportamento, observa-se que a presença da escala de cinza nos resultados apresentados (resultado C, nas figuras 4.37 e 4.38) auxilia o otimizador a satisfazer as restrições de *overhang*, principalmente no contorno do componente, onde o efeito de *overhang* é predominante.

Porém, o excesso de escala de cinza pode inviabilizar a utilização dos resultados obtidos. Observa-se que não é possível identificar escalas de cinza nos resultados de Zhang, Cheng e Xu (2019), possivelmente devido a operação de pós-processamento realizada pelos autores. No entanto, salienta-se que esta limitação de ângulo limite imposta pela consideração de cada pacote (esquerdo e direito) isoladamente não é prejudicial ao uso da formulação proposta, devido a inerente limitação de ângulo limite associada ao processo de manufatura aditiva por deposição de material.

Problema sobre a distribuição de material devido ao valor de β_{max}

O uso do sistema de mapeamento local proposto por Zhang, Cheng e Xu (2019) provoca um compartilhamento entre elementos e restrições. Considerando a figura 4.41 como um exemplo de domínio fixo, com 60 elementos e com pacotes de 4 elementos para o cálculo de $\nabla \tilde{\rho}_o$. Avaliando o elemento 35 do domínio fixo, nota-se que, além das 2 restrições onde ele é o elemento central, existem outras 6 restrições que consideram o seu valor.

Figura 4.41: Exemplo de restrições aplicados ao elemento 35

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

A tabela 4.3 apresenta todos os pacotes que o elemento 35 é incluído, onde os termos em negrito representam os elementos centrais de cada pacote.

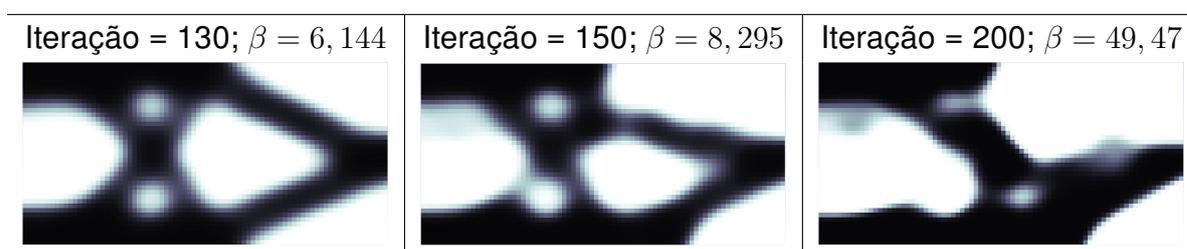
Tabela 4.3: Pacotes que contém o elemento 35

Compartilhamento do elemento 35 entre pacotes	
Pacote 1	Elementos 34 ,35,24,25
Pacote 2	Elementos 35 ,34,24,25
Pacote 3	Elementos 35 ,36,26,25
Pacote 4	Elementos 36 ,35,25,26
Pacote 5	Elementos 45 ,44,34,35
Pacote 6	Elementos 45 ,46,36,35
Pacote 7	Elementos 44 ,45,34,35
Pacote 8	Elementos 46 ,45,36,35

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Esse compartilhamento de elementos entre várias restrições pode gerar problemas na distribuição de material quando o valor de β provoca projeções agressivas. A projeção da densidade pode gerar uma alteração brusca no valor da densidade em um elemento e, em conjunto ao compartilhamento entre restrições, pode gerar violações em várias restrições, levando ao otimizador alterar a distribuição de material para satisfazer essas restrições. O resultados da figura 4.42 ilustram este comportamento para o caso $\beta > 6,0$.

Figura 4.42: Distribuições de material obtidas para valores de β_{max} maiores do que 6,0.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Este compartilhamento não é observado no trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019), porém os autores utilizam uma estratégia para a continuidade do valor de β diferente da utilizada no presente trabalho (estratégia de crescimento contínuo). Através dos resultados iniciais, foi verificado que, para essa estratégia adotada, um valor para β_{max} igual a 6,0 não apresenta problemas na distribuição de material, porém resulta em várias áreas com escala de cinza.

Relação entre R e β_{max} para impor uma camada de transição na distribuição de material no contorno

Avaliando os resultados iniciais obtidos em conjunto com a estratégia adotada neste trabalho para o valor máximo de β (β_{max}), verifica-se que os resultados iniciais apresenta uma grande quantidade de escala de cinza, porém sua presença auxilia a convergência devido aos fatores apresentados anteriormente. Para melhorar a interpretação dos resultados, mantendo o valor de β_{max} igual a 6,0, é proposto o uso de uma camada de transição entre as densidades projetadas máximas e mínimas no contorno do componente.

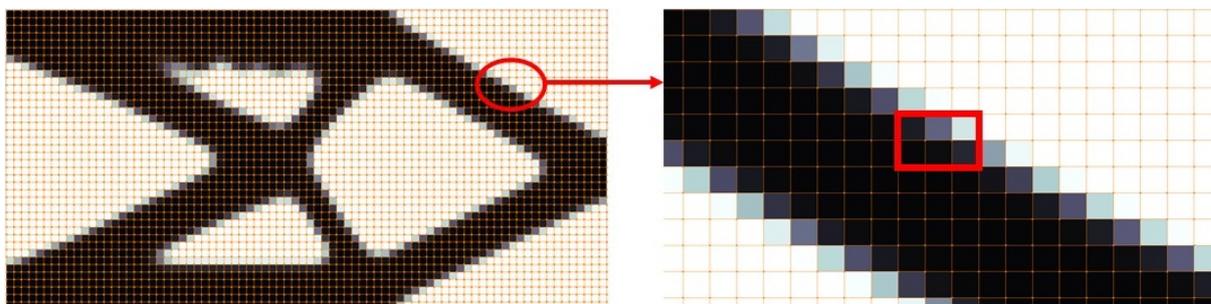
O trabalho de Silva, Beck e Sigmund (2019) propõe uma relação entre R e β_{max} para formar essa camada de transição, porém os autores utilizaram essa relação voltada para restrições de tensão, onde é verificado que densidades relativas intermediárias auxiliam na solução do problema de concentração de tensão no contorno irregular obtido por otimização topológica. O estudo aborda conceitos de manufatura

dentro da otimização e o problema de regiões com concentradores de tensão. Essas regiões normalmente são associadas ao uso de um domínio fixo que, durante a distribuição de material pelo otimizador, pode gerar uma região com geometria complexa, apresentando concentradores de tensão. Uma forma que os autores encontraram para suavizar/reduzir esses concentradores é permitir uma camada de transição de material no contorno da topologia, através de uma relação entre R , β_{max} e tamanho da malha. Os autores, analisando o comportamento da sensibilidade da equação (2.10), estabelecem a relação

$$\beta_{lim} = \frac{2R}{l_e}, \quad (4.80)$$

onde l_e é o tamanho do elemento utilizado, R é o raio do filtro e β_{lim} é o valor limite que será utilizado para estabelecer o valor de β_{max} . Conforme apresentado anteriormente, o uso de densidades intermediárias nesta metodologia pode auxiliar na imposição de restrições no contorno do componente. A figura 4.43 ilustra um elemento no contorno do componente. Dependendo do valor adotado para $\bar{\alpha}$, se a região apresentar uma alteração brusca no valor da densidade dentro do pacote, pode gerar uma violação para a restrição.

Figura 4.43: Região de transição entre sólido e vazio no contorno da topologia.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Silva, Beck e Sigmund (2019) verificam em seus resultados que o valor para β_{max} deve conter uma relação com β_{lim} , igual a $\beta_{lim}/2$. No capítulo de resultados, será demonstrado o uso da equação (4.80), bem uma avaliação entre β_{max} e β_{lim} .

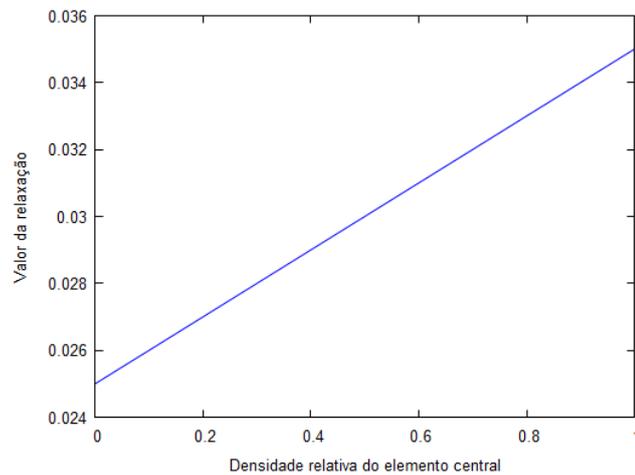
Neste trabalho, foi avaliado que o uso de uma camada de transição entre densidades projetadas máximas e mínimas no contorno do componente auxilia a imposição das restrições de *overhang*.

Função de relaxação de Zhang, Cheng e Xu (2019)

Zhang, Cheng e Xu (2019) utilizam a equação (3.44) (relaxação linear) para facilitar a convergência das restrições durante iterações finais em seu problema. Esta

abordagem foi inicialmente aplicada neste trabalho com o mesmo objetivo, utilizando os mesmos coeficientes de Zhang, Cheng e Xu (2019) ($v = 0,01$ e $u = 0,025$). Contudo, foi avaliado que os valores de relaxação obtidos por estes coeficientes não são suficientes na imposição local das restrições. É possível alterar os coeficientes para obter valores maiores de relaxação mas, devido ao uso do elemento central como variável desta função, seu comportamento é fixo entre os limites máximos e mínimos da densidade projetada, o que também pode limitar os valores obtidos pela relaxação linear. Este comportamento é ilustrado na figura 4.44, utilizando os coeficientes $v = 0,01$ e $u = 0,025$, variando a densidade projetada entre valores máximos e mínimos.

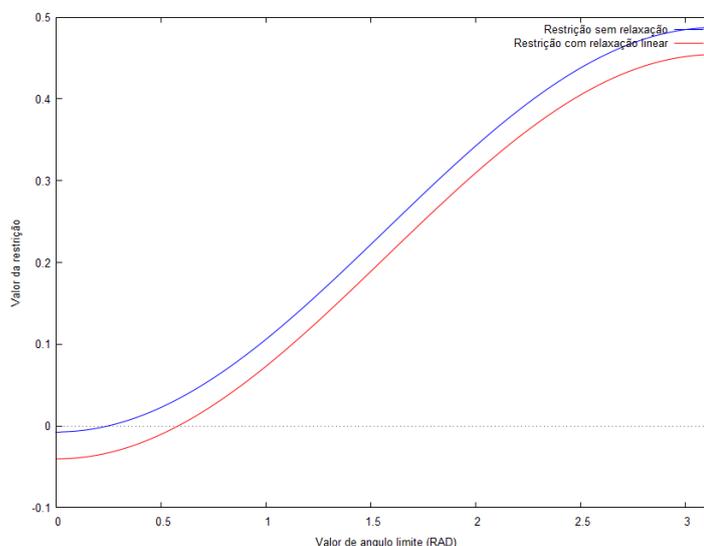
Figura 4.44: Gráfico do comportamento da relaxação linear utilizada por Zhang, Cheng e Xu (2019)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O gráfico da figura 4.45 ilustra o comportamento de uma restrição sem o uso da relaxação e seu comportamento com o uso da relação proposta por Zhang, Cheng e Xu (2019), através da distribuição $\tilde{\rho}_o^d = [0,8 \ 0,7 \ 0,5 \ 0,6]^T$ e $\mathbf{n} = [0 \ 1]^T$, calculando o valor da restrição t_o através da equação (3.43).

Figura 4.45: Gráfico da restrição com relaxação (vermelho) e sem o uso de relaxação (azul)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Observando o comportamento ilustrado na figura 4.45, o valor que máximo para $\bar{\alpha}$, em que t_o seja igual a 0, 0, é de $26,56^\circ$ para restrição sem relaxação e de $41,68^\circ$ para restrição com relaxação linear. Esta diferença entre valores de $\bar{\alpha}$ representa a relaxação aplicada sobre esta restrição. Para Zhang, Cheng e Xu (2019) a relaxação linear utilizada pode ser suficiente devido ao uso de uma restrição global equivalente mas neste trabalho tornou o problema de difícil solução. Além dos valores de relaxação, é observado que a equação (3.44) não contém uma relação física com a restrição, pois o cálculo de α não depende apenas da densidade projetada do elemento central de cada pacote. Para melhorar os aspectos citados, é proposta uma abordagem diferente que utiliza informações da distribuição de densidades projetadas no pacote ($\tilde{\rho}_o$).

4.1.4 Nova proposta para função de relaxação

Silva, Beck e Sigmund (2019) fazem uma adaptação da função de relaxação proposta por Cheng e Guo (1997) para restrições de tensão. Neste trabalho é utilizada a mesma proposta de Cheng e Guo (1997), porém adaptada para considerar a norma-P das densidades projetadas que compõem cada pacote. A equação (4.57) é reescrita considerando esta nova proposta

$$t_o(\tilde{\rho}_o) = \langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle f(\tilde{\rho}_o) - \cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o\| \leq 0; \quad o = 1 \dots N_o, \quad (4.81)$$

onde $f(\tilde{\rho}_o)$ é a função de relaxação proposta neste trabalho, que utiliza a informação das densidades projetadas do pacote que compõe a restrição o . O objetivo é utilizar a maior densidade dentro do pacote da restrição por meio de uma norma-P, assumindo

que este valor tem o maior impacto para o cálculo de α . A função de relaxação pode ser escrita como

$$f(\tilde{\rho}_o) = \frac{\|\tilde{\rho}_o\|_P}{\epsilon(1 - \|\tilde{\rho}_o\|_P) + \|\tilde{\rho}_o\|_P}, \quad (4.82)$$

onde $\|\tilde{\rho}_o\|_P$ é a norma-P aplicada sobre os elementos do pacote da restrição o e $\epsilon \in (0, 1)$ é um fator de relaxação. O cálculo da norma-P é obtido com

$$\|\tilde{\rho}_o\|_P = \left(\sum_{w=1}^{N_w} \tilde{\rho}_{ow}^P \right)^{1/P}, \quad (4.83)$$

sendo w o elemento dentro do pacote, N_w a quantidade de elementos em cada pacote e P o expoente da norma. Essa alteração na restrição faz com que sua derivada tenha que ser alterada, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_o}{\partial \tilde{\rho}_i} &= \left(\frac{\partial \langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle}{\partial \tilde{\rho}_i} f(\tilde{\rho}_o) \right) - \cos(\bar{\alpha}) \frac{\partial \|\nabla \tilde{\rho}_o\|_P}{\partial \tilde{\rho}_i} \\ \frac{\partial t_o}{\partial \tilde{\rho}_i} &= \frac{\partial \langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle}{\partial \tilde{\rho}_i} f(\tilde{\rho}_o) + \langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle \frac{\partial f(\tilde{\rho}_o)}{\partial \tilde{\rho}_i} - \cos(\bar{\alpha}) \frac{\partial \|\nabla \tilde{\rho}_o\|_P}{\partial \tilde{\rho}_i}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

As derivadas de $\frac{\partial \langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle}{\partial \tilde{\rho}_i}$ e $\frac{\partial \|\nabla \tilde{\rho}_o\|_P}{\partial \tilde{\rho}_i}$ foram apresentadas nas equações (4.67) e (4.70) respectivamente. A derivada da função de relaxação é dada por

$$\frac{\partial f(\tilde{\rho}_o)}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{\partial f(\tilde{\rho}_o)}{\partial \|\tilde{\rho}_o\|_P} \frac{\partial \|\tilde{\rho}_o\|_P}{\partial \tilde{\rho}_i} \quad (4.85)$$

onde o primeiro termo, $\frac{\partial f(\tilde{\rho}_o)}{\partial \|\tilde{\rho}_o\|_P}$, é a derivada da função de relaxação em relação a norma, sendo descrito por

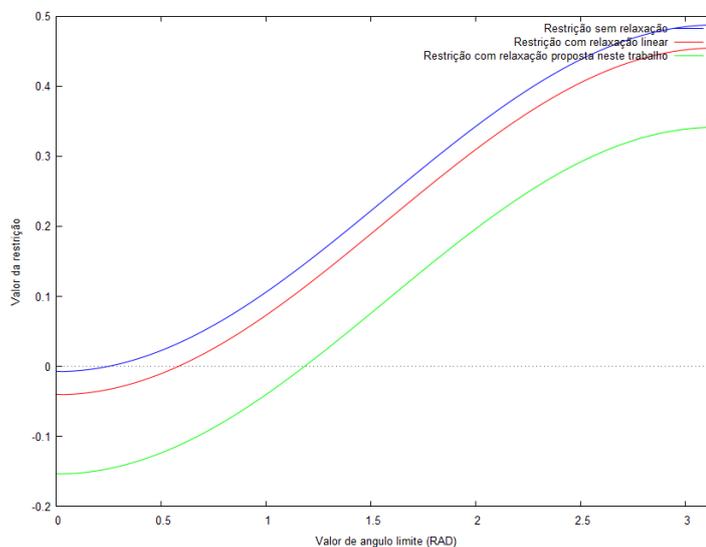
$$\frac{\partial f(\tilde{\rho}_o)}{\partial \|\tilde{\rho}_o\|_P} = \frac{1}{\|\tilde{\rho}_o\|_P + \epsilon(1 - \|\tilde{\rho}_o\|_P)} - \frac{(1 - \epsilon)\|\tilde{\rho}_o\|_P}{(\|\tilde{\rho}_o\|_P + \epsilon(1 - \|\tilde{\rho}_o\|_P))^2} \quad (4.86)$$

e o segundo termo

$$\frac{\partial \|\tilde{\rho}_o\|_P}{\partial \tilde{\rho}_i} = \sum_{w=1}^{N_w} \tilde{\rho}_{ow}^{\frac{1}{P}-P} \sum_{w=1}^{N_w} \tilde{\rho}_{ow}^{P-1} \delta_{w_i}. \quad (4.87)$$

A figura 4.46 compara a relaxação linear utilizada por Zhang, Cheng e Xu (2019) e a função de relaxação proposta, com a restrição sem relaxação em função de $\bar{\alpha}$. Para demonstrar esse comportamento, são utilizados os mesmos dados utilizados anteriormente ($\tilde{\rho}_o^d = [0, 8 \quad 0, 7 \quad 0, 5 \quad 0, 6]^T$ e $\mathbf{n} = [0 \quad 1]^T$), valor P igual a 4,0 e ϵ de 0,5.

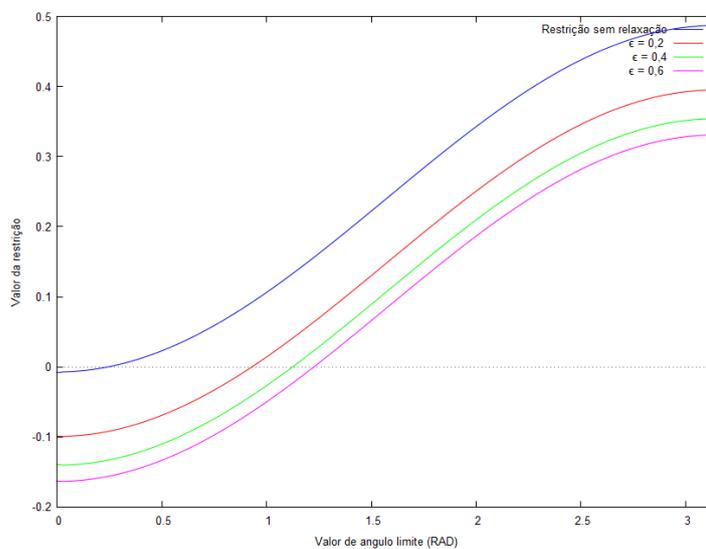
Figura 4.46: Comportamento de uma restrição sem relaxação (azul), relaxação linear (vermelho), utilizando os coeficientes $v = 0,01$ e $u = 0,025$, e a nova relaxação (verde), utilizando P igual a $4,0$ e ϵ de $0,5$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Para esse caso de distribuição, o valor de $\bar{\alpha}$ para t_o igual a $0,0$ utilizando a relaxação proposta é de $71,87^\circ$. Contudo, é possível obter valores similares com a relaxação linear, mas a vantagem observada nessa proposta é o uso de $\tilde{\rho}_o$ como variável da equação (4.82), estabelecendo uma relação física sobre o cálculo de α . Essa maior relaxação também contém uma relação com o valor de ϵ . O gráfico da figura 4.47 ilustra algumas variações para o valor de ϵ . Observa-se que, quanto maior o valor de $\epsilon = (0,1)$, maior a relaxação aplicada a restrição. Para este trabalho foi adotado o valor de ϵ igual a $0,5$, obtido após testes numéricos.

Figura 4.47: Comportamento da equação 4.82 com o valor de ϵ , para $\epsilon = 0,2$ (verde), $\epsilon = 0,4$ (vermelho) e $\epsilon = 0,6$ (rosa). A curva em azul não apresenta relaxação.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Com uma maior relaxação, e com a relação física estabelecida com a restrição, é observado uma melhora na convergência do problema e também na distribuição de material. Esses fatores serão discutidos no capítulo de resultados.

5.0 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com as formulações propostas, bem como comparações com resultados da literatura. Este capítulo será dividido em 5 seções. A primeira é a avaliação do problema solucionado através do uso da equação (4.80) (relação proposta para β_{max}). Na segunda seção serão apresentados os resultados obtidos com o do uso da nova função de relaxação, Eq. (4.82), e a comparação com os resultados obtidos com a função de relaxação linear, Eq. (3.44). Na terceira parte será avaliado o efeito da variação do tamanho de malha nos resultados. A quarta seção apresenta o comportamento da formulação proposta em um caso alternativo, onde a posição do carregamento é modificada. A quinta seção apresenta uma comparação entre os resultados de Zhang, Cheng e Xu (2019) com os resultados obtidos com a formulação proposta neste trabalho.

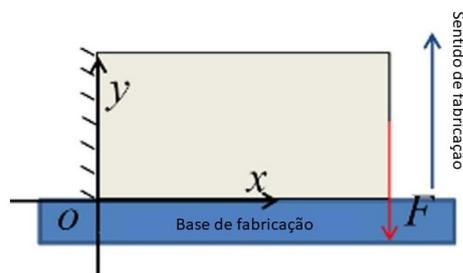
5.1 DADOS INICIAIS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA GERAL

O problema geral, conforme apresentado na seção 4.1, é descrito por

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad C(\tilde{\rho}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\tilde{\rho}) \\ \text{T.q} \quad V(\tilde{\rho}) \leq \bar{V} \\ \quad \quad \mathbf{K}(\tilde{\rho}) \mathbf{U}(\tilde{\rho}) = \mathbf{F} \\ \quad \quad t_o(\tilde{\rho}_o) \leq 0; \quad o = 1, 2, \dots, N_o \\ \quad \quad 0 < \rho_{min} \leq \tilde{\rho}_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{array} \right. \quad (5.88)$$

Este é o mesmo caso estudado anteriormente neste trabalho, para $\bar{\alpha}$ de 30° , 45° e 60° . Devido aos resultados obtidos para 60° , apresentados nas figuras 4.37 e 4.38, bem como as limitações inerentes ao processo, serão considerados somente os ângulos de 30° , 45° . A figura 5.48 ilustra a geometria e as condições de contorno aplicados ao problemas desta seção.

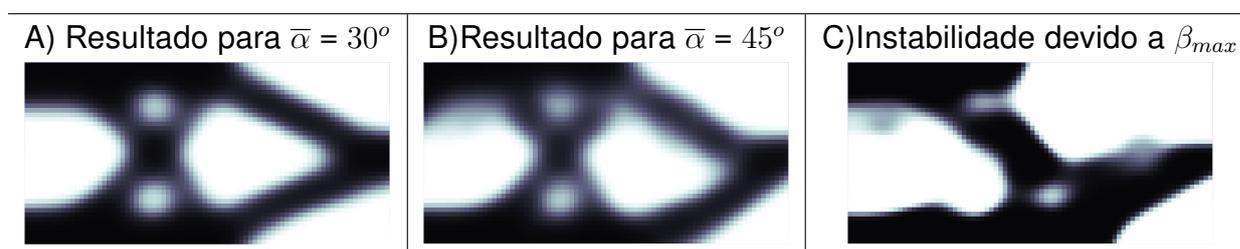
Figura 5.48: Domínio e condições de contorno utilizadas para o primeiro caso de teste.



Fonte: Zhang, Cheng e Xu (2019), adaptado

Conforme apresentado anteriormente, a metodologia utilizada neste trabalho apresenta problemas na distribuição de material para este caso de estudo quando o valor de β_{max} ultrapassa 6,0. Por isso, esse valor é considerado como referência nos estudos apresentados neste capítulo. A figura 5.49 ilustra os resultados iniciais, apresentados anteriormente, onde a figura C demonstra o efeito de β_{max} na distribuição de material.

Figura 5.49: Resultados iniciais apresentados na seção 4.1.2.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Conforme discutido na subseção 4.1.3, o valor adotado para β_{max} igual a 6,0 gera regiões de escala de cinza. Para controlar essas regiões através de uma região de transição, mas sem alterar o valor de β_{max} , é proposto o uso da relação apresentada por Silva, Beck e Sigmund (2019), discutida na subseção 4.1.3. Esta relação será utilizada neste capítulo para a imposição de uma região de transição de material no contorno, sendo propostos três modelos para equação (4.80). Esses modelos são baseados nos estudos apresentados no trabalho de Silva, Beck e Sigmund (2019). Cada modelo apresenta regiões de transição com tamanhos diferentes. Como o valor de β_{max} e domínio são fixos, existem diferenças para o valor R entre o modelo A e B. Para o modelo C o valor de β_{max} é aumentado, com o objetivo de avaliar o efeito do valor de β e a distribuição de material através do uso dessa relação. Os modelos propostos são apresentadas na tabela 5.4.

Tabela 5.4: Modelos para o estudo da equação (4.80), para $\bar{\alpha}$ de 30° e 45° .

Modelo A	Modelo B	Modelo C
$\beta_{max} = 6.0$	$\beta_{max} = 6.0$	$\beta_{max} = 12.0$
$\beta_{lim} = \beta_{max}$	$\beta_{lim} = 2\beta_{max}$	$\beta_{lim} = \beta_{max}$
$\beta_{lim} = 6.0$	$\beta_{lim} = 12.0$	$\beta_{lim} = 12.0$
$le = 1/80$	$le = 1/80$	$le = 1/80$
$R = 0,0375m$	$R = 0,075m$	$R = 0,075m$

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Conforme avaliado na subseção 4.1.3, o uso da metodologia apresentada neste trabalho implica em um custo computacional mais elevado. Por este motivo, será utilizada uma malha de menor refino para estes estudos iniciais. Com isso, os dados utilizados para o problema da equação (5.88), são apresentados na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Dados utilizados para os testes com o uso da equação (4.80).

Dados para o problema	
Dimensões do domínio Ω	$1,0 m \times 0,5 m$
Discretização do domínio Ω	80×40 ;
Ângulo limite ($\bar{\alpha}$)	30° ; 45°
Valor inicial de β	1,0
Valor de $\% \beta$	1,35
Valor de β_{max}	6,0; 12,0
Valor para η	0,5
Quantidade de elementos por pacote	4
Coefficientes para relaxação linear da restrição	$v = 0,01$; $u = 0,025$
Direção de fabricação	$\mathbf{n} = [0 \ 1]^T$
Modulo de elasticidade	$E = 1 \times 10^5 Pa$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Força aplicada	$F = 100,0 N$
Espessura do componente	0,1 m
Valor SIMP	$p = 3,0$
Raio utilizado	0,035 m; 0,075 m
Valor inicial para penalização (r)	15,0
Valor inicial para multiplicadores de lagrange (μ)	0,0

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

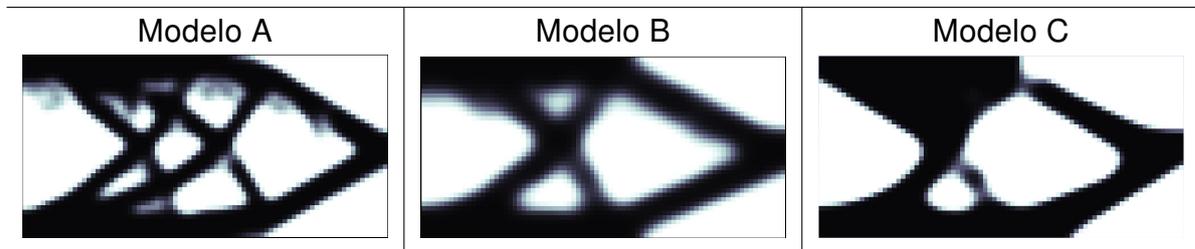
5.1.1 Resultados obtidos com a relação proposta pela equação (4.80)

Esta subseção apresenta os resultados obtidos com o uso da restrição t_o normalizada pela relaxação linear ζ_o em conjunto com relação proposta pela equação (4.80). A restrição é descrita por

$$t_o(\tilde{\rho}_o) = \frac{\langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle}{\zeta_o} - \frac{\cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o\|}{\zeta_o} - 1 \leq 0; \quad o = 1 \dots N_o. \quad (5.89)$$

Os resultados obtidos para $\bar{\alpha} = 30.0^\circ$ e os dados da tabela 5.5 são apresentados na figura 5.50.

Figura 5.50: Resultados obtidos utilizando a equação (4.80), para $\bar{\alpha} = 30^\circ$, com os valores de R da tabela 5.4 e dados gerais da tabela 5.5.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O resultado para o modelo A (figura 5.50 esquerda) apresenta maior quantidade de reforços internos devido ao menor raio de filtro. Os resultados para os modelos B e C (figura 5.50, centro e direita respectivamente) apresentam uma redução nos reforços internos em relação ao resultado do modelo A. O resultado do modelo C, apesar de conter regiões com problemas na distribuição de material, apresentou uma topologia definida, em relação a topologia obtida sem o uso da equação (4.80), ilustrada anteriormente através da figura 5.49 C.

Com objetivo de avaliar a estabilidade do processo de otimização ao longo das iterações, apresenta-se o valor da maior restrição de *overhang* violada por iteração na figura 5.51. Para uma melhor visualização, é utilizada uma escala logarítmica de base 10. Como em algumas iterações as restrições não são violadas, é aplicado um *offset* de 10^{-7} em todos os valores para evitar o cálculo de $\log(0)$.

Figura 5.51: Gráfico das restrições violadas referente ao resultado ilustrado na figura 5.50

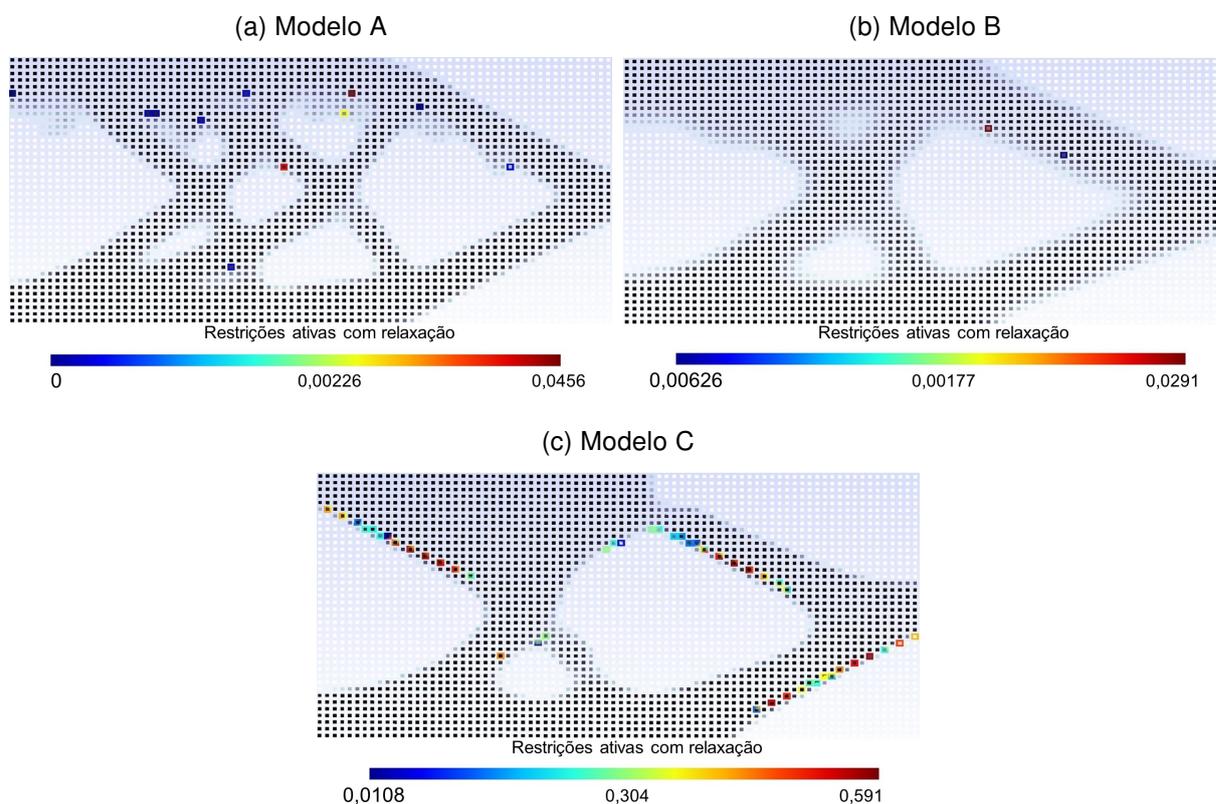


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

É possível observar que nos modelos B e C, algumas iterações apresentam restrições não violadas. Conforme o valor de β aumenta, é possível observar várias oscilações na restrição violada entre os modelos, com o modelo A apresentando a maior violação. O modelo B apresentou menores oscilações durante as iterações. Esse resultado para a relação do modelo B também é obtido no trabalho de Silva, Beck e Sigmund (2019).

Segundo Mirzendehtel e Suresh (2016), a eliminação de todas as regiões de *overhang* pode não ser possível devido a fatores geométricos, o que pode gerar restrições violadas no resultado final. Outro fator a ser considerado, é que o ponto de ótimo pode estar no limite do espaço viável, e com isso algumas restrições podem estar violadas no resultado final obtido com um método de penalização externa, como é o caso do Lagrangiano Aumentado. A figura 5.52 apresenta as restrições violadas nas topologias resultantes. Conforme discutido anteriormente, o efeito de *overhang* ocorre principalmente no contorno do componente, assim suas restrições ativas também estão localizadas nestas regiões.

Figura 5.52: Violações das restrições referente ao resultado ilustrado na figura 5.50.

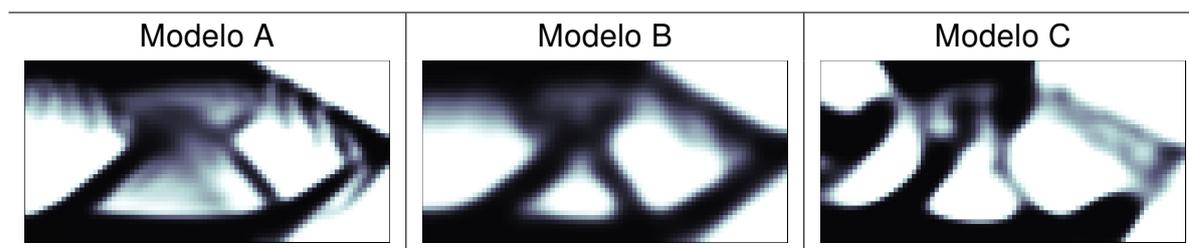


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O modelo C apresenta maior violação e quantidade de restrições violadas, sendo atribuído ao valor de β_{max} definido para este modelo.

Mesmo com a utilização da equação (4.80), não foi possível obter resultados satisfatórios para $\bar{\alpha}$ igual a 45° através da restrição com a relaxação linear. A figura 5.53 ilustra os resultados encontrados para $\bar{\alpha}$ igual a 45° com o domínio de 80×40 .

Figura 5.53: Resultados obtidos utilizando a equação (4.80) para $\bar{\alpha} = 45^\circ$, com tamanho de malha 80×40 , valores de R referentes a tabela 5.4 e dados gerais da tabela 5.5.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

5.2 ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA PROPOSTA DE FUNÇÃO DE RELAXAÇÃO

Na seção 4.1.4 foi apresentada uma proposta para alteração da função de relaxação, sendo a restrição $t_o(\tilde{\rho}_o)$ alterada para,

$$t_o(\tilde{\rho}_o) = \langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle f(\tilde{\rho}_o) - \cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o\| \leq 0; \quad o = 1 \dots N_o, \quad (5.90)$$

onde $f(\tilde{\rho}_o)$ é a nova função de relaxação e o restante do problema de otimização se mantém igual ao estudado na seção anterior. Para comparar as propostas, nesta seção é utilizada a equação (4.80) através dos modelos A, B e C da tabela 5.4. Posteriormente, será feito um refino de malha. O valor de P , para equação (4.82), foi definido para obter um valor com maior proximidade a maior densidade projetada dentro de cada pacote, mas evitando problemas numéricos. O valor de ϵ foi baseado nos estudos de Silva, Beck e Sigmund (2019) e teste numéricos. Os dados utilizados nesta seção são apresentados na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Dados utilizados para os testes com o uso das equações (4.80) e (4.82).

