

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ALTAMIRO MARLON RIBEIRO**

**CÁLCULO DE ÁREA: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM APORTE DA HISTÓRIA  
DA MATEMÁTICA**

**JOINVILLE**

**2021**



**ALTAMIRO MARLON RIBEIRO**

**CÁLCULO DE ÁREA: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM APORTE DA HISTÓRIA  
DA MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Na-  
cional (PROFMAT) da Universidade do Estado de  
Santa Catarina UDESC, Centro de Ciências Tecno-  
lógicas (CCT), como requisito parcial para obtenção  
do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof.<sup>a</sup> Dra. Ligia Liani Barz

**Coorientador:** Prof. Dr. Rogério de Aguiar

**JOINVILLE**

**2021**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da  
Biblioteca Setorial do CCT/UEDESC,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Ribeiro, Altamiro Marlon

Cálculo de área: uma proposta de ensino com aporte da história da matemática / Altamiro Marlon Ribeiro. -- 2021.  
224 p.

Orientadora: Ligia Liani Barz

Coorientador: Rogério de Aguiar

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2021.

1. Cálculo de área. 2. História da matemática. 3. Proposta de ensino. 4. Ensino médio. I. Barz, Ligia Liani. II. Aguiar, Rogério de. III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

**ALTAMIRO MARLON RIBEIRO**

**CÁLCULO DE ÁREA: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM APORTE DA HISTÓRIA  
DA MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Na-  
cional (PROFMAT) da Universidade do Estado de  
Santa Catarina UDESC, Centro de Ciências Tecno-  
lógicas (CCT), como requisito parcial para obtenção  
do título de Mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

Orientadora:

Prof.<sup>a</sup> Dra. Ligia Liani Barz  
CCT/UDESC

Membros:

Prof.<sup>a</sup> Dra. Jane Mary Richter Voigt  
UNIVILLE

Prof. Dr. Sidnei Furtado Costa  
CCT/UDESC

Joinville, 15 de dezembro de 2020.



Para Luciana, companheira e amor da minha vida.



## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho não seria possível sem a colaboração de muitas pessoas, as quais agradeço enormemente.

Minha orientadora Dra. Lígia Liani Barz pela paciência, compreensão em momentos difíceis e, sobretudo pela sua dedicação em minha orientação acadêmica, muito obrigado!

Ao meu coorientador, Dr. Rogério de Aguiar pelo incentivo, pelas palavras de apoio, pelas sugestões enriquecedoras e orientação acadêmica, muito obrigado.

A Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), por proporcionar esse programa de mestrado à nossa comunidade, muito obrigado.

A todos os professores do Programa PROFMAT da UDESC que foram muito importantes e contribuíram na minha formação e na construção dessa Dissertação, e que se constituíram em exemplo para minha prática docente, muito obrigado.

E aos meus colegas de turma por partilharem comigo dessa jornada, muito obrigado.



## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um produto educacional sobre o cálculo de área com o uso da história da matemática, direcionado às Terceiras Séries do Ensino Médio. O caderno é composto por cinco aulas, as quais podem ser transformadas em planos de aulas, cada uma focada na resolução de uma atividade desafiadora, pensando nos momentos pré-resolução e pós-resolução. Cada aula é organizada segundo as seguintes etapas: atividade motivadora, atividade principal, painel de soluções, sistematização, atividade avaliativa e atividades complementares. O valor pedagógico deste tipo de apresentação das atividades concilia a história da matemática com a resolução de problemas não triviais e não muito frequentes em nossos livros didáticos. Para o desenvolvimento deste trabalho foram efetuadas pesquisas bibliográficas e documentais a respeito do ensino de matemática conciliando a história do ensino de geometria com o desenvolvimento de práticas didáticas e metodologias diferentes das tradicionais, além de alguns estudos que se dedicam a fundamentar a importância do uso da história na produção de atividades didáticas. Seguimos com uma pesquisa documental sobre o cálculo de área através da história, desde os antigos babilônios, por volta de 2000 anos antes da Era Comum (a.E.C.) até o final do século XIX da Era Comum (E.C) com a sistematização da Teoria da Integral. Apresentamos um estudo teórico enfatizando conceito, propriedades e demonstrações sobre o cálculo de área na concepção atual/moderna e breves discussões sobre a obtenção de uma área aplicando o Teorema de Pick e sobre a inserção da incomensurabilidade no ensino médio. Discutimos também alguns objetivos pedagógicos que podem ser atingidos ao se trabalhar atividades inspiradas na história da matemática, a forma com que a história é abordada em livros didáticos e o valor pedagógico da inclusão da história da matemática na resolução de problemas de geometria. Com essa proposta, esperamos uma mudança de paradigma onde o trabalho do professor seja centrado no aluno, com foco na qualidade dos exercícios e no protagonismo do aluno diante de suas resoluções.

**Palavras-chave:** Cálculo de Área, História da Matemática, Proposta de Ensino, Ensino Médio.



## ABSTRACT

The objective of this thesis is to develop an educational product within the calculating area, using the history of mathematics, headed to Senior students of High School. The journal consists of five classes, which can be turned into lesson plans, each one focused on solving a challenging activity, with before resolution and afterwards resolution moments. Each class is organized according to the following steps: motivating activity, main activity, solving panel, systematization, assessment and extension activities. The pedagogical value of this type of activities unites the history of mathematics with the solving of non-trivial and infrequent problems in our textbooks. For the development of this thesis, a review of literature was carried out regarding the teaching of math, along with the history of teaching geometry with the development of educational practices and methodologies different from the traditional ones. Moreover, a research about how to substantiate the importance of using history in the production of teaching activities was done as well. We continued with a documentary research on the calculating area through history, from the ancient Babylonians, around 2000 years before the Common Era (BCE) until the end of the 19th century of the Common Era (CE) with the systematization of the Theory of Integral. We presented a theoretical study emphasizing concept, properties and demonstrations on the calculating area in the current / modern conception and brief discussions about obtaining an area applying the Pick's Theorem and about the insertion of incommensurability in High School. We also discussed some pedagogical objectives that might be achieved by working on activities inspired by the history of mathematics, the way history is approached in textbooks and the pedagogical value of including the history of mathematics in solving geometry problems. With this proposal, we expect a change of paradigm where the strategy of the teacher is student-centered, focusing on the quality of the activities and the role of the student in face of their resolutions.

**Keywords:** Area Calculation, History of Mathematics, Teaching Project Proposal, High School.



## LISTA DE FIGURAS

3.1	Mapa da Antártida entre os gráficos das funções $G(f)$ e $G(g)$ . . . . .	34
3.2	Região afetada pela lama após o rompimento da barragem em Brumadinho/MG. . . . .	34
4.1	Osso Ishango, datado entre vinte mil e dez mil anos a.E.C. . . . .	38
4.2	Tablete YBC 7289 . . . . .	39
4.3	Interpretação geométrica de $(a + c)^2$ . . . . .	40
4.4	Tablete YBC 7302 . . . . .	41
4.5	Papiro de Rhind . . . . .	43
4.6	Fragmento antigo dos <i>Elementos</i> . . . . .	47
4.7	Quadrado $P_0$ e octógono $P_1$ . . . . .	49
4.8	Segmento $AB$ e segmento unitário $u$ . . . . .	51
4.9	Segmento $AB$ decomposto em $n$ partes de medida $u$ . . . . .	51
4.10	Segmento $w$ que mede simultaneamente $u$ e $AB$ . . . . .	52
4.11	Quadrados com lados sobre a diagonais $AC$ e $AC_1$ . . . . .	55
4.12	Segmentos $UV$ e $XZ$ . . . . .	57
4.13	Quadrado $MNPQ$ de lado $l$ e diagonal $MP$ . . . . .	57
4.14	Construção do triângulo retângulo $C_1AN$ . . . . .	59
4.15	Triângulos $ABC$ e $ADE$ com bases sobre $MN$ paralelo a reta $s$ . . . . .	61
4.16	Triângulos $ABC$ e $ADE$ com bases sobre $MN$ . . . . .	64
4.17	Triângulos com bases sobre $MN$ . . . . .	65
4.18	Triângulo $ABC$ com uma reta $r$ paralela a base $BC$ . . . . .	66
4.19	Esquema de alavanca usado por Arquimedes. . . . .	67
4.20	Parábola obtida de um cone reto. . . . .	68
4.21	Segmento de parábola exaurido em triângulos. . . . .	69
4.22	Reta tangente em $P$ paralela a $QQ'$ . . . . .	69
4.23	Segmentos envolvidos na Proporção (4.40). . . . .	70
4.24	Triângulos $ABC$ e $MNP$ entre as paralelas $r$ e $s$ . . . . .	72
4.25	Triângulo inscrito no segmento parabólico $QPQ'$ . . . . .	72
4.26	Segmento de parábola exaurido em triângulos. . . . .	74
4.27	Segmento parabólico de base $AB$ e altura $OC$ . . . . .	79
4.28	Aplicação de áreas. . . . .	80
4.29	Justificativa geométrica de al-Khwarizmi para a solução da Equação (4.73). . . . .	84
4.30	Uma Raiz da equação $x^2 + 10 = 39$ é igual a 3. . . . .	85
4.31	Arco $ABC$ e triângulo característico $EKE'$ . . . . .	90

4.32	Grandezas não atribuíveis no triângulo característico $MRN$ .	92
4.33	Área sob uma curva particionada em retângulos.	94
5.1	Alguns tipos de curvas planas.	98
5.2	Área de uma figura plana arbitrária.	99
5.3	Representação gráfica do limite de uma função.	106
5.4	Área delimitada sob o gráfico de uma função.	106
5.5	Decomposição em retângulos da área sob a curva $f(x)$ para o intervalo $[a,b]$ .	107
5.6	Área sob a curva $f(x)$ para o intervalo $[1,3]$ .	110
5.7	Decomposição em retângulos da área sob a curva $f(x)$ para o intervalo $[1,3]$ .	111
5.8	Alguns triângulos fundamentais.	114
5.9	Polígono sobre uma rede quadricular.	114
5.10	Polígono $ABCDE$ sobre uma malha quadricular.	115
6.1	Área de superfície não poligonal.	120
A.1	Retângulo $DEFG$ inscrito no triângulo $ABC$ .	139
A.2	À esquerda, a fotosfera visível e à direita, as manchas retratadas por Galileu em 1610.	140
A.3	Desenho de Galileu sobre malha quadriculada.	141
A.4	Quadrado de lado 7 e área 49.	143
A.5	Quadrado composto por $m$ quadradinhos de lado $\frac{1}{n}$ .	143
A.6	Quadrado decomposto em áreas não poligonais	144
A.7	Pentágono $ABCDE$	145
A.8	Quadrado de lado $a + b$ .	146
A.9	Composições com o Tangran	146
A.10	Diagonal $AC$ de comprimento incomensurável.	150
A.11	Triângulos $ABC$ e $DEF$ .	154
A.12	Quadrado $AEFD$ e retângulo $EBCF$ .	155
A.13	<i>Lúnulas</i> de Hipócrates estudadas por Ibn Al-Haytham.	159
A.14	<i>Arbelos</i> de Arquimedes	161
A.15	<i>Salinon</i> de Arquimedes.	161
A.16	<i>Arbelos</i> de diâmetro $p + r$ .	162
A.17	<i>Arbelos</i> de diâmetro $p + r$	163
A.18	<i>Salinon</i> e círculo de diâmetro $d_3$ .	164
A.19	Área não poligonal $AFBECGH$ .	165
A.20	Segmento de parábola exaurido em triângulos.	166
A.21	Segmento parabólico inscrito no retângulo $FGJH$ .	166
A.22	Passarela $BDFE$ sobre um espelho d'água.	167

A.23	Área cultivável $a \cdot b$ e faixa $x$ de reserva legal. . . . .	167
A.24	Quadrado de lado 1 e alguns triângulos fundamentais. . . . .	171
A.25	Polígono $P$ sobre a rede quadricular. . . . .	172
A.26	Crescimento da região urbana do município de Joinville /SC entre 1966 e 2011. . .	173
A.27	Território urbano do município de Joinville /SC em 1966 e em 2011. . . . .	173
A.28	Polígono $ABCDE$ sobre uma malha quadricular. . . . .	175
A.29	Melanoma: tipo maligno de câncer de pele. . . . .	177
A.30	Polígonos sobre uma rede quadricular. . . . .	177
A.31	Logotipo da empresa fictícia <b><i>L.b&amp;R.a Corporation</i></b> . . . . .	178
A.32	Fotografia aérea de uma fazenda em Fraiburgo, SC. . . . .	179
A.33	Região <b>S</b> sob o gráfico de uma função. . . . .	182
A.34	Comprimento do segmento $AT$ da origem até $f(x)$ . . . . .	183
A.35	Região <b>S</b> dividida em retângulos de base $5\text{ cm}$ . . . . .	184
A.36	Região <b>S</b> dividida em retângulos de base $5\text{ cm}$ . . . . .	186
A.37	Soma de Riemann Inferior para a área da região <b>S</b> . . . . .	186
A.38	Soma de Riemann Superior para a área da região <b>S</b> . . . . .	187
A.39	Retângulos decompondo a área sob uma curva. . . . .	188
A.40	Área sob o gráfico de uma função repartida em trapézios. . . . .	190
A.41	Triângulo $ABC$ decomposto em 16 triângulos congruentes. . . . .	193
A.42	Quadrado $ABCD$ decomposto em áreas não poligonais. . . . .	195
A.43	Pentágono $ABCDE$ dividido em triângulo e trapézio. . . . .	197
A.44	Ladrilhos quadrados de lado $90\text{ cm}$ pavimentando a superfície $ABCDE$ . . . . .	198
A.45	Quadrado de lado $(x + 2)$ . . . . .	199
A.46	Composições com o Tangran . . . . .	200
A.47	<i>Arabelos</i> de diâmetro $p + r$ . . . . .	210
A.48	<i>Salinon</i> de Arquimedes. . . . .	210
A.49	Retângulo de lados $a + x$ e $b + x$ . . . . .	213
A.50	Polígonos circunscritos aos mapas de Joinville em 1966 e 2011. . . . .	216
A.51	Polígono circunscrevendo um melanoma. . . . .	218
A.52	Uma possível contagem para os pontos da rede quadricular. . . . .	219



## LISTA DE TABELAS

1.1	Número de questões sobre cálculo de área do ENEM, da OBMEP e da UDESC. . . . .	21
5.1	Alguns valores de $n$ aplicados a Expressão (5.29). . . . .	112
A.1	Valores de $x$ e seus respectivos quadrados, onde $1 < x < 2$ . . . . .	150
A.2	Valores de $x$ e seus respectivos quadrados, onde $1,4 < x < 1,5$ . . . . .	150
A.3	Valores de $x$ e seus respectivos quadrados, onde $1,41 < x < 1,42$ . . . . .	151



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>HISTÓRIA DO CÁLCULO DE ÁREA</b>	<b>37</b>
4.1	A Geometria dos Babilônios	38
4.2	A Geometria dos Egípcios	43
4.3	Geometria da Grécia Antiga	46
4.3.1	O Método da Exaustão de Eudoxo	48
4.3.2	A Incomensurabilidade	51
4.3.3	A Teoria das Proporções de Eudoxo	61
4.3.4	A Quadratura da Parábola	67
4.4	A Matemática do Mundo Árabe	81
4.5	O Cálculo de Área por Integrais	87
4.5.1	Leibniz e seu Estudo de Tangentes	90
4.5.2	A Quadratura da Parábola por Fermat	93
<b>5</b>	<b>ÁREA: CONCEITOS, DEFINIÇÕES E DEMONSTRAÇÕES</b>	<b>98</b>
5.1	Limites de Sequências	100
5.2	Limites de Funções	104
5.3	Área Sob o Gráfico de uma Função	106
5.3.1	A Definição de Integral	107
5.4	O Teorema de Pick	113
<b>6</b>	<b>O USO DA HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA</b>	<b>118</b>
<b>7</b>	<b>O PRODUTO EDUCACIONAL</b>	<b>123</b>
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>127</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>130</b>
	<b>APÊNDICE A – Produto Educacional</b>	<b>133</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A habilidade de calcular área é um dos pontos centrais em geometria, dada a sua importância na vida cotidiana e frequência deste conteúdo em vestibulares, ENEM, exames de avaliações institucionais nacionais e internacionais bem como em olimpíadas de matemática, sendo que esse conteúdo é contemplado na Base nacional Curricular Comum (BNCC). Uma rápida investigação nos bancos de questões das referências OBMEP (2020), ENEM (2020) e UDESC (2020), evidencia que a frequência deste conteúdo em testes é bastante grande.

Na Tabela 1.1, mostramos o número de questões sobre cálculo de área no ENEM, na OBMEP e no vestibular da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) nos anos de 2016 a 2019. Em cada ano, no ENEM há um total de 45 questões de matemática, na OBMEP, 20 questões na primeira fase, nível 3 para o Ensino Médio, e no vestibular da UDESC, 28 questões em 2 vestibulares anuais.

Tabela 1.1 – Número de questões sobre cálculo de área do ENEM, da OBMEP e da UDESC.

ANO	ENEM	OBMEP	UDESC
2019	4	3	2
2018	3	2	2
2017	2	4	3
2016	4	7	6

Além da importância no campo do Ensino de Matemática e na vida cotidiana, o cálculo de área ocupou posição destacada na vanguarda do conhecimento humano em muitos momentos de nossa história, pois, até os dias atuais, é importante para a construção de edificações, demarcações de propriedades, medidas de áreas cultiváveis, delimitações de fronteiras e aplicações para o desenvolvimento de outras ciências, tais como na medicina para determinar a área de tumores, geoprocessamento de imagens e astronomia.

Para os estudantes, o ensino do conteúdo de área limita-se tradicionalmente na apresentação do produto final do conjunto de saberes que foram construídos ao longo de vários séculos. São repassados na forma de aplicações de teoremas e fórmulas, em questões idealizadas, sem correlacioná-los com as implicações que o desenvolvimento histórico desses conteúdos tem em seu cotidiano.

Esta dissertação tem como principal finalidade desenvolver um caderno de atividades direcionado a estudantes de Terceiras Séries do Ensino Médio, por se tratar de uma série de terminalidade.

Para que nossa proposta de ensino tenha relevância e inovação, é necessário apresentar o que os documentos oficiais normatizam para o ensino de matemática, no que tange à contextualização do objeto e sua abordagem histórico-crítica.

A Proposta Curricular de Santa Catarina (PC-SC), sobre a atual condição do ensino de matemática, admite que:

"Percebe-se uma concepção de ensino de Matemática que privilegia o caráter utilitário deste conhecimento, ou seja, a Matemática é entendida apenas como ferramenta para a resolução de problemas ou como necessária para assegurar a continuidade linear do processo de escolarização, não contemplando a multiplicidade de fatores necessários ao desenvolvimento de uma efetiva Educação Matemática." (SANTA CATARINA, 1998, p.105).

A PC-SC afirma que o ensino da matemática deve acontecer contemplando todos os aspectos que faz dela uma ciência, ou seja, é produzida para suprir necessidades históricas, que movem revoluções intelectuais e tecnológicas através do tempo.

Em nossa prática, docente observamos que estamos rotineiramente na contramão desta tendência, pelos mais variados motivos. Iniciamos a abordagem de um conteúdo de forma mecanicista, a partir de seu produto final, ou de sua versão mais atual, pelas definições formais dando a esse saber um aspecto dissociado da reflexão crítica e do papel de agente ativo do estudante na construção de seu conhecimento escolar.

No entender da PC-SC, "sendo a matemática uma forma especial de pensamento e linguagem, a apropriação deste conhecimento pelo aluno se dá por um trabalho gradativo, interativo e reflexivo." (SANTA CATARINA, 1998, p.107). Deste modo, ao abordarmos de forma mecanicista um conteúdo, estamos dissociando o ensino da realidade do estudante, já no primeiro contato dele com o saber em questão.

Conforme a PC-SC, "para educar matematicamente os sujeitos, é necessário buscar elementos teóricos e conceituais nos diversos campos da Ciência, entre eles a História" (SANTA CATARINA, 1998, p.106). Portanto, o ensino de conteúdos de matemática com a contribuição de sua história e de outras ciências vai de encontro com que é preconizado nos documentos oficiais.

Diante dos argumentos expostos na PC-SC, podemos propor uma prática pedagógica diferenciada no ensino de matemática ao inserir eventos históricos sob a forma com que tal conteúdo se desenvolveu através do tempo, pois a história da matemática mostra como ela foi sistematizando-se, organizando-se enquanto linguagem simbólica, cada vez mais precisa e rigorosa até se tornar universal com alto nível de síntese, abstração e formalização, conforme a conhecemos hoje.

Corroborando o exposto na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), na versão publicada em abril de 2018, específica para Ensino Médio, o educador matemático precisa atuar para construir uma visão unificada dos grandes temas da matemática como por exemplo, a Geometria e a Álgebra. Essa integração aconteceu historicamente entre os séculos XV, XVI e XVII

com o desenvolvimento da linguagem algébrica, com o surgimento das primeiras fórmulas de resolução de equações e com surgimento da Geometria Analítica.

Desse modo, associar o ensino ao contexto e à história pode facilitar a compreensão de que "as práticas matemáticas, ou seja, como os integrantes de cada cultura ou grupo usam a Matemática variaram muito ao longo dos tempos, dependendo das necessidades, visões de mundo, entre outros fatores, e continuam a variar" (MEC, 2018, p. 522), reforçando que essa ciência desenvolveu-se também pelas necessidades históricas específicas ou gerais das muitas civilizações que a produziram desde o Período Neolítico até os dias atuais.

Tendo em vista que uma das possíveis origens da matemática foi a geometria, seu uso é um bom ponto de partida para o desenvolvimento de uma proposta de ensino que busque na sua história a construção do significado para a evolução do conceito bem como mostrar aplicações atuais de seu uso.

Diante do exposto, estamos convencidos de que saber sobre a produção histórica de um conceito matemático pode levar a um entendimento mais abrangente do tema, e isso pode ser um eficiente agente motivador para atingirmos os objetivos quanto à aprendizagem dos alunos e quanto a ressignificação do que desejamos ensinar.

O estudo de áreas tem como principal característica a grande diversidade de figuras que podem ser utilizadas, tais como polígonos convexos, não convexos, círculos, segmentos circulares, setores circulares, que são bastante tradicionais no Ensino Médio.

O ensino tradicional de geometria, trata do tema visando uma aprendizagem centrada na aplicação de fórmulas pré-memorizadas, que na maioria das vezes, só verificam a habilidade de substituir variáveis em equações, chegando a um resultado numérico que muitas vezes é fruto de uma situação idealizada, abstrata e sem conexão com a realidade do estudante, o que nos motivou a elaborar e oferecer uma proposta de ensino diferente. Pretendemos ir além do tradicional, e inserir no caderno pedagógico áreas de superfícies que não são triviais para um aluno do Ensino Médio, mas que podem ser exploradas no processo de aprendizagem desde que observada a devida transposição didática, tais como áreas sob curvas, possibilitando o primeiro contato do estudante com noções de Limites e Integrais. Dessa forma, desenvolvemos uma investigação documental tendo como foco a seguinte questão de pesquisa: "Quais as contribuições de uma pesquisa documental na elaboração de um caderno de atividades voltado ao ensino do cálculo de área para as Terceiras Séries do Ensino Médio com aporte da história da matemática?"

O caderno de atividades elaborado permite a percepção das mudanças conceituais e dos problemas que existiram e ainda existem sobre o conceito e o cálculo de área, além de suprir as necessidades curriculares, quanto à aprendizagem do tema para a terminalidade deste nível de ensino. Assim sendo, visando responder a nossa questão de pesquisa estabelecemos como objetivo desenvolver um caderno de atividades para o ensino de área com o uso da História

da Matemática como recurso pedagógico. Esse produto é resultado de um estudo teórico, na forma de uma pesquisa bibliográfica sobre tópicos da História da Matemática referentes ao cálculo de área, a relação do tema com as implicações que o desenvolvimento histórico de seu conteúdo tem para o cotidiano e a aprendizagem dos estudantes e por fim, analisamos a forma com que o conceito e o cálculo de área são ensinados atualmente. Todo esse trabalho resultou em uma proposta de ensino sobre conceito e cálculo de área com aporte da história da matemática apresentados na forma de um caderno de atividades.

Saindo do campo dos documentos oficiais que normatizam como deve se dar o ensino de matemática, faremos um breve relato de nossa prática docente. Na maioria das vezes, reservamos os minutos iniciais de uma aula para a explicação teórica e expositiva de um conteúdo ou uma revisão, seguido da resolução de exemplos. No momento subsequente, aplicamos uma lista com vários exercícios, muitos dos quais o aluno não tem condições de iniciar uma resolução, apenas aguarda a correção na lousa, onde participa de forma passiva, às vezes até entendendo o procedimento, mas sem autonomia para, a partir daí, resolver sozinho questões similares às corrigidas. Por fim, após cumprido o tempo estabelecido para que os alunos terminem suas atividades, fazemos as correções na lousa e determinamos a data da prova. No próximo conteúdo, o procedimento é o mesmo chegando aos mesmos resultados, independente do tema e de quantas vezes essa sequência é aplicada.

Para Walle (2009, pp. 61-65) as aulas organizadas no modelo relatado acima, condicionam os estudantes a concentrarem-se nos procedimentos mecânicos de aplicações de fórmulas e teoremas, para que possam terminar de forma breve os exercícios, quando muito. Walle (2009) salienta que esse tipo de aula está em forte e significativo contraste com uma "*prática de ensino construída ao redor de um único problema*", cuja resolução e aprendizagem do tema são simultâneas, fazendo com que o trabalho do professor seja efetivamente centrado no aluno e não em si mesmo. Dessa forma, o autor nos inspirou quanto ao método para a elaboração das atividades que estão descritas no produto educacional.

Deve-se transcender o modelo relatado de "exposição da teoria - resolução de exemplos - aplicação de atividades - correção - avaliação". É importante pensar em formas mais eficientes de aproveitar o tempo de uma aula, focando também na qualidade dos exercícios e no protagonismo do aluno diante da resolução desses exercícios.

Pensando nessa perspectiva, produzimos um caderno de atividades planejado para a resolução de uma única atividade (a atividade principal da aula) desafiadora e interessante por aula, com o cuidado de descrever nas instruções para o professor(a) o que fazer "antes, durante e depois da resolução", deixando também sugestões quanto ao tempo de duração de cada momento e objetivos para cada uma das aulas. Em nosso caderno de atividades, deixaremos sugestões de objetivos específicos para cada capítulo porém, o professor(a) que irá aplicar o caderno deve

inserir no seu planejamento seus próprios objetivos, de acordo a realidade de sua escola e de suas turmas.

Para otimizar a leitura e orientar sobre o desencadeamento lógico da sequência escrita construída para essa dissertação, descrevemos no Capítulo 2 os procedimentos metodológicos usados para a realização da pesquisa, da dissertação e elaboração do produto educacional resultante, na forma de um caderno de atividades com uma proposta de ensino cálculo de área com aporte da história da matemática.

No Capítulo 3 trazemos a revisão de literatura feita em bancos de teses e dissertações e em artigos científicos publicados que tratam de temas similares ao dessa dissertação. Nessa etapa, relacionamos os pontos em comum de cada trabalho escolhido para a revisão com a nossa proposta de pesquisa para a dissertação e de elaboração do produto educacional.

No Capítulo 4 apresentamos uma pesquisa a respeito do uso e das aplicações do cálculo de área, e da forma como as civilizações antigas (babilônios, egípcios e gregos) concebiam esse cálculo. Dando maior ênfase na geometria dos gregos, discutiremos o Princípio da Exaustão, a Incomensurabilidade de Grandezas, a Teoria das Proporções de Eudoxo, que em sua época contornou o problema dos incomensuráveis, e a quadratura do segmento parabólico por Arquimedes. Saindo da Grécia, mostraremos um pouco da matemática árabe desenvolvida nos séculos IX, X, XI e XII da Era Comum. Esses séculos são conhecidos como "A Época Áurea da Cultura Islâmica", dando ênfase nas técnicas de resolução para equações quadráticas. Suas regras retóricas de resolução eram justificadas com argumentos geométricos utilizando conhecimentos sobre cálculo de área. Encerramos esse capítulo nos séculos XV, XVI e XVII com o despertar da álgebra simbólica, da Geometria Analítica, da obtenção de tangentes à curvas e o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Não podemos falar de evolução histórica de um conceito sem expor a forma atual com que se apresenta. Assim, no Capítulo 5, apresentamos conceitos, definições, demonstrações e exemplos relacionados ao cálculo de área, desde a definição formal do que vem a ser uma área, das propriedades geométricas e aritméticas das áreas e objetivando mostrar a importante aplicação desses conceitos para a Teoria da Integral, discutiremos um pouco sobre limites de sequências e de funções, como pré-requisito para a fundamentação da Integral de Riemann, objetivo central do capítulo pois consiste na aplicação mais avançada de área para as finalidades desse trabalho. Nesse capítulo também apresentamos ao leitor o Teorema de Pick, que consiste em uma fórmula para obter o valor da área de um polígono inscrito em uma rede/malha quadricular através da simples contagem de pontos da malha que fazem parte do perímetro e da região interior da figura.

No Capítulo 6, mostramos de que forma um livro didático expõe a história da matemática enquanto recurso pedagógico, fundamentamos a importância do uso de atividades de matemá-

tica inspiradas em fatos da história e descrevemos também as finalidades e objetivos de ensino que essa prática proporciona.

No Capítulo 7, descrevemos o produto educacional, que consiste em um Caderno de Atividades para o ensino do cálculo de área. As atividades presentes nesse caderno são inspiradas na história da matemática e está exposto na íntegra no Apêndice da dissertação.

## 2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa, quanto à abordagem do problema, é do tipo qualitativa pois não aborda os dados quantificáveis e sim as relações entre os textos pesquisados e a subjetividade do pesquisador. Do ponto de vista dos objetivos é exploratória fazendo uso da pesquisa bibliográfica e documental.

Seguimos com uma pesquisa documental sobre o cálculo de área através da história, desde os antigos babilônios, por volta de 2000 anos da Era Comum (a.E.C.) até o final do século XIX da Era Comum (E.C) com a sistematização da Teoria da Integral.

Dessa forma, embora o período de tempo investigado seja extenso, o tema ficou bem delimitado e o referencial teórico aponta diretamente para o assunto escolhido. Buscamos respostas para o problema de pesquisa em eventos e contextos que não podem ser quantificados, daí a justificativa de elaborarmos uma pesquisa qualitativa.

Nesse sentido, para Minayo et al. (2002, pp.21-22), a pesquisa qualitativa trabalha com o conjunto de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. Dessa forma, acreditamos ser esta a forma mais adequada para o desenvolvimento metodológico da pesquisa para os fins dessa dissertação.

No desenvolvimento desse trabalho foram efetuadas pesquisas bibliográficas e documentais a respeito do ensino de matemática conciliando à história da geometria, com o desenvolvimento de práticas didáticas e metodologias diferentes das tradicionais, além de alguns estudos que se dedicam a fundamentar a importância do uso da história na produção de atividades didáticas.

Apresentamos uma pesquisa bibliográfica e documental, de caráter fundamentalmente teórico. Isso nos levou a consultar fontes já elaboradas e revisadas, publicadas principalmente em livros, artigos científicos, bem como documentos oficiais, dissertações e teses relacionadas ao tema.

Sobre trabalhos dessa natureza, Gil (2008) ressalta que esse tipo de pesquisa permite a cobertura muito mais ampla em relação ao que se poderia obter diretamente e que esta vantagem se torna particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. Em nosso caso, como tratamos da história, os eventos também se mostraram muito dispersos ao longo do tempo.

Propomos como produto dessa pesquisa, a elaboração de um caderno de atividades voltado para o ensino do cálculo de área com aporte da história da matemática, direcionado à

turmas de Terceiras Séries do Ensino Médio, por entendermos que estes já tiveram contatos anteriores com o cálculo de área.

Iniciamos nossa pesquisa fazendo uma revisão de literatura no intuito de investigar a forma como o tema "História do Cálculo de Área" tem sido abordado nas dissertações desenvolvidas pelos acadêmicos do PROFMAT. Continuamos essa investigação no Banco de teses e dissertações da UNICAMP, na Revista do Professor de Matemática *on line* e na Revista Brasileira de História da Matemática. Os trabalhos escolhidos foram Parreira (2017); Silva (2016); Lorenzato (1976); Neto (2019) e Morey (2013). No Capítulo 3, descreveremos com mais detalhes a revisão de literatura feita nos trabalhos de cada um desses autores.

Nessa pesquisa foram usados, em sua maioria, livros e artigos científicos de história da matemática, de geometria, de análise e do uso da história da matemática em práticas de ensino. Nossos principais referenciais são: Roque (2012); Miguel e Miorim (2018); Ávila (2006); Lima et al. (2013); Lima (1991) e Gonçalves e Possani (2019). A pesquisa feita através dessas obras, e de outras referências complementares, estará exposta nos Capítulos 4, 5 onde traremos os tópicos da história da matemática pertinentes ao nosso tema, os conceitos, definições e demonstrações sobre área, sequências, limites, integral e o Teorema de Pick dentro de suas concepções atuais, finalizando no Capítulo 6, com uma discussão sobre o aporte na história da matemática na elaboração de propostas de ensino e a forma com que um livro didático usa a história da matemática quando trata do tema "cálculo de área".

O caderno de atividades contempla temas importantes para o ensino do cálculo de área, em ordem crescente de complexidade, conforme essas técnicas de cálculo foram se estabelecendo durante a história, são eles:

- Cálculo usando decomposição e composição de área.
- Comensurabilidade e Incomensurabilidade.
- Áreas inscritas/hachuradas em círculos, semi-círculos, setores circulares e figuras planas com alguns lados não sendo segmentos de retas.
- Cálculo de área por aproximações, inclusive aplicando o Teorema de Pick.
- Cálculo de áreas através das Somas de Riemann com conceitos introdutórios de Limites e Integrais.

Cada atividade contempla um ou mais dos itens acima, entre outros que estão especificados nos objetivos e instruções, expostos individualmente no corpo das atividades na forma de orientações ou sugestões ao Professor(a). No apêndice da dissertação organizamos o Caderno de Atividades de forma que possa ser impresso em capítulos específicos ou na íntegra, conforme a necessidade do docente que deseja usá-lo em suas aulas.

No próximo capítulo, apresentaremos a revisão de literatura feita para essa dissertação. Os trabalhos analisados tiveram suas buscas delimitadas pelos descritores: cálculo de área,

história do cálculo de área, técnicas de ensino para cálculo de áreas e história da matemática em propostas de ensino.

### 3 REVISÃO DE LITERATURA

Uma das etapas para a concretização dos objetivos estabelecidos nessa dissertação, através da elaboração de um produto educacional que possa suprir algumas das deficiências para o ensino-aprendizagem do cálculo de área, consistiu na leitura e discussão de alguns trabalhos científicos publicados que possuem afinidades com nosso tema.

Ao investigar algumas produções relativas ao estudo da evolução histórica do conceito de área, foram encontrados muitos trabalhos similares em alguns aspectos ao que propomos fazer. O levantamento destes trabalhos foi, em parte, realizado no portal do PROFMAT, no repositório de Teses e Dissertações da UNICAMP, no banco de Teses e Dissertações da CAPES, na Revista do Professor de Matemática *OnLine* e na Revista Brasileira de História da Matemática entre os meses de outubro e novembro de 2019.

No portal do PROFMAT, ao buscarmos dissertações com a palavra "áreas", encontramos 66 registros, dos quais, dois deles mostram em seus títulos que tratam da história da matemática para o ensino do cálculo de área, são eles: "Uma Proposta de Uso da História da Matemática como Recurso Didático no Ensino de Áreas" de Débora Souza Parreira, defendido na UFTM em 15/12/2017 e "A Utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas: estudo de áreas de regiões planas" de Daniel de Jesus Silva, defendido na UESB em 04/03/2016. Embora quase todos os outros trabalhos no banco de dissertações do PROFMAT, que tratam de áreas, tragam um pouco da história da matemática, estes dois usam a história da matemática para o desenvolvimento de práticas de ensino sobre o conceito e o cálculo de área.

Parreira (2017) inicialmente salienta que "A História da Matemática possibilita ao aluno que está ouvindo determinado conteúdo pela primeira vez participar da construção do conhecimento e refazer os passos dos estudiosos do passado", acreditando que ao tomar ciência da forma como se deu o surgimento de um determinado tema, o estudante pode se apropriar deste objeto com mais propriedade e significância. Em outro momento, cita que a Base Nacional Curricular Comum ressalta ser a Geometria capaz de promover a curiosidade, imaginação e investigação ao apresentar características diferentes nas diferentes etapas de escolaridade e sempre que possível, os conhecimentos devem ser contextualizados, antes de se promover a generalização e a abstração. Quanto às dificuldades encontradas no ensino de geometria, pondera que algumas possíveis causas são o isolamento deste tema no currículo, geralmente ao final do ano letivo, abordagem analítica, mecânica e dissociada da realidade imediata e redução à atividade de nomenclatura. Também observa que os cursos de formação de professores nem sempre dão o suporte necessário para que o futuro professor desenvolva sua prática pedagógica nessa área. Posteriormente, ressalta que existe vontade por parte de muitos professores e pesquisadores em

Educação Matemática em melhorar o ensino da geometria, pois este é um tema da matemática escolar que ativa a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. Após fundamentar a importância da História da Matemática no processo de aprendizagem e situar a importância da geometria para o ensino da matemática na educação básica, apresenta uma análise sobre a forma com que a história da matemática é tratada em livros didáticos e paradidáticos, mostra uma pesquisa sobre a matemática nas civilizações antigas do Oriente Médio e da Ásia, e finaliza o trabalho propondo cinco atividades que utilizam a história da matemática como recurso pedagógico no ensino de áreas de figuras planas para turmas de nono ano do Ensino Fundamental.

Em relação ao trabalho de Parreira, nosso diferencial será apresentar as técnicas de cálculo, demonstrações matemáticas e os recursos referentes à notação numérica e conhecimento sobre operações e propriedades disponíveis em cada etapa da evolução histórica do conceito de área que serão descritos e, pelo fato de nosso público alvo ser a terceira série do ensino médio, as atividades propostas no caderno pedagógico serão mais complexas, exigindo maior demanda cognitiva para a interpretação e resolução. É importante evidenciarmos também que nossa pesquisa se estenderá para tópicos do tema que estão além do que será proposto no caderno de atividades, pois de acordo com as diretrizes do próprio programa PROFMAT, o professor deve ter pleno e vasto domínio dos conteúdos da matemática para poder desenvolver e aplicar qualquer metodologia de ensino que julgue necessária na condução do processo de ensino e aprendizagem de seus alunos.

O outro trabalho escolhido no banco de dissertações do PROFMAT, relacionada ao tema deste projeto de pesquisa, foi o trabalho de Silva (2016), que destaca o uso da História da Matemática e a Investigação Matemática como tendências em educação matemática que darão o aporte metodológico a seu trabalho, pois segundo ele, na conexão de ambas as tendências, pode-se fazer um trabalho significativo sem perder os aspectos formais do conhecimento matemático envolvidos no tema. Ressalta também que seu trabalho não trata de mero uso de fatos históricos, mas de reconstruir o desenvolvimento da matemática, ao tempo que se constrói o conceito matemático envolvido e completa que é importante que as práticas educativas em matemática transcendam da repetição mecânica de substituições de variáveis em fórmulas para o entendimento do processo construtivo, através dos "caminhos que levaram à construção das necessidades e processos que impulsionaram, sistematizaram e formalizaram os conteúdos estudados" (SILVA, 2016, p. 16). Silva (2016) inicia fundamentando seu trabalho descrevendo a forma como um conteúdo matemático é apresentado tradicionalmente, de forma linear e sistematizada, enfatizando o produto final de cada assunto, desprezando a epistemologia do tema. Exemplifica com a sequência de ensino de Cálculo: funções, limites, derivadas e integrais, e afirma que é equivocada a impressão que temos de cada um deles ser pré-requisito para o ou-

tro. Argumenta que historicamente, a sistematização destes conteúdos não se deu nesta ordem, pois os conceitos de integral e derivada antecederam aos estudos de funções e limites. Afirma então que "o uso correto da história pode ser um agente de cognição no ensino aprendizagem de matemática" (SILVA, 2016, p. 21). Quanto a sua pesquisa sobre fatos históricos relacionados ao cálculo de áreas, destaca que a concepção da geometria dos egípcios e mesopotâmios era distinta da grega, pois as primeiras davam um caráter prático a esse conhecimento, tendo uma função utilitária nos cálculos de áreas e volumes, já os gregos enfatizavam as generalizações e demonstrações das propriedades geométricas das figuras que possibilitavam calcular suas áreas. O autor trata dessa parte do trabalho de maneira qualitativa e, até aqui, em nenhum momento, faz alusão ao método matemático empregado, nem tão pouco às demonstrações e à forma como a matemática era desenvolvida nestas épocas. Finaliza essa exploração da história citando Newton e Leibniz e dá sequência a seu trabalho abordando problemas históricos, tais como: cálculo da área de um *vedi* (altar empregado nos sacrifícios em forma de trapézio isósceles) apresentado em um texto hindu intitulado *Apastamba Sulbasutra*; técnicas para calcular áreas de círculos na Babilônia e no Egito antigos; a quadratura do círculo pelos gregos; e finaliza no método da exaustão, este último, é apresentado com demonstrações e rigor matemático. Após essa seção, seu trabalho fundamenta a importância de se aliar duas tendências de educação matemática (História da Matemática e Investigação Matemática) e finaliza sua dissertação apresentando atividades aplicadas e os resultados obtidos, a estudantes do quinto semestre do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Cálculo II, na Universidade do Estado da Bahia.

Ao justapor o trabalho de Silva com a proposta dessa dissertação, percebemos que é importante apresentarmos uma linha histórica mais detalhada do tema, entendendo de fato como cada civilização concebia o cálculo de área e qual era sua importância para estas sociedades. Precisamos evidenciar os aspectos que diferenciam a forma de entender a matemática atual com aquela que era praticada pelos nossos antepassados. Dessa forma, nossa escrita será voltada inclusive para esta análise.

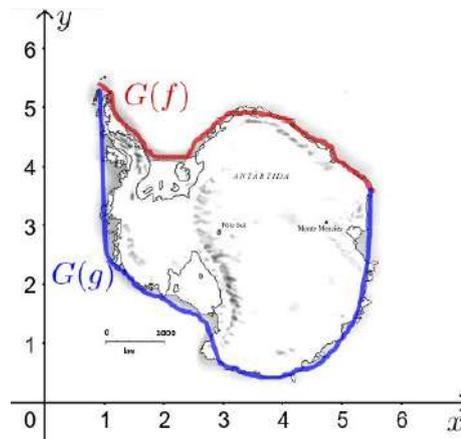
O terceiro trabalho analisado é uma tese de doutorado defendida na UNICAMP em 1976, intitulada "Subsídios Metodológicos Para o Ensino de Matemática: Cálculo de áreas e figuras planas" apresentado por Sérgio Lorenzato. O autor relata que dentre os principais erros na metodologia de ensino de matemática em sua época, se destacavam: mecanização da aprendizagem; despreocupação com o "por quê" e o "para quê"; prolixidade na abordagem; compartimentalização dos conteúdos; mutilação; concepção contemporânea da matemática; dificuldade em transpor ao aluno a concepção moderna da matemática e a ausência de inserir no ato pedagógico a forma com que as descobertas matemáticas são produzidas. O autor chama atenção para a necessidade de uma pedagogia voltada para a construção do significado em aprender

matemática e de que forma esta disciplina poderia contribuir com o desenvolvimento escolar dos estudantes. A respeito dos tipos de atividades escolares que são propostas nas escolas esse pesquisador percebe um movimento dentro do campo pedagógico de tornar a educação melhor e mais dinâmica, ao afirmar que "a educação nova é a educação que aspira formar a individualidade vital humana dentro da coletividade, num ambiente de liberdade, através de atividade" (LORENZATO, 1976 apud LUZURIAGA, 1975, p. 36). Após descrever os movimentos de mudança para outra forma de educação, em específico para a Matemática, destaca que o domínio que o professor deve possuir sobre o conteúdo a ser ensinado é um fator relevante para a comunicação entre as partes envolvidas e o sucesso da aprendizagem. A seguir, o trabalho reforça a importância da construção da "aprendizagem significativa", em contraponto à memorização de fórmulas e teoremas e ao verbalismo da aprendizagem mecânica, criticada nos capítulos anteriores. Seguindo sua tese, Lorenzato dedica o restante do trabalho a descrever um experimento que compara duas intervenções sobre o ensino do cálculo de áreas de polígonos; o programa A, centrado na atividade do aluno em processos de investigação e descobertas, baseado no manuseio de representações de figuras concretas, confeccionadas em cartolina, propondo a decomposição destas figuras para a composição em outras, cujo processo do cálculo é conhecido. O programa B, equivalente ao anterior no objetivo de calcular áreas de polígonos, é centrado no professor expondo fórmulas e teoremas, utilizando apenas o quadro negro, e os alunos calculando áreas através da aplicação de fórmulas. Finalmente conclui, após criteriosa análise de dados, que os grupos A e B em um pré-teste, realizado antes da intervenção, obtiveram resultados quase idênticos, porém, no pós teste, os estudantes submetidos ao programa A tiveram melhor desempenho nas questões de nível difícil, embora, nas de nível médio e fácil, o grupo B obteve melhores resultados.

Quando Lorenzato (1976) levanta a questão sobre a despreocupação com o "por quê" e o "para quê" e a ausência de inserir no ato pedagógico a forma com que as descobertas matemáticas são produzidas, reforça nosso entendimento de que o uso da história da matemática pode ser um recurso pedagógico para intervir nessas demandas.

Ao buscarmos por artigos com tema similar ao da nossa dissertação na "Revista do Professor de Matemática *online*", encontramos o artigo intitulado "Cálculo Integral Para o Ensino Médio", (PMO v.7, n.1, 2019), escrito por Alyrio A. Cordeiro Neto. Esse autor informa que "Nos exames do *Programme for International Student Assessment (Pisa)*, há questões que avaliam a capacidade de o estudante estimar área de uma região do plano, onde a fronteira não é dada apenas por segmentos de reta, mediante as informações contidas num mapa". Inspirado neste tipo de problema, ilustrado na Figura 3.1, Neto (2019) resolveu propor uma sequência didática para introdução de noções primitivas de Cálculo Integral para alunos de ensino médio.

Figura 3.1 – Mapa da Antártida entre os gráficos das funções  $G(f)$  e  $G(g)$ .



Fonte: Neto, 2019, p. 135.

Neto (2019) usou como contexto a tragédia ocorrida em janeiro de 2019, em Brumadinho/MG, onde uma grande área foi devastada pela lama que estava contida na barragem que se rompeu. A estimativa dessa área devastada é de interesse de ambientalistas e autoridades para elaborar um plano de ação, pois a região sofreu um grande impacto ambiental. Neto (2019) aponta que a região em evidência (ver Figura 3.2), não é delimitada apenas por segmentos de retas, e levanta a seguinte questão: "Então, qual o procedimento que eles podem recorrer para obter, aproximadamente, a área atingida?" (NETO, 2019, p. 134). Neto (2019) afirma que quando submetemos esse tipo de problema a estudantes da educação básica, "estes deverão procurar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para chegar a uma solução" (NETO, 2019, p. 134). O autor afirma também que quando se conhece o Cálculo Integral, é imediato perceber que se pode obter uma boa aproximação para a área das regiões solicitadas por meio da integral da diferença entre duas funções num intervalo fechado, desde que as regiões estejam entre seus gráficos. Isso pode ser obtido de forma rápida, através do Geogebra, e finaliza justificando que mediante o ensino de técnicas de integração na etapa final da educação básica, pode-se prover o aluno de habilidades para a solução deste tipo de problema.

Figura 3.2 – Região afetada pela lama após o rompimento da barragem em Brumadinho/MG.



Fonte: Neto, 2019, p. 135.

Na sequência de seu artigo, Neto (2019) fundamenta o Cálculo Integral, da forma como o conhecemos, presente em todas as bibliografias adotadas em cursos de nível superior. Demonstra de forma detalhada a Integral de Riemann e descreve um procedimento de como calcular a área sob uma curva usando o Geogebra. Finaliza seu artigo apresentando os problemas aplicados aos estudantes. A primeira atividade consiste no cálculo aproximado da área da Antártida mostrada na Figura 3.1 e a segunda atividade, também com o auxílio do Geogebra, trata-se do cálculo da área devastada na tragédia de Brumadinho, em Minas Gerais. Conclui seu artigo afirmando que, usando conhecimentos elementares do Cálculo Integral, é possível com uso de *softwares* inclusive, ensinar conteúdos mais avançados de matemática na etapa final da educação básica.

Em relação ao trabalho de Neto (2019), nossa proposta vai além de zelar pelo detalhamento nas demonstrações e sugerir uma forma de transposição deste conteúdo para a educação básica. Pretendemos inclusive, abordar os aspectos históricos relacionados a várias concepções de cálculo de área, desde os primeiros registros descobertos pelos historiadores até as técnicas mais avançadas usadas atualmente.

Sobre o uso da História da Matemática como metodologia e até mesmo como Tendência em Educação Matemática, existe no Brasil uma revista científica especializada neste tema, a "Revista Brasileira de História da Matemática". Em seu volume 13, número 26, ano de 2013, encontramos o artigo "Fontes Históricas na Sala de Aula: O que dizem os estudos internacionais", redigido por Bernadete Morey. A autora levanta uma discussão sobre a forma de se introduzir a história no ensino e na aprendizagem da matemática. Inicialmente apresenta as seguintes questões: "O que tem sido feito para viabilizar o uso de fontes históricas em sala de aula? Quais argumentos têm sido usados para justificar tal uso?" (MOREY, 2013, p. 73). Morey (2013) procura apresentar algumas características relevantes da produção de artigos de periódicos e anais de eventos da última década, referentes ao tema. Sua pesquisa é focada na forma com que autores de materiais pedagógicos usam fontes originais da história da matemática em sala de aula, quais são seus argumentos ao fazê-lo e como interpretam os resultados obtidos, logo, esse texto vem de encontro com o eixo norteador dessa dissertação. A autora concentra-se na forma com que os professores/pesquisadores usam fontes originais da história em suas aulas, quais suas justificativas, como o fazem, quais suas interpretações dos resultados e discute a relevância dos artigos estudados. Morey, nesse artigo, considera que uma intervenção fazendo uso da história deve detalhar de forma clara o experimento, de onde vieram as fontes bibliográficas, como se deu a avaliação e o mais importante, como justificar o uso de fontes históricas na educação matemática. Observa que é importante trazer junto com esse tipo de prática pedagógica a reflexão sobre a tradução da fonte histórica, pois como vamos apontar em vários momentos, que o anacronismo entre as concepções antigas e modernas da matemática

deve ser levado em consideração, dada a riqueza de fatos que podem ser explorados diante da visão antiga e atual que temos do tema. Em sua discussão Morey (2013) destaca também que o uso de fontes históricas pode ser um ponto positivo para enriquecer o conteúdo e trazer mais qualidade à prática pedagógica. Em suas considerações finais, descreve alguns pontos importantes na realização de práticas pedagógicas que usam a história da matemática como recurso didático, afirmando que uma abordagem com uso da história possibilita estabelecer uma vasta gama de objetivos que podem ser traçados para esse processo, também contribui para a formação do professor que elabora a prática, pois este terá que pesquisar, estudar e se aperfeiçoar, dado que entre os cursos de formação, são raros os que oferecem uma disciplina voltada para a História da Matemática. Um objetivo citado é dar aos estudantes do final do Ensino Médio uma clareza maior sobre o que é ser um matemático e o que faz um matemático. A autora deixa claro que tais objetivos devem ser traçados pelo professor que está propondo tal prática. Finaliza seu trabalho expressando que nenhum dos artigos por ela estudados deixa de frisar que usar fontes históricas não é um processo fácil de executar, pelo contrário, exige um grande preparo e enorme cuidado. Porém, o resultado é de um valor educacional insubstituível.

No capítulo a seguir iniciaremos a fundamentação teórica dessa dissertação. Apresentaremos uma pesquisa referente aos tópicos da história do cálculo de área e do problema da incomensurabilidade. Esses temas são relevantes para atingirmos os objetivos desse trabalho quanto a elaboração de nosso produto educacional.

#### 4 HISTÓRIA DO CÁLCULO DE ÁREA

O cálculo de área é o objeto principal dessa dissertação, bem como sua aplicação em sala de aula. A discussão desse capítulo será fundamentada em tópicos da História da Matemática referentes ao cálculo de área e na teoria moderna, resultante desse processo histórico, buscando mostrar como a História da Matemática pode auxiliar, enquanto recurso pedagógico, a abordar o tema em questão.

Atualmente, há uma crescente demanda por uma Educação Matemática voltada para o cotidiano, abordada de forma lúdica e motivadora, a partir do concreto, conforme o que foi fundamentado nas referências usadas na Introdução e na Revisão de Literatura desse trabalho. Nesse sentido, Roque e Carvalho (2012) apontam que conciliar o caráter abstrato desse saber com aspectos correlacionados à realidade do estudante consiste em um grande desafio aos educadores, pois a abstração característica da matemática é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento abstrato.

Quando procuramos entender a fundo qualquer fenômeno natural, há a necessidade de medir ou contar as grandezas envolvidas. No ato de medir ou de contar, recorreremos à linguagem matemática para expressar as magnitudes das medidas, as quantidades dos conjuntos e as relações entre elas, logo, ter o mínimo de fluência nessa linguagem é característica indispensável para entender e interagir com liberdade na realidade que estamos inseridos.

Dessa forma, abordar aspectos históricos relacionados a um tema pode contribuir para dar mais sentido ao conteúdo. Quando evidenciamos os aspectos humanos da construção do saber matemático, podemos inserir a história da evolução do conceito possibilitando que o estudante crie um significado sobre o que está aprendendo. Assim, acreditamos que ao inserir a história na prática pedagógica, podemos suprir a necessidade do contexto e possivelmente da aplicação prática, pois ao estudarmos sobre a construção histórica, certamente, em muitas de suas etapas, a matemática envolvida pode ser acessível aos estudantes e usada na elaboração de atividades para resolução de problemas.

As origens da matemática, ou pelo menos do seu objeto central de estudos, os números, aparecem pela primeira vez ainda na pré-história. A pré-história é um termo usado para designar o período da vida da espécie humana anterior ao surgimento da escrita, iniciando-se no momento em que os primeiros hominídeos começaram a usar ferramentas de pedra. Não há consenso sobre quando se iniciou a pré-história, mas é consenso que termina com o surgimento da escrita, cujas primeiras evidências são do período sumério, por volta de quatro mil anos a.E.C, conforme aponta Eves (2004).

Para Eves (2004, p. 25) usualmente convencionou-se que o surgimento das primeiras manifestações do que veio a tornar-se a Matemática antecedem o surgimento da escrita. Provém dos primeiros esforços da espécie humana para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, junto com a necessidade de contar, usando algum método de registro primitivo empregando o que chamamos hoje de correspondência biunívoca, associando-se por exemplo, um dedo dobrado, uma conta ou uma pedra para cada objeto que fazia parte de um agregado de coisas, animais, pessoas, etc.

Curiosamente, existe um artefato arqueológico, o osso *Ishango* (Figura 4.1), descoberto em *Ishango* no Zaire às margens do lago *Edward*. O objeto possui entalhes que possivelmente estão relacionados com processos de contagens, cuja interpretação suscita discussões entre os especialistas como afirmam Roque e Carvalho (2012).

Figura 4.1 – Osso Ishango, datado entre vinte mil e dez mil anos a.E.C.



Fonte: Roque e Carvalho (2012), p.2

Em relação ao surgimento da escrita, o cuneiforme (do latim *cuneus*, "cunha", e *forme*, "forma") é o sistema mais antigo de escrita até hoje conhecido, usado pelos babilônios. As primeiras fontes datam do quarto milênio a.E.C., provenientes da baixa Mesopotâmia, região atual do Iraque. A escrita cuneiforme registra algumas das mais antigas fontes que dispomos sobre as origens da matemática, e sua íntima relação com o surgimento da escrita, que *a priori*, servia para suprir a necessidade de se registrar quantidades

#### 4.1 A GEOMETRIA DOS BABILÔNIOS

Dentre as primeiras civilizações, os historiadores têm algumas referências de como os babilônios desenvolveram sua Matemática, pelo fato de as registrarem em tabletes de argila cozida, material que resiste à passagem do tempo.

Em sala de aula, sempre que surge a necessidade de concatenar o surgimento dos números naturais com um fato histórico, repetimos a fábula da contagem de ovelhas de um rebanho a qual associava-se cada rês a uma pedrinha que um suposto pastor da antiguidade possuía em seu alforje. Para Roque e Carvalho (2012) essa abordagem não está embasada em uma referência

segura, pois as fontes históricas para entender os acontecimentos desse período são escassas e fragmentadas.

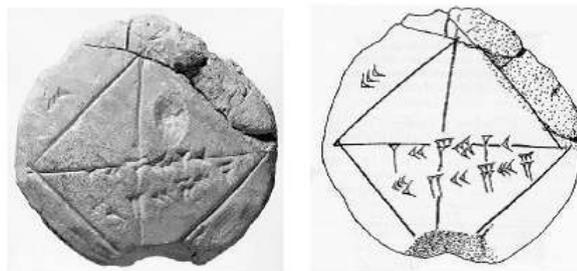
"Não foi somente o inventário de animais em rebanhos a maior inspiração para a criação dos números, e sim o registro de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência, sobretudo os necessários para a organização da sociedade." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.45).

À época, houve um grande crescimento e adensamento populacional na região Sul do atual Iraque. Nesse momento se consolidaram cidades e concomitantemente, técnicas de organização e administração da vida social. O surgimento de formas de registros de quantidades e de medidas podem estar associados às primeiras manifestações de uma escrita, oriunda da necessidade dessa nova conjuntura.

Um tablete de argila, o YBC 7289 (*Yale Babylonian Collection*, em tradução livre, Coleção Babilônica de Yale) na Figura 4.2, produzido entre 2000 e 1600 (a.E.C.) apresenta um cálculo de raiz quadrada, usando uma aplicação do conhecimento de área e o fato de que, para "calcular a raiz de  $k$  é achar o lado de um quadrado de área  $k$ ." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.20). Dessa forma, não é impreciso afirmar que o cálculo da área do quadrado já era conhecido antes da datação do referido tablete.

A ideia expressa no YBC 7289 consiste em tentar colocar dentro de um quadrado de lado  $k$  o maior quadrado possível cujo lado possa ser determinado e usar o resultado a seguir para encontrar o restante.

Figura 4.2 – Tablete YBC 7289

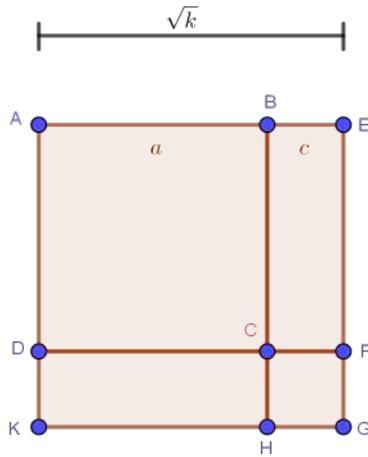


Fonte: Roque e Carvalho (2012), p.20

O método utilizado pelos babilônios era bastante interessante, uma vez que permitia obter valores aproximados para raízes que sabemos hoje serem irracionais.

Escrito em linguagem atual, Roque e Carvalho (2012, p.20-21) trazem uma interpretação desse problema proposta por Victor Katz em "História da Matemática", explicado a seguir.

Na Figura 4.3, se o segmento  $AE$  é cortado em um ponto  $B$ , o quadrado sobre  $AE$  é igual ao quadrado sobre  $AB$  mais o quadrado sobre  $BE$  mais duas vezes o retângulo formado por  $AB$  e  $BE$ . Se  $AB$  medir  $a$  e  $BE$  medir  $c$ , conforme a interpretação geométrica atual para o quadrado de uma soma, temos  $(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$ .

Figura 4.3 – Interpretação geométrica de  $(a + c)^2$ 

Fonte: Adaptado de Roque e Carvalho (2012), p.20.

Considerando que o quadrado de lado  $a$  tenha sua área conhecida e que a parte de medida  $c$  tem comprimento aproximado, ou seja, há incerteza no valor exato de  $c$ , a raiz de  $k$  mede  $a + c$ .

Para encontrar uma raiz mais precisa do que  $a$ , devemos procurar uma aproximação cada vez melhor para  $c$ . Analisando a área da região poligonal  $BEGKDC$  da Figura 4.3, notamos que a região mencionada é  $k - a^2$ . Essa região pode ser decomposta em dois retângulos de lados  $a$  e  $c$  e um quadrado de lado  $c^2$ , logo,

$$2ac + c^2 = k - a^2. \quad (4.1)$$

Tomando um  $c$  suficientemente pequeno, podemos desprezar  $c^2$ , obtendo assim,

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}. \quad (4.2)$$

Sendo  $a' \approx a + c$  a melhor aproximação possível para  $\sqrt{k}$ , obtemos

$$\begin{aligned} a' &= a + \frac{k - a^2}{2a} \\ &= \frac{2a^2 + k - a^2}{2a} \\ &= \frac{k + a^2}{2a} \\ &= \frac{1}{2} \left( a + \frac{k}{a} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Note que  $a' \approx a + c$  é uma aproximação de  $\sqrt{k}$  mais precisa que  $a$ , basta observarmos a Figura 4.3, que notamos isso de imediato.

Isso decorre também do fato de que, se  $a < \sqrt{k}$ , então  $\frac{k}{a} > \sqrt{k}$  e se  $a > \sqrt{k}$ , então  $\frac{k}{a} < \sqrt{k}$ .

*Demonstração.* Como  $a$  e  $k$  são números positivos e não nulos, temos:

$$a < \sqrt{k} \iff a\sqrt{k} < \sqrt{k}\sqrt{k} = k \iff \sqrt{k} < \frac{k}{a}. \quad (4.4)$$

Para o caso  $a > \sqrt{k}$ , temos:

$$a > \sqrt{k} \iff a\sqrt{k} > \sqrt{k}\sqrt{k} = k \iff \sqrt{k} > \frac{k}{a}. \quad (4.5)$$

□

A geometria dos mesopotâmios era essencialmente métrica, onde eram aplicadas algumas propriedades de polígonos e poliedros, porém, não há registros das descobertas dessas propriedades e de como conheciam resultados sobre áreas e volumes. Nos tabletas, registravam-se métodos de cálculo muito particulares para cada situação, sem generalizações, uma espécie de receita a ser aplicada, com diferentes procedimentos para diferentes situações. "Os exemplos de problemas babilônicos e egípcios às vezes são bem artificiais, simplificações de situações reais, propostos para exercitar ou verificar as habilidades de cálculo dos escribas." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.45)

O que se sabe hoje sobre o cálculo de área utilizado pelos babilônios está registrado em tabletas de argila cozida, achados em sítios arqueológicos na região da Mesopotâmia. Dentre eles, o tablete denominado YBC 7302 (Figura 4.4) apresenta o cálculo da área de um círculo. Esse tablete indica que os antigos babilônios calculavam com razoável precisão áreas de figuras cujos lados não são segmentos de retas.

Figura 4.4 – Tablete YBC 7302



Fonte: Roque e Carvalho (2012), p.46

Primeiramente, devemos ter em mente o modo como os babilônios definiam o círculo, que não é a mesma definição usada atualmente. De acordo com Roque e Carvalho (2012), para nós,

o círculo é obtido traçando-se uma circunferência com um compasso, conforme o Postulado III de Euclides, descrito no Livro I dos *Elementos*. Já os babilônios o concebiam como a figura limitada por uma circunferência e obtinham sua área usando uma técnica que levava em conta o comprimento da circunferência, sem usar o diâmetro.

O conceito babilônico de círculo fundamenta-se na ideia de circunferência. Para a matemática moderna, a rigor, não pré-definir o que é uma circunferência, torna inconsistente o que é círculo. Mas para as finalidades da época, o resultado obtido era satisfatório.

A seguir, apresentaremos uma discussão do fato, sob a ótica do conhecimento que temos hoje levando em conta o conceito babilônico para área do círculo, conforme exposto em Roque e Carvalho (2012).

O tablete YBC 7302, Figura 4.4, registra os números, em representação sexagesimal, 3 (a circunferência do círculo), 9 e 45 (a área do círculo). Nesse contexto, 9 é o quadrado da circunferência.

Se  $A = \pi r^2$  é a área de um círculo de comprimento  $S = 2\pi r$  e raio  $r$ , então  $r = \frac{S}{2\pi}$ , logo,

$$A = \pi \frac{S^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi} S^2, \quad (4.6)$$

fazendo  $\pi = 3$ , temos  $A = \frac{1}{12} S^2$ .

Em um sistema sexagesimal,  $1 = 60$ , logo  $\frac{1}{12} = 5$ , usando  $\pi = 3$ , segue que

$$A = 5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45. \quad (4.7)$$

Porém, afirmar que os babilônios usavam uma aproximação para  $\pi$  é um anacronismo, pois, usamos  $\pi$  como uma constante de proporcionalidade que relaciona a área e o quadrado do raio de um círculo, enquanto que os babilônios tinham um processo assemelhado a uma "regra retórica" onde o quadrado da circunferência do círculo era dividido por 12.

Em um outro cálculo, para obter a área da base de um cilindro, de diâmetro 0,05, segundo as instruções do escriba, triplicavam o diâmetro para obter o comprimento da circunferência:

"Triplique a linha divisória 0,05 tal que 0,15 aparecerá. A circunferência do tronco é 0,15. Combine (faça o quadrado) de 0,15 tal que 0,03;45 aparecerá. Multiplique 0,03;45 por 0,05 e terá 0,00;18;45, a área aparecerá." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 47)

Destacamos que os babilônios não possuíam uma estimativa para  $\pi$ , pois multiplicar por três, sob o ponto de vista dos babilônios, era uma operação e não a utilização de número considerado uma constante como é a concepção moderna.

Além dos povos da Mesopotâmia, os egípcios também se destacaram entre as grandes civilizações da antiguidade. Constituíram dinastias que prosperaram por mais de cinco mil anos,

exercendo hegemonia na região norte da África, como potência cultural, religiosa, tecnológica e bélica, e o uso da matemática teve grande relevância na consolidação desse império.

## 4.2 A GEOMETRIA DOS EGÍPCIOS

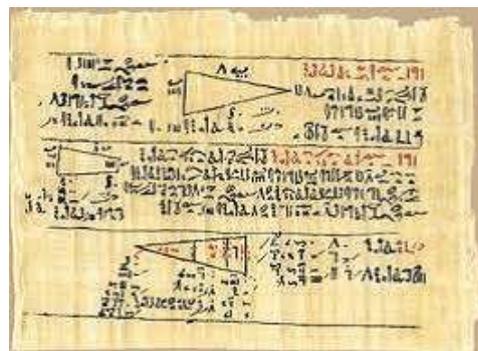
Seguiremos com a apresentação da geometria, especificamente o cálculo de área praticado no Egito Antigo, cujas "primeiras fontes sobre a escrita egípcia são datadas do quarto milênio a.E.C. e a geometria egípcia que se tem registros, se baseava em procedimentos para cálculo de áreas e volumes." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.47).

A civilização Egípcia também desenvolveu um sistema de numeração e uma geometria, porém, as fontes históricas não são tão vastas quanto as babilônicas. Isso se deve ao modo como a escrita era registrada, em folhas de papiro, que não resistem tão bem ao tempo quanto os tabletas de argila dos mesopotâmios.

Uma das fontes históricas mais conhecidas da matemática egípcia é o Papiro de *Rhind*, com escrita hierática, datado de cerca de 1650 a.E.C. Seu nome se deve a Alexander Rhind, que o comprou por volta de 1850, em Luxor no Egito. A escrita desse papiro, também chamado de Papiro de *Ahmes*, é atribuída ao escriba *Ahmes*, que o copiou. Atualmente o papiro faz parte do acervo do Museu Britânico.

O Papiro de *Rhind* (Figura 4.5) é uma das referências mais estudadas sobre a antiga cultura egípcia, em especial a matemática praticada por esta civilização, consta nesse papiro uma "solução para o problema da área do círculo e muitas aplicações da matemática em problemas práticos." (EVES, 2004, p.70).

Figura 4.5 – Papiro de Rhind



Fonte: Roque e Carvalho (2012), p.7

Traremos a seguir a resolução feita por Roque e Carvalho (2012) de um problema do Papiro de *Rhind*, que pede o cálculo do volume de um celeiro cilíndrico para condicionamento de grãos. Nesse problema, interessa-nos a forma com que efetuavam o cálculo da área da base desse cilindro.

**Exemplo 4.1.** Problema 41 do Papiro de Rhind. "Fazer um celeiro (ou um cilindro) redondo de 9 por 10".

**Resolução:**

A primeira parte do problema é calcular a área da base, em forma de círculo, usando o seguinte procedimento: "Subtraia  $1/9$  de 9 de 9: 1. Resta: 8. Multiplique 8 por 8 obtendo 64. Logo, 64 é a área do círculo de diâmetro 9. Observe o cálculo,

$$A = 9 - \frac{1}{9} \times 9 = 9 - 1 = 8. \quad (4.8)$$

Portanto, a área do círculo da base é  $8 \times 8 = 64$ . Como a altura é 10, o volume do celeiro é 640.

A técnica exposta no Exemplo 4.1 fornece uma boa aproximação para a área do círculo, como podemos verificar no próximo exemplo.

**Exemplo 4.2.** Aplicando a fórmula moderna usual e em seguida a técnica dos antigos egípcios, determine área de um círculo cujo diâmetro tem 12 unidades de comprimento. Use  $\pi = 3,14159$ .

**Resolução:**

Pela fórmula usual, temos:

$$\begin{aligned} A &= r^2 \times \pi \\ &= \left(\frac{12}{2}\right)^2 \times \pi \\ &= 36 \times 3,14159 = 113,09724. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Agora, determinando a área com a técnica usada pelos egípcios, subtraindo  $1/9$  de 12 de 12, e denotando esse resultado por  $K$ , temos:

$$\begin{aligned} K &= 12 - \frac{1}{9} \times 12 \\ &= \frac{108 - 12}{9} = \frac{96}{9} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Chamando de  $A$  a área do círculo, e conforme a técnica egípcia, fazendo  $A = K^2$ , temos:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{96}{9}\right)^2 \\ &= \frac{9216}{81} = 113,777... \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nota-se o quão satisfatório era o valor obtido pelos egípcios comparando com o resultado obtido aplicando a fórmula moderna usual.

A subtração de  $1/9$  não está relacionada ao fato de o lado ser 9, essa fração é uma constante, presente em vários cálculos relacionados a áreas de círculos. Deveria ser sempre multiplicada pelo diâmetro, porém os autores observam que pode-se imaginar o quanto a consideração de um lado diferente de 9 iria complicar os cálculos, conforme exposto no Exemplo 4.2.

Ainda sobre a área do círculo calculada pelos egípcios, no exemplo a seguir podemos ver como é possível inferir que eles poderiam conhecer algum valor aproximado para o número  $\pi$  e de forma incauta, entender que esse número era uma constante de proporcionalidade para a obtenção da área de um círculo, tal qual usamos atualmente.

**Exemplo 4.3.** *Usando a fórmula da área do círculo, como conhecemos, e os dados do problema egípcio sobre o volume do celeiro, podemos explorar um possível valor para  $\pi$ :*

**Resolução:**

$$\begin{aligned} A &= \pi \times r^2 \\ 64 &= \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ 64 &= \pi \times (4,5)^2 \\ \pi &= \frac{64}{20,25} \\ \pi &\approx 3,16. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Obtivemos uma boa aproximação para  $\pi$ , mas a constante multiplicativa era  $1/9$ , que devia ser operada com o diâmetro, e não um número, logo, ao se afirmar que os egípcios tinham conhecimento da existência de uma constante com valor aproximado de  $\pi$  estamos recaindo em um anacronismo.

O anacronismo é um equívoco provocado quando utilizamos conceitos e ideias de uma época para analisar fatos de tempos anteriores. Para Roque (2012), não podemos avaliar um determinado tempo histórico à luz de valores, ideias e hegemonia do conhecimento humano que não estão de acordo com o tempo histórico em questão. Essa observação faz-se necessária quando abordamos tópicos sobre o desenvolvimento histórico de um tema/conceito, não só de matemática, mas em qualquer outro ramo das ciências.

Ao estudarmos até aqui um pouco sobre a forma como os babilônios e egípcios concebiam a circunferência e o círculo, conseguimos perceber as diferenças conceituais e pudemos observar como aplicavam técnicas retóricas para calcular a área desse tipo de figura plana. O Exemplo 4.3 nos traz uma breve noção de como podemos cometer algum tipo de deslize recaindo em um anacronismo.

Por muito tempo, para Roque (2012, p.90-92) a ideia de que a geometria surgiu nos arredores do Nilo, devido à necessidade de medir as terras após cada cheia, para a cobrança de

impostos, foi quase como um senso comum entre os professores de matemática, e até mesmo entre autores de livros didáticos. Muitos deles contextualizam o início do estudo da geometria usando estes fatos pois a palavra geometria pode ser traduzida como medida de terra. Vem daí a ideia de que seu surgimento está ligado a agrimensura. A autora relata que essa narrativa tem origem nos escritos de Heródoto datados do século V a.E.C., como afirma também que para Aristóteles (384 - 322 a.E.C.), a Matemática emergiu das classes sacerdotais do Antigo Egito, pois lá, às castas abastadas era permitido o gozo do tempo livre e o direito ao lazer.

Como podemos perceber, babilônios e egípcios da antiguidade possuíam técnicas e habilidades relacionadas à matemática bastante sofisticadas, pois produziam resultados bem satisfatórios para o que se propunha fazer. Mas seus métodos se diferenciavam do que os gregos faziam e entendiam por matemática e em especial, a geometria. Esses últimos valorizavam demonstrações e generalizações, abdicando em muitos casos das aplicações práticas de sua matemática, e, até onde se sabe, não existe "uma documentação confiável que possa estabelecer a transição entre a Matemática mesopotâmica e egípcia e a Matemática grega." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 62).

### 4.3 GEOMETRIA DA GRÉCIA ANTIGA

A matemática como conhecemos hoje, tem suas origens na Grécia Antiga. Por volta do século V (a.E.C.) o crescimento populacional e a dispersão do povo grego pela região do Mediterrâneo originaram a mais importante instituição da antiguidade, trata-se da *polis* – a cidade-estado grega, modelo administrativo que possibilitava que o cidadão pudesse reger sua cidade. Surgiram então discussões, debates e confrontos de ideias acerca da melhor forma de fazê-lo. Basicamente, vencia a pessoa que expressasse "ter razão" sobre o objeto de debate e dessa forma, para Roque e Carvalho (2012), o pensamento racional foi se constituindo nesse contexto e ganhou impulso neste novo modo de vida e organização social.

*Ágora* era o nome que se dava às praças públicas na Grécia Antiga, onde ocorriam reuniões. Na *ágora* os gregos debatiam assuntos ligados à vida da *polis*, a cidade. Com esses debates originou-se a necessidade de julgar a veracidade dos argumentos, e os sábios dessa época dedicaram grande parte de suas obras a propor maneiras de distinguir os raciocínios verdadeiros dos falsos bem como estabelecer critérios à seleção. Com Aristóteles surge o desenvolvimento inicial da lógica,

"na qual os critérios de verdade estarão mais ligados à pura coerência, ao rigor da demonstração. Ou seja, em uma cadeia de conclusões, tudo deve decorrer daquilo que antes foi dito, sem que haja contradição no interior do raciocínio." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.-62).

A construção do pensamento lógico formal começa a ser registrada nas obras de Platão (428 - 347 a.E.C.) e Aristóteles, a partir do final do século V a.E.C., bem como, de forma indireta, grande parte do conhecimento que dispomos hoje sobre a Matemática grega anterior a estes dois filósofos.

Ao fim do século VII a.E.C. algumas manifestações de uma geometria mais refinada já apareciam na arquitetura e nas artes gregas. Roque e Carvalho (2012) relatam que existem escritos do século VI a.E.C tratando de temas relacionados à astronomia e à conceitos geométricos, como círculos e ângulos e muitos desses resultados podem ter ficado conhecidos como sendo de Tales de Mileto (640?-564? a.E.C.), através de escritos de Eudemo de Rodas (370 – 300 a.E.C), membro da academia platônica. Além disso, na sua obra *Metafísica*, Aristóteles atribuía a Tales de Mileto o título de Fundador da Filosofia, dessa forma, aliado à sua reputação como geômetra, pode ter levado a que se atribuísse a ele importantes descobertas geométricas.

Desta forma, há evidências de que existia uma matemática grega antes de Tales de Mileto, sucedido por Pitágoras de Samos (586?-500? a.E.C.), sucedido por Euclides de Alexandria (323 - 283 a.E.C), e entre Pitágoras e Euclides, situam-se Platão e Aristóteles.

Em Platão e Aristóteles, especialmente em Platão, iniciou-se um importante avanço para o processo de uniformização e padronização no método de trabalho dos matemáticos. Na Academia, Platão "articula o trabalho dos pensadores à sua volta para que se dediquem a formalizar os conceitos e técnicas utilizadas" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.63), criticando o modo indiscriminado como o faziam à época.

Não há evidências históricas, segundo Roque (2012, p.178), de que os estudos praticados pelos filósofos citados tinham cunho institucional, é bem possível que esse conhecimento provinha de círculos de natureza privada.

Dessa forma, a visão de que os gregos tinham uma matemática abstrata, de caráter hipotético-dedutivo, de linguagem consensual, possui evidências a partir dos *Elementos* de Euclides, onde temos algumas das proposições usadas por Arquimedes (287 - 212 a.E.C.) para calcular a área de um segmento parabólico, aplicando uma versão mais refinada do Princípio da Exaustão, atribuído a Eudoxo de Cnido (408-355 a.E.C), discípulo da academia platônica.

Figura 4.6 – Fragmento antigo dos *Elementos*



Fonte: Roque (2012), p.151

A Figura 4.6 mostra uma imagem do mais antigo fragmento dos Elementos encontrados até o momento, em Oxyrhynque, às margens do Rio Nilo, datado aproximadamente dos anos 100 da Era Comum.

A obtenção do valor da grandeza física *área*, para nós, consiste em associar a ela número e uma unidade de medida, porém os gregos não desfrutavam dessa concepção. Determinavam áreas por comparações, conforme Roque (2012) os gregos não tratavam as grandezas pela sua associação a um número. Buscavam encontrar áreas equivalentes para medir, por exemplo a área de uma figura  $F$  qualquer, fazia-se necessário encontrar uma figura que fosse a mais simples possível cuja área fosse igual à de  $F$ .

A figura geométrica regular mais simples é o quadrado, e dessa forma o ato de encontrar a quadratura de uma região plana, consistia em construir um quadrado com área igual à região dada. O termo *quadrar uma área*, empregado pelos gregos, seria equivalente ao nosso *cálculo de área*, resguardados eventuais anacronismos entre essas duas épocas.

Um problema que ocupou os matemáticos durante muitos séculos, inclusive os da Grécia Antiga, foi a quadratura de figuras planas com lados curvos. Os gregos atacaram esse problema de forma bastante sofisticada, usando uma técnica que os matemáticos europeus, a partir do século XVII E.C., passaram a denominar "método da exaustão".

#### 4.3.1 O Método da Exaustão de Eudoxo

Uma ferramenta para cálculo de área muito difundida e estudada entre os círculos de matemáticos da Grécia Antiga, era uma técnica muito peculiar, um pouco trabalhosa, mas satisfatoriamente eficiente de se obter a medida da área de figuras planas não limitadas por segmentos de retas, de forma indireta, o método da exaustão.

Euclides apresenta na proposição XII.2 dos *Elementos*, o Método da Exaustão, que atribui a Eudoxo. A demonstração deste método pode ser iniciada usando a Proposição 1 do livro X, atualmente conhecida como *Lema de Euclides*. Não demonstraremos essa proposição, pois julgamos mais enriquecedor ilustrá-la com explicações e exemplos.

**Proposição 4.1.** (*Proposição X.1 dos Elementos*) *Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.*

A Proposição 4.1 mostra frases elaboradas de uma forma que não estamos acostumados a ler, também traz palavras não usuais, pois ela faz parte do estilo literário de sua época, que é diferente do nosso. Muitas vezes, temos dificuldade de interpretar as traduções feitas dos textos originais, como é esse caso, extraída de Roque (2012, p.204).

Usando uma linguagem dialógica, empregando palavras e construções de frases com a ortografia do nosso tempo, pela Proposição 4.1 entende-se que dadas duas grandezas  $F$  e  $G$  de mesmo tipo (isto é, por exemplo, dois comprimentos ou duas áreas ou dois volumes) e supondo que  $F > G$ . Se da grandeza  $F$  retirarmos uma parte maior que sua metade, obteremos um resto  $F_1$ . Se de  $F_1$ , retirarmos uma parte maior que sua metade, o que resta é uma grandeza  $F_2$ . Se de  $F_2$  retirarmos também uma parte maior que sua metade, nos resta a grandeza  $F_3$ . Repetindo esse processo um número suficiente de vezes, obteremos uma grandeza  $F_n$  menor que a grandeza  $G$  dada inicialmente, ou seja, a diferença  $F_n$  pode se tornar menor que qualquer outra grandeza do mesmo tipo dada.

Nota-se também, que na Proposição 4.1 não há referência a processos infinitos. Para os gregos da época, o processo é reiterado um número finito  $n$  de vezes, por maior que seja o  $n$ , de modo a obter uma grandeza menor que qualquer outra que possa ser adotada como unidade de medida.

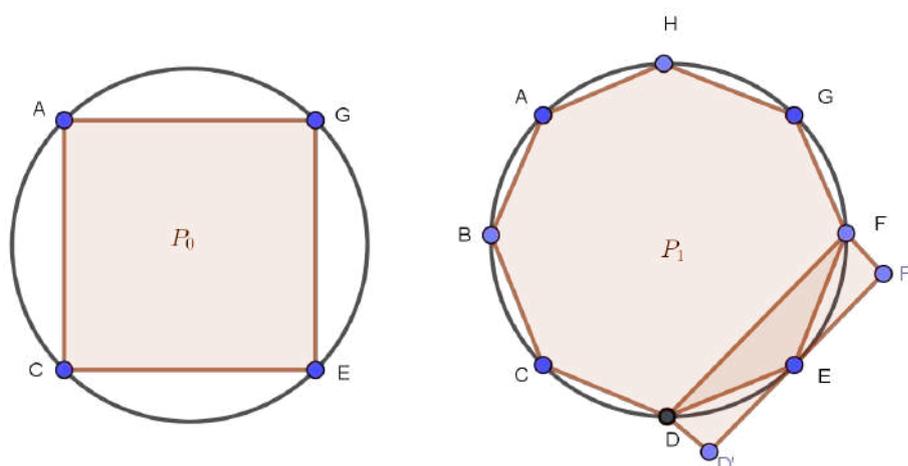
Inicialmente, aplicaremos a Proposição 4.1 em uma sequência de polígonos regulares inscritos, no exemplo a seguir:

**Exemplo 4.4.** *Mostre que dado um círculo  $C$  de área  $S(C)$  e  $\varepsilon > 0$ , existe, inscrito em  $C$  um polígono regular de área  $S(P)$  tal que,  $S(C) - S(P_n) < \varepsilon$  para um  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande.*

**Resolução.**

*Como o procedimento é análogo para todas as iterações, mostraremos a exaustão entre  $P_0$  e  $P_1$  que são polígonos regulares inscritos no círculo  $C$  com 4 e 8 lados respectivamente, representados na Figura 4.7.*

Figura 4.7 – Quadrado  $P_0$  e octógono  $P_1$ .



Fonte: Autoria própria.

Seja  $P_0$  o quadrado  $ACEG$  e  $P_1$  o octógono  $ABCDEFGH$ , ilustrados na Figura 4.7, usaremos  $S(P_0)$  para a área de  $P_0$  e  $S(P_1)$  para a área de  $P_1$ . Considerando também um círculo  $C$  de área  $S(C)$ , como  $P_0$  está inscrito no círculo  $C$ , iniciamos o processo de exaustão, fazendo

$$S(C) - S(P_0) = M_0, \quad (4.13)$$

e, ao dobramos o número de lados de  $P_0$ , obtemos o polígono  $P_1$  também inscrito em  $C$ . Temos agora,

$$S(C) - S(P_1) = M_1, \quad (4.14)$$

como  $S(P_1) > S(P_0)$  então,  $M_1 < M_0$ .

Sejam  $M_0 - M_1 = M$  com  $M > 0$ ,  $S(\widehat{DEF})$  a área do segmento circular  $\widehat{DEF}$ ,  $S(FF'D'D)$  a área do retângulo  $FF'D'D$  e  $S(\triangle DEF)$  a área do triângulo isósceles  $DEF$ , conforme a Figura 4.7, temos,

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= [S(C) - S(P_0)] - [S(C) - S(P_1)] \\ &= S(P_1) - S(P_0) \\ &= 4 \times S(\triangle DEF) \\ &= 2 \times S(FF'D'D) > 2 \times S(\widehat{DEF}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Note que

$$2 \times S(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} \times 4 \times S(\widehat{DEF}), \quad (4.16)$$

e isso é verdade para qualquer número  $\alpha$ , de fato,  $2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \alpha$ . Mas  $4 \times S(\widehat{DEF}) = S(C) - S(P_0) = M_0$ , segue-se então que

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &> \frac{1}{2} \times 4 \times S(\widehat{DEF}) = \frac{1}{2} M_0 \\ &> \frac{1}{2} M_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pela Proposição X.I dos Elementos, repetindo-se o processo tantas vezes quanto possível, obtemos uma sequência  $P_0, P_1, \dots, P_n$  de polígonos regulares inscritos em  $C$ , onde

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2} \times [S(C) - S(P_n)] = \frac{1}{2} \times M_n. \quad (4.18)$$

Portanto, para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  um número suficientemente grande de iterações, para todo  $\varepsilon > 0$  existirá um polígono regular inscrito no círculo  $C$  tal que  $S(C) - S(P_n) < \varepsilon$ .

O método da exaustão foi empregado em muitos problemas de quadraturas de figuras limitadas por poligonais fechadas, e também, figuras com "lados curvos" ou seja, que não eram segmentos de retas.

As proposições X.1 e X.2 dos *Elementos*, também foram aplicadas para demonstrar a existência dos segmentos incomensuráveis, bem como usadas por Eudoxo para elaborar sua Teoria das Proporções, fundamental para contornar o problema da incomensurabilidade, e para o desenvolvimento da matemática como um todo.

### 4.3.2 A Incomensurabilidade

Os matemáticos da Grécia Antiga estudavam profundamente a comparação de grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. Essa comparação pode ser aplicada ao ato de medir essas grandezas.

Dado um segmento  $AB$ , como na Figura 4.8, para medi-lo, fixaremos um segundo segmento de medida  $u$  denominado segmento unitário cuja medida é 1.

Figura 4.8 – Segmento  $AB$  e segmento unitário  $u$ .



Fonte: Autoria própria.

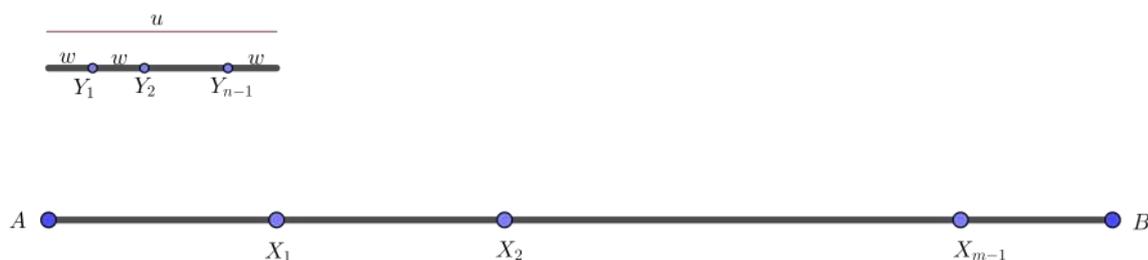
Se  $n - 1$  pontos decompuserem o segmento  $AB$  em  $n$  segmentos justapostos de mesma medida, e todos congruentes a  $u$ , dizemos que  $u$  cabe  $n$  vezes em  $AB$  e que a medida de  $AB$  é igual a  $n$ , como ilustrado na Figura 4.9.

Figura 4.9 – Segmento  $AB$  decomposto em  $n$  partes de medida  $u$ .



Fonte: Autoria própria.

Quando  $u$  não cabe uma quantidade exata de vezes em  $AB$ , neste caso, tomamos um outro segmento  $w$ , que mede o segmento  $u$  em  $n$  unidades e  $AB$  em  $m$  unidades simultaneamente, como na Figura 4.10.

Figura 4.10 – Segmento  $w$  que mede simultaneamente  $u$  e  $AB$ .

Fonte: Autoria própria.

Para esse caso, a medida de  $AB$  não será um número inteiro e ao encontrarmos o segmento  $w$ , podemos constatar que  $AB$  e  $u$  são comensuráveis em relação a ele e, dessa forma, a medida de  $w$  será  $\frac{1}{n}$  e a medida de  $AB$  será  $m$  vezes a medida de  $w$ , ou seja,  $m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ .

Mas nem sempre dois segmentos quaisquer são comensuráveis. Pois existem segmentos  $AB$  e  $u$  sem a unidade comum  $w$ , chamados segmentos incomensuráveis. Esse fato é conhecido desde os antigos gregos pois conforme Gonçalves e Possani (2019, p.16) no livro X, proposição 2, dos *Elementos* consta que:

**Definição 4.1.** *Dizem-se grandezas comensuráveis as que se medem pela mesma medida, e incomensuráveis aquelas das quais não é possível nada tornar-se medida comum.*

Além disso, Gonçalves e Possani (2019, p.16) observam que a naturalidade com que essa definição está expressa, não indica que a incomensurabilidade abalou os fundamentos da matemática grega ao ser verificada. Na interpretação desses autores, parece-se bem mais como um *Problema em Aberto* que com o tempo e os esforços de muitos estudiosos, pode ser contornado.

Porém, para muitos estudiosos da história da matemática tais como Eves e Boyer, a descoberta da incomensurabilidade provocou uma crise na escola pitagórica que acreditavam na existência da racionalidade para quaisquer comparações entre grandezas de mesma espécie.

A suposta "crise dos incomensuráveis" não é consenso entre os pesquisadores, muitos vêm questionando esse evento ao longo das últimas décadas, argumentando falta de evidências históricas que a comprove, a exemplo de Roque e Carvalho (2012), quando apontam não existirem alusões a escândalo algum em nenhum escrito antigo conhecido que cita ou aborda a incomensurabilidade, tais como alguns escritos de Platão e Aristóteles. Roque e Carvalho (2012), complementam ainda que Aristóteles não cita o problema dos incomensuráveis nem mesmo em sua crítica aos pitagóricos.

Independente do fato de ter sido estabelecida uma crise, Eves (2004), indica que a descoberta de segmentos incomensuráveis foi uma das grandes realizações dos pitagóricos, e ao

mesmo tempo trouxe à tona um grande problema para as teorias sobre razões e proporções usadas até então.

Ainda sobre o problema da incomensurabilidade na matemática grega, Fowler (1999) aponta que *"this provoked problems in the foundation of mathematics that were not resolved before the discovery of the proportion theory that we find in Book V of Euclid's Elements."* (FOWLER, 1999, p. 365).

Em tradução livre, "isso provocou problemas nos fundamentos da matemática que não foram resolvidos antes da descoberta da teoria das proporções que encontramos no Livro V dos Elementos de Euclides." Logo, Fowler (1999) afirma que a existência de segmentos incomensuráveis eram conhecidos antes dos *Elementos* e originavam problemas difíceis de serem contornados.

Nos tempos de Eudoxo de Cnido (408-355 a.E.C.), a quem Euclides atribui a teoria das proporções exposta na Definição V.5. (Definição 5, do livro V dos *Elementos*), a incomensurabilidade já era um problema. Eudoxo foi discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas (428-347 a.E.C) e por volta de 370 a.E.C. propôs uma nova teoria das proporções possibilitando contornar o problema da incomensurabilidade, que séculos mais tarde inspirou o matemático Dedekind na elaboração da sua teoria sobre os cortes dos números racionais.

Uma técnica de comparar razões sem a necessidade do conceito de número racional é a *antifairese*, ou *subtrações recíprocas*. Para Roque e Carvalho (2012), nos trabalhos com aritmética no final do século IV a.E.C. já existiam resultados através do procedimento da antifairese empregados no tratamento de segmentos incomensuráveis, mas não eram considerados provas formais da incomensurabilidade. Na geometria, usava-se a antifairese no ato de aproximar razões entre segmentos incomensuráveis e com poucos exemplos dessa aplicação, ao menos conhecidos entre os historiadores.

Uma outra interpretação da Definição 4.1, é dada por Roque e Carvalho (2012) e esclarece que é possível demonstrar geometricamente a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado. Usando o método das subtrações sucessivas, ou seja, a antifairese.

**Definição 4.2.** *Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, a que resta nunca mede a precedente, as grandezas são incomensuráveis.*

A Definição 4.2 é equivalente ao algoritmo moderno conhecido como "algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum" e sua função, como o próprio nome já sugere, é encontrar o maior divisor comum entre dois números.

Em qualquer uma das versões sobre o surgimento das grandezas incomensuráveis, seja na escola pitagórica ou não, podemos considerá-la uma descoberta importante que, ao longo dos séculos seguintes motivou o desenvolvimento de novos temas da matemática e possibilitou que

o conceito de número fosse ampliado pois deste momento em diante conheciam-se números que não podiam ser racionalizados.

*Antifairese* é a tradução literal de subtrações recíprocas. Etimologicamente seria uma aproximação de *Antho-hypo-hairesis*, entre duas grandezas. O termo pode ser fragmentado da seguinte forma: *Anto* = recíproco; *Hypo* = sub; *Hairesis* = tração. Na álgebra moderna o procedimento é conhecido como **Algoritmo de Euclides** para o cálculo do máximo divisor comum. A antifairese entre os números  $A$  e  $B$  será denotada por  $\text{Ant}[A, B] = (m, n, p, \dots)$ .

**Exemplo 4.5.** *Determine a razão antifairética entre os números 60 e 18.*

**Resolução.**

- 18 cabe 3 vezes em 60 e restam 6;
- 6 cabe 3 vezes em 18 e resta 0.

Portanto, a razão antifairética entre 18 e 60 é  $\text{Ant}[18, 60] = (3, 3)$ .

Observe que o último resto diferente de zero é seis, que por sua vez é o máximo divisor comum entre 18 e 60.

**Exemplo 4.6.** *Determine a razão antifairética entre os números 18 e 61.*

**Resolução.**

- 18 cabe 3 vezes em 61 e restam 7;
- 7 cabe 2 vezes em 18 e restam 4;
- 4 cabe 1 vez em 7 e restam 3.
- 3 cabe 1 vez em 4 e resta 1.

Portanto, a razão antifairética entre 18 e 61 é  $\text{Ant}[18, 61] = (3, 2, 1, 1)$  e resta 1.

Observe que o fato de ter restado 1, significa que 18 e 61 são primos entre si.

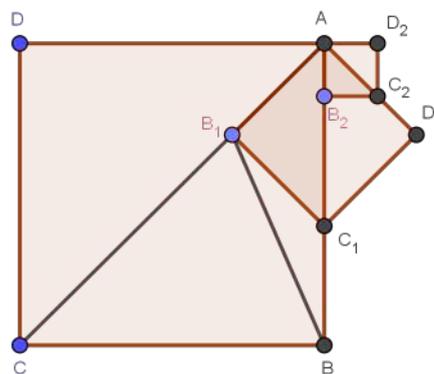
Note que nos Exemplos 4.5 e 4.6, conseguimos finalizar a antifairese e determinar se os números possuem um divisor comum diferente de 1 ou se são primos entre si. E quando não é possível determinar a antifairese entre duas grandezas de mesma espécie? Podemos apresentar uma resposta para a pergunta mostrando um caso onde não existe uma boa razão antifairética entre a diagonal de um quadrado e seu lado, conforme mostram Roque e Carvalho (2012, pp.77-78).

Nessa demonstração, os autores se esforçam para construir uma prova, que possivelmente poderia ter sido aplicada pelos gregos, procurando usar apenas a notação e a linguagem matemática desenvolvida até o ano 300 a.E.C., época em que Euclides escreveu os *Elementos*. Um outro apontamento importante feito por Roque (2012) é que ainda não temos evidências confiáveis, indicando em que exemplo a incomensurabilidade entre grandezas foi verificada pela primeira vez, parecendo inclusive ser improvável que o método da antifairese tenha sido o protagonista dessa descoberta.

Essa demonstração será feita por contradição. Estabeleceremos por hipótese que existe comensurabilidade entre as grandezas envolvidas e chegaremos em um ponto onde a tese nega a hipótese, apresentando aí a contradição. Outros recursos também serão utilizados, tais como propriedades geométricas do quadrado e dos triângulos, construções geométricas, o próprio conceito de comensurabilidade e por fim, será verificada a inexistência da razão antifairética entre a diagonal e o lado de um quadrado, concluindo que são incomensuráveis. Por se tratar de uma argumentação muito extensa, não iremos registrar essa demonstração dentro do padrão usual para demonstrações matemáticas.

A Figura 4.11 representa um quadrado  $ABCD$  de lado  $AB$  e diagonal  $AC$ . Por hipótese, consideramos que  $AB$  e  $AC$  são comensuráveis. Então existe um segmento  $AP$  que mede  $AB$  e  $AC$  simultaneamente. Nessa figura também representamos um quadrado  $AB_1C_1D_1$ , menor que  $ABCD$ , construído de forma que o lado  $AB_1$  está sobre  $AC$ , a diagonal  $AC_1$  está sobre  $AB$  e o segmento  $B_1C$  é congruente ao lado  $BC$ .

Figura 4.11 – Quadrados com lados sobre a diagonais  $AC$  e  $AC_1$ .



Fonte: Adaptado de Roque e Carvalho (2012, p.77).

O quadrilátero  $AB_1C_1D_1$  é um quadrado dado que seus lados  $AD_1$  e  $C_1D_1$  são obtidos por construção. Dessa forma o ângulo  $AB_1C_1$  é reto e  $B_1AC_1$  é metade de um ângulo reto, logo o triângulo  $AB_1C_1$  é isósceles. Assim,  $AB_1 = B_1C_1$ .

Como estamos supondo que  $AB$  e  $AC$  são comensuráveis, deve existir um segmento  $AP$  que mede  $AB$  e  $AC$ , então  $AB_1$  e  $AC_1$  também são medidos por  $AP$ , logo, podemos escrever  $AB_1$  e  $AC_1$  em termos de  $AB$  e  $AC$ , pois estes também são medidos por  $AP$ . Dessa forma, temos

$$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB, \quad (4.19)$$

pois por construção,  $B_1C = CB = AB$ .

Mas  $AC_1 = AB - BC_1$ , logo, para escrevermos  $AC_1$  em termos de  $AB$  e  $AC$  precisamos provar antes que  $BC_1 = B_1C_1$ .

Como  $BC = B_1C$ , o triângulo  $CB_1B$  é isósceles e os ângulos  $CB_1B$  e  $CBB_1$  são iguais. Como os ângulos  $C_1B_1C$  e  $CBC_1$  são retos, os ângulos  $C_1B_1B$  e  $C_1BB_1$  são também iguais e o triângulo  $BB_1C_1$  é isósceles e  $BC_1 = B_1C_1$ , então, segue que

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1. \quad (4.20)$$

Como  $AB_1C_1D_1$  é um quadrado, temos  $B_1C_1 = AB_1$ , então segue da Equação (4.20), que

$$\begin{aligned} AC_1 &= AB - AB_1 \\ &= AB - (AC - AB) \\ &= AB + AB - AC \\ &= 2AB - AC. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Desse modo, temos que  $AC_1 = 2AB - AC$ , como por hipótese,  $AB$  e  $AC$  são comensuráveis com relação à unidade  $AP$ , então  $AB_1$  e  $AC_1$  também o serão, como demonstrado nas Equações (4.19) e (4.21).

Repetindo o procedimento, construímos um novo quadrado (ver Figura 4.11), agora sobre a diagonal de  $AB_1C_1D_1$ , marcando sobre  $AC_1$  o ponto  $B_2$  tal que  $B_2C_1 = B_1C_1$ .

Por  $B_2$ , traçamos a perpendicular  $B_2C_2$  em  $AD_1$ . Por  $C_2$ , traçamos uma paralela a  $AB_2$  e por  $A$ , traçamos uma paralela a  $B_2C_2$ . Essas paralelas se intersectam no ponto  $D_2$  e também são perpendiculares. Dessa forma, obtemos o quadrado  $AB_2C_2D_2$  com a diagonal sobre  $AD_1$ .

Esse processo pode ser replicado indefinidamente, até que os segmentos  $AB_n$  e  $AC_n$  se tornem menores que a unidade de medida  $AP$ , por menor que seja o tamanho escolhido para  $AP$ .

Mas, por hipótese temos que  $AB$  e  $AC$  são medidos por  $AP$ , e mostramos que  $AB_1$  e  $AC_1$  também se medem por  $AP$ , assim como todos os  $AB_n$  e  $AC_n$  serão medidos pela unidade  $AP$ . Mas, em determinado momento, após um número suficiente de quadrados construídos sobre a diagonal daquele imediatamente maior, teremos  $AB_n < AC_n < AP$ , ou seja, obteremos um quadrado de lado  $AB_n$  e diagonal  $AC_n$  cujos comprimentos são menores do que a unidade

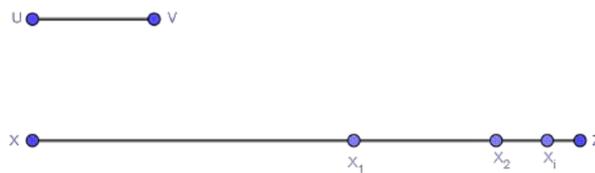
de medida  $AP$ , que é uma contradição, mesmo que a unidade  $AP$  tenha sido escolhida muito pequena.

Em outras palavras, a contradição se dá pelo Lema de Euclides, Definição 4.2 como já visto, afirma que se as quantidades sucessivamente retiradas de um segmento forem maiores do que a metade dos restos precedentes, estes restos podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada anteriormente. Logo, não podemos ter um resto menor que a unidade de medida  $AP$ , mas se tomarmos uma unidade de medida  $AP_1$  tal que  $AP_1 < AP$  ou até outra unidade  $AP_2$  menor que  $AP_1$ ? A demonstração não está concluída. Precisamos ainda mostrar que todos os segmentos  $AB_n$  e  $AC_n$  possíveis de serem obtidos podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada. Serem menores que  $AP$  não basta.

Para mostrarmos que  $AB_n$  e  $AC_n$  podem ser tornados menores que qualquer unidade de medida dada, revisitaremos a Definição 4.2 e lhe faremos uma interpretação geométrica, aplicando-a em dois segmentos de reta.

A Figura 4.12 mostra um segmento  $UV$  tomado como unidade de medida para o segmento  $XZ$ . Retirando deste último um segmento  $XX_1$  maior que metade de  $XZ$  resta o segmento  $X_1Z$ . Repetindo o processo, retiramos de  $X_1Z$  o segmento  $X_1X_2 > \frac{1}{2}X_1Z$  e, assim sucessivamente, teremos um segmento  $X_iZ < UV$  para qualquer  $UV$  por menor que seja. Esse resultado é garantido pelo Lema de Euclides apresentado na Definição 4.2.

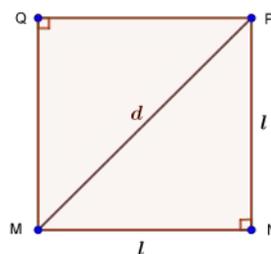
Figura 4.12 – Segmentos  $UV$  e  $XZ$ .



Fonte: Autoria própria.

O lado de um quadrado é maior que metade de sua diagonal, observe o quadrado  $MNPQ$  da Figura 4.13, cujo lado é igual a  $l$ .

Figura 4.13 – Quadrado  $MNPQ$  de lado  $l$  e diagonal  $MP$ .



Fonte: Autoria própria.

Vamos mostrar que o lado  $MN$  é maior que metade da diagonal  $MP$ .

*Demonstração.* Considere o triângulo retângulo  $MNP$  de lados  $MN = NP = l$ . Sua hipotenusa  $MP$ , pelo Teorema de Pitágoras é dada por

$$\begin{aligned}(MP)^2 &= (MN)^2 + (NP)^2 \\(MP)^2 &= (MN)^2 + (NP)^2 \\(MP)^2 &= (l)^2 + (l)^2 \\(MP)^2 &= 2l^2 \\MP &= \sqrt{2l^2} \\MP &= l\sqrt{2}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Por hipótese, vamos considerar que  $l > \frac{l\sqrt{2}}{2}$  e multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por 2, temos:

$$\begin{aligned}2 \cdot l &> 2 \cdot \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right) \\2l &> l\sqrt{2}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Dividindo por  $l$  ambos os membros de (4.23), dado que  $l > 0$ , a desigualdade se mantém, logo,

$$2 > \sqrt{2}.\tag{4.24}$$

Note que  $\sqrt{2} \approx 1,4142135... < 2$ , portanto, a medida do lado  $l$  de um quadrado é maior que metade da medida de sua diagonal.  $\square$

Voltando ao caso da prova de incomensurabilidade, entre  $AB$  e  $AP$ , em cada quadrado que inserimos na Figura 4.11, o lado e a diagonal dos novos quadrados são sempre menores que o lado e a diagonal do quadrado anterior, dessa forma, temos:

- (i)  $AB_1 < \frac{1}{2}AB$
- (ii)  $AC_1 < \frac{1}{2}AC$

Para provar o item (i), já definimos que  $AB_1$  é o lado do quadrado e  $AC_1$  é a diagonal. Somando  $BC_1$  em ambos os membros de (i), temos:

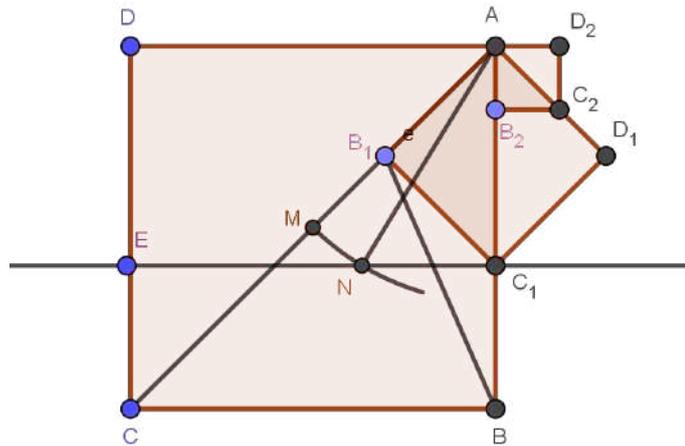
$$AB_1 + BC_1 < AC_1 + BC_1,\tag{4.25}$$

mas  $AC_1 + BC_1 = AB$  e  $BC_1 = AB_1$ , logo

$$AB_1 + AB_1 = 2AB_1 < AB \iff AB_1 < \frac{1}{2}AB.\tag{4.26}$$

Para provar o item (ii) vamos recorrer a uma construção auxiliar no quadrado  $ABCD$ , conforme a Figura 4.14 a seguir.

Figura 4.14 – Construção do triângulo retângulo  $C_1AN$ .



Fonte: Adaptado de Roque (2012, p.130).

Para obtermos o triângulo retângulo  $C_1AN$ , traçamos uma reta por  $C_1$  paralela a  $AB$  e um arco de circunferência de centro em  $A$  e raio  $AM = \frac{1}{2}AC$  onde marcamos o ponto  $N$ . Esse arco intersecta a perpendicular a  $AB$  que passa por  $C_1$  no ponto  $N$ , obtendo o triângulo desejado.

Note que  $AM = AN$  pois ambos são raios do arco  $MN$ . Se  $AN$  é hipotenusa e  $AC_1$  é um cateto,

$$AC_1 < AN = \frac{1}{2}AC \implies AC_1 < \frac{1}{2}AC. \quad (4.27)$$

Conclui-se que, dado um quadrado, é possível construir um outro quadrado, sobre o lado e a diagonal do primeiro e quando seu lado e sua diagonal são comensuráveis, o lado e a diagonal do novo quadrado também são. Porém, de (i) e (ii), ao repetirmos indefinidamente a construção destes quadrados, obteremos após um certo número de iterações um quadrado tal que seu lado e sua diagonal são comensuráveis e menores que  $AP$ , o que é uma contradição, pois não é possível medir um segmento por uma unidade e mostrar que esse segmento é menor que a unidade pré estabelecida. Logo, observando a Figura 4.11, a antifairese entre os segmentos  $AB$  e  $AC$  é:

- $AB$  cabe 1 vez em  $AC$  e resta  $AB_1$ ;
- $AB_1$  cabe 2 vezes em  $AB$  e resta  $AB_2$ ;
- $AB_2$  cabe 2 vezes em  $AB_1$  e resta  $AB_3$ .

O procedimento continua indefinidamente de modo que a antifairese apresentada pode ser escrita como  $\text{Ant}[AB, AC] = (1, 2, 2, 2, \dots)$ , ou seja, essa antifairese não termina. Na concepção

da época, "o inconveniente residia no fato de o procedimento não terminar, o que caracterizava uma má antifairese." (ROQUE, 2012, p.130). Esse fato implicava então na incomensurabilidade de  $AC$  em relação a  $AB$ , ou seja, a diagonal do quadrado não podia ser medida em função do seu lado. Portanto, a diagonal  $AC$  e o lado  $AB$  do quadrado da Figura 4.14 são grandezas incomensuráveis entre si. (*c.q.d*)

Para Roque (2012, p.130), entre os séculos V e IV a.E.C. os resultados de impossibilidade não necessitavam ser provados e o infinito era tratado de forma paradoxal.

Segundo Eves (2004, p.418) o filósofo Zenão de Eléia (cerca de 450 a.E.C.) foi um dos primeiros a apontar para as dificuldades lógicas sobre a subdivisão infinita de grandezas.

Zenão engendrou dentro do pensamento da época dois paradoxos que tiveram influência marcante na matemática grega, que só foram solucionados dois mil anos depois, com o desenvolvimento da linguagem algébrica adequada e com os estudos de limites de somas infinitas. São eles:

- *A Dicotomia*: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se então, que o movimento jamais acontecerá.
- *A Flecha*: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isso verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.

As duas situações envolvidas nesses paradoxos eram contra-intuitivas, desafiavam os sentidos e o senso comum e, para Eves (2004), excluíram os infinitésimos da geometria grega.

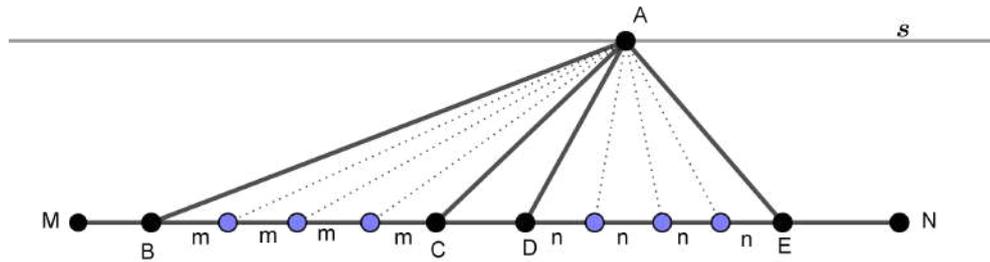
Um caso interessante da necessidade de se produzir novos estudos em geometria envolvendo a existência já comprovada de grandezas incomensuráveis é ilustrado por Eves (2004, p.176) e diz respeito a Proposição I.38 dos *Elementos*.

**Proposição 4.2.** (*Proposição I.38 dos Elementos*) *Triângulos que tem bases iguais e estão entre as mesmas paralelas são iguais entre si.*

Apesar da proposição acima ter sido demonstrada nos *Elementos*, ela consistia em fato já há muito conhecido, inclusive pelos pitagóricos. Ao considerar que os segmentos usados são comensuráveis, pode ser provada de forma simples, conforme a demonstração a seguir.

*Demonstração.* A Figura 4.15, mostra os triângulos  $ABC$  e  $ADE$  cujas bases  $BC$  e  $DE$  estão sobre a mesma reta  $MN$ .

Figura 4.15 – Triângulos  $ABC$  e  $ADE$  com bases sobre  $MN$  paralelo a reta  $s$ .



Fonte: Autoria própria.

Supondo que existe comensurabilidade entre  $BC$  e  $DE$ , existem as unidades de medida  $m$  e  $n$  que medem  $BC$  e  $DE$  respectivamente. Marcando os pontos de divisão em  $BC$  e  $DE$  e ligando esses pontos ao vértice  $A$ , dividimos o triângulo  $ABC$  em  $m$  triângulos menores todos de mesma área, assim como o triângulo  $ADE$  fica dividido em  $n$  triângulos menores, também todos de mesma área.

Dessa forma, como  $BC$  e  $DE$  são comensuráveis, temos:

$$\frac{S(ABC)}{S(ADE)} = \frac{m}{n} = \frac{BC}{DE}, \quad (4.28)$$

onde  $S(ABC)$  e  $S(ADE)$  denotam as áreas dos triângulo  $ABC$  e  $ADE$ , respectivamente.  $\square$

De posse da existência de grandezas incomensuráveis, a igualdade  $\frac{m}{n} = \frac{BC}{DE}$  só se verifica se a razão  $\frac{BC}{DE}$  é racional pois o número  $\frac{m}{n}$  é racional. Mas se  $BC$  ou  $DE$  são incomensuráveis entre si, a razão  $\frac{BC}{DE}$  não pode ser igual ao racional  $\frac{m}{n}$ . E esse é apenas um exemplo, entre inúmeros outros envolvendo razões e proporções, que a partir da descoberta das grandezas incomensuráveis, só se verificavam válidos em caso de comensurabilidade entre as grandezas envolvidas.

Diante desse fato, surgiu a necessidade de se desenvolver uma teoria de proporções que pudesse funcionar quando as grandezas não são comensuráveis, o desenvolvimento dessa teoria se deve a Eudoxo, e é discutida e demonstrada no Livro V dos *Elementos* de Euclides.

### 4.3.3 A Teoria das Proporções de Eudoxo

A teoria das proporções entre quatro grandezas que apresentaremos é atribuída ao filósofo platônico Eudoxo, nascido em torno de 400 a.E.C., discutida no livro V dos *Elementos*.

Essa teoria traz um alto nível de abstração e complexidade para os padrões da época e Euclides a usa para demonstrar vários resultados em sua obra *Elementos*. Para Roque e Carvalho (2012, p.102) as abordagens do tema razão e proporção não seguem uma sequência cronológica

nos *Elementos*, pois a teoria exposta no livro V é muito mais complexa do que as proposições sobre razões de livros posteriores.

Como exemplo, Roque e Carvalho (2012) citam a Proposição VII.19 dos *Elementos* que afirma explicitamente a condição moderna de que a relação de proporcionalidade  $a : b :: c : d$  equivale à igualdade  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Afirmam também que na proposição 16 do Livro VI dos *Elementos* é dado um critério para a proporcionalidade de quatro segmentos de reta: "Se quatro segmentos de retas são proporcionais, o retângulo formado pelos extremos é igual ao retângulo formado pelos meios (e reciprocamente)." Ou seja, os retângulos de lados medindo  $a$  e  $d$  e o retângulo de lados medindo  $b$  e  $c$  têm a mesma área, porém, só é verdade para retângulos formados por segmentos comensuráveis. Na notação atual, fica da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, \quad (4.29)$$

onde  $a \cdot d$  e  $b \cdot c$  são áreas de retângulos cujas dimensões são segmentos comensuráveis.

As definições a seguir constam no livro V dos *Elementos*, são atribuídas a Eudoxo e servem para quaisquer tipo de grandezas.

**Definição 4.3.** (*Definição V.3. dos Elementos*) *Uma razão é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas de mesmo tipo.*

Esta definição é elementar, pois sabemos que só podemos comparar grandezas de mesma espécie, formar razões entre duas áreas por exemplo, a fim de encontrar quantas vezes uma é maior ou menor que a outra.

**Definição 4.4.** (*Definição V.4. dos Elementos*) *Diz-se que duas grandezas possuem uma razão entre elas se estas grandezas, quando multiplicadas, podem se ultrapassar mutuamente.*

Podemos entender a Definição 4.4 ao considerar que existem  $m$  e  $n$  inteiros tal que as grandezas  $a$  e  $b$  satisfazem a seguinte condição:  $m \cdot a > n \cdot b$ .

**Definição 4.5.** (*Definição V.5. dos Elementos*) *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, se quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e outros quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, são tais que os primeiros equimúltiplos ultrapassam, um a um, os segundos ou são iguais a estes ou são menores, que os últimos equimúltiplos considerados na ordem correspondente aos primeiros.*

Para entendermos a Definição 4.5, vamos considerar quatro grandezas quaisquer, de mesma espécie,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  que estão em proporção. Nos *Elementos*, uma proporção é representada da seguinte forma:  $a : b :: c : d$ . Note que não se usava a notação de frações, possivelmente porque caso as grandezas sejam incomensuráveis, as razões entre elas não são frações.

Dessa forma, dadas quatro grandezas de mesma espécie,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  elas estão em proporção quando para quaisquer  $m$  e  $n$  inteiros tem-se

i)  $m \cdot a > n \cdot b$  e  $m \cdot c > n \cdot d$ ;

ii)  $m \cdot a = n \cdot b$  e  $m \cdot c = n \cdot d$ ;

iii)  $m \cdot a < n \cdot b$  e  $m \cdot c < n \cdot d$ .

O caso (ii) se verifica apenas quando as grandezas são comensuráveis. Já os outros dois casos, podem ser analisados sabendo que eles estabelecem uma teoria para as proporções entre quaisquer tipos de grandezas de mesma espécie, comensuráveis ou não.

Para ilustrar os casos (i) e (iii), apresentaremos dois exemplos com valores numéricos atribuídos às grandezas e aos inteiros  $m$  e  $n$ .

**Exemplo 4.7.** Vamos estabelecer que a grandeza  $\mathcal{A}$  tem medida 1, a grandeza  $\mathcal{B}$  mede  $\sqrt{2}$ ,  $\mathcal{C}$  mede  $\frac{1}{3}$  e  $\mathcal{D}$  mede  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . Faremos a inspeção do caso (i) utilizando os inteiros  $m = 3$  e  $n = 2$ , temos que verificar inicialmente se as grandezas envolvidas formam uma proporção.

**Resolução.**

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{B} :: \mathcal{C} : \mathcal{D} &\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{D} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{C} \\ &\Rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

verificou-se então a proporção entre as grandezas escolhidas.

Do caso (i), temos,

$$\begin{aligned} m \cdot \mathcal{A} > n \cdot \mathcal{B} &\implies m \cdot \mathcal{C} > n \cdot \mathcal{D} \\ 3 \cdot \mathcal{A} = 3 \cdot 1 = 3 > 2\sqrt{2} = 2,828\dots = 2 \cdot \mathcal{B} \\ \implies 3 \cdot \mathcal{C} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 > 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,942\dots = 2 \cdot \mathcal{D}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pode-se estimar que a diferença entre  $3\mathcal{A}$  e  $2\mathcal{B}$  é  $0,172\dots$ , que corresponde a aproximadamente o triplo da diferença entre  $3\mathcal{C}$  e  $2\mathcal{D}$  que é  $0,058\dots$

**Exemplo 4.8.** Para verificar o caso (iii), usaremos os mesmos valores para as grandezas do Exemplo 4.7 mas com  $m = 7$  e  $n = 5$ .

**Resolução.**

Como já verificamos a proporção no exemplo anterior, inspecionaremos o caso (iii) para os valores dados.

$$\begin{aligned}
 m \cdot \mathcal{A} < n \cdot \mathcal{B} &\implies m \cdot \mathcal{C} < n \cdot \mathcal{D} \\
 5 \cdot \mathcal{A} = 5 \cdot 1 = 5 < 7\sqrt{2} = 9,899\dots = 7 \cdot \mathcal{B} \\
 \implies 5 \cdot \mathcal{C} = 5 \cdot \frac{1}{3} = 1,666\dots < 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = 3,299\dots = 7 \cdot \mathcal{D}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Pode-se estimar que a diferença entre  $7\mathcal{B}$  e  $5\mathcal{A}$  é  $4,899\dots$ , que corresponde a aproximadamente o triplo da diferença entre  $7\mathcal{D}$  e  $5\mathcal{C}$  que é  $1,633\dots$

Dessa forma, a ideia de proporcionalidade verificada entre segmentos dados mostra que expandindo (ou contraindo) os dois primeiros de certa quantidade, os dois outros também serão expandidos (ou contraídos) da mesma quantidade, conforme afirma Roque (2012, p.197).

De posse de uma teoria que insere a incomensurabilidade dentro dos estudos das proporções podemos demonstrar a Proposição VI.1 dos *Elementos* de uma forma mais geral, considerando a existência de grandezas incomensuráveis.

**Proposição 4.3.** (*Proposição VI.1 dos Elementos*) *Triângulos (e paralelogramos) de mesma altura estão entre si como suas bases.*

*Demonstração.* Dados os triângulos  $ADC$  e  $ACD$ , conforme Figura 4.16, mostraremos que existe a seguinte proporção entre suas bases e suas áreas:

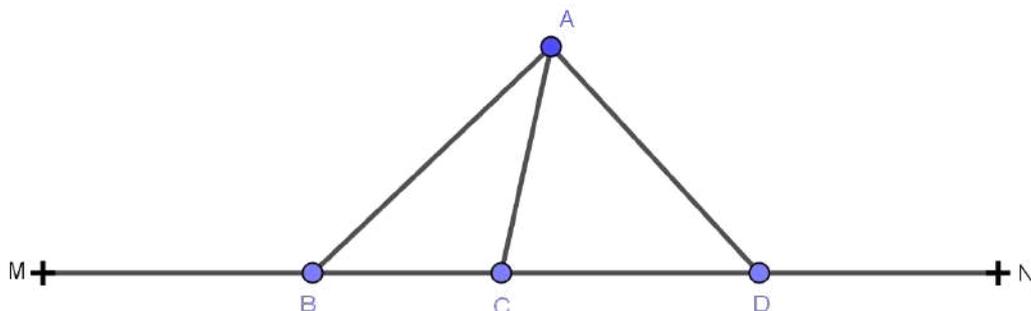
$$\frac{BC}{CD} = \frac{S(ABC)}{S(ACD)} \tag{4.33}$$

ou, conforme registrava-se à época de Euclides,

$$BC : CD :: S(ABC) : S(ACD). \tag{4.34}$$

Essa última notação se mostra mais conveniente para representar razões, pois evita o uso de frações. A rigor, razões entre grandezas incomensuráveis não são frações.

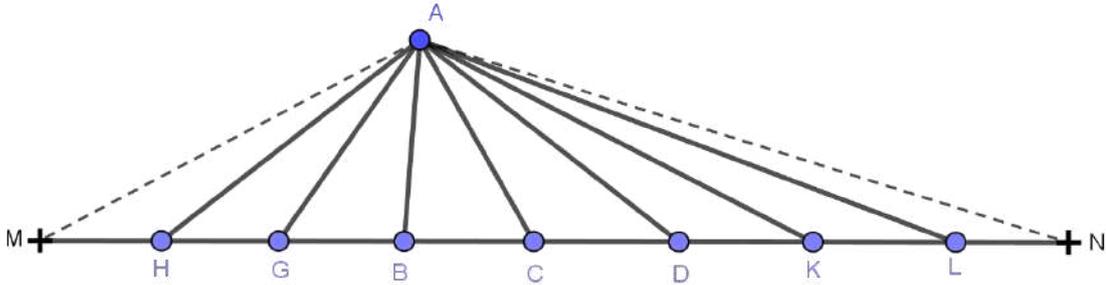
Figura 4.16 – Triângulos  $ABC$  e  $ADE$  com bases sobre  $MN$ .



Fonte: Adaptado de Eves (2004), p.177.

Conforme a Figura 4.17, construiremos à esquerda de  $BC$  os segmentos  $BG$ ,  $GH$ ,  $HM_1$ ,  $M_1M_2$ ,  $M_iM_{i+1}$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  todos congruentes à  $BC$  que, juntamente com  $BC$ , perfazem um total de  $m$  segmentos. À direita de  $CD$  construiremos os segmentos  $DK$ ,  $KL$ ,  $KN$ ,  $N_1N_2$ ,  $N_iN_{i+1}$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  que, juntamente com  $CD$ , somam um total de  $n$  segmentos todos congruentes a  $CD$ .

Figura 4.17 – Triângulos com bases sobre  $MN$ .



Fonte: Adaptado de Eves (2004), p.177.

Pela definição V.5 dos *Elementos* devemos ter que qualquer múltiplo de  $BC$  seja maior que um múltiplo de  $CD$  então o mesmo múltiplo do triângulo  $ABC$  deve ser maior que o mesmo múltiplo de  $ACD$ . Quando cita os triângulos  $ABC$  e  $ACD$ , Euclides quer se referir as suas áreas e dependendo do contexto, triângulos iguais, significa que suas áreas são iguais.

Pela construção apresentada na Figura 4.17, e sabendo que se multiplicarmos a base de um triângulo por um racional  $p$  sua área também será multiplicada por  $p$ , temos:

- a área do triângulo  $ABH$  é tal que  $S(ABH) = m \cdot S(ABC)$  pois  $HB = m \cdot BC$ ;
- a área do triângulo  $ALC$  é tal que  $S(ALC) = n \cdot S(ADC)$  pois  $CL = n \cdot CD$ .

Ainda, observando a Figura 4.17, ao multiplicarmos a base  $BC$  por  $m$ , obtendo os triângulos à esquerda do segmento  $AC$  sendo esse produto maior que a base  $CD$  quando multiplicada por  $n$ , a área do triângulo à esquerda de  $AC$  é maior que a área do triângulo à direita de  $AC$ , assim,

$$m \cdot BC > n \cdot CD \Rightarrow m \cdot S(ABC) > n \cdot S(ACD), \quad (4.35)$$

ocorrendo uma situação análoga no caso de  $m \cdot BC < n \cdot CD$ .

Portanto, considerando quaisquer segmentos não degenerados, sendo eles comensuráveis ou não, temos que

$$BC : CD :: S(ABC) : S(ACD). \quad (4.36)$$

□

A proposição VI.2 dos *Elementos* pode ser considerada uma extensão ao Teorema de Tales e, de posse da teoria das proporções de Eudoxo, sua demonstração pode ser construída sem preocupação de serem ou não comensuráveis as grandezas usadas.

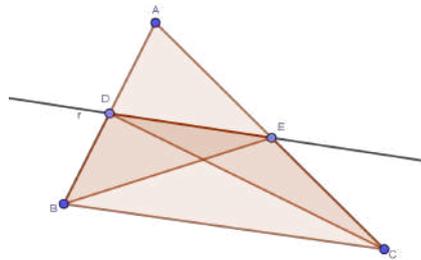
**Proposição 4.4.** (*Proposição VI.2 dos Elementos*) *Uma reta paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados proporcionalmente.*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e  $DE$  um segmento sobre uma paralela ao lado  $BC$ , conforme a Figura 4.18. Aplicaremos a Proposição 4.3 e mostraremos que:

$$BD : DA :: CE : EA, \quad (4.37)$$

onde  $BD$ ,  $DA$ ,  $CE$  e  $EA$  são segmentos sobre os lados do triângulo  $ABC$  da Figura 4.18.

Figura 4.18 – Triângulo  $ABC$  com uma reta  $r$  paralela a base  $BC$ .



Fonte: Autoria própria.

Os triângulos  $DEB$  e  $DEC$  possuem áreas iguais, pois seus respectivos vértices  $B$  e  $D$  estão sobre o segmento  $BC$ , paralelo à base comum  $DE$ . A Proposição 4.8 (Proposição 38 do Livro I dos *Elementos*), garante que triângulos que têm bases iguais e um terceiro vértice variando sobre uma paralela a essa base possuem a mesma área.

E na sequência, pela Proposição 4.3, temos que:

$$BD : DA :: S(DEB) : S(ADE) \quad \text{e} \quad CE : EA :: S(DEC) : S(DAB). \quad (4.38)$$

Mas  $S(DEB) = S(DEC)$ , portanto

$$BD : DA :: CE : EA. \quad (4.39)$$

□

Independente das origens do descobrimento das grandezas incomensuráveis, o desenvolvimento e posteriormente as aplicações da Teoria das Proporções de Eudoxo resolveram de forma eficiente as implicações dessa descoberta. Eudoxo possibilitou enunciar teoremas gerais válidos para quaisquer tipos de grandezas, até então os resultados obtidos por matemáticos anteriores a ele só serviam para casos de grandezas ou números comensuráveis.

Aliando a teoria das proporções com o método da exaustão, teríamos o início de um caminho para inserir no contexto grego os processos com cálculo infinitesimal, assim como fez Arquimedes ao construir uma demonstração essencialmente geométrica para a quadratura de um segmento parabólico.

#### 4.3.4 A Quadratura da Parábola

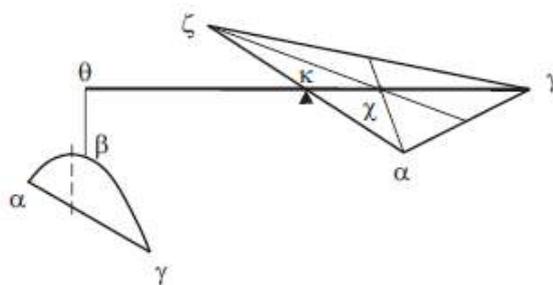
A aplicação do princípio da exaustão para uma demonstração geométrica da quadratura da parábola, onde a área de um segmento parabólico qualquer é igual a quatro terços da área do triângulo nele inscrito cuja base é a mesma base do segmento, segundo Assis (2019), foi antecedida por uma demonstração física.

Para esse cálculo Arquimedes utilizou sua Teoria das Alavancas registrado em um tratado enviado por Arquimedes em forma de carta a Eratóstenes, intitulado *O Método*. Em Assis (2019) o leitor poderá encontrar de forma detalhada os procedimentos usados para a obtenção mecânica da área do segmento parabólico.

A ideia fundamental dessa técnica consiste em cortar a região correspondente em um número muito grande de tiras planas no caso de áreas, ou fatias muito finas no caso de volumes, pendura-se então, as partes em que os objetos foram decompostos numa das extremidades de uma alavanca hipotética de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centro de massa conhecidos, dessa forma, obtendo o resultado procurado.

A Figura 4.19 representa a alavanca horizontal  $\gamma\theta$  em equilíbrio horizontal ao redor do fulcro  $\kappa$  (o fulcro é o ponto de apoio da alavanca, e sua posição em relação às extremidades é o que define o equilíbrio) com a área parabólica  $\alpha\beta\gamma$  apoiada sobre  $\theta$ , enquanto que o triângulo  $\alpha\gamma\zeta$  fica distribuído ao longo do segmento  $\gamma\kappa$ , e o centro de massa do triângulo é colinear ao segmento  $\gamma\theta$ .

Figura 4.19 – Esquema de alavanca usado por Arquimedes.

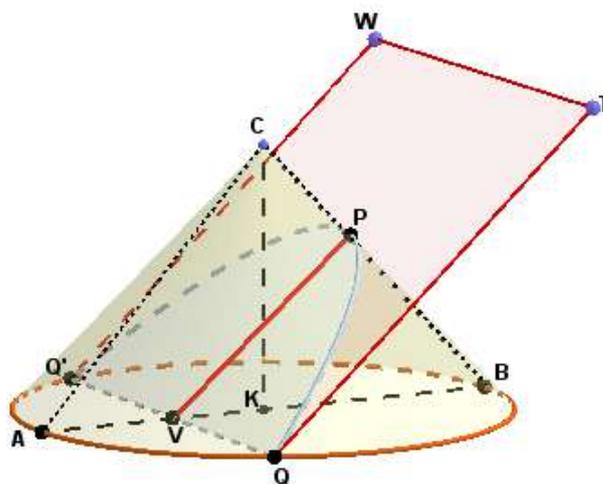


Fonte: Adaptado de Assis (2019, p.78)

Arquimedes precisava conhecer o resultado a ser atingido para determinar a área do segmento parabólico (ou quadrar o segmento), o método da exaustão, apesar de ser rigoroso, só possibilita provar ou refutar um resultado já conhecido. Eves (2004, p. 421), observa que "dos antigos, quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração, sem dúvida foi Arquimedes".

Nos tempos de Arquimedes (287 – 221 a.E.C), uma parábola era definida pela secção de um cone circular reto (Figura 4.20). Como o cone é reto, o ângulo  $\angle ACB$  é reto e  $AC = BC$ , pois o triângulo  $ABC$  é isósceles.

Figura 4.20 – Parábola obtida de um cone reto.



Fonte: Adaptado de (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.139).

A parábola é obtida quando seccionamos este cone por um plano ( $WTRS$ ) perpendicular à geratriz  $CB$ , conforme representado na Figura 4.20. O ponto  $P$  onde tal plano intersecta a hipotenusa do triângulo  $CKB$  é chamado vértice da parábola. A intersecção deste plano com a base do cone é a reta  $QQ'$ , denominada "base" da parábola e o eixo de simetria é o segmento que une  $P$  ao ponto médio de  $QQ'$  ou seja, o segmento  $PV$ .

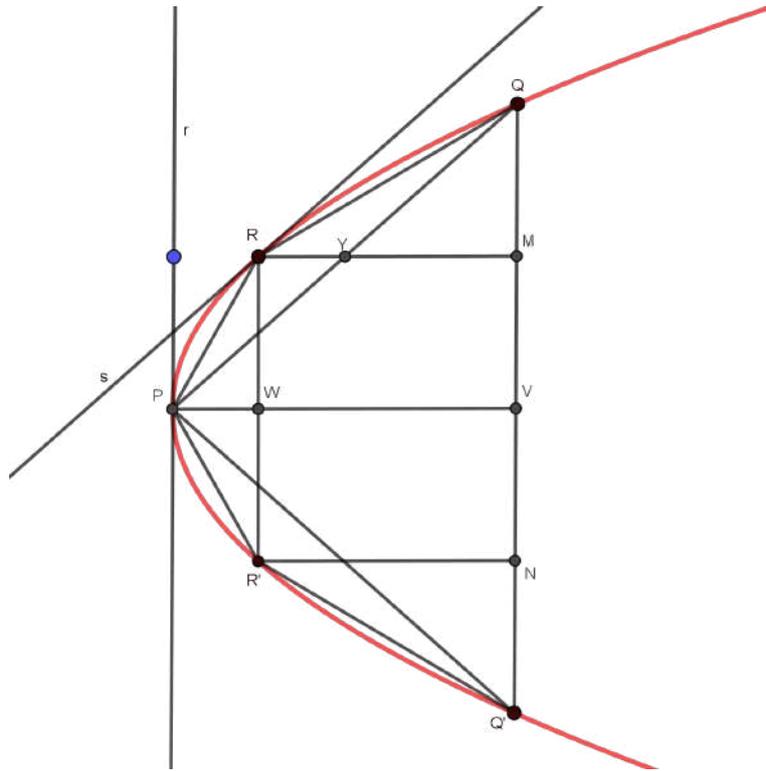
Suponhamos que a área do triângulo  $PQQ'$  é igual a  $T$ , conforme Figura 4.21.

Arquimedes demonstra que a área do segmento parabólico de base  $QQ'$  é  $\frac{4}{3}$  da área do triângulo  $PQ'Q$  inscrito nesse segmento (ver Figura 4.21).

A demonstração encontrada em Roque e Carvalho (2012, p. 138-146) apresentando e, em alguns casos, demonstrando as proposições que se seguem.

**Proposição 4.5.** *Se por um ponto  $P$  de uma parábola traçarmos a reta  $PV$  que é o próprio eixo da parábola ou é paralela a esse eixo, e se  $QQ'$  é uma corda paralela à tangente da parábola*

Figura 4.21 – Segmento de parábola exaurido em triângulos.

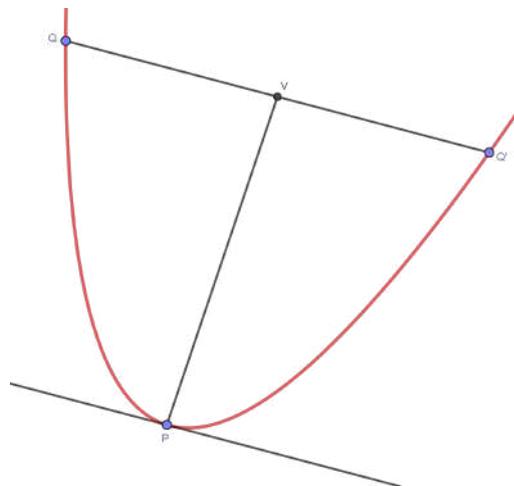


Fonte: Autoria própria.

por  $P$  e que corta  $PV$  em  $V$ , então  $QV = VQ'$ . Reciprocamente, se  $QV = VQ'$ , a corda  $QQ'$  será paralela à tangente por  $P$ .

A Figura 4.22 mostra a reta tangente em  $P$ , paralela a base  $QQ'$  do segmento parabólico  $QPQ'$ .

Figura 4.22 – Reta tangente em  $P$  paralela a  $QQ'$ .



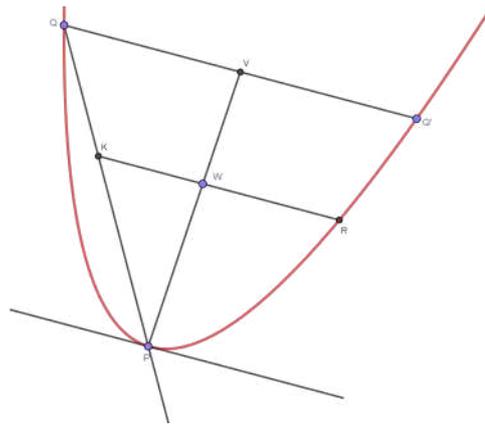
Fonte: Autoria própria.

**Proposição 4.6.** *Se por um ponto da parábola traçarmos uma reta que é o eixo ou é paralela ao eixo da parábola, como  $PV$ , e se por dois outros pontos da parábola  $Q$  e  $R$  traçarmos retas paralelas à tangente à parábola por  $P$  e que cortam  $PV$ , respectivamente em  $V$  e  $W$ , então*

$$PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2 \quad (4.40)$$

A Figura 4.23 mostra os segmentos envolvidos na proporção (4.40).

Figura 4.23 – Segmentos envolvidos na Proporção (4.40).



Fonte: Autoria própria.

A proporção apresentada na Proposição 4.6 era denominada pelos gregos como o "sintoma da parábola". Substituindo-se  $PV = y$ ,  $PW = y'$ ,  $QV = x$  e  $RW = x'$  na relação (4.40), obtemos:

$$PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2 \implies \frac{y}{y'} = \frac{x^2}{x'^2}, \quad (4.41)$$

sendo a constante de proporcionalidade  $k$  um número real positivo, segue que,

$$y = k \cdot x^2. \quad (4.42)$$

As Proposições 4.5 e 4.6 não foram demonstradas por Arquimedes, o mesmo remete essas demonstrações ao livro de Euclides onde são discutidas as cônicas, dado como perdido.

O resultado da proposição a seguir pode ser melhor compreendido quando acompanhamos sua demonstração observando os elementos representados na Figura 4.21.

**Proposição 4.7.** *Seja  $P$  o vértice,  $Q$  um ponto qualquer sobre a parábola e  $R$  o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a  $PQ$ . Seja  $M$  o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por  $R$  corta  $QQ'$ , um segmento paralelo à tangente por  $P$ . Então  $PV = \frac{4}{3}RM$ .*

*Demonstração.* Da proporção

$$PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2 \implies \frac{PV}{PW} = \frac{(QV)^2}{(RW)^2}, \quad (4.43)$$

mostraremos que  $PV = \frac{4}{3}RW$ .

Pela Proposição 4.5,  $Y$  é ponto médio de  $PQ$  pois a reta  $S$  é paralela a  $PQ$  e  $RM$  paralelo a  $PV$ .

Os triângulos  $PVQ$  e  $YQM$  são semelhantes pois os segmentos  $PV$  e  $YM$  são paralelos e o ângulo  $\angle PQV$  é um vértice comum aos dois triângulos, logo,  $\triangle PVQ \sim \triangle YQM$ .

Se  $Y$  divide  $PQ$  ao meio,  $M$  divide  $VQ$  ao meio e, dessa forma,  $M$  é ponto médio de  $VQ$ , logo  $QV = 2MV$ .

Sendo  $WV = RM$ , temos

$$PV = PW + WV = PW + RM. \quad (4.44)$$

Dado que  $QV = 2MV$ , por construção sabemos que  $RW = MV$ , substituindo esses valores e também a Equação (4.44) em (4.43), vem

$$\begin{aligned} \frac{PW + RM}{PW} &= \frac{(2MV)^2}{(MV)^2} \\ &= \frac{4(MV)^2}{(MV)^2} \\ &= 4 \\ PW + RM &= 4PW \\ RM &= 3PW \\ PW &= \frac{RM}{3} \\ 3PW &= RM. \end{aligned} \quad (4.45)$$

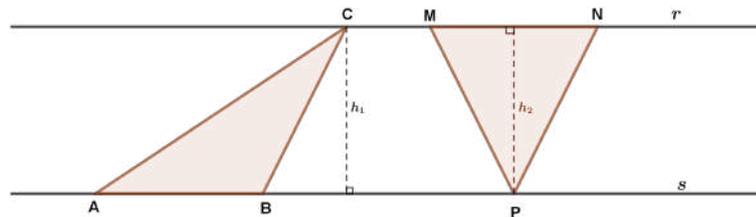
Sendo  $WV = RM$  então  $3PW = WV$  e, pela Figura 4.21, temos que  $PV = PW + WV$ , portanto,  $PV = \frac{4}{3}RM$ .  $\square$

Para seguir com a demonstração, usaremos o resultado da Proposição 4.8 cuja demonstração será omitida por se tratar de um fato básico e muito conhecido, porém esse resultado será usado em vários outros momentos desse trabalho.

**Proposição 4.8.** *(Proposição 1.38 dos Elementos) Triângulos que tem bases iguais e estão entre as mesmas paralelas são iguais entre si.*

De forma simples podemos interpretar o resultado da Proposição 4.8 através do modo como calculamos a área de um triângulo, ou seja,  $\mathcal{S}(\triangle) = \frac{b \cdot h}{2}$ , onde  $b$  é a base e  $h$  é a altura desse triângulo. A Figura 4.24 mostra os triângulos  $ABC$  e  $MNP$ , de bases congruentes, com  $AB$  sobre a reta  $s$ ,  $MN$  sobre a reta  $r$  e  $r$  paralela à  $s$ .

Figura 4.24 – Triângulos  $ABC$  e  $MNP$  entre as paralelas  $r$  e  $s$ .



Fonte: Autoria própria.

Note que as alturas  $h_1$  e  $h_2$  são iguais devido ao paralelismo das retas, então, se temos bases iguais e alturas iguais, para dois triângulos diferentes, isso implica que suas áreas são iguais.

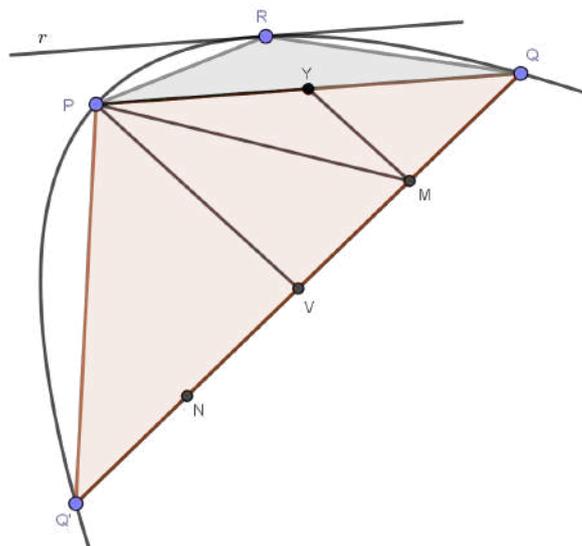
A partir da próxima proposição, o trabalho de demonstração busca encontrar relações entre os triângulos inscritos no arco parabólico de base  $QQ'$ , ilustrados na Figura 4.25.

**Proposição 4.9.** *Seja  $QQ'$  a base e  $P$  o vértice de um segmento parabólico  $PQQ'$ . Seja  $R$  o ponto do segmento parabólico no qual a tangente é paralela a  $PQ$ . Então,  $S(\triangle PQQ') = 8S(\triangle PRQ)$ .*

*Demonstração.* Podemos provar que  $S(\triangle PQV) = 4S(\triangle PQR)$ , pois os triângulos  $PQV$  e  $PQ'V$  têm a mesma área, dado que  $QV = Q'V$  e se por  $P$  passa uma paralela a  $QQ'$ , pela Proposição 4.5, estão sobre as mesmas paralelas.

Ligando os pontos  $P$  e  $M$ , na Figura 4.25 iniciaremos a demonstração da Proposição 4.9, mostrando que a área do triângulo  $PQM$  é duas vezes a área do triângulo  $PRQ$ . Em seguida, provaremos que a área do triângulo  $PMV$  também é duas vezes a área do triângulo  $PRQ$ , pois  $S(\triangle PQV) = S(\triangle PQM) + S(\triangle PMV) = 4S(\triangle PQR)$ .

Figura 4.25 – Triângulo inscrito no segmento parabólico  $PQQ'$ .



Fonte: Autoria própria.

Pela Figura 4.25 temos que,

$$S(\triangle PQM) = S(\triangle PYM) + S(\triangle YQM). \quad (4.46)$$

Temos também que,

$$S(\triangle PQR) = S(\triangle PRY) + S(\triangle RQY). \quad (4.47)$$

Os triângulos  $PQV$  e  $YQM$  têm o mesmo ângulo no vértice  $Q$  e por construção  $PV$  é paralelo a  $YM$  logo, são semelhantes. Se  $M$  o ponto médio de  $QV$ ,  $QV = 2MQ$  então a semelhança garante que  $PV = 2YM$ .

Da Proposição 4.7,  $PV = \frac{4}{3}RM$  e  $PV = 2YM$ . Considerando também que  $RM = RY + YM$  (veja Figura 4.21) segue que

$$\begin{aligned} PV &= \frac{4}{3}RM \\ 2YM &= \frac{4}{3}(RY + YM) \\ 6YM &= 4(RY + YM) \\ 6YM &= 4RY + 4YM \\ 2YM &= 3PW \\ YM &= 2RY. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Como a base do triângulo  $QRY$  está sobre o segmento  $MR$ , assim como a base do triângulo  $QYM$  e os vértices opostos às bases estão no mesmo ponto, considerando a paralela à  $NR$  por  $Q$ , aplicando a Proposição 4.8 e considerando a Equação (4.48), temos  $S(\triangle QYM) = 2S(\triangle QRY)$ .

Em relação aos triângulos  $PYM$  e  $PRY$ , nota-se que  $P$  é um vértice comum e a base  $YM$  do  $\triangle PMY$  é o dobro da base  $RY$  do  $\triangle PRY$ , logo,  $S(\triangle PYM) = 2S(\triangle PRY)$ .

Dessa forma, já mostramos que

$$S(\triangle QYM) = 2S(\triangle QRY) \quad (4.49)$$

e

$$S(\triangle PYM) = 2S(\triangle PRY). \quad (4.50)$$

Logo,

$$S(\triangle PQM) = 2S(\triangle PRQ), \quad (4.51)$$

pois

$$S(\triangle PQM) = S(\triangle PYM) + S(\triangle YQM). \quad (4.52)$$

Como  $M$  é ponto médio de  $VQ$  e sendo  $P$  um vértice comum, as áreas dos triângulos  $PQM$  e  $PMV$  são iguais e segue que

$$S(\triangle PQV) = 4S(\triangle PQR). \quad (4.53)$$

Observamos também na Figura 4.21 que  $Q'V = QV$  e  $P$  é vértice comum, portanto

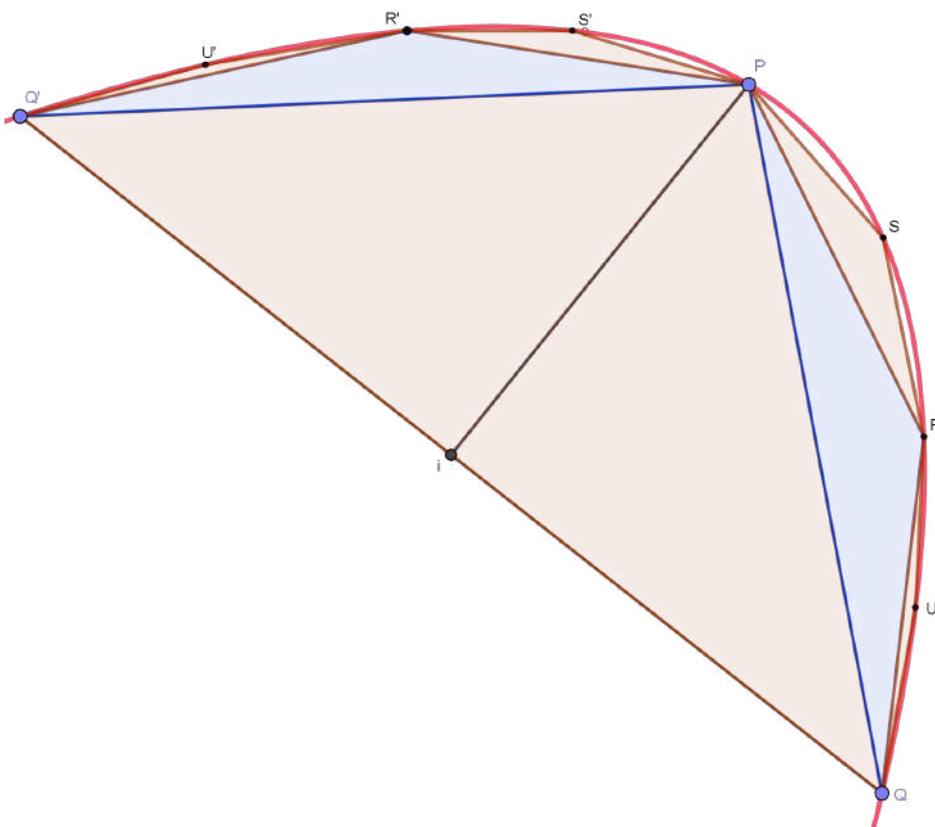
$$S(\triangle PQQ') = 2S(\triangle PQV) = 8S(\triangle PQR). \quad (4.54)$$

□

Finalmente, acumulamos todos os resultados necessários para mostrar como Arquimedes construiu o raciocínio que demonstra a quadratura da parábola pelo método da exaustão, provando que a área do segmento parabólico é igual a quatro terços da área do triângulo inscrito nesse segmento, esse resultado será demonstrado a seguir.

A Figura 4.26 mostra  $n$  iterações construindo-se triângulos nas áreas restantes entre o triângulo  $PQQ'$  e o segmento de parábola de base  $QQ'$  e área  $S$ .

Figura 4.26 – Segmento de parábola exaurido em triângulos.



Fonte: Autoria própria.

A área do segmento parabólico de base  $QQ'$ , denotada por  $S$  é  $S = \frac{4}{3}T$  onde  $T$  é a área do triângulo  $PQQ'$ .

Como

$$T = S(\Delta PQQ') = 8S(\Delta PQR) = 8S(PR'Q') \quad (4.55)$$

e

$$T = S(\Delta PQQ') = 8S(PR'Q') = \frac{1}{8}T + \frac{1}{8}T = \frac{T}{4}, \quad (4.56)$$

pelo resultado em (4.56), temos que a soma das áreas dos triângulos construídos sobre o lado do triângulo anterior e o arco de parábola delimitado pelos vértices do maior triângulo de cada iteração é

$$\begin{aligned} S(\Delta PQR) + S(\Delta PQ'R') &= \frac{T}{4}RM \\ S(\Delta PSR) + S(\Delta PUR) + S(\Delta PS'R') + S(\Delta R'U'Q') &= 4\frac{T}{16} = \frac{T}{4}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

O método da exaustão permite prosseguir com o processo e construir triângulos cada vez menores na diferença de áreas entre a parábola e o polígono  $QRPR'Q'$  e, usando o resultado anterior, teremos triângulos de áreas  $\frac{T}{4}, \frac{T}{4^2}, \frac{T}{4^3}, \dots$ , tantas vezes quanto possível, e a área do segmento parabólico seria a soma das áreas de todos os triângulos obtidos, ou seja,

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}}, \quad (4.58)$$

para  $n$  etapas sucessivas.

Desse momento em diante, resta provar que a soma (4.58), denotada por  $\mathbf{S}$  é

$$\mathbf{S} = \frac{4}{3}T. \quad (4.59)$$

Nesse ponto, o problema consistia em uma soma infinita segundo a nossa concepção, porém para a matemática vigente no tempo de Arquimedes, o infinito não podia ser exaurido (ver Seção 2.5, Paradoxos de Zenão) e os gregos da época não possuíam as ferramentas modernas de cálculo infinitesimal. Dessa forma, seus argumentos eram bastante distintos dos atuais. Atualmente, um estudante do Ensino Médio pode efetuar a soma dada em (4.58) aplicando a fórmula para o cálculo da soma de termos de uma progressão geométrica. Logo, sua principal ferramenta foi o método da exaustão e dentro de seu paradigma, ele percebe a soma (4.58) como uma soma finita de  $n$  termos.

Roque e Carvalho (2012, p. 114) acrescentam que ao demonstrar a proposição seguinte, Arquimedes deu o passo fundamental para obter a área do segmento parabólico sem usar soma de séries infinitas.

**Proposição 4.10.** *Dada uma sucessão finita de áreas,  $A, B, C, D, \dots, Z$ , das quais  $A$  é a maior e, cada uma das outras é quatro vezes sua sucessora, então*

$$A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3} \times Z = \frac{4}{3} \times A.$$

*Demonstração.* Pelo enunciado da Proposição 4.10, sabemos que:

$$A = 4B, \quad B = 4C, \quad C = 4D, \quad \dots, \quad Y = 4Z, \quad (4.60)$$

e ao efetuarmos a soma

$$B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D + \dots + \frac{1}{3}Y + \frac{1}{3}Z, \quad (4.61)$$

note que

$$\begin{aligned} B + \frac{1}{3}B &= \frac{4}{3}B = \frac{A}{3} \\ C + \frac{1}{3}C &= \frac{4}{3}C = \frac{B}{3} \\ D + \frac{1}{3}D &= \frac{4}{3}D = \frac{C}{3} \\ &\dots \\ Z + \frac{1}{3}Z &= \frac{4}{3}Z = \frac{Y}{3}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

então vale a igualdade

$$\left(\frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \dots + \frac{Y}{3}\right) = B + C + D + \dots + Y + Z + \left(\frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \dots + \frac{Y}{3}\right) + \frac{Z}{3}. \quad (4.63)$$

Somando  $A$  a ambos os membros de (4.63) e como os termos entre parenteses são simétricos, temos

$$\begin{aligned} A + \frac{A}{3} &= A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3}Z \\ A + B + C + D + \dots + Y + Z + \frac{1}{3}Z &= \frac{4}{3}A. \end{aligned} \quad (4.64)$$

□

Como já citado, a principal ferramenta para a quadratura da parábola de Arquimedes foi o Princípio da Exaustão de Eudoxo. O argumento desse princípio consiste em provar que uma área  $N$  inscrita em uma figura de área  $M$  após  $n$  iterações de exaustão, não pode ser maior nem menor que a área que a circunscreve (a área  $M$ ), reduzindo ao absurdo as situações  $M > N$  e  $M < N$  concluindo então que  $M = N$ . A esse tipo de prova, denominamos "dupla redução ao absurdo".

De posse do que foi exposto e demonstrado até aqui, Arquimedes tinha em mãos todos os elementos e argumentos para demonstrar "A Quadratura da Parábola" conforme veremos a seguir.

**Proposição 4.11.** *Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda  $QQ'$  é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele (ver triângulo  $QPQ'$  na Figura 4.26).*

*Demonstração.* Arquimedes precisava mostrar que

$$\text{i) } S > \frac{4}{3}T$$

$$\text{ii) } S < \frac{4}{3}T$$

conduzem a contradições e diante disso, poderia concluir que  $S = \frac{4}{3}T$ .

Para o caso (i), se  $S$  é maior que quatro terços de  $T$ , após um certo número de etapas de construções de triângulos (ver Figura 4.26), teremos uma soma de áreas desses triângulos que é menor que  $S$  e maior que  $\frac{4}{3}T$ . Então, por hipótese, supondo que a soma das áreas desses triângulos é um polígono de área  $K$ , com  $K > \frac{4}{3}T$  e  $K < S$ .

Como  $K$  é a soma da área de triângulos, por (4.58) temos que

$$K = T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}}. \quad (4.65)$$

Aplicando a Proposição 4.10, a soma  $S$  é

$$S = \left( T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^{n-1}}. \quad (4.66)$$

Como a parcela entre parênteses é igual a  $K$ , temos

$$\begin{aligned} K + \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^{n-1}} &= S \\ K &= S - \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^{n-1}} \implies K < S = \frac{4}{3}T, \end{aligned} \quad (4.67)$$

contradizendo a hipótese de que  $K > \frac{4}{3}T$ .

Para o caso (ii), se  $S < \frac{4}{3}T$ , existe a diferença  $\frac{4}{3}T - S = T_k$ , onde  $T_k$  é a área de algum triângulo obtido na  $k$ -ésima iteração do procedimento de exaustão e  $T_k = \frac{T}{4^{k-1}}$ .

Como  $T_k = \frac{T}{4^{k-1}} > \frac{1}{3}T_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^{k-1}}$  e  $\frac{4}{3}T - S = \frac{T}{4^{k-1}} > \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^{k-1}}$ , pela Proposição 4.10 aplicada à soma das áreas dos triângulos inscritos no segmento parabólico, segue que

$$\frac{1}{3} \frac{T}{4^{k-1}} = \frac{4}{3}T - \left( T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \dots + \frac{T}{4^{k-1}} \right), \quad (4.68)$$

logo

$$T_k = \frac{T}{4^{k-1}} > \frac{1}{3}T_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^{k-1}} = \frac{4}{3}T - \left( T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \dots + \frac{T}{4^{k-1}} \right). \quad (4.69)$$

Segue que

$$\mathbf{S} < T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \dots + \frac{T}{4^{k-1}}. \quad (4.70)$$

O segundo membro da desigualdade (4.70) é a soma das áreas dos triângulos inscritos na área  $\mathbf{S}$ , não podendo ser maior que  $\mathbf{S}$ , o que nos leva a uma contradição.

No caso (i) mostramos que a área  $\mathbf{S}$  do segmento parabólico não é maior que quatro terços da área do triângulo nele inscrito e, no caso (ii), mostramos que  $\mathbf{S}$  também não é menor que quatro terços da área desse triângulo, portanto,  $\mathbf{S} = \frac{4}{3}T$ .  $\square$

Arquimedes provou geometricamente que qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda  $QQ'$  tem área igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base e mesma altura inscrito no segmento. Observe o triângulo  $QPQ'$  da Figura 4.26.

Conforme Ávila (2006, p. 128), após a ocorrência dessa série geométrica de razão  $1/4$  no trabalho de Arquimedes, as séries geométricas só voltaram a ser estudadas mais a fundo cerca de 1500 anos mais tarde, no século XIV, em Oxford, na Inglaterra.

Atualmente, podemos determinar a área de um segmento parabólico através do uso da integral, que de maneira elementar também pode ser entendida como um processo de decompor uma figura em áreas conhecidas, "tantas quanto possíveis", ou infinitas, na concepção atual. Lembramos aqui, que os gregos não exauriam ao infinito, ao menos não há evidências disso, já a teoria dos limites nos permite fazê-lo. No exemplo a seguir, mostraremos que a área de um segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo nele inscrito usando o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

**Exemplo 4.9.** *Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, mostre que a área  $\mathbf{S}$  do segmento parabólico de base  $AB$  da Figura 4.27, é quatro terços da área  $T$  do triângulo  $ABC$  inscrito nesse segmento.*

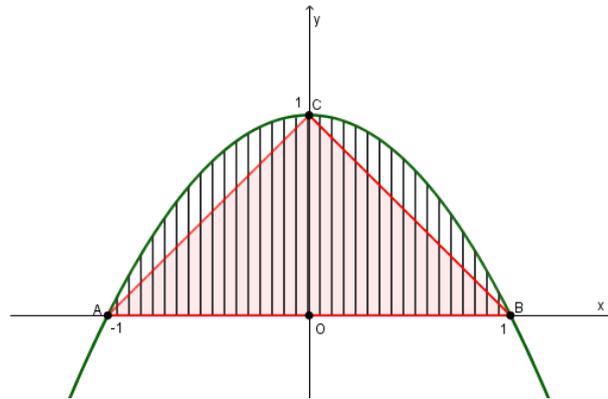
**Resolução.**

O triângulo  $ABC$  tem área  $T = 1$  u.a., pois sua base é  $b = 1 - (-1) = 2$ , e seja  $y = f(x) = 1 - x^2$  a função representada no gráfico da Figura 4.27. A altura do triângulo  $ABC$  é  $h = f(0) = 1$ . Logo, a área do triângulo  $ABC$  é

$$T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ u.a.} \quad (4.71)$$

Mostraremos que a área do setor parabólico de base  $AB$  e altura  $OC$  é  $\frac{4}{3}T$ , ou seja,  $\frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$ .

Figura 4.27 – Segmento parabólico de base  $AB$  e altura  $OC$ .



Fonte: Autoria própria.

Então, pelo TFC, temos,

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \quad (4.72)$$

Portanto, como  $T = 1$  u.a., a área do segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo nele inscrito, ou seja,  $S = \frac{4}{3}T$ .

Durante sua atividade como Matemático, Arquimedes também usou o princípio da exaustão para calcular a área do círculo, e deste procedimento, com algumas adaptações, encontrou uma boa aproximação, porém racional, para a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo, hoje conhecida como o número irracional  $\pi$ .

Além da área do segmento parabólico, Arquimedes desenvolveu um estudo sobre espirais, hoje intitulado "*A espiral de Arquimedes*". Neste trabalho, conseguiu efetuar a trissecção do ângulo, porém suas técnicas para abordar esse problema clássico não eram as propostas por seus antecessores gregos, que só permitiam o uso de régua não graduada e compasso.

A respeito do estudo de área, os gregos também desenvolveram uma técnica que denominavam "*aplicações de áreas*" exposto nas proposições 15 a 19 do Livro VI dos *Elementos* de Euclides. Esses estudos foram fundamentais na abordagem das cônicas propostas por Apolônio. Na terminologia matemática grega, aplicar uma figura poligonal a um segmento de reta dado consiste no uso da Definição 4.28.

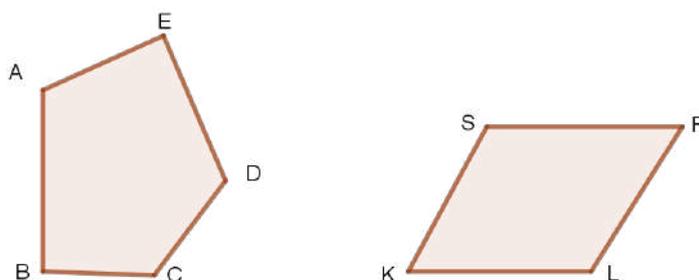
**Definição 4.6.** *Construir a figura poligonal solicitada de tal maneira que o segmento dado seja um de seus lados.*

A técnica de aplicações de áreas era uma boa ferramenta na resolução de equações e eram solicitadas algumas condições a respeito do polígono a ser obtido. Por exemplo, dado o polígono  $ABCDE$ , "aplicar ao segmento de reta  $KL$ , um paralelogramo, com área igual à do

polígono  $ABCDE$ , significa construir um paralelogramo  $KLRS$  de que  $KL$  é um dos lados, e cuja área seja igual à área de  $ABCDE$ ." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.158)

Podiam também fazer exigências como ângulos previamente estabelecidos que deveriam estar presentes no polígono resultante. A Figura 4.28 ilustra a citação do paragrafo acima.

Figura 4.28 – Aplicação de áreas.



Fonte: Adaptado de Roque e Carvalho, 2012, p.158

Apesar de reconhecermos a importância que as aplicações de áreas tiveram no desenvolvimento da matemática, não nos aprofundaremos nesse assunto, pois estamos buscando os tópicos da História da Matemática que envolvem o cálculo de área que vem de encontro com o que iremos expor em nosso produto educacional. Pode-se encontrar uma interessante leitura sobre esse tema em Roque (2012, pp. 179-188).

Após Arquimedes, surgiram muitos outros matemáticos cujos trabalhos foram de grande contribuição para o desenvolvimento teórico e conceitual desta ciência, tais como Apolônio, Eratóstenes, Herão, todos intimamente associados à escola de Alexandria, os chamados matemáticos alexandrinos, influenciados pela obra de Euclides. A escola de Alexandria se consolidou como um notável centro de estudos que "permaneceu ativa desde a sua fundação, por volta de 300 a.E.C., até seu fechamento em 529 E.C. Sendo incendiada pelos árabes em 641 E.C." (BRANDERBERG, 2017, p.14)

A cidade de Alexandria, no entendimento de Branderberg (2017), era um importante polo comercial, científico e cultural fundada em 322 a.E.C. na foz do rio Nilo por Alexandre Magno. A fundação da biblioteca de Alexandria fez com que a cidade se tornasse o centro mais importante do mundo em erudição, suplantando a Academia de Platão. Em seu auge, dispunha de um acervo de mais de 600000 papiros, número nunca visto antes. Permaneceu como grande centro intelectual da região do Mediterrâneo através dos períodos de dominação grega e posteriormente romana que ocorreram no norte da África, até sua destruição em 641 E.C. devido a um incêndio.

Depois da destruição da biblioteca de Alexandria, a hegemonia do conhecimento foi dominada pelos árabes nos séculos seguintes, estes também deram suas contribuições para o de-

envolvimento da Matemática. A respeito do cálculo de área, os registros mostram que usavam o que era até então conhecido, aplicado a situações práticas, como na agrimensura e na construção civil e militar. Em estudos mais teóricos, usavam uma abordagem geométrica aplicando conhecimentos sobre áreas para a resolução de variados tipos de equações, conforme veremos na próxima seção.

#### 4.4 A MATEMÁTICA DO MUNDO ÁRABE

O rei egípcio Ptolomeu I construiu em 290 a.E.C. o Museu de Alexandria. Anexo a esse museu havia uma grande biblioteca que segundo variadas fontes históricas, reunia todo o saber da época e suas obras mais conhecidas e consultadas pertenciam a Arquimedes e Euclides.

Com a expansão da civilização grega, a cidade de Alexandria passou a fazer parte da Grécia. A esse período, os historiadores denominam "helenístico" e se caracterizou pelo ideal de Alexandre, o Grande (356 - 323 a.E.C.) em difundir a cultura e o conhecimento gregos aos territórios que iam além do mar mediterrâneo, até a Ásia central por ele conquistados. Essa ideia vigorou durante sua vida de conquistas e após sua morte em 323 a.E.C até a conquista da Grécia por Roma em 146 a.E.C.

Duas décadas antes do incêndio da biblioteca de Alexandria em 641 E.C, com a chegada dos romanos, a cidade vivia um clima de tolerância. Sua biblioteca era frequentada por inúmeros matemáticos, pois em seu acervo havia muitas obras vindas da Grécia, onde os maiores matemáticos do mundo conhecido e dito civilizado viveram e escreveram seus legados.

Para Roque (2012), na segunda década do século IV, o cristianismo deixou de ser proibido e foi instituída como uma das religiões oficiais do império romano e paulatinamente se tornou a única religião permitida. Essa decisão não foi aceita de forma unânime em todo o império. Haviam ainda muitos praticantes de outras religiões, de forma geral, denominadas pagãs, que foram em certo momento perseguidas pelos novos cristãos. A biblioteca de Alexandria era frequentemente visitada por pensadores e estudiosos que não haviam aderido à nova religião e acredita-se que foi nesse contexto que se deu o derradeiro incêndio à biblioteca de Alexandria em 641 E.C.

Segundo Eves (2004), duas décadas antes do trágico incêndio, um importante período da história se inicia. Trata-se da ascensão da cultura mulçumana, cerca de 620 E.C., fomentada pelo surgimento do líder religioso Maomé. Esse profeta trouxe à região um grande fervor religioso, fazendo com que as tribos dispersas da Península Arábica se consolidassem em uma grande nação, estendendo seus domínios através de lutas armadas, em um território que ia da Índia à Espanha, passando pela Pérsia, Mesopotâmia e norte da África onde se situava a cidade de Alexandria. O movimento religioso fundado por Maomé chama-se Islã, existente até os dias

atuais. Alexandria, no Egito, fazia parte do domínio desse movimento, e desde sua fundação, sempre foi um grande centro de atividade intelectual.

A forma com que os árabes se apoderaram dos saberes gregos, muitos deles resgatados da extinta biblioteca de Alexandria, foi de fundamental importância para a continuidade do desenvolvimento intelectual do ocidente. Os califas do oriente foram governantes esclarecidos e muitos tornaram-se grandes incentivadores da cultura erudita, dando espaço para muitos estudiosos se instalarem junto de suas cortes.

Para Eves (2004) tal costume possibilitou que inúmeros trabalhos de astronomia, medicina e matemática, especialmente gregos, fossem traduzidos para o árabe e preservados até chegarem aos tempos da Europa pré renascentista, onde intelectuais europeus puderam retraduzí-los para o latim e também para outros idiomas. Caso não houvessem esses esforços de tradução e preservação das obras do passado pelo califado árabe, um grande conjunto da ciência grega e também hindu, dado que alguns califados estenderam seus domínios até as índias, seriam tragicamente perdidos ao longo da Baixa Idade Média da Europa.

Roque e Carvalho (2012) observam que há um salto gigantesco recorrente nos livros de história da matemática entre o século III a.E.C., quando viveu Euclides, e o século XV E.C., quando a matemática voltou a se desenvolver na Europa. Mesmo que as primeiras universidades tenham surgido na Idade Média, entre os séculos XII e XIII, em seus primórdios, revisitaram e deram um prolongamento dos saberes antigos influenciadas por correntes filosóficas platônicas e aristotélicas, sem considerar os avanços desenvolvidos pelos islâmicos entre os séculos VIII e XIV E.C.

Sobre a matemática árabe desse período destacamos os primeiros passos do que conhecemos hoje como Álgebra, que à época, consistia em desenvolver técnicas para a resolução de equações, e grande parte das técnicas tinham sua justificativa inicial na aplicação de cálculo de área e, posteriormente, se consolidavam em procedimentos retóricos, onde "os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos" (EVES, 2004, p.206). Tais procedimentos possibilitavam resolver alguns tipos de equações cujas formas gerais eram bem definidas, aplicando um algoritmo preestabelecido, conforme o tipo de equação a que se pretendia solucionar.

O matemático muçulmano mais conhecido foi Al-Khwarizmi (790 - 850 E.C), cujo nome deu origem às palavras "algoritmo" e "algarismo". Al-Khwarizmi foi um grande estudioso da matemática grega preservada por seu povo e, junto de outros matemáticos árabes, expandiu esse conhecimento produzindo métodos sistemáticos de resolução de equações com a preocupação constante em generalizar esses métodos.

A palavra álgebra deriva da palavra árabe *al jabr* utilizada para designar "restauração". Esse termo aparece pela primeira vez no ocidente na obra "Tratado sobre o cálculo de *al jabr*

e *al muquabala*", escrita por Al-khwarizmi na Baixa Idade Média. *Al muquabala* significa algo como balanceamento. Restauração e balanceamento eram as propriedades das equações aplicadas pelos árabes nas suas resoluções.

Para Al-Khwarizmi, ao estudar e modelar problemas semelhantes às atuais equações quadráticas, as quantidades apareciam principalmente em três formas: o *jidhr* (raiz em árabe), ou *shay* (a quantidade desconhecida), o quadrado da quantidade desconhecida, designada pela palavra árabe *mal* que significa "tesouro" ou "possessão", além do número simples ou a constante que em árabe é *adad*.

Al-Khwarizmi enumerou seis problemas, ou seis casos possíveis, enunciados por palavras. Usaremos a notação algébrica moderna para a representação desses casos, conforme Roque e Carvalho (2012, p.199):

1. Quadrados iguais às raízes:  $ax^2 = bx$ .
2. Quadrados iguais a um número:  $ax^2 = c$ .
3. Raízes iguais a um número:  $bx = c$ .
4. Quadrados e raízes iguais a um número:  $ax^2 + bx = c$ .
5. Quadrados e um número iguais a raízes:  $ax^2 + c = bx$ .
6. Raízes e um número iguais a quadrados:  $bx + c = ax^2$ .

Atualmente, sabemos que todos os tipos de equação citadas, são casos particulares da forma geral  $ax^2 + bx + c = 0$  da equação quadrática, inclusive a do tipo do item 3, ao se fazer  $a = 0$ . Acredita-se que a quantidade de casos para a mesma forma geral se deve ao fato de que, à época, os números negativos não eram bem aceitos e nem compreendidos e a subtração era permitida, desde que não resultasse em quantidades negativas.

Para as equações citadas,  $c$  é um número dado ou uma quantidade conhecida,  $x$  é a quantidade desconhecida e  $x^2$  representa o quadrado da quantidade desconhecida. Observamos também que em todos os casos os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números positivos e que a quantidade desconhecida  $x$  é a raiz da equação.

Uma significativa contribuição dos árabes para o desenvolvimento de fases posteriores da matemática foi a notável ideia de mostrar ser possível a integração de diferentes domínios da matemática aplicados a um mesmo objeto de estudo. A álgebra recém iniciada e a geometria eram integradas nas técnicas de resolução de equações.

A justificativa geométrica de Al-Khwarizmi para validar suas regras retóricas de solucionar equações quadráticas pode ser ilustrada pela sua discussão da equação

$$x^2 + 10x = 39, \quad (4.73)$$

que ele resolveu por dois métodos diferentes: retórico e geométrico. Segundo Burton (2011, p.240), a Equação (4.73) com os mesmos coeficientes, reaparece frequentemente em textos árabes e cristãos posteriores, correndo "como um fio de ouro através da álgebra de vários séculos".

Mostraremos como exemplo a resolução dessa equação quadrática, onde Roque e Carvalho (2012, pp.200-201) afirmam e em seguida demonstram que Al-Khwarizmi elaborava regras de solução das equações, justificadas posteriormente por resultados geométricos envolvendo áreas de quadrados e retângulos.

Inicialmente, solucionava-se a equação usando o algoritmo e em seguida, Al-Khwarizmi justificava a regra usada descrevendo uma situação geométrica, envolvendo áreas. Consideramos as regras retóricas como um algoritmo pois, uma definição de algoritmo pode ser "arte de calcular de uma maneira particular". (EVES, 2004, p.266).

O Exemplo 4.10, a seguir, trará o inverso. Primeiro a apresentação da justificativa geométrica e depois a descrição do algoritmo retórico proposto por Al-Khwarizmi para esse tipo de equação.

**Exemplo 4.10.** *Para o caso em questão al-Khwarizmi enunciava o problema como "um mal e dez jidhr igualam trinta e nove denares". (Denário era uma pequena moeda de prata, a de maior circulação no Império Romano Antigo.)*

### Resolução.

Na notação moderna essa frase é equivalente à Equação (4.73).

Al-Khwarizmi iniciava sua justificativa geométrica afirmando que a figura para explicar isso é um quadrado cujos lados são conhecidos. Para encontrar o lado desse quadrado, iniciava-se a seguinte construção:

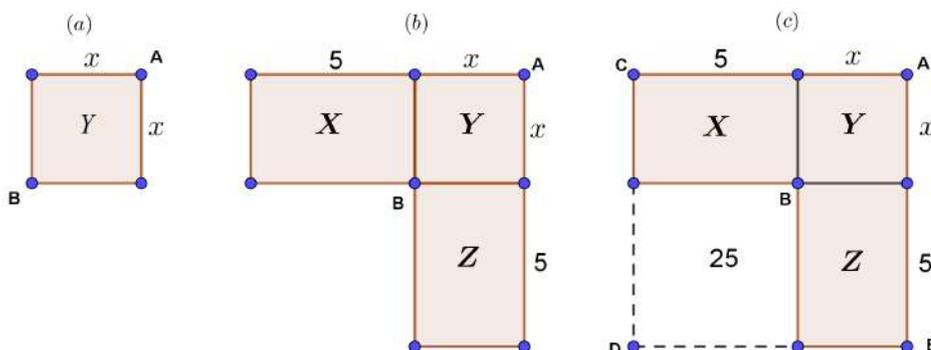


Figura 4.29 – Justificativa geométrica de al-Khwarizmi para a solução da Equação (4.73).



i) Tome metade da quantidade de *jidhr*:  $\frac{10}{2} = 5$ .

ii) Multiplique essa quantidade por si mesma:  $5^2 = 25$ .

ii) Some no resultado os *adad*:  $25 + 39 = 64$ .

iii) Extraia a raiz quadrada do resultado:  $\sqrt{64} = 8$ .

iv) Subtraia desse resultado a metade dos *jidhr*, encontrando a solução:  $8 - 5 = 3$ .

Na notação atual, um procedimento para encontrar uma raiz positiva de uma equação quadrática na forma  $x^2 + bx = c$  pode ser sintetizado na seguinte relação algébrica:

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}. \quad (4.74)$$

Usando um procedimento análogo ao exposto no Exemplo 4.10, caso a equação seja da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a > 0$ , podemos obter uma de suas raízes da seguinte forma:

$$x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}. \quad (4.75)$$

O Exemplo 4.10 mostra que a construção geométrica e o algoritmo deduzido dela estabeleceu uma analogia entre geometria e álgebra ao identificar o lado do quadrado geométrico à raiz da área do quadrado algébrico.

Dessa forma, as duas maneiras de se resolver o problema se completam, porém, Al-Khwarizmi e seus contemporâneos apresentavam primeiro o algoritmo retórico e depois justificavam o procedimento com a representação geométrica do problema.

Percebemos que o cálculo de área foi uma importante ferramenta para a obtenção de soluções das equações quadráticas estudadas pelos árabes e, por consequência, contribuiu no desenvolvimento da álgebra. Para Roque e Carvalho (2012, p.201), a justificativa geométrica além de servir para garantir a veracidade do algoritmo, nos faz compreender sua causa: a necessidade de completar quadrados. A argumentação geométrica apresentada, para os árabes, era algo totalmente novo.

O algoritmo retórico era específico para cada tipo de equação e nesse momento da história, o procedimento estava ainda muito longe de se transformar em uma fórmula algébrica com notação simbólica e literal, isso só foi proposto por Francois Viète em 1591 e aperfeiçoado por René Descartes em 1637, com quem a integração entre geometria e álgebra tomou um caráter formal e rigoroso.

#### 4.5 O CÁLCULO DE ÁREA POR INTEGRAIS

A história do Cálculo Diferencial e Integral, que a partir desse momento será denominado apenas de *Cálculo*, remonta aos primórdios da matemática grega, com a ideia de calcular área por exaustão. O *Princípio da Exaustão* é uma forma de calcular medidas de figuras definidas por curvas utilizando-se de polígonos inscritos com grande número de lados.

A autoria desse princípio é desconhecida, mas foi a partir de Eudoxo que se obteve um método para executar essa técnica com o rigor matemático disponível em sua época. Dessa forma, a obtenção de um método geral de se obter com exatidão o valor da área de uma figura plana qualquer vigorou por mais de dois milênios, consolidando-se como um dos principais problemas da geometria.

Quem atribuiu o *Método da Exaustão* à Eudoxo foi Euclides de Alexandria, no Livro XII dos *Elementos*, especificamente, na Proposição XII.2, que apresenta o *Método da Exaustão de Eudoxo*. Porém, Arquimedes foi quem tornou-se notório ao utilizar o método de Eudoxo, quando o aplica na quadratura da parábola, já discutida na Seção 4.3.4, no cálculo da área do círculo, na obtenção de uma estimativa razoável para o número  $\pi$  e em muitos outros trabalhos.

Após Arquimedes, para Neto (2015), o passo seguinte no desenvolvimento e estruturação do *Cálculo* veio a surgir 2000 anos depois, a partir do final do século XVI. O autor ainda acrescenta que essa lacuna de 2000 anos foi o tempo necessário para que as civilizações posteriores pudessem desenvolver as notações e ferramentas algébricas apropriadas para expressar ideias matemáticas mais avançadas que possibilitariam a *sir* Isaac Newton (1642-1727) e a Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716) dar os passos fundamentais na estruturação desse importante ramo da matemática.

O *Cálculo* é habitualmente apresentado aos estudantes de cursos superiores na área de ciências exatas na seguinte sequência: funções, limites e continuidade, derivadas e integrais. Essa última, é apresentada aplicando cálculo de área como motivação inicial para a Integral de Riemann (após Bernhard Riemann, 1826-1866).

Durante a lacuna de 2000 anos, entre o uso do Método da Exaustão por Arquimedes, na obtenção da área de um segmento parabólico, e a retomada da matemática na Europa, o cálculo de área foi aplicado na pré-Álgebra árabe como justificativa para validar os algoritmos de resolução de equações quadráticas, esse período da história do oriente médio é denominado "Época Áurea do Islã" (séculos IX a XII). Roque (2012) observa que a religião islâmica da época incentivava e financiava a pesquisa científica, construindo um grande legado.

Com grande influência árabe e hindu, principalmente o sistema de numeração decimal e o uso dos algarismos indo-arábicos, a matemática volta a se desenvolver na Europa, berço do *Cálculo*, e as motivações teóricas iniciais para seu surgimento podem ser compreendidas atra-

vés do trabalho de alguns matemáticos dos séculos XVI e XVII. Nesse período, segundo Ávila (2006) nomes como François Viéte, René Descartes, Pierre de Fermat entre outros, desenvolveram uma moderna notação o que contribuiu para a criação de métodos sistemáticos e unificados de tratamento do cálculo para área e volume.

Ainda nessa época, o problema sobre a obtenção da área de uma figura com lados curvos ainda estava em aberto, pois o método da exaustão possibilitava fazer o cálculo mas não de forma direta. Além dos matemáticos citados por Ávila (2006), outro nome que se destaca nos estudos iniciais desse tema é do italiano Bonaventura Cavalieri (1598 -1647) ao estudar métodos de obtenção de área e volume de figuras curvas, usando o "Princípio dos Indivisíveis". Cavalieri começou a obter êxito nesse tipo de cálculo. O "Princípio dos Indivisíveis" fundamenta-se em duas ideias básicas:

1. Uma região plana pode ser considerada como um conjunto infinito de segmentos de reta paralelos, postos lado a lado.

2. Um sólido pode ser considerado um conjunto infinito de regiões planas paralelas, postos um sobre outro.

Como exemplo, podemos pensar em uma esteira de praia, feita com finíssimas tiras de bambu, cada tira representa um segmento de reta e o conjunto todo, a esteira, é o plano obtido. No caso de um sólido, podemos pensar em um baralho, cada carta é um plano, e quando empilhamos todas as cartas, uma sobre outra formamos um paralelepípedo.

Usando esse raciocínio, Cavalieri podia calcular áreas e volumes que seus antecessores tiveram muita dificuldade em calcular. Trabalhos semelhantes ao de Cavalieri foram feitos por Pierre de Fermat e Blaise Pascal, além de muitos outros matemáticos europeus, mas nessa época, entre o século XVI e o início do século XVII, ainda não existia um método geral para a obtenção de área e volume, embora os métodos existentes trouxessem um grau de confiabilidade bastante satisfatório.

A partir do século XVI, o método essencialmente geométrico com que os gregos apresentam a matemática passa a ser substituído pelo método algébrico e analítico, cujos primeiros passos são dados por François Viéte (1540-1603). Em seu trabalho intitulado *In artem*, Viéte introduz a prática de usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes, despreendendo a álgebra de métodos retóricos usados há milênios e possibilitando o avanço do simbolismo algébrico, que paulatinamente mostra sua utilidade quanto à síntese da escrita matemática, da generalização e da dedução e demonstração de fórmulas.

É válido ressaltar que de forma diferente ao simbolismo proposto por Viéte, "a convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras letras para as constantes foi introduzida por Descartes em 1637" (EVES, 2004, p.309).

René Descartes (1596-1650) deu um passo além de Viète, foi o primeiro pensador que apresentou uma representação algébrica para estudos de problemas geométricos. Para Smith (1958), Descartes tinha em mãos ferramentas e conhecimentos já consolidadas historicamente para o desenvolvimento de seu trabalho em Geometria Analítica:

*"There are three principal steps in the development of analytic geometry: (1) the invention of a system of coordinates; (2) the recognition of a one-to-one correspondence between algebra and geometry; and (3) the graphic representation of the expression  $y = f(x)$ . Of these, the first is ancient, the second is medieval, and the third is modern."* (SMITH, 1958, p.316).

Em tradução livre, "Existem três etapas principais no desenvolvimento da geometria analítica: (1) a invenção de um sistema de coordenadas; (2) o reconhecimento de uma correspondência bijetiva entre álgebra e geometria; e (3) a representação gráfica da expressão  $y = f(x)$ . Destes, o primeiro é antigo, o segundo é medieval e o terceiro é moderno".

No entender de Roque e Carvalho (2012), Descartes estava inserido em um contexto onde os estudos mais relevantes da matemática davam-se em torno da obtenção de concepções gerais sobre curvas. Não se limitando a estudos de curvas específicas e bem definidas e suas construções geométricas. Havia a necessidade de se ampliar os conhecimentos sobre lugares geométricos, introduzindo curvas que descrevem movimentos ou são representadas por expressões algébricas. "Tratava-se de procurar um objeto desconhecido que podia ser uma curva, em sentido bem mais geral do que se considerava anteriormente" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.243).

Descartes tornou-se notório com sua obra *Discours de la méthode* (Discursos sobre o método), considerada a obra que funda a filosofia moderna. Essa obra contém três apêndices. O primeiro deles chamado *La géométrie* (A geometria), e, segundo Eves (2004), é o único trabalho em matemática publicado por Descartes.

Em *La géométrie*, Roque (2012) aponta que Descartes apresenta alguns princípios da geometria algébrica, introduz a marcação de  $x$  e  $y$  para eixos dados, não necessariamente ortogonais conforme conhecemos hoje, mas formando um ângulo fixo entre eles de forma que todos os objetos geométricos descritos pelo plano que contém os eixos devem ser expressos a partir deles. Isso possibilitou mostrar, por exemplo que pontos dados podem relacionar-se da seguinte forma de equações, tais como  $y = x^2$ , por exemplo. E com isso em mãos, era possível obter um método geral para encontrar equações de retas tangentes a todas as curvas, descolando-se um pouco das definições e construções geométricas.

Uma discussão aprofundada sobre a obtenção de tangentes e a sistematização da Derivada foge um pouco do escopo dessa pesquisa, pois nos propusemos a fazer um levantamento dos momentos da história cujo cálculo de área foi relevante e a forma com que era concebido/aplicado, visando chegar no cálculo de Integral. Deixamos registrado que o desenvolvimento da Derivada

foi de indiscutível importância para a matemática atual e por isso, na próxima seção falaremos um pouco sobre o trabalho de Leibniz relacionado à obtenção de retas tangentes.

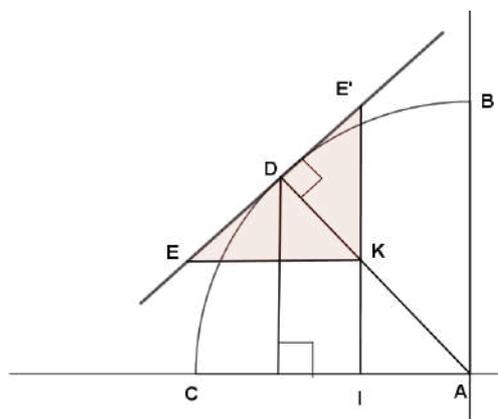
#### 4.5.1 Leibniz e seu Estudo de Tangentes

Gottfried Wilhelm von Leibniz, segundo Roque (2012) esteve na França em 1672 participando de uma missão diplomática ao conhecer o matemático Christian Huygens (1629-1695). Ex aluno de Descartes, Huygens dedicava-se intensamente ao estudo das séries numéricas. Apresentou a Leibniz, que era formado em direito e filosofia e "até então praticamente leigo e ignorante em matemática, segundo ele próprio" (ROQUE, 2012, p.354), os trabalhos de Cavalieri, Pascal, Descartes, entre outros. Uma vez que as descobertas de Descartes e Fermat influenciaram o estudo de séries numéricas não só na França, mas também na Inglaterra, esses tiveram grande influência nos trabalhos não só de Leibniz, mas também de Newton.

Após ler o apêndice *La géométrie* em 1637, Leibniz considerou ser restritivo o método ali proposto para determinar tangentes. Porém, isso não desabona a beleza e a criatividade de Descartes quando emprega seu método na obtenção de retas tangentes a curvas em pontos dados. Para Roque (2012) o procedimento de Descartes não se aplicava a uma grande quantidade de curvas, e a álgebra envolvida em alguns casos era de altíssima complexidade.

Sobre o *Cálculo* de Leibniz, em seu livro *Historia et Origo Calculi Differentialis* (História e Origem do Cálculo Diferencial) ele informa que inspirou-se em uma obra de Blaise Pascal (1623-1662), *Traité des sinus du quart de cercle* (Tratado dos senos do quarto de círculo). Em um método que Pascal usa para demonstrar um resultado de área, Leibniz extrai dele o traço principal para seu *Cálculo*, o "triângulo característico", uma ideia que possibilitou dar um alto grau de generalização para todos os seus trabalhos, pois permitia trabalhar com grandezas infinitesimais, conhecidas hoje como diferenciais.

Figura 4.31 – Arco  $ABC$  e triângulo característico  $EKE'$ .



Fonte: Adaptado de Roque e Carvalho (2012, p.279)

A Figura 4.31 mostra o triângulo característico  $EKE'$ . Roque e Carvalho (2012, pp.279-281) descrevem a construção do triângulo  $EKE'$  e enfatizam a inspiração para o conceito de diferencial encontrada por Leibniz ao estudar essa construção.

Para desenharmos o triângulo  $EKE'$ , inicialmente traçamos um quarto de círculo  $ABC$  e uma reta tangente à curva no ponto  $D$ . Em seguida, por  $D$ , traçamos uma perpendicular a  $AC$  chamando de  $I$  sua intersecção com  $AC$ . Por  $E$ , traça-se  $EK$  paralelo a  $AC$  e, por  $E'$ , traçamos  $E'K$ , paralelo à  $DI$ .

Em seguida, os autores observam que Pascal demonstrou a semelhança entre os triângulos  $DIA$  e  $EKE'$ , porém não observou a importância dessa semelhança. Pode-se diminuir a distância entre  $E$  e  $E'$  o quanto se queira, pois  $CB$  é um arco de circunferência e sabemos que em uma circunferência, a tangente em um ponto é sempre perpendicular ao raio, logo, independente da variação do comprimento de  $EE'$ , o ângulo  $E'KE$  continua reto e a relação de semelhança continua válida.

Leibniz percebeu que podemos diminuir o tamanho da hipotenusa  $EE'$  até que não possamos mais lhe atribuir um valor, e quando essa distância torna-se menor que qualquer valor dado, a classifica "não atribuível", assim como os valores dos comprimentos de  $E'K$  e  $EK$ . Mas salientou que como a relação de semelhança se conserva, a razão  $\frac{E'K}{EK}$  é "atribuível".

Inicialmente Leibniz demonstrou o raciocínio para uma circunferência, mas além disso, generalizou o método para uma curva qualquer, ao tomar  $\Delta y = E'K$  e  $\Delta x = EK$ , exprime todos os elementos relevantes para obter a tangente e propor que a relação  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  se torne uma relação infinitesimal  $\frac{dy}{dx}$  entre duas grandezas "não atribuíveis" porém "atribuível", garantida, segundo ele, pela semelhança entre os triângulos retângulos  $MPT$  e  $MRN$  da Figura 4.32.

Assim, Leibniz obtém um método sistemático de encontrar a tangente de uma curva dada. Esse método é muito similar ao desenvolvido por Fermat, que pode ser encontrado em Roque e Carvalho (2012, pp. 267-268).

Há um conceito usado por Leibniz, que para nós não é habitual, chamado de subtangente, necessário para entendermos o raciocínio de Leibniz cuja definição é:

**Definição 4.7.** *A subtangente de um triângulo construído em um sistema de eixos coordenados é a projeção em um dos eixos, do segmento da tangente compreendido entre o ponto de tangência e o ponto onde a reta tangente encontra o eixo considerado.*

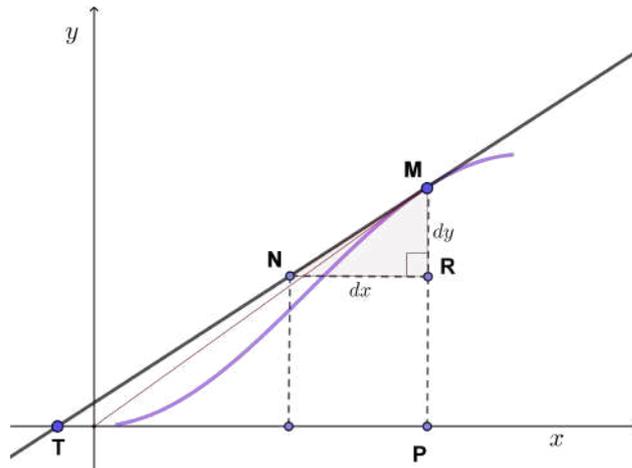
Na Figura 4.32 pode-se observar a subtangente  $TP$  e as grandezas não atribuíveis  $dy$  e  $dx$  no triângulo característico  $MRN$ .

A relação de semelhança entre os triângulos  $MPT$  e  $MRN$  sempre é válida enquanto o ângulo reto  $\angle MRN$  fica fixo mesmo se tornarmos a distância entre  $MN$  tão pequena quanto

quisermos movimentando o ponto  $N$  sobre a tangente  $TM$ , logo, para a Figura 4.32, Leibniz escrevia que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{MP}{\text{subtangente}}. \quad (4.76)$$

Figura 4.32 – Grandezas não atribuíveis no triângulo característico  $MRN$ .



Fonte: Autoria própria.

A crítica mais contundente ao método infinitesimal de Leibniz para determinação da tangente residia no fato de  $dy$  e  $dx$  serem grandezas infinitamente pequenas, não atribuíveis, ou seja, menor que qualquer outra grandeza dada, logo, muito próximas de zero. Então a razão  $\frac{dy}{dx}$  gerava uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ .

Leibniz refutava essa crítica argumentando que mesmo sendo  $dy$  e  $dx$  quantidades infinitamente pequenas a razão entre elas é finita pois é igual ao valor de  $\frac{PM}{TP}$  da razão entre a ordenada e a subtangente, conforme indicado na proporção (4.76).

A questão dos infinitesimais ainda intrigou os matemáticos por vários anos, pois o uso dessas quantidades infinitamente pequenas, os "não atribuíveis" de Leibniz, também chamados de diferenciais, precisavam ser fundamentados, pois a "Análise Algébrica" daqueles tempos, já requiritava essa fundamentação.

Apesar das quantidades infinitesimais não estarem fundamentadas, no exemplo a seguir, mostraremos a obtenção de uma derivada pelo método de Leibniz,

**Exemplo 4.11.** Usando as grandezas "não atribuíveis"  $dy$  e  $dx$  de Leibniz, encontre a derivada da função  $y = x^2$ .

**Resolução.**

Tomando a diferença entre as ordenadas de dois pontos vizinhos  $(x, x^2)$  e  $(x + dx, (x + dx)^2)$  sobre essa curva, temos:

$$\begin{aligned}
 dy &= d(x)^2 \\
 &= (x + dx)^2 - x^2 \\
 &= 2xdx + (dx)^2 \\
 \frac{dy}{dx} &= 2x.
 \end{aligned}
 \tag{4.77}$$

No cálculo desenvolvido em (4.77) o termo  $(dx)^2$  pode ser desprezado, pois possui ordem de grandeza bem menor que  $dx$  que por si só, já é uma quantidade infinitamente pequena.

Portanto, a derivada procurada é  $\frac{dy}{dx} = 2x$ .

O Exemplo 4.11 mostra que para questões práticas o resultado era bem satisfatório, mas os infinitesimais ainda precisavam passar pelo crivo da "Análise Matemática", o que só ocorreu nos séculos seguintes, com o desenvolvimento da Teoria dos Limites e a definição moderna de Função.

Isaac Newton também desenvolveu de forma independente seu *Cálculo*. Suas motivações estavam relacionadas ao estudo da Mecânica, enquanto que Leibniz voltou-se apenas para a matemática, e até os dias atuais usamos algumas simbologias introduzidas por ele. Por esse motivo decidimos usar o pequeno espaço reservado para esse tema para uma breve apresentação sobre obtenção de tangentes elaborada por Leibniz, mas sob hipótese alguma aferimos menos importância ao *Cálculo* desenvolvido por Newton.

É fato que Newton e Leibniz ao longo de seus estudos chegaram ao *Cálculo*, e esse foi o maior avanço da matemática até então. Mas esse feito muito se deve aos matemáticos dos séculos XVI e XVII que tomaram a iniciativa de propor uma nova abordagem à matemática, ao introduzirem a álgebra simbólica e a Geometria Análítica. Esse período é considerado o divisor de águas para a matemática contemporânea. Abriu-se então caminhos para avançar na notação, no rigor e na elucidação do problema da quadratura de área de forma direta.

#### 4.5.2 A Quadratura da Parábola por Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665), advogado francês e matemático amador, contemporâneo de Descartes, era chamado por seus pares de "Príncipe dos Amadores". Foi um dos pioneiros no estudo da Teoria Moderna dos Números, é conhecido por conjecturar "O Último Teorema de Fermat" em 1637. Seu famoso teorema foi solucionado 358 anos depois, em 1995 pelo matemático inglês Andrew Wiles (1953). Também faz parte de seu legado o "Pequeno Teorema de Fermat" que garante um resultado muito importante para a divisibilidade na Teoria dos Números.

Eves (2004, pp. 428-429) destaca que no ano de 1629, Fermat foi pioneiro em elaborar, dentro de procedimentos bem justificados, resoluções de problemas relativos ao traçado de tangente a curvas e de questões objetivando a determinação de máximos e mínimos de funções, uma real manifestação dos primórdios do cálculo diferencial.

Além de seus estudos sobre tangentes, Fermat obteve êxito ao determinar área sob uma parábola chegando ao mesmo resultado encontrado quando integramos a função  $f(x) = x^2$ , usando procedimentos de *Cálculo* atuais.

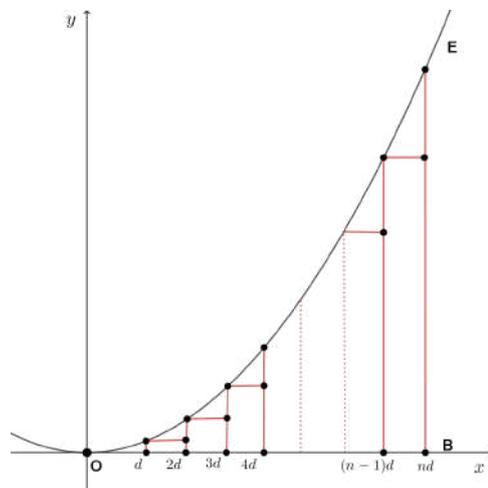
Assim como Bonaventura Cavalieri e Pascal, Fermat também usou uma ideia diferente do método da exaustão dos gregos, pois estes empregavam diferentes tipos de figuras retilíneas para aproximar uma área curvilínea, a exemplo dos triângulos usados por Arquimedes na quadratura do arco parabólico, conforme apresentado na Seção 4.3.4.

Iniciava-se no século XVII um procedimento sistemático para determinação da área sob o gráfico de uma função, que usava a partição da região a ser calculada em finos retângulos. "A vantagem é que a aproximação por retângulos infinitamente finos serve para qualquer figura curvilínea" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.272). O exemplo a seguir é uma adaptação, escrita com notação atual, usado por Fermat e Pascal. O raciocínio empregado mostra a notória semelhança com o método atual de integração.

**Exemplo 4.12.** Dada a parábola  $y = kx^2$  da Figura 4.33, exaurindo-a em retângulos de lados paralelos ao eixo  $Oy$  e bases no eixo  $Ox$  tal que o vértice da parábola esteja na origem do sistema de coordenadas e seu eixo de simetria seja o próprio eixo  $Oy$  é possível encontrar a área do setor parabólico entre o eixo  $Ox$ , a parábola e a reta vertical que passa por  $E$  e corta  $Ox$  no ponto  $B$ .

**Resolução.**

Figura 4.33 – Área sob uma curva particionada em retângulos.



Fonte: Adaptado de Eves, 2004, p. 435

No segmento  $OB$  marcamos  $n$  pontos equidistantes e seja  $d$  as partições tais que  $d = \frac{OB}{n}$ . Construindo retângulos como mostrados na Figura 4.33, suas bases têm o comprimento fixo  $d$  e suas alturas, aplicados os valores  $n \cdot d$  das bases na equação da parábola com  $n \in 1, 2, 3, \dots, n$  serão respectivamente

$$d^2, 4d^2, 9d^2, \dots, (n-1)^2d^2, n^2d^2. \quad (4.78)$$

Pelo "Princípio dos Indivisíveis" de Cavalieri, a área de uma figura seria a soma de um número indefinido de segmentos de retas paralelas, ao tornarmos esses retângulos tão finos quanto possíveis, poderíamos obter a área do setor parabólico em questão fazendo a soma da área desse número indefinido de finíssimos retângulos aos quais o setor foi decomposto.

Como as bases de todos esse retângulos medem  $d$ , multiplicando por  $d$  cada uma das alturas da sequência 4.78 temos as áreas dos  $n$  retângulos e somando todas essas áreas, temos:

$$S = d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \dots + n^2d^3 = d^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \quad (4.79)$$

Fermat e Pascal já haviam trabalhado na soma das  $m$ -ésimas potências dos  $n$  primeiros números naturais, então a fórmula para obter a soma dos termos entre parênteses do segundo membro da Equação (4.79) já era fato conhecido, logo,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n+1) (2n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \quad (4.80)$$

mas  $d = \frac{OB}{n}$ , logo,

$$d^3 \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) = OB^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right). \quad (4.81)$$

Note que quanto maior for o número de retângulos usados na soma, na Equação (4.81) os termos  $\frac{1}{2n}$  e  $\frac{1}{6n^2}$  podem ser desprezados, e a soma da área dos  $n$  retângulos em que o setor parabólico  $OBE$  da Figura 4.33 foi particionada será

$$S = \frac{OB^3}{3}. \quad (4.82)$$

Nesse momento da história, com contribuições de Cavalieri, Pascal e Fermat, na obtenção de áreas de figuras planas com "lados" curvilíneos transcendemos o método da exaustão de Eudoxo, fornecendo um valor exato e de forma direta para a área. Essa técnica virá a ser chamada futuramente de integração.

Salientamos ainda que para Roque (2012), a quadratura de área feita pelos gregos consistia em comparar áreas, já o cálculo proposto por Fermat, no Exemplo 4.12, fornece uma expressão analítica para a área em questão.

Observe que no Exemplo 4.9 da Seção 4.3.4 determinamos a área de um segmento parabólico com a técnica atual de integração, idêntica à obtida por Fermat e o resultado foi o mesmo que Arquimedes encontrou cerca de 2000 anos antes. Dessa forma, a genialidade de Arquimedes não nos deixa passar despercebido pela beleza, ousadia e sofisticação desse seu trabalho e todo seu legado.

O método para calcular área descrito, se aplica a várias curvas, pois basta termos a equação para determinar as alturas dos retângulos em função da base. Porém é preciso conhecer expressões para a soma das  $m$ -ésimas potências dos  $n$  primeiros números naturais. Mas Fermat e Pascal já haviam se dedicado muito em obter essas expressões, já conhecendo várias delas, e não só isso, "por volta de 1637 Fermat já sabia que para  $n$  racional e diferente de  $-1$ , a área sob o gráfico de  $y = x^n$  entre dois pontos  $O$  e  $B$  (a uma distância  $a$  de  $O$ ) é dada por  $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ ." (ROQUE, 2012, p.349).

Os avanços de Descartes e Fermat com o desenvolvimeto da geometria analítica aliados a esforços de muitos outros matemáticos dos séculos XVI e XVII ainda não resolviam alguns problemas de forma satisfatória, conforme o que propunha a generalização e sistematização possibilitada pelo surgimento da "Análise Algébrica". Porém, o *Cálculo* desenvolvido por Leibniz e Newton trouxe avanços significativos quanto à encontrar um método sistemático para achar tangentes, encontrar um método sistemático para efetuar quadratura e uma forma de relacionar o método de obtenção de tangentes e o cálculo de áreas. Mas a sistematização dos valores infinitesimais ainda não estava totalmente posta.

O problema sobre a fundamentação do Cálculo Infinitesimal só veio a ser contornado por completo a partir do desenvolvimento da teoria de Limites e após a definição atual de função. O matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi, entre outros, um grande estudioso da Teoria dos Limites.

Cauchy iniciou com sua obra *Cours d'analyse* os fundamentos para o atual Ensino de *Cálculo* que em sua essência traz a seguinte sequência de estudos: funções, limites e continuidade, derivadas e integrais. Conforme tratamos nessa seção, a ordem das descobertas desses temas foi exatamente contrária. Um ponto marcante desse trabalho de Cauchy é sua preocupação com o rigor em definir o domínio de validade de uma definição ou de um teorema, levando em conta que o rigor matemático é em si um conceito em transformação que obedece o contexto e os padrões de seu tempo.

A título de exemplo, o rigor matemático da grécia antiga, segundo Roque e Carvalho (2012) é representado pelo método de "síntese", essencialmente axiomático-dedutivo, iniciando as demonstrações de teoremas com alguns fatos aceitos como evidentes e/ou intuitivos, tais como as definições, postulados, axiomas e resultados já conhecidos, de modo a provar o que se deseja. Na maioria das vezes essas provas estão alicerçados em construções geométricas.

Já o rigor matemático a partir de Descartes, como apontam Roque e Carvalho (2012), traz em si o método analítico, que futuramente virá a se chamar "Análise", onde inicialmente se supõe o problema resolvido e modelado em uma equação. Através de manipulações algébricas, encontram-se resultados cada vez mais básicos, até que se consiga validar o resultado inicial. Salienciamos que, sobretudo, o rigor matemático como sinônimo de "veracidade" dos objetos matemáticos não muda, mudam-se apenas os métodos de alcançá-lo.

No século XIX, tínhamos desenvolvido a Teoria dos Limites, os estudos sobre séries numéricas e séries de funções, os trabalhos de Newton e Leibniz e a definição atual de função, conforme enfatiza Ávila (2006).

Nesse contexto, Riemann, define a Integral como o limite da soma de uma série, apenas por termos numéricos, desprendendo-se do conceito de área, já que nesse mesmo século, descobriu-se que a Geometria não estava bem fundamentada. Então, tornou-se mais adequado usar limites de somas para a introdução do conceito de integral.

Mas, atualmente, ainda é tradição em cursos superiores que o primeiro contato dos estudantes de *Cálculo* com a Integração, seja através de uma motivação inicial baseada em áreas, usando como o primeiro exemplo algo muito semelhante ao cálculo de Fermat para a quadratura da região entre a parábola e o eixo  $Ox$ , conforme o Exemplo 4.12.

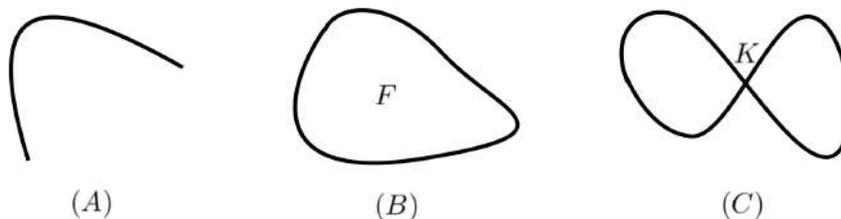
No próximo capítulo daremos continuidade à fundamentação teórica dessa dissertação, apresentando a forma atual de definir área e sua unidade de medida, descreveremos algumas propriedades numéricas dessa grandeza, faremos uma introdução sobre noções básicas de limites de sequências e funções com o objetivo de abrir caminho para a introdução do estudo da Integral moderna. Apresentaremos também uma breve pesquisa sobre o Teorema de Pick, que possibilita, através de uma fórmula, determinar a área de um polígono inscrito em uma malha quadricular efetuando a contagem dos pontos da malha relacionados ao polígono.

## 5 ÁREA: CONCEITOS, DEFINIÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

O estudo teórico a seguir se faz necessário por acreditarmos que o professor do Ensino Médio deve ter um conhecimento bastante aprofundado em relação a todos os temas que ensina, pensamento nosso que vai de encontro com as finalidades desse programa de Mestrado.

O conceito de área só é admissível para regiões do plano delimitadas por uma curva fechada simples sem auto intersecção. Na Figura 5.1, em (A) representa-se uma curva plana aberta, (B) ilustra o que concebemos intuitivamente como curva fechada simples, e (C) mostra uma curva fechada com auto intersecção no ponto  $K$ .

Figura 5.1 – Alguns tipos de curvas planas.



Fonte: Autoria própria.

Para Lima et al. (2013, p. 92), a superfície  $F$  da Figura 5.1 (B), pode ser associada a um número real, que informa a medida da sua área, ou seja, devemos comparar sua superfície (a porção do plano que ela ocupa) com a de uma outra figura tomada como unidade. O resultado dessa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes a tal figura plana contém a unidade de área.

A região  $F$  na Figura 5.1 (B) representa a área interior que uma curva fechada simples delimita em um plano (o leitor pode encontrar informações mais completas e aprofundadas sobre curvas simples e polígonos convexos em ANDRÉ (2018, p. 41-45). É possível associar cada região  $F$  a um número real não negativo  $\mathcal{S}(F)$ , chamado de área de  $F$ , que possui as propriedades listadas em Pinho (2010, p. 203) e apresentadas a seguir:

**Definição 5.1.** *Seja uma região plana  $F$ , delimitada por uma curva fechada simples. A área de  $F$  é um número real positivo, denotado por  $\mathcal{S}(F)$ , satisfazendo as seguintes condições:*

- (1) *Se  $F_1 \equiv F_2$ , então  $\mathcal{S}(F_1) = \mathcal{S}(F_2)$ .*
- (2) *Se duas regiões,  $F_1$  e  $F_2$  são tais que sua intersecção não contém pontos interiores, ou seja, se intersectam no máximo pela sua fronteira, então*

$$\mathcal{S}(F_1) \cup \mathcal{S}(F_2) = \mathcal{S}(F_1) + \mathcal{S}(F_2).$$

- (3) *Um quadrado de lado igual a 1 possui área igual a 1.*

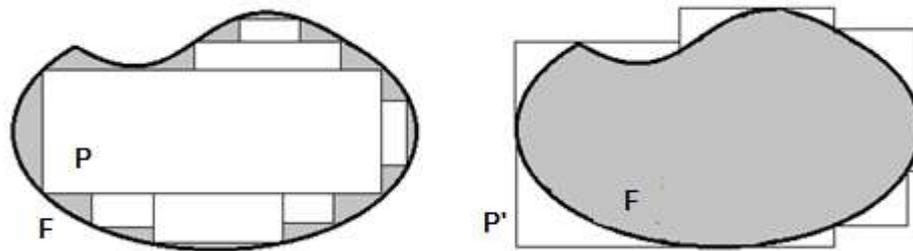
Os itens (1) e (2) afirmam, respectivamente, que duas figuras congruentes possuem a mesma área e que a área é uma grandeza aditiva, ao passo que (3) define a unidade padrão para medida de área.

Da Definição 5.1, demonstra-se a área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e deste último, estendida a todos os polígonos.

De forma mais abrangente, a área de uma região plana arbitrária, delimitada por uma curva fechada e simples pode ser obtida através de aproximações por falta ou por excesso, aplicando o Princípio da Exaustão.

Essa técnica nos permite mostrar que dada uma região delimitada por uma curva fechada simples  $F$ , quanto menor é a diferença entre as áreas dos polígonos circunscritos  $P'$  e inscritos  $P$  à  $F$ , mais esse valor se aproxima da área de  $F$ , representada na Figura 5.2. Essa diferença diminui, ao passo que os lados dos retângulos justapostos  $P$  e  $P'$  vão assumindo valores infinitesimais.

Figura 5.2 – Área de uma figura plana arbitrária.



Fonte: Autoria própria.

**Proposição 5.1.** *Seja  $S(P)$  a área formada por todos os retângulos justapostos no interior de  $F$ ,  $S(P')$  a área formada por todos os retângulos justapostos circunscritos a  $F$ , então  $S(P) < S(F) < S(P')$ .*

*Demonstração.* Conforme a Figura 5.2, como  $P$  está contido em  $F$ ,  $S(P)$  se aproxima de  $S(F)$  por falta, temos então,  $S(P) \leq S(F)$ , logo, existe  $m > 0$  tal que  $m < S(P) \leq S(F)$ .

Por outro lado, sendo  $P'$  um polígono que contém  $F$ ,  $S(P')$  se aproxima de  $S(F)$  por excesso, temos então,  $S(F) \leq S(P')$ , logo, existe  $k > 0$  tal que  $S(F) \leq S(P') < k$ .

Portanto, pelo Princípio da Exaustão,  $S(P) \leq S(F) \leq S(P')$ , podendo ocorrer igualdade no caso das grandezas serem comensuráveis.  $\square$

A ideia de dividir superfícies em polígonos menores para determinar área faz parte das raízes mais antigas da Matemática, pois como vimos, vem sendo utilizada desde os primeiros registros históricos que dispomos não apenas para o cálculo de áreas em si, mas aplicadas também à resolução de equações, demonstrações e formulação de teoremas. Porém, com os

avanços da álgebra e o surgimento da Geometria Analítica, foi possível sistematizar os primeiros estudos e desenvolvimentos do Cálculo Integral.

Antes de iniciarmos a discussão sobre a Teoria da Integral, apresentaremos definições para limites de seqüências e de funções.

## 5.1 LIMITES DE SEQUÊNCIAS

Para determinar a área de um segmento parabólico, Arquimedes precisou efetuar a seguinte soma:  $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + \frac{T}{4^{n-1}}$ , onde  $n$  seria o número de triângulos em que o segmento parabólico era dividido, e provou mesmo com os poucos recursos notacionais que, tomando um  $n$  tão grande quanto se queira, o resultado é  $\frac{4}{3}T$ . A prova da quadratura da parábola por arquimedes está exposta na Seção 4.3.4

Uma seqüência é uma soma de infinitos termos e por ser uma soma infinita precisamos apresentar o conceito de soma de uma infinidade de termos. Inicialmente vamos definir o que seja uma seqüência e posteriormente definiremos o que é a soma dos termos de uma seqüência.

Uma seqüência é definida como sendo uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais e o contradomínio é o conjunto dos números reais. De fato, uma seqüência é a função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que leva  $n$  em  $f(n)$ . Por motivos operacionais denotaremos  $f(n)$  por  $a_n$ , ou seja,  $f(n) = a_n$ . O número natural  $n$  é denominado índice da seqüência e indica a posição do termo na seqüência e  $a_n$  o  $n$ -ésimo termo dessa seqüência ou o termo geral. Usaremos também a notação  $(a_n)$  para indicar uma seqüência.

A seguir, listamos alguns exemplos de seqüências infinitas, ou apenas seqüências, como vamos nos referir a elas daqui em diante.

- a) Os números pares positivos podem ser dados pela seqüência de termo geral  $a_n = 2n$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$
- b) Os números ímpares positivos podem ser dados pela seqüência de termo geral  $a_n = 2n - 1$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$
- c) Os números primos, também formam uma seqüência  $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$ , porém, não há, ao menos por enquanto, fórmula para o termo geral desta seqüência mas seus elementos obedecem uma rígida definição.

**Definição 5.2.** Diz-se que uma seqüência  $(a_n)$  converge para o número  $L$ , ou tem limite em  $L$  se, dado qualquer número  $\varepsilon > 0$ , sempre é possível encontrar um número  $N > 0$  tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon, \quad (5.1)$$

em notação usual, escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L. \quad (5.2)$$

Usando uma propriedade do módulo, o limite em (5.2) equivale a

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Somando  $L$  aos membros das desigualdades em (5.3), obtemos

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon. \quad (5.4)$$

Esse resultado equivale a afirmar que

$$a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon). \quad (5.5)$$

Para esse trabalho, nos interessam as sequências convergentes, ou seja, sequências infinitas cujo termo  $a_n$  vai se tornando arbitrariamente próximo de um certo número  $L$ , à medida que o índice  $n$  vai se tornando cada vez maior. Esse tipo de sequência, converge para um certo número  $L$  (ou tem limite  $L$ ) quando, a partir de determinado índice  $n$ , todos os demais termos, a partir desse, estão arbitrariamente próximos de  $L$ .

Como exemplo, os termos da sequência  $a_n = (3 + \frac{3}{n})$  se aproximam arbitrariamente de 3 quando  $n$  tende ao infinito. Na notação usual, temos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ .

Também há sequências infinitas cujos termos crescem ou decrescem sem limitações, denominadas divergentes para o infinito positivo  $(+\infty)$  e para o infinito negativo  $(-\infty)$ . A seguir, temos exemplos de sequências divergentes:

a)  $(a_n)$  com  $a_n = n^2 + 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , na notação de limites temos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

b)  $(b_n)$  com  $b_n = 3 - n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , na notação de limites, temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ .

Além destas temos as sequências oscilantes que também não são convergentes, por exemplo, a sequência  $(c_n)$ , com  $c_n = (-1)^n \cdot 2n$ .

A título de ilustração, nos exemplos a seguir, resolveremos algumas questões a respeito do limite para uma sequência dada, tais como, o cálculo do limite e a determinação de um índice  $N$  para um dado valor de  $\varepsilon$ .

**Exemplo 5.1.** Encontre um limite para a sequência  $(a_n)$  com  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n = \frac{14n}{2n+1}$ .

**Resolução.**

Em outras palavras, devemos obter o valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{14n}{2n+1} \right)$ .

Dessa forma, dividindo por  $n$  todos os termos do numerador e do denominador da fração  $\frac{14n}{2n+1}$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{14n}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{14}{2 + \frac{1}{n}} \right). \quad (5.6)$$

Como o termo  $\frac{1}{n}$  tende a zero quando  $n$  tende a infinito, então a fração tende a  $\frac{14}{2}$ , portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{14n}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} \right) = \frac{14}{2} = 7. \quad (5.7)$$

Note que no exemplo acima, usamos uma técnica algébrica para encontrar o valor do limite. Porém, o limite de uma sequência, quando existe é único, portanto, para garantir que o valor do limite obtido em (5.7) seja realmente o limite procurado, o valor deve satisfazer a Definição 5.2, conforme será exposto no Exemplo 5.2.

**Exemplo 5.2.** Usando a definição de limites de sequências, prove que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n}{2n+1} = 7$ .

**Resolução.**

Seja  $\varepsilon > 0$ . Para que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 7$ , precisamos encontrar um número  $N > 0$  tal que  $|a_n - 7| < \varepsilon$  sempre que  $n > N$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{14n}{2n+1} - 7 \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{14n}{2n+1} - 7 \cdot \left( \frac{2n+1}{2n+1} \right) \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{14n - 14n - 7}{2n+1} \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{-7}{2n+1} \right| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{|-7|}{|2n+1|} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{7}{2n+1} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \frac{2n+1}{7} > \frac{1}{\varepsilon} \\ \Leftrightarrow & 2n+1 > \frac{7}{\varepsilon} \\ \Leftrightarrow & n > \frac{7}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Logo, para qualquer natural  $N > \frac{7}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$  temos que  $n > N \Rightarrow |a_n - 7| < \varepsilon$ .

Portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n}{2n+1} = 7$ .

Conforme o exemplo anterior, basta tomarmos  $N$  como qualquer natural maior que  $\frac{7}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$  para qualquer  $\varepsilon > 0$ , sendo esse último, tão pequeno quanto se desejar.

Conhecendo uma expressão que relaciona  $N$  e  $\varepsilon$  obtida no Exemplo 5.2, determinaremos  $N$ , em função de um valor de  $\varepsilon > 0$  dado. Acompanhe o exemplo a seguir.

**Exemplo 5.3.** *Determine o índice  $N$ , a partir do qual temos  $|a_n - 7| < \frac{1}{200}$  na sequência do Exemplo 5.1.*

**Resolução.**

Note que,

$$\begin{aligned}
 |a_n - 7| &= \left| \frac{14n}{2n+1} - 7 \right| < \frac{1}{200} \\
 &\Leftrightarrow \left| \frac{-7}{2n+1} \right| < \frac{1}{200} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2n+1}{7} > \frac{200}{1} \\
 &\Leftrightarrow 2n > 1400 - 1 \\
 &\Leftrightarrow n > \frac{1399}{2} \\
 &\Leftrightarrow n > 699,5.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Logo, se  $n > 699,5$ , então  $|a_n - 7| < \frac{1}{200}$ .

A seguir, verificaremos se  $N = 700$  é realmente o índice da sequência que gera uma aproximação menor que  $\frac{1}{200}$  entre o termo de  $(a_n)$  e qualquer termo que vem depois dele.

**Exemplo 5.4.** *Verifique se, para  $n = 699$ , teremos  $|a_n - 7| \geq \varepsilon$  com  $\varepsilon = \frac{1}{200}$ .*

**Resolução.**

Basta substituímos  $n = 699$  em  $\left| \frac{14n}{2n+1} - 7 \right|$  e compararmos com o valor dado para  $\varepsilon$ . Nesse caso, temos  $\varepsilon = \frac{1}{200} = 0,005$ .

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{14 \cdot 699}{2 \cdot 699 + 1} - 7 \right| &= \left| \frac{9786}{1398 + 1} - 7 \right| \\
 &= \left| \frac{9786}{1399} - 7 \right| \\
 &= \left| \frac{9786 - 7 \cdot 1399}{1399} \right| \\
 &= \left| \frac{9786 - 9793}{1399} \right| \\
 &= \left| \frac{-7}{1399} \right| \\
 &\approx |-0,0050036| = 0,0050036 > 0,005.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Portanto, se  $n \leq 699$  teremos  $|a_n - 7| \geq \varepsilon$ .

Note que no Exemplo 5.4 aplicando qualquer outro índice  $n \leq 699$ , o valor de  $\left| \frac{14n}{2n+1} - 7 \right|$  será maior que  $\varepsilon = \frac{1}{200}$ .

Na seção a seguir, faremos uma discussão sobre limites de funções, contemplando os tópicos desse tema que são necessários para posteriormente apresentarmos a demonstração da Integral de Riemann.

## 5.2 LIMITES DE FUNÇÕES

A palavra função foi introduzida por Leibniz em 1673, para associar quaisquer duas variáveis geométricas referentes a uma determinada curva e, posteriormente, essa ideia foi passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras. (ÁVILA, 2006).

Em Lima (2014) podemos encontrar a definição atual de função, conforme a Definição 5.3.

**Definição 5.3.** *Dados os conjuntos  $D$  e  $Y$ , uma função  $f : D \mapsto Y$  é uma regra, ou conjunto de instruções, que informa como associar a cada elemento  $x \in D$ , sem exceção, a **um único elemento**  $y = f(x) \in Y$ . O conjunto  $D$  é chamado o domínio e o conjunto  $Y$  é chamado o contradomínio da função  $f$ .*

Em nosso contexto trabalharemos somente com funções reais de variáveis reais portanto o contradomínio de uma função, será sempre o conjunto dos números reais, já o domínio, pode ser formado por subconjuntos dos números reais, na forma de intervalos, são eles:

- a) Intervalos abertos, de extremos  $a$  e  $b$ , com  $a < b$ , denotado por  $(a, b)$  tal que

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

- b) Caso os extremos  $a$  e  $b$  estejam incluídos no intervalo, ele será denominado intervalo fechado, denotado por  $[a, b]$ , tal que

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Os intervalos podem ser também *semifechados* ou *semiabertos*, isto é, aberto em uma extremidade e fechado em outra, em qualquer ordem.

Dado um intervalo aberto, e fixando um número real  $L$  pertencente a esse intervalo, chama-se *vizinhança* de  $L$  (com  $\varepsilon > 0$ ), a todos os números  $x$  do intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Denotaremos esse intervalo com o símbolo  $V_\varepsilon(L)$ .

**Definição 5.4.** Um número  $a$  é um ponto de acumulação de um conjunto  $D$  se toda vizinhança de  $a$  contém infinitos elementos de  $D$ . Isto equivale a dizer que toda vizinhança de  $a$  contém algum elemento de  $D$  diferente de  $a$ , ou ainda, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $V'_\varepsilon(a)$  contém algum elemento de  $D$ .

A notação  $V'_\varepsilon(a) = V_\varepsilon(a) - \{a\} = \{x : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$  é denominada vizinhança perfurada de  $a$  de raio  $\varepsilon$ .

Para Ávila (2006, p. 142), historicamente, no desenvolvimento do *Cálculo*, houve a necessidade de obter limites de razões incrementais que definem algumas derivadas, e esses limites podem ser do tipo  $\frac{0}{0}$ . Ainda segundo o autor, os primeiros casos que ocorreram no desenvolvimento da Teoria dos Limites foram com as funções

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \text{ e } f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}, \quad (5.11)$$

com  $x$  tendendo a zero.

Posteriormente, no estudo de integrais impróprias, veio a necessidade de se determinar limites de funções como

$$f(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{\sqrt{1-t}} dt, \quad (5.12)$$

com  $x$  tendendo a 1.

Para casos apresentados em (5.11) e (5.12), a variável  $x$  deve aproximar-se de um certo valor, mas nunca deve assumir esse valor. O valor para o qual  $x$  se aproxima deve ser o ponto de acumulação do domínio da função, daí surge a necessidade de se estudar limites de funções, conforme definimos a seguir.

**Definição 5.5.** Dada uma função  $f$  com domínio  $D$ , seja  $a$  um ponto de acumulação de  $D$  (que pode ou não pertencer a  $D$ ). Diz-se que um número  $L$  é o limite de  $f(x)$  com  $x$  tendendo a  $a$  se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

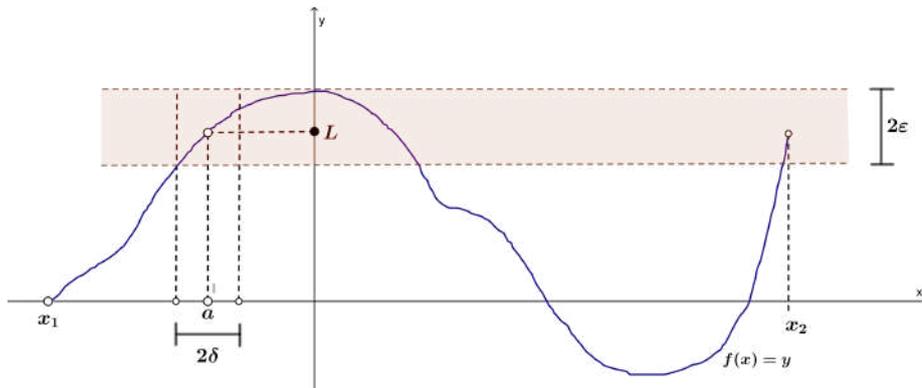
$$x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5.13)$$

O resultado (5.13), interpretado geometricamente na Figura 5.3, indica que para todo  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , ou seja  $x \in (a - \delta, a + \delta)$ , com  $x \neq a$ , o ponto do gráfico de  $f$  com abscissa  $x$  pertence a faixa sombreada do plano na Figura 5.3.

Usualmente, representamos o limite de uma função por  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e usando propriedades de módulo, define-se o limite de uma função como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \text{ sempre que } x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a \text{ e } x \in D. \quad (5.14)$$

Figura 5.3 – Representação gráfica do limite de uma função.



Fonte: Adaptado de Neto, 2015, p.123.

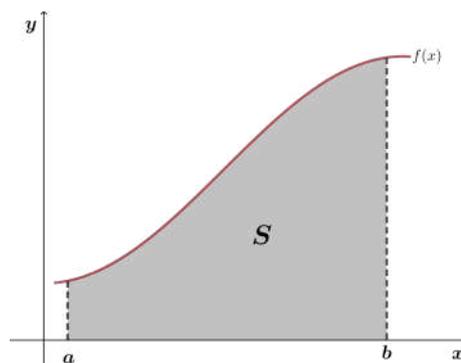
Com as definições para Limites de Sequências e Limites de Funções bem estabelecidas, podemos mostrar que a área sob o gráfico de uma função, como por exemplo a área representada na Figura 5.4 é usualmente obtida pela "Soma de Riemann" cujo limite, chamamos de Integral.

### 5.3 ÁREA SOB O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

De acordo com as finalidades dessa dissertação, introduziremos o conceito de integral a partir do cálculo de área, já discutido em seções anteriores. Os argumentos que usaremos são muito similares ao Princípio da Exaustão, porém, como já exposto, temos uma notação algébrica mais desenvolvida, um sistema de coordenadas para o plano, a definição de função, de limites e de somas de sequências convergentes.

Nossa demonstração se limitará a definir uma área  $S$  de uma figura plana delimitada pelo gráfico de uma função  $f$  positiva, pelo eixo das abscissas e por duas retas  $x = a$  e  $x = b$ , conforme Figura 5.4,

Figura 5.4 – Área delimitada sob o gráfico de uma função.



Fonte: Autoria própria.

Nesse momento acumulamos as informações necessárias para apresentarmos uma solução para o problema da obtenção de método geral para o cálculo de área.

A consolidação e posterior resolução para esse problema iniciou-se com o "Princípio da Exaustão" de Eudoxo, passou pelo crivo e o rigor dos *Elementos* e pela genialidade de Arquimedes, foi ressignificado por Cavalieri, a seguir por Pascal e Fermat e pelas importantes e fundamentais contribuições de Leibniz e Newton, entre outros grandes matemáticos que fazem parte dessa história.

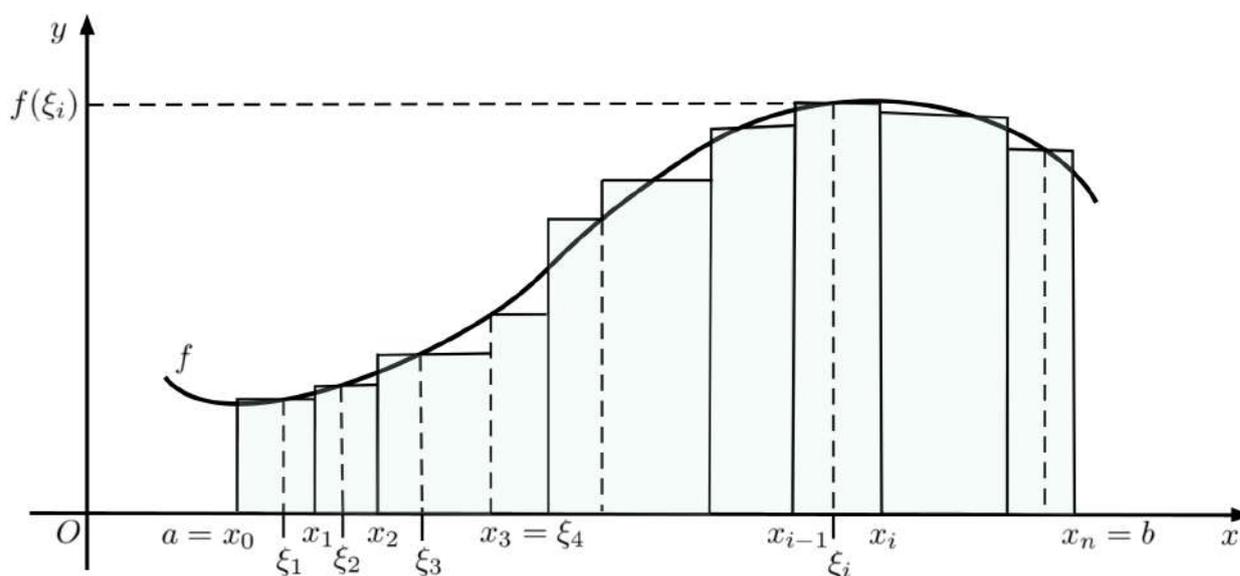
A busca do método que será exposto na próxima seção foi o fio condutor de todos os tópicos da história da matemática narrados aqui nessa dissertação.

### 5.3.1 A Definição de Integral

Para demonstrar que a área  $S$  da Figura 5.4 é equivalente ao valor da integral da função  $f$ , compreendida pela curva no intervalo  $[a, b]$ , procederemos conforme Ávila (2006, pp. 193-195).

Iniciaremos considerando a soma das áreas de uma série de retângulos como ilustrados na Figura 5.5.

Figura 5.5 – Decomposição em retângulos da área sob a curva  $f(x)$  para o intervalo  $[a, b]$ .



Fonte: Adaptado de Ávila, 2006, p. 194.

Obtemos os retângulos da figura da seguinte maneira: dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos iguais, de comprimentos  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

Sejam  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  os pontos dessa divisão, a qual denominamos partição do intervalo  $[a, b]$ .

Em cada um dos intervalos da partição escolhamos pontos quaisquer:  $\xi_1$  no primeiro desses intervalos,  $\xi_2$  no segundo,  $\xi_3$  no terceiro, e assim sucessivamente. Estes últimos pontos podem ser escolhidos arbitrariamente, podendo mesmo ser um dos extremos do subintervalo, como observa-se na Figura 5.5. Com esse processo, formam-se  $n$  retângulos, todos com base  $\Delta x$  e alturas  $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), \dots, f(\xi_n)$ .

A soma das áreas dos retângulos representados pelo número  $S_n$  dado por

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x \quad (5.15)$$

pode ser escrita, abreviadamente, com a notação de somatório:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x. \quad (5.16)$$

Pensando na sequência de somas formadas pelas diferentes partições, ou seja,

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots, \quad (5.17)$$

o termo  $S_n$  se aproxima de um valor limite, à medida que  $n$  cresce acima de qualquer número dado. E o valor limite deve ser tomado como a área da figura delimitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ . O limite assim obtido é chamado de integral de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , a qual é indicada da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (5.18)$$

Portanto, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x. \quad (5.19)$$

Para definir a integral, o limite deve existir e ter o mesmo valor, independente da escolha dos pontos  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  nos subintervalos de divisão de  $[a, b]$ .

As somas  $S_n$  dessa definição são chamadas *Somas de Riemann*, pois foi o matemático alemão Bernard Riemann quem primeiro construiu, em meados do século XIX, uma teoria adequada da Integral.

Pode-se ainda destacar que: leading0.2cm

- 1) Na definição de integral, a função  $f$  pode assumir valores positivos, valores negativos ou nulos. E nem é preciso que os subintervalos da partição de  $[a, b]$  sejam todos iguais; basta que o maior dos comprimentos desses subintervalos tenda a zero. Esse comprimento máximo é chamado norma da partição  $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ , sendo  $a = x_0 < x_1 <$

$x_2 < \dots < x_n = b$ . Tomamos arbitrariamente os pontos  $\xi_1$  em  $[x_0, x_1]$ ,  $\xi_2$  em  $[x_1, x_2]$ , ...,  $\xi_n$  em  $[x_{n-1}, x_n]$ . Denotando por

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \dots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}, \quad (5.20)$$

os comprimentos dos subintervalos, formamos a soma

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (5.21)$$

Por definição, a integral de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  é o limite da soma  $S_n$ , com  $n \rightarrow \infty$ , sob o pressuposto de que a norma da partição correspondente a  $S_n$  tenda a zero; e que o limite de  $S_n$  realmente exista. Escrevemos então,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (5.22)$$

2) Esta integral é puramente numérica, não depende da noção de área, a qual usa-se apenas como elemento motivador para introduzir o conceito. De posse da integral, invertamos as coisas e definimos a área da Figura 5.4 delimitada pelo gráfico de  $f \geq 0$ , pelo eixo dos  $x$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  como a integral dessa função no intervalo  $[a, b]$ .

3) A definição

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (5.23)$$

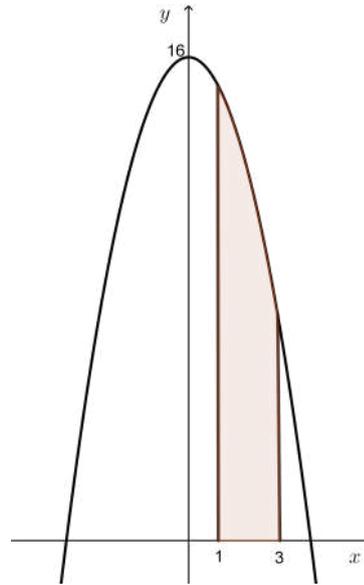
coloca, de imediato, o problema de saber se existe mesmo o limite das somas  $S_n$ , qualquer que seja a escolha dos pontos  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  e esse limite é o mesmo para diferentes seqüências de *Somas de Riemann*, em cujo caso dizemos que a função  $f$  é integrável. Pode-se demonstrar que toda função contínua em um intervalo fechado é integrável nesse intervalo.

Para fixarmos a compreensão do processo de decomposição de uma área sob uma curva em retângulos e posterior composição dessa área através da soma das áreas dos retângulos, obtendo assim o valor dessa área, apresentamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 5.5.** *Determine a área da região compreendida entre a curva  $y = x^2 - 16$  e as retas  $y = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = 3$ .*

**Resolução.**

*O gráfico da Figura 5.6 ilustra a curva em questão, com destaque para a área que se deseja obter o valor.*

Figura 5.6 – Área sob a curva  $f(x)$  para o intervalo  $[1,3]$ .

Fonte: Autoria própria.

Vamos decompor a área destacada na Figura 5.6 em  $n$  retângulos de bases medindo  $\Delta x$ . Observe que a projeção da área destacada no eixo das abscissas é um segmento de medida 2, logo,  $\Delta x = \frac{2}{n}$ .

Seja  $P$  uma partição do intervalo  $[a, b]$ , com  $a = 1$  e  $b = 3$  tal que

$$\begin{aligned} P : a &= x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n < b \\ \Rightarrow [a, b] &= [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como  $[a, b] = [1, 3]$ , temos:

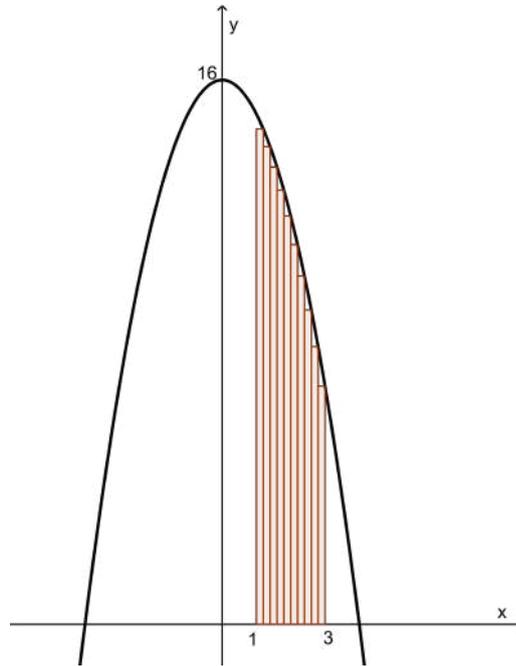
$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 + \Delta x \\ x_2 &= x_1 + \Delta x = 1 + 2\Delta x \\ x_3 &= x_1 + x_2 = 1 + 3\Delta x \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= 1 + (n-1)\Delta x \\ x_n &= 1 + n\Delta x = 3. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para as alturas de cada retângulo de base  $\Delta x$ , observa-se que:

i) A função é decrescente no intervalo dado.

ii) Os retângulos de base  $\Delta x$  são inscritos. Ver Figura 5.7.

Figura 5.7 – Decomposição em retângulos da área sob a curva  $f(x)$  para o intervalo  $[1,3]$ .



Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, as alturas  $H_i$  usadas são os valores mínimos de  $f(x)$  para cada intervalo da partição  $P$ , ou seja,  $H_i = f(x_i)$ . Então, no primeiro intervalo usamos  $H_1 = f(x_1)$ , no segundo intervalo usamos  $H_2 = f(x_2)$  e assim sucessivamente. Note que aplicamos  $f$  ao extremo à direita de cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  para obter a altura de cada retângulo.

A área  $S_i$  que procuramos determinar é numericamente igual à soma das áreas dos retângulos inscritos de base  $\Delta x_i$  e altura  $f(x_i)$ , logo

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{i=1}^n H_i \cdot \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n (16 - (x_i)^2) \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Mas  $x_i = 1 + i \cdot \Delta x$ . Substituindo em (5.26), temos:

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{i=1}^n (16 - (1 + i\Delta x)^2) \Delta x = \sum_{i=1}^n (16 - (1 + 2i\Delta x + (\Delta x)^2 i^2)) \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n (16 - 1 - 2i\Delta x - (\Delta x)^2 i^2) \Delta x = \sum_{i=1}^n (15 - 2i\Delta x - (\Delta x)^2 i^2) \Delta x \\ &= 15n\Delta x - 2(\Delta x)^2 \sum_{i=1}^n i - (\Delta x)^3 \sum_{i=1}^n i^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Seja  $\Delta x = \frac{2}{n}$ , a soma dos  $n$  primeiros naturais é  $\frac{n(n+1)}{2}$  e a soma dos  $n$  primeiros naturais ao quadrado  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , substituindo em (5.27), temos:

$$\begin{aligned}
 S_i &= 15n \cdot \frac{2}{n} - 2 \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
 &= 30 - 2 \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= 30 - \frac{4(n+1)}{n} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} \\
 &= 30 - \frac{4n}{n} - \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2} \cdot (2n^2 + 3n + 1) \\
 &= 30 - 4 - \frac{4}{n} - \frac{8n^2}{3n^2} - \frac{12n}{3n^2} - \frac{4}{3n^2} \\
 &= 30 - 4 - \frac{8}{3} - \frac{4}{n} - \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2} \\
 &= \frac{70}{3} - \frac{8}{n} - \frac{4}{3n^2} \\
 &= \frac{70}{3} - \left(\frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}\right). \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Obtemos em (5.28) uma expressão geral para determinar a área em questão, dada em função do número  $n$  de retângulos que desejamos usar na decomposição. Dessa forma, a área solicitada é:

$$S_n = \frac{70}{3} - \left(\frac{8}{n} + \frac{4}{3n^2}\right), \tag{5.29}$$

e o  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{70}{3}$ , portanto, a área da Figura 5.6 sob a curva é  $S_n = \frac{70}{3} \approx 23,3333$  unidades de área.

Usando a expressão geral da área obtida em (5.29), vamos analisar um quadro (Tabela 5.1) onde alguns valores de  $n$  foram aplicados à expressão:

Tabela 5.1 – Alguns valores de  $n$  aplicados a Expressão (5.29).

$n$	$S_n$
1	14
2	19
10	22,52
100	23,2532
1000	23,3253

Podemos notar que quanto maior o valor de  $n$ ,  $n$  natural, a área  $S_n$  se aproxima de  $\frac{70}{3} \approx 23,3333$  unidades de área.

No exemplo anterior, usamos a soma inferior, ou seja, consideramos os retângulos inscritos na região sob a curva. Poderíamos ter feito a soma superior, aplicando  $f$  o extremo à

esquerda dos intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , isto é, faríamos a soma das áreas dos retângulos circunscritos à região destacada da Figura 5.6.

Seguiremos com o cálculo de área na próxima seção com a apresentação do Teorema de Pick, que permite obter o valor da área de um polígono inscrito em uma rede/malha quadricular através da contagem dos pontos da malha relacionados a esse polígono.

#### 5.4 O TEOREMA DE PICK

Tendo em mente que o conceito de área é um dos temas principais na geometria da Educação Básica, apresentaremos um método de cálculo de áreas de polígonos através da contagem de pontos em uma malha quadricular. Trata-se do Teorema de Pick, que possibilita calcular áreas de polígonos sobre malhas ou redes quadriculares, fazendo a contagem de pontos de coordenadas inteiras presentes nos lados e no interior do polígono.

Georg Alexander Pick (1859 – 1942), estudou matemática e física na Universidade de Viena, onde ingressou em 1875 e graduou-se em 1879 qualificado a ensinar ambas as disciplinas. Hermes (2015) relata que Pick publicou 67 artigos sobre temas como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria. No entanto, seu trabalho mais conhecido, é o Teorema de Pick. O artigo original tem oito páginas e foi publicado em um periódico chamado *Geometrisches zur Zahlenlehre* na cidade de Praga em 1899. Inicialmente esse seu trabalho não chamou muita atenção mas, após a sua citação em 1969 pelo matemático H. Steinhaus em um de seus livros, esse teorema atraiu atenção e admiração por ser simples e elegante.

Pick tinha descendência judia e sofreu perseguição nazista, era membro da Academia de Ciências e Artes da República Tcheca, porém foi excluído dessa academia e mandado para um campo de concentração onde faleceu aos oitenta e dois anos de idade.

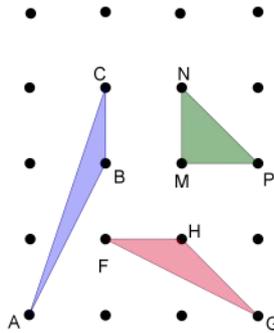
O Teorema de Pick fornece uma fórmula que possibilita obter a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma malha quadricular ou rede quadricular, análoga ao primeiro quadrante do plano cartesiano. Os pontos da malha quadricular são apenas os pontos do plano cartesiano que possuem coordenadas inteiras. A área  $S(P)$  de um polígono sobre a malha quadricular, segundo o Teorema de Pick, é dada pela expressão

$$S(P) = \frac{B}{2} + I - 1, \quad (5.30)$$

onde  $B$  é o número de pontos da malha situados sobre o perímetro do polígono e  $I$  é o número de pontos da malha existentes no interior do polígono. Começamos exemplificando o uso da fórmula de Pick nos exemplos a seguir, onde determinaremos a área de alguns polígonos construídos sobre uma malha quadriculada.

**Exemplo 5.6.** Os triângulos da Figura 5.8 são chamados triângulos fundamentais. Tratam-se de triângulos cujos vértices são os únicos pontos que possuem coordenadas inteiras, ou seja, que pertencem à malha quadricular. Esses triângulos não possuem pontos da malha em seu interior.

Figura 5.8 – Alguns triângulos fundamentais.



Fonte: Autoria própria.

Determine a área de cada um dos triângulos da Figura 5.8 aplicando a fórmula de Pick.

**Resolução.**

É trivial assimilar que o triângulo MNP tenha área igual a  $\frac{1}{2}$ , pois é metade da área do quadrado de lado 1. Usando a Fórmula de Pick, vamos determinar as áreas dos triângulos ABC e FGH, sendo que ambos não possuem pontos no interior, e os pontos sobre o perímetro são apenas seus vértices.

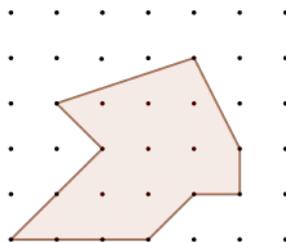
Para o triângulos ABC e FGH temos:  $B = 3$  e  $I = 0$ , logo,

$$S(ABC) = S(FGH) = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}. \tag{5.31}$$

De acordo com o Exemplo 5.6, os triângulos fundamentais da malha quadriculada têm área igual a  $\frac{1}{2}$ .

**Exemplo 5.7.** Determine a área do polígono representado na Figura 5.9.

Figura 5.9 – Polígono sobre uma rede quadricular.



Fonte: Autoria própria.

**Resolução.**

Para o polígono dado temos  $B = 11$  e  $I = 7$ . Substituindo na fórmula de Pick, segue que:

$$\begin{aligned} S(P) &= \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{11}{2} + 7 - 1 \\ &= 5,5 + 6 = 11,5 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Portanto, o polígono da Figura 5.9 possui 11,5 de unidades de área.

O Teorema de Pick é interessante pois permite calcular a área de um polígono simples a partir da contagem de pontos da malha quadrangular formada no plano cartesiano. É de fato surpreendente que seja possível substituir o processo habitual de cálculo de uma área, que envolve medições de grandezas contínuas por uma simples contagem de quantidades discretas.

Na demonstração a seguir usaremos um **caso particular**, onde o polígono em questão é formado por lados cujos pontos da malha sobre eles são exclusivamente os vértices.

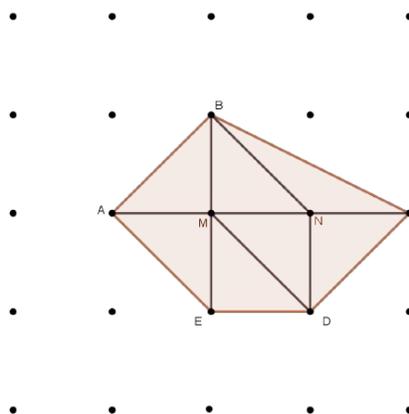
**Proposição 5.2.** *Seja  $ABCDE$  um polígono sobre uma malha quadrangular de tal forma que seus vértices sejam pontos dessa malha e seja  $B$  o número de vértices e  $I$  o número de pontos da malha interiores ao polígono. Então a área do polígono é dada por*

$$S(P) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Faremos a demonstração para o **caso particular** de um polígono de cinco vértices, que inclusive pode ser apresentada para os alunos do ensino médio. Para uma demonstração do caso geral ver ANDRÉ (2018, pp.90-96) ou Lima (1991, pp. 103-113).

*Demonstração.* A Figura 5.10 representa um polígono  $ABCDE$ , cujos únicos pontos do perímetro pertencentes à malha quadrangular são seus vértices.

Figura 5.10 – Polígono  $ABCDE$  sobre uma malha quadrangular.



Fonte: Autoria própria.

Para o caso considerado, note que o número de pontos da malha sobre o perímetro é  $B = 5$ , que é igual ao número de vértices e igual ao número de lados do polígono.

Denotando a soma dos ângulos internos de um polígono por  $S_i$ , essa soma em graus, é dada por  $S_i = 180^\circ \cdot (n - 2)$ . Como  $n = B$ , temos:

$$S_i = 180^\circ \cdot (B - 2). \quad (5.33)$$

Na Figura 5.10 observamos que o polígono  $ABCDE$  está dividido nos seguintes triângulos fundamentais:  $\triangle ABM$ ,  $\triangle BMN$ ,  $\triangle BNC$ ,  $\triangle CDN$ ,  $\triangle DNM$ ,  $\triangle DME$  e  $\triangle EMA$ . O número de triângulos fundamentais será representado por  $T$  e cada um deles tem área igual a  $\frac{1}{2}$ .

No entorno dos pontos  $M$  e  $N$  existem ângulos de  $360^\circ$  em cada um desses pontos. Representaremos por  $I$  a quantidade desses ângulos. Note que essa quantidade corresponde ao número de pontos da malha internos ao polígono. Dessa forma a soma dos ângulos ao redor de  $M$  e  $N$ , é

$$360^\circ \cdot I \quad (5.34)$$

Por outro lado, a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais é  $180^\circ \cdot T$ . Dessa forma,

$$180^\circ \cdot T = 360^\circ \cdot I + 180^\circ \cdot (B - 2) \quad (5.35)$$

Dividindo ambos os membros da Equação 5.35 por  $180^\circ$ , temos:

$$T = 2I + B - 2. \quad (5.36)$$

Levando em conta que cada triângulo fundamental tem área igual a  $\frac{1}{2}$  e que o polígono em questão é decomposto em  $T$  triângulos fundamentais podemos dizer que a área do polígono é

$$S(P) = \frac{1}{2} \cdot T. \quad (5.37)$$

Substituindo  $T$  da Equação (5.37) pelo segundo membro da Equação (5.36), segue que

$$\begin{aligned} S(P) &= \frac{1}{2} \cdot T \\ S(P) &= \frac{1}{2} \cdot (2I + B - 2) \\ S(P) &= I + \frac{B}{2} - 1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Portanto, a área de um polígono onde somente os vértices são pontos do perímetro pertencentes a malha quadrangular é  $S(P) = \frac{B}{2} + I - 1$ , onde  $B$  é a quantidade de pontos sobre o perímetro e  $I$  é a quantidade de pontos internos desse polígono.  $\square$

No capítulo a seguir, discutiremos sobre o uso da história em práticas de ensino de matemática, fundamentaremos a importância do uso de atividades de matemática inspiradas em fatos da história, descrevemos algumas finalidades e objetivos que esse tipo de prática proporciona, bem como mostraremos a forma com que um livro didático atual usa a história da matemática em seu capítulo destinado ao cálculo de área.

## 6 O USO DA HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Da nossa prática docente, percebemos há muito tempo, que o uso da História da Matemática como recurso de ensino, vem se consolidando dentro das discussões curriculares da rede pública e nos livros didáticos. Segundo Miguel e Miorim (2018), o movimento de ensino de matemática com aporte na sua história tem-se intensificado visivelmente, como exemplo, basta ver a discussão inicial na introdução dessa dissertação, onde caracterizamos sua importância contemplada na Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina e na Base Nacional Curricular Comum. Isso se dá sobretudo, pela criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) ocorrida em março de 1999. Os autores apontam ainda que registros de trabalhos envolvendo história, pedagogia e matemática já são objetos de investigações acadêmicas pelo menos, desde meados da década de 80 do século XX.

Optamos pelo uso da História da Matemática como tendência em Educação Matemática por percebermos que a História é um recurso eficaz no processo de aprendizagem, ela traz em si um elemento interessante e motivador para iniciar qualquer processo pedagógico. Logo, não vamos nos ater a discussões muito extensas para justificar sua importância para o ensino de matemática e sim, descrever uma forma de usar a história da matemática, através de um caderno de atividades que trata da geometria, em específico, o cálculo de área.

Acreditamos que, com o aporte da História da Matemática trazemos para a sala de aula problemas reais de outros tempos, situações práticas vividas na antiguidade, similares a problemas atuais, cujas soluções podem ser adequadas à resolução de atividades pedagógicas variadas. Nesse sentido, Silva, Lima e Lima (2016, p. 3) em artigo publicado e apresentado no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM/2016), intitulado "Calculando Áreas e Volumes: do método da exaustão ao Princípio de Cavalieri", argumentam que na Educação Matemática já se consolidou a consciência de que inserir a História da Matemática no processo pedagógico é uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento das mais variadas habilidades e competências para uma aprendizagem efetiva dos temas abordados com esse recurso. Mais adiante, esses autores pontuam dez funções atribuídas ao uso da história no ensino, são elas:

- 1 História como fonte de motivação;
- 2 História como fonte de seleção de problemas;
- 3 História como fonte de objetivos para o ensino;
- 4 História como fonte de métodos de ensino;
- 5 História como instrumento de desmistificação da matemática;
- 6 História como fonte de formalização de conceitos;
- 7 História como instrumento de constituição do pensamento;

- 8 História como instrumento promotor de atitudes;
- 9 História como instrumento promotor de aprendizagem significativa;
- 10 História como instrumento de resgate da identidade cultural.

Desse modo, percebemos que o uso da história pode ser uma opção viável para o ensino de geometria, dada a diversidade de possibilidades de se construir um projeto didático, com uma vasta gama de objetivos relativos a inúmeras competências e habilidades que podem ser desenvolvidas no estudantes mediante o uso de atividades para o ensino do cálculo de área.

Embora seja consenso a importância da História como recurso didático, a maioria das aulas de matemática está atrelada aos métodos usuais de exposição de conceitos, demonstrações e suas justificativas, e aplicação de fórmulas na resolução de problemas.

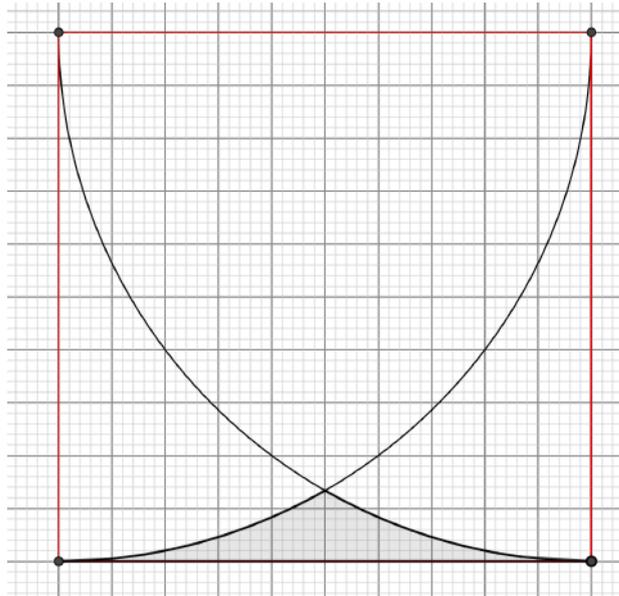
Diante dessa situação, no desenvolvimento de práticas pedagógicas, Silva, Lima e Lima (2016) avaliam ser fundamental lançar mão da história e construir o entendimento sobre uma determinada fórmula/conceito, ou até mesmo demonstrá-la quando o ano/série do estudante assim o permitir. Dessa forma, não estamos trabalhando apenas para facilitar o entendimento e a aplicação do conceito, mas também introduzimos nesse tipo de intervenção meios de desmistificação do trabalho do matemático, mostrando que a matemática é por excelência um atributo do pensamento e do fazer humano.

Para falar sobre as vantagens de intervenções pedagógicas com aporte na História da Matemática, fizemos uma análise de um livro didático disponibilizado aos professores do Ensino Médio pelo MEC para a escolha de livros de 2017. A seguir, falaremos um pouco sobre um desses livros que estava disponível para a escolha. Enfatizando o tema "Cálculo de Área" e a forma com que a história desse tema é apresentada nessa obra.

A coleção "Conexões com a Matemática", em três volumes, para o Ensino Médio, é uma obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna (2013), editor responsável Fábio Martins Leonardo, disponibilizada aos professores na última escolha de livros didáticos em 2017. Dentre os objetivos expostos pelo organizador, não há qualquer um que se refira ao uso das fontes históricas como ferramenta de ensino-aprendizagem. O capítulo 4 desse livro trata de superfícies poligonais, círculos e áreas. Inicia com o estudo dos polígonos regulares, trata de congruências de segmentos e de ângulos, define polígonos regulares, polígonos regulares inscritos, denomina e demonstra as relações métricas existentes nestes polígonos e em seguida entra no tema de área. Conceitua e demonstra as áreas de triângulos, de quadriláteros, de círculos, de coroas circulares, de setores circulares, de segmentos circulares, traz uma sugestão de pesquisa sobre confecção de mosaicos e de pavimentação de planos com polígonos, e encerra o capítulo com uma atividade interessante sobre como calcular uma área (Figura 6.1) usando decomposição de uma figura e aproximações. Adaptaremos o uso dessa atividade para

nosso Caderno de Atividades. O enunciado da questão pede para calcular a área da região sombreada, interior ao quadrado de lado 1 da Figura 6.1. Contando, temos aproximadamente 120 quadradinhos de lado 1 milímetro ( $mm$ ) na região sombreada. Cada lado é composto por lados de 50 quadradinhos de  $1\text{ mm}^2$ , logo o quadrado é composto por  $50 \cdot 50 = 2500$  quadradinhos.

Figura 6.1 – Área de superfície não poligonal.



Fonte: Adaptado de Leonardo, 2013, p. 113.

Temos então a área de cada quadradinho igual a  $1/2500$  do quadrado maior, logo,

$$A_{\text{sombreada}} = 120 \times \frac{1}{2500} = \frac{120}{2500} = 0,048\text{ mm}^2. \quad (6.1)$$

Ao resolvermos algebricamente, chegamos ao seguinte resultado:

$$A_{\text{sombreada}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \approx 0,043\text{ mm}^2. \quad (6.2)$$

Note que conseguimos uma boa aproximação e, quanto menores forem os quadradinhos da malha quadriculada, melhor será a aproximação obtida para a área em questão.

A seguir o livro traz um pequeno texto de dois parágrafos explicando em linhas gerais, que o uso do Cálculo Integral possibilitaria encontrar a referida área através da decomposição dessa figura em infinitos retângulos, efetuando-se a soma de suas áreas, obtendo com precisão o valor procurado. Em nossa concepção, o capítulo poderia ter iniciado com essa atividade, pois trata-se de um problema investigativo e motivador e portanto deveria ter sido usado para despertar o interesse pelo tema.

A respeito da história da matemática, nesse capítulo, o livro didático traz uma pequena menção a Arquimedes de Siracusa, de caráter factual, relatando o fato de que este apresen-

tou uma boa aproximação para o valor de  $\pi$ , usando o método da exaustão, mas o texto não denomina o método, diz apenas que

"Arquimedes (287-212 a.E.C) apresentou um cálculo teórico que resultou na aproximação  $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ . Para isso, ele considerou uma circunferência de raio de medida 1. Então, percebeu que o comprimento da circunferência estava entre os perímetros de polígonos regulares, com  $n$  lados cada, um inscrito e um circunscrito à circunferência." (LEONARDO, 2013, p.104).

Embora haja consenso no meio acadêmico sobre a importância de inserir a História nos processos de ensino da Matemática, analisando a forma como o texto acima foi colocado, percebemos que tem um mero caráter informativo. O método usado por Arquimedes para obter tal aproximação de  $\pi$  deveria ser explorado na forma de uma atividade que com certeza, traria mais significado a este número, dada sua importância para esta ciência.

A história deve ser usada de modo a inserir os estudantes no processo de investigar, entender os métodos usados, as justificativas para a construção das definições, proposições e teoremas. Agindo dessa maneira, podemos consolidar o processo cognitivo de formalização do objeto na perspectiva de atribuir-lhe um significado e aprimorar o processo de ensino e aprendizagem.

Um planejamento de ensino com aporte da História da Matemática disponibiliza ao professor uma vasta gama de objetivos pedagógicos, entre eles, levar o aluno a perceber:

"(1) A matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar a generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objetivo da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova." (MIGUEL; MIORIM, 2018, p. 53).

Acrescentamos que dentre todos os objetivos pontuados, não consta em Miguel e Miorim (2018), de forma explícita, o desenvolvimento de habilidades e competências intelectuais voltados para a prática de resolução de problemas. Quando se fala em resolução de problemas, é muito comum a ideia estar associada a problemas que se aproximam da realidade, ou ao menos que a realidade seja uma referência nas situações usadas no processo de aprendizagem. Muito pouco se fala sobre a qualidade dos problemas, da falsa contextualização presente em muitos deles e por fim, se contribuem realmente para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, que é em nossa visão o principal contributo do ensino da matemática para a formação dos nossos jovens.

Nesse sentido, a Base Nacional Curricular Comum para o Ensino Médio normatiza que a Educação Matemática deve atuar para

"desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados." (MEC, 2018, p. 519).

Portanto, esse trabalho visa contribuir para o desenvolvimento das habilidades e competências contempladas na BNCC a partir da resolução de problemas inspirados pela história da matemática. Acreditamos que "o aluno pode construir conceitos matemáticos a partir de atividades elaboradas tendo como pano de fundo a história da matemática." (SANTOS; MUNIZ; GASPAR, 2015, p.16).

Neste sentido, as atividades didáticas do nosso produto educacional serão elaboradas a partir das técnicas de cálculo de área usadas em outras épocas da história, em problemas com enunciados inspirados na história, mas também problemas que trazem aplicações atuais e questões de Enem e vestibulares, propondo um caminho para a construção de resoluções que valorizem a liberdade de raciocínio que os antigos tinham para propor soluções criativas e sofisticadas com uso muito restrito de fórmulas fechadas.

No capítulo seguinte, descreveremos a forma como concebemos e elaboramos nosso produto educacional, na forma de um Caderno de Atividades para o ensino de cálculo de área, composto por atividades inspiradas na História da Matemática.

## 7 O PRODUTO EDUCACIONAL

O Caderno de Atividades está dividido em cinco Aulas, que podem ser aplicadas em um tempo estimado de duas horas/aula por Aula, preferencialmente, em duas aulas seguidas (aula faixa). Observamos ao longo de nossa experiência docente que as aulas-faixas são praticamente inevitáveis nos horários das instituições de ensino, dadas às restrições de disponibilidade dos professores ao se organizar o horário de uma escola.

Essas aulas seguidas são períodos relativamente longos e constituem fonte de cansaço e desestímulo por parte dos estudantes, devido às características da faixa etária entre outros fatores. Nesses casos, os jovens ficam muito tempo sob tutela do mesmo docente, em um único turno. Acreditamos que desenvolver uma atividade diferenciada em momentos como esse (mas não somente) pode estimular o interesse e a aprendizagem.

Cada Aula do caderno de atividades traz uma sequência de momentos voltados para desenvolver habilidades e competências necessárias à resolução de atividades não muito convencionais e inspiradas na história da matemática.

A história da matemática usada como aporte em cada Aula pode estar exposta na forma direta, pela discussão de um problema histórico ou de forma indireta aplicando alguma técnica de resolução usual em outros tempos. Também inserimos questões complementares que trazem aplicações atuais do cálculo de área e questões de exames para admissão em cursos superiores (ENEM e vestibulares, por exemplo).

O objetivo central da Aula é resolver uma atividade que será denominada Atividade Principal, o caminho para sua resolução será dado pelo professor através de uma atividade anterior a essa, denominada Atividade Motivadora e após a correção da Atividade Principal, o professor fará um breve resumo da aula em um momento denominado Sistematização. A Aula é finalizada propondo-se aos estudantes a resolução de uma questão avaliativa, de nível de dificuldade intermediário, para aferir se o objetivo de aprendizagem dessa Aula foi alcançado.

Na estrutura das Aulas do caderno de atividades, constará:

- a) Um texto introdutório sobre o tema, visando a problematização ou instigação sobre o assunto da aula e/ou uma Atividade Motivadora com inspiração na história, simples e rápida que terá a função de retomar um pré-requisito necessário ao assunto, podendo o enunciado desta atividade trazer o texto introdutório.
- b) A Atividade Principal trazendo fatos da história, elaborada para ser solucionada em duplas ou trios, com um grau de dificuldade desafiador, cuja resolução exige demanda cognitiva acentuada.

- c) O Pannel de Soluções onde serão expostas as resoluções dos alunos e será efetuado um debate para se chegar a um consenso sobre a solução do problema.
- d) Um texto auxiliar para a Sistematização do assunto, que o professor deve fazer após a correção da atividade principal.
- e) Uma questão avaliativa, para ser resolvida e corrigida nos minutos finais da aula.
- f) Três questões complementares, uma relacionada a alguma aplicação do tema tratado na aula, uma envolvendo algum tópico de história da matemática e uma questão retirada de bancos de questões de vestibulares e ENEM relacionada também ao tema. Essas três questões podem ser propostas como tarefa e/ou para resolver em sala de aula pois os estudantes com melhor desempenho em matemática provavelmente solucionarão a atividade principal em menor tempo que os demais, e dessa forma, podem ainda trabalhar com essas atividades complementares.

Cada uma das cinco Aulas do Caderno de Atividades podem ser adaptadas em planos de aula e tratam individualmente os seguintes temas:

Aula 1. Cálculo de área por decomposição.

Aula 2. Incomensurabilidade de grandezas.

Aula 3. Áreas destacadas dentro de polígonos ou "hachuradas", envolvendo as *Lúnulas* de Hipócrates, o *Arabelos* e o *Salinon* de Arquimedes.

Aula 4. Calcular área pelo Teorema de Pick bem como estimar áreas de mapas e/ou fotos aéreas e imagens produzidas por satélites e VANT's (veículo aéreo não tripulado).

Aula 5. Introdução à integração pelo cálculo de área aplicando a Soma de Riemann.

Para a elaboração das questões do caderno de atividades, consultamos um vasto número de fontes, científicas, históricas e pedagógicas, porém, focamos nos tópicos da história necessários para nos fornecer suporte teórico na elaboração desse produto educacional. Procedendo dessa maneira, tivemos a oportunidade de visualizar uma metodologia para o ensino que traz uma proposta um pouco diferente das convencionais para abordar um tema de matemática com aporte da história. Gil (2008) reforça esse argumento ao defender que a pesquisa bibliográfica é um trabalho que demanda tempo, dedicação e que diante da vasta bibliografia consultada pode fazer o pesquisador ressignificar as questões iniciais, implicando em uma outra forma de conceber e atacar o problema, pois é possível que suas leituras lhe tragam outras percepções e o façam encarar esse problema sob outro ponto de vista.

A fala de Gil (2008) é validada no momento da pesquisa em que percebemos que não bastavam apenas atividades inspiradas na história da matemática, pensando nos objetivos pedagógicos possíveis, na elevação do nível de conhecimentos gerais, na erudição proporcionada pelo estudo dos fatos históricos e na aplicação de questões mais avançadas para o nível escolar em questão. Presisavamos também repensar a metodologia da aula, então, nos propusemos a elaborar um caderno de atividades com as características que descreveremos a seguir.

- Propomos uma metodologia de aula dividida em momentos bem definidos, inclusive com sugestões de tempo de duração para cada momento.
- Introduzimos a atividade principal da Aula através de um momento inicial onde é tratado um tópico do assunto, visando despertar a curiosidade, contribuindo para construir um significado para o que será estudado ou até fornecer elementos teóricos para que o estudante aprenda por si só enquanto tenta desenvolver sua solução para essa atividade.
- A resolução da atividade principal é ponto central de cada Aula. Na sua resolução, estão presentes o uso de habilidades e recursos intelectuais que interessam na busca de uma aprendizagem mais efetiva.
- Uma grande parte da aula será dedicada à resolução, à discussão dos resultados e à correção da atividade principal onde os estudantes são os principais protagonistas.
- Há um momento denominado sistematização, onde o professor faz um fechamento do que foi estudado, mostrando a forma consensual das definições, conceitos, e demais elementos teóricos relacionados ao assunto da aula.
- Para estudantes que tem mais facilidade e solucionam as atividades em tempo menor que os demais, propomos atividades complementares.
- Cada Aula culmina em uma breve avaliação, que possibilita aferir a compreensão do objeto de conhecimento abordado.

Buscamos inspiração para a sequência de etapas de cada Aula do Caderno de Atividades na metodologia para o ensino de ciências proposta por Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2018, pp. 155-157). Os autores propõem uma prática de ensino dividida em Três Momentos Pedagógicos. O primeiro momento é denominado problematização inicial e tem o propósito de fazer com que o estudante sinta necessidade da aquisição de conhecimentos que ainda não possui, apresentando um tema ou situação-problema interessante, com potencial de provocar a curiosidade, uma possível discussão entre o professor(a) e a classe, e o desejo de conhecer e enfrentar o problema que está sendo proposto. No segundo momento, denominado organização

do conhecimento, o tema e as questões levantadas no momento anterior são sistematicamente estudados sob a supervisão do professor, de forma a desenvolverem-se conceituações para a fundamentação científica do objeto do conhecimento ou das questões problematizadas anteriormente. Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2018) encerram essa sequência de etapas propondo o terceiro momento pedagógico, a aplicação do conhecimento, através da resolução de atividades propostas pelo docente ou até mesmo solucionar as situações-problema e questões levantadas no decorrer da aula ou elaboradas pelos próprios estudantes.

Observe que em nosso Caderno de Atividades, em relação aos momentos pedagógicos propostos por Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2018), dividimos as aulas em mais etapas. A problematização será feita através da Atividade Motivadora e, a partir dela, direcionamos a Aula à Atividade Principal, sucedida por uma etapa voltada para sua correção. Seguimos então para a sistematização do tema e, depois disso, aplicamos uma avaliação, ainda na mesma aula. Também propomos ao final de cada Aula do Caderno de Atividades, um momento de auto estudo, com questões complementares para melhor fixação do conteúdo.

Nossa intenção inicial, era aplicar o Caderno de Atividades em sala de aula, trazendo nesse texto a descrição das observações e a análise dos resultados, mas não foi possível realizar a aplicação devido a pandemia de Covid-19 e a suspensão das aulas presenciais. Analisamos o caso e concluímos que de forma remota, não poderíamos observar a desenvoltura e as atitudes dos estudantes na resolução e na discussão das atividades. Optamos então por esperar o momento adequado para executar a aplicação presencialmente e publicar os resultados na forma de um artigo científico.

No apêndice dessa dissertação está exposto o caderno de atividades na íntegra, inicialmente com as cinco Aulas sem as resoluções, para que possam ser impressos e aplicados pelos professores(as) que assim o desejarem. A seguir, estão as resoluções comentadas de cada atividade, enriquecidas com várias orientações, comentários e sugestões destinadas aos professores e professoras.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento dessa dissertação, tivemos a oportunidade de ressignificar nossa prática docente no que diz respeito ao ensino de geometria conciliado com a História da Matemática, tanto na forma mais ampla quanto no âmbito da nossa própria experiência profissional e individual. Vieram à tona questões relativas ao currículo básico, ao planejamento das aulas e principalmente, ao tipo de atividades aplicadas e os caminhos trilhados na condução do processo de ensino de cálculo de área com o aporte da História da Matemática.

Nas leituras iniciais, ao procurar nas diretrizes curriculares o que os documentos oficiais normatizam para o ensino de matemática aliado a sua História, percebemos que esses documentos contemplam em vários aspectos o uso da História da Matemática enquanto recurso pedagógico bem como os ganhos educacionais que tal prática poderá oferecer.

Através dessas leituras, ficou claro que era preciso ampliar e aprofundar nosso conhecimento sobre alguns tópicos da História da Matemática relacionados ao cálculo de área, garantindo o suporte teórico necessário a qualquer proposta de ensino que pudéssemos elaborar. Acreditamos que não é possível o professor ter um domínio raso sobre um tema e ter sucesso em sua prática na sala de aula então, nos debruçamos em uma ampla pesquisa bibliográfica documental, em fontes científicas, publicadas e revisadas, procurando narrar e discutir os aspectos matemáticos de épocas da história onde os pensadores, os filósofos e recentemente os matemáticos trabalharam para a evolução do conceito e do cálculo de área até ser sistematizado e fundamentado da maneira como conhecemos hoje.

Na busca pelos aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de área de uma superfície, nos deparamos com muitas técnicas usadas em épocas anteriores para o cálculo de área que podem ser retomadas e aplicadas em sala de aula devido a sua sofisticação e simplicidade bem como pelo potencial de tornarem-se ferramentas de ensino para fixar tal objeto do conhecimento. Para além da aplicação prática das técnicas de cálculo de área da antiguidade, buscamos na história alguns temas que não fazem parte das propostas de ensino tradicionais e muito menos são contempladas nos livros didáticos, mas podem ser transpostas para o nível escolar, contribuindo de forma significativa para a aprendizagem, são eles: a Incomensurabilidade, o Teorema de Pick e as Somas de Riemann.

As grandezas incomensuráveis foram de grande importância para a percepção da existência de fatos matemáticos contraintuitivos, o que gerou a necessidade de avançar no rigor e na axiomática deixando de lado as percepções sensoriais, que eram falhas, e não só isso, a busca para contornar o problema da incomensurabilidade estimulou o desenvolvimento de muitos estudos teóricos trazendo avanços que podem ser explorados, como por exemplo, no estudo de

números e grandezas, as demonstrações por absurdo, a relação entre álgebra e geometria, entre muitos outros aspectos já apresentados no texto dessa dissertação e também na Aula dedicada a esse tema, presente em nosso produto educacional.

O Teorema de Pick possibilita determinar área através da contagem do número de pontos envolvidos na construção de um polígono sobre uma rede quadricular. É muito simples sua aplicação e pode ser usada em situações mais complexas, no estudo de cartografia e na análise de imagens aéreas.

As Somas de Riemann trazem a contagem discreta de infinitos retângulos para um limite que expressa uma grandeza contínua, a área de uma figura sob o gráfico de uma função, logo, mostrou-se útil para introduzir noções de limites e integrais no currículo da educação básica.

Diante da riqueza de conteúdos e das informações levantadas na pesquisa sobre a História do cálculo de área julgamos ser enfadonho ensinar esses temas interessantes com uma metodologia tradicional. Isso nos levou a repensar os caminhos para conduzir esse processo de ensino, produzindo um formato específico de aula, focado na resolução de uma única atividade desafiadora, pensando nos momentos pré-resolução e pós-resolução, para que o objetivo principal seja atingido de forma mais efetiva em cada aula. Esperamos inclusive que esse produto educacional possa servir como elemento motivador para que os estudantes se inspirem na História da Matemática presente nas atividades e venham a escolher cursos superiores nas áreas de ciências exatas.

A forma com que concebemos essa metodologia, para o desencadeamento de uma sequência de momentos da aula focados na resolução e aprendizagem simultâneas em uma atividade inspirada na História da Matemática, culminou na elaboração de um Caderno de Atividades para o ensino do cálculo de área, que está exposto no Apêndice desse trabalho.

Ainda sobre a necessidade de aperfeiçoamento e formação continuada para a prática docente, essa dissertação abre caminhos para investigações mais aprofundadas a respeito da metodologia desenvolvida para as Aulas do Caderno de Atividades através da adaptação das Aulas do caderno em Planos de Aulas, para serem utilizados pelos professores em aulas presenciais com a respectiva coleta de dados e análise dos resultados (essa aplicação era prevista no projeto de pesquisa, mas devido a crise de saúde pública causada pela covid-19 e a suspensão das aulas presenciais, não se fez possível).

Outras possibilidades de pesquisa que deixamos como sugestão, seriam estender a transposição didática a mais temas do Ensino Superior para serem tratados na Educação Básica tais como, Geometrias não Euclidianas, Fractais, Derivadas, entre outros, e até mesmo um estudo similar a esse, sobre a história do cálculo de volume, fazendo uso da proposta metodológica de nosso caderno de atividades para a aplicação em sala de aula.

Como experiência pessoal, podemos concluir que a jornada iniciada ao ingressar nesse programa de mestrado, desde a primeira aula das disciplinas cursadas até o momento onde escrevemos essas palavras, possibilitou-nos fazer uma profunda reflexão sobre o professor que eramos e o professor que estamos nos tornando. Consideramos que essa jornada nos fez mais capacitados e com aporte teórico mais profundo. Esses contributos serão usufruídos pelos nossos alunos, que poderão contar com um professor mais consciente de seus desafios e melhor preparado para encará-los.

Dessa forma, esperamos que essa pesquisa, aliada ao Caderno de Atividades venham a contribuir no oferecimento de uma educação matemática de qualidade por ser uma das finalidades do Programa de Mestrado PROFMAT e um desejo de todo educador que acredita no protagonismo da Escola Pública para o desenvolvimento da sociedade brasileira.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ASSIS, C. P. M. e A. K. T. **O método de Arquimedes: análise e tradução comentada**. Montreal: Roy Keys Inc., 2019.

ÁVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

BRANDERBERG, J. C. **Uma história da integral: de Arquimedes a Lebesgue**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BURTON, D. M. **The history of mathematics: an introduction**. New York: Mc Graw Hill, 2011.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNANBUCO, M. M. **Ensino de Ciências: fundamentos e métodos**. São Paulo: Cortez Editora, 2018.

ENEM. **Exame nacional do ensino médio**. 2020. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.

FOWLER, D. **The Mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction**. Oxford: Clarendon Press, 1999.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

GONÇALVES, C. H.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na grécia antiga. 2019. Revista Matemática Universitária, 2019. Disponível em: <<https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n47>>. Acesso em: 05 de dezembro de 2019.

HERMES, J. D. V. O teorema de pick. 2015. 2015. Ciência e Natura, Santa Maria, v.37 Ed. Especial PROFMAT, p.203-213. Disponível em: <<http://oaji.net/articles/2017/1602-1486644173.pdf>>. Acesso em: 12 de maio de 2020.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Rio de Janeiro: GRAFITEX Comunicação Visual, 1991.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

MEC. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase>>. Acesso em: 28 de março de 2020.

MIGUEL, A.; MIORIM, A. M. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autentica Editora, 2018.

MINAYO, M. C. de S.; DESLANDES, S. F.; NETO, O. C.; GOMES, R. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

MOREY, B. Fontes históricas nas salas de aula de matemática: o que dizem os estudos internacionais. 2013. Revista Brasileira de História da Matemática, 2013. Disponível em: <<http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM.pdf>>. Acesso em: 27 de outubro de 2019.

NETO, A. A. C. Cálculo integral para o ensino médio. 2019. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática: Professor de Matemática On line, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo710>>. Acesso em: 19 de setembro de 2019.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

OBMEP. **Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas**. 2020. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1aSDz7zRIIF6LcV3No6fBS52BosKPjwPA/view>>. Acesso em: 17 de novembro de 2020.

PARREIRA, D. S. **Uma proposta de uso da história da matemática como recurso didático no ensino de áreas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2017. Disponível em: <[https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150430609](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150430609)>. Acesso em: 29 de setembro de 2019.

PINHO, J. L. R. **Geometria I**. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos da história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

SANTOS, E. S.; MUNIZ, C. A.; GASPAR, M. T. J. **A construção do conceito de área a partir de atividades fundamentadas na história da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SILVA, D. de J. **A utilização da história da matemática em atividades investigativas: estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2016. Disponível em: <[https://sca.profmatsbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=75630](https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=75630)>. Acesso em: 01 de outubro de 2019.

SILVA, J. C. da C.; LIMA, F. do N.; LIMA, C. C. B. de. Calculando áreas e volumes: do método da exaustão ao princípio de cavalieri. 2016. Revista Brasileira de História da Matemática, 2016. XII ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (ENEM), Comunicação Científica. Disponível em: <[http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7579\\_3657\\_ID.pdf](http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7579_3657_ID.pdf)>. Acesso em: 28 de outubro de 2019.

SMITH, D. E. **History of mathematics, Volume II**. New York: Dover Publications, Inc, 1958.

UDESC. **Universidade do Estado de Santa Catarina**. 2020. Disponível em: <<https://www.udesc.br/vestibular>>. Acesso em: 30 de novembro de 2020.

**WALLE, J. V. de. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

## **APÊNDICE A – Produto Educacional**

**Caderno de Atividades para o Ensino de Cálculo de Área com  
a Contribuição da História da Matemática**

## APRESENTAÇÃO

*Caro(a) Docente,*

Este Caderno de Atividades é produto de uma Dissertação intitulada "*Cálculo de Área: uma proposta de ensino com aporte da história da matemática*", realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) sob a orientação da Professora Doutora Ligia Liani Barz e coordenação do Professor Doutor Rogério de Aguiar.

O presente Caderno de Atividades se destina ao professor(a) e contém uma sequência de 5 Aulas, que podem ser adaptadas em planos de aula, voltadas para a resolução de atividades desafiadoras e significativas relacionadas ao ensino-aprendizagem de geometria, em específico, o cálculo de área. O produto educacional é direcionado às Terceiras Séries do Ensino Médio, porém o professor é livre para transpor o conteúdo para outras séries, desde que observados os pré-requisitos básicos para a resolução das atividades propostas.

As atividades foram elaboradas e pensadas para oferecer subsídios que contribuirão com o enriquecimento de seus conhecimentos docentes bem como a sugestão de uma metodologia onde a Aula é programada em torno de problemas envolvendo um único conteúdo, com momentos pré-resolução e pós-resolução, todos bem definidos com relação aos objetivos sugeridos para as atividades e ao tempo de duração dos momentos da Aula.

Dessa forma, Professor(a), quero registrar que é muito bom fazer parte desse momento, em que se busca ampliar o referencial teórico sobre esse tema da Matemática, de modo a melhorar sua prática docente com novas propostas de ensino e propor a seus estudantes práticas metodológicas que transcendem às tradicionais, de modo a trazer avanços para o ensino de Geometria. Espero que esse material contribua de forma efetiva para seu aperfeiçoamento profissional e pessoal, pois de forma direta, seus alunos irão usufruir desse seu aperfeiçoamento na forma com que lhes serão oferecidas as intervenções desse Caderno de Atividades.

As atividades desse caderno usam a História da Matemática como recurso didático, explorando tópicos da história onde o desenvolvimento ou o avanço da forma de calcular área trouxe à humanidade uma nova tecnologia ou uma nova ferramenta intelectual para solucionar algum problema de sua época.

Desejamos que você faça um excelente uso desse material tornando suas aulas mais desafiadoras e junto com seus alunos possa construir o conhecimento matemático escolar necessário para que eles possam exercer a cidadania plena, com liberdade e senso crítico.

Altamiro Marlon Ribeiro

## SUMÁRIO

• <b>INTRODUÇÃO</b> .....	136
• <b>AULA 1: CÁLCULO DE ÁREA POR DECOMPOSIÇÃO E COMPOSIÇÃO</b> .....	138
• <b>AULA 2: RAZÕES ENTRE GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS</b> .....	148
• <b>AULA 3: LÚNULAS DE HIPÓCRATES, ARBELOS E SALINON DE ARQUIMEDES</b> .....	158
• <b>AULA 4: O TEOREMA DE PICK</b> .....	170
• <b>AULA 5: CÁLCULO DE ÁREA PELA SOMA DE RIEMANN</b> .....	181
• <b>RESOLUÇÕES E ORIENTAÇÕES</b> .....	192

## INTRODUÇÃO

Cada Aula do Caderno de Atividades traz uma sequência de **Momentos** voltados para desenvolver habilidades e competências necessárias à resolução de problemas não muito convencionais e inspiradas na história da matemática. A história da matemática usada como aporte em cada Aula pode estar exposta na forma direta, pela discussão de um problema histórico ou de forma indireta aplicando alguma técnica de resolução usual em outros tempos.

O objetivo central da Aula é resolver uma atividade que será denominada **Atividade Principal**, o caminho para a sua resolução será dado pelo professor através da resolução feita por ele de uma atividade anterior a essa, denominada **Atividade Motivadora**. A correção da **Atividade Principal** se dará em um momento chamado **Painel de Soluções**, após a correção da atividade principal, o professor fará um breve resumo da aula em um momento denominado **Sistematização**. A Aula é finalizada propondo-se aos estudantes a resolução de uma questão avaliativa, de nível de dificuldade intermediário, para aferir se o objetivo de aprendizagem dessa Aula foi alcançado. Ao final de cada Aula teremos três questões complementares para serem propostas como tarefa ou para serem aplicadas aos estudantes que desenvolverem muito rápido a atividade principal da aula.

As Aulas desse Caderno de Atividades estão divididas em alguns **Momentos Pedagógicos** (etapas), definidos quanto aos objetivos e as ações a serem executadas, conforme descrito a seguir:

- a) **Atividade Motivadora:** Trata-se de um texto introdutório sobre o tema, visando a problematização ou instigação sobre o assunto da aula e/ou uma atividade com inspiração na história, simples e rápida que terá a função de retomar um pré-requisito necessário ao assunto, podendo o enunciado desta atividade trazer o texto introdutório. Esse momento deve ser conduzido pelo professor na resolução da atividade ou na interpretação do texto.
- b) **Atividade Principal:** A atividade principal da Aula é elaborada trazendo fatos da história relacionados ao tema da Aula e deve ser solucionada preferencialmente em duplas ou trios. Essa atividade tem um grau de dificuldade desafiador, cuja resolução exige demanda cognitiva acentuada.
- c) **Painel de Soluções:** Esse momento trata-se da correção da atividade principal. O professor(a) deve convidar os alunos a ir à lousa, pois devem protagonizar esse momento. Eles devem expor para a turma suas estratégias e resultados para que possam ser comparados aos resultados obtidos pelos colegas, procurando perceber as melhores estratégias para a resolução, promovendo uma discussão em torno dessas apresentações.
- d) **Sistematização:** A sistematização do assunto é feita através de um texto auxiliar para que o professor traga a forma atual do conteúdo estudado, com o devido rigor conceitual disponível para esse nível de escolaridade, com definições, proposições e se possível, algumas demonstrações.
- e) **Atividade Avaliativa:** Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema similar aos propostos anteriormente. O objetivo desse momento é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado. Será aplicada uma questão relacionada ao assunto, que deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula.
- f) **Atividades Complementares:** Serão propostas aos estudantes três questões complementares, uma relacionada a alguma aplicação do tema tratado na aula, uma envolvendo algum tópico de história da matemática e uma terceira retirada de bancos de questões de

vestibulares e ENEM relacionada também ao tema. Essas três questões podem ser propostas como tarefa ou como atividade para resolver em sala de aula, pois os estudantes com melhor desempenho em matemática provavelmente solucionarão a atividade principal da aula em menor tempo que os demais, e dessa forma, podem trabalhar com essas atividades complementares ainda em sala de aula.

Professor(a), no último capítulo do Caderno de Atividades estão registradas propostas de soluções para todas as atividades desse material, você deve tomar conhecimento dessas resoluções antes de aplicar as atividades.

## A.1 AULA 1: CÁLCULO DE ÁREA POR DECOMPOSIÇÃO E COMPOSIÇÃO

Nessa Aula, trataremos do cálculo de área por decomposição e composição. Para calcular uma área irregular, faremos a decomposição dessa área em figuras planas menores, cuja forma de determinar o valor da área são conhecidas. A área da figura irregular será dada pela soma das áreas menores as quais foi decomposta. Para essa aula, estabelecemos os objetivos a seguir.

### **Objetivos:**

- Determinar áreas de figuras planas irregulares usando técnica de cálculo por decomposição e composição.
- Comparar os diferentes resultados obtidos e discutir sobre as origens dessas diferenças.
- Estabelecer as diferenças entre uma situação idealizada e uma situação real.
- Conhecer as definições que caracterizam a grandeza "Área".
- Conhecer a dedução da fórmula da área do quadrado cujos lados são racionais.

### **Observações:**

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua, calculadora, Figura A.3 impressa em folha A4 milimetrada, papel manteiga/vegetal.
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos dessa Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executada em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula. Se não houver disponibilidade de duas aulas seguidas, pode-se trabalhar até a resolução da atividade principal em uma aula e na aula seguinte, promover o Painel de Soluções, a Sistematização e aplicar a Atividade avaliativa.

### **A.1.1 Descrição das Atividades da Aula 1**

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada "Atividade Principal". Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

### A.1.1.1 Atividade Motivadora – Aula 1

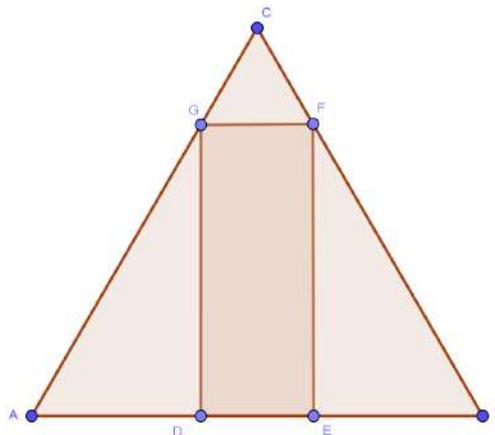
A origem da nossa geometria remonta das civilizações mais antigas do oriente médio e Egito, que desenvolveram sua escrita por volta do quarto milênio a.E.C e, datam dessa época, os primeiros registros de técnicas de cálculo de área. Os babilônios habitavam os vales dos rios Eufrates e Tigre e os egípcios, o norte da África, ao longo do rio Nilo. Os babilônios descobriram regras para cálculos de áreas de figuras geométricas simples e também podiam calcular o volume de vários sólidos. Os egípcios foram estimulados a desenvolver sua geometria por questões de sobrevivência, pois dependiam da agricultura às margens do rio Nilo, que todo ano inundava essas terras, havendo então a necessidade de sua medição e demarcação permanentemente.

É consenso entre os historiadores, tais como Eves (2004) e Roque (2012) que essas civilizações desenvolveram métodos de calcular área por questões práticas, tais como, demarcações de fronteiras, divisões de propriedades, construção civil e militar, demarcação de terras de cultivo, etc.

Todas essas atividades envolvem a necessidade de se calcular área. Os babilônios, os egípcios e posteriormente os gregos desenvolveram as mais diversas técnicas. A técnica mais fundamental seria o cálculo de área por decomposição. A técnica consiste em dividir a área a ser calculada em áreas menores, que por razões práticas são mais fáceis de serem obtidas, por exemplo, decompor em quadrados ou retângulos. A área total é dada pela soma (a composição) das áreas menores obtidas da decomposição.

**Problema:** O triângulo  $ABC$  da Figura A.1 é equilátero e tem área igual a  $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ . Usando decomposição, vamos determinar a área do retângulo  $DEFG$  da Figura A.1, sabendo que sua base é  $\frac{1}{4}$  do lado de  $ABC$ .

Figura A.1 – Retângulo  $DEFG$  inscrito no triângulo  $ABC$ .



Fonte: Autoria própria.

**Orientações para Professores(as):** Essa atividade é uma introdução à Atividade Principal da Aula. O texto deve ser lido em conjunto com a turma e o problema deve ser resolvido por você. Sugerimos a organização da turma em duplas ou trios, a leitura dos objetivos da aula, a leitura do texto introdutório e a resolução da atividade motivadora sejam executados em um tempo de 15 minutos.

**Sugestões para Professores(as):** O texto introdutório, anterior ao problema da Atividade Motivadora pode ser substituído por um vídeo, uma apresentação em *slides* desse tema ou até mesmo outro texto, porém devem apreciar os aspectos históricos do tema. Você pode fazer essas adaptações conforme as necessidades específicas de suas turmas. Uma outra possibilidade é pedir com antecedência que os estudantes efetuem uma pesquisa sobre o tema da aula, promovendo em sala um pequeno debate sobre essa pesquisa. Apenas tenha o cuidado de que nessa etapa os estudantes trabalhem ideias que os levarão a usar a decomposição e composição de áreas para a resolução da atividade principal.

### A.1.1.2 Atividade Principal – Aula 1

O Sol sempre foi objeto de estudos, observações e até adoração pelos povos antigos, que entendiam sua importância nos processos de vida na Terra e atribuíam-lhe a característica de um Deus.

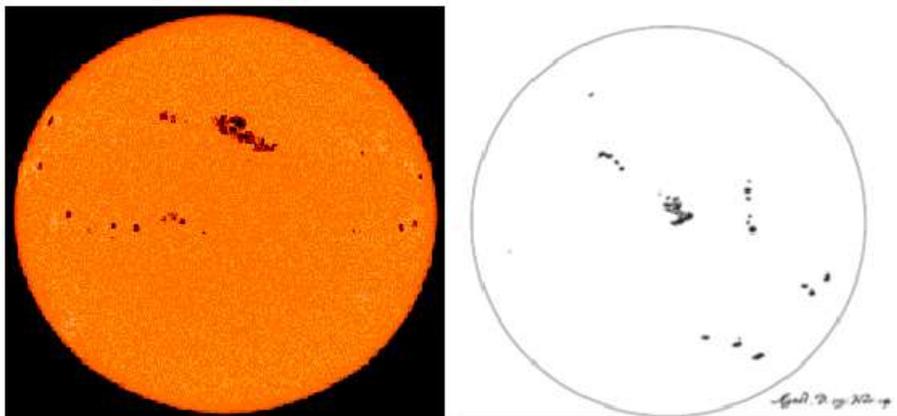
Observações do Sol e registros do número de manchas ocorrem há mais de 1000 anos. Como todo ramo de pesquisa em fase inicial, o registro das primeiras manchas solares causou inúmeras especulações e definições inconsistentes. Esse cenário mudou lentamente a partir da melhoria dos instrumentos de observação e do amadurecimento de ideias e de concepções.

Os chineses já observavam manchas escuras na fotosfera solar a olho nu, desde 1000 a.E.C. (antes da Era Comum). Em torno de 95% do histórico de observações são orientais, em especial da China e da Coreia e, assim, manteve-se até 1150 E.C. (Era Comum) cobrindo um intervalo de tempo muito maior que das observações feitas na era do telescópio.

Observações do Sol a olho nu são possíveis desde que a mancha seja grande e que a atmosfera apresente condições favoráveis, como poeira e nebulosidade que reduza a luminosidade do Sol. Para Lorensie e Pacini (2016), os orientais já usavam filtros artesanais para amenizar a luz solar e facilitar a visualização das manchas.

Quando surgiu o telescópio na Europa, no século XVII, Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro a observar o Sol e o céu com o uso de telescópios, em 1611. Também foi o primeiro a observar manchas solares a olho nu e com o telescópio ao mesmo tempo, em 1612. Essa observação específica foi publicada em 1613, representada na Figura A.2, à direita, e comparada com uma imagem atual da fotosfera, à esquerda.

Figura A.2 – À esquerda, a fotosfera visível e à direita, as manchas retratadas por Galileu em 1610.



Fontes: O Sol - INPE. Desenho de Galileu, Lorensie e Pacini, 2016, p.110.

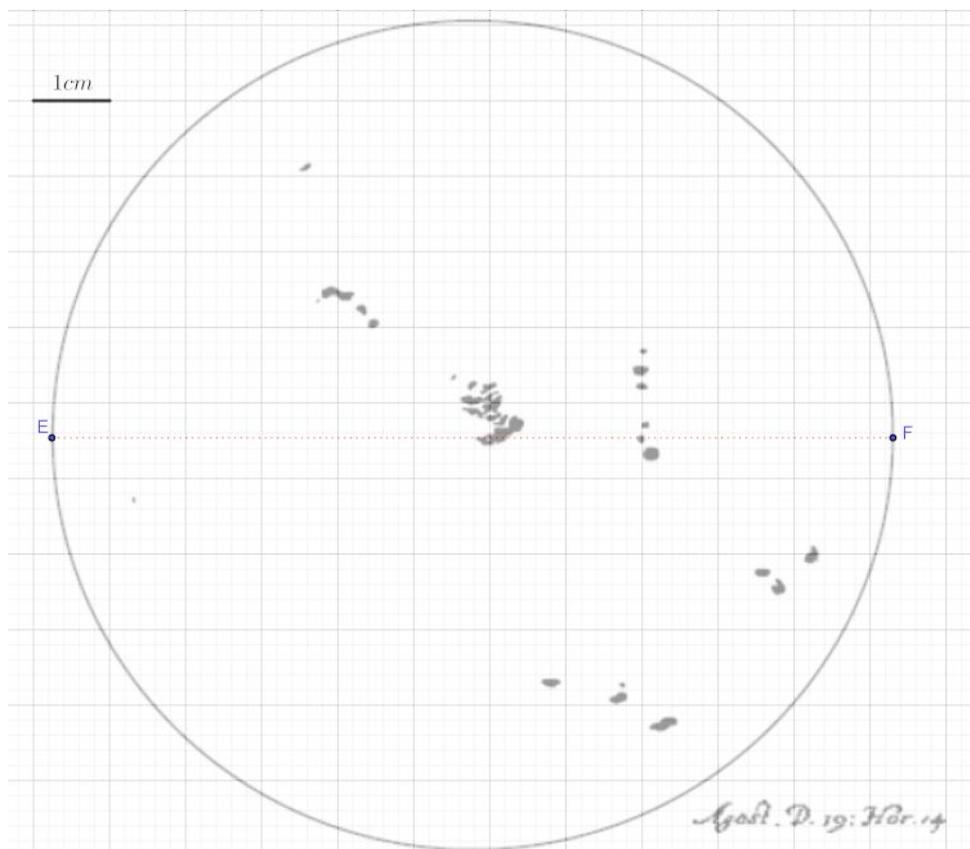
A partir da melhoria dos instrumentos e da colaboração de diversos cientistas, construiu-se o conceito de atividade solar e observou-se que:

- 1) As manchas escuras na fotosfera do Sol surgem e desaparecem de maneira cíclica.
- 2) Uma quantidade maior de manchas indica o máximo solar e um menor número assinala um mínimo solar.

Com a reunião de tantas observações do Sol e com as centenas de registros da quantidade de manchas solares, foi possível compreender que a Terra passou por períodos de variabilidade na atividade solar, ao longo da história. Essas informações seguramente têm relevância científica, uma vez que se sabe que a vida na Terra depende da energia oriunda do Sol e que variações na emissão dessa energia pode nos fornecer explicações para diversos fenômenos climáticos. Atualmente, considera-se que o raio médio do Sol é igual a  $695\,700\text{ km}$ .

**Problema:** Usando o desenho feito por Galileu, sobre uma malha quadriculada, Figura A.3, encontre um valor aproximado para a área ocupada pelas manchas solares representadas nesta figura e a seguir responda: "Quais os fatores que tornam nosso problema uma idealização da situação real?"

Figura A.3 – Desenho de Galileu sobre malha quadriculada.



Fonte: Lorensie e Pacini, 2016, p.110.

**Orientações para Professores(as):** Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Motivadora em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos 25 minutos para a execução dessa atividade.

**Sugestões para Professores(as):** Nesta parte pode-se pedir aos alunos que façam uma pesquisa para responder a seguinte pergunta: Atualmente estamos passando por um período de mínimo ou de máximo solar? Qual a relação da temperatura da terra com os máximos e mínimos solares?

### A.1.2 Painel de Soluções – Aula 1

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 20 minutos.

### A.1.3 Sistematização – Aula 1

O método usado na resolução dos problemas da aula, denomina-se cálculo de área por decomposição e composição. Esse método era muito empregado pelos matemáticos da antiguidade quando queriam determinar a área de figuras planas que não possuíam *fórmulas definidas* para seu cálculo.

- (i) Polígonos congruentes tem áreas iguais.
- (ii) Se  $P$  é um quadrado de lado unitário, então a área de  $P$  é igual a 1.
- (iii) Se  $P$  pode ser decomposto como reunião de  $n$  polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de  $P$  é a soma das áreas dos  $P_i$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Note que a técnica de cálculo de área por decomposição é garantida pelo item (iii) pois indica que podemos decompor um polígono  $P$  e a área de  $P$  é a soma das áreas menores em que foi decomposto.

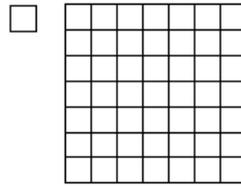
Usando a maneira como decomparamos a área de polígonos, é possível demonstrar como se deduz a fórmula da área de um quadrado de lados comensuráveis. A demonstração apresentada a seguir pode ser encontrada em Lima (1991, pp. 11-12).

**Proposição A.1.** *A área de um quadrado de lado  $l$  é  $l^2$ .*

*Demonstração.* Por definição, o quadrado é o quadrilátero de quatro lados iguais e quatro ângulos internos retos. O quadrado de lado 1 será nossa unidade de medida, denominado quadrado unitário.

Um quadrado  $Q$ , de lado medindo  $n$ ,  $n$  inteiro, pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em  $n^2$  quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e área 1. Segue-se então, que a área do quadrado  $Q$ , é dada por  $Q = n^2$ . A Figura A.4 a seguir representa um quadrado de lado 7, composto pela justaposição de 49 quadrados unitários.

Figura A.4 – Quadrado de lado 7 e área 49.

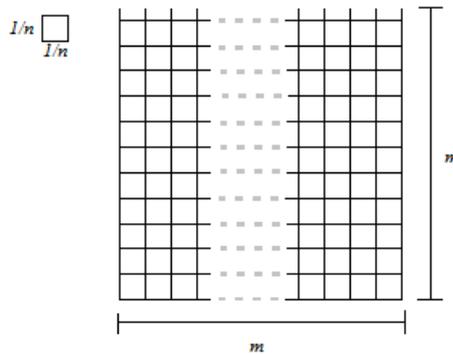


Fonte: Autoria própria.

Caso o quadrado tenha lado menor que 1,  $\ell = \frac{1}{n}$ , com  $n$  inteiro, então o quadrado unitário se decompõe mediante paralelas a seus lados, em  $n^2$  quadrados congruentes a  $Q$ , compondo um quadrado de área 1, logo,  $n^2 \times A(Q) = 1$ . Portanto,  $Q = \frac{1}{n^2}$ .

Em um caso mais geral, se o lado de  $Q$  é racional, ou seja,  $\ell = \frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$ ,  $m$  e  $n$  inteiros, decompõem-se os lados de  $Q$  em  $m$  segmentos de comprimento  $\frac{1}{n}$ , obtendo  $m^2$  quadrados de lados  $\frac{1}{n}$ , conforme Figura A.5.

Figura A.5 – Quadrado composto por  $m$  quadradinhos de lado  $\frac{1}{n}$ .



Fonte: Autoria própria.

Fazemos essa decomposição através de paralelas aos lados de  $Q$ . Dessa forma a área de cada um desses quadradinhos é  $\frac{1}{n^2}$  e segue que

$$m^2 \times \left( \frac{1}{n^2} \right) = \frac{m^2}{n^2}. \quad (\text{A.1})$$

Podemos então concluir que a área de um quadrado de lado racional  $\frac{m}{n}$  é

$$Q = \frac{m^2}{n^2}. \quad (\text{A.2})$$

□

**Observação:** Embora a demonstração que apresentamos foi para medidas comensuráveis a proposição é válida também para medidas incomensuráveis. Não apresentamos aqui a demonstração para lados incomensuráveis pois ela exige alguns conhecimentos mais avançados sobre limites e a passagem dos números racionais para os números reais que fogem ao escopo deste caderno de atividades. Maiores detalhes podem ser encontrados na dissertação que deu origem a este caderno, em Roque (2012) ou Eves (2004). Sugerimos 15 minutos para a execução dessa atividade.

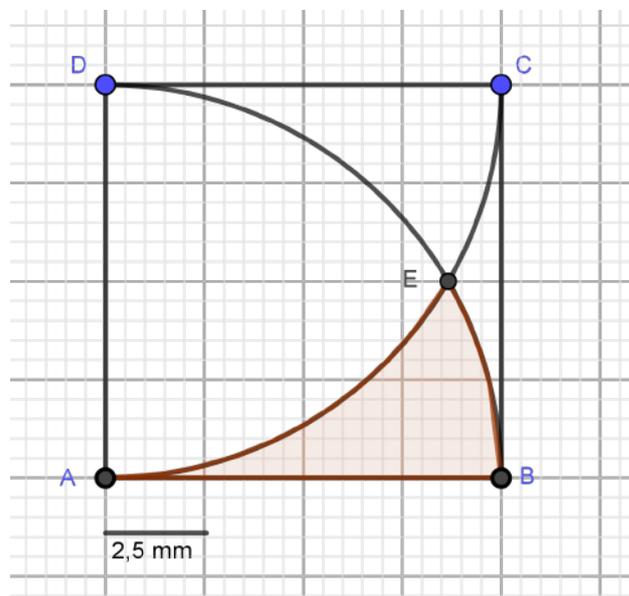
**Fechamento da Aula 1:** Nessa Aula, exercitamos a habilidade de perceber que podemos decompor e compor áreas, transformando uma área irregular em outra, ou várias outras cujo método de calcular é conhecido. Podemos fazer isso porque a área é uma grandeza aditiva, ou seja, todas as manchas solares de formato irregular da nossa figura podem ser agrupadas em 56 quadrados da malha, e como conhecíamos a área de um quadrado, basta usar uma multiplicação para solucionar o problema.

#### A.1.4 Atividade Avaliativa – Aula 1

**Avaliação 1.** Resolva o seguinte problema:

O polígono  $ABCD$  da Figura A.6 é um quadrado. Determine a área que está compreendida entre o arco  $AE$ , o arco  $EB$  e o lado  $AB$ .

Figura A.6 – Quadrado decomposto em áreas não poligonais



Fonte: Autoria própria.

**Orientações para Professores(as):** O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado durante a Aula. Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema com um enunciado mais direto focado apenas no algoritmo relacionado ao cálculo de área da Atividade Principal. Essa questão avaliativa deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso não seja possível, você pode fazer a correção na aula seguinte.

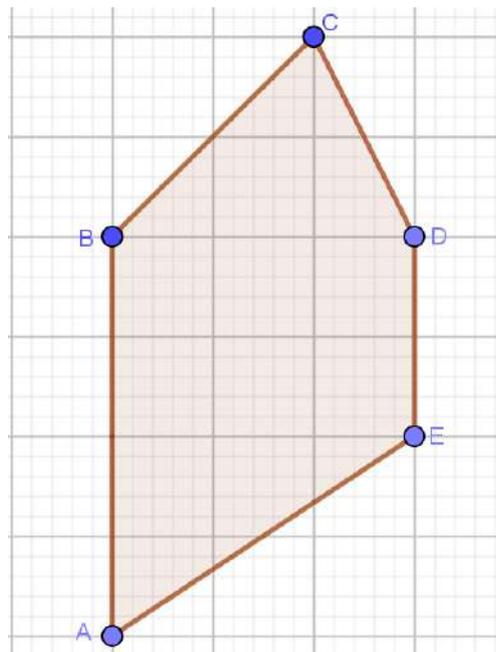
### A.1.5 Atividades Complementares – Aula 1

**Questão 1:** A necessidade de determinar área permanece até os dias atuais, alguns exemplos são: fazer um orçamento para ladrilhar um piso, decidir a área que um ambiente deve ter para acomodar certa quantidade de pessoas, construir *softwares* para determinar área de forma remota através de imagens de satélites, determinar áreas de tumores em imagens computadorizadas, etc. A seguir, trazemos uma situação muito comum no cotidiano onde aplicamos conhecimentos sobre cálculo de área.

Supondo que a Figura A.7 represente o piso de um ambiente que se quer ladrilhar, e que o lado de cada quadrado delimitado pela linha mais escura da malha mede 90 centímetros (*cm*), determine:

- A área em metro quadrado ( $m^2$ ) do piso.
- Quantos ladrilhos quadrados de 90 *cm* de lado podem ser usados na pavimentação, supondo que não queremos reaproveitar recortes?
- Foi uma boa decisão não reaproveitar recortes de ladrilhos para esse caso?

Figura A.7 – Pentágono *ABCDE*

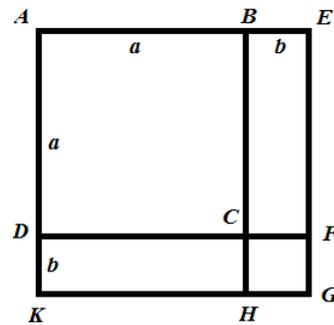


Fonte: Autoria própria.

**Questão 2:** As civilizações da antiguidade desenvolveram técnicas de calcular raízes de equações quadráticas através da aplicação do conhecimento disponível sobre segmentos e áreas. Em Eves (2004, p. 170), encontramos a Proposição 4, do livro II dos *Elementos* de Euclides, que estabelece a seguinte identidade:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\text{A.3})$$

A identidade acima era comumente associada a um quadrado, conforme ilustra a Figura A.8.

Figura A.8 – Quadrado de lado  $a + b$ .

Fonte: Autoria própria.

Na Figura A.8,  $ABCD$  é um quadrado de área  $a^2$ ,  $BCFE$  e  $DCHK$  são dois retângulos congruentes de área  $ab$  e  $HCFG$  um quadrado de lado  $b^2$ . Dessa forma, a equação

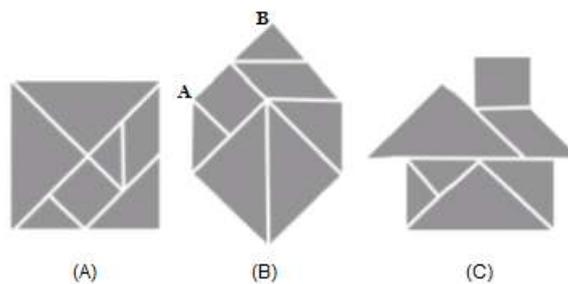
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c$$

indica que o quadrado de lado  $a + b$  na Figura A.8 tem área igual a  $c$ . Usando das ideias desse enunciado, resolva a equação quadrática

$$x^2 + 4x - 10 = 11.$$

**Questão 3:** (ENEM - 2011) O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas, recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da Figura A.9 (A). Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas Figuras A.9 (B) e (C).

Figura A.9 – Composições com o Tangran



Fonte: ENEM (2020)

Se o lado  $AB$  do hexágono, mostrado na Figura A.9 (B) mede  $2 \text{ cm}$ , então a área da Figura A.9 (C), que representa uma "casinha", é igual a

- a)  $4 \text{ cm}^2$       b)  $8 \text{ cm}^2$       c)  $12 \text{ cm}^2$       d)  $14 \text{ cm}^2$       e)  $16 \text{ cm}^2$

**Orientações para Professores(as):** As Atividades Complementares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da atividade principal ou da atividade avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

### A.1.6 REFERÊNCIAS – Aula 1

#### Atividade Motivadora:

- GASPARG, Maria Terezinha. "Explorando a Geometria Através da História da Matemática e da Etnomatemática". 2004. Disponível em <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf>>. Acesso em 17 de novembro de 2019.

#### Atividade Principal:

- Imagem da fotosfera na Figura A.2. Disponível em <[http://www.inpe.br/ciaa2018/arquivos/aulas\\_pdfs/o\\_sol/OSol.pdf](http://www.inpe.br/ciaa2018/arquivos/aulas_pdfs/o_sol/OSol.pdf)>. Acesso em 30 de novembro de 2019.
- LORENSI, Caren; PACINI, Alesandra Abe. "Observações de manchas solares: Uma história antiga". 2016. Disponível em <<https://revista.univap.br/index.php/revistaunivap/article/view/422/0>>. Acesso em 2 de dezembro de 2019.
- Raio do Sol: Parâmetros físicos e Astronômicos. Disponível em <<http://astro.if.ufrgs.br/dados.htm>>. Acesso em 2 de dezembro de 2019.

#### Sistematização:

- LIMA, et al. **Temas e problemas elementares**. Coleção PROFMAT, 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

#### Atividade Avaliativa:

- LEONARDO, Fábio Martins, organizador. **Conexões com a Matemática**. V. 2. São Paulo: Moderna, 2013.

#### Atividades Complementares:

- ENEM. Exame nacional do ensino médio. 2020. Disponível em <<http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.
- EVES, Howard, tradução: Hygino H. Domingues. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

## A.2 AULA 2: RAZÕES ENTRE GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS

O tema abordado nessa aula não trata especificamente sobre o cálculo de área. Mas, como a descoberta da incomensurabilidade entre grandezas se constituiu em um problema central da matemática grega a partir do século IV a.E.C. e não é tomado como um tema importante e merecedor de um capítulo ou seção na grande maioria dos livros didáticos brasileiros, propomos essa aula por entender que devemos criar essa demanda pois esse conteúdo pode contribuir de forma significativa para qualquer projeto de ensino voltado para o estudo da geometria.

Dessa forma, é importante que os estudantes conheçam mais a fundo esse tópico da história matemática pois os esforços à época, para contornar esse problema motivaram novos desenvolvimentos teóricos, como por exemplo, a separação entre o tratamento matemático dos números e o tratamento matemático das grandezas, a generalização da teoria das razões, que até então era dependente da noção de proporção e por fim, a consolidação de uma categoria de números que futuramente viriam a ser chamados de "números irracionais" presentes na maioria dos resultados que obtemos nos problemas escolares que envolvem trigonometria.

### **Objetivos:**

- Conhecer a origem do problema da incomensurabilidade em seu contexto dentro da história da Matemática.
- Reconhecer a existência de grandezas incomensuráveis;
- Verificar a comensurabilidade ou incomensurabilidade entre grandezas;
- Determinar o máximo divisor comum (MDC) entre grandezas aplicando um processo chamado antifairese;

### **Observações:**

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua, compasso e calculadora.
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executada em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula. Se não houver disponibilidade de duas aulas seguidas, pode-se trabalhar até a resolução da atividade principal em uma aula e na aula seguinte, promover o Painel de Soluções, a Sistematização e aplicar a Atividade avaliativa.

### **A.2.1 Descrição das atividades da aula 2**

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na introdução desse Caderno de Atividades. Planejam os momentos de cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor

interpretação e possível resolução de uma atividade denominada "Atividade Principal". Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

#### A.2.1.1 Atividade Motivadora

A geometria ocupa-se essencialmente em estudar grandezas como comprimento, área e volume. Uma grandeza física é por definição, tudo que pode ser medido, ou seja, é algo pertencente ao mundo físico que pode ser associado a um número e uma unidade de medida.

Nessa aula vamos discutir a existência de grandezas que não podem ser medidas de maneira exata, chamadas grandezas incomensuráveis. Acredita-se que o descobrimento desse tipo de grandeza trouxe uma crise na matemática da Grécia Antiga, mas como todo conhecimento científico, há estudiosos que contestam tal crise alegando falta de evidências sobre o fato e afirmando que o problema causou um certo desconforto no início, mas foi contornado e passou a integrar a matemática, fazendo parte dela até os dias atuais.

Quando pensamos em um quadrado de lado medindo 1 metro, sabemos que sua área é  $1 m^2$ . Essa é uma das unidades de área e, no Sistema Internacional de Unidades de Medidas (SI), é a unidade padrão para a medida de área, assim como o metro ( $m$ ) é a unidade de medida do SI para comprimentos.

**Orientações para Professores(as):** O propósito desse momento da Aula é apresentar a existência de segmentos incomensuráveis e despertar o interesse dos estudantes pelo tema. Esse momento, deve ser conduzido pelo professor e não se trata de uma atividade, mas um texto onde se conjectura sobre a incomensurabilidade da raiz quadrada de 2. O texto traz uma série de tentativas de se encontrar um número  $x$  pertencente ao intervalo real  $1 < x < 2$  que elevado ao quadrado é igual a 2. Sugerimos que o tempo para a organização da turma, leitura dos objetivos da Aula e o desenvolvimento desse texto seja de no máximo 15 minutos.

Uma hipótese que é muito difundida sobre a descoberta de segmentos de reta incomensuráveis, é a tentativa de racionalizar (transformar em um número racional) a diagonal de um quadrado de lado 1, que ocorreu por volta do ano 400 a.E.C.

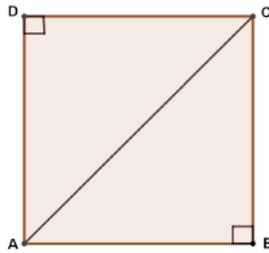
Números racionais, são aqueles que podem se tornar frações, e essa ideia está intimamente ligada ao ato de medir. Por exemplo, se dividirmos um segmento de reta de 1m de comprimento em 5 partes iguais, ao tomarmos um segmento formado por três dessas partes, esse segmento mede três quintos de um metro.

No pensamento da época, comprimento, área e volume eram grandezas físicas que podiam ser medidas, bastava encontrar a unidade de medida adequada para cada caso. Dessa forma, a descoberta de segmentos de retas que não podiam ser comparados com nenhum outro segmento dado como unidade, pode sim ter causado um certo mal-estar entre os matemáticos da época.

**Problema:** A diagonal de um quadrado de lado 1 tem medida representada por um número racional?

No quadrado unitário  $ABCD$ , a diagonal  $AC$  divide o quadrado em dois triângulos retângulos: o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $B$ , e o triângulo  $ADC$ , retângulo em  $D$ , ambos congruentes pelo caso "lado, lado, lado" pois  $AC$  é lado comum,  $AB = CD$  e  $BC = AD$ . Observe a Figura A.10

Figura A.10 – Diagonal AC de comprimento incomensurável.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$ , a diagonal  $AC$  é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (AC)^2 &= (AB)^2 + (BC)^2 \\
 &= 1^2 + 1^2 \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2.
 \end{aligned}
 \tag{A.4}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros de (A.4), temos:

$$\sqrt{(AC)^2} = \sqrt{2} \implies AC = \sqrt{2}.
 \tag{A.5}$$

Portanto, o comprimento da diagonal  $AC$  é  $\sqrt{2}$  u.c.

Vamos prestar atenção na igualdade  $(AC)^2 = 2$ . É possível encontrarmos um número racional que ao ser elevado ao quadrado o resultado é 2?

Faremos algumas tentativas, mas inicialmente, observe que  $1^2 = 1 \implies \sqrt{1} = 1$  e  $2^2 = 4 \implies \sqrt{4} = 2$ . Dessa forma  $\sqrt{2}$  é um valor entre 1 e 2, ou seja, não é um número inteiro. Vamos elevar alguns números entre 1 e 2 ao quadrado e observar o resultado, completando as tabelas a seguir.

Tabela A.1 – Valores de  $x$  e seus respectivos quadrados, onde  $1 < x < 2$ .

$x$	$x^2$
1,1	1,21
1,2	1,44
1,3	1,69
1,4	1,96
1,5	2,25

Ao preenchermos a Tabela A.1, notamos que o 2 está entre  $(1,4)^2$  e  $(1,5)^2$ . Vamos proceder da mesma forma agora usando valores de  $x$  entre 1,4 e 1,5.

Tabela A.2 – Valores de  $x$  e seus respectivos quadrados, onde  $1,4 < x < 1,5$ .

$x$	$x^2$
1,41	1,9881
1,42	2,0164

Na Tabela A.2, notamos que bastaram 2 linhas para encontrar o intervalo em que se situa o número que elevado ao quadrado é 2. Agora, faremos o mesmo procedimento para valores de  $x$  entre 1,41 e 1,42.

Tabela A.3 – Valores de  $x$  e seus respectivos quadrados, onde  $1,41 < x < 1,42$ .

$x$	$x^2$
1,411	1,990921
1,412	1,993744
1,413	1,996569
1,414	1,999396
1,415	2,002225

Na Tabela A.3, conseguimos situar  $\sqrt{2}$  em um intervalo muito menor que nas tabelas anteriores, conseguimos determinar que o número que elevado ao quadrado é 2 está entre 1,414 e 1,415.

Podemos continuar esse raciocínio pois, entre dois números racionais, existem infinitos outros racionais, logo, é possível conjecturar, com um certo grau de segurança que nunca vamos encontrar um número decimal exato que elevado ao quadrado resulte em 2.

Portanto, a diagonal do quadrado da Figura A.10 não pode ser medida por um número racional, em outras palavras, essa diagonal é uma grandeza incomensurável (formalizaremos essa afirmação em um outro momento da aula).

#### A.2.1.2 Atividade Principal – Aula 2

Desde sua descoberta, anterior aos anos 400 a.E.C, as grandezas incomensuráveis foram um grande desafio para os matemáticos gregos. Já comentamos antes que os gregos determinavam áreas por comparação, e se existem grandezas que não podem ser expressas na forma de fração, teríamos problemas sérios ao medi-las, pois medir é comparar com uma unidade tomada como padrão de medida.

O problema foi contornado com a teoria das proporções entre quatro grandezas que apresentaremos, atribuída ao filósofo platônico Eudoxo, nascido em torno de 400 a.E.C. Essa teoria em uma importante obra da matemática grega, intitulada *Os Elementos de Geometria*, escrita pelo geômetra Euclides de Alexandria em 300 a.E.C.

Leia com atenção *Definição V.5* (lê-se definição 5 do livro 5) do *Elementos*:

**Definição A.1.** (*Definição V.5. dos Elementos*) Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, se quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e outros quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, são tais que os primeiros equimúltiplos ultrapassam, um a um, os segundos ou são iguais a estes ou são menores, que os últimos equimúltiplos considerados na ordem correspondente aos primeiros.

Observe que é bem difícil de entender o que diz essa definição, mas podemos interpretá-la da seguinte maneira: as grandezas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  estão na mesma razão, observado primeiramente que

$$a : b :: c : d, \quad (\text{A.6})$$

se multiplicarmos a primeira e a terceira por um mesmo número inteiro e da mesma forma, multiplicarmos a segunda e a quarta, por outro número inteiro, chamaremos de  $m$  e  $n$  esses números, podemos encontrar três possibilidades:

$$\text{i) } m \cdot a > n \cdot b \Rightarrow m \cdot c > n \cdot d.$$

$$\text{ii) } m \cdot a = n \cdot b \Rightarrow m \cdot c = n \cdot d.$$

$$\text{iii) } m \cdot a < n \cdot b \Rightarrow m \cdot c < n \cdot d.$$

Na notação moderna, a asserção A.6, é expressa por

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c. \quad (\text{A.7})$$

**Problema:** Para entender a Teoria das Proporções de Eudoxo, considere quatro grandezas quaisquer, de mesma espécie, quatro áreas por exemplo, de medidas  $a = 2 \text{ cm}^2$ ,  $b = \sqrt{5} \text{ cm}^2$ ,  $c = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$  e  $d = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ cm}^2$  e os números inteiros  $m = 5$  e  $n = 3$ . Com esses dados, resolva os itens a seguir.

- Verifique se há proporção entre as áreas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ .
- Para os valores dados, verifique se a desigualdade a seguir é verdadeira.

$$m \cdot a > n \cdot b \Rightarrow m \cdot c > n \cdot d. \quad (\text{A.8})$$

- Do enunciado, note que  $c = \frac{a}{3}$  e  $d = \frac{b}{3}$ . Verifique se essa proporção se manteve nos resultados numéricos de  $m \cdot a > n \cdot b \Rightarrow m \cdot c > n \cdot d$  obtidos no item (b).
- Busque alguns valores para  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (devem estar em proporção) sendo  $b$  e  $d$  incomensuráveis (irracionais) usando  $m = 5$  e  $n = 7$ , tal que as desigualdades  $m \cdot a < n \cdot b$  então  $m \cdot c < n \cdot d$  sejam verdadeiras. Verifique também se a proporção se manteve.
- Em que situação teremos a igualdade (ii), ou seja:  $m \cdot a = n \cdot b$  e  $m \cdot c = n \cdot d$ .

**Orientações para Professores(as):** Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Motivadora em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos que essa atividade seja trabalhada em um tempo de 25 minutos.

## A.2.2 Painel de Soluções – Aula 2

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

### A.2.3 Sistematização – Aula 2

Vamos mostrar que o comprimento da diagonal do quadrado de medida  $\sqrt{2}$  discutido no início da aula é incomensurável, ou seja, não pode ser expresso na forma de um número racional.

**Proposição A.2.** *O segmento de medida  $\sqrt{2}$  não é racional.*

*Demonstração.* Para provar que  $\sqrt{2}$  **não é racional**, vamos supor que seja racional e chegar a uma contradição. Inicialmente, supondo que  $p$  e  $q$  são números inteiros e positivos, primos entre si, ou seja, não possuem divisores comuns pois  $MDC(p, q) = 1$ .

Por hipótese, faremos  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ,  $q \neq 0$ , ou seja,  $\sqrt{2}$  é racional. Elevando ambos os membros dessa igualdade ao quadrado temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^2 &= (\sqrt{2})^2 \\ \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ p^2 &= 2q^2. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Como todo número par pode ser escrito da forma  $2k$ , em que  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que

$$p^2 = 2q^2 \text{ é par e } p^2 = 2k. \tag{A.10}$$

Logo,

$$p^2 \text{ é par} \Rightarrow p \text{ é par} \Rightarrow p = 2m, m \in \mathbb{Z}. \tag{A.11}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} p &= 2m \text{ e elevando ambos os membros ao quadrado,} \\ p^2 &= 4m^2. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Mas pelo resultado (A.10), temos que  $p^2 = 2q^2$ , então

$$\begin{aligned} 2q^2 &= 4m^2 \text{ e dividindo ambos os membros por 2, temos} \\ q^2 &= 2m^2 \Rightarrow q \text{ é par} \end{aligned} \tag{A.13}$$

As conclusões em (A.11) e em (A.13) são contraditórias pois  $p$  e  $q$  foram supostos primos entre si. Chegamos então a um absurdo e assim, não podemos supor que  $\sqrt{2}$  é racional. Portanto,  $\sqrt{2}$  é irracional.  $\square$

Dessa forma, um segmento que mede  $\sqrt{2}$  não pode ser medido a partir de nenhum outro segmento, dado que não encontramos a fração  $\frac{p}{q}$  equivalente a ele. Esse tipo de segmento é chamado de incomensurável.

**Orientações para Professores(as):** Ao demonstrar a argumentação da impossibilidade de racionalizar o número  $\sqrt{2}$ , enfatize o tipo de demonstração por "**Redução ao Absurdo**" empregado na prova. Sugerimos um tempo de 20 minutos para a realização dessa etapa.

**Sugestão para Professores(as):** Construir com régua e compasso um retângulo cuja área é uma grandeza incomensurável. Também pode-se pedir uma pesquisa sobre a existência ou não existência de uma crise na matemática grega gerada pela descoberta das grandezas incomensuráveis.

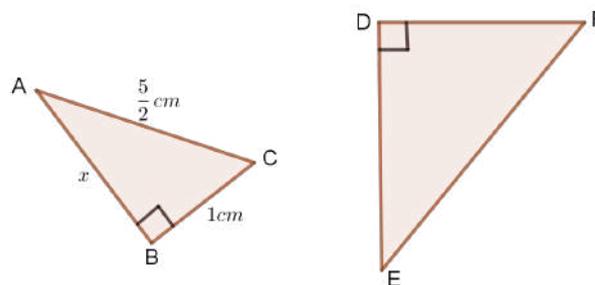
**Fechamento da Aula 2:** Nessa Aula aprendemos como as grandezas incomensuráveis surgiram na matemática grega, entre os séculos V e VI a.E.C (antes da Era Comum), na tentativa de medir a diagonal de um quadrado de lado 1. Essa diagonal, segundo discutimos e demonstramos durante a aula, tem medida  $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$  e não pode ser registrado na forma de fração, isto é, não pode ser racionalizado. Além disso, conhecemos também a forma com que a Teoria das Proporções de Eudoxo contornou o problema da incomensurabilidade, possibilitando, desde então, que os matemáticos trabalhassem com razões entre grandezas incomensuráveis.

#### A.2.4 Atividade Avaliativa – Aula 2

**Avaliação 2.** Resolva os itens a seguir:

- Determine a área do triângulo  $ABC$  da Figura A.11 e avalie se o valor encontrado é uma grandeza comensurável ou incomensurável. Justifique sua escolha.
- Atribua valores para os lados do triângulo  $DEF$  para que sua área seja uma grandeza incomensurável e determine o valor dessa área.

Figura A.11 – Triângulos  $ABC$  e  $DEF$ .



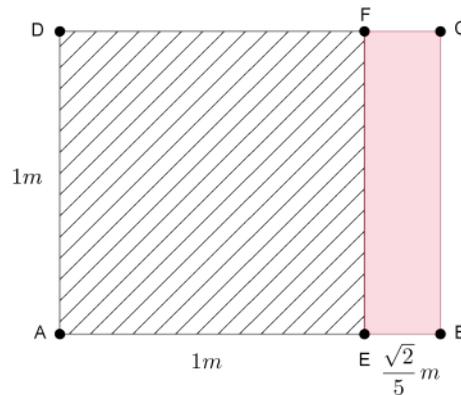
Fonte: Autoria própria.

**Orientações para Professores(as):** O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado durante a Aula. Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema com um enunciado mais direto focado apenas na verificação da aprendizagem relacionada ao tema da Aula. Essa questão avaliativa deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso não seja possível, você pode fazer a correção na aula seguinte.

#### A.2.5 Atividades Complementares – Aula 2

**Questão 1.** A incomensurabilidade pode ser observada quando não conseguimos medir uma grandeza em função de outra. Para entender melhor, acompanhe o raciocínio a seguir.

Imagine o retângulo  $ABCD$  de altura  $AD = 1\text{ m}$ , base  $AB = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\text{ m}$ . Ao retirarmos  $1\text{ m}^2$  de sua área, temos como resto um retângulo de altura  $EF = 1\text{ m}$  e base  $EB = \frac{\sqrt{2}}{5}\text{ m}$ , conforme mostra a Figura A.12:

Figura A.12 – Quadrado  $AEFD$  e retângulo  $EBCF$ .

Fonte: Autoria própria.

As áreas do quadrado  $AEFD$  e do retângulo  $EBCF$  são respectivamente,

$$S(AEFD) = 1 \text{ m}^2 \text{ e } S(EBCF) = \frac{\sqrt{2}}{5} \text{ m}^2,$$

e se quisermos medir a área do retângulo tomando como unidade a área do quadrado, devemos fazer:

$$\begin{aligned} \frac{S(EBCF)}{S(AEFD)} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{5}}{1} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Como já vimos durante a aula, uma grandeza que mede  $\sqrt{2}$  é incomensurável, portanto o resultado obtido para a razão em (A.14) indica que a área do retângulo  $EBCF$  é incomensurável em relação à área do quadrado  $AEFD$ .

De acordo com o que foi apresentado nesse enunciado, verifique se há comensurabilidade entre a grandeza  $p$  em relação à grandeza  $q$  para cada caso a seguir:

- a)  $p = 6$  e  $q = 3$ ;
- b)  $p = 5$  e  $q = 153$ ;
- c)  $p = 7\sqrt{3}$  e  $q = 14\sqrt{3}$ ;
- d)  $p = 6\sqrt{2}$  e  $q = 2\sqrt{2}$ ;
- e)  $p = 9$  e  $q = 21\sqrt{3}$ ;

**Questão 2.** Uma técnica de comparar razões sem a necessidade do conceito de número racional é a *antifairese*, ou *subtrações recíprocas*. Na geometria, usava-se a antifairese no ato de aproximar razões entre segmentos incomensuráveis. Leia com atenção a asserção a seguir:

*Se, quando a menor de duas grandezas é continuamente subtraída da maior, a que resta nunca mede a precedente, as grandezas são incomensuráveis.*

*Antifairese* é a tradução literal de subtrações recíprocas. Etimologicamente seria uma aproximação de *Antho-hypo-hairesis*, entre duas grandezas. O termo pode ser fragmentado da seguinte forma: *Anto* = recíproco; *Hypo* = sub; *Hairesis* = tração. Na álgebra moderna o procedimento é conhecido como **Algoritmo de Euclides** para o cálculo do máximo divisor comum. A antifairese entre os números  $A$  e  $B$  é denotada por  $\text{Ant}[A, B] = (m, n, p, \dots)$ . Observe dois exemplos:

**Exemplo A.1.** *Determine a razão antifairética entre os números 60 e 18.*

- 18 cabe 3 vezes em 60 e restam 6;
- 6 cabe 3 vezes em 18 e resta 0.

Portanto, a razão antifairética entre 18 e 60 é  $\text{Ant}[18, 60] = (3, 3)$ . O último resto diferente de zero é o máximo divisor comum entre os valores usados, e nesse caso, o m.d.c entre 18 e 60 é 6. Representamos por  $\text{MDC}(18, 60) = 6$ .

**Exemplo A.2.** *Determine a razão antifairética entre os números 18 e 61.*

- 18 cabe 3 vezes em 61 e restam 7;
- 7 cabe 2 vezes em 18 e restam 4;
- 4 cabe 1 vez em 7 e restam 3;
- 3 cabe 1 vez em 4 e resta 1.

Portanto, a razão antifairética entre 18 e 61 é  $\text{Ant}[18, 61] = (3, 2, 1, 1)$  e resta 1. Observe que o fato de ter restado 1, significa que 18 e 61 são primos entre si ou seja,  $\text{MDC}(18, 61) = 1$ .

Usando o método das subtrações recíprocas, ou antifairese, determine o m.d.c entre os valores a seguir:

- a) 12 e 4;
- b) 75 e 303;
- c) 47 e 21;
- d) 108 e 60;
- e)  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{2}$ ;

**Questão 3. (ENEM-2015)** Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas da mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

- a)105 peças.      b)120 peças.      c)210 peças.      d)243 peças.      e)420 peças.

**Orientações para Professores(as):** As Atividades Complementares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da atividade principal ou da atividade avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

## A.2.6 REFERÊNCIAS – Aula 2

### Atividade Motivadora:

- GONÇALVES, C. H.; POSSANI, C. "Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga". Disponível em <<https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n47>>. Acesso em 5 de dezembro de 2019.
- SING, Simon. O Enigma de Fermat. Rio de Janeiro: Record, 1998.

### Atividade principal:

- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

### Sistematização:

- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único**. São Paulo: Editora Ática, 2005.
- ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Tópicos da história da matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

### Atividades Complementares

- ENEM. Exame nacional do ensino médio. 2020. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

### A.3 AULA 3: LÚNULAS DE HIPÓCRATES, ARBELOS E SALINONS DE ARQUIMEDES

Nessa Aula, trataremos de um tópico muito interessante da História da Matemática, as *lúnulas*, os *arbelos* e os *salinons*. São figuras geométricas de lados curvos que foram descobertas por Hipócrates e Arquimedes nas tentativas de *quadrar o círculo*. Essas figuras são definidas de acordo com algumas propriedades que serão trabalhadas nas atividades dessa Aula.

#### **Objetivos:**

- Retomar as fórmulas de cálculo de área e comprimento de círculos.
- Determinar áreas hachuradas ou destacadas dentro de polígonos, círculos entre outras figuras planas.
- Conhecer parte da busca de Hipócrates e Arquimedes pela quadratura do círculo.
- Verificar por inspeção a validade das relações entre elementos da construção dos *Arbelos* e dos *Salinons*.
- Aplicar manipulações algébricas das fórmulas para obter áreas solicitadas.
- Resolver problemas de forma aberta, deixando os resultados indicados em função das variáveis.

#### **Observações:**

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua e calculadora.
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos dessa Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executado em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula.

#### **A.3.1 Descrição das atividades da aula 3**

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada "Atividade Principal". Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

### A.3.1.1 Atividade Motivadora

A medição e o cálculo de área, entre as civilizações mais antigas, estavam relacionados a figuras geométricas simples como triângulos, quadriláteros e regiões poligonais. Entre os gregos, dada a importância das construções com a régua não graduada e o compasso, estabeleceu-se o procedimento da quadratura:

*Dada uma figura geométrica, fazer a sua quadratura é construir, com o auxílio desses dois instrumentos, a régua e o compasso, um quadrado equivalente a ela, ou seja, com a mesma área da figura dada.*

Na Grécia antiga, não se usava em estudos teóricos o valor numérico de uma área ou de outra grandeza qualquer como usamos atualmente. Por exemplo, matemáticos da época obtinham suas áreas por comparação, ou seja, quantas vezes a área de uma figura é maior, ou menor que a área de uma outra figura, tomada como unidade padrão. Por ser o quadrado um polígono muito simples, habituaram-se a comparar as áreas de figuras planas com a área de um quadrado tomado como unidade de medida. Acredita-se que dessa forma surgiu a expressão "quadrar áreas" entre os círculos de matemáticos gregos, que é o equivalente atual de "calcular áreas".

Desde os anos 500 a.E.C (antes da Era Comum), surgiu uma pergunta que esteve presente entre os gregos, e só foi completamente respondida no século XIX da nossa era:

*Podemos construir, com régua e compasso, um quadrado equivalente a um círculo? Ou seja, como encontrar a quadratura do círculo?*

Hoje, sabemos que a quadratura do círculo é impossível. No entanto, a primeira quadratura de uma região não poligonal que conhecemos é devida a Hipócrates de Chios, que viveu no século V a.E.C.

Estima-se que, entre 450 e 430 a.E.C., Hipócrates tenha escrito seu trabalho mais importante, os *Elementos de Geometria*. Embora os originais tenham se perdido, a obra é considerada precursora dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides e nela foram registrados importantes avanços para a Geometria do seu tempo.

Considera-se que o estudo de Hipócrates sobre a quadratura das *lúnulas* foi, provavelmente, uma tentativa para chegar à quadratura do círculo.

A Figura A.13 mostra uma das *lúnulas* estudadas por Ibn Al-Haytham, que viveu no início do século X E.C. (965-1040). Reproduzindo os argumentos de Hipócrates, Al-Haytham exibiu a quadratura da reunião de *lúnulas* limitadas por semicircunferências construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

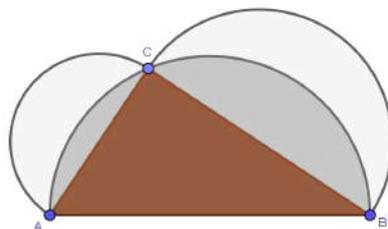


Figura A.13 – *Lúnulas* de Hipócrates estudadas por Ibn Al-Haytham.

Fonte: Autoria própria.

**Problema:** Observando a Figura A.13, resolva os itens a seguir:

- (A) Determine a área  $S(D)$  da região entre o semicírculo de diâmetro  $AB$  e o triângulo retângulo  $ABC$ , dadas as medidas  $AC = 3\sqrt{7}$  cm e  $BC = 9$  cm de seus catetos.
- (B) A área obtida representa o valor exato da região? Justifique sua resposta.

**Orientações para Professores(as):** Essa atividade tem o propósito de familiarizar o estudante com a obtenção de uma área hachurada inscrita em um semicírculo, em específico, a imagem de uma das *Lúnulas* de Hipócrates, através da manipulação algébrica das fórmulas das figuras envolvidas. A resolução dessa atividade será conduzida pelo professor. Para a organização da turma em duplas ou trios, leitura dos objetivos da Aula e resolução da Atividade Motivadora sugerimos um tempo de 15 minutos.

**Sugestão para Professores(as):** Você pode encontrar um vídeo sobre a impossibilidade da quadratura do círculo no portal da OBMEP - Programa de Iniciação Científica - através do link <https://www.youtube.com/watch?v=n9WyUaicIAQ>.

### A.3.1.2 Atividade Principal

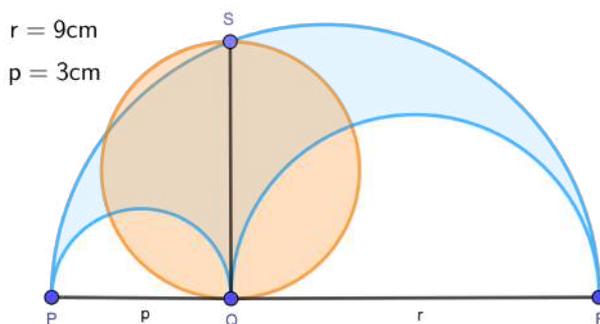
Arquimedes, nasceu por volta de 287 a.E.C. na cidade portuária de Siracusa, na Sicília. Naquele período, essa comunidade era uma cidade-estado dos domínios gregos. Atualmente, Siracusa é uma comunidade que pertence à Itália. Arquimedes viveu aproximadamente 75 anos, num período de grande expansão de influência geopolítica do império romano.

Dentre muitos feitos realizados por este pensador, considerado um dos mais importantes matemáticos da história, destaca-se a incansável busca pela solução do problema da quadratura do círculo. Nessa busca, realizou feitos extraordinários. Conseguiu realizar a quadratura da parábola, usando técnicas e demonstrações geométricas e algébricas que estavam muito além de seu tempo.

A sua obra "*Livro de Lemas*" ou *Liber Assumptorum* é um tratado sobre a natureza dos círculos, onde tem quinze proposições. A cópia mais antiga conhecida do texto está escrita em árabe. Alguns especialistas argumentam que este livro não pode ter sido escrito por Arquimedes (obra apócrifa) na sua forma atual, uma vez que ele cita o próprio Arquimedes em seu texto, o que sugere que foi modificado ou escrito por outro matemático. Acredita-se que talvez o *Lemas* seja baseado em uma obra mais antiga, agora perdida, escrita por Arquimedes.

Este trabalho de Arquimedes, provavelmente preservado por árabes, apresenta diversas proposições geométricas interessantes algumas das quais relacionadas ao cálculo de áreas de figuras incomuns. Duas delas são, o *Arbelos* e o *Salinon*, que serão usadas na atividade a seguir.

O *Arbelos* é a região azul representada na Figura A.14.

Figura A.14 – *Arbelos* de Arquimedes

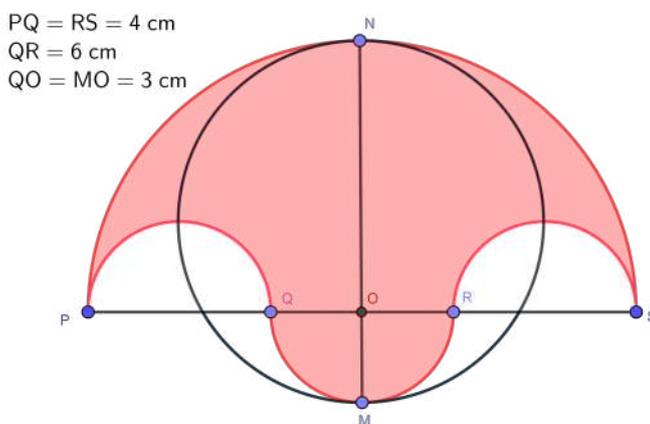
Fonte: Autoria própria.

Um *Arbelos* é definido da seguinte maneira:

**Definição A.2.** *Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  três pontos sobre uma linha reta, com  $Q$  entre  $P$  e  $R$ . Semicírculos são construídos sobre um mesmo lado da linha, com diâmetros  $PQ$ ,  $QR$  e  $PR$ . Um *Arbelos*  $A$  é a figura delimitada por estes três semicírculos. Traça-se a perpendicular a  $PR$  em  $Q$ , encontrando o arbelos em  $S$ . Tem-se que  $S(A) = S(C)$ , onde  $C$  é o círculo de diâmetro  $QS$ .*

Outra figura plana incomum e com propriedades interessantes que consta no Livro de Lemas de Arquimedes é o *Salinon*, apresentado na Figura A.15, definido como:

**Definição A.3.** *Sejam  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  quatro pontos (nesta ordem) sobre uma linha reta, tal que  $PQ = RS$ . Acima da linha são construídos, com diâmetros  $PQ$ ,  $RS$  e  $PS$ , semicírculos, e abaixo da linha um outro semicírculo de diâmetro  $QR$ . Um *Salinon*  $S$  é a figura delimitada por estes quatro semicírculos. O eixo de simetria do *Salinon* intercepta-o nos pontos  $M$  e  $N$ . Tem-se que  $S(S) = S(C)$ , onde  $C$  é o círculo de diâmetro  $MN$ .*

Figura A.15 – *Salinon* de Arquimedes.

Fonte: Autoria própria.

**Problema:** Verifique se é verdadeira a relação  $S(A) = S(C)$  para o *arbelos* e para o *salinon* usando as medidas indicadas nas Figuras A.14 e A.15.

**Orientações para Professores(as):**

- O propósito dessa atividade é fazer com que os alunos verifiquem a veracidade das definições de *Arbelos* e *Salinon* desenvolvidas por Arquimedes. Nesse momento os estudantes irão construir, aplicar e discutir as estratégias para a resolução da atividade em duplas ou trios, em um tempo sugerido de 25 minutos.
- Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Principal em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida.

**A.3.2 Painel de Soluções – Aula 3**

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

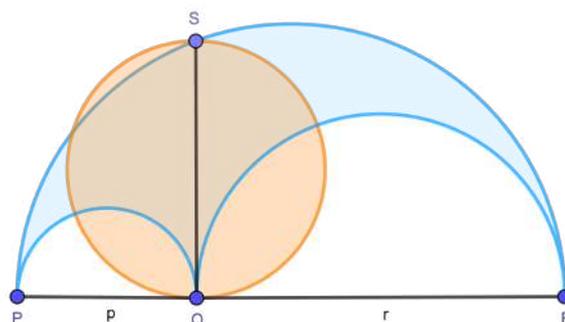
**A.3.3 Sistematização**

A habilidade relacionada às atividades desta aula são muito frequentes em questões de vestibular, ENEM e demais exames similares. Além disso, a resolução deste tipo de problema mobiