UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA – PPGEM

GUSTAVO HEIDEN

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM RESTRIÇÕES LOCAIS EM PROBLEMAS TRANSIENTES

JOINVILLE, SC
2020

GUSTAVO HEIDEN

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM RESTRIÇÕES LOCAIS EM PROBLEMAS TRANSIENTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso.

JOINVILLE, SC
2020

Heiden, Gustavo
H465o Otimização estrutural com restrições locais em problemas transientes / Gustavo Heiden. – 2020.
81 f. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso
Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2020.
Inclui Bibliografia.

1. Otimização topológica. 2. Lagrangiano Aumentado. 3. Funcional relaxado. 4. Restrição de tensão. 5. Restrição de deslocamento. I. Cardoso, Eduardo Lenz. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 620.1

GUSTAVO HEIDEN

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL COM RESTRIÇÕES LOCAIS EM PROBLEMAS TRANSIENTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Modelagem e Simulação Numérica.

Banca examinadora:

Presidente / orientador:

Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso
Universidade do Estado de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica

Membros:

Prof. Dr. Ricardo de Medeiros
Universidade do Estado de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica

Dr. Olavo Mecias da Silva Junior
FEESC

Joinville, 11 de dezembro de 2020.

AGRADECIMENTOS

O autor expressa os seguintes agradecimentos:

Em especial, ao professor e orientador Eduardo Lenz Cardoso, por toda ajuda e esforço dedicado no meu desenvolvimento durante o curso e na elaboração deste trabalho.

À minha família por todo suporte e compreensão durante a jornada.

Aos alunos membros do Laboratório de Mecânica Computacional (LAMEC) e do grupo de pesquisa, principalmente: Daiane, Kelvin, Matheus, Pedro, Valentini e Vanessa, pelo companheirismo e assistência que tornaram os dias muito mais leves.

À todos os demais professores e funcionários da UDESC não citados, mas que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

À Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) pela qualidade da infraestrutura e ensino oferecido e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC), que possibilitou ao grupo de pesquisa a aquisição dos aparatos computacionais necessários para a realização de seus trabalhos, sob financiamentos 2017TR784 e 2019TR779.

E por fim, porém sem menor importância, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sob código 0001, pela bolsa de estudos fornecida.

RESUMO

Os problemas de otimização estrutural em regime transiente, isto é, considerando carregamentos e restrições dependentes do tempo, possuem como principal dificuldade a solução das equações de equilíbrio e a satisfação das restrições. Com a finalidade de reduzir essa quantidade de restrições, utilizam-se abordagens que as convertem em funcionais equivalentes. Porém essa metodologia não é suficiente quando o problema apresenta restrições locais, pois a maioria dos algoritmos de solução de problema de otimização tradicionais não consegue lidar com um número elevado de restrições. Uma solução empregada faz uso da elaboração da função Lagrangiano Aumentado, que transforma o problema restrito em um problema sem restrições. Duas metodologias similares são encontradas na literatura para solucionar os problemas de otimização estrutural transientes: uma incorpora o funcional equivalente no somatório e outra aplica o funcional diretamente nas definições das restrições. A essa última metodologia é proposta uma relaxação, de modo a retirar a inerente descontinuidade do funcional equivalente utilizado. Com isso, o presente trabalho desenvolve um algoritmo para resolver problemas de otimização topológica transiente aplicando ambas abordagens com a função Lagrangiano Aumentado. Dois problemas de otimização estrutural encontrados na literatura são estudados para validação dos algoritmos e os resultados obtidos, tanto para a abordagem com o funcional, quanto para a abordagem com o funcional relaxado, coincidem com aqueles apresentados pelos seus autores.

Palavras-chave: Otimização topológica. Lagrangiano Aumentado. Funcional relaxado. Restrição de tensão. Restrição de deslocamento.

ABSTRACT

The main difficulty in regard to transient structural optimization problems, *i.e.*, with time-dependent loads and constraints, is associated with the solution of equilibrium equations and the constraints satisfaction. The equivalent functional approach is applied to reduce the number of constraints. However, this method fails when local constraints are imposed, because many traditional optimizers cannot cope with a high number of constraints. A common solution makes use of the Augmented Lagrangian function, which converts the constrained problem into an unconstrained one. Two similar methodologies adopting the Augmented Lagrangian functions are found in the literature to solve the transient structural optimization problems: one applies the equivalent functional onto the sum and the other uses the equivalent functional directly into the constraint definitions. It is hereafter proposed a relaxation to the latter approach in order to suppress its inherent discontinuity. This work develops an algorithm to solve transient topology optimization problems by means of both Augmented Lagrangian approaches. Two structural examples in the literature are solved to validate the codes and the results of both approaches, that is, using the equivalent functional or the relaxed functional, tally with those presented by their authors.

Keywords: Topology optimization. Augmented Lagrangian. Relaxed functional. Stress constraints. Displacement constraints.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E HISTÓRICO

No âmbito de projeto estrutural, a busca pelo design ótimo apresenta três diferentes abordagens: *otimização de parâmetro*, *de forma* e *de topologia* (BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 1). A otimização paramétrica tem como objetivo a minimização ou maximização de alguma medida física relacionada ao comportamento da estrutura, mediante a alteração de parâmetros de um projeto preestabelecido, tais como espessura e área. Sua principal característica (SIGMUND, 2000, p. 213) consiste no conhecimento prévio e imutável do domínio de projeto (modelo físico) e das variáveis de estado durante toda resolução do problema. A otimização de forma, por sua vez, é definida por Sigmund (2000, p. 213) pela utilização de parâmetros associados ao contorno de um domínio fixo do modelo físico, alterando assim o seu formato para obtenção da estrutura ótima. E a otimização topológica, segundo Sigmund (2000, p. 213), foca na distribuição de material dentro do domínio fixo do projeto, ou seja, a topologia é a variável de projeto e os resultados compreendem: o número e a localização de furos e a conectividade do domínio.

Essa distribuição ótima de material representa os pontos do espaço que devem ser preenchidos com material e os pontos que permanecem vazios. No domínio discretizado por elementos finitos, tem-se a correlação da geometria da estrutura com os pixeis que formam sua imagem.

De acordo com Rozvany (2008, p. 217), as pesquisas na área da otimização topológica representam, tanto estudos teóricos em matemática, física e ciência da computação, quanto estudos práticos em aplicações de manufatura. Um problema base, utilizado como objeto de teste fundamental para o desenvolvimento inicial das metodologias de otimização topológica mais avançadas, consiste em minimizar uma função de flexibilidade associada a carregamentos estáticos (BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 71).

Historicamente, Sigmund (2000, p. 214), Bendsøe e Sigmund (2004, p. 221) e Lewiński, Sokół e Graczykowski (2019, p. vii) apontam o trabalho de A.G.M. Michel "*The limits of economy of material in frame-structures*" de 1904 como sendo o pioneiro na área da otimização topológica ao considerar uma estrutura de barras como variável de projeto. Conforme explicado em Lewiński, Sokół e Graczykowski (2019, p. vii), Michel lidou com a questão da transmissão segura e econômica dos carregamentos prescritos para a área de suporte sem realizar imposições inciais de modelo e obtém resultados analíticos que se aproximam de um corpo contínuo de microestrutura fibrosa, uma vez que, quanto maior o número de membros possíveis para formar a estrutura, melhor é o arranjo encontrado, pois o volume diminui.

Rozvany (1996) comparou as condições de ótimo obtidas por Michel em 1904 com as obtidas por W. S. Hemp em 1973. Ele encontra uma discrepância no critério de Michel quando as tensões admissíveis de compressão são diferentes das tensões admissíveis de tração e quando o problema é estaticamente indeterminado. Em nenhum momento Rozvany (1996, p. 244) desprezou os trabalhos de Michel, ao contrário, ele propôs um limiar onde o critério de Michel seja válido. Vale destacar que as provas de generalidade realizadas utilizaram ferramentas matemáticas desenvolvidas muito depois da publicação do artigo original de Michel.

Embora as respostas analíticas sejam de suma importância para a área, alguns problemas como o cálculo de carregamentos múltiplos, análise dinâmica e problemas de múltiplos domínios físicos são resolvidos somente por métodos numéricos (SIGMUND, 2000, p. 216–217). Como uma das inovações mais importantes ocorrida na área da otimização, pode-se citar (BENDSØE; KIKUCHI, 1988) no desenvolvimento da primeira metodologia computacional de otimização topológica, que teve como objetivo a obtenção da forma e da conectividade de uma estrutura formada por uma malha de elementos finitos composta de um material homogeneizado, isto é, um compósito artificial com vazios microscópicos. Desde então, essa metodologia de otimização baseada na distribuição de material é muito bem aceita tanto na academia quanto na indústria (SIGMUND, 2000, p. 213–214), sendo usada atualmente nas áreas da automobilística, da robótica, da aeronáutica e até mesmo da biotecnologia.

O conceito do método de homogeneização para interpolação de material é definido em Bendsøe e Sigmund (1999, p. 635) como sendo uma representação geométrica da microestrutura de forma a descrever as propriedades de um material homogêneo equivalente para distribuição de material na forma discreta. De acordo com Rozvany (2008, p. 219, 2014, p. 74), esses métodos utilizam inúmeras variáveis de projeto por elementos, o que os torna computacionalmente ineficientes. Devido a este motivo, o método *Solid Isotropic Microstructure (Material) with Penalization* – SIMP se popularizou.

A base para a metodologia SIMP, também chamada de *power-law*, proposta em Bendsøe (1989) compreende na substituição da representação discreta de distribuição de material pelo emprego de uma função de densidade artificial obtida elevando a variável de projeto a um expoente maior que a unidade, geralmente três (DUYSINX; BENDSØE, 1998, p. 1472; BENDSØE; SIGMUND, 1999, p. 638; ROZVANY, 2001, p. 95; TCHERNIAK, 2002, p. 1608; OLHOFF; DU, 2005, p. 2; DU; OLHOFF, 2007, p. 92; BOROOMAND; BAREKATEIN, 2008, p. 19; ALLAHDADIAN; BOROOMAND, 2010, p. 3; YANG; LI, 2012, p. 405; JUNG; HYUN *et al.*, 2015, p. 200; ZHU; YANG *et al.*, 2017, p. 117; NIU *et al.*, 2017, p. 2296; YUN; YOUN, 2018, p. 159; SILVA; NEVES; LENZI, 2019, p. 162). Em seu manuscrito, Rozvany (2008, p. 218) destacou a necessidade da penalização da variável de projeto para que a solução não apresente elementos "cinzas", isto é, com densidade intermediária e, assim, se aproxime da solução discreta (0–1).

Em adição às metodologias de parametrização utilizadas na otimização topológica, o procedimento denominado Evolutionary Structural Optimization – ESO (XIE; STEVEN, 1997, p. 2) foi desenvolvido baseado no conceito da remoção de material ineficiente presente no domínio, ou seja, a estrutura otimizada é obtida com os materiais restantes. Rozvany (2008, p. 223) apontou que o nome mais adequado a este método seria: *Sequential Element Rejections and Admissions* – SERA, uma vez que os termos *Evolucionário* refere-se ao processo Darwiniano e *Otimização* implica no cálculo de uma solução realmente ótima. Vale destacar que desde a sua concepção, a metodologia ESO já teve diversas melhorias, desde a possibilidade de funções que proporcionam o retorno de materiais previamente removidos (ESO Bi-direcional), uso de multiplicadores de Lagrange para acomodar várias restrições e o uso de sensibilidades (ROZVANY, 2008, p. 230).

Esquemas adicionais de parametrização de material podem ser encontrados na literatura, como por exemplo, *Rational Approximation of Material Properties* – RAMP (STOLPE; SVANBERG, 2001) que se propõe em obter soluções com menor quantidade de material intermediário pelo uso de uma função racional e *Polynomial Interpolation Scheme* – PIS (ZHU; ZHANG; BECKERS, 2009, p. 643; ZHU; BECKERS; ZHANG, 2010, p. 2226), uma função baseada em dois parâmetros com o objetivo de diminuir a diferença entre a penalização dada para as matrizes de massa e de rigidez quando a variável de projeto tende a zero.

Tais funções de penalização podem levar a problemas de otimização não-convexos, ou seja, apresentam diversos mínimos locais, e por esse motivo geralmente são utilizadas com um processo denominado continuação (DEATON; GRANDHI, 2013, p. 3; ROZVANY, 2008, p. 220), isto é, aumenta-se lentamente a penalização ao passo de subsequentes ciclos de iterações. Esse processo elimina as densidades intermediárias, porém ocorre o surgimento de outros problemas: elementos conectados apenas por seus cantos, por exemplo, em cadeia de elementos diagonais; grupo de elementos conectados apenas por um nó, que é referido como pino isolado; e elementos arranjados em uma formação parecida com a do tabuleiro de damas (instabilidade de tabuleiro).

Muito embora a instabilidade de tabuleiro pareça gerada pela parametrização do material por SIMP, Rozvany (2008, p. 220) e Bendsøe e Sigmund (2004, p. 40) apontam que a causa do problema está na superestimação da rigidez de elementos conectados apenas por um nó, que por sua vez é decorrente da discretização dos elementos finitos. Portanto, uma das maneiras de tratar este erro é a utilização de elementos de alta ordem (SIGMUND; PETERSSON, 1998, p. 71; ROZVANY, 2008, p. 220; BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 41–42), porém o uso de tais elementos aumentam significativamente o tempo de processamento.

Outro problema inerente ao modelo discretizado por elementos finitos é a dependência de malha, isto é, a obtenção de diferentes topologias de acordo com o tamanho da discretização utilizado (DEATON; GRANDHI, 2013, p. 3; SIGMUND; PETERSSON, 1998, p. 78). Para lidar com esse problema (e com a instabilidade de tabuleiro também), podem ser aplicadas as chamadas técnicas de regularização, tais como filtros e restrições (DEATON; GRANDHI, 2013, p. 3). O filtro de gradiente, segundo Sigmund e Petersson (1998, p. 73) é puramente heurístico e apresenta resultados similares à restrição de gradiente, entretanto esta técnica requer menor tempo de processamento e é de fácil implementação. Esta última característica é determinante para que os filtros se enquadrem como os métodos de regularização mais usados (DEATON; GRANDHI, 2013, p. 4).

Embora todas as metodologias de interpolação apresentadas acima possuem uso na otimização topológica dinâmica, não se pode ignorar a contribuição realizada por Fox e Kapoor (1970) em seu trabalho considerando carregamento dinâmico, mediante a otimização de uma estrutura de barras com restrições de deslocamento, de tensão e de faixa de frequências naturais. O método das direções viáveis foi empregado para resolver o problema, implicando na análise de sensibilidade do comportamento dinâmico do modelo com respeito às variáveis de projeto.

Uma característica importante levantada por Kang, Choi e Park (2001, p. 145) está relacionada ao fato de que, ao otimizar uma estrutura para carregamentos estáticos, obtém-se uma topologia que poderá violar as restrições caso sejam empregados carregamentos dinâmicos. Desse modo, considerando ainda que a maior parte dos esforços em engenharia variam com o tempo (PARK; KANG, 2003, p. 192; KANG; PARK; ARORA, 2006, p. 92) e que “a área da otimização topológica sob carregamentos dinâmicos é menos estudada” (BEHROU; GUEST, 2017, p. 2), percebe-se uma instigante necessidade de se estudar a otimização em regime dinâmico.

Com relação aos avanços na obtenção de uma metodologia eficiente e ao mesmo tempo eficaz para a resolução da otimização estrutural transiente, pode-se citar os trabalhos (BELEGUNDU; ARORA, 1981, p. 1373, 1984, p. 536; PAENG; ARORA, 1989, p. 74; ARORA; CHAHANDE; PAENG, 1991, p. 1489–1490, 1518; CHAHANDE; ARORA, 1993, p. 70–71, 1994, p. 416; KANG; PARK; ARORA, 2006, p. 84; BIRGIN; MARTÍNEZ, 2014a, p. 32–34) que utilizam a construção de uma função Lagrangiano Aumentado para transformar um problema de otimização com restrições em um problema sem restrições que, por sua vez, pode ser resolvido utilizando-se de otimizadores tradicionais, tais como:

MMA (SVANBERG, 1987), GCMMA (FLEURY; ZHANG, 2000), CONLIN (FLEURY; BRAIBANT, 1986), SQP (SCHITTKOWSKI, 1983) e SLP (GRIFFITH; STEWART, 1961).

Para minimizar o esforço computacional inerente ao cálculo da resposta dinâmica em problemas de otimização, Sherif *et al.* (2010, p. 1339) e Kang, Park e Arora (2006, p. 90) ressaltam a introdução do conceito de *Equivalent Static Loads* – ESL, que se baseia na transformação dos esforços dinâmicos em uma série de carregamentos estáticos equivalentes que geram o mesmo campo de deslocamento (KANG; CHOI; PARK, 2001, p. 146); isto implica em uma otimização estática com múltiplos casos de carga, ou seja, um problema de otimização não-linear dinâmico é convertido no uso sequencial de otimizações estáticas (LEE; PARK, 2015, p. 957).

Apesar do ESL ser extensivamente utilizado (KANG; CHOI; PARK, 2001; CHOI; PARK, 2002; PARK; KANG, 2003; SHERIF *et al.*, 2010; JANG *et al.*, 2012; LEE; PARK, 2012; JUNG; PARK, 2015; LEE; PARK, 2015; ZHU; YANG *et al.*, 2017; KAREV *et al.*, 2017), um problema da otimização estrutural utilizando os carregamentos estáticos equivalentes é discutido por Park (2010, p. 336), uma vez que nem sempre é possível utilizar variáveis de projeto, função objetivo e restrições que sejam passíveis de conversão para o formato estático. Karev *et al.* (2017) citam outras dificuldades: a primeira relaciona-se com o fato de que os campos de deslocamentos iguais obtidos na análise estática equivalente não implicam na igualdade de seus carregamentos geradores; e a segunda diz que a trajetória do problema de otimização utilizando os carregamentos estáticos não é garantido que os deslocamentos lineares se mantenham iguais aos do modelo não-linear.

Percebe-se então a existência de uma lacuna quanto à resolução de problemas de otimização estrutural em regime transiente sujeitas a restrições locais de deslocamento e tensão, que é causada tanto pela dificuldade inerente à obtenção da solução de equações diferenciais do movimento, quanto pela aplicação desta análise para o cálculo das restrições locais. Com isso, é identificada a possibilidade de aplicação e aperfeiçoamento de metodologias já existentes de modo a estudar qual a melhor prática destinada a solucionar tal problema.

Partindo-se dessa motivação, será executado um estudo para o desenvolvimento de um programa computacional que solucione problemas de otimização topológica de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos e considerando restrições locais de tensão e deslocamento. A modelagem da estrutura será realizada em meio discretizado por elementos finitos, com a parametrização das variáveis de projeto por SIMP. A otimização será escrita em termos da função Lagrangiano Aumentado de modo a agrupar uma função objetivo com significado de volume da estrutura e restrições locais de tensão e deslocamento em um único funcional, cuja sensibilidade empregará o método adjunto a fim de proporcionar a utilização de uma técnica baseada em gradiente para a atualização das variáveis de projeto.

A dependência temporal das restrições será estudada mediante aplicação de metodologias conhecidas empregando multiplicadores de Lagrange em função do tempo, bem como a aplicação do conceito de restrição equivalente (HAUG; ARORA, 1979, p. 333, 362; HAFTKA; GÜRDAL, 1992, p. 291), que aplica um funcional integral de modo a remover tal dependência. Entretanto, esse funcional equivalente integral apresenta uma descontinuidade no limiar de ativação da restrição, dificultando a convergência da otimização (HSIEH; ARORA, 1984, p. 198–199). Por isso, será estudada também, uma metodologia original para contornar esse problema.

A validação do algoritmo proposto será realizada mediante análise de dois problemas de otimização estrutural clássicos da literatura, a treliça de três barras e a treliça de dez barras. Os resultados ótimos desses exemplos serão apresentados em tabelas juntamente com os obtidos pelo programa e seus valores comparados. Vale destacar que, neste trabalho, o separador decimal será representado por um ponto ao invés de uma vírgula, como é usual na língua portuguesa. Assim, 0.5 deve ser entendido como 0,5 (zero vírgula cinco). Essa escolha não causará dificuldades na leitura, pois não são utilizados separadores de milhar ao longo do texto.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Geral

O objetivo geral desta dissertação é examinar a aplicabilidade de um algoritmo para resolução de problemas de otimização estrutural em regime transiente, compreendendo a minimização de massa com restrições locais de tensão e deslocamento, baseando-se em abordagens matemáticas formalmente justificadas.

1.2.2 Específicos

Para o devido cumprimento do objetivo geral, realiza-se sua subdivisão onde são definidos os seguintes objetivos específicos:

- Definir as equações do movimento em variáveis de estado;
- Apresentar a fundamentação teórica para discretização do modelo pelo método dos elementos finitos;
- Definir a metodologia de otimização estrutural que será utilizada, com ênfase nos conceitos da otimização topológica e suas estratégias de solução;
- Definir a função objetivo e as restrições de acordo com a metodologia utilizada para otimização;
- Propor um método de relaxação do funcional equivalente integral de modo a suavizar sua resposta no limiar de ativação da restrição;
- Realizar a análise de sensibilidade com respeito às variáveis de projeto, escolhendo a melhor metodologia para tratar tais funções de regime transiente;
- Elaborar um algoritmo para aplicação da otimização;
- Validar o algoritmo proposto por meio de comparações com problemas da literatura.

1.3 ESTADO DA ARTE

Uma vez estipulados os objetivos e considerando a motivação já identificada, faz-se necessário o levantamento bibliográfico acerca das práticas mais recentes que estão sendo empregadas na resolução dos problemas de otimização estrutural topológica transiente. Nesta etapa, para obtenção e acesso aos artigos, foram consideradas as consultas aos banco de dados de periódicos do portal da CAPES e também via pesquisa no Google Acadêmico. Deu-se preferência para artigos escritos na língua inglesa e foram utilizadas as seguintes palavras-chave (em inglês) para a realização da busca: *otimização topológica*, *transiente*, *dinâmico*, *carregamentos periódicos*, *carregamento estático equivalente*, *projeto ótimo*, *sistemas dinâmicos*, *vibração*. Destaca-se também a pesquisa direta dos trabalhos citados nos artigos encontrados na busca inicial e a consulta ao banco de dados de teses da UDESC para identificar os trabalhos já realizados pelo grupo de pesquisa.

No levantamento bibliográfico realizado em Pierson (1972), as restrições dinâmicas foram subdivididas em duas classes:

1. *Restrições de frequências naturais*: são consideradas bem desenvolvidas pelo autor, que identifica o uso de diversos algoritmos de otimização, tais como: multiplicadores de Lagrange, Newton-Raphson, *steepest-descent*, método da direção viável, Programação Linear, gradientes conjugados, gradientes projetados, busca direta em padrões e direções conjugadas (PIERSON, 1972, p. 492–496);

2. *Restrições de resposta dinâmica*: apontadas pelo autor como "desafiadoras" (PIERSON, 1972, p. 495), alguns trabalhos que tratam da resposta de estruturas em regime permanente sob carregamento senoidal são mencionados, bem como o projeto de um escudo térmico sujeito a carregamento transiente (THORNTON; SCHMIT JR., 1968), que utiliza as restrições integradas no tempo e na espessura que são posteriormente convertidas em uma função de penalização minimizada pelo método de Davidon-Fletcher-Powell.

Ainda, abordando a área da otimização de estruturas sob carregamento dinâmico, de um modo geral, pode-se citar o extenso trabalho de revisão "*A review of optimization of structures subjected to transient loads*" (KANG; PARK; ARORA, 2006) que reúne os seguintes assuntos:

1. Restrições temporais:
   - metodologia de tratamento direto (funcionais equivalentes, abordagem do pior caso, todos os máximos locais, restrições ponto-a-ponto próximo aos máximos locais, múltiplos funcionais equivalentes e restrições ponto-a-ponto em todo o domínio);
   - metodologia de transformação em um problema sem restrições.
2. Análise de sensibilidade:
   - pelo método direto (integração direta e superposição de modos);
   - pelo método da variável adjunta;
   - pelo método dos elementos finitos temporais.
3. Aproximações:
   - aproximações globais;
   - aproximações locais;
   - método ESL.
4. Breve revisão em mecanismos flexíveis de sistemas dinâmicos.

O trabalho de revisão da literatura realizado por Kang, Park e Arora (2006), sem sombra de dúvidas, é um dos mais completos da área de otimização estrutural transiente, pois contempla uma ampla gama de referências. Entretanto, devido ao seu ano de publicação, apenas dois artigos especificamente de otimização topológica são mencionados. Outro levantamento bibliográfico *"Topology optimization of continuum structures: A review"* (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001), contando com 425 referências, compreende o objetivo principal de apresentar uma visão geral do desenvolvimento realizado com respeito às técnicas para projeto de topologias, considerando as técnicas *microestruturais* (material) e *macroestruturais* (geometria). Os autores também citam trabalhos realizados com uma vasta quantidade de funções objetivo e restrições, onde é possível detectar algumas categorias de classificação:

1. Modelos de material
   - Microestrutura anisotrópica furada
   - Microestrutura em camadas 2D
   - Microestrutura em camadas 3D
   - SIMP
2. Modelos geométricos
   - Modelo de placa com espessura variável
   - Metodologia SHAPE
   - Simulação de crescimento biológico
   - Otimização Estrutural Evolucionária – ESO
   - Bi-direcional ESO – BESO
   - Técnica de inserção de furos *bubble-method*
   - Inserção de furos via derivada topológica
3. Objetivos e Restrições
   - Autovalores (frequências naturais)
   - Tensão
   - Dano e impacto
   - Estruturas controladas
   - Carregamentos dependentes do projeto
   - Formulações multiobjetivo

Para resumir e classificar as bibliografias consultadas na área da otimização estrutural topológica transiente, utilizou-se das categorias supracitadas e outras adicionais para o preenchimento da Tabela 1.

Tabela 1 – Artigos realizados no âmbito da otimização estrutural topológica transiente.

(continua)

Categorias	Tipo	Referências
Discretização	Elementos finitos	[57] [59] [61] [86] [45] [63] [44] [2] [78] [1] [94] [30] [92] [93] [46] [52] [43] [51] [55] [88] [9] [54] [96] [97] [100] [62] [83]
Parametrização do material	Microestrutura anisotrópica (furada)	[57] [59] [61]
	Microestrutura em camadas 2D	[59]
	SIMP	[86] [63] [30] [2] [78] [1] [46] [88] [9] [100] [62] [83]
	Espessura normalizada	[45]
	PIS	[55] [96] [97][a]
	RAMP	[44] [92] [93]
	BESO (SERA)	[43] [51] [52] [54]
Equilíbrio	Estático	[86] [45] [78] [1] [94] [43] [51] [52] [97][b] [100]
	Modal	[57] [61] [45] [63] [30] [44] [92] [93] [46] [55] [88] [54] [62] [83]
	Transiente	[59] [2] [88][c] [9] [96] [97] [100][c]
Tipo de carregamento	Massas concentradas	[57]
	Frequências e amplitudes prescritas	[57] [59] [61] [86] [45] [63] [44] [2] [92] [93] [46] [55] [88] [9] [55] [96] [97] [62] [83]
	ESL	[78] [1] [94] [43] [51] [52] [100]
Análise de sensibilidade	Método direto	[57] [59] [61] [45] [63] [30] [1] [55] [88] [54] [1] [55] [88] [54] [62]
	Método adjunto	[86] [44] [2] [92] [93] [46] [55] [88] [9] [96] [97] [100] [62] [83]
	Diferenças finitas centrais	[46][d]
	Não especificou	[78] [43] [51] [52]
Objetivo	Max.[e] os autovalores	[57][f] [30][f]
	Min.[g] a flexibilidade dinâmica	[57] [59] [45][h] [63] [51] [92][i] [93][i] [96][j] [54][k] [62][i] [83]

Fonte: Elaborado pelo autor.

[a] somado a uma penalização explícita
[b] usado para comparação com transiente
[c] utilizou variáveis de estado
[d] calculado para validação do método adjunto
[e] maximizar
[f] função
[g] minimizar
[h] potência de entrada
[i] valor ao quadrado
[j] valor médio ao quadrado
[k] norma

Tabela 1 – Artigos realizados no âmbito da otimização estrutural topológica transiente.
(continuação)

Categorias	Tipo	Referências
Objetivo	Min.[g] os picos de flexibilidade	[43][l] [52][m][54][l]
	Min.[g] o deslocamento	[44] [46] [55][n] [88][o] [96] [97][p] [100][q] [62]
	Max.[e] o deslocamento	[86]
	Min.[g] a aceleração	[62][i]
	Função multi-objetivo	[61] [83]
	Min.[g] a flexibilidade estática	[78] [94]
	Min.[g] a energia de deformação	[2] [1] [52] [96] [9]
	Min.[g] a potência	[62]
Restrição	Flexibilidade estática	[63] [54] [83]
	Equilíbrio estático	[78] [1] [43] [51] [92] [93] [52] [88] [100]
	Deslocamento	[86] [94] [52]
	Volume	[57] [59][r] [61] [86] [45] [63] [30] [44] [2][r] [78] [1] [94][r] [43] [51][r] [92] [93] [46] [52] [55] [88] [9] [54] [96] [97] [100] [62] [83]
	Equilíbrio dinâmico	[59] [86] [63] [43] [92] [93] [52] [88] [9] [97] [62] [83]
	Limites nas variáveis de projeto	[57] [59] [61] [86] [45] [30] [2] [78] [1] [94] [43] [51] [92] [93] [46] [52] [55] [88] [9] [54] [97] [100] [62] [83]
	Problema de autovalor generalizado	[30] [93] [88] [100]
	Tensão	[94]
Método de otimização	MMA	[86] [63] [30] [44] [2] [46] [88] [9] [96] [97] [100] [62]
	Critério de ótimo	[57] [59] [63]
	Critério de ótimo relaxado	[57] [45]
	SLP	[61]
	TOSCA	[78]
	CONLIN	[1]
	GCMMA	[92] [93] [55] [83]
	GENESIS	[51] [52]
	NASTRAN	[94] [51] [46]

Fonte: Elaborado pelo autor.

[l] soma ponderada
[m] soma ponderada de valores próximos aos picos
[n] valor absoluto e integral na frequência
[o] picos e integral no tempo
[p] função de agregação
[q] variância
[r] restrição de massa

Tabela 1 – Artigos realizados no âmbito da otimização estrutural topológica transiente.
(conclusão)

Categorias	Tipo	Referências
Método de otimização	OPTISTRUCT	[43] [51]
	Critério próprio	[54]
Técnica de regularização	Não comenta / não usou filtro	[57] [59] [61] [45] [63] [78] [1] [94] [43] [51] [93] [52] [46] [88] [100]
	Filtro não especificado	[86] [55]
	Refino de malha sequencial	[2]
	Projeção Heaviside	[9]
	Filtro de vizinhança	[54] [83]
	Filtro de gradiente	[30] [44] [92] [54] [96] [97] [62]

Fonte: Elaborado pelo autor.

Algumas observações importantes podem ser retiradas desta tabela: inicialmente, nota-se o fato de que dos sete trabalhos que realizam otimização considerando a resposta transiente, apenas um artigo realizou a análise de sensibilidade direta e outros seis fizeram uso da técnica adjunta. Isso indica a vantagem desta metodologia para tratar as análises de sensibilidade no domínio do tempo. Venini (2016) e Zhu, Yang *et al.* (2017) expressaram a equação do movimento por variáveis de estado, transformando-as em uma equação diferencial de primeira ordem, que é computacionalmente mais eficiente.

Conforme esperado, todos os autores pesquisados utilizaram elementos finitos para as discretizações de meio contínuo e a parametrização de material seguiu uma tendência muito forte de homogenização até os anos 2000 (MA; KIKUCHI; CHENG, 1995; MIN *et al.*, 1999; NISHIWAKI *et al.*, 2000), que foi substituída pelos modelos microestruturais tais como: SIMP (usado por cerca da metade dos artigos pesquisados), RAMP (usado em três artigos), PIS (usado por três trabalhos) e BESO (usado em quatro pesquisas).

Analisando o algoritmo usado para a otimização, percebe-se que a técnica de MMA e suas evoluções são as preferidas no ambiente acadêmico, seguida pelos critérios de ótimo e uso de programas comerciais. Quanto às técnicas de regularização, nota-se que muitos pesquisadores não mencionam o uso de metodologia alguma, os que fazem dão preferência para o filtro de gradiente.

Outro dado importante é que apenas Yi, Lee e Park (2011) consideram tensão como restrição, embora a otimização realizada se enquadre na categoria estática, pelo fato de aplicar ESL para discretizar o carregamento dinâmico. Portanto, acrescentar tensão nas análises transientes de otimização topológica merece ser estudada com maior profundidade.

1.3.1 Grupo de pesquisa em vibração e estruturas

O grupo de pesquisa *Vibração e Estruturas*, do curso de Mestrado em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado de Santa Catarina, apresenta foco de projeto tanto experimental, com ênfase na vibração, análise e fabricação de compósitos e caracterização de material, quanto numérico destacando-se a detecção de dano e a otimização multidisciplinar.

O presente trabalho enquadra-se junto com os realizados na área da otimização estrutural (MENEGHELLI, 2013; FRANCO, 2015; SILVA, 2016; CHRISTOFF, 2016; ASSIS PEREIRA, 2017; MONTERO, 2019) e utiliza alguns conceitos previamente abordados, tais como: Lagrangiano Aumentado (presente em Silva (2016), Assis Pereira (2017) e Montero (2019)), parametrização SIMP (usado em todos) e análise de sensibilidade via método adjunto, que também foi aplicado por todos os trabalhos.

Também é proposto o emprego de restrição de tensão, que foi abordada em duas metodologias distintas: a global (MENEGHELLI, 2013; ASSIS PEREIRA, 2017) e a local (SILVA, 2016; ASSIS PEREIRA, 2017; MONTERO, 2019), sendo que todos os quatro trabalhos descrevem as técnicas de relaxação mais usadas. Em relação ao algoritmo de solução, destacam-se o critério de ótimo (usado em Franco (2015), Silva (2016) e Assis Pereira (2017)) Programação Linear Sequencial – SLP (usado em Meneghelli (2013) e Christoff (2016)) MMA (usado em Christoff (2016)) e *Steepest Descent* com *line-search* projetado (usado por Montero (2019)).

Nota-se que nenhuma pesquisa do grupo abordou ainda problemas com característica transiente, apesar de Montero (2019) considerar o problema harmônico. Isto ressalta a importância da aplicação de definições previamente apresentadas para o estudo de otimização topológica estrutural transiente.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O Capítulo 1 compreende um breve histórico e sua consequente motivação para o estudo, juntamente com a apresentação dos objetivos do trabalho e o levantamento do estado da arte para identificação das práticas usadas na resolução de problemas da otimização topológica estrutural dinâmica.

O problema de equilíbrio é apresentado no Capítulo 2. A partir da formulação de equilíbrio, introduz-se a discretização por elementos finitos. Na seção 2.2 é definida a equação do movimento empregando as variáveis de estado, que servirá como base para a análise da resposta dinâmica da estrutura durante a otimização. Para finalizar este capítulo, em 2.2.1, é apresentado um fragmento do algoritmo empregado para solucionar a equação diferencial e suas características mais importantes.

O Capítulo 3 aborda os conceitos básicos da otimização estrutural, tais como: função objetivo, restrições e condições de otimalidade. Na seção 3.5 sintetizam-se as principais ideias por trás das metodologias utilizadas na elaboração de otimizadores baseados em gradiente. Nas seções 3.6 e 3.6.1 a função Lagrangiano Aumentado é definida para um problema de otimização transiente genérico e a sua análise de sensibilidade é deduzida.

Ao final do capítulo, na seção 3.7, é abordada a questão do tratamento encontrado na literatura para lidar com as restrições dependentes do tempo em problemas de otimização transientes e em 3.8 é proposta uma metodologia original para mitigar o problema do método clássico. Uma nova função Lagrangiano Aumentado é apresentada na seção 3.9 e sua derivada em 3.9.1.

Já o Capítulo 4 está dedicado a tratar do tópico otimização topológica, compreendendo, na seção 4.1, a parametrização do material e, na seção 4.2, as dificuldades associadas à restrição de tensão aplicada nesta classe de otimização.

No Capítulo 5 é apresentado o problema na forma de duas funções Lagrangiano Aumentado e, em seguida, são deduzidas as análises de sensibilidade para a restrição de deslocamento nodal (seção 5.1) e de tensão equivalente local (seção 5.2). O algoritmo que será utilizado para resolver os problemas de otimização é definido na seção 5.4.

Por fim, no Capítulo 6, o algoritmo é validado mediante a resolução de dois problemas da literatura, que são subdivididos em casos superamortecidos e subamortecidos. Os resultados obtidos são apresentados em 6.1.1 e 6.1.2 para o problema de três barras e 6.2.1 e 6.2.2 para o problema de dez barras.

2 EQUILÍBRIO DINÂMICO

Conforme apresentado em Reddy (2013, p. 197–200), o princípio do balanço do momento linear de um corpo de densidade ρ_0, que ocupa instantaneamente o volume Ω e a superfície Γ, sujeito a força de corpo $\mathbf{f}$, força de superfície $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ e deslocamento prescrito na superfície $\mathbf{u}^{\Gamma}$ é denotado, em um ponto, por

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \, \mathbf{f} = \rho_0 \, \ddot{\mathbf{u}}, \tag{1}$$

com $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}$ representando o tensor de tensão simétrico de Cauchy e todas as derivadas em relação ao tempo descritas por pontos acima das variáveis. Considerando as contribuições lineares da força viscosa $\alpha \, \rho_0 \, \dot{\mathbf{u}}$ e da tensão viscosa $\boldsymbol{\sigma}^D$ adicionadas na equação (1), tem-se

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D) + \rho_0 \, \mathbf{f} = \rho_0 \, \ddot{\mathbf{u}} + \alpha \, \rho_0 \, \dot{\mathbf{u}}, \tag{2}$$

onde α é um parâmetro de proporcionalidade.

O princípio do trabalho virtual (BATHE, 2014, p. 154–158) é deduzido a partir da introdução de um deslocamento virtual arbitrário que satisfaz

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma_u \quad \forall \, t, \tag{3}$$

onde Γ_u é a superfície na qual o vetor de deslocamentos é especificado. Assim, multiplicando este deslocamento virtual pelos termos da equação (2) tem-se

$$\left[\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D)\right] \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \rho_0 \, \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \rho_0 \, \ddot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \, \rho_0 \, \dot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \tag{4}$$

que é integrado em seu volume, isto é,

$$\int_\Omega \left\{ \left[\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D)\right] \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \rho_0 \, \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \rho_0 \, \ddot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \alpha \, \rho_0 \, \dot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right\} \, d\Omega = 0, \tag{5}$$

e aplicando a identidade matemática, $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \, \tilde{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \, \tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} \, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}$, obtém-se

$$\int_\Omega \left\{ \nabla \cdot \left[(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D) \, \tilde{\mathbf{u}}\right] - (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D) \, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \rho_0 \, \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \rho_0 \, \ddot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \alpha \, \rho_0 \, \dot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right\} \, d\Omega = 0, \tag{6}$$

aplicando o teorema da divergência, $\int_\Omega \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{t} \, \mathbf{u} \, d\Gamma$, considerando a condição dada pela equação (3) e aplicando a hipótese de deformações infinitesimais,

$$\boldsymbol{\sigma} \, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\sigma} \; \frac{1}{2} \left[\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})^{\mathsf{T}}\right] = \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{7}$$

tem-se o resultado,

$$\int_\Omega \left[(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho_0 \, \ddot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \, \rho_0 \, \dot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}\right] d\Omega = \int_\Omega \rho_0 \, \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \; d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma, \tag{8}$$

que pode ser reescrito aplicando a notação de Voigt para tratar os tensores de segunda ordem como um vetor, isto é, $\boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} \, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Assim,

$$\int_\Omega \left[(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho_0 \, \ddot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \, \rho_0 \, \dot{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}\right] d\Omega = \int_\Omega \rho_0 \, \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \; d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Gamma. \tag{9}$$

2.1 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

A discretização por elementos finitos está baseada na aproximação do corpo analisado como uma montagem de um número finito de elementos conectados entre si por nós, isto é, pontos em suas extremidades. Conforme apontado em (BATHE, 2014, p. 161–166), o deslocamento local em um elemento e é definido como uma função dos deslocamentos nodais, ou seja,

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\hat{\mathbf{U}} \quad e = 1,\ \ldots,\ n_{ele}, \tag{10}$$

onde $\mathbf{H}_e$ é a matriz de localização, $\mathbf{N}$ é a matriz de interpolação e $\hat{\mathbf{U}}$ é o vetor de deslocamento global. Analogamente é definida a expressão para a deformação,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e\mathbf{H}_e\,\hat{\mathbf{U}} \quad e = 1,\ \ldots,\ n_{ele}, \tag{11}$$

onde $\mathbf{B}_e$ é a matriz que mapeia a deformação a partir do deslocamento. Os vetores velocidade, taxa de deformação e aceleração podem ser facilmente obtidos pela diferenciação da equações (10) e (11). Reescrevendo a equação (9) como a soma das integrais sobre o volume e superfície de todos os elementos, isto é,

$$\sum_{e=1}^{n_{ele}} \int_{\Omega_e} \big[(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^D)\cdot\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho_0\,\ddot{\mathbf{u}}\cdot\tilde{\mathbf{u}} + \alpha\,\rho_0\,\dot{\mathbf{u}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\big]\,d\Omega_e = \sum_{e=1}^{n_{ele}}\left(\int_{\Omega_e}\rho_0\,\mathbf{f}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\,d\Omega_e + \int_{\Gamma_e}\mathbf{t}\cdot\tilde{\mathbf{u}}\,d\Gamma_e\right), \tag{12}$$

onde Ω_e é o volume de cada elemento e Γ_e representa a superfície de um elemento que faz parte da superfície do corpo. Destaca-se que, apesar da supressão do subscrito e referente ao elemento, cada variável apresenta sua devida correspondência.

Aplicando a Lei de Hooke, relacionam-se as tensões e deformações pela matriz constituinte dos elementos $\mathbf{E}_e$, ou seja, para um corpo livre de tensões iniciais,

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{E}_e\,\boldsymbol{\varepsilon}_e, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_e^D = \mathbf{E}_e\,\beta\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e, \tag{14}$$

onde β é um fator dependente do material do elemento e. E ainda, definem-se as expressões para deslocamentos e deformações virtuais,

$$\tilde{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}, \tag{15}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \mathbf{B}_e\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}. \tag{16}$$

Substituindo estas expressões na equação (12), tem-se

$$\begin{aligned}
&\sum_{e=1}^{n_{ele}}\int_{\Omega_e}\Big(\mathbf{B}_e\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}\Big)^{\mathsf{T}}\mathbf{E}_e\,\mathbf{B}_e\mathbf{H}_e\,\hat{\mathbf{U}}\,d\Omega_e + \sum_{e=1}^{n_{ele}}\int_{\Omega_e}\beta\Big(\mathbf{B}_e\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}\Big)^{\mathsf{T}}\mathbf{E}_e\,\mathbf{B}_e\mathbf{H}_e\,\dot{\hat{\mathbf{U}}}\,d\Omega_e + \\
&\quad\sum_{e=1}^{n_{ele}}\int_{\Omega_e}\rho_0\Big(\mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}\Big)^{\mathsf{T}}\mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\ddot{\hat{\mathbf{U}}}\,d\Omega_e + \sum_{e=1}^{n_{ele}}\int_{\Omega_e}\alpha\,\rho_0\Big(\mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}\Big)^{\mathsf{T}}\mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\dot{\hat{\mathbf{U}}}\,d\Omega_e = \\
&\qquad\sum_{e=1}^{n_{ele}}\int_{\Omega_e}\rho_0\Big(\mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}\Big)^{\mathsf{T}}\mathbf{f}\,d\Omega_e + \sum_{e=1}^{n_{ele}}\int_{\Gamma_e}\Big(\mathbf{N}\mathbf{H}_e\,\tilde{\hat{\mathbf{U}}}\Big)^{\mathsf{T}}\mathbf{t}\,d\Gamma_e,
\end{aligned} \tag{17}$$

onde nota-se a presença do termo correspondente ao deslocamento virtual $\tilde{\hat{\mathbf{U}}}^{\mathsf{T}}$ em ambos os lados da equação e, portanto, este pode ser suprimido. Reconhecendo o fato de que os vetores deslocamento, velocidade e aceleração nodais podem ser retirados dos somatórios, uma vez que são independentes do elemento, a equação (17) é reescrita como

$$\begin{aligned}\sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathsf{T}}\, \mathbf{E}_e\, \mathbf{B}_e \, d\Omega_e \right) \mathbf{H}_e\, \hat{\mathbf{U}} + \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \left(\int_{\Omega_e} \beta\, \mathbf{B}_e^{\mathsf{T}}\, \mathbf{E}_e\, \mathbf{B}_e \, d\Omega_e \right) \mathbf{H}_e\, \dot{\hat{\mathbf{U}}} + \\ \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \left(\int_{\Omega_e} \rho_0\, \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{N} \, d\Omega_e \right) \mathbf{H}_e\, \ddot{\hat{\mathbf{U}}} + \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \left(\int_{\Omega_e} \alpha\, \rho_0\, \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{N} \, d\Omega_e \right) \mathbf{H}_e\, \dot{\hat{\mathbf{U}}} = \\ \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \int_{\Omega_e} \rho_0\, \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{f} \, d\Omega_e + \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{t} \, d\Gamma_e.\end{aligned} \tag{18}$$

Com isso, são obtidas as seguintes definições globais:

- Matriz de massa

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \left(\int_{\Omega_e} \rho_0\, \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{N} \, d\Omega_e \right) \mathbf{H}_e; \tag{19}$$

- Matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^{\mathsf{T}}\, \mathbf{E}_e\, \mathbf{B}_e \, d\Omega_e \right) \mathbf{H}_e; \tag{20}$$

- Matriz de amortecimento proporcional

$$\mathbf{C} = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \left[\int_{\Omega_e} \left(\alpha\, \rho_0\, \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{N} + \beta\, \mathbf{B}_e^{\mathsf{T}}\, \mathbf{E}_e\, \mathbf{B}_e \right) d\Omega_e \right] \mathbf{H}_e; \tag{21}$$

- Vetor de forças

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \int_{\Omega_e} \rho_0\, \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{f} \, d\Omega_e + \sum_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{H}_e^{\mathsf{T}} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{t} \, d\Gamma_e. \tag{22}$$

A resposta de um sistema dinâmico linear de n graus de liberdade pode ser representada, então, pela solução da equação diferencial do movimento (ou equilíbrio dinâmico), que pode ser escrita, em notação matricial, como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t), \tag{23}$$

com as condições iniciais de deslocamento e velocidade

$$\mathbf{U}(t=0) = \mathbf{U}_0, \;\; \dot{\mathbf{U}}(t=0) = \mathbf{V}_0, \tag{24}$$

onde $t \in [0,\, T_f]$ descreve o instante de tempo, T_f é o tempo final, $\mathbf{M}_{n\times n}$ é a matriz de massa, $\mathbf{C}_{n\times n}$ é a matriz de amortecimento, $\mathbf{K}_{n\times n}$ é a matriz de rigidez, $\mathbf{F}_{n\times 1}$ é o vetor de forças (externas e internas), $\mathbf{U}_{n\times 1}$ é o vetor de deslocamento, $\dot{\mathbf{U}}_{n\times 1}$ é o vetor de velocidade e $\ddot{\mathbf{U}}_{n\times 1}$ é o vetor de aceleração. Ambas as condições iniciais, representadas na equação (24), são conhecidas para $t = 0$.

O amortecimento estrutural empregado considerando a teoria de Rayleigh (amortecimento proporcional), tal que a matriz de amortecimento equação (21) é uma combinação das matrizes de massa e de rigidez da estrutura

$$\mathbf{C} = \alpha\, \mathbf{M} + \beta\, \mathbf{K}. \tag{25}$$

2.2 VARIÁVEIS DE ESTADO

O cálculo do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, representado pela equação (23), se torna computacionalmente custoso nos casos em que as matrizes são muito grandes (BATHE, 2014, p. 768–769). Por isso, pode-se definir uma equação diferencial de primeira ordem tal como em Lutes e Sarkani (2004, p. 334–335), Wang e Arora (2005, p. 2–3), Venini (2016, p. 15) e Zhu, Yang *et al.* (2017, p. 120),

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{F}(t) + \mathbf{D}\mathbf{q}(t), \tag{26}$$

com as seguintes definições provenientes da discretização por elementos finitos

$$\mathbf{A}_{2n\times 2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n\times n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{n\times n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}_{2n\times 2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n} \\ \text{-}\mathbf{K}_{n\times n} & \text{-}\mathbf{C}_{n\times n} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G}_{2n\times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} \\ \mathbf{I}_{n\times n} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times 1} \\ \mathbf{F}_{n\times 1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{q}}_{2n\times 1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{q}_1(t) = \mathbf{U}(t)$ e $\mathbf{q}_2(t) = \dot{\mathbf{q}}_1(t)$ são chamadas de variáveis de estado e $\mathbf{q}(t = 0) = \mathbf{q}_0$ é a condição inicial conhecida. A equação (26) pode ser reescrita de forma a aplicar as matrizes definidas acima

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \text{-}\mathbf{K} & \text{-}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Conforme apontado por Chahande e Arora (1994, p. 415), outra vantagem de se utilizar equações diferenciais de primeira ordem para a análise do equilíbrio é a existência de algoritmos bem estabelecidos para sua solução.

2.2.1 Solução da equação diferencial em variáveis de estado

O cálculo da equação (26) será realizado neste trabalho mediante o uso do pacote *DifferentialEquations* que, de acordo com Rackauckas e Nie (2017), "faz uso de despacho múltiplo, metaprogramação, receitas de plotagem, interface de função externa e sobrecarga de método (função) para resolver e analisar diversos formatos de equações diferenciais". Este pacote é escrito na linguagem de programação Julia, que oferece a combinação de produtividade e performance (BEZANSON *et al.*, 2017, p. 67).

Segue abaixo um fragmento do código que representa os comandos necessários para a criação da função que represente a equação diferencial do movimento e da função que realiza seu cálculo mediante o pacote. Nota-se que os parâmetros de tolerância são redefinidos para o valor de $1{\times}10^{-10}$.

Algoritmo 1 – Lógica para resolução da equação diferencial do movimento.

```
function Eq_Diferencial(dq,q,F,t,A,G,D)

    dq .= A\(G * F(t) .+ D * q)

end


function Soluciona_Equilibrio(q,A,G,D,F,Tf,f)

```

```
    fn(dq,q,p,t) = Eq_Diferencial(dq,q,F,t,A,G,D)

    # Define o tempo de integração
    tspan = (0.0,Tf)

    # Define o problema, passando as condições iniciais
    prob = ODEProblem(fn,q,tspan)

    # Soluciona o problema
    sol = solve( prob, ARKODE(), reltol=1E-10 , abstol=1E-10 )

    return sol

end
```

A função `ARKODE()`, que pertence ao pacote *Suite of Nonlinear and Differential/Algebraic Equation Solvers* – SUNDIALS (HINDMARSH *et al.*, 2005), resolve problemas de valor inicial escritos conforme em Reynolds *et al.* (2020, p. 24),

$$\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{y}} = f^E(\mathbf{y},t) + f^I(\mathbf{y},t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{28}$$

onde t representa a variável independente, que neste caso é o tempo, $\mathbf{y}(t)$ é a variável dependente, com sua derivada em relação a variável independente denotada por um ponto, $\mathbf{M}(t)$ é um operador linear do tipo $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (que neste trabalho é igual a matriz Identidade), $f^E(\mathbf{y},t)$ contém a parte não-rígida da equação e $f^I(\mathbf{y},t)$ contém a parte rígida. Sendo assim, o algoritmo `ARKODE` é capaz de resolver sistemas rígidos e não-rígidos.

O módulo integrador *ARKStep* por trás desse algoritmo é baseado no método Runge-Kutta Aditivo (ARK) e utiliza as tabelas de Butcher explícitas ou implícitas, conforme as opções fornecidas pelo usuário (REYNOLDS *et al.*, 2020, p. 24–25). Outra característica importante a ser destacada é a adaptabilidade em cada passo da solução, tal que o tempo de integração é recalculado a cada incremento. Para tanto, segundo Reynolds *et al.* (2020, p. 28–29), o algoritmo baseia-se em uma estimativa de erro local, que por sua vez é comparado com as condições de tolerância. Se esse teste local de erro falhar, então o passo é reduzido e a solução é recalculada, do contrário, a iteração é considerada aprovada e o próximo passo é determinado utilizando o valor estimado do erro local.

A análise transiente realizada pelos algoritmos propostos nesse trabalho via aplicação do pacote *DifferentialEquations* utiliza a forma padrão da função `ARKODE()` para a maioria das opções, porém algumas modificações foram necessárias após a realização de testes da formulação. Com isso, foram modificadas as seguintes opções:

- O algoritmo de predição, `predictor_method = 4`, na EDO do método Adjunto;
- A ordem do método de integração, `order = 5`, na EDO do movimento;
- O número máximo de iterações, `maxiters` = $1{\times}10^{16}$, em ambas as EDOs.

No próximo capítulo são apresentadas as definições básicas necessárias para o entendimento acerca dos problemas de otimização estrutural.

3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A otimização estrutural, de um modo geral, compreende a grande área da otimização e utiliza-se de conceitos básicos universais que estão apresentados no decorrer do capítulo. A seguir, serão definidos os conceitos de: projeto ótimo, restrições, mínimo local e mínimo global para problemas de otimização com restrições, convergência, condições de otimalidade, técnicas de solução.

3.1 PROJETO ÓTIMO

O modelamento de um problema de otimização qualquer é definido, de acordo com Arora (2004, p. 17), pela minimização de uma função objetivo, que representa um critério escalar usado para comparar diferentes projetos, ou seja, a função objetivo deve ser função de um vetor de variáveis de projeto. Os requisitos impostos ao modelo são chamados de restrições e são classificados em Arora (2004, p. 18) como:

- Restrições implícitas, que compreendem desde simples valores admissíveis mínimos e máximos das variáveis de projeto até complexas funções indiretamente influenciadas pelas variáveis de projeto;
- Restrições lineares e não-lineares, que são classificadas de acordo com as características da função de restrição;
- Restrições de igualdade e desigualdade.

A formulação geral usada em problemas de otimização com restrições pode ser expressa como (ARORA, 2004, p. 339),

Encontrar	$\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$
para minimizar uma função objetivo	$f(\mathbf{x}) = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$
sujeito a p restrições de igualdade	$h_i(\mathbf{x}) = h_i(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = 0\,;\; i = 1,\, \ldots,\, p$
e m restrições de desigualdade	$g_j(\mathbf{x}) = g_j(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \leq 0\,;\; j = 1,\, \ldots,\, m$

onde os valores limites para as variáveis de projeto são considerados como restrições de desigualdade. Conforme Arora (2004, p. 343) é recomendável que as restrições sejam normalizadas pela divisão de seus valores admissíveis, que podem ser representados por traços. Com isso, o problema geral definido anteriormente pode ser reescrito como

$$\mathrm{P}\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Tal que} & \dfrac{h_i(\mathbf{x})}{\overline{h}_i} - 1 = 0 \\ & \dfrac{g_j(\mathbf{x})}{\overline{g}_j} - 1 \leq 0 \\ & \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}} \end{array}\right. , \tag{29}$$

onde $\overline{h}_i$ e $\overline{g}_j$ são os conjuntos de valores admissíveis, diferentes de zero, das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, $\underline{\mathbf{x}}$ é o limite inferior imposto às variáveis de projeto e $\overline{\mathbf{x}}$ é o limite superior.

A seguir são apresentados alguns conceitos básicos para problemas desta natureza.

3.2 CONCEITOS E DEFINIÇÕES USADOS EM OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO

Uma restrição de igualdade possui dois estados *ativada* e *violada*, já uma restrição de desigualdade pode apresentar os estados *ativada*, ε-*ativada*, violada ou inativa. Estas nomenclaturas são definidas em (ARORA, 2004, p. 342) como:

- Restrição ativa: Uma restrição é dita como ativa se, para um dado valor de projeto, $\mathbf{x}^k$, $h_i(\mathbf{x}^k) = 0$ ou $g_j(\mathbf{x}^k) = 0$;
- Restrição inativa: Uma restrição de desigualdade estará inativa quando possuir um valor negativo no ponto $\mathbf{x}^k$.
- Restrição violada: Uma restrição de desigualdade é considerada violada se possuir um valor positivo para um dado valor de projeto, ou seja, $g_j(\mathbf{x}^k) > 0$. Já a restrição de igualdade estará violada para qualquer valor diferente de zero, isto é, $h_i(\mathbf{x}^k) \neq 0$;
- Restrição ε-*ativada*: Ocorre quando uma restrição de desigualdade está dentro do limite viável e próxima a um limite positivo ε pequeno, isto é, $g_j(\mathbf{x}^k) < 0$, porém $g_j(\mathbf{x}^k) + \varepsilon \geq 0$.

Para monitorar o progresso em direção ao mínimo da função objetivo, são utilizadas funções denominadas *Descent Functions* em conjunto com direções de busca $\mathbf{d}^k$ e passos minimizantes α^k. Segundo Arora (2004, p. 345), a *Descent Function* possui também a propriedade de que o seu valor mínimo coincide com o menor valor da função objetivo original no ponto de ótimo.

O conceito de convergência é definido quando o algoritmo “alcança um ponto mínimo começando de um ponto arbitrário” (ARORA, 2004, p. 345) e deve satisfazer dois requisitos básicos:

1. Existência de uma função minimizante (*Descent Function*), que garante o monitoramento do progresso de minimização;
2. A direção de busca $\mathbf{d}^k$ é uma função contínua das variáveis de projeto.

3.3 MÍNIMOS LOCAIS E GLOBAIS

Seja uma região viável S, isto é, o conjunto de todas as soluções possíveis, e uma vizinhança N, de um ponto particular da região viável $\mathbf{x}^\star$, que são definidos, respectivamente, por Arora (2004, p. 84) como

$$S = \{\mathbf{x} : h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, p\,;\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\} \tag{30}$$

e

$$N = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S \text{ com } ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star|| < \delta\}, \tag{31}$$

para valores pequenos de δ.

O mínimo global de uma função $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}^\star$ é estabelecido pela expressão

$$f(\mathbf{x}^\star) \leq f(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in S, \tag{32}$$

e o mínimo local de uma função $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}^\star$ é determinado quando a equação (32) for válida somente na vizinhança N, ou seja,

$$f(\mathbf{x}^\star) \leq f(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in N. \tag{33}$$

Na próxima seção estão apresentadas as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem.

3.4 CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

São duas as nomenclaturas dadas as condições de otimalidade (ARORA, 2004, p. 102–103), as *condições necessárias* representam as regras que precisam ser cumpridas para considerar um ponto de ótimo e as *condições suficientes* fornecem os testes para distinguir os pontos candidatos a ótimo. Para problemas sem restrição, um ponto $\mathbf{x}^\star$ é considerado mínimo local quando satisfaz as seguintes condições (ARORA, 2004, p. 110):

1. Condição necessária de primeira ordem: o gradiente da função objetivo avaliada no ponto deve ser igual a zero (este ponto recebe o nome de estacionário);

2. Condição necessária de segunda ordem: a matriz Hessiana avaliada no ponto deve ser positiva definida ou positiva semidefinida;

3. Condição suficiente de segunda ordem: a matriz Hessiana deve ser positiva definida no ponto estacionário.

Segundo (ARORA, 2004, p. 119), todo ponto candidato a minimizar uma função objetivo, em problemas com restrições de igualdade, deve satisfazer as condições necessárias que estão contidas no Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Já os problemas gerais, que dispõem também restrições de desigualdade, devem cumprir as condições necessárias de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

3.4.1 Condições de primeira ordem

Em sua forma alternativa e equivalente, sem considerar a adição de variáveis de folga, as condições de KKT podem ser definidas para um ponto da região viável $\mathbf{x}^\star$ e seus respectivos multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}^\star$ e $\boldsymbol{\mu}^\star$ (ARORA, 2004, p. 175–176)

1. Definição da função Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^\star, \boldsymbol{\lambda}^\star, \boldsymbol{\mu}^\star) = f(\mathbf{x}^\star) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^\star \, h_i(\mathbf{x}^\star) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^\star \, g_j(\mathbf{x}^\star);$$

2. Condição de gradiente (primeira ordem)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}^\star) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^\star \, \nabla h_i(\mathbf{x}^\star) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^\star \, \nabla g_j(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0};$$

3. Viabilidade das restrições

$$h_i(\mathbf{x}^\star) = 0, \quad i = 1, \ \ldots, \ p,$$
$$g_j(\mathbf{x}^\star) \leq 0, \quad j = 1, \ \ldots, \ m;$$

4. Condições de ligamento (*switching conditions*)

$$\mu_j^\star \, g_j(\mathbf{x}^\star) = 0;$$

5. Checar se os multiplicadores $\boldsymbol{\mu}^\star$ são positivos

$$\mu_j^\star \geq 0;$$

6. Checar a regularidade

Os gradientes das restrições ativas devem ser linearmente independentes, ou seja, os multiplicadores de Lagrange são únicos.

Pelo fato de que as condições de KKT apenas indicam que o ponto pode ser mínimo, máximo ou de inflexão, faz-se necessário o uso de condições necessárias e suficientes de segunda ordem para a classificação efetiva do ponto de ótimo local.

3.4.2 Condições de segunda ordem

Inicialmente são definidos os incrementos conforme em (ARORA, 2004, p. 104),

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\star} \tag{34}$$

e

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^{\star}), \tag{35}$$

assim como a Hessiana da função Lagrangiana em $\mathbf{x}^{\star}$,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^2} = \nabla^2 f(\mathbf{x}^{\star}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{\star}\, \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^{\star}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^{\star}\, \nabla^2 g_j(\mathbf{x}^{\star}), \tag{36}$$

que previamente já satisfaz as condições de KKT (ARORA, 2004, p. 180).

As condições necessárias para um problema geral com restrições são definidas, de acordo com Arora (2004, p. 180), tomando uma direção viável não nula $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ que satisfaça os seguintes sistemas lineares em $\mathbf{x}^{\star}$

$$\nabla h_i^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}^{\star})\, \boldsymbol{\delta} = 0\,; \quad i = 1,\ \ldots,\ p, \tag{37}$$

$$\nabla g_j^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}^{\star})\, \boldsymbol{\delta} = 0\,; \quad \forall\ j : g_j(\mathbf{x}^{\star}) > 0 \text{ (desigualdades ativas)}. \tag{38}$$

Portanto, se $\mathbf{x}^{\star}$ é um mínimo local, a expressão

$$Q \geq 0 \text{ onde } Q = \boldsymbol{\delta}^{\mathsf{T}}\, \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^{\star})\, \boldsymbol{\delta} \tag{39}$$

é verdadeira.

As condições suficientes para um problema geral com restrição fazem uso das mesmas considerações anteriormente apresentadas e são determinadas, segundo Arora (2004, p. 180–181), definindo a direção viável não nula $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ como solução dos sistemas lineares, ou seja,

$$\nabla h_i^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}^{\star})\, \boldsymbol{\delta} = 0\,; \quad i = 1,\ \ldots,\ p, \tag{40}$$

$$\nabla g_j^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}^{\star})\, \boldsymbol{\delta} = 0\,; \quad \forall \text{ desigualdades ativas com } \mu_j^{\star} > 0, \tag{41}$$

$$\nabla g_j^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}^{\star})\, \boldsymbol{\delta} \leq 0\,; \quad \forall \text{ desigualdades ativas com } \mu_j^{\star} = 0. \tag{42}$$

Assim, $\mathbf{x}^{\star}$ será um mínimo local isolado, isto é, sem nenhum outro ponto de mínimo na vizinhança de $\mathbf{x}^{\star}$, se

$$Q > 0 \text{ onde } Q = \boldsymbol{\delta}^{\mathsf{T}}\, \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^{\star})\, \boldsymbol{\delta}. \tag{43}$$

Além disso, é definida uma condição suficiente chamada de *forte* (ARORA, 2004, p. 181), que determina $\mathbf{x}^{\star}$ como um mínimo local isolado se a Hessiana da função Lagrangiana for positiva definida.

De acordo com Arora (2004, p. 181), um caso especial ocorre quando o número total de restrições ativas (com ao menos uma inequação) no ponto candidato a mínimo local $\mathbf{x}^{\star}$ é igual ao número de variáveis de projeto, ou seja, nenhuma variável está livre. Uma vez que o candidato satisfaça as condições de KKT, a única solução para as equações (40), (41) e (42) é o vetor $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, por isso, a condição suficiente não pode ser usada, porém como esta solução é única e não existem direções viáveis minimizantes na vizinhança, o ponto $\mathbf{x}^{\star}$ é considerado um mínimo local.

Utilizando-se desses conceitos, será apresentado, a seguir, o método para resolução do problema de otimização a ser empregado neste trabalho.

3.5 TÉCNICAS DE SOLUÇÃO

A otimização propriamente dita consiste na elaboração de um algoritmo que descreve a atualização iterativa das variáveis de projeto (ARORA, 2004, p. 279), ou seja, o ponto candidato a ótimo da iteração seguinte $(k+1)$ é expresso por

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k, \tag{44}$$

onde α^k é um escalar positivo que representa o passo dado na direção de busca $\mathbf{d}^k$.

Conforme apresentado por Arora (2004, p. 280), esse ponto deve satisfazer a inequação

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) = f(\mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k) < f(\mathbf{x}^k), \tag{45}$$

que, por sua vez, pode ser escrita mediante uma expansão linear por séries de Taylor, tal que

$$f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k) \cdot \alpha^k \mathbf{d}^k < f(\mathbf{x}^k) \tag{46}$$

e, assim, torna-se possível aplicar a análise de sensibilidade da própria função objetivo de modo a encontrar uma direção minimizante, que apresenta como escolha óbvia

$$\mathbf{d}^k = \text{-}\nabla f(\mathbf{x}^k) \tag{47}$$

chamada de *steepest descent*.

Os passos básicos de um programa para otimização sem restrições laterais podem ser resumidos em

1. Inicializar a variável de projeto em um ponto inicial $\mathbf{x}^k$, $k = 0$;
2. Calcular $\nabla f(\mathbf{x}^k)$, avaliando $\mathbf{d}^k$ de acordo com equação (47);
3. Encontrar $\alpha^k = \operatorname{argmin} f(\mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k)$;
4. Atualizar o contador k e repetir o processo, iniciando-se no passo (2), até que $\left\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\right\|$ seja menor que uma tolerância específica.

Quando são impostas restrições laterais, duas considerações devem ser tomadas:

- o passo dado na direção de busca deverá possuir tamanho tal que não resulte em uma resposta que viole as restrições e;
- o gradiente calculado com respeito a uma variável de projeto, cujo valor seja igual ao limite pré-determinado deverá ser bloqueado caso resultado continue com a tendência de ultrapassar este valor limite.

Outro modo de tratar as restrições laterais é por meio do método de *line-search* projetado, que já foi utilizado no grupo de pesquisa por Montero (2019, p. 36–38), sendo possível obter a convergência mais rapidamente.

O otimizador utilizado neste trabalho aplica a técnica de *Armijo's Backtracking* (ARMIJO, 1966), isto é,

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) \approx f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k) \cdot \left|\Delta \mathbf{x}^k\right|_S = f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k) \cdot \left|\alpha^k\, \mathbf{d}^k\right|_S, \tag{48}$$

onde é definido o operador $|\, a_j \,|_S = \max(\underline{a}_j, \min(\overline{a}_j, a_j))$ para denotar a projeção imposta pelas restrições laterais às variáveis de projeto. Com isso, o passo α^k é aceito quando

$$f\big(\mathbf{x}^k + \left|\alpha^k \mathbf{d}^k\right|_S\big) \leq f\big(\mathbf{x}^k\big) + \overline{c}\,\nabla f(\mathbf{x}^k) \cdot \left|\alpha^k\, \mathbf{d}^k\right|_S, \tag{49}$$

com $\overline{c} \in (0,1)$ e, caso contrário, o passo é diminuído por um fator $\tau \in (0,1)$, tal que $\alpha^{k+1} = \tau\, \alpha^k$. Pode-se utilizar, ainda, uma condição modificada para determinação do passo, definida em Bertsekas (1976, p. 176),

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) - f(\mathbf{x}^k) \leq \overline{c}\, \frac{\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\right\|_2^2}{\alpha^k}, \tag{50}$$

onde $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \left|\alpha^k \mathbf{d}^k\right|_S$. Entretanto optou-se por não aplicar a técnica da equação (50), pois os testes realizados não apresentaram ganhos em relação a rapidez da otimização.

Um problema geral de otimização com restrições, pode ser resolvido como uma sequência de problemas sem restrição penalizados, que são chamados de *Sequential Unconstrained Minimization Techniques* – SUMT, porém esta metodologia apresenta, segundo Haftka e Gürdal (1992, p. 186, 198), dificuldades numéricas e mal-condicionamento pois os valores de penalização a serem usados devem ser muito grandes. Outro método consiste em empregar os Multiplicadores de Lagrange de modo a construir uma função auxiliar para ser minimizada, entretanto, de acordo com Haftka e Gürdal (1992, p. 198) o ótimo obtido ao invés de ponto de mínimo é um ponto estacionário.

Já o método chamado de Lagrangiano Aumentado ou Método dos Multiplicadores, segundo Haftka e Gürdal (1992, p. 198), utiliza-se dos conceitos presentes nas duas técnicas comentadas anteriormente, tornando possível a resolução de um problema sem restrições e que não sofra com mal-condicionamento. Arora, Chahande e Paeng (1991, p. 1485) destacam, ainda, que esta ideia é muito interessante para otimização de problemas dinâmicos e de processos de controle, sendo também capaz de solucionar problemas com inúmeras restrições (PAENG; ARORA, 1989, p. 73).

De acordo com Arora, Chahande e Paeng (1991, p. 1486), para realizar a análise de sensibilidade no método dos multiplicadores é necessário apenas o cálculo do gradiente de um único funcional para determinar a direção de busca. Isto representa uma eficiência computacional que é evidenciada quando as restrições são funções implícitas das variáveis de projeto, tais como em problemas de otimização da resposta dinâmica, onde as restrições são função do deslocamento e da tensão que dependem das variáveis de projeto e do tempo. Na técnica do Método dos Multiplicadores tais restrições são somadas e integradas no intervalo de tempo e, por isso, é necessário calcular a derivada de apenas um funcional para determinação da direção de busca.

Tratando-se das metodologias para resolução das análises de sensibilidade, dois métodos gerais são citados por (ARORA; HAUG, 1979), *State Space Method* e *Design Space Method*. Conforme Arora e Haug (1979, p. 973), no primeiro método utiliza-se uma relação adjunta para expressar os efeitos da variação nas variáveis de estado em termos da variação nas variáveis de projeto; já no segundo método, a variável de estado é tratada como dependente da variável de projeto, o que representa uma abordagem direta para a resolução da sensibilidade. A grande diferença entre os dois métodos está relacionada ao número de vetores necessários em cada cálculo. Segundo Arora e Haug (1979, p. 974–975), no *State Space Method* este número é a quantidade de restrições violadas e no *Design Space Method* este número representa o produto da quantidade de variáveis de projeto pela variável de estado.

3.6 LAGRANGIANO AUMENTADO

Parametrizando a relação constitutiva e, consequentemente, o vetor de estado, define-se o vetor das variáveis de projeto para um problema de otimização estrutural como,

$$\mathbf{x}_{m\times 1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \underline{x} \leq x_e \leq \overline{x}\,;\ e = 1,\ \ldots,\ n_{ele}\}. \tag{51}$$

A equação do movimento (26) é reescrita tal que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t) - \mathbf{G}\mathbf{F}(t) - \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \tag{52}$$

e, portanto, as restrições tornam-se dependentes do tempo, das variáveis de projeto e das variáveis de estado.

A função Lagrangiano Aumentado (LA) é apresentada por inúmero autores (PAENG; ARORA, 1989, p. 74; ARORA; CHAHANDE; PAENG, 1991, p. 1489–1490, 1518; CHAHANDE; ARORA, 1994, p. 416) e consiste em transformar o problema restrito em um problema equivalente sem restrições, ou seja, realiza-se a soma da função objetivo e de um funcional que contém o vetor restrições $\boldsymbol{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t)$, os multiplicadores de Lagrange como função do tempo $\boldsymbol{\mu}(t)$ e um parâmetro de penalização c. Em outras palavras, tem-se

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), \boldsymbol{\mu}(t), c) = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x}^0)} + \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^{n_{rest}} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\mu_j(t)}{c} + g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) \right\rangle^2 dt, \tag{53}$$

para $j = 1,\ \ldots,\ n_{rest}$, onde $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ é a variável de estado associado à equação do movimento (ver 2.2) e $f(\mathbf{x}^0)$ é o valor inicial da função objetivo, utilizado para normalização. Ressalta-se a consideração de que deverá existir um vetor de multiplicadores de Lagrange para cada instante de tempo.

O operador $\langle \bullet \rangle$ é definido como

$$\left\langle \bullet \right\rangle = \max(0.0, \bullet), \tag{54}$$

o que representa, exatamente nos pontos em que $\mu_j(t) + c\, g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) = 0$, uma descontinuidade na segunda derivada da função LA com relação à variável de projeto $\mathbf{x}$. Porém, Birgin e Martínez (2014b, p. 85–86) citam três motivos para isto não significar um problema sério:

1. A propriedade estritamente complementar é satisfeita, ou seja, haverá um multiplicador de Lagrange não-nulo para qualquer restrição exatamente igual a zero, ou seja, $\mu_j^\star(t) > 0\ \forall\ g_j(\mathbf{x}^\star, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) = 0$;

2. Boa propriedade de convergência local ainda pode ser obtida pois a função Lagrangiana é "semissuave", uma vez que seu gradiente é igual a zero na solução;

3. Podem ser adicionadas variáveis de folga $z_j \geq 0$ às restrições de desigualdade, assim, $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) + z_j = 0$ garante que não ocorrerão descontinuidades.

Com isso, independentemente do tratamento dado às restrições, este problema de otimização estrutural pode ser declarado convenientemente usando a notação da equação (29) como

$$\mathrm{P}^k \begin{cases} \displaystyle\min_{\mathbf{x}} & \mathcal{L}^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}^{k-1}, c^{k-1}) \\ \text{Tal que} & \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}} \end{cases}, \tag{55}$$

com k representando o número da iteração externa atual. Ao final de cada iteração externa, atualizam-se o vetor dos multiplicadores de Lagrange pela expressão

$$\mu_j^k(t) = \left\langle \mu_j^{k-1}(t) + c^{k-1} g_j(\mathbf{x}^k, \mathbf{q}^k(\mathbf{x}^k, t), t) \right\rangle, \tag{56}$$

e o parâmetro de penalização por

$$c^k = \kappa\, c^{k-1}, \tag{57}$$

onde $\kappa \geq 1$ é o fator de incremento da penalização. Esse procedimento iterativo continua até que as condições de otimalidade sejam observadas. No Capítulo 5.4 são apresentados com detalhes todos os passos do algoritmo proposto.

Destaca-se que o operador $\langle \bullet \rangle$ é aplicado na equação (56) para garantir que o "deslocamento" proporcionado pelos multiplicadores de Lagrange sejam nulos quando as restrições não estiverem violadas por um valor razoável (isto é, $c^{k-1}\, g_{ij}(\mathbf{x}^k, \mathbf{q}_j^k(\mathbf{x}^k, t), t) <$ -$\boldsymbol{\mu}_j^{k-1}(t)$), tal como discutido em (BIRGIN; MARTÍNEZ, 2014a, p. 32–34).

3.6.1 Análise de sensibilidade

Conforme apresentado nas seções 3.4 e 3.5, ao utilizar-se das técnicas de resolução que dependem da obtenção de uma direção minimizante, faz-se necessário calcular o gradiente da função objetivo e das restrições. De acordo com Arora e Haug (1979, p. 974), a sensibilidade calculada via método adjunto é mais eficiente que a calculada de modo direto, uma vez que a sensibilidade das variáveis de estado, calculada mediante resolução de n equações diferenciais de primeira ordem é simplificada pelo cálculo de apenas uma EDO para criação do vetor Adjunto.

Considerando a função LA da equação (53), sua análise de sensibilidade pode ser deduzida pela aplicação do método adjunto, ou seja, adiciona-se a equação do movimento pré-multiplicada por um vetor transposto Adjunto e integrada no intervalo de tempo $[0,\ T_f]$, tem-se assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\mu}(t), c) = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x}^0)} + \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^{n_{rest}} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\mu_j(t)}{c} + g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \right\rangle^2 dt + \\ \int_0^{T_f} \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t) \left(\mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{G}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \right) dt,\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\mu}(t), c)}{dx_m} = \frac{1}{f(\mathbf{x}^0)} \frac{d\,f(\mathbf{x})}{dx_m} + \frac{d}{dx_m} \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^{n_{rest}} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\mu_j(t)}{c} + g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \right\rangle^2 dt + \\ \frac{d}{dx_m} \int_0^{T_f} \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t) \left(\mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{G}\mathbf{F}(t) - \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \right) dt.\end{aligned} \tag{59}$$

Aplicando a derivada com relação a variável de projeto em todos os termos,

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\mu}(t), c)}{dx_m} = \frac{1}{f(\mathbf{x}^0)} \frac{d\,f(\mathbf{x})}{dx_m} + \int_0^{T_f} \left[\sum_{j=1}^{n_{rest}} \left\langle \mu_j(t) + c\, g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \right\rangle \right. \\ \left(\frac{\partial\, g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial x_m} + \frac{\partial\, g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{dx_m} \right) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t) \left(\frac{d\,\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dx_m}\, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) - \right. \\ \left. \left. \mathbf{G}\, \frac{d\,\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{dx_m} - \frac{d\,\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dx_m}\, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\, \frac{d\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)}{dx_m} - \mathbf{D}(\mathbf{x})\, \frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{dx_m} \right) \right] dt,\end{aligned} \tag{60}$$

onde notam-se a presença de termos que dependem apenas da derivada da variável de estado $\mathbf{q}$ com respeito a variável de projeto $\mathbf{x}$. Assim, separando esses termos dos demais e considerando que não há dependência do carregamento com a variável de projeto, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),\boldsymbol{\mu}(t),c)}{dx_m} &= \frac{1}{f(\mathbf{x}^0)}\frac{d\,f(\mathbf{x})}{dx_m} + \\ \int_0^{T_f}\left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\Big\langle \mu_j(t)+c\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\Big\rangle \frac{\partial\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial x_m}\right. &+ \\ \left.\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\left(\frac{d\,\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t)-\frac{d\,\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)\right] dt &+ \\ \int_0^{T_f}\left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\Big\langle \mu_j(t)+c\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\Big\rangle \frac{\partial\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial \mathbf{q}}\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\right. &+ \\ \left.\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\left(\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t)}{dx_m}-\mathbf{D}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\right)\right] dt&.\end{aligned} \tag{61}$$

Para resolver a identidade, isto é, a parte da equação (61) que depende apenas da derivada com respeito às variáveis de estado, é necessário, primeiramente, integrar por partes o termo da derivada temporal $\dot{\mathbf{q}}$,

$$\int_0^{T_f}\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\,dt = \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\bigg|_0^{Tf} - \int_0^{Tf}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\,dt, \tag{62}$$

sendo que o termo que contém a derivada temporal de $\mathbf{A}$, $\dot{\mathbf{A}}$, não depende do tempo e foi suprimido. Aplicando a equação (62) na identidade da equação (61), tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^{T_f}\left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x})+\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{D}(\mathbf{x})\right)\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\,dt - \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\bigg|_0^{Tf} &= \\ \int_0^{T_f}\sum_{j=1}^{n_{rest}}\Big\langle \mu_j(t)+c\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\Big\rangle \frac{\partial\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial \mathbf{q}}\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\,dt&.\end{aligned} \tag{63}$$

Este problema deve ser resolvido para o valor final $\boldsymbol{\lambda}(t=T_f)=\mathbf{0}$. Por isso, de modo a criar um problema de valor inicial, a variável temporal deve ser substituída, tal que $\tau = T_f - t$, deste modo, uma derivada em relação ao tempo τ terá seu sinal trocado se comparado com a derivada original com respeito a t. Nota-se também que o termo constante é igual a zero, pois $\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t=0)}{dx_m}=\mathbf{0}$. Assim, após transpor os termos, a expressão geral do método Adjunto em τ se torna

$$\text{-}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x})\,\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau)+\mathbf{D}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\Big\langle \mu_j(\tau)+c\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},\tau),\tau)\Big\rangle \frac{\partial\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},\tau),\tau)}{\partial \mathbf{q}}\right]^{\mathsf{T}}. \tag{64}$$

A equação geral para a sensibilidade da função LA aplicando o método adjunto é obtida substituindo o resultado da equação (64) na equação (61), ou seja,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\,\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),\boldsymbol{\mu}(t),c)}{dx_m} &= \frac{1}{f(\mathbf{x}^0)}\frac{d\,f(\mathbf{x})}{dx_m} + \\ \int_0^{T_f}\left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\Big\langle \mu_j(t) + c\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\Big\rangle \frac{\partial\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial x_m} + \right. \\ \left. \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\left(\frac{d\,\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t) - \frac{d\,\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)\right] dt \end{aligned}}, \tag{65}$$

que será utilizada conforme a necessidade para os problemas definidos no Capítulo 5.

3.7 CUIDADOS COM AS RESTRIÇÕES DEPENDENTES DO TEMPO

De um modo geral, considerando-se a resposta transiente em problemas de otimização, as restrições dependem do tempo e podem ser escritas, segundo Haftka e Gürdal (1992, p. 291), de acordo com a expressão

$$g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t) \le \overline{g}_j\,, \quad 0 \le t \le T_f\,, \quad j = 1,\ \ldots,\ n_{rest} \tag{66}$$

ou na forma discreta no tempo, para n_t pontos,

$$g_{rj}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t)) \le \overline{g}_j\,, \qquad r = 1,\ \ldots,\ n_t\,, \quad j = 1,\ \ldots,\ n_{rest}, \tag{67}$$

ou seja, para que haja a correta representação da resposta dinâmica são necessários inúmeros pontos de discretização no tempo, o que por sua vez eleva a quantidade efetiva de restrições, aumentando assim, o custo computacional relacionado à otimização. Uma maneira de se remover a dependência do tempo consiste na substituição da restrição, equação (66), por uma restrição equivalente integral (independente do tempo).

Dois exemplos são encontrados na literatura: Haftka e Gürdal (1992, p. 291) definem uma restrição equivalente integral que possui um significado de violação quadrática média,

$$\tilde{g}_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t)) = \left[\frac{1}{T_f}\int_0^{T_f}\Big\langle g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\Big\rangle^2 dt\right]^{1/2}. \tag{68}$$

Haug e Arora (1979, p. 333–334, 362–363) apresentam uma restrição funcional equivalente no tempo, tal que

$$\tilde{g}_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t)) = \int_0^{T_f}\Big\langle g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\Big\rangle\,dt, \tag{69}$$

assim, as equações (68) e (69) serão satisfeitas caso a restrição não seja violada em nenhum instante de tempo.

Embora os funcionais equivalentes não pareçam representar ganhos computacionais, uma vez que ainda é necessário realizar a análise transiente, (HAFTKA; GÜRDAL, 1992, p. 292) afirmam que “os ganhos são obtidos na otimização e no cálculo da análise de sensibilidade das restrições”. Além disso, a diminuição no número de restrições pode permitir o uso de métodos de otimização tradicionais, tais como MMA e SLP.

3.7.1 Solução discreta ao funcional integral

A fim de calcular a resposta numérica para a equação (69), pode-se utilizar uma regra da quadratura (por exemplo, Gauss-Legendre) e assim, a restrição funcional equivalente no tempo é discretizada em n_t pontos, tal que

$$\tilde{g}_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) \approx \sum_{r=1}^{n_t} w_r \frac{1}{\Delta t} \Big\langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t_r), t_r) \Big\rangle \equiv \sum_{t \in \mathbb{T}} \frac{1}{\Delta t} \Big\langle g_{jt}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) \Big\rangle, \tag{70}$$

onde t_r e w_r são, respectivamente, os nós e pesos da regra de quadratura empregada. A expressão da integral discreta é abreviada pelo uso de um conjunto de discretização temporal $\mathbb{T}$.

Conforme apontado por Hsieh e Arora (1985, p. 188), a restrição integral está ativa geralmente em um período de tempo muito pequeno, ou seja, $[t_1, t_2] \ll [0, T_f]$, e por isso, pode-se introduzir um parâmetro Δt para normalizar a severidade da restrição sobre todo o intervalo de tempo. Ou seja, para o tempo discretizado,

$$\Delta t = \begin{cases} t_r - 0 & \text{para } r = 1 \\ t_r - t_{r-1} & \text{para } r = 2, \ \ldots, \ n_t \end{cases}, \tag{71}$$

onde r corresponde ao índice do ponto da quadratura (neste caso o tempo) na qual está se avaliando a função.

3.8 DESCONTINUIDADE DO OPERADOR CONFORME EQUAÇÃO (54)

Conforme explicado em Haug e Arora (1979, p. 333) e visualizado na Figura 1, o operador da equação (54) utilizado no funcional equivalente apresenta descontinuidades nos pontos onde a restrição é igual a zero. Contudo, uma vez que a variável de projeto é um vetor de dimensão finita, esses pontos podem ser isolados, possibilitando, assim, que sua análise de sensibilidade seja avaliada pela derivada da própria restrição diretamente no integrando.

Além disso, Hsieh e Arora (1984, p. 198–199) explicam em seu manuscrito que, em geral, a restrição utilizando o funcional equivalente pode levar a dificuldades numéricas e as condições de otimalidade não são satisfeitas para alguns problemas. Por isso, elaborou-se neste trabalho uma maneira de contornar esse problema pela definição de uma relaxação ϵ ao operador $\langle \bullet \rangle$, tal que

$$g_j^\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \equiv \Big\langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \Big\rangle_\epsilon = \frac{\sqrt{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)^2 + \epsilon^2} - \epsilon^2 + g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{2}, \tag{72}$$

onde $\epsilon \in (0, 1)$. Destaca-se que o operador original é recuperado quando $\epsilon \to 0$.

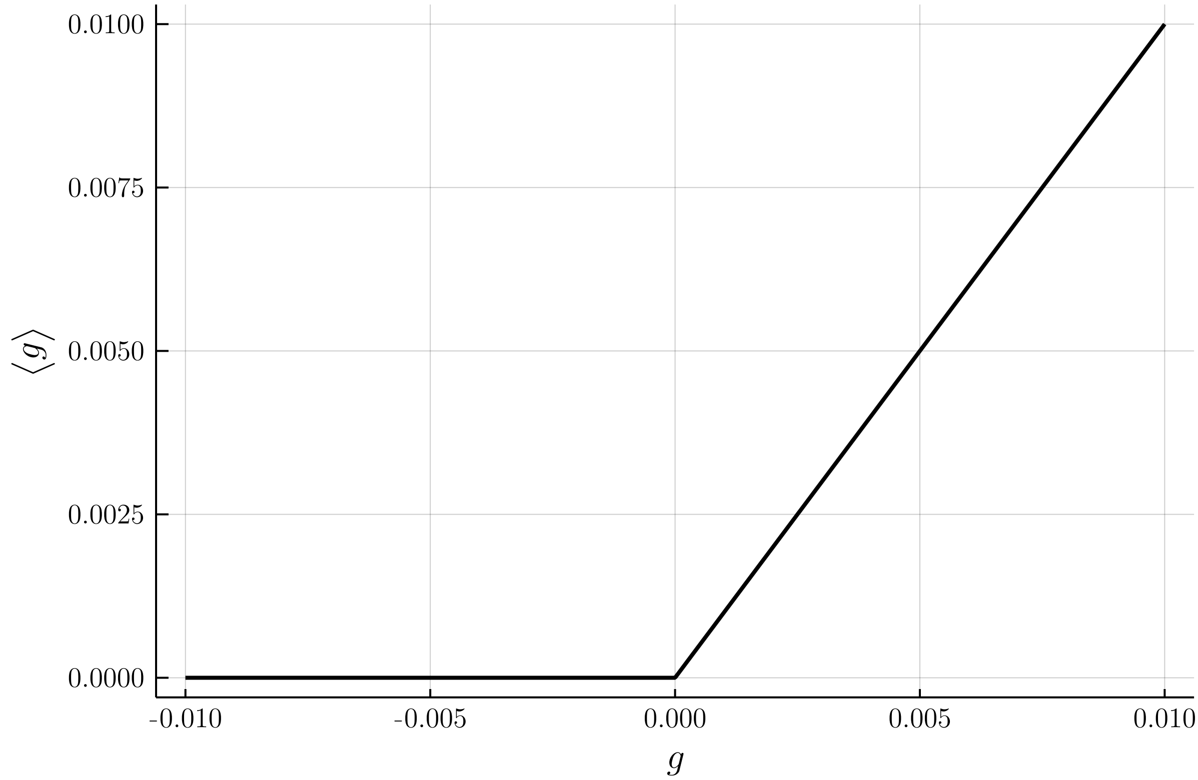
A sensibilidade do operador é, então, obtida de modo direto

$$\frac{\partial \left\langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \right\rangle_\epsilon}{\partial g_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{\sqrt{g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)^2 + \epsilon^2}} + 1 \right) \tag{73}$$

e, para simplificar a notação, a derivada com respeito ao operador será escrita de maneira reduzida, isto é,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_j^\epsilon}{\partial g_j}. \tag{74}$$

Figura 1 – Restrição aplicando o operador $\langle g \rangle$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 2 descreve o comportamento esperado pela aplicação dessa relaxação para os fatores $\epsilon = 1{\times}10^{-3}$ e $\epsilon = 1{\times}10^{-20}$. Nota-se claramente que a descontinuidade localizada exatamente no limiar de satisfação da restrição é suavizada pelo operador proposto.

Percebe-se também que, a descontinuidade é suprimida ao custo de que o limiar da violação das restrições sofre um deslocamento, isto é, são assumidos valores positivos de restrição para valores negativos de g próximos a zero. Em outras palavras, a otimização torna-se mais conservativa, pois valores que antes não significavam violação da restrição são mapeados para valores positivos que representam a violação da restrição.

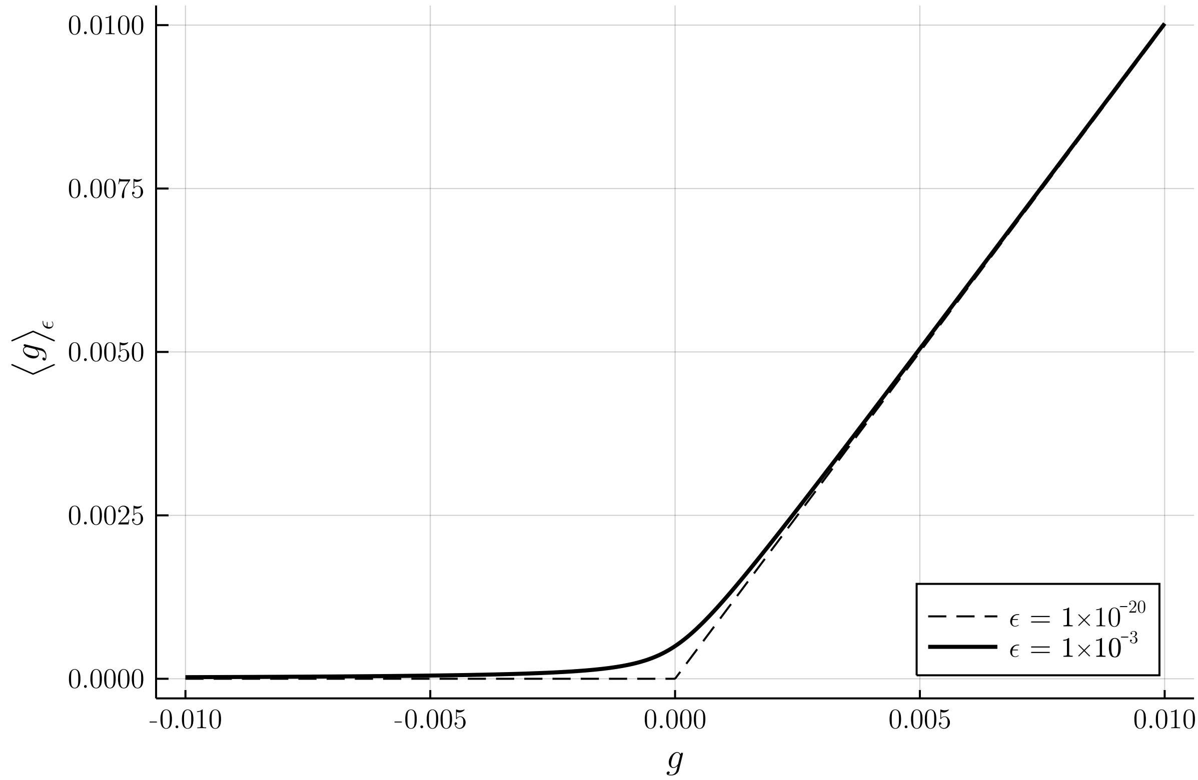
3.9 LAGRANGIANO AUMENTADO CONSIDERANDO O OPERADOR RELAXADO CONFORME EQUAÇÃO (72)

Aplicando a metodologia de escrever as restrições como um funcional equivalente relaxado, conforme descrito na seção anterior, a função Lagrangiano Aumentado para um caso geral (equação (53)) é reescrita como

$$\mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \tilde{\boldsymbol{\mu}}, c) = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x}^0)} + \sum_{j=1}^{n_{rest}} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\tilde{\mu}_j}{c} + \int_0^{T_f} \Big\langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \Big\rangle_\epsilon dt \right\rangle^2, \tag{75}$$

com menção especial dado ao vetor multiplicador de Lagrange $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ que não possui mais a dependência temporal. Porém, de acordo com Hsieh e Arora (1985, p. 197–198), essa premissa viola a teoria de otimização de que durante todo o domínio de tempo devem existir multiplicadores de Lagrange. Em outras palavras, o funcional equivalente (equação (69)) implica em um peso constante das restrições, porém isso não é verdade uma vez

Figura 2 – Restrição aplicando o operador relaxado $\langle g \rangle_\epsilon$



Fonte: Elaborado pelo autor.

que o peso das restrições deve ser uma função do tempo. Por isso, tal consideração será analisada com cautela.

3.9.1 Análise de sensibilidade

Análogo à seção 3.6.1, a análise de sensibilidade da Função Lagrangiana considerando a restrição funcional relaxada é realizada aplicando o método Adjunto e derivando os termos em relação à variável de projeto, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\mu}}, c) = \frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x}^0)} + \sum_{j=1}^{n_{rest}} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\tilde{\mu}_j}{c} + \int_0^{T_f} \Big\langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \Big\rangle_\epsilon dt \right\rangle^2 + \\ \int_0^{T_f} \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}(t) \left(\mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\right) dt, \end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\,\mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\mu}}, c)}{dx_m} = \frac{1}{f(\mathbf{x}^0)} \frac{d\,f(\mathbf{x})}{dx_m} + \frac{d}{dx_m} \sum_{j=1}^{n_{rest}} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\tilde{\mu}_j}{c} + \int_0^{T_f} \Big\langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) \Big\rangle_\epsilon dt \right\rangle^2 + \\ \frac{d}{dx_m} \int_0^{T_f} \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}(t) \left(\mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}\mathbf{F}(t) - \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\right) dt. \end{aligned} \tag{77}$$

Assim, após aplicar a derivada em todos os termos, assumindo que o carregamento não depende das variáveis de projeto, é possível realizar a separação dos termos que dependem apenas da derivada de $\mathbf{q}$ em relação a $\mathbf{x}$,

$$
\begin{split}
\frac{d\,\mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),\tilde{\boldsymbol{\mu}},c)}{dx_m} &= \frac{1}{f(\mathbf{x}^0)}\frac{d\,f(\mathbf{x})}{dx_m} + \\
\int_0^{T_f}\left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\left\langle \tilde{\mu}_j + c\int_0^{T_f} g_j^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\,dt\right\rangle \frac{1}{2}\frac{\partial g_j^\epsilon}{\partial g_j}\,\frac{\partial\, g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial x_m} \right. &+ \\
\left. \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\left(\frac{d\,\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t) - \frac{d\,\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)\right] dt &+ \\
\int_0^{T_f}\left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\left\langle \tilde{\mu}_j + c\int_0^{T_f} g_j^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\,dt\right\rangle \frac{1}{2}\frac{\partial g_j^\epsilon}{\partial g_j}\,\frac{\partial\, g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial \mathbf{q}}\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m} \right. &+ \\
\left. \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\left(\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t)}{dx_m} - \mathbf{D}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\right)\right] dt&,
\end{split}
\tag{78}
$$

onde a simplificação da notação da derivada do operador relaxado g_j^ϵ em relação à função de restrição g_j foi utilizada.

A parte da equação (78) que depende da derivada em relação às variáveis de estado deve ser resolvida de maneira similar ao realizado para a equação (61), ou seja, integra-se por partes o termo da derivada temporal $\dot{\mathbf{q}}$, suprimindo o termo que não depende do tempo $\dot{\mathbf{A}}$. Portanto, a expressão para a EDO do método adjunto se torna

$$
\begin{split}
\int_0^{T_f}\left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{D}(\mathbf{x})\right)\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\,dt - \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\bigg|_0^{Tf} &= \\
\int_0^{T_f}\sum_{j=1}^{n_{rest}}\left\langle \tilde{\mu}_j + c\int_0^{T_f} g_j^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\,dt\right\rangle \frac{1}{2}\frac{\partial g_j^\epsilon}{\partial g_j}\,\frac{\partial\, g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial \mathbf{q}}\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\,dt&.
\end{split}
\tag{79}
$$

E novamente, tem-se um problema de valor final, que é resolvido definindo a variável temporal com sentido invertido, isto é, $\tau = T_f - t$ e transpondo os termos. Com isso,

$$
\begin{split}
\text{-}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathrm{x})\,\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau) + \mathbf{D}^{\mathsf{T}}(\mathrm{x})\,\boldsymbol{\lambda}(\tau) &= \\
\left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\left\langle \tilde{\mu}_j + c\int_0^{T_f} g_j^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\,dt\right\rangle \int_0^{T_f}\frac{1}{2}\frac{\partial g_j^\epsilon}{\partial g_j}\,\frac{\partial\, g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},\tau),\tau)}{\partial \mathbf{q}}\right]^{\mathsf{T}}&.
\end{split}
\tag{80}
$$

A equação geral para a sensibilidade da função LA aplicando o método adjunto é obtida substituindo o resultado da equação (80) na equação (78), ou seja,

$$
\boxed{
\begin{split}
\frac{d\,\mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),\tilde{\boldsymbol{\mu}},c)}{dx_m} &= \frac{1}{f(\mathbf{x}^0)}\frac{d\,f(\mathbf{x})}{dx_m} + \\
\int_0^{T_f}\left[\sum_{j=1}^{n_{rest}}\left\langle \tilde{\mu}_j + c\int_0^{T_f} g_j^\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\,dt\right\rangle \frac{1}{2}\frac{\partial g_j^\epsilon}{\partial g_j}\,\frac{\partial\, g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\partial x_m} \right. &+ \\
\left. \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t)\left(\frac{d\,\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t) - \frac{d\,\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)\right] dt&
\end{split}
}.
\tag{81}
$$

4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

O propósito da otimização topológica é encontrar o projeto ótimo de uma estrutura compreendida em uma região de domínio fixo (BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 1) e, para tanto, faz uso de inúmeros conceitos de otimização com foco especial aos da área estrutural. A otimização topológica subdivide-se em dois ramos distintos dependendo do tipo de estrutura empregado, o discreto e o contínuo (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001, p. 333). Para estruturas naturalmente discretas, o problema de otimização topológica consiste em determinar o quantidade, posicionamento e conectividade dos elementos estruturais; já a otimização topológica de estruturas contínuas busca atualizar simultaneamente o formato, tanto dos contornos externos quanto dos internos, e também os furos com respeito a uma função objetivo e restrições onde se assumem carregamentos, condições de contorno e quantidade de material prescritas em um dado domínio.

Estas funções objetivo representam, segundo Bendsøe e Sigmund (2004, p. 2), a parametrização do tensor constitutivo e a sua escolha "adequada" proporciona uma correta formulação para ser utilizada na otimização topológica. Por isso, nas próximas seções encontra-se o levantamento bibliográfico dos conceitos referentes à otimização topológica, com foco aos métodos empregados.

4.1 PARAMETRIZAÇÃO DO MATERIAL

Pela parametrização do material, as variáveis de projeto de projeto são associadas a um modelo matemático que correlacionam valores constantes às propriedades efetivas do material em cada ponto do domínio. Sendo assim, o limite superior 1 representa material sólido e o limite inferior 0 representa os vazios, isto é, espaços sem material (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001, p. 336).

Inúmeras metodologias podem ser encontradas na literatura, tais como:

- homogeneização, cuja definição pode ser encontrada em (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001, p. 340; ROZVANY, 2014, p. 74);
- metodologia de microestrutura ótima, (ESCHENAUER; OLHOFF, 2001, p. 340–341);
- PIS, definida por Zhu, Zhang e Beckers (2009, p. 643);
- RAMP de Stolpe e Svanberg (2001, p. 119);
- SERA, apresentada por (XIE; STEVEN, 1997, p. 13);
- SIMP, descrita primeiramente no manuscrito de Bendsøe (1989, p. 195).

4.1.1 Parametrização SIMP

A parametrização SIMP, segundo Rozvany (2014, p. 74), é a técnica de parametrização de material mais popular e baseia-se na parametrização da matriz constitutiva do material pela aplicação de uma variável contínua, chamada de densidade relativa de material. Seus valores intermediários são penalizados de modo a obter a estrutura discreta. A definição original (BENDSØE, 1989, p. 195) é expressa por

$$\mathbf{K}_e = [\chi_e(\mathbf{x})]^{p_k}\,\mathbf{K}_e^0, \tag{82}$$

onde $\mathbf{K}_e^0$ é a matriz de rigidez do elemento, χ_e é uma densidade relativa do material e p_k é o expoente de penalização.

O mapeamento entre as variáveis de projeto $\mathbf{x}$ e as densidades relativas $\boldsymbol{\chi}$ é realizado por meio de operadores de filtragem e de projeção no caso contínuo e por meio de expressões mais simples no caso de barras. Essas relações são discutidas no APÊNDICE B em detalhes.

4.1.2 Parametrização da massa

Ao tratar problemas dinâmicos, a parametrização da matriz de massa pode utilizar uma estratégia análoga à *power-law*, ou seja,

$$\mathbf{M}_e = [\chi_e(\mathbf{x})]^{p_m}\, \mathbf{M}_e^0, \tag{83}$$

onde $\mathbf{M}_e^0$ é a matriz de massa do elemento e p_m é o expoente de penalização.

O expoente de penalização p_m deve ser minuciosamente escolhido de modo a evitar que a presença de densidades baixas causem modos de vibração localizados. O trabalho de Pedersen (2000) realizou um estudo neste assunto e propôs uma estratégia para evitar o surgimento de tais modos, isto é, a parametrização tanto da massa quanto da rigidez são definidas por

$$\begin{array}{lll} \text{massa} & \chi_e & \text{para} \quad 0 < \chi_{min} \leq \chi_e \leq 1 \\ \text{rigidez} & \left\{ \begin{array}{l} \chi_e^3 \\ \dfrac{\chi_e}{100} \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{para} \quad 0.1 \leq \chi_e \leq 1 \\ \text{para} \quad 0 < \chi_{min} \leq \chi_e \leq 0.1 \end{array} \end{array} . \tag{84}$$

Embora essa parametrização leve a uma descontinuidade na primeira derivada, Pedersen (2000, p. 6) apontou que isto não causa nenhum problema nos casos estudados.

Du e Olhoff (2007, p. 93) apresentaram um modelo de parametrização de massa que mantém a continuidade da primeira derivada

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_e^0 \left\{ \begin{array}{ll} \chi_e & \text{para} \quad \chi_e > 0.1 \\ (c_1\, \chi_e^6 + c_2\, \chi_e^7) & \text{para} \quad \chi_e \leq 0.1 \end{array} \right., \tag{85}$$

onde foram definidos os parâmetros $c_1 = 6{\times}10^5$ e $c_2 = \text{-}5{\times}10^6$.

Ao considerar-se a questão da estabilidade da análise dinâmica, de acordo com Cook *et al.* (2001, p. 412–413), se o Δt aplicado para resolver a EDO é muito grande, a integração falha e se o Δt é muito pequeno, o custo computacional torna-se elevado. No caso clássico do método das diferenças finitas centrais, o passo de tempo em estruturas de material isotrópico sem amortecimento pode ser expresso por (SHANTARAM; OWEN; ZIENKIEWICZ, 1976, p. 567–568)

$$\Delta t = \gamma' \, \frac{L^n}{C^P}, \tag{86}$$

onde γ' é um número menor que a unidade (geralmente entre 0.9 e 0.1 para elementos lineares), L^n é a menor distância entre dois nós adjacentes e C^P é a velocidade de propagação da onda primária, isto é,

$$C^P = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{87}$$

Assim, ao aplicar a parametrização SIMP conforme equação (85) e com a penalização da rigidez igual a 3, tem-se que

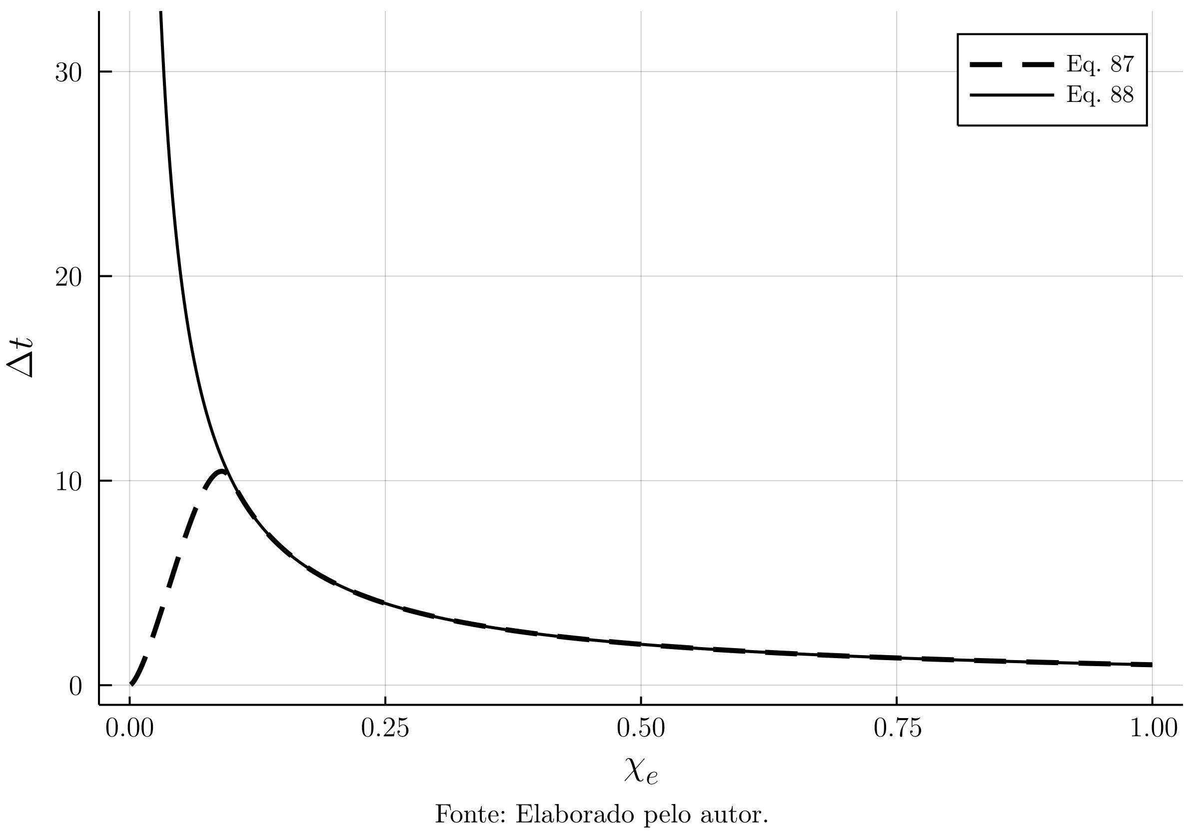
$$\Delta t \propto \sqrt{\frac{6{\times}10^5\,\chi_e^6 - 5{\times}10^6\,\chi_e^7}{\chi_e^3}}\,. \tag{88}$$

E ainda, para valores de parametrização SIMP comuns, isto é, $p_k = 3$ e $p_m = 1$, tem-se a expressão

$$\Delta t \propto \sqrt{\frac{1}{\chi_e^2}}\,. \tag{89}$$

Isso significa que, quando as variáveis de projeto se aproximam do seu valor mínimo, a parametrização de Du e Olhoff leva à diminuição abrupta do intervalo de tempo de integração, como pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Tamanho do passo de integração de acordo com a densidade relativa



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por isso, comparando-se as respostas para a parametrização SIMP aplicando a metodologia comum ou a de Du e Olhoff, é determinado que o valor utilizado para a penalização da massa será mantido fixo em $p_m = 1$.

4.2 SINGULARIDADE DA TENSÃO

O tratamento de restrições de tensão em problemas de otimização topológica utiliza-se de formulações que são geralmente não convexas e podem incluir subdomínios degenerados (BRUGGI, 2008, p. 125). Tais subdomínios podem representar um grande problema para o processo de otimização, pois segundo Bruggi (2008, p. 125) os otimizadores "não são capazes de entrar nessas zonas de singularidade e acabam convergindo em mínimos locais inesperados".

Segundo Bruggi (2008, p. 125) uma maneira eficiente de lidar com o problema da singularidade de tensão é atuar nas expressões das restrições de tensão de modo a relaxar as zonas degeneradas, e assim, possibilitar a obtenção dos mínimos globais via otimização comum.

4.2.1 Relaxação ε

A proposta da relaxação de tensão ε apresentada em (CHENG; GUO, 1997, p. 260) consiste na seguinte reformulação da restrição de tensão considerando o limite superior, $\overline{\sigma}$, para o caso de um material dúctil e critério de von Mises,

$$\chi_e{}^{p_k}\left(\sigma_{eq_e} - \overline{\sigma}\right) \leq \varepsilon, \tag{90}$$

ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$ as restrições são satisfeitas para valores pequenos da variável de projeto.

Deste modo, pela relaxação da tensão, é possível utilizar os algoritmos de otimização que se baseiam em *Line Search*, pois a região viável não é mais nula e a busca pode ser realizada na vizinhança dos subdomínios degenerados (CHENG; GUO, 1997, p. 260).

4.2.2 Relaxação *q-p*

A relaxação de tensão *q-p* representa, de acordo com (BRUGGI, 2008, p. 128), uma alternativa para contornar o problema da singularidade na restrição de tensão. Este método é introduzido em (DUYSINX; BENDSØE, 1998, p. 1462) para o modelo de parametrização SIMP, com isso, a restrição para um dado valor de tensão equivalente de von Mises e para um limite estipulado $\overline{\sigma}$ é escrita por

$$\frac{\chi_e{}^{p_k}\,\sigma_{eq_e}}{\chi_e{}^{q}} \leq \overline{\sigma} \tag{91}$$

ou

$$\frac{\chi_e{}^{p_k-q}\,\sigma_{eq_e}}{\overline{\sigma}} - 1 \leq 0, \tag{92}$$

com $p_k > q$.

Conforme Duysinx e Bendsøe (1998, p. 1462), a utilização de valores de p_k maiores que q são utilizados para que nenhuma descontinuidade de tensão sejam observadas quando as variáveis de projeto são nulas. Além disso, essa característica pode-se traduz em uma simplificação do esforço computacional, uma vez que "...a relaxação remove a tensão do conjunto de restrições ativas assim que a variável de projeto se aproxima do seu valor mínimo" (DUYSINX; BENDSØE, 1998, p. 1465).

Algumas das principais dificuldades encontradas na área da otimização topológica baseada na distribuição de material compreendem a dependência de malha e a instabilidade de tabuleiro. O APÊNDICE A contém uma revisão bibliográfica desses assuntos e o APÊNDICE B apresenta uma das metodologias existentes para eliminar ambos os problemas.

O próximo capítulo apresenta as definições e deduções para o problema proposto.

5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

Um problema de otimização estrutural dinâmica pode ser escrito como

$$\text{P}\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{Tal que} & \mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{F}(\mathbf{x},t) + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) \\ & g_j(\mathbf{x},\mathbf{q},t) \leq \overline{g}_j \ \forall t \\ & \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}} \end{cases}, \tag{93}$$

onde o conjunto das restrições dependentes do tempo é representado por $j = 1, \ \ldots, \ n_{rest}$ e $t \in [0, T_f]$.

Neste trabalho, a função objetivo é definida como volume normalizado da estrutura, isto é,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \frac{v_e\, x_e}{v_e\, x_e^0} = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \frac{x_e}{x_e^0}, \tag{94}$$

e sua análise de sensibilidade é realizada de forma direta, ou seja,

$$\frac{d\, f(\mathbf{x})}{dx_m} = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \frac{\delta_{em}}{x_e^0} = \frac{1}{x_e^0}. \tag{95}$$

É possível verificar que, o número efetivo de restrições do problema P depende da quantidade de restrições n_{rest} e da discretização utilizada para resolver o problema no tempo n_t. Em outras palavras, o número de restrições efetivo é dado pelo produto $n_{rest} \times n_t$. Sendo assim, observam-se que as características deste problema tornam a aplicação da função Lagrangiano Aumentado como um dos métodos adequados para a resolução de maneira eficiente.

Neste trabalho serão consideradas restrições de deslocamento nodal e de tensão equivalente local. Suas definições e análises de sensibilidade são apresentadas a seguir.

5.1 RESTRIÇÃO DE DESLOCAMENTO

A restrição imposta ao deslocamento de um grau de liberdade j pode ser descrita por duas expressões,

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) = U_j - \overline{u}_j \leq 0 \tag{96}$$

e

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) = \underline{u}_j - U_j \leq 0, \tag{97}$$

onde $\underline{u}_j$ é o limite inferior e $\overline{u}_j$ é o limite superior. Assumindo o mesmo valor para ambos os limites, mas com sinais opostos, é possível reescrever a restrição já normalizada como

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) = \frac{U_j^2}{\overline{u}_j^2} - 1 \leq 0. \tag{98}$$

Definindo um vetor de localização do deslocamento, $\mathbf{L}_j$, na qual a restrição é aplicada, a restrição de deslocamento nodal é escrita em termos da variável global de estado $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$, ou seja,

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t) = \left(\frac{\mathbf{L}_j^\intercal\, \mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{\overline{u}_j}\right)^2 - 1 \leq 0. \tag{99}$$

Assim, a restrição pode ser aplicada para todos os graus de liberdade da malha, tal que $j = 1, \ldots, n_{gl}$.

A análise de sensibilidade é obtida pela diferenciação da equação (99) em relação a variável de projeto x_m. Desta forma, obtém-se

$$\frac{d\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{dx_m} = \frac{d}{dx_m}\left(\frac{\mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{\overline{u}_j}\right)^2 - 1, \tag{100}$$

de forma que

$$\frac{d\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{dx_m} = \frac{2}{\overline{u}_j^2}\left(\mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)\frac{d\left(\mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)}{dx_m}, \tag{101}$$

assim, suprimindo o termo da derivada que não depende da variável de projeto, tem-se

$$\boxed{\frac{d\,g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{dx_m} = \frac{2}{\overline{u}_j^2}\,\mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\left(\mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\,\frac{d\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{dx_m}\right)}. \tag{102}$$

5.2 RESTRIÇÃO DE TENSÃO

O estado parametrizado de tensão local do elemento $e = 1, \ldots, n_{ele}$ para cada ponto superconvergente $k = 1, \ldots, n_G$, desconsiderando a influência da parcela viscosa de tensão, é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t) = x_e^{p_k-q}\,\mathbf{E}_e\,\mathbf{B}_{ek}\,\mathbf{H}_e\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t), \tag{103}$$

onde $p_k - q$ é a relaxação de tensão *q-p* (ver seção 4.2.2), $\mathbf{H}_e$ é o operador de localização do deslocamento para cada elemento e a matriz constitutiva $\mathbf{E}_e$ é definida de acordo com tipo de elemento finito utilizado. Agrupando os termos $\mathbf{E}_e$, $\mathbf{B}_{ek}$ e $\mathbf{H}_e$ em $\mathbf{S}_{ek}$, tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t) = x_e^{p_k-q}\,\mathbf{S}_{ek}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t). \tag{104}$$

Assim, a tensão equivalente em cada ponto superconvergente k de um elemento e é descrita, de forma geral, por

$$\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{ek}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)\,\mathbf{V}\,\boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t) + \varsigma^2}, \tag{105}$$

onde $\varsigma = 1{\times}10^{-5}$ representa um valor não-nulo usado para evitar divisões por zero e a matriz simétrica $\mathbf{V}$ é a matriz de Voigt, que assume a forma considerando a tensão equivalente de von Mises para o estado plano de tensão (DUYSINX; BENDSØE, 1998, p. 1477)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{106}$$

ou para um elemento de barra

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}. \tag{107}$$

Deste modo, é possível descrever a restrição como uma função do tempo, das variáveis de projeto e das variáveis de estado, isto é,

$$g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) = \sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) - \overline{\sigma} \leq 0, \tag{108}$$

com

$$g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{ek}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)\, \mathbf{V}\, \boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}}{\overline{\sigma}} - 1 \leq 0, \tag{109}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)$ é o estado de tensão descrito pela notação de Voigt. Ou seja, a quantidade efetiva de restrições é o produto de $n_{ele} \times n_G$ em cada instante de tempo.

A análise de sensibilidade desta restrição é obtida pela diferenciação da equação (109) com respeito às variáveis de projeto, ou seja,

$$\frac{d\, g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m} = \frac{d}{dx_m}\left(\frac{\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{\overline{\sigma}} - 1\right), \tag{110}$$

tal que

$$\begin{aligned}\frac{d\, g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m} = \frac{1}{\overline{\sigma}}\, \frac{1}{2\, \sigma_{ek}^{eq}} \Bigg[&\boldsymbol{\sigma}_{ek}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)\, \mathbf{V}\, \frac{d\, \boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m} + \\ &\frac{d\, \boldsymbol{\sigma}_{ek}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m}\, \mathbf{V}\, \boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)\Bigg],\end{aligned} \tag{111}$$

adotando-se $\sigma_{ek}^{eq} = \sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)$ como uma notação compacta para a tensão equivalente. É possível, ainda, somar os termos dentro do último parênteses,

$$\frac{d\, g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m} = \frac{1}{\overline{\sigma}}\, \frac{1}{2\, \sigma_{ek}^{eq}}\, 2\, \boldsymbol{\sigma}_{ek}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)\, \mathbf{V}\, \frac{d\, \boldsymbol{\sigma}_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m}, \tag{112}$$

pois a matriz $\mathbf{V}$ é simétrica.

Aplicando a equação (104) em (112), a derivada se torna

$$\frac{d\, g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m} = \overbrace{\boxed{\frac{1}{\overline{\sigma}}\, \frac{\boldsymbol{\sigma}_{ek}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)\, \mathbf{V}}{\sigma_{ek}^{eq}}}}^{\gamma_{ek}}\, \frac{d}{dx_m}\left(x_e^{p_k - q}\, \mathbf{S}_{ek}\, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\right), \tag{113}$$

onde é realizado, também, o agrupamento de alguns termos em γ_{ek}.

Por fim, é possível separar os termos que contêm a derivada do vetor de estados $\mathbf{q}$ em relação as variáveis de projeto x_m

$$\frac{d\, g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m} = \gamma_{ek}\, \mathbf{S}_{ek} \left[(p_k - q)\, x_e^{p_k - q - 1}\, \delta_{em}\, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + x_e^{p_k - q}\, \frac{d\, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{dx_m}\right], \tag{114}$$

tem-se, assim, a expressão final

$$\boxed{\frac{d\, g_{ek}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t)}{dx_m} = \gamma_{ek}\, (p_k - q)\, x_e^{p_k - q - 1}\, \delta_{em}\, \mathbf{S}_{ek}\, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + \gamma_{ek}\, x_e^{p_k - q}\, \mathbf{S}_{ek}\, \frac{d\, \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{dx_m}}\,. \tag{115}$$

5.3 LAGRANGIANO AUMENTADO

Conforme visto anteriormente nas seções 3.6 e 3.9, aplicando a metodologia do Lagrangiano Aumentado, dois funcionais distintos, isto é, equações (53) e (75), podem ser escritos para resolver o problema iterativamente conforme a equação (55). A seguir, são realizadas as substituições das expressões gerais para as restrições previamente definidas nas seções 5.1 e 5.2 no problema proposto pela equação (93).

5.3.1 LA com restrição completa

Neste caso, a função LA é escrita conforme a equação (53) mediante substituição das definições da função objetivo (equação (94)) e das restrições de deslocamento e tensão, respectivamente equações (99) e (109),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), \boldsymbol{\mu}(t), c) = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \frac{x_e}{x_e^0} + \int_0^{T_f} \sum_{j=1}^{n_{gl}} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\mu_j(t)}{c} + \left(\frac{\mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\, \mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{\overline{u}_j} \right)^2 - 1 \right\rangle^2 dt + \\ \int_0^{T_f} \sum_{e=1}^{n_{ele}} \sum_{k=1}^{n_G} \frac{c}{2} \left\langle \frac{\mu_{ek}(t)}{c} + \left(\frac{\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t)}{\overline{\sigma}} - 1 \right) \right\rangle^2 dt.\end{aligned} \tag{116}$$

A análise de sensibilidade, por sua vez, faz uso das equações (65) e (64), juntamente com as expressões para as derivadas das restrições de deslocamento e tensão em relação ao tempo (respectivamente equações (102) e (115)). Após realizadas as substituições e notando o fato de que a restrição de deslocamento não apresenta dependência explícita com a variável de projeto, tem-se

- Derivada da função LA

$$\begin{aligned}\frac{d\,\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), \boldsymbol{\mu}(t), c)}{dx_m} = \frac{1}{x_m^0} + \int_0^{T_f} \left[\sum_{e=1}^{n_{ele}} \sum_{k=1}^{n_G} \left\langle \mu_{ek}(t) + c \left(\frac{\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},t), t)}{\overline{\sigma}} - 1 \right) \right\rangle \right. \\ \left. \gamma_{ek}\, (p_k - q)\, x_e^{p_k - q - 1}\, \delta_{em}\, \mathbf{S}_{ek}\, \mathbf{q}(\mathbf{x},t) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t) \left(\frac{d\,\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dx_m}\, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t) - \frac{d\,\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dx_m}\, \mathbf{q}(\mathbf{x},t) \right) \right] dt;\end{aligned} \tag{117}$$

- Adjunto

$$\begin{aligned}\text{-}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x})\, \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau) + \mathbf{D}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x})\, \boldsymbol{\lambda}(\tau) = \\ \left[\sum_{j=1}^{n_{gl}} \left\langle \mu_j(\tau) + c \left(\frac{\mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\, \mathbf{q}(\mathbf{x},\tau)}{\overline{u}_j} \right)^2 - 1 \right\rangle \frac{2}{\overline{u}_j^2}\, \mathbf{L}_j^{\mathsf{T}}\, \mathbf{q}(\mathbf{x},\tau)\, \mathbf{L}_j^{\mathsf{T}} + \right. \\ \left. \sum_{e=1}^{n_{ele}} \sum_{k=1}^{n_G} \left\langle \mu_{ek}(\tau) + c \left(\frac{\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{q}(\mathbf{x},\tau), \tau)}{\overline{\sigma}} - 1 \right) \right\rangle \gamma_{ek}\, x_e^{p_k - q}\, \mathbf{S}_{ek} \right]^{\mathsf{T}}.\end{aligned} \tag{118}$$

5.3.2 LA com restrição relaxada

Já neste caso, utiliza-se a função LA aplicando a restrição escrita conforme o funcional integral relaxado. Portanto, a equação (75) para o problema P é escrita em termos da função objetivo, conforme equação (94), e das restrições de deslocamento e tensão, conforme equações (99) e (109),

$$\mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),\tilde{\boldsymbol{\mu}},c) = \sum_{e=1}^{n_{ele}} \frac{x_e}{x_e^0} + \sum_{j=1}^{n_{gl}} \frac{c}{2}\left\langle \frac{\tilde{\mu}_j}{c} + \int_0^{T_f}\left\langle\left(\frac{\mathbf{L}_j^\mathsf{T}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)}{\overline{u}_j}\right)^2 - 1\right\rangle_\epsilon dt\right\rangle^2 + \sum_{e=1}^{n_{ele}}\sum_{k=1}^{n_G} \frac{c}{2}\left\langle \frac{\tilde{\mu}_{ek}}{c} + \int_0^{T_f}\left\langle \frac{\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\overline{\sigma}} - 1\right\rangle_\epsilon dt\right\rangle^2. \tag{119}$$

E para a obtenção da análise de sensibilidade são utilizadas as equações (81) e (80), com as devidas derivadas dos funcionais de restrição em relação ao tempo (equações (102) e (115)). Assim, aplicando essas definições e já suprimindo o termo da restrição de deslocamento que não depende explicitamente da variável de projeto, escrevem-se as expressões finais,

- Derivada da função LA

$$\frac{d\,\mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),\tilde{\boldsymbol{\mu}},c)}{dx_m} = \frac{1}{x_m^0} + \int_0^{T_f}\left[\sum_{e=1}^{n_{ele}}\sum_{k=1}^{n_G}\left\langle\tilde{\mu}_{ek} + c\int_0^{T_f}\left\langle\frac{\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t)}{\overline{\sigma}} - 1\right\rangle_\epsilon dt\right\rangle\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ek}^\epsilon}{\partial g_{ek}}\,\gamma_{ek}\,(p_k - q)\,x_e^{p_k-q-1}\,\delta_{em}\,\mathbf{S}_{ek}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}(t)\left(\frac{d\,\mathbf{A}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t) - \frac{d\,\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dx_m}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)\right] dt; \tag{120}$$

- Adjunto

$$-\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{x})\,\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau) + \mathbf{D}^\mathsf{T}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\lambda}(\tau) = \left[\sum_{j=1}^{n_{gl}}\left\langle\tilde{\mu}_j + c\int_0^{T_f}\left\langle\left(\frac{\mathbf{L}_j^\mathsf{T}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},\tau)}{\overline{u}_j}\right)^2 - 1\right\rangle_\epsilon dt\right\rangle \frac{1}{2}\frac{\partial g_j^\epsilon}{\partial g_j}\frac{2}{\overline{u}_j^2}\,\mathbf{L}_j^\mathsf{T}\,\mathbf{q}(\mathbf{x},\tau)\,\mathbf{L}_j^\mathsf{T} + \sum_{e=1}^{n_{ele}}\sum_{k=1}^{n_G}\left\langle\tilde{\mu}_{ek} + c\int_0^{T_f}\left\langle\frac{\sigma_{ek}^{eq}(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},\tau),\tau)}{\overline{\sigma}} - 1\right\rangle_\epsilon dt\right\rangle\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ek}^\epsilon}{\partial g_{ek}}\,\gamma_{ek}\,x_e^{p_k-q}\,\mathbf{S}_{ek}\right]^\mathsf{T}. \tag{121}$$

Esses dois pares de equações, ou seja, (117) com (118) e (120) com (121), são fundamentais para a otimização da função LA utilizada no algoritmo que será proposto a seguir.

5.4 PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

Para declarar um algoritmo que consiste na lógica de solução da otimização topológica pelo método do Lagrangiano Aumentado, faz-se necessário estipular uma expressão para ser utilizada como critério de convergência, tal que

$$V = \max\left|\max\left(\tilde{g}_j, -\frac{\tilde{\mu}_j}{c}\right)\right| \quad j = 1,\,\ldots,\,n_{rest}, \tag{122}$$

representa a máxima violação das restrições (ARORA; CHAHANDE; PAENG, 1991, p. 1498) e será chamado *valor de controle*. Dessa forma, o critério de parada pode ser estabelecido em termos deste valor de controle e da norma do gradiente da função LA, ou seja,

$$V < tol_g \quad \wedge \quad \|\nabla\mathcal{L}\| < tol_n, \tag{123}$$

onde tol_g e tol_n são os valores das tolerâncias para as restrições e para a norma, respectivamente. Com isso, é possível escrever os passos gerais para a criação do algoritmo de otimização utilizado neste trabalho:

1. Seja $\mathbf{x}^0$ um ponto inicial arbitrário, $k = 0$ o contador de iterações externas, $\boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{0}$ o vetor com todos os multiplicadores de Lagrange, $\kappa > 1$ o fator de incremento da penalização, ϵ o parâmetro de relaxação e os valores de tolerância tol_g e tol_n. Inicializar V com um valor alto (idealmente $V^0 \to \infty$). Calcular a resposta do sistema em vetor de estados $\mathbf{q}^0(\mathbf{x}^0, t)$ e estimar o parâmetro de penalização inicial que satisfaça

$$0 \leq c^0 \leq 2\,\frac{f(\mathbf{x}^0)}{\sum_{j=1}^{n_{rest}} \left\langle \tilde{g}_j(\mathbf{x}^0, \mathbf{q}^0)\right\rangle^2}; \tag{124}$$

2. Atualizar o contador $k = k + 1$;

3. Minimizar a função $\mathcal{L}^k(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}^{k-1}, c^{k-1})$, resolvendo o problema P^k (equação (55)). Fazer o vetor $\mathbf{x}^k$ ser a solução deste passo;

4. Atualizar o vetor de estados $\mathbf{q}^k(\mathbf{x}^k, t)$, ou seja, resolver a EDO da equação (23) para a variável de projeto otimizada na iteração atual e calcular as restrições $\tilde{g}_j^k$. Calcular V^k tal como na equação (122) e verificar ambos os critérios de parada da equação (123), caso sejam satisfeitos, parar; caso contrário, continuar;

5. Se $V^k \geq V^{k-1}$, ou seja, a violação das restrições não melhorou. Atualizar o parâmetro de penalização $c^k = \kappa\, c^{k-1}$ e manter os multiplicadores de Lagrange com o valor da iteração anterior, $\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k$. Proceder ao item 2; caso contrário, continuar;

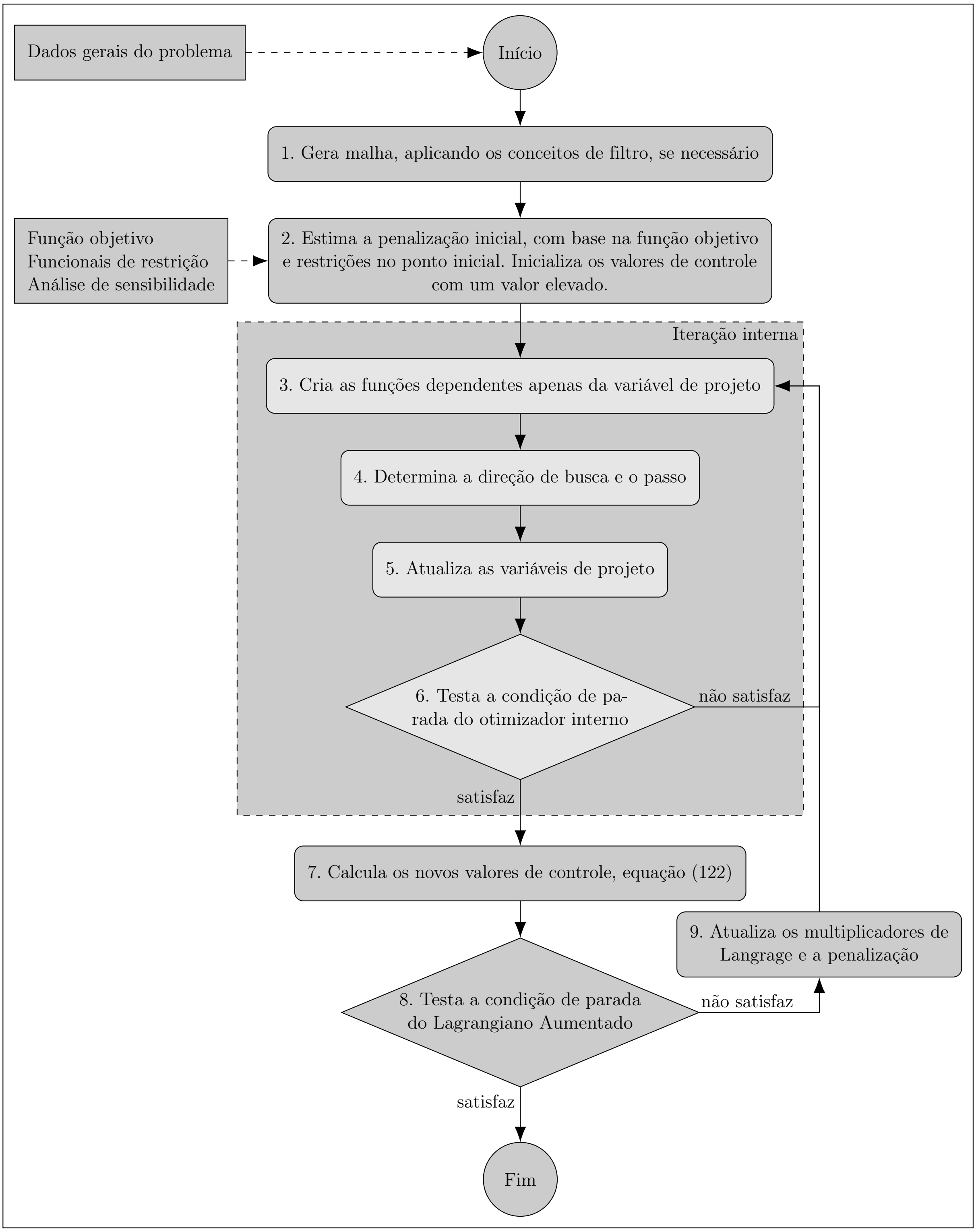
6. Se $V^k < V^{k-1}$, isto é, a violação das restrições melhorou. Manter o parâmetro de penalização com o valor da iteração anterior, $c^k = c^{k-1}$ e atualizar os multiplicadores de Lagrange conforme a equação (56). Atualizar o valor de controle $V^k = V^{k-1}$ e proceder ao item 2.

Embora os passos descritos anteriormente apresentam o vetor restrição relaxado $\tilde{g}_j$ e o vetor dos multiplicadores de Lagrange $\tilde{\mu}_j$ como independentes do tempo, não existe nenhum impedimento em substituir tais vetores das equações e do critério de convergência pelos seus correspondentes dependentes do tempo.

Destaca-se também que a minimização requerida no passo 3 leva em consideração as restrições laterais impostas nas variáveis de projeto e, por isso, o otimizador empregado deve lidar com essa característica. Outra importante observação é que os passos 5 e 6, baseados em Paeng e Arora (1989, p. 75), Arora, Chahande e Paeng (1991, p. 1504) e Chahande e Arora (1993, p. 70, 1994, p. 417), são construídos de modo a garantir prioridade na melhora das restrições violadas em cada iteração. Com isso, o parâmetro de penalização deve ser atualizado apenas se as violação das restrições não foram melhoradas e o vetor dos multiplicadores de Lagrange é atualizado, juntamente com o valor da violação das restrições, somente quando a violação das restrições diminui.

A Figura 4 apresenta uma visualização completa do algoritmo desenvolvido para a solução do problema de otimização estrutural dinâmica.

Figura 4 – Fluxograma do algoritmo de otimização proposto



Fonte: Elaborado pelo autor.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados preliminares obtidos com a implementação dos conceitos e definições apresentados anteriormente para o problema de otimização estrutural topológica transiente.

6 APLICAÇÃO DO ALGORITMO EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS

Este capítulo tem como objetivo estudar e validar a aplicação das formulações discutidas ao longo do texto para dois diferentes problemas da literatura. Os problemas estudados foram:

- treliça de três barras (BRUGGI, 2008, p. 130–133), que é resolvida analiticamente em seu manuscrito para análise da proposta de relaxação de tensão e, por isso, apresenta apenas restrições de tensão;
- treliça de dez membros (HAUG; ARORA, 1979, p. 242–244), que é otimizada para a variável de projeto área da seção transversal e diversos casos de carga e restrições. Nesse trabalho será considerado o "Caso I" de carga, para restrições de tensão e deslocamento.

Ambos os problemas são resolvidos neste capítulo considerando a discretização de elementos finitos de barra, portanto, pode-se particularizar as parametrizações de material apresentadas nas seções 4.1.1 e 4.1.2 para valores genéricos de área A_e, comprimento L_e, módulo de elasticidade E_e e densidade ρ_e, ou seja,

$$\mathbf{K}_e = [\chi_e(\mathbf{x})]^{p_k}\,\mathbf{K}_e^0 = x_e^{p_k}\,\frac{E_e\,A_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{125}$$

para a rigidez e

$$\mathbf{M}_e = [\chi_e(\mathbf{x})]^{p_m}\,\mathbf{M}_e^0 = x_e^{p_m}\,\frac{\rho_e\,A_e\,L_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{126}$$

para a massa. É importante destacar o fato de que para o elemento de barra, a parametrização da variável de projeto é simplesmente dada por $\chi_e = x_e$, cuidando apenas com a correção do valor mínimo pelas equações (B.10), (B.11), (B.12) e (B.13), ver APÊNDICE B.2 para maiores detalhes.

Em ambos os problemas estudados, a força de excitação é tratada constante durante todo o intervalo de tempo analisado e não possui dependência com a variável de projeto, ou seja, o carregamento apresentado na equação (93) pode ser escrito como

$$\mathbf{GF}(\mathbf{x},t) = \mathbf{G}\boldsymbol{f} \quad \forall\, t \in [0, T_f], \tag{127}$$

onde $\boldsymbol{f}$ é o vetor com a intensidade da força aplicada em cada grau de liberdade livre.

Com a finalidade de obter uma resposta dinâmica da estrutura que simule, primeiramente, um comportamento estático e, em seguida, um comportamento dinâmico apresentando um sobressinal no período transiente, foram realizados experimentos numéricos alterando-se apropriadamente os valores do parâmetro de amortecimento estrutural proporcional à rigidez, β. Estes valores são apresentados em cada caso estudado. Já os valores do parâmetro de amortecimento proporcional à massa, α, por sua vez, foram definidos iguais a zero em todos os problemas estudados.

Quanto aos critérios de convergência, identificou-se durante os testes, que a resposta final dificilmente era alterada após 100 iterações externas do algoritmo LA e, com isso estipulou-se esse número como o máximo de iterações externas permitido. Em outras palavras, se porventura os parâmetros de tolerância não forem alcançados, a otimização é interrompida imediatamente ao serem completadas 100 iterações externas.

6.1 PROBLEMA DE TRÊS BARRAS

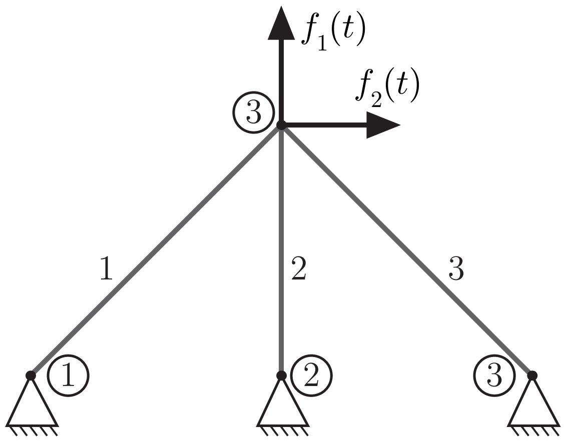
O clássico problema de três barras (Figura 5) é otimizado para vários casos. Todas as propriedades geométricas e mecânicas foram selecionadas como adimensionais e iguais as utilizadas em (BRUGGI, 2008, p. 130), ou seja,

$$f_1 = 1.5, \quad f_2 = 1.0, \quad A_e = 1.0, \quad E_e = 1.0, \quad L_1 = L_3 = \sqrt{2}, \quad L_2 = 1.0 \tag{128}$$

e os seguintes parâmetros foram utilizados na otimização

$$\overline{\sigma} = 3.0, \quad \mathbf{x}^0 = \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{0}, \quad \kappa = 1.08, \quad tol_n = 1{\times}10^{-4}, \quad tol_g = 1{\times}10^{-3}. \tag{129}$$

Figura 5 – Modelo do problema de três barras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse problema pode ser então descrito como,

$$P_1 \left\{ \begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{e=1}^{n_{ele}} x_e \, L_e \, A_e \\ \text{Tal que} & \mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}_l(\mathbf{x},t) = \mathbf{G}\mathbf{F}_l(t) + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}_l(\mathbf{x},t) \\ & g_{el}(\mathbf{x},\mathbf{q}_l(\mathbf{x},t),t) = x_e^{p_k - q} \, \dfrac{\sigma_{el}^{eq}(\mathbf{x},\mathbf{q}_l(\mathbf{x},t),t)}{\overline{\sigma}} - 1 \leq 0 \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \end{array} \right. , \tag{130}$$

onde $e = 1, \ \ldots, \ n_{ele}$, $l = 1, \ 2$ denota os dois casos de carga e o tempo é definido para $\{t \in \mathbb{T} : 0 \leq t \leq T_f\}$. A função objetivo será normalizada em termos de seu valor inicial, isto é, $f(\mathbf{x}^0)$.

6.1.1 Otimização para a resposta superamortecida

Originalmente, este é um problema de otimização estrutural estático sujeito a dois casos de carga, f_1 e f_2, ou seja, essas forças são constantes durante todo o intervalo de tempo. Por isso, de modo a testar as formulações propostas, o problema é transformado em uma otimização estrutural dinâmica, segundo a equação (130). As propriedades dinâmicas são estabelecidas como,

$$\rho_e = 0.1, \quad \alpha = 0.0, \quad \beta = 1.0, \quad \mathbb{T} = [0.0, 20.0], \tag{131}$$

com o único propósito de obtenção de uma resposta superamortecida suave para simular, em regime permanente, a mesma resposta estática.

Os casos de testes são formulados com o parâmetro SIMP $p_k = 3.1$ para a rigidez e $p_m = 1.0$ para a massa e com a relaxação de tensão em $q = 3.0$. No *Caso 1*, a otimização é calculada para a função LA da equação (116). Já nos casos *2*, *3* e *4*, a otimização é realizada de acordo com a função LA da equação (119) para três diferentes valores de relaxação do operador $\langle \bullet \rangle_\epsilon$: $\epsilon_1 = 1{\times}10^{-3}$, $\epsilon_2 = 1{\times}10^{-4}$ e $\epsilon_3 = 1{\times}10^{-20}$.

Os resultados são apresentados na Tabela 2 para o resultado analítico e para a estrutura obtida pelo algoritmo desenvolvido. Os valores iniciais e finais das três variáveis de projeto, bem como o volume da estrutura podem ser facilmente comparados.

Tabela 2 – Resultados para o problema de três barras sujeito a resposta superamortecida.

		x_1	x_2	x_3	Vol[19]	Norma	V[20]	t[21]	LA[22]	Grad[23]
Original (analítica)		0.7071	0.000	0.7071	2.000	-	-	-	-	-
Caso 1	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
	F[25]	0.7071	0.000	0.7071	2.000	$8.864{\times}10^{-3}$	$4.621{\times}10^{-5}$	1.000	19081	232
Caso 2	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
ϵ_1	F[25]	0.7298	0.000	0.7298	2.064	$3.493{\times}10^{-3}$	$6.956{\times}10^{-4}$	2.006	41250	733
Caso 3	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
ϵ_2	F[25]	0.7074	0.000	0.7074	2.001	$1.052{\times}10^{-5}$	$6.379{\times}10^{-4}$	1.304	30111	481
Caso 4	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
ϵ_3	F[25]	0.7071	0.000	0.7071	2.000	$9.021{\times}10^{-4}$	$3.244{\times}10^{-5}$	1.282	31801	424

Fonte: Elaborado pelo autor.

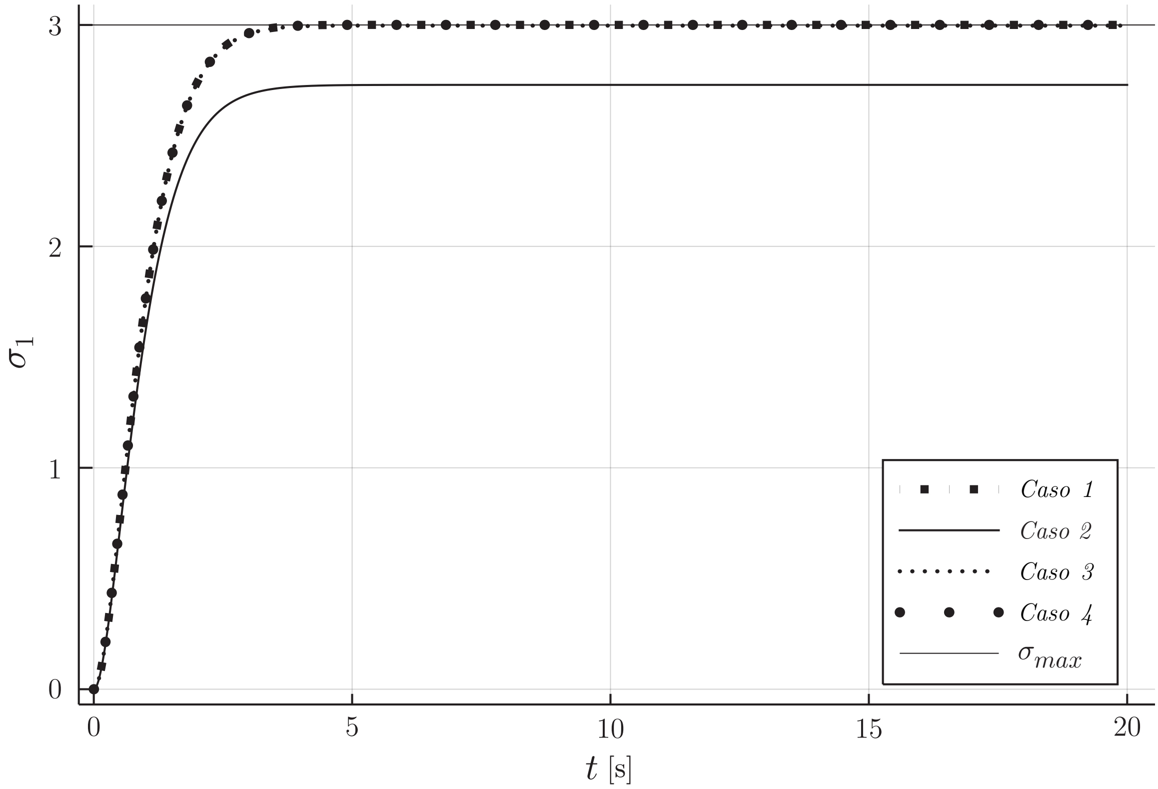
Conforme esperado, o mínimo global é obtido para todos os casos testados. Vale destacar que o "falso ponto de ótimo global" (BRUGGI, 2008, p. 131) foi obtido ao serem realizados testes aplicando o procedimento de continuação e, portanto, os parâmetros p_k e q foram mantidos constantes durante todas as iterações. Com respeito ao objetivo de minimizar o volume, todos os resultados estão dentro de uma tolerância de 4% com o valor analítico.

Embora os parâmetros de convergência por norma e pelo valor de controle V tenham sido atingidos para todos os casos testados, deve-se destacar o fato de que foi observada grande variação nos valores da norma do gradiente da função LA do *Caso 1* e *Caso 4*. Esse comportamento é traduzido, por sua vez, em uma elevação no número de chamadas da função LA em relação ao número de chamadas do gradiente.

[19] volume da estrutura
[20] valor de controle usado para a violação das restrições
[21] tempo total de otimização (relativo ao mais rápido)
[22] quantidade de chamadas da função LA
[23] quantidade de chamadas do gradiente de LA
[24] valores iniciais
[25] valores finais

Outra importante característica observada é que a maior dificuldade associada a este problema diz respeito a satisfação das restrições, por isso, o *Caso 2*, que emprega $\epsilon_1 = 1{\times}10^{-3}$, apresenta o tempo de otimização mais elevado. Para melhor exemplificar essa afirmação, a Figura 6 mostra os gráficos de tensão ao longo do tempo na barra (1) da estrutura otimizada para os casos *1* a *4*.

Figura 6 – Valores de tensão para a barra (1) da estrutura otimizada sujeita a resposta superamortecida.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando a figura, pode-se perceber claramente que o *Caso 2* confirma o comportamento conservativo esperado, pois embora a violação da restrição esteja positiva em $V = 6.956{\cdot}10^{-4}$, o valor atual da tensão está longe do seu limite máximo estipulado e, por consequência, a otimização resulta em uma estrutura de maior volume.

6.1.2 Otimização para a resposta subamortecida

Os mesmos casos são reformulados para desempenhar uma resposta subamortecida, ou seja, o coeficiente de amortecimento estrutural é substituído tal que $\beta = 0.5$, após experimentos numéricos. Com isso, as restrições estarão ativas apenas em um breve período de tempo. Os novos casos de testes são atribuídos da seguinte maneira: o *Caso 5* reproduz o que foi realizado no *Caso 1*, isto é, aplica a função LA conforme a equação (116) e os casos *6*, *7* e *8* repetem, respectivamente, os casos *2*, *3* e *4* ao resolver o problema para a formulação da (119), para diferentes valores de ϵ. Os resultados são mostrados na Tabela 3.

Apesar de que os valores finais de volume e das variáveis de projeto das estruturas otimizadas apresentaram valores muito próximos entre si, apenas o *Caso 6*, que aplica a maior relaxação ao operador $\langle \bullet \rangle_\epsilon$, apresentou convergência tanto por norma quanto por valor de controle. Isso ressalta a importância da escolha adequada do parâmetro de relaxação ϵ em cada problema.

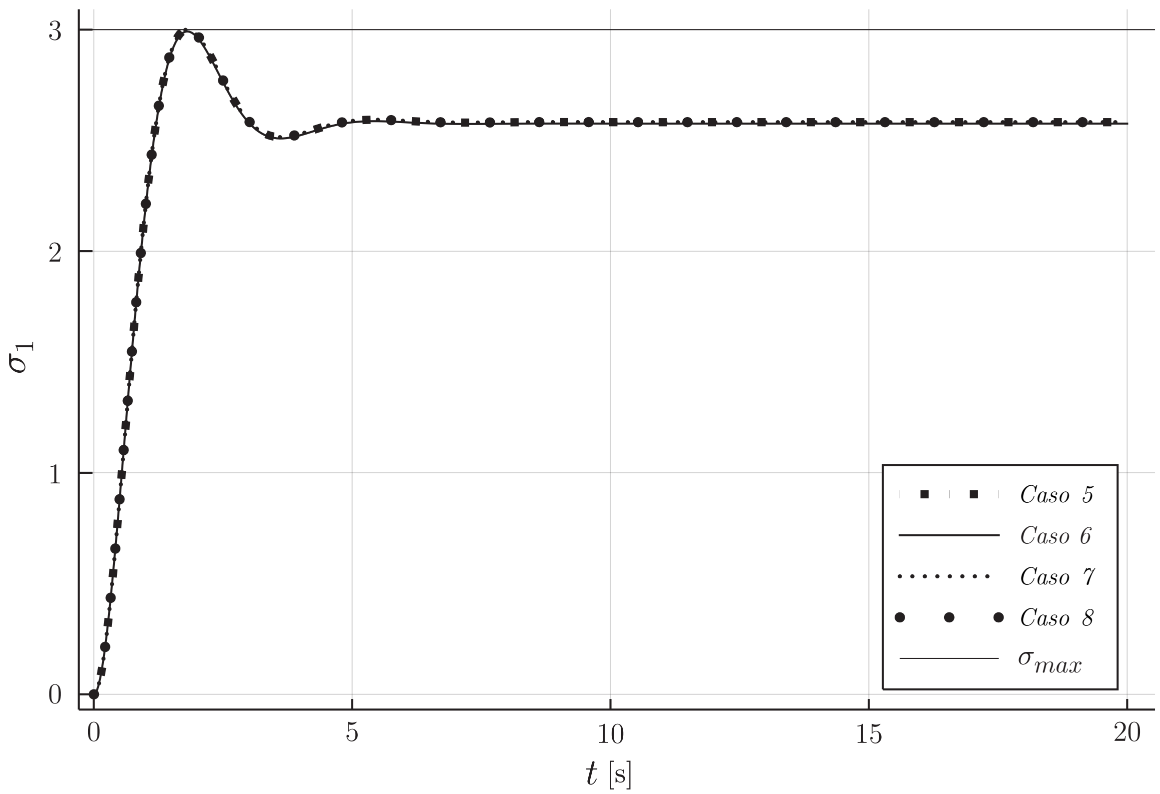
Tabela 3 – Resultados para o problema de três barras sujeito a resposta subamortecida.

		x_1	x_2	x_3	Vol[19]	Norma	V[20]	t[21]	LA[22]	Grad[23]
Caso 5	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
	F[25]	0.7432	0.000	0.7432	2.102	$2.837{\times}10^{-2}$	$2.043{\times}10^{-4}$	1.482	32582	465
Caso 6	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
ϵ_1	F[25]	0.7440	0.000	0.7440	2.104	$1.885{\times}10^{-5}$	$9.363{\times}10^{-4}$	1.099	28371	517
Caso 7	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
ϵ_2	F[25]	0.7433	0.000	0.7433	2.103	$2.395{\times}10^{-2}$	$1.413{\times}10^{-4}$	1.080	31363	448
Caso 8	I[24]	1.000	1.000	1.000	3.828	-	-	-	-	-
ϵ_3	F[25]	0.7434	0.000	0.7434	2.103	$5.650{\times}10^{-2}$	$2.635{\times}10^{-5}$	1.000	31363	434

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos com os valores da tensão ao longo do tempo na barra (1) da estrutura otimizada para os casos *5* a *8* estão presentes na Figura 7. Como já se aguardava, devido aos resultados das topologias, todas as respostas exibiram comportamento muito parecido.

Figura 7 – Valores de tensão para a barra (1) da estrutura otimizada sujeita a resposta subamortecida.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível verificar que, diferentemente do observado no problema superamortecido, todos os casos atingem o valor máximo de tensão em um breve período de tempo e ainda dentro das tolerâncias. Deste modo, o efeito conservativo causado pela relaxação do funcional equivalente é visualmente imperceptível na figura apresentada.

6.2 PROBLEMA DE DEZ BARRAS

O problema de dez barras (Figura 8) é otimizado para os mesmos parâmetros em unidades inglesas usados por Haug e Arora (1979, p. 243), isto é,

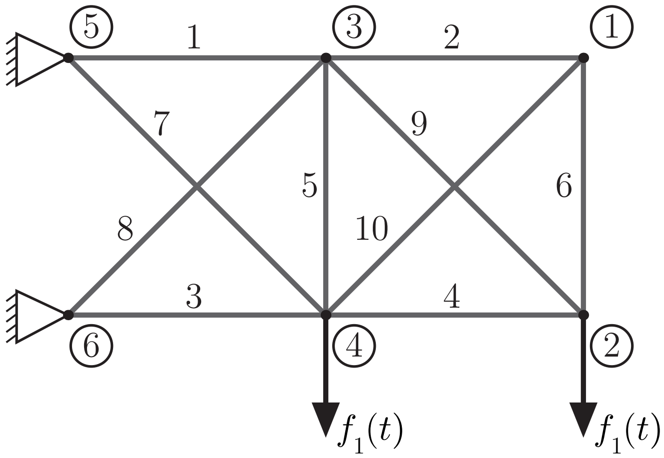
$$f_1 = \text{-}100.0, \quad A_e = 1.0, \quad E_e = 1{\times}10^7, \quad \overline{\sigma} = 25{\times}10^3, \quad \overline{u} = 3.0, \tag{132}$$

sendo que o limite inferior e o limite superior da variável de projeto são iguais, respectivamente, a $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{0.1}$ e $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{40}$. Os outros parâmetros de otimização foram determinados conforme,

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{40}, \quad \boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{0}, \quad \kappa = 1.08, \quad tol_n = 1{\times}10^{\text{-}4}, \quad tol_g = 1{\times}10^{\text{-}3}. \tag{133}$$

O comprimento dos membros retos e diagonais são definidos com, respectivamente, 360.0 e 509.1 polegadas. Deve-se notar que nesse problema apenas um caso de carga é empregado, com isso, uma força f_1 constante é aplicada durante todo o intervalo de tempo considerado.

Figura 8 – Modelo do problema de dez barras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A formulação geral deste problema pode ser escrita como,

$$P_2 \begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{e=1}^{n_{ele}} x_e\, L_e\, A_e \\ \text{Tal que} & \mathbf{A}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{G}\mathbf{F}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{q}(\mathbf{x},t) \\ & g_e(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t) = x_e^{p_k - q}\,\dfrac{\sigma_e^{eq}(\mathbf{x},t)}{\overline{\sigma}} - 1 \leq 0 \\ & g_j(\mathbf{x},\mathbf{q}(\mathbf{x},t),t) = \dfrac{\left(\mathbf{L}_j^\top\,\mathbf{q}(\mathbf{x},t)\right)^2}{\overline{u}^2} - 1 \leq 0 \\ & 0.1 \leq x_e \leq 40 \end{cases}, \tag{134}$$

onde $e = 1,\ \ldots,\ n_{ele}$, $j = 1,\ \ldots,\ n_{gl}$ e $\{t \in \mathbb{T} : 0 \leq t \leq T_f\}$. A função objetivo também é normalizada pelo valor inicial, de maneira igual a apresentada na seção 6.1. Outra peculiaridade deste problema diz respeito a aplicação de uma área unitária, fazendo-se necessário que os valores utilizados para a parametrização SIMP e para a relaxação de tensão sejam iguais a unidade, isto é, $p_k = p_m = q = 1.0$. Com isso, é possível comparar os resultados do algoritmo proposto com os da literatura.

6.2.1 Otimização para a resposta superamortecida

Realizando a mesma estratégia da seção 6.1.1, o problema proposto pela equação (134) é resolvido para casos de resposta superamortecida. Para tanto, são definidas as propriedades

$$\rho_e = 0.1, \quad \alpha = 0.0, \quad \beta = 1.0, \quad \mathbb{T} = [0.0, 20.0], \tag{135}$$

com o intuito de obter a mesma resposta estática da literatura.

Os casos foram designados por letras utilizando-se da mesma lógica exposta anteriormente, ou seja, a função LA tal como na equação (116) é aplicada no *Caso A-1*, para o problema apenas com restrição de tensão e no *Caso A-2*, para o problema com restrição de tensão e deslocamento. Para testar o problema resolvido conforme equação (119) e utilizando três diferentes valores de parâmetros de relaxação do operador $\langle \bullet \rangle_\epsilon$, aplicam-se respectivamente, $\epsilon_1 = 1{\times}10^{-3}$, $\epsilon_2 = 1{\times}10^{-4}$ e $\epsilon_3 = 1{\times}10^{-20}$ aos casos *B-1*, *C-1* e *D-1*, considerando apenas restrições de tensão e aos casos *B-2*, *C-2* e *D-2*, considerando ambas as restrições de tensão e deslocamento.

Os resultados são apresentados nas Tabs. 4 e 5. A comparação mais interessante que se pode realizar inicialmente é que o valor da norma para o problema original considerando restrições de tensão e deslocamento (HAUG; ARORA, 1979, p. 244) foi de 0.340, valor este bem superior aos obtidos com a otimização utilizando as formulações estudadas.

Tabela 4 – Resultados para o problema de dez barras sujeito a resposta superamortecida.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Volume
Original[26]		7.938	0.100	8.062	3.938	0.100	0.100	5.745	5.569	5.569	0.100	$1.593{\times}10^4$
Caso A-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
	F[28]	7.937	0.100	8.061	3.938	0.100	0.100	5.744	5.568	5.568	0.100	$1.593{\times}10^4$
Caso B-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
ϵ_1	F[28]	8.493	0.100	8.622	4.287	0.100	0.100	6.141	5.961	5.961	0.112	$1.707{\times}10^4$
Caso C-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
ϵ_2	F[28]	7.943	0.100	8.067	3.941	0.100	0.100	5.748	5.572	5.572	0.100	$1.594{\times}10^4$
Caso D-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
ϵ_3	F[28]	7.934	0.100	8.066	3.934	0.100	0.100	5.750	5.563	5.563	0.100	$1.593{\times}10^4$
Original[29]		30.03	0.100	23.27	15.29	0.100	0.5565	7.468	21.20	21.62	0.100	$5.062{\times}10^4$
Caso A-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
	F[28]	30.18	0.100	24.45	15.07	0.100	0.5415	7.339	20.90	21.31	0.100	$5.064{\times}10^4$
Caso B-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
ϵ_1	F[28]	31.51	0.100	24.49	15.93	0.100	0.2500	8.605	21.90	22.52	0.100	$5.310{\times}10^4$
Caso C-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
ϵ_2	F[28]	30.06	0.100	24.44	15.33	0.100	0.5450	7.344	20.85	21.32	0.100	$5.067{\times}10^4$
Caso D-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	$1.679{\times}10^5$
ϵ_3	F[28]	29.80	0.100	26.54	15.36	0.100	0.4972	7.147	20.47	20.86	0.100	$5.079{\times}10^4$

Fonte: Elaborado pelo autor.

[26]apenas com restrição de tensão

[27]valores iniciais

[28]valores finais

[29]apenas com restrição de tensão e deslocamento

Tabela 5 – Esforços computacionais para o problema de dez barras superamortecido.

	t[30]	LA[31]	Grad[32]	Norma	V[33]
Caso A-1	1.199	35048	977	$1.212{\times}10^{-5}$	$8.703{\times}10^{-5}$
Caso B-1 ϵ_1	1.000	33278	1039	$3.737{\times}10^{-5}$	$9.846{\times}10^{-4}$
Caso C-1 ϵ_2	2.576	106039	2753	$1.552{\times}10^{-5}$	$9.679{\times}10^{-4}$
Caso D-1 ϵ_3	15.49	720652	12844	$1.102{\times}10^{-3}$	$3.544{\times}10^{-7}$
Caso A-2	1.902	51799	4361	$1.828{\times}10^{-2}$	$2.154{\times}10^{-6}$
Caso B-2 ϵ_1	1.000	20091	3298	$3.124{\times}10^{-4}$	$6.829{\times}10^{-4}$
Caso C-2 ϵ_2	1.308	35798	5024	$3.876{\times}10^{-4}$	$5.113{\times}10^{-4}$
Caso D-2 ϵ_3	4.756	147874	14636	$7.599{\times}10^{-4}$	$1.017{\times}10^{-6}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sem sombra de dúvidas, o problema restrito apenas pela tensão apresentou os resultados mais próximos aos da literatura, observando-se que a maior diferença (em torno de 7%) foi encontrada na resposta do *Caso B-1*, que é o mais conservador de todos por utilizar o maior fator de relaxação, ϵ_1. Com relação à convergência, apenas os casos *A-1*, *B-1* e *C-1* atingiram ambos os critérios estipulados de norma e de valor de controle, ou seja, para os outros casos testados foram realizadas 100 iterações externas.

Quanto ao tempo de otimização, nota-se que à medida em que o parâmetro de relaxação do operador $\langle \bullet \rangle_\epsilon$ diminui, mais avaliações da função LA e da análise de sensibilidade são necessárias para resolver o problema e, consequentemente, maior é o tempo total de otimização. Dos resultados apresentados, os casos utilizando o fator de relaxação $\epsilon_2 = 1{\times}10^{-4}$ obtiveram um custo-benefício expressivo, uma vez que foi possível obter uma resposta muito próxima a da original em um tempo relativamente não tão elevado (apenas 1.308 vezes mais lento que o caso mais rápido).

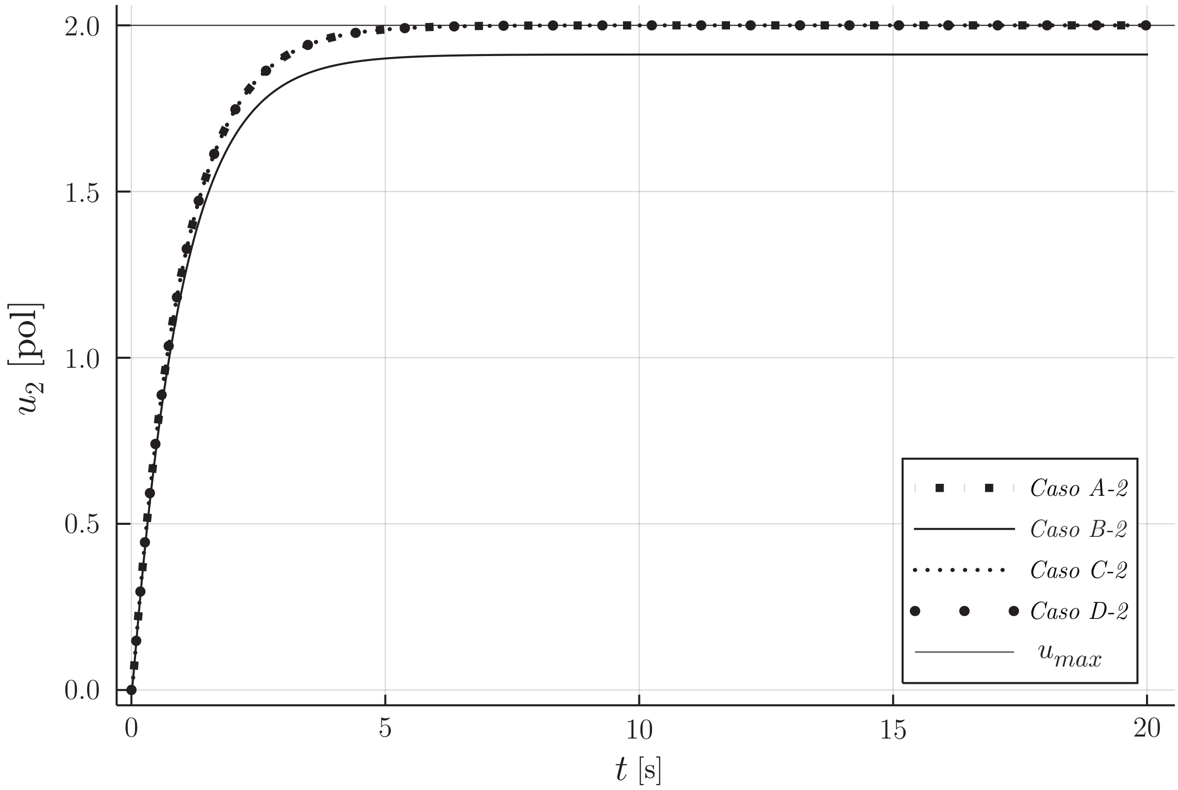
Surpreendentemente, o *Caso A-1*, que emprega a função LA utilizando-se dos multiplicadores de Lagrange em função do tempo, levou pouco mais de 20% para finalizar a otimização que o caso estudado mais rápido, atrás apenas do *Caso B-1*. Porém, ao considerar restrições de tensão e deslocamento, a quantidade extra de multiplicadores de Lagrange em função do tempo, que são necessárias para resolução do problema no *Caso A-2*, se torna um empecilho e o tempo de otimização é quase duas vezes mais lento que o caso mais rápido (*B-2*).

Para suportar as análises com maior consideração, a Figura 9 apresenta os gráficos do deslocamento em função do tempo da ponta superior, isto é, nó (1), no grau de liberdade da aplicação das forças, para a estrutura otimizada considerando os casos *A-2* ao *D-2* da resposta superamortecida.

Novamente é possível perceber o comportamento conservativo causado pela relaxação do operador $\langle \bullet \rangle_\epsilon$ para o maior parâmetro estudado $\epsilon_3 = 1{\times}10^{-3}$, ou seja, mesmo com a resposta do deslocamento inferior ao limite, o valor de controle observado se encontra levemente abaixo da tolerância ($6.829{\times}10^{-4} < 1{\times}10^{-3}$).

[30] tempo total de otimização (relativo ao mais rápido)
[31] quantidade de chamadas da função LA
[32] quantidade de chamadas do gradiente de LA
[33] valor de controle usado para a violação das restrições

Figura 9 – Deslocamento no nó (1), grau de liberdade da aplicação das forças, em diferentes casos do problema superamortecido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2.2 Otimização para a resposta subamortecida

De modo a resolver esse problema para uma resposta subamortecida, o parâmetro de amortecimento estrutural é modificado após experimentos numéricos, tal que $\beta = 0.1$. Os casos de teste foram estabelecidos seguindo a mesma lógica da seção anterior (6.2.1), ou seja o *Caso E* aplica a formulação conforme equação (116) para resolver o problema de otimização e os casos F, G e H utilizam a equação (119). Esses casos são subdivididos de acordo com a restrição utilizada: o subíndice *1* representa o problema apenas com restrição de tensão e o subíndice *2* é usado para o problema com restrições de tensão e de deslocamento. Os resultados otimizados estão nas Tabs. 6 e 7.

O fato de que as restrições neste problema permanecem ativas apenas em um período muito pequeno é traduzido em tempos de otimização melhores do que os vistos na Tabela 5. Entretanto, esse sobressinal representa também o ponto máximo de restrição e, por isso, as estruturas obtidas são mais volumosas. Destaca-se ainda que, todos os testes realizados atingiram ambos os critérios de convergência (norma e valor de controle) e todos os volumes finais apresentaram valores parecidos, não ultrapassando 0.3% do menor valor obtido em cada um dos dois diferentes casos de restrições testados.

Observou-se que os casos *E-1* e *E-2*, que empregam a função LA conforme equação (116) com os multiplicadores de Lagrange em função do tempo, apresentaram outra vez grande aumento no tempo de otimização coincidindo com a elevação das quantidades de restrições. Em outras palavras, o *Caso E-1* foi a resposta mais rápida e o *Caso E-2* foi a resposta mais lenta (1.5 vezes pior que o caso mais rápido).

Tabela 6 – Resultados para o problema de dez barras sujeito a resposta subamortecida.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Volume
Caso E-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
	F[28]	10.37	0.100	9.440	4.795	0.100	0.100	6.281	7.762	6.604	0.100	1.953×10^{4}
Caso F-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
ϵ_1	F[28]	10.39	0.100	9.464	4.810	0.100	0.100	6.305	7.776	6.619	0.100	1.958×10^{4}
Caso G-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
ϵ_2	F[28]	10.37	0.100	9.442	4.799	0.100	0.100	6.282	7.767	6.607	0.100	1.954×10^{4}
Caso H-1	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
ϵ_3	F[28]	10.37	0.100	9.442	4.799	0.100	0.100	6.282	7.766	6.607	0.100	1.954×10^{4}
Caso E-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
	F[28]	39.98	0.1142	31.47	16.20	0.100	0.100	11.00	30.09	23.51	0.1484	6.463×10^{4}
Caso F-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
ϵ_1	F[28]	40.00	0.1160	31.49	16.20	0.100	0.100	11.00	30.07	23.50	0.1496	6.463×10^{4}
Caso G-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
ϵ_2	F[28]	40.00	0.1152	31.51	16.21	0.100	0.100	10.99	30.06	23.50	0.1460	6.463×10^{4}
Caso H-2	I[27]	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	1.679×10^{5}
ϵ_3	F[28]	40.00	0.1146	31.57	16.22	0.100	0.100	10.98	30.03	23.50	0.1475	6.463×10^{4}

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7 – Esforços computacionais para o problema de dez barras subamortecido.

	t[30]	LA[31]	Grad[32]	Norma	V[33]
Caso E-1	1.000	11971	311	8.043×10^{-5}	9.912×10^{-4}
Caso F-1 ϵ_1	1.975	26934	819	3.135×10^{-6}	9.970×10^{-4}
Caso G-1 ϵ_2	2.175	28525	706	4.603×10^{-5}	1.258×10^{-4}
Caso H-1 ϵ_3	1.431	19939	482	4.082×10^{-5}	1.561×10^{-4}
Caso E-2	1.578	65733	2617	2.681×10^{-3}	2.557×10^{-4}
Caso F-2 ϵ_1	1.237	52224	2341	8.189×10^{-5}	9.822×10^{-4}
Caso G-2 ϵ_2	1.258	56955	2121	8.995×10^{-4}	2.226×10^{-4}
Caso H-2 ϵ_3	1.000	47277	1851	8.493×10^{-5}	3.247×10^{-4}

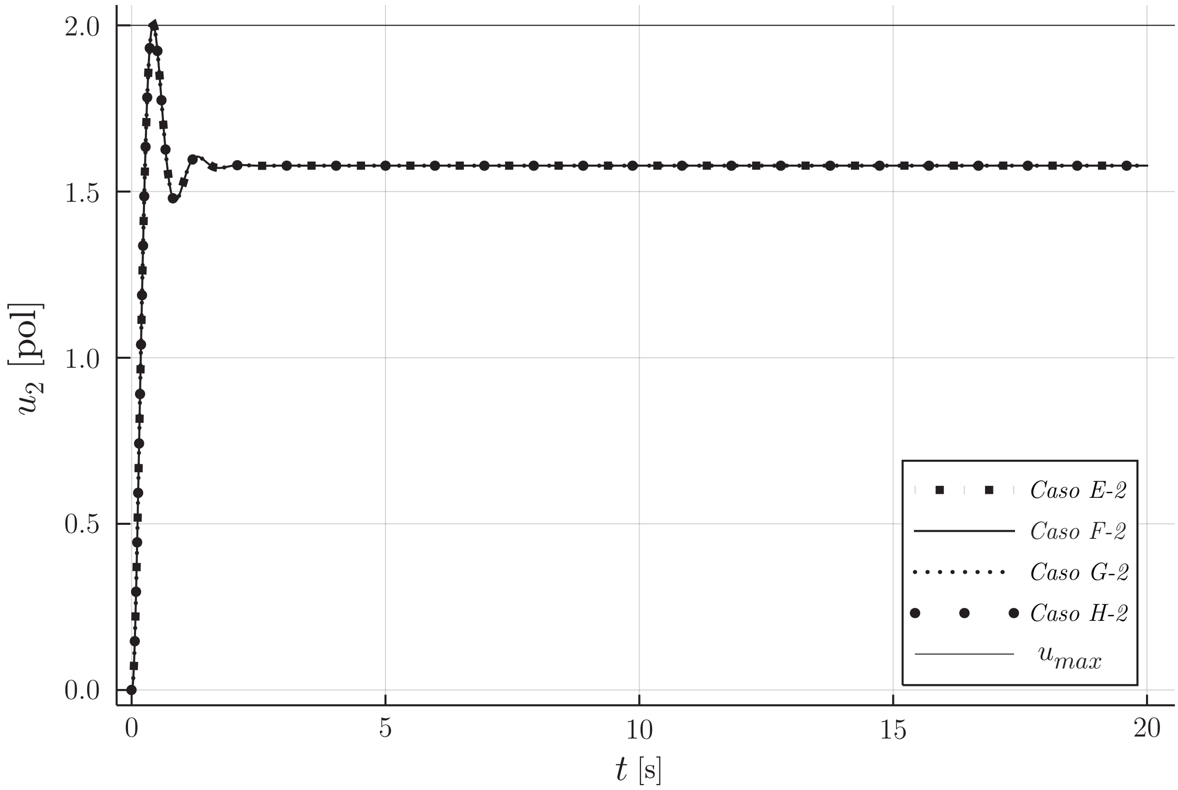
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação aos casos que aplicam o operador $\langle \bullet \rangle_\epsilon$ $(F, G$ e $H)$ e observando cada restrição separadamente, verifica-se que os tempos totais de otimização foram muito parecidos entre si. Contudo, diferentemente do que se esperava, o problema resolvido para o menor parâmetro de relaxação, $\epsilon_3 = 1\times10^{-20}$, foi otimizado no menor tempo. Isso só foi possível, pois menos acessos à função objetivo e ao gradiente foram realizados como resultado de sua convergência precoce, isto é, em menos iterações externas.

Seguindo o mesmo princípio aplicado na seção anterior, na Figura 10 são apresentados os gráficos do deslocamento em função do tempo no nó (1), grau de liberdade da aplicação das forças, para os casos *E-2* ao *H-2* da resposta subamortecida.

Analisando os gráficos como um todo, essa resposta praticamente idêntica do deslocamento já era esperada, uma vez que as topologias resultantes da otimização nos casos testados ficaram muito parecidas. Portanto, o efeito conservativo causado pela maior relaxação utilizada, $\epsilon_1 = 1\times10^{-3}$, é inexpressivo.

Figura 10 – Deslocamento no nó (1), grau de liberdade da aplicação das forças, em diferentes casos do problema subamortecido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3 PRINCIPAIS CONCLUSÕES

De um modo geral, ambas as formulações cumprem com os objetivos da otimização estrutural para todos os casos estudados, ou seja, o volume é minimizado e as restrições são satisfeitas. Considerando o problema da treliça de dez barras e os casos que podem ser comparados com a literatura, observa-se que a resposta que alia exatidão e eficiência computacional foi obtida considerando o parâmetro de relaxação do operador $\epsilon_2 = 1{\times}10^{-4}$.

Embora as respostas obtidas para a formulação que considera os multiplicadores de Lagrange como função do tempo (equação (116)) sejam indubitavelmente as mais acuradas, há uma enorme perda de performance associada ao aumento do número de restrições, ou seja, quando são consideradas as restrições de deslocamento nodal e de tensão local.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizou-se a implementação de um programa para otimização estrutural, considerando carregamentos transientes e restrições de tensão local e deslocamento nodal para elementos de barra. Embora todas deduções necessárias e a implementação do problema já tenham sido realizadas aplicando também elementos finitos 2D isoparamétricos, até o presente momento não foi possível obter resultados em um tempo satisfatório, haja vista que a análise dinâmica de tal estrutura é muito custosa computacionalmente.

A principal característica deste problema de otimização topológica transiente, isto é, a vasta quantidade de restrições, fez com que o uso da função Lagrangiano Aumentado (LA) tenha se mostrado a escolha mais adequada para a resolução deste problema. A função LA tem como principal objetivo transformar problemas de otimização com restrição em um problema irrestrito, para tanto a função objetivo é somada a um funcional integral que representa um somatório dos multiplicadores de Lagrange, juntamente com as restrições multiplicados a um parâmetro de penalização.

Observam-se duas maneiras de descrever esse funcional integral na literatura, uma utilizando-se dos multiplicadores de Lagrange como função do tempo somado às restrições que também dependem do tempo e outra utiliza apenas um vetor de multiplicadores de Lagrange somado a um funcional equivalente, que representa as restrições integradas no tempo. A este funcional equivalente foi proposta uma relaxação com o propósito de suprimir a descontinuidade do operador original.

A implementação do algoritmo de otimização estrutural já representa, por si só, o cumprimento satisfatório do objetivo geral deste trabalho, pois realizou-se todo o levantamento bibliográfico que servirá como base para qualquer trabalho futuro na área. As equações, tanto das funções LA, quanto suas respectivas análises de sensibilidade, significam um avanço efetivo para o grupo de pesquisa e o modo como foi realizado nas seções 3.6 e 3.9 proporciona que qualquer tipo de função objetivo e restrição dependente no tempo sejam aplicados.

A validação dos códigos propostos foram realizadas mediante comparação de dois problemas de otimização estrutural encontrados na literatura, a treliça de três barras e a treliça de dez barras. Apesar dos problemas serem originalmente otimizados para carregamentos estáticos, definiram-se as propriedades dinâmicas tal que os resultados obtidos pelos algoritmos pudessem ser confrontados com os valores da literatura. Ambas as funções LA apresentaram suas estruturas otimizadas muito semelhantes às da literatura, sendo que para a metodologia que utilizou os multiplicadores de Lagrange como função do tempo, a quantidade de restrições foi identificada como um fator atenuante de sua eficiência e no método que aplicou a relaxação do funcional equivalente, como já se esperava, ao aumentar o parâmetro de relaxação, mais robusta a estrutura final se tornou.

Os seguintes itens foram identificados como pontos cruciais para melhorar o desenvolvimento do programa computacional:

- Aprofundar os estudos a respeito do código utilizado para resolução das equações diferenciais;
- Aplicar alguma técnica para tornar as análises transientes mais rápidas.

Com isso, os trabalhos futuros podem seguir uma linha de continuação do assunto principal abordado, com foco na obtenção de uma metodologia capaz de melhorar o tempo de cada análise transiente e, deste modo, concluir o algoritmo para problemas de elasticidade 2D.

REFERÊNCIAS

1 ALAVI, Arsalan; AHMADI-NEDUSHAN, Behrouz; BONDARABADI, Hosseinali Rahimi. Topology optimization of structures under transient loads. **Int. J. Optim. Civil Eng.**, v. 1, n. 1, p. 155–166, 2011. eprint: `http://ijoce.iust.ac.ir/article-1-13-en.pdf`. Disponível em: <`http://ijoce.iust.ac.ir/files/site1/user_files_5jkw45/admin-A-10-1-10-0cb5d8a.pdf`>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

2 ALLAHDADIAN, Saeid; BOROOMAND, Bijan. Design and retrofitting of structures under transient dynamic loads by a topology optimization scheme. In: 3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON SEISMIC RETROFITTING, 20–22 out. 2010, p. 1–9. Disponível em: <`https://en.civilica.com/Paper-ICCT03-ICCT03_058.html`>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20.

3 ARMIJO, Larry. Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. **Pacific Journal of Mathematics**, Mathematical Sciences Publishers, v. 16, n. 1, p. 1–3, jan. 1966. DOI: `10.2140/pjm.1966.16.1`. Disponível em: <`https://doi.org/10.2140/pjm.1966.16.1`>. Acesso em: 23 jul. 2019. Citado na p. 31.

4 ARORA, Jasbir Singh. **Introduction to optimum design**. 2. ed. San Diego: Elsevier, 2004. p. 728. ISBN 978-0-12-064155-0. DOI: `10.1016/B978-0-12-064155-0.X5000-9`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1016/B978-0-12-064155-0.X5000-9`>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 27–31.

5 ARORA, Jasbir Singh; CHAHANDE, Aunshumali I.; PAENG, Jung Kook. Multiplier methods for engineering optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 32, n. 7, p. 1485–1525, nov. 1991. DOI: `10.1002/nme.1620320706`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1002/nme.1620320706`>. Acesso em: 8 jul. 2019. Citado nas pp. 13, 32, 33, 49, 50.

6 ARORA, Jasbir Singh; HAUG, Edward J. Methods of design sensitivity analysis in structural optimization. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 17, n. 9, p. 970–974, set. 1979. DOI: `10.2514/3.61260`. Disponível em: <`https://doi.org/10.2514/3.61260`>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado nas pp. 32, 34.

7 ASSIS PEREIRA, Alexandre de. **On the influence of stress constraint and filtering radius on the design of hinge-free compliant mechanism**. 2017. 84 f. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: <`http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000053/00005394.pdf`>. Acesso em: 27 jun. 2019. Citado nas pp. 20, 21.

8 BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. 2. ed. Watertown, MA: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 2014. ISBN 978-0-9790049-5-7. Citado nas pp. 22, 23, 25.

9 BEHROU, Reza; GUEST, James K. Topology optimization for transient response of structures subjected to dynamic loads. In: 18TH AIAA/ISSMO MULTIDISCIPLINARY ANALYSIS AND OPTIMIZATION CONFERENCE, 5–9 jun. 2017. DOI: 10.2514/6.2017-3657. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/6.2017-3657>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado nas pp. 13, 18–20.

10 BELEGUNDU, Ashok D.; ARORA, Jasbir Singh. Potential of Transformation Methods in Optimal Design. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 19, n. 10, p. 1372–1374, out. 1981. DOI: 10.2514/3.60071. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.60071>. Acesso em: 10 nov. 2020. Citado na p. 13.

11 BELEGUNDU, Ashok D.; ARORA, Jasbir Singh. A Computational Study of Transformation Methods for Optimal Design. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 22, n. 4, p. 535–542, abr. 1984. DOI: 10.2514/3.48476. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.48476>. Acesso em: 11 mar. 2020. Citado na p. 13.

12 BENDSØE, Martin Philip. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 1, n. 4, p. 193–202, dez. 1989. DOI: 10.1007/bf01650949. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf01650949>. Acesso em: 1 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 41.

13 BENDSØE, Martin Philip; KIKUCHI, Noboru. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 71, n. 2, p. 197–224, nov. 1988. DOI: 10.1016/0045-7825(88)90086-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2>. Acesso em: 30 mai. 2019. Citado na p. 12.

14 BENDSØE, Martin Philip; SIGMUND, Ole. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)**, Springer Science and Business Media LLC, v. 69, n. 9-10, p. 635–654, nov. 1999. DOI: 10.1007/s004190050248. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s004190050248>. Acesso em: 1 jun. 2019. Citado na p. 12.

15 BENDSØE, Martin Philip; SIGMUND, Ole. **Topology optimization**: Theory, methods, and applications. 2. ed. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2004. DOI: 10.1007/978-3-662-05086-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6>. Acesso em: 29 mai. 2019. Citado nas pp. 11, 13, 41, 77, 78.

16 BERTSEKAS, Dimitri P. On the Goldstein-Levitin-Polyak gradient projection method. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 21, n. 2, p. 174–184, abr. 1976. DOI: 10.1109/tac.1976.1101194. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/tac.1976.1101194>. Acesso em: 23 jul. 2019. Citado na p. 32.

17 BEZANSON, Jeff *et al.* Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing. **SIAM Review**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 59, n. 1, p. 65–98, jan. 2017. DOI: 10.1137/141000671. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/141000671>. Acesso em: 10 jul. 2019. Citado na p. 25.

18 BIRGIN, Ernesto G; MARTÍNEZ, José Mario. Chapter 4: Model Augmented Lagrangian Algorithm. In: PRACTICAL Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, mai. 2014. cap. 4, p. 31–39. DOI: 10.1137/1.9781611973365.ch4. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611973365.ch4>. Citado nas pp. 13, 34.

19 BIRGIN, Ernesto G; MARTÍNEZ, José Mario. Chapter 8: Solving Unconstrained Subproblems. In: PRACTICAL Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, mai. 2014. cap. 8, p. 73–95. DOI: 10.1137/1.9781611973365.ch8. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1.9781611973365.ch8>. Citado na p. 33.

20 BOROOMAND, Bijan; BAREKATEIN, A. R. On topology optimization of linear and nonlinear plate problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 39, n. 1, p. 17–27, out. 2008. DOI: 10.1007/s00158-008-0311-y. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-008-0311-y>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado na p. 12.

21 BRUGGI, Matteo. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 36, n. 2, p. 125–141, jan. 2008. DOI: 10.1007/s00158-007-0203-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-007-0203-6>. Acesso em: 14 jan. 2020. Citado nas pp. 44, 52–54.

22 BRUNS, Tyler Eilert; TORTORELLI, Daniel A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 190, n. 26-27, p. 3443–3459, mar. 2001. DOI: 10.1016/s0045-7825(00)00278-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/s0045-7825(00)00278-4>. Acesso em: 12 fev. 2020. Citado na p. 79.

23 CHAHANDE, Aunshumali I.; ARORA, Jasbir Singh. Development of a multiplier method for dynamic response optimization problems. **Structural Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 6, n. 2, p. 69–78, jun. 1993. DOI: 10.1007/bf01743338. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf01743338>. Citado nas pp. 13, 50.

24 CHAHANDE, Aunshumali I.; ARORA, Jasbir Singh. Optimization of large structures subjected to dynamic loads with the multiplier method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 37, n. 3, p. 413–430, fev. 1994. DOI: 10.1002/nme.1620370304. Disponível em:

<https://doi.org/10.1002/nme.1620370304>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 13, 25, 33, 50.

25 CHENG, Geng Dong; GUO, Xu. ε-relaxed approach in structural topology optimization. **Structural Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 4, p. 258–266, jun. 1997. DOI: 10.1007/bf01197454. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf01197454>. Acesso em: 27 jun. 2019. Citado na p. 44.

26 CHOI, Woo-Seok; PARK, Gyung-Jin. Structural optimization using equivalent static loads at all time intervals. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 191, n. 19-20, p. 2105–2122, mar. 2002. DOI: 10.1016/s0045-7825(01)00373-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/s0045-7825(01)00373-5>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado na p. 14.

27 CHRISTOFF, Bruno Guilherme. **Analysis and optimization of three dimensional microstructures**. 2016. 204 f. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: <http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000067/00006799.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2019. Citado nas pp. 20, 21.

28 COOK, Robert Davis *et al.* **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. p. 736. ISBN 978-0-471-35605-9. Citado na p. 42.

29 DEATON, Joshua D.; GRANDHI, Ramana V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 49, n. 1, p. 1–38, jul. 2013. DOI: 10.1007/s00158-013-0956-z. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0956-z>. Acesso em: 1 jun. 2019. Citado na p. 13.

30 DU, Jianbin; OLHOFF, Niels. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 34, n. 2, p. 91–110, mai. 2007. DOI: 10.1007/s00158-007-0101-y. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-007-0101-y>. Acesso em: 13 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20, 42.

31 DUYSINX, Pierre; BENDSØE, Martin Philip. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 43, n. 8, p. 1453–1478, dez. 1998. DOI: 10.1002/(sici)1097-0207(19981230)43:8<1453::aid-nme480>3.0.co;2-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19981230)43:8%3C1453::aid-nme480%3E3.0.co;2-2>. Acesso em: 12 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 44, 46.

32 ESCHENAUER, Hans A.; OLHOFF, Niels. Topology optimization of continuum structures: A review. **Applied Mechanics Reviews**, ASME International, v. 54, n. 4, p. 331, 2001. DOI: 10.1115/1.1388075. Disponível em:

<https://doi.org/10.1115/1.1388075>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado nas pp. 17, 41.

33 FLEURY, Claude; BRAIBANT, Vincent. Structural optimization: A new dual method using mixed variables. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 23, n. 3, p. 409–428, mar. 1986. DOI: 10.1002/nme.1620230307. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620230307>. Citado na p. 14.

34 FLEURY, Claude; ZHANG, Wei-Hong. Selection of appropriate approximation schemes in multi-disciplinary engineering optimization. **Advances in Engineering Software**, Elsevier BV, v. 31, n. 6, p. 385–389, jun. 2000. DOI: 10.1016/s0965-9978(00)00006-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/s0965-9978(00)00006-5>. Citado na p. 14.

35 FOX, Robin Lane; KAPOOR, Mahendra P. Structural optimization in the dynamics response regime: A computational approach. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 8, n. 10, p. 1798–1804, out. 1970. DOI: 10.2514/3.5993. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.5993>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado na p. 13.

36 FRANCO, Maisa Damazio. **Otimização topológica aplicada ao projeto de microestruturas osteocompatíveis**. 2015. 112 f. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: <http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000067/000067a5.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2019. Citado nas pp. 20, 21.

37 GRIFFITH, R. E.; STEWART, R. A. A Nonlinear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing Systems. **Management Science**, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), v. 7, n. 4, p. 379–392, jul. 1961. DOI: 10.1287/mnsc.7.4.379. Disponível em: <https://doi.org/10.1287/mnsc.7.4.379>. Citado na p. 14.

38 HAFTKA, Raphael T.; GÜRDAL, Zafer. **Elements of structural optimization**. 3. ed. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992. v. 11. (Solid Mechanics and Its Applications). ISBN 978-94-011-2550-5. DOI: 10.1007/978-94-011-2550-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-2550-5>. Acesso em: 6 jun. 2019. Citado nas pp. 14, 32, 36.

39 HAUG, Edward J.; ARORA, Jasbir Singh. **Applied optimal design**: mechanical and structural systems. New York: John Wiley & Sons, 1979. p. 506. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471041702. Citado nas pp. 14, 36, 37, 52, 57, 58.

40 HINDMARSH, Alan C. *et al.* SUNDIALS: Suite of Nonlinear and Differential/Algebraic Equation Solvers. **ACM Trans. Math. Softw.**, ACM, New York, NY, USA, v. 31, n. 3, p. 363–396, set. 2005. ISSN 0098-3500. DOI: 10.1145/1089014.1089020. Disponível em: <https://computation.llnl.gov/projects/sundials/toms_sundials.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2019. Citado na p. 26.

41 HSIEH, Ching Chieh; ARORA, Jasbir Singh. Design sensitivity analysis and optimization of dynamic response. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 43, n. 2, p. 195–219, abr. 1984. DOI: 10.1016/0045-7825(84)90005-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(84)90005-7>. Acesso em: 5 mar. 2020. Citado nas pp. 14, 37.

42 HSIEH, Ching Chieh; ARORA, Jasbir Singh. A hybrid formulation for treatment of point-wise state variable constraints in dynamic response optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 48, n. 2, p. 171–189, mar. 1985. DOI: 10.1016/0045-7825(85)90103-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90103-3>. Acesso em: 8 jun. 2019. Citado nas pp. 37, 38.

43 JANG, Hwan-Hak *et al.* Dynamic response topology optimization in the time domain using equivalent static loads. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 50, n. 1, p. 226–234, jan. 2012. DOI: 10.2514/1.j051256. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/1.j051256>. Acesso em: 29 mai. 2019. Citado nas pp. 14, 18–20.

44 JENSEN, Jakob S. Topology optimization of dynamics problems with Padé approximants. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 72, n. 13, p. 1605–1630, 2007. DOI: 10.1002/nme.2065. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.2065>. Acesso em: 14 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

45 JOG, Chandrashekhar S. Topology design of structures subjected to periodic loading. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 253, n. 3, p. 687–709, jun. 2002. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4075. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4075>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

46 JUNG, Jaesoon; HYUN, Jaeyub *et al.* An efficient design sensitivity analysis using element energies for topology optimization of a frequency response problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 296, p. 196–210, nov. 2015. DOI: 10.1016/j.cma.2015.06.019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.06.019>. Acesso em: 12 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20.

47 JUNG, Ui-Jin; PARK, Gyung-Jin. A new method for simultaneous optimum design of structural and control systems. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 160, p. 90–99, nov. 2015. DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.08.006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.08.006>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado na p. 14.

48 KANG, Byung-Soo; CHOI, Woo-Seok; PARK, Gyung-Jin. Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 79, n. 2, p. 145–154, jan. 2001. DOI: 10.1016/s0045-7949(00)00127-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/s0045-7949(00)00127-9>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado nas pp. 13, 14.

49 KANG, Byung-Soo; PARK, Gyung-Jin; ARORA, Jasbir Singh. A review of optimization of structures subjected to transient loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 31, n. 2, p. 81–95, jan. 2006. DOI: 10.1007/s00158-005-0575-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-005-0575-4>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado nas pp. 13, 14, 16, 17.

50 KAREV, Artem *et al.* Comparison of different formulations of a front hood free sizing optimization problem using the ESL-method. In: SCHUMACHER, Axel *et al.* (Ed.). **Advances in structural and multidisciplinary optimization**. Cham: Springer International Publishing, dez. 2017. p. 933–951. DOI: 10.1007/978-3-319-67988-4_71. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-67988-4_71>. Acesso em: 4 jun. 2019. Citado na p. 14.

51 LEE, Hyun-Ah; PARK, Gyung-Jin. Topology optimization for structures with nonlinear behavior using the equivalent static loads method. **Journal of Mechanical Design**, ASME International, v. 134, n. 3, p. 031004, fev. 2012. DOI: 10.1115/1.4005600. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4005600>. Acesso em: 5 jun. 2019. Citado nas pp. 14, 18–20.

52 LEE, Hyun-Ah; PARK, Gyung-Jin. Nonlinear dynamic response topology optimization using the equivalent static loads method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 283, p. 956–970, jan. 2015. DOI: 10.1016/j.cma.2014.10.015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.10.015>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado nas pp. 14, 18–20.

53 LEWIŃSKI, Tomasz; SOKÓŁ, Tomasz; GRACZYKOWSKI, Cezary. **Michell structures**. Cham: Springer International Publishing, 2019. ISBN 978-3-319-95180-5. DOI: 10.1007/978-3-319-95180-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-95180-5>. Acesso em: 30 mai. 2019. Citado na p. 11.

54 LIU, Baoshou; HUANG, Xiaodong *et al.* Topological design of structures under dynamic periodic loads. **Engineering Structures**, Elsevier BV, v. 142, p. 128–136, jul. 2017. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.03.067. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.03.067>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

55 LIU, Hu; ZHANG, Weihong; GAO, Tong. A comparative study of dynamic analysis methods for structural topology optimization under harmonic force excitations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 51, n. 6, p. 1321–1333, jan. 2015. DOI: 10.1007/s00158-014-1218-4. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1218-4>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

56 LUTES, Loren D.; SARKANI, Shahram. Matrix analysis of linear systems. In: RANDOM vibrations: Analysis of structural and mechanical systems. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2004. cap. 8, p. 307–350. DOI: 10.1016/b978-0-7506-7765-3.x5000-2. Disponível em:

<https://doi.org/10.1016/b978-0-7506-7765-3.x5000-2>. Acesso em: 22 jun. 2019. Citado na p. 25.

57 MA, Zheng-Dong; KIKUCHI, Noboru; CHENG, Hsien-Chie. Topological design for vibrating structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 121, n. 1-4, p. 259–280, mar. 1995. DOI: 10.1016/0045-7825(94)00714-x. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)00714-x>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

58 MENEGHELLI, Luís Renato. **Otimização topológica de mecanismos flexíveis com restrição de tensão**. 2013. 84 f. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: <http://tede.udesc.br/bitstream/tede/1854/1/Luis%20Reanto%20Meneghelli.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2019. Citado nas pp. 20, 21.

59 MIN, Seungjae *et al.* Optimal topology design of structures under dynamic loads. **Structural Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 2-3, p. 208–218, abr. 1999. DOI: 10.1007/bf01195945. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf01195945>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

60 MONTERO, Diego Schmitt. **Topology optimization of continuum structures subjected to harmonic loads with local stress constraints**. 2019. 129 f. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: <http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000067/00006744.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2019. Citado nas pp. 20, 21, 31.

61 NISHIWAKI, Shinji *et al.* Topological design considering flexibility under periodic loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 19, n. 1, p. 4–16, mar. 2000. DOI: 10.1007/s001580050082. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s001580050082>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

62 NIU, Bin *et al.* On objective functions of minimizing the vibration response of continuum structures subjected to external harmonic excitation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Nature, v. 57, n. 6, p. 2291–2307, dez. 2017. DOI: 10.1007/s00158-017-1859-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1859-1>. Acesso em: 17 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20.

63 OLHOFF, Niels; DU, Jianbin. Topological design of continuum structures subjected to forced vibration. In: 6TH WORLD CONGRESSES OF STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION, 30 mai.–3 jun. 2005. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/d2e3/4a082c181184b97dabf0355f847619dd3432.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20.

64 PAENG, Jung Kook; ARORA, Jasbir Singh. Dynamic Response Optimization of Mechanical Systems With Multiplier Methods. **Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design**, ASME International, v. 111, n. 1, p. 73–80, mar. 1989. DOI: `10.1115/1.3258974`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1115/1.3258974`>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 13, 32, 33, 50.

65 PARK, Gyung-Jin. Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 43, n. 3, p. 319–337, jul. 2010. DOI: `10.1007/s00158-010-0530-x`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1007/s00158-010-0530-x`>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado na p. 14.

66 PARK, Gyung-Jin; KANG, Byung-Soo. Validation of a structural optimization algorithm transforming dynamic loads into equivalent static loads. **Journal of Optimization Theory and Applications**, Springer Nature, v. 118, n. 1, p. 191–200, jul. 2003. DOI: `10.1023/a:1024799727258`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1023/a:1024799727258`>. Acesso em: 5 jun. 2019. Citado nas pp. 13, 14.

67 PEDERSEN, Niels Leergaard. Maximization of eigenvalues using topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 20, n. 1, p. 2–11, ago. 2000. DOI: `10.1007/s001580050130`. Disponível em: <`2019-12-05`>. Citado na p. 42.

68 PIERSON, Bion L. A survey of optimal structural design under dynamic constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 4, n. 4, p. 491–499, jul. 1972. DOI: `10.1002/nme.1620040404`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1002/nme.1620040404`>. Acesso em: 10 jun. 2019. Citado na p. 16.

69 RACKAUCKAS, Christopher; NIE, Qing. Differentialequations.jl: A performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia. **Journal of Open Research Software**, Ubiquity Press, v. 5, n. 1, 2017. 15. DOI: `10.5334/jors.151`. Disponível em: <`http://doi.org/10.5334/jors.151`>. Acesso em: 10 jul. 2019. Citado na p. 25.

70 REDDY, Junuthula Narasimha. CONSERVATION AND BALANCE LAWS. In: AN Introduction to Continuum Mechanics, Second Edition. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. p. 181–220. DOI: `10.1017/cbo9781139178952.009`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1017/cbo9781139178952.009`>. Acesso em: 4 nov. 2020. Citado na p. 22.

71 REYNOLDS, Daniel R. *et al.* **User Documentation for ARKode v4.5.0 (SUNDIALS v5.5.0)**. Dallas e Livermore: Southern Methodist University e Lawrence Livermore National Laboratory, 15 dez. 2020. LLNL-SM-668082. Disponível em: <`https://computing.llnl.gov/projects/sundials/sundials-software`>. Acesso em: 21 dez. 2020. Citado na p. 26.

72 ROZVANY, George I. N. Some shortcomings in Michell's truss theory. **Structural Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 12, n. 4, p. 244–250, dez. 1996. DOI: 10.1007/bf01197364. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf01197364>. Acesso em: 30 mai. 2019. Citado na p. 11.

73 ROZVANY, George I. N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 21, n. 2, p. 90–108, abr. 2001. DOI: 10.1007/s001580050174. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s001580050174>. Acesso em: 1 jun. 2019. Citado na p. 12.

74 ROZVANY, George I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 37, n. 3, p. 217–237, fev. 2008. DOI: 10.1007/s00158-007-0217-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-007-0217-0>. Acesso em: 1 jun. 2019. Citado nas pp. 11–13.

75 ROZVANY, George I. N. A brief review of numerical methods of structural topology optimization. In: **Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics**. Edição: George I. N. Rozvany e Tomasz Lewiński. Vienna: Springer Vienna, 2014. v. 549.CISM International Centre for Mechanical Sciences, p. 71–86. ISBN 978-3-7091-1643-2. DOI: 10.1007/978-3-7091-1643-2_5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1643-2_5>. Acesso em: 4 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 41.

76 SCHITTKOWSKI, Klaus. On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented lagrangian line search function. **Mathematische Operationsforschung und Statistik. Series Optimization**, Informa UK Limited, v. 14, n. 2, p. 197–216, jan. 1983. DOI: 10.1080/02331938308842847. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/02331938308842847>. Citado na p. 14.

77 SHANTARAM, D.; OWEN, D. R. J.; ZIENKIEWICZ, O. C. Dynamic transient behaviour of two- and three-dimensional structures including plasticity, large deformation effects and fluid interaction. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, John Wiley & Sons, v. 4, n. 6, p. 561–578, out. 1976. DOI: 10.1002/eqe.4290040605. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/eqe.4290040605>. Acesso em: 9 dez. 2019. Citado na p. 42.

78 SHERIF, Karim *et al.* Efficient topology optimization of large dynamic finite element systems using fatigue. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 48, n. 7, p. 1339–1347, jul. 2010. DOI: 10.2514/1.45196. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/1.45196>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 14, 18–20.

79 SIGMUND, Ole. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. Edição: John Michael Tutill Thompson. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 358, n. 1765, p. 211–227, jan. 2000. DOI: 10.1098/rsta.2000.0528. Disponível em:

<https://doi.org/10.1098/rsta.2000.0528>. Acesso em: 30 mai. 2019. Citado nas pp. 11, 12.

80 SIGMUND, Ole. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 33, n. 4, p. 401–424, abr. 2007. ISSN 1615-1488. DOI: 10.1007/s00158-006-0087-x. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>. Acesso em: 17 dez. 2019. Citado nas pp. 79, 80.

81 SIGMUND, Ole; PETERSSON, Joakim. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 16, n. 1, p. 68–75, ago. 1998. DOI: 10.1007/bf01214002. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf01214002>. Acesso em: 3 jun. 2019. Citado nas pp. 13, 77.

82 SILVA, Gustavo Assis da. **Otimização topológica de estruturas contínuas considerando incertezas**. 2016. 143 f. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville. Disponível em: <http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000067/000067a2.pdf>. Acesso em: 27 jun. 2019. Citado nas pp. 20, 21.

83 SILVA, Olavo M.; NEVES, Miguel M.; LENZI, Arcanjo. A critical analysis of using the dynamic compliance as objective function in topology optimization of one-material structures considering steady-state forced vibration problems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 444, p. 1–20, mar. 2019. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.12.030. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.12.030>. Acesso em: 12 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20.

84 STOLPE, Mathias; SVANBERG, Krister. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 22, n. 2, p.116–124, set. 2001. DOI: 10.1007/s001580100129. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s001580100129>. Acesso em: 18 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 41.

85 SVANBERG, Krister. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 24, n. 2, p. 359–373, fev. 1987. DOI: 10.1002/nme.1620240207. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620240207>. Citado na p. 14.

86 TCHERNIAK, Dmitri. Topology optimization of resonating structures using SIMP method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 54, n. 11, p. 1605–1622, 2002. DOI: 10.1002/nme.484. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.484>. Acesso em: 10 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20.

87 THORNTON, William A.; SCHMIT JR., Lucien A. **The structural synthesis of an ablating thermostructural panel**. Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration (NASA), 1 dez. 1968. Disponível em: <`http://hdl.handle.net/2060/19690006782`>. Acesso em: 10 jun. 2019. Citado na p. 16.

88 VENINI, Paolo. Dynamic compliance optimization: Time vs frequency domain strategies. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 177, p. 12–22, dez. 2016. DOI: `10.1016/j.compstruc.2016.07.012`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.07.012`>. Acesso em: 12 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20, 25.

89 WANG, Fengwen; LAZAROV, Boyan Stefanov; SIGMUND, Ole. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 43, n. 6, p. 767–784, jun. 2011. ISSN 1615-1488. DOI: `10.1007/s00158-010-0602-y`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1007/s00158-010-0602-y`>. Acesso em: 17 dez. 2019. Citado nas pp. 79, 80.

90 WANG, Qian; ARORA, Jasbir Singh. Alternative Formulations for Transient Dynamic Response Optimization. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 43, n. 10, p. 2188–2195, out. 2005. DOI: `10.2514/1.12045`. Disponível em: <`https://doi.org/10.2514/1.12045`>. Acesso em: 28 mai. 2019. Citado na p. 25.

91 XIE, Yi Min; STEVEN, Grant P. **Evolutionary Structural Optimization**. London: Springer London, 1997. p. 12–29. ISBN 978-1-4471-1250-1. DOI: `10.1007/978-1-4471-0985-3`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0985-3`>. Acesso em: 13 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 41.

92 YANG, Xiongwei; LI, Yueming. Topology optimization to minimize the dynamic compliance of a bi-material plate in a thermal environment. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 47, n. 3, p. 399–408, ago. 2012. DOI: `10.1007/s00158-012-0831-3`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1007/s00158-012-0831-3`>. Acesso em: 13 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 18–20.

93 YANG, Xiongwei; LI, Yueming. Structural topology optimization on dynamic compliance at resonance frequency in thermal environments. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 49, n. 1, p. 81–91, jul. 2013. DOI: `10.1007/s00158-013-0961-2`. Disponível em: <`https://doi.org/10.1007/s00158-013-0961-2`>. Acesso em: 10 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

94 YI, Sang-Il; LEE, Hyun-Ah; PARK, Gyung-Jin. Optimization of a structure with contact conditions using equivalent loads. **Journal of Mechanical Science and Technology**, Springer Science and Business Media LLC, v. 25, n. 3, p. 773–782, mar. 2011. DOI: `10.1007/s12206-011-0129-1`. Disponível em:

<https://doi.org/10.1007/s12206-011-0129-1>. Acesso em: 11 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

95 YUN, Kyeong-Soo; YOUN, Sung-Kie. Topology optimization of viscoelastic damping layers for attenuating transient response of shell structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier BV, v. 141, p. 154–165, mar. 2018. DOI: 10.1016/j.finel.2017.12.003. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.12.003>. Acesso em: 12 jun. 2019. Citado na p. 12.

96 ZHAO, Junpeng; WANG, Chunjie. Dynamic response topology optimization in the time domain using model reduction method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer Science and Business Media LLC, v. 53, n. 1, p. 101–114, jan. 2016. DOI: 10.1007/s00158-015-1328-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1328-7>. Acesso em: 17 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

97 ZHAO, Junpeng; WANG, Chunjie. Topology optimization for minimizing the maximum dynamic response in the time domain using aggregation functional method. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 190, p. 41–60, out. 2017. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.05.002. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.05.002>. Acesso em: 12 jun. 2019. Citado nas pp. 18–20.

98 ZHU, J.H.; BECKERS, P.; ZHANG, W.H. On the multi-component layout design with inertial force. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier BV, v. 234, n. 7, p. 2222–2230, ago. 2010. DOI: 10.1016/j.cam.2009.08.073. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.073>. Acesso em: 14 jun. 2019. Citado na p. 12.

99 ZHU, Jihong; ZHANG, Weihong; BECKERS, Pierre. Integrated layout design of multi-component system. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, v. 78, n. 6, p. 631–651, mai. 2009. DOI: 10.1002/nme.2499. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.2499>. Acesso em: 14 jun. 2019. Citado nas pp. 12, 41.

100 ZHU, Mu; YANG, Yang *et al.* Topology optimization for linear stationary stochastic dynamics: Applications to frame structures. **Structural Safety**, Elsevier BV, v. 67, p. 116–131, jul. 2017. DOI: 10.1016/j.strusafe.2017.04.004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2017.04.004>. Acesso em: 29 mai. 2019. Citado nas pp. 12, 14, 18–20, 25.

APÊNDICE A – DIFICULDADES ASSOCIADAS À OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE MEIOS CONTÍNUOS

APÊNDICE A.1 – DEPENDÊNCIA DA MALHA

A dependência de malha refere-se ao aparecimento de diferentes soluções à medida em que se refina a malha de elementos finitos que modela a estrutura (BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 28). A razão pelo qual as abordagens discretizadas carecem de solução, segundo Bendsøe e Sigmund (2004, p. 29–30), dá-se pelo fato de que a introdução de um maior número de furos na estrutura sem que haja a modificação de seu volume geralmente a tornará mais eficiente, sendo que o limite desse processo acarreta em microestruturas ótimas que na maioria das vezes não são isotrópicas.

A abordagem para se obter soluções 0–1 independentes de malha, isto é, sem a formação de estruturas cada vez mais finas a medida que se aumentam a quantidade de elementos, baseia-se na redução do espaço de solução admissível pelo uso de restrições globais ou locais nas variáveis de projeto. Quatro técnicas são apresentadas em Sigmund e Petersson (1998, p. 72–74):

- *Controle de perímetro*, que restringe o número de furos da estrutura empregando uma restrição a soma dos comprimentos ou áreas (BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 31) de todo seu contorno;

- *Restrição global de gradiente*, de acordo com Sigmund e Petersson (1998, p. 73) representa a adição de uma norma no espaço de Sobolev como restrição;

- *Restrição de gradiente local*, representa a introdução de uma restrições pontuais na sensibilidade da densidade local (BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 33);

- *Filtros de gradiente*, segundo Sigmund e Petersson (1998, p. 73) e Bendsøe e Sigmund (2004, p. 35) os filtros utilizados para tratar a dependência de malha, modificam a sensibilidade de um elemento baseado em uma média ponderada das sensibilidades dos elementos vizinhos.

APÊNDICE A.2 – INSTABILIDADE DE TABULEIRO

Este problema numérico está relacionado (SIGMUND; PETERSSON, 1998, p. 70) à formação de regiões da estrutura que alternam a presença e a ausência de elementos, em uma aparência que remete ao tabuleiro de damas. Bendsøe e Sigmund (2004, p. 40) aponta o fato de que o *layout* em aparência de tabuleiro possui uma rigidez artificialmente elevada ao utilizar-se de algumas discretizações específicas, tais como o elemento isoparamétrico de quatro nós. Um teste realizado em Bendsøe e Sigmund (2004, p. 41) demonstra o problema da instabilidade de tabuleiro em uma placa quadrada sujeita a um carregamento biaxial e fração volumétrica de 50%. Ao utilizar a potência do SIMP igual a 1 é obtido uma placa de densidade intermediária, ao utilizar a potência do SIMP igual a 3 é manifestada a instabilidade de tabuleiro.

Topologias livre de instabilidade de tabuleiro podem ser obtidas pelo uso de:

- *Elementos de alta ordem*, segundo Sigmund e Petersson (1998, p. 71), ao utilizar a discretização por SIMP, os elementos de 8 ou 9 nós podem ser usados com potências de penalização pequenas.

- *Restrição de monotonicidade*, outra técnica consiste na introdução de uma função positiva de restrição que possui valor nulo quando o projeto está livre de instabilidade de tabuleiro (BENDSØE; SIGMUND, 2004, p. 45–46).
- *Filtros*, conforme apresentado em Bendsøe e Sigmund (2004, p. 46), pode-se usar a filtragem apenas para tratar a instabilidade de tabuleiro ao ajustar seu raio para compreender os 8 nós vizinhos ao elemento.

APÊNDICE B – TÉCNICA DE REGULARIZAÇÃO

De modo a obter uma topologia que não sofra com dependência de malha e não apresente instabilidade de tabuleiro, uma técnica de regularização existente é formada pela aplicação do filtro de vizinhança em conjunto com a projeção por tangente hiperbólica. Tanto as definições dos métodos quanto suas respectivas análises de sensibilidades apresentadas a seguir já consideram a utilização dessas duas técnicas juntas.

APÊNDICE B.1 – FILTRO DE VIZINHANÇA

O filtro de vizinhança modifica a densidade de um elemento com base em uma função de densidades calculada a partir de uma vizinhança (SIGMUND, 2007, p. 406), isto é, o conjunto de elementos i próximos do elemento e segundo a condição

$$\mathrm{viz}_e = \{i : \|\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_e\| \leq r\} \tag{B.1}$$

onde $\mathbf{d}$ é a localização espacial central do elemento e r é o raio do filtro. Assim, a expressão do filtro básico de acordo com Bruns e Tortorelli (2001, p. 3448) e Sigmund (2007, p. 407) pode ser escrita como uma função peso,

$$\chi_e(\mathbf{x}) = \sum_{i \,\in\, \mathrm{viz}_e} \frac{x_i\, \omega_{ie}}{\omega_e} \tag{B.2}$$

com o peso ω_{ie} apresentado em (BRUNS; TORTORELLI, 2001, p. 3448) tal que

$$\omega_{ie} = 1 - \frac{||\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_e||}{r} \tag{B.3}$$

e ω_e definido como o somatório de todos os pesos da vizinhança do elemento e.

Portanto, pode-se representar este somatório por meio da aplicação de um operador linear $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{x}$, tal que

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{F}\,\mathbf{x}. \tag{B.4}$$

A correção das derivadas também pode ser escrita como uma operação linear, pois $\mathbf{F}$ não depende de $\mathbf{x}$. Assim,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}}\, \nabla f(\boldsymbol{\chi}) = \frac{\partial (\mathbf{F}\,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\, \nabla f(\boldsymbol{\chi}) = \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\, \nabla f(\boldsymbol{\chi}) \tag{B.5}$$

tomando cuidado em especial ao mapeamento transposto.

APÊNDICE B.2 – PROJEÇÃO POR TANGENTE HIPERBÓLICA

A projeção da variável de projeto, já filtrada, por tangente hiperbólica é expressa por

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{P}(\mathbf{F}\,\mathbf{x}) \tag{B.6}$$

com a função de projeção dada por (WANG; LAZAROV; SIGMUND, 2011, p. 770)

$$\tilde{\chi}_e(\boldsymbol{\chi}, \beta, \eta) = \frac{\tanh \beta(\chi_e - \eta) + \tanh \beta\, \eta}{\tanh \beta\, \eta + \tanh \beta(1 - \eta)} \tag{B.7}$$

onde β ajusta a severidade da projeção, η é responsável pelo *offset* da curva e $\boldsymbol{\chi}$ é a densidade filtrada. De acordo com Wang, Lazarov e Sigmund (2011, p. 770), para $\eta = 0$ tem-se um operador de dilatação, pois o valor da variável projetada assegura que a escala de comprimento mínima seja imposta na fase sólida e para $\eta = 1$ tem-se um operador de erosão, uma vez que o valor da variável projetada providencia a escala de comprimento mínima na fase vazia.

Assim, a análise da sensibilidade do operador da projeção com relação à $\mathbf{x}$ é obtida pela regra da cadeia, isto é,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \nabla f(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) = \mathbf{R}\,\mathbf{F}^{\mathsf{T}}\,\nabla f(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \tag{B.8}$$

onde $\mathbf{R}$ é uma matriz diagonal com

$$\mathrm{R}_{ee} = \frac{\operatorname{sech}\beta\,(\chi_e - \eta)}{\tanh\beta\,\eta + \tanh\beta(1-\eta)}. \tag{B.9}$$

Esta projeção pode assumir valores entre 0.0 e 1.0, por isso, deve-se aplicar uma correção às equações (82) e (83) tal que

$$\mathbf{K}_e = [\chi_{min} + (1 - \chi_{min})\,\chi_e]^{p_k}\ \mathbf{K}_e^0 \tag{B.10}$$

$$\mathbf{M}_e = [\chi_{min} + (1 - \chi_{min})\,\chi_e]^{p_m}\ \mathbf{M}_e^0 \tag{B.11}$$

onde $\chi_e \in [0, 1]$ e, assim, as análises de sensibilidade da rigidez e da massa assumem a forma

$$\frac{d\,\mathbf{K}}{d\chi_m} = p_k\,(1 - \chi_{min})\ [\chi_{min} + (1 - \chi_{min})\,\chi_e]^{p_k - 1}\ \mathbf{K}_m^0 \tag{B.12}$$

$$\frac{d\,\mathbf{M}}{d\chi_m} = p_m\,(1 - \chi_{min})\ [\chi_{min} + (1 - \chi_{min})\,\chi_e]^{p_m - 1}\ \mathbf{M}_m^0 \tag{B.13}$$

com o valor mínimo da variável de projeto fixo em $1{\times}10^{-3}$ e os expoentes tal como estipulado anteriormente (isto é, $p_k = 3$ e $p_m = 1$).

Vale destacar que, tanto o filtro de densidade quanto a projeção por tangente hiperbólica, preservam o volume, ou seja, o volume do material permanece o mesmo antes e depois da filtragem (SIGMUND, 2007, p. 407). De acordo com Sigmund (2007, p. 420), esta característica deve ser preferivelmente escolhida quando se utilizam regiões com material ou furos prescritos pois, “detalhes com características menores que a área de vizinhança do filtro podem aparecer nas bordas das regiões fixas”.

APÊNDICE B.3 – TRATAMENTO DOS VALORES FIXOS

É muito comum na otimização topológicas que algumas variáveis de projeto tenham valores máximos e mínimos pré-definidos, sendo assim, deve-se garantir que tais valores sejam mantidos fixos durante toda a otimização. Partindo da equação (B.4), define-se $\tilde{\mathbf{F}}$ zerando a linha correspondente ao índice do elemento fixo e mantendo sua diagonal igual a 1.0, isto é,

$$\boldsymbol{\chi} = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}. \tag{B.14}$$

Assim, χ_e é fixado automaticamente quando se fixa a variável matemática x_e.

Analisando a correção das derivadas dada pela equação (B.5), juntamente com a substituição do operador linear $\mathbf{F}$ por $\tilde{\mathbf{F}}$, tem-se

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{F}}^{\mathsf{T}} \nabla f(\boldsymbol{\chi}). \tag{B.15}$$

Pode-se notar que x_e só se manterá constante após a otimização se $\nabla f(x_e) = 0$. Isto pode ser obtido zerando esta componente após a aplicação da equação (B.15).

É importante salientar que, mesmo se $\nabla f(x_e) = 0$, após a correção da derivada realizada pela equação (B.15), ele pode vir a deixar de ser zero (isto é, $\nabla f(x_e) \neq 0$), uma vez que $\tilde{\mathbf{F}}$ considera a contribuição de $\nabla f(\chi_k)$ com $k \neq e$. Portanto, avaliando se $\nabla f(x_e)$ deve também ser anulado, conclui-se, da premissa inicial $\chi_e^{max} = 1.0$ e $\chi_e^{min} = \chi_{min}$, que sim.