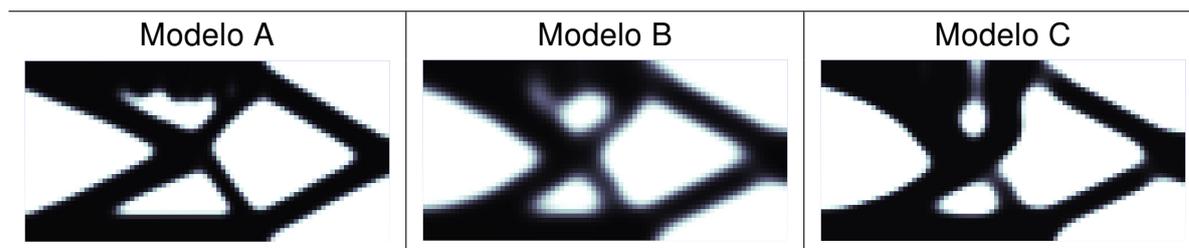
Dados para o problema	
Dimensões do domínio Ω	1,0 m × 0,5 m
Discretização do domínio Ω	80 × 40; 100 × 50; 120 × 60
Ângulo limite ($\bar{\alpha}$)	30°; 45°
Valor inicial de β	1,0
Valor de % β	1,35
Valor de β_{max}	6,0; 12,0
Valor para η	0,5
Quantidade de elementos por pacote	4
Direção de fabricação	$\mathbf{n} = [0 \ 1]^T$
Modulo de elasticidade	$E = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Força aplicada	$F = 100 \text{ N}$
Espessura do componente	0,1 m
Valor SIMP	$p = 3,0$
Raio utilizado	0,035 m; 0,075 m
Valor norma P	4,0
Valor de ϵ	0,5
Valor inicial para penalização (r)	15,0
Valor inicial para multiplicadores de lagrange (μ)	0,0

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

5.2.1 Resultados obtidos através do uso da equação (4.82)

Os resultados obtidos com o uso da relaxação proposta neste trabalho, equação (4.82), para os modelos A, B e C, são ilustrados na figura 5.54.

Figura 5.54: Resultados obtidos com o uso da equação de relaxação proposta com $\bar{\alpha}$ de 30° , com valores de R da tabela 5.4, dados gerais da tabela 5.6 e tamanho de malha 80×40 .

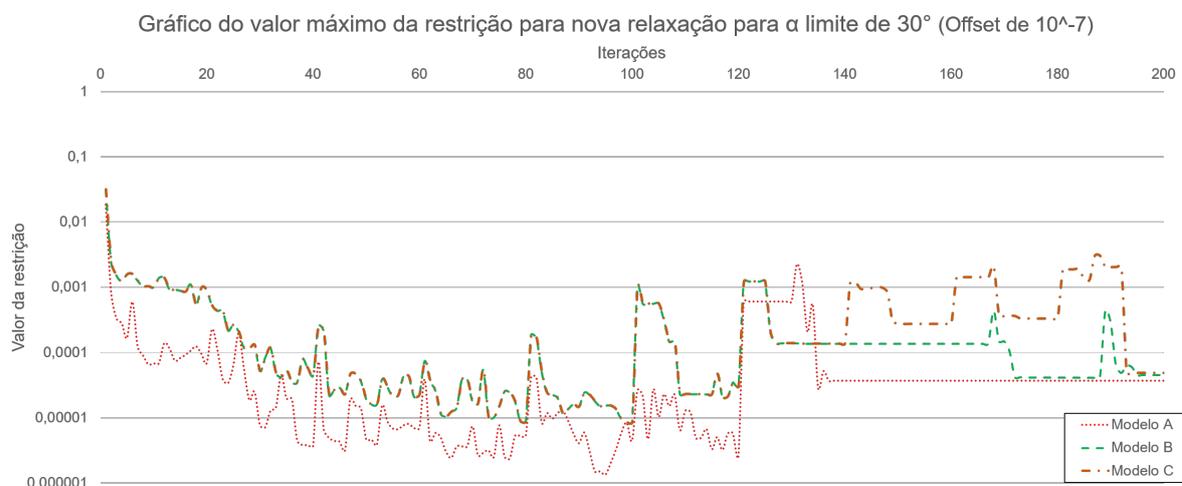


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Comparando com os resultados apresentados na figura 5.50, é possível notar uma redução nos reforços internos no modelo A e também na escala de cinza. Os modelos também apresentam topologias semelhantes às obtidas anteriormente, sendo que modelo C apresentou melhora na distribuição de material.

Para efeitos de comparação, são avaliados os valores da maior restrição de *overhang* violada por iteração nesse problema, figura 5.55. Para manter a relação com o gráfico apresentado na figura 5.51, é mantido a escala logarítmica de base 10 em conjunto com o *offset* de 10^{-7} .

Figura 5.55: Gráfico do comportamento das restrições com a proposta de relaxação referente a figura 5.54



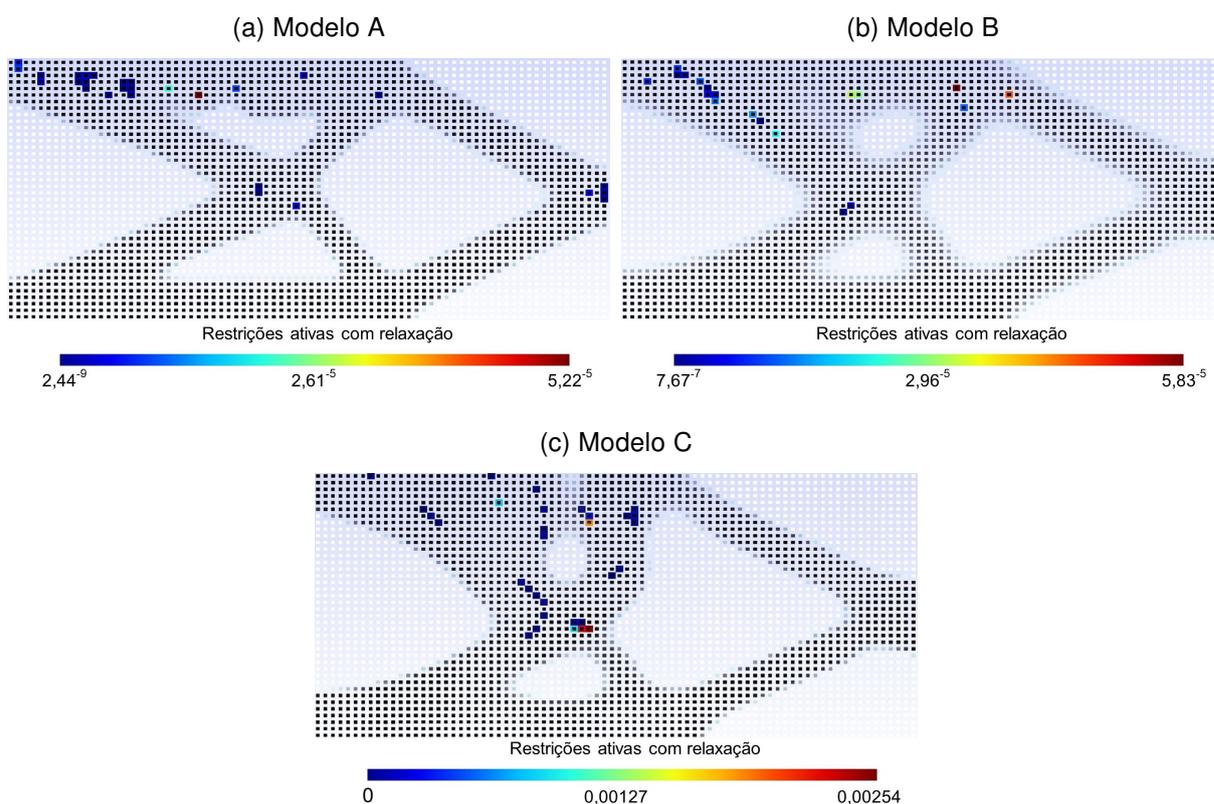
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

As oscilações das restrições ativas foram reduzidas através do uso da nova

relaxação, em destaque para o modelo A. O modelo C contém picos de oscilação durante as iterações, o que é esperado devido ao maior valor para β_{max} . O modelo B, similar ao ilustrado na figura 5.51, também apresenta maior estabilidade entre os modelos utilizados.

A figura 5.56 apresenta os resultados das restrições ativas obtidas pela equação (4.82).

Figura 5.56: Violações das restrições para malha 80×40 referente ao resultado ilustrado na figura 5.54.

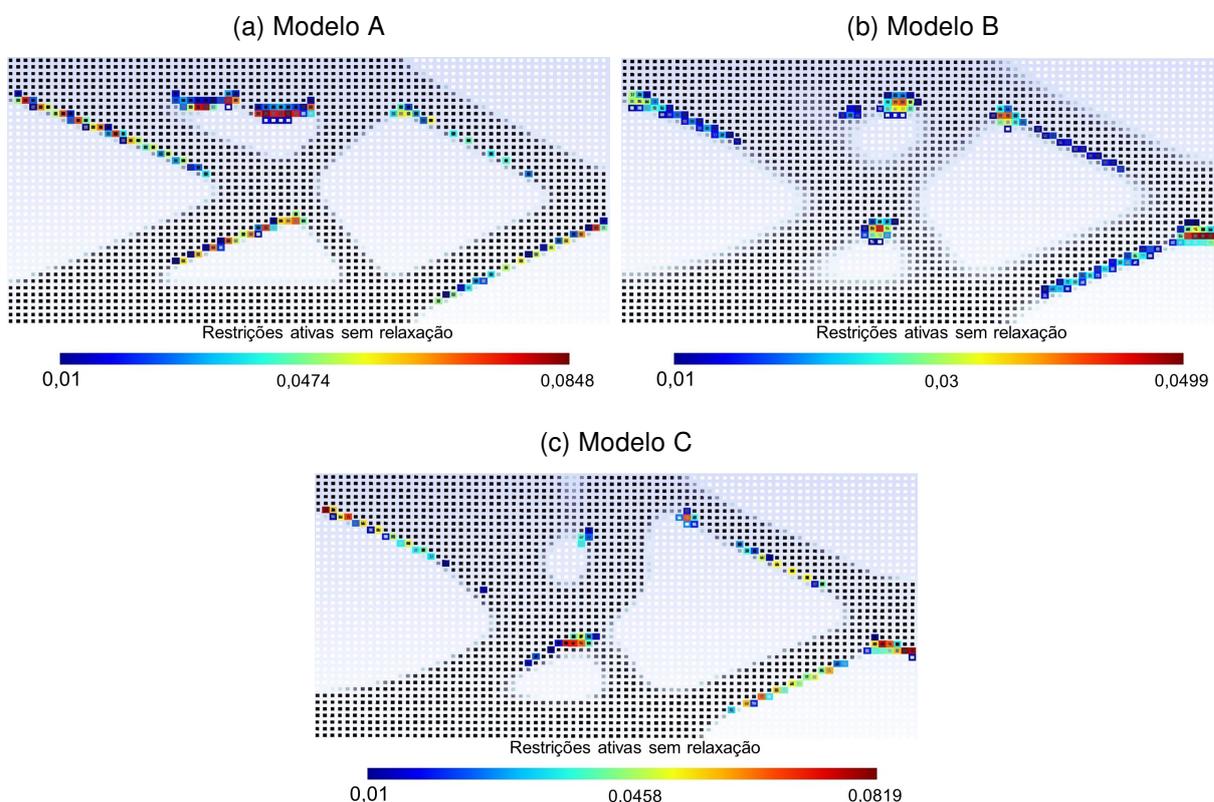


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Como ilustrado na figura 4.46, a equação (4.82) gera uma maior relaxação em comparação a proposta utilizada por Zhang, Cheng e Xu (2019). Nos modelos A e B, as restrições violadas contêm valores pequenos (menores que 1%) e as regiões violadas são apresentadas na figura 5.56. Como esperado, o modelo C apresenta maior violação que outros modelos, sendo atribuído ao valor de β_{max} utilizado.

Os resultados da figura 5.52 são reapresentados sem a aplicação de relaxação na figura 5.57 (são ilustradas apenas as restrições com violações maiores do que 1%).

Figura 5.57: Violações das restrições ativas sem uso da relaxação referente ao resultado ilustrado na figura 5.54.

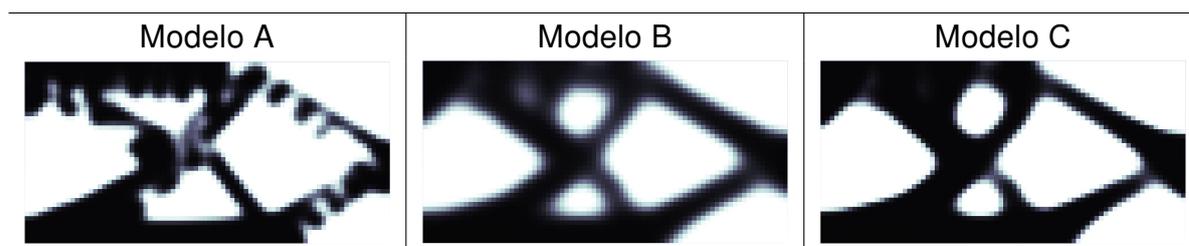


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

É esperado que o uso de uma maior relaxação permita maior quantidade de restrições violadas no resultado final, sendo esse efeito observado nos resultados da figura 5.57. Porém os valores máximos das restrições violadas entre as duas propostas de relaxação contém similaridades.

Os resultados obtidos para $\bar{\alpha} = 45^\circ$ são ilustrados na figura 5.58.

Figura 5.58: Resultados obtidos com o uso da equação de relaxação proposta e $\bar{\alpha} = 45^\circ$, com valores de R da tabela 5.4, dados gerais da tabela 5.6 e tamanho de malha 80×40 .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Em comparação com os resultados apresentados na figura 5.53, podemos no-

tar uma similaridade entre os resultados do modelo A. Os resultados dos Modelos B e C, através do uso da função de relaxação proposta, demonstram uma topologia mais simples. Novamente, avalia-se o comportamento das restrições violadas para *overhang*, através da figura 5.59, utilizando escala logarítmica de base 10 e com *offset* de 10^{-7} .

Figura 5.59: Gráfico do comportamento das restrições obtidas com a nova proposta de relaxação e $\bar{\alpha} = 45^\circ$ referente aos resultados ilustrados na figura 5.58



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

É observada uma oscilação maior para o modelo A, porém o modelo B continua sendo o que apresenta menor oscilação entre os modelos estudados. Esses resultados demonstram uma melhora em relação aos resultados apresentados na figura 5.53, sendo possível observar uma topologia satisfatória para os modelos B e C.

Avaliando a proposta de relaxação apresentada neste trabalho e a utilizada por Zhang, Cheng e Xu (2019), os resultados da figura 5.57 apresentam maior quantidade de restrições ativas. Devido a maior relaxação imposta, as restrições violadas apresentam maior valor, em comparação a proposta de Zhang, Cheng e Xu (2019), porém, o modelo C teve uma redução no valor de sua maior violação. O uso da equação (4.82) provoca uma maior relaxação nos valores da restrição, ocorrendo uma estabilidade nas restrições de *overhang* violadas por iteração. Considerando as topologias ilustradas na figura 5.54, os resultados dessa proposta são satisfatórios, sendo utilizados no restante dos estudos apresentados neste capítulo.

5.3 INFLUÊNCIA DO TAMANHO DE MALHA E EFEITO DE *DRIPPING*

O efeito da discretização do domínio é estudado nesta seção. Para isso, são estudadas as discretizações 100×50 e 120×60 , mantendo a relaxação da Eq. (4.82).

Como foi apresentado anteriormente, neste trabalho foi definido como estratégia fixar o valor de β_{max} devido a problemas na distribuição de material. Ao alterar o tamanho de malha, mantendo o valor de β_{max} fixo, o uso relação proposta pela equação (4.82) faz com que o valor de R seja alterado para cada tamanho de malha, o que pode tornar o problema dependente da discretização. Para avaliar a possibilidade deste efeito estar presente nos resultados deste trabalho, primeiro é alterado o tamanho de malha para 100×50 e recalculado o valor de R através da equação (4.80). Após, são utilizados os mesmos valores para R em um tamanho de malha de 120×60 . Os valores considerados para o tamanho de malha de 100×50 para os modelos A, B e C, são ilustrados na tabela 5.7.

Tabela 5.7: Modelos utilizados para o estudo de dependência de malha.

Modelo A	Modelo B	Modelo C
$\beta_{max} = 6.0$	$\beta_{max} = 6.0$	$\beta_{max} = 12.0$
$\beta_{lim} = \beta_{max}$	$\beta_{lim} = 2\beta_{max}$	$\beta_{lim} = \beta_{max}$
$\beta_{lim} = 6.0$	$\beta_{lim} = 12.0$	$\beta_{lim} = 12.0$
$le = 1/100$	$le = 1/100$	$le = 1/100$
$R = 0,03 m$	$R = 0,06 m$	$R = 0,06 m$

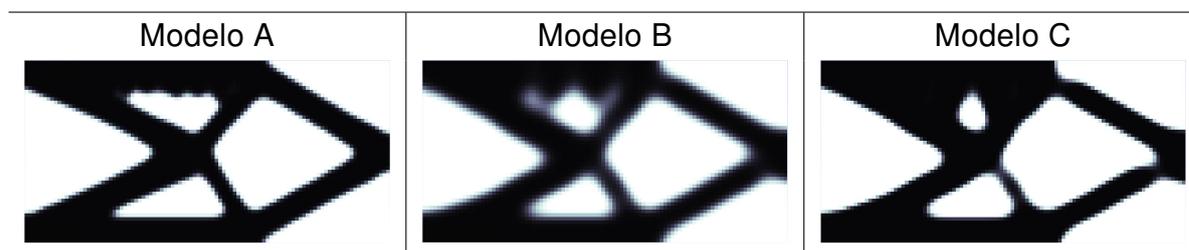
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Os dados gerais utilizados são os mesmos apresentados na tabela 5.6, porém, por simplificação, somente o caso $\bar{\alpha} = 30^\circ$ será discutido nesta seção.

5.3.1 Efeito de R para os tamanhos de malha de 100×50 e 120×60

Os resultados obtidos com a malha de 100×50 são apresentados na figura 5.60.

Figura 5.60: Resultados obtidos para tamanho de malha de 100×50 utilizando os valores de R da tabela 5.7 e dados gerais da tabela 5.6.

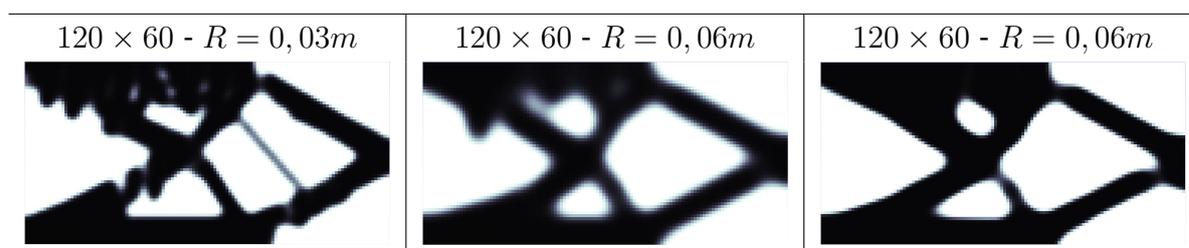


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Em comparação com os resultados apresentados para malha de 80×40 , ilustrados na figura 5.54, o modelo A não apresentou alterações significativas na topologia. O modelo B apresentou uma maior região de densidades relativas intermediárias, e o modelo C uma redução o problema na distribuição de material. Mesmo com a alteração do valor de R , existe uma similaridade com as topologias encontradas com as discretizações de 80×40 e 100×50 . Como as alterações de tamanho de malha são pequenas, nenhum efeito foi identificado pela alteração de R .

Os valores de R dos modelos A, B e C para malha 100×50 são utilizados para uma malha mais refinada, 120×60 , sendo seus resultados ilustrados na figura 5.61.

Figura 5.61: Resultados obtidos com o tamanho de malha de 120×60 , sem o uso das relações para β_{lim} , com os dados gerais da tabela 5.6.



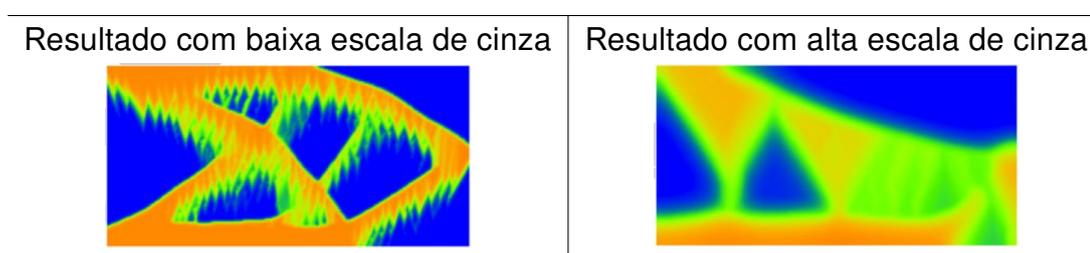
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Nos resultados obtidos com a malha de 120×60 verifica-se uma topologia com maior oscilação na distribuição de material, porém não é avaliado o efeito de dependência de malha nestes resultados. Esse efeito sobre a distribuição de material são oscilações, denominadas de efeito *dripping*, geradas pela restrição *overhang*, sendo discutido nos artigos de Qian (2017), Allaire *et al.* (2017) e Mezzadri e Qian (2020). Um fator que diferencia os resultados deste trabalho com os da literatura, são os formatos destas oscilações, onde a maioria dos resultados que contem oscilações em sua topologia apresentam um formato triangular. Neste trabalho, o formato destas oscilações são circulares, sendo um ponto específico a ser avaliado em estudos posteriores.

5.3.2 Efeito *dripping* pela restrição de *overhang*

Conforme ilustrado na figura 5.61, a alteração do tamanho de malha gerou um efeito oscilatório nas regiões de contorno do componente. No trabalho de Qian (2017), apresentado na sessão 3.2, os resultados mostrados na figura 3.23 apresentam oscilações similares. Como Qian (2017) trabalha com uma restrição imposta para escala de cinza, são testados diferentes limites para as áreas de densidade intermediária. A figura 5.62 apresenta resultados obtidos por Qian (2017) estudando alterações na escala de cinza

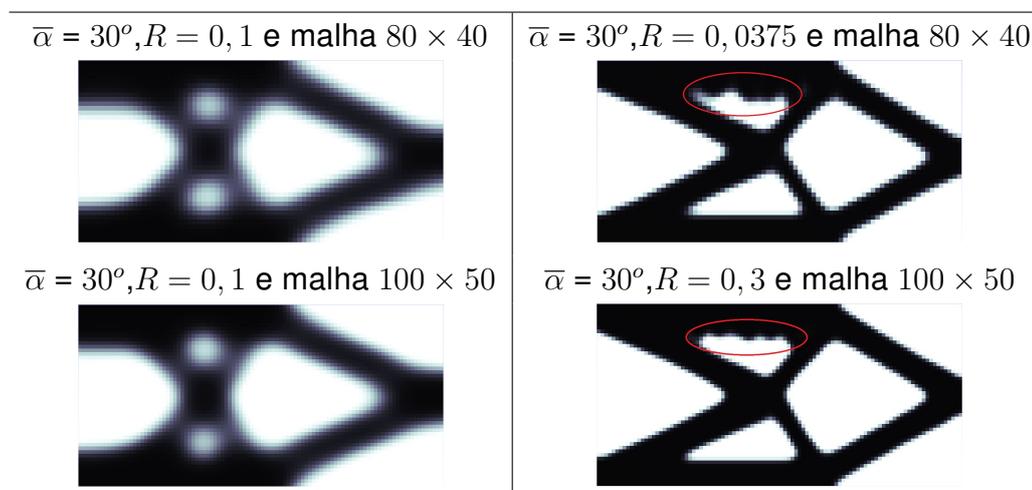
Figura 5.62: Efeito na variação escala de cinza imposta por Qian (2017)



Fonte: Qian (2017)

De acordo com Qian (2017), essas oscilações ocorrem devido a necessidade do otimizador de satisfazer as restrições impostas. O autor observa que o aumento do valor de R corrige essas oscilações, porém leva o resultado a apresentar uma escala de cinza maior em seu contorno. O autor tenta suprimir essas regiões de cinza através da função de projeção *heaviside*, obtendo os resultados apresentado na figura 3.23, porém, segundo Qian (2017), o uso da projeção não elimina totalmente as regiões de cinza e o resultado ainda apresenta algumas regiões de oscilações internas. Esse efeito também é visto nos resultados iniciais deste trabalho. A figura 5.63 apresenta um comparativo entre os resultados iniciais, considerando $\bar{\alpha} = 30^\circ$, com $R = 0,1$ e os resultados obtidos com o uso da equação (4.82) de relaxação. Apesar de serem em quantidade menor, é possível verificar que nos resultados iniciais, devido à escala de cinza, não há presença de oscilações no contorno. Nos resultados com um maior controle nas regiões intermediárias, esse efeito é verificado nas regiões em vermelho da figura 5.63.

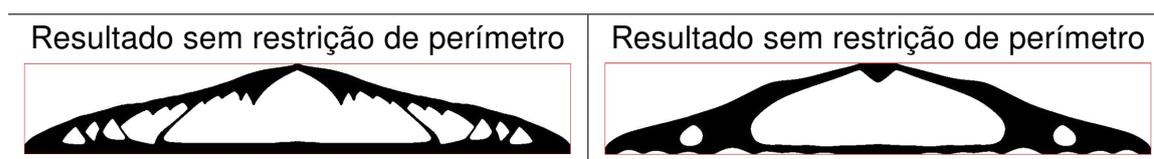
Figura 5.63: Comparação entre resultados iniciais (lado esquerdo) e resultados com a presença de oscilações, regiões em vermelho (lado direito)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O trabalho de Allaire *et al.* (2017) analisa os resultados obtidos por Qian (2017), denominando essa oscilação como efeito de *dripping*. O autor analisa que esse efeito é causado devido a várias violações locais da restrição e que, dependendo da discretização do problema, podem não ser notados durante a otimização. A presença dessas oscilações foi verificada em maior quantidade quando o tamanho da malha utilizada passou a ser de 120×60 no presente trabalho. Quando algumas restrições são violadas, o otimizador distribui material no ponto específico da violação. Segundo Allaire *et al.* (2017), o otimizador tem preferência em alocar material sobre as regiões violadas do que reorganizar a distribuição de material em todo o domínio. Allaire *et al.* (2017) afirma que essas oscilações geram muito pouco impacto na função objetivo (considerando o caso da função objetivo de flexibilidade). Uma forma de tratar esse efeito oscilatório, proposto por Allaire *et al.* (2017), é a adição de uma restrição de perímetro ao problema de otimização, com a ideia de amortecer essa oscilação. O resultado dessa proposta pode ser observado na figura 5.64.

Figura 5.64: Efeito da restrição de perímetro proposta por Allaire *et al.* (2017)



Fonte: Allaire *et al.* (2017)

Mezzadri e Qian (2020) avaliam que essas oscilações tem a tendência de aparecer em metodologias que utilizam a informação do gradiente de densidades relativas.

A proposta para tratar as oscilações, feita pelos autores, é uma continuação do trabalho apresentado por Qian (2017), utilizando a mesma restrição para *overhang* e o controle da escala de cinza, porém adicionando um procedimento de filtro local para as oscilações. A metodologia é aplicar um segundo processo de filtro, porém utilizando informações de comprimento do pico, ou vale, gerados pela oscilação. Com isso, o autor apresenta resultados para tratativa das oscilações, ilustrados na figura 5.65.

Figura 5.65: Resultados obtidos por Mezzadri e Qian (2020) com uso de filtros locais, ($\bar{\alpha} = 30^\circ$ esquerda, e $\bar{\alpha} = 45^\circ$ a direita)



Fonte: Mezzadri e Qian (2020)

5.3.3 Impacto da equação (4.80) sobre o efeito *dripping*

Os resultados ilustrados na figura 5.61, onde o efeito de *dripping* é detectado, não mantem a relação proposta da equação (4.80). Para verificar o efeito dessa relação sobre as oscilações encontradas, é estabelecido novamente a relação da equação (4.82), conforme a tabela 5.8.

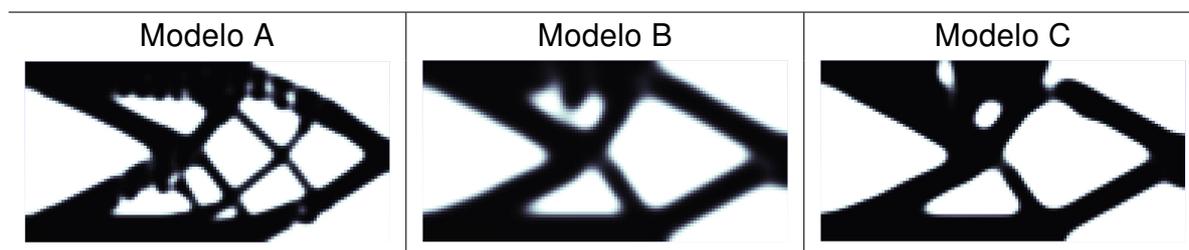
Tabela 5.8: Dados utilizados para o estudo do efeito de *dripping* para a malha 120×60 com a relação de β_{lim} .

Modelo A	Modelo B	Modelo C
$\beta_{max} = 6,0$	$\beta_{max} = 6,0$	$\beta_{max} = 12,0$
$\beta_{lim} = \beta_{max}$	$\beta_{lim} = 2\beta_{max}$	$\beta_{lim} = \beta_{max}$
$\beta_{lim} = 6,0$	$\beta_{lim} = 12,0$	$\beta_{lim} = 12,0$
$le = 1/120$	$le = 1/120$	$le = 1/120$
$R = 0,025 m$	$R = 0,05 m$	$R = 0,05 m$

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Através dos dados da tabela 5.6, alterando o valor de R entre 0,025m e 0,05m, obtém-se os resultados ilustrados na figura 5.66.

Figura 5.66: Resultados para a malha 120×60 utilizando o valor de R da tabela 5.8 e dados gerais da tabela 5.6



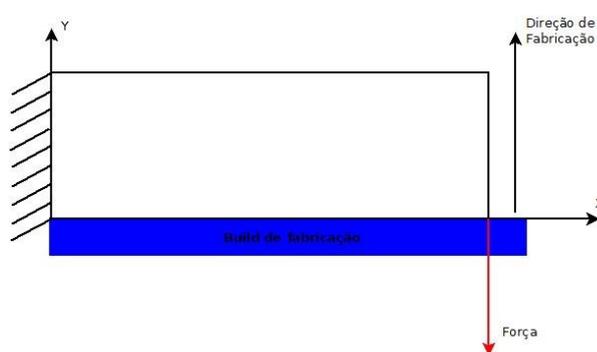
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

É verificada uma redução das oscilações nos modelos A e B em relação a figura 5.61. O modelo C, devido ao fator de β_{max} , apresenta problemas na distribuição de material. Apesar de não solucionar, a relação da equação (4.80) ameniza o efeito das oscilações geradas pelas restrições de *overhang*.

5.4 AVALIAÇÃO DA FORMULAÇÃO EM UMA NOVA CONDIÇÃO DE CARREGAMENTO

Um novo caso de estudo, ilustrado na figura 5.67, é utilizado para a avaliação adicional da formulação proposta neste trabalho.

Figura 5.67: Nova condição de carregamento proposto



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Para esse estudo, é utilizado a restrição com a proposta de relaxação deste trabalho conforme

$$t_o(\tilde{\rho}_o) = \langle \nabla \tilde{\rho}_o, \mathbf{n} \rangle f(\tilde{\rho}_o) - \cos(\bar{\alpha}) \|\nabla \tilde{\rho}_o\| \leq 0; \quad o = 1 \dots N_o. \quad (5.91)$$

Os dados utilizados são apresentados na tabela 5.9.

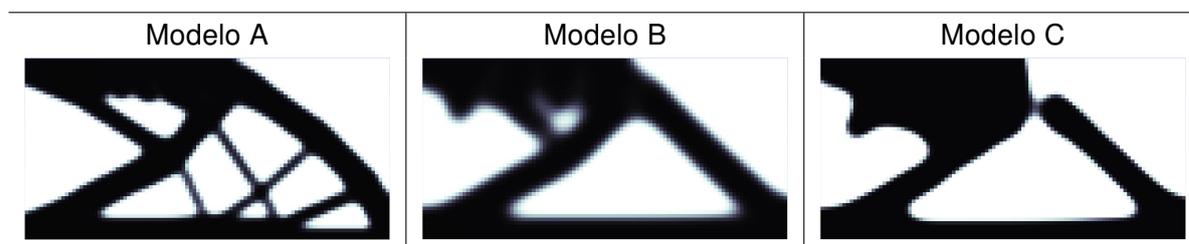
Tabela 5.9: Dados utilizados para o estudo ilustrado na figura 5.67

Dados para o problema	
Dimensões do domínio Ω	$1,0\text{ m} \times 0,5\text{ m}$
Discretização do domínio Ω	100×50 e 120×60 ;
Ângulo limite ($\bar{\alpha}$)	30° ;
Valor inicial de β	1,0
Valor de $\%_0\beta$	1,35
Valor de β_{max}	6,0; 12,0
Valor para η	0,5
Quantidade de elementos por pacote	4
Direção de fabricação	$\mathbf{n} = [0 \quad 1]^T$
Modulo de elasticidade	$E = 1 \times 10^5\text{ Pa}$
Coeficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Força aplicada	$F = 100\text{ N}$
Espessura do componente	0,1 m
Valor SIMP	$p = 3,0$
Raio utilizado	0,03 m; 0,06 m
Valor norma P	4,0
Valor de ϵ	0,5
Valor inicial para penalização (r)	15,0
Valor inicial para multiplicadores de lagrange (μ)	0,0

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Para o tamanho de malha 100×50 , os valores de R são os mesmos apresentados na tabela 5.7, sendo os resultados ilustrados na figura 5.68.

Figura 5.68: Resultados para malha 100×50 obtidos com a força na ponta utilizando o valor de R da tabela 5.7 e dados da tabela 5.9

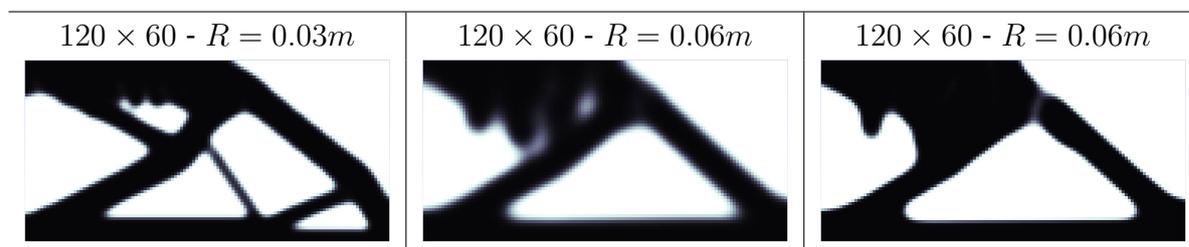


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Os resultados para essa condição de contorno também apresentam oscilações em sua topologia, sendo o mesmo efeito observado na figura 5.60. Para verificar se

ocorre a dependência de malha, é alterado o tamanho de malha para 120×60 , porém mantendo os valores de R iguais aos utilizados na malha de 100×50 . Os resultados ilustrados na figura 5.69.

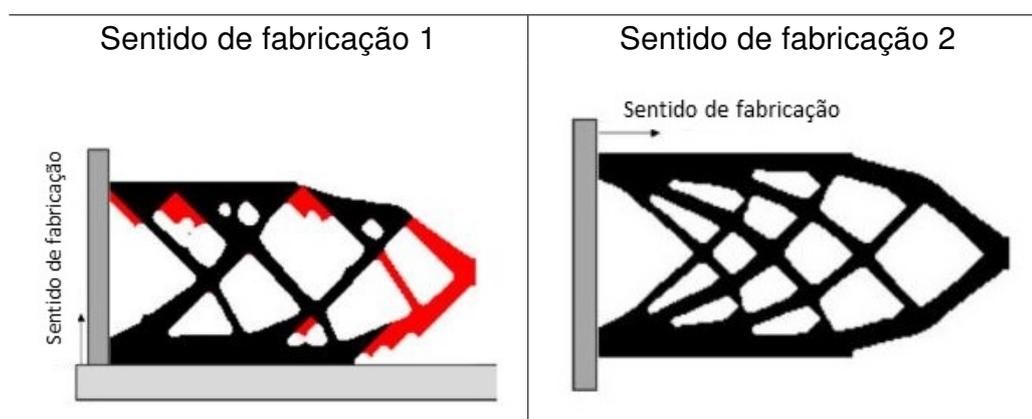
Figura 5.69: Resultados obtidos para malha de 120×60 para o problema com a força na ponta, sem o uso da relação da equação (4.80) com dados da tabela 5.9



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Esses resultados apresentam algumas alterações na topologia, porém grande parte devido as oscilações geradas pelo tamanho de malha. A presença de oscilações é menor em relação aos resultados ilustrados da figura 5.61, devido a direção de fabricação favorecer a fabricação desta topologia. Dependendo da direção de fabricação e do componente a ser fabricado, as restrições de *overhang* podem ser favorecidas, reduzindo assim sua violação durante a otimização. Esse comportamento pode ser observado através dos resultados propostos por Pellens *et al.* (2019), ilustrado na figura 5.70 onde o mesmo componente é otimizado em duas direções diferentes, reduzindo as regiões de violação e oscilações no resultado final.

Figura 5.70: Resultados obtidos por Pellens *et al.* (2019), onde regiões em vermelho contem violações de *overhang*

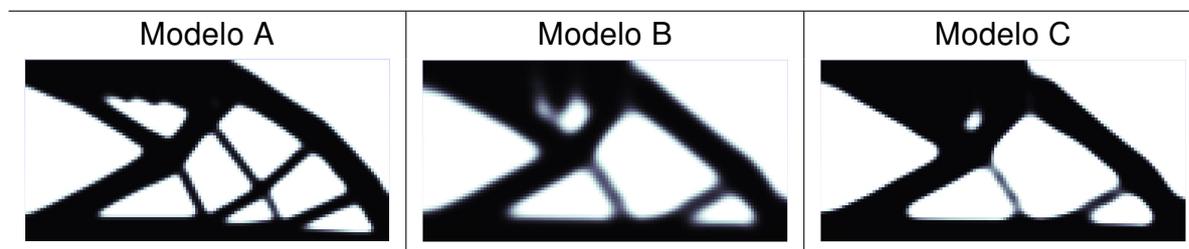


Fonte: Pellens *et al.* (2019), adaptado

Com o aumento da discretização, a presença das oscilações é maior porém, quando mantida a relação da equação (4.80), obtemos uma redução nas oscilações.

Alterando os valores de R , conforme tabela 5.8, onde as relações para uma malha de 120×60 são mantidas, são obtidos os resultados da figura 5.71.

Figura 5.71: Resultados obtidos para malha de 120×60 para o estudo com a força na ponta, com o uso do valor de R da tabela 5.8 e dados da tabela 5.9.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Conforme resultados ilustrados na figura 5.66, o uso da relação entre R e β_{lim} também reduz as oscilações nas topologias apresentadas na figura 5.71.

5.5 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS de Zhang, Cheng e Xu (2019)

Conforme apresentado, o trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019) utiliza restrições para tratar o efeito de *dripping*, por isso, não será feita uma comparação direta com os resultados apresentados nessa referência. Porém, Zhang, Cheng e Xu (2019) apresentam uma topologia obtida sem a consideração de restrição de *dripping*, utilizando $\bar{\alpha} = 45^\circ$. Os dados utilizados são apresentados na tabela 5.10.

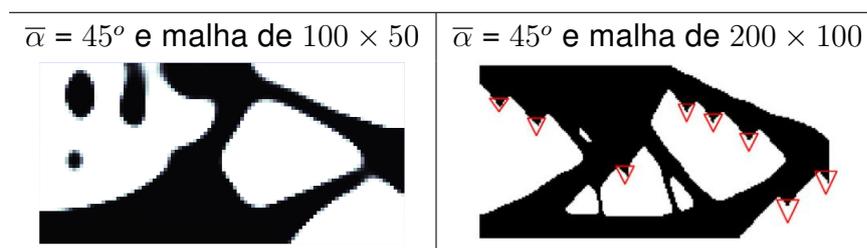
Tabela 5.10: Dados utilizados para o estudo comparativo com Zhang, Cheng e Xu (2019)

Dados para o problema	
Dimensões do domínio Ω	$2,0 m \times 1,0 m$
Discretização do domínio Ω	100×50
Ângulo limite ($\bar{\alpha}$)	45°
Valor inicial de β	1,0
Valor de $\% \beta$	1,35
Valor de β_{max}	40,0
Valor para η	0,5
Quantidade de elementos por pacote	4
Direção de fabricação	$\mathbf{n} = [0 \quad 1]^T$
Modulo de elasticidade	$E = 1,0 Pa$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Força aplicada	$F = 1,0 N$
Espessura do componente	1,0 m
Valor SIMP	$p = 3$
Raio utilizado	8,1 le
Valor norma P	4,0
Valor de ϵ	0,5
Valor inicial para penalização (r)	15,0
Valor inicial para multiplicadores de lagrange (μ)	0,0

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Como avaliado anteriormente, a metodologia proposta neste trabalho apresenta um custo computacional elevado, especialmente para malhas muito refinadas. Desta forma, será utilizada uma malha de 100×50 ao invés de uma discretização de 200×100 como a utilizada por Zhang, Cheng e Xu (2019). A figura 5.72 apresenta o resultado obtido.

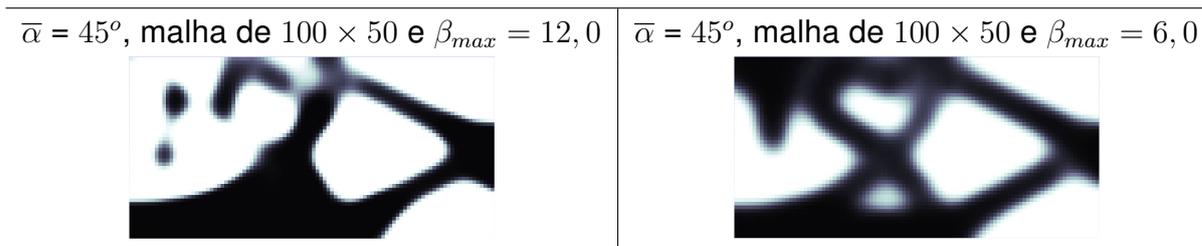
Figura 5.72: Comparativo entre resultados da metodologia proposta neste trabalho (figura da esquerda) com o resultado obtido por Zhang, Cheng e Xu (2019) (figura da direita)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Os valores de R e β_{max} foram utilizados conforme o trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019), gerando problemas na distribuição de material. Considerando os comportamentos descritos anteriormente, consideram-se valores de β_{max} iguais a 12,0 e a 6,0 respectivamente. Os resultados obtidos com estes novos parâmetros são ilustrados na figura 5.73.

Figura 5.73: Resultado obtido utilizado $\beta_{max} = 12,0$ (figura da esquerda) e $\beta_{max} = 6,0$ (figura da direita).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Pode-se notar que, com $\beta_{max} = 6,0$ é possível obter uma topologia bem definida, porém com a presença da escala de cinza e o efeito de *dripping*. Um segundo estudo é feito utilizando os dados referente ao trabalho de Qian (2017), apresentados na tabela 5.11.

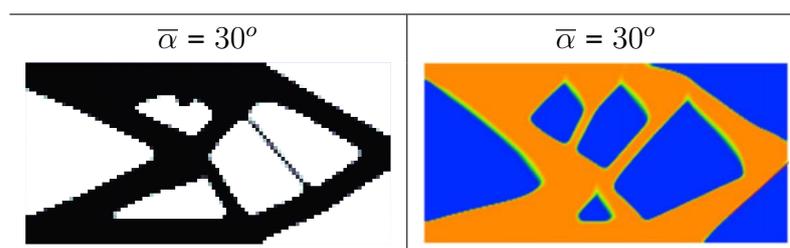
Tabela 5.11: Dados utilizados para o estudo comparativo com Qian (2017).

Dados para o problema	
Dimensões do domínio Ω	12,0 m \times 6,0 m
Discretização do domínio Ω	100 \times 50
Ângulo limite ($\bar{\alpha}$)	30°
Valor inicial de β	1,0
Valor de $\% \beta$	1,35
Valor de β_{max}	32,0
Valor para η	0,5
Quantidade de elementos por pacote	4
Direção de fabricação	$\mathbf{n} = [0 \ 1]^T$
Modulo de elasticidade	$E = 1,0 Pa$
Coeficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Força aplicada	$F = 1,0 N$
Espessura do componente	6,0 m
Valor SIMP	$p = 3$
Raio utilizado	0,35
Valor norma P	4,0
Valor de ϵ	0,5
Valor inicial para penalização (r)	15,0
Valor inicial para multiplicadores de lagrange (μ)	0,0

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Qian (2017) utiliza funções de filtro e projeção diferentes a proposta deste trabalho, porém o autor faz uma relação entre valor para R entre funções, avaliando a quantidade de elementos para o raio utilizado no filtro de densidade. Neste caso, o valor de R , apresentado na tabela 5.11, foi definido em relação a informação da quantidade de elementos apresentada no trabalho de Qian (2017). O resultado encontrado é apresentado na figura 5.74.

Figura 5.74: Comparativo entre o resultado obtido com a metodologia proposta neste trabalho (figura da esquerda) e o resultado obtido por Zhang, Cheng e Xu (2019) (figura da direita).



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Qian (2017) utiliza um tamanho de domínio $12 m \times 6 m$, discretizado com 57600 elementos triangulares. Como o custo computacional é alto, foi mantido o tamanho de malha de 100×50 no uso da formulação proposta neste trabalho. A discretização utilizada não gerou efeito de *dripping* em várias regiões como esperado, sendo avaliado que o tamanho de malha não é suficiente. Porém, os valores de R e discretização foram capazes de gerar uma topologia bem definida para valores de $\beta_{max} > 6,0$.

Em conclusão aos resultados apresentados neste capítulo, a metodologia apresentou alguns pontos positivos, como topologias mais simples e com maior simetria em relação às obtidas na literatura, porém, com maior custo computacional.

Ainda não é possível determinar se o uso de restrições locais para *overhang* apresenta melhor resultado do que o uso de restrições globais. Estudos posteriores como a continuidade do valor de β , solução para o efeito de *dripping*, entre outros aspectos, são necessários para melhor compreender o comportamento desta formulação.

6.0 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou a imposição local de restrições no limite de ângulo de fabricação na otimização topológica de estruturas contínuas. Foi utilizado o trabalho de Zhang, Cheng e Xu (2019) como base para a formulação, porém com alterações no uso das restrições de *overhang* para uma forma local por meio do método do Lagrangiano Aumentado. Foram estudados 3 valores para o ângulo limite, $\bar{\alpha}$, de 30° , 45° e 60° .

Os resultados iniciais apresentaram muitas regiões com escala de cinza, bem como uma problemas na distribuição de material, sendo detectado quando β ultrapassava o valor de $6,0$. Como cada elemento do domínio é compartilhado por 8 restrições, um valor de densidade resultante da projeção pode tornar várias restrições violadas, levando o otimizador a tentar satisfazer essas restrições reorganizando a distribuição de material em todo o domínio. Para evitar problemas com a projeção, foi avaliado que o valor de β_{max} igual a $6,0$ evita problemas na distribuição de material, porém os resultados apresentam regiões com escala de cinza. Além do valor para β_{max} , verificou-se que o valor de $\bar{\alpha}$ também pode gerar um excesso de regiões com escala de cinza. Foi verificado que, um valor de $\bar{\alpha}$ igual ou maior que 60° pode induzir regiões de escala de cinza. Porém, devido a alguns trabalhos avaliados, o uso do valor de $\bar{\alpha}$ igual a 60° não é muito comum na manufatura aditiva.

A relação proposta por Silva, Beck e Sigmund (2019) entre o valor de β_{max} e R foi adaptada para este trabalho e auxiliou no controle da escala de cinza, impondo uma camada de transição entre o material base e vazio.

Outro fator estudado neste trabalho é a proposta para função de relaxação de Zhang, Cheng e Xu (2019), sendo uma função linear da densidade projetada do elemento central do pacote. Foi avaliado que o comportamento desta proposta, quando implementada em restrições locais, não contém uma relação física com o cálculo de α . Foi proposta uma nova função de relaxação, baseada no trabalho de Cheng e Guo (1997) e Silva, Beck e Sigmund (2019). As topologias resultantes com a nova proposta de relaxação tornaram o problema mais estável e com um menor custo computacional, mas seu uso faz com que o resultado final contenha maior quantidade de restrições violadas. Mesmo com a melhora no custo computacional, não foi possível utilizar tamanho de malhas maiores que 120×60 .

Foi identificado através do aumento de malha de 100×50 para 120×60 , o efeito denominado *dripping*, onde a distribuição de material no contorno contém oscilações devido as restrições de *overhang* violadas. Apesar de não tratado no presente trabalho, foi avaliado que o uso da relação proposta por Silva, Beck e Sigmund (2019) reduz as oscilações no contorno do componente.

Um segundo caso foi avaliado, alterando a posição do carregamento sobre o domínio para avaliar os efeitos descritos. Foram observados os mesmos comportamentos do primeiro caso de estudo, além do fato de que o sentido de fabricação pode auxiliar na redução do efeito de *overhang* e, conseqüentemente, redução no efeito de *dripping*.

Foi realizado um comparativo com os resultados de Qian (2017) e Zhang, Cheng e Xu (2019), porém com discretização reduzida devido ao custo computacional da metodologia proposta neste trabalho. Foi identificado que, apesar de uma discretização reduzida, as topologias resultantes são simples e com maior simetria. Porém são necessários mais resultados para obter uma melhor comparação.

Verificou-se que os resultados obtidos neste trabalho apresentam topologias mais simples e com maior simetria, porém apresentando problemas na imposição de restrições com ângulos mais elevados. O valor de β_{max} apresentou problemas na distribuição de material durante a projeção de densidades e o efeito de *dripping* influenciou nas topologias obtidas. É avaliado que, apesar dos pontos positivos observados na metodologia proposta, são necessários mais testes para avaliar se o uso de restrições locais para *overhang* melhoram o resultado em comparação a restrições globais.

Como este trabalho é um dos primeiros a tratar o efeito de *overhang* de forma local, é considerado que a proposta pode motivar novos trabalhos para solucionar os problemas encontrados, visando um resultado final com maior controle na distribuição de material ponto a ponto em relação às propostas com o uso de uma restrição global equivalente.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- a) Conforme mencionado anteriormente, dentro da manufatura aditiva existem diversas técnicas para fabricação de componentes, e uma dessas técnicas é a impressão metálica. Devido ao processo de fusão do material base durante o processo, a energia aplicada sobre cada camada pode gerar alguns problemas para o componente, como trincas ou desprendimento do componente da base de fabricação devido a tensões térmicas residuais. Uma abordagem para tratar esse problema é o uso de suportes externos. Segundo Kuo *et al.* (2018), uma vantagem na utilização de suporte externo é o auxílio no controle do gradiente térmico durante a fabricação, evitando a presença de tensões residuais térmicas no pós-processamento. Porém, como mencionado anteriormente, o uso de suportes externos aumenta o custo do processo. Uma sugestão de trabalho futuro é a utilização suportes externos em conjunto com as restrições de *overhang*, para minimizar a utilização de suportes mas controlando o gradiente térmico do componente durante a fabricação;

- b) O uso de uma quantidade maior de elementos dentro dos pacotes pode criar uma suavização para a projeção sobre a densidade relativa de cada elemento, possibilitando o uso de um valor maior para β_{max} , sendo um objeto de estudo para trabalhos futuros;
- c) Implementação de uma restrição de perímetro para tratar o efeito de *dripping*;
- d) Avaliar estratégias para métodos de continuação com objetivo de evitar problemas na distribuição de material para β_{max} maior que 6, 0;
- e) Avaliar variáveis aplicadas à função de relaxação proposta, para obtenção de melhores resultados;
- f) Melhorar o custo computacional desta metodologia para obtenção de resultados com maiores discretizações.

REFERÊNCIAS

ALLAIRE, Grégoire; DAPOGNY, Charles; ESTEVEZ, Rafael; FAURE, Alexis; MICHAILIDIS, Georgios. Structural optimization under overhang constraints imposed by additive manufacturing technologies. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 351, p. 295–328, 2017. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999117307015>>. Acesso em: 21 Julho 2020.

ARORA, Jasbir S. **Optimization of structural and mechanical systems**. [S.l.]: World Scientific, 2007.

ATZENI, E; IULIANO, L; MARCHIANDI, G; MINETOLA, P; SALMI, A; BASSOLI, E; DENTI, L; GATTO, A. Additive manufacturing as a cost-effective way to produce metal parts. **Bartolo PJ et al., High Value Manufacturing, CRC Press (GBR)**, p. 3–8, 2013. Disponível em: <<https://bit.ly/3q9ikaP>>. Acesso em: 17 Maio 2020.

BENDSØE, Martin P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural optimization**, Springer, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007%2F01650949>>. Acesso em: 12 Abril 2020.

BENDSØE, Martin Philip; KIKUCHI, Noboru. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0045782588900862>>. Acesso em: 10 Julho 2020.

CALIGNANO, F. Design optimization of supports for overhanging structures in aluminum and titanium alloys by selective laser melting. **Materials & Design**, Elsevier, v. 64, p. 203–213, 2014. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0261306914005755>>. Acesso em: 5 Abril 2020.

CHENG, 22 GD; GUO, Xiao. ε -relaxed approach in structural topology optimization. **Structural optimization**, Springer, v. 13, n. 4, p. 258–266, 1997. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007%2F01197454>>. Acesso em: 25 Outubro 2020.

GARAIGORDOBIL, Alain; ANSOLA, Rubén; VEGUERÍA, Estrella; FERNANDEZ, Igor. Overhang constraint for topology optimization of self-supported compliant mechanisms considering additive manufacturing. **Computer-Aided Design**, Elsevier, v. 109, p. 33–48, 2019. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001044851830349X>>. Acesso em: 17 Junho 2020.

GAYNOR, Andrew T; GUEST, James K. Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through

design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 54, n. 5, p. 1157–1172, 2016. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-016-1551-x>>. Acesso em: 8 Julho 2020.

GAYNOR, Andrew T; MEISEL, Nicholas A; WILLIAMS, Christopher B; GUEST, James K. Topology optimization for additive manufacturing: considering maximum overhang constraint. In: **15th AIAA/ISSMO multidisciplinary analysis and optimization conference**. [s.n.], 2014. p. 2036. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2014-2036>>. Acesso em: 07 Abril 2020.

KUO, Yu-Hsin; CHENG, Chih-Chun; LIN, Yang-Shan; SAN, Cheng-Hung. Support structure design in additive manufacturing based on topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 57, n. 1, p. 183–195, 2018. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-017-1743-z>>. Acesso em: 15 Fevereiro 2020.

LANGELAAR, Matthijs. An additive manufacturing filter for topology optimization of print-ready designs. **Structural and multidisciplinary optimization**, Springer, v. 55, n. 3, p. 871–883, 2017. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00158-016-1522-2.pdf>>. Acesso em: 8 Julho. 2020.

LE, Chau; NORATO, Julian; BRUNS, Tyler; HA, Christopher; TORTORELLI, Daniel. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 41, n. 4, p. 605–620, 2010. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-009-0440-y>>. Acesso em: 15 Abril 2020.

LEARY, Martin; MERLI, Luigi; TORTI, Federico; MAZUR, Maciej; BRANDT, Milan. Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures. **Materials & Design**, Elsevier, v. 63, p. 678–690, 2014. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0261306914004646>>. Acesso em: 20 Fevereiro 2020.

MARTÍNEZ, José Mario. **Otimização prática usando o Lagrangiano Aumentado**. [S.l.]: UNICAMP, 2009.

MAZLAN, Siti Nur Humaira; KADIR, Aini Zuhra Abdul; YUSOF, Yusri; WAHAB, Md Saidin. Overhang analysis fabricated using fused deposition modeling technique. **Journal of Advanced Industrial Technology and Application**, v. 1, n. 1, p. 38–47, 2020. Disponível em: <<https://publisher.uthm.edu.my/ojs/index.php/jaita/article/view/6479>>. Acesso em: 25 Setembro 2020.

MENEGHELLI, Luís Renato. **Projeto de mecanismos flexíveis com restrição de tensões utilizando o método da otimização topológica**. 85 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013. Disponível em: <<http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000063/00006342.pdf>>. Acesso em: 20 Junho 2020.

MEZZADRI, Francesco; QIAN, Xiaoping. A second-order measure of boundary oscillations for overhang control in topology optimization. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, p. 109365, 2020. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199912030139X>>. Acesso em: 12 Abril 2020.

MIRZENDEHDEL, Amir M; SURESH, Krishnan. Support structure constrained topology optimization for additive manufacturing. **Computer-Aided Design**, Elsevier, v. 81, p. 1–13, 2016. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0010448516300951>>. Acesso em: 01 Julho 2020.

PELLENS, Jeroen; LOMBAERT, Geert; LAZAROV, Boyan; SCHEVENELS, Mattias. Combined length scale and overhang angle control in minimum compliance topology optimization for additive manufacturing. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 59, n. 6, p. 2005–2022, 2019. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-018-2168-z>>. Acesso em: 02 Outubro 2020.

PEREIRA, Alexandre de Assis; CARDOSO, Eduardo Lenz. On the influence of local and global stress constraint and filtering radius on the design of hinge-free compliant mechanisms. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 58, n. 2, p. 641–655, 2018. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-018-1915-5>>. Acesso em: 02 Maio 2020.

QIAN, Xiaoping. Undercut and overhang angle control in topology optimization: a density gradient based integral approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 111, n. 3, p. 247–272, 2017. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5461>>. Acesso em: 12 Maio 2020.

QUAN, Zhenzhen; WU, Amanda; KEEFE, Michael; QIN, Xiaohong; YU, Jianyong; SUHR, Jonghwan; BYUN, Joon-Hyung; KIM, Byung-Sun; CHOU, Tsu-Wei. Additive manufacturing of multi-directional preforms for composites: opportunities and challenges. **Materials Today**, Elsevier, v. 18, n. 9, p. 503–512, 2015. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1369702115001613>>. Acesso em: 12 Agosto 2020.

ROSEN, David W. Computer-aided design for additive manufacturing of cellular structures. **Computer-Aided Design and Applications**, Taylor & Francis, v. 4, n. 5, p. 585–594, 2007. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/16864360.2007.10738493>>. Acesso em: 20 Fevereiro 2020.

SIGMUND, Ole. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 33, n. 4-5, p. 401–424, 2007. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-006-0087-x>>. Acesso em: 17 Junho 2020.

SIGMUND, Ole; BENDSØE, MP. Topology optimization. **State-of-the-Art and Future Perspectives**, Copenhagen: Technical University of Denmark (DTU), 2003.

SIGMUND, Ole; PETERSSON, Joakim. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural optimization**, Springer, v. 16, n. 1, p. 68–75, 1998. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-006-0087-x>>. Acesso em: 05 Outubro 2020.

SILVA, Gustavo Assis. **Otimização topológica de estruturas contínuas considerando incertezas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2016. Disponível em: <<http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000067/000067a2.pdf>>. Acesso em: 20 Agosto 2020.

SILVA, Gustavo Assis da; BECK, André Teófilo; SIGMUND, Ole. Stress-constrained topology optimization considering uniform manufacturing uncertainties. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 344, p. 512–537, 2019. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045782518305231>>. Acesso em: 12 Setembro 2020.

STEEN, William M; MAZUMDER, Jyotirmoy. **Laser material processing**. [S.l.]: springer science & business media, 2010.

THOMPSON, Mary Kathryn; MORONI, Giovanni; VANEKER, Tom; FADEL, Georges; CAMPBELL, R Ian; GIBSON, Ian; BERNARD, Alain; SCHULZ, Joachim; GRAF, Patricia; AHUJA, Bhrigu *et al.* Design for additive manufacturing: Trends, opportunities, considerations, and constraints. **CIRP annals**, Elsevier, v. 65, n. 2, p. 737–760, 2016. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0007850616301913>>. Acesso em: 1 Fevereiro 2020.

WANG, Di; YANG, Yongqiang; YI, Ziheng; SU, Xubin. Research on the fabricating quality optimization of the overhanging surface in slm process. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, Springer, v. 65, n. 9-12, p. 1471–1484, 2013. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00170-012-4271-4>>. Acesso em: 8 Maio 2020.

WANG, Fengwen; LAZAROV, Boyan Stefanov; SIGMUND, Ole. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 43, n. 6, p. 767–784, 2011. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007%252Fs00158-010-0602-y>>. Acesso em: 11 Maio 2020.

WANG, Yu; XIA, Jingjing; LUO, Zhen; YAN, Hao; SUN, Jianfeng; LÜ, Enli. Self-supporting topology optimization method for selective laser melting. **Additive Manufacturing**, Elsevier, v. 36, p. 101506, 2020. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S2214860420308782>>. Acesso em: 12 Maio 2020.

ZHANG, Kaiqing; CHENG, Gengdong; XU, Liang. Topology optimization considering overhang constraint in additive manufacturing. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 212, p. 86–100, 2019. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045794918303997>>. Acesso em: 8 Janeiro 2020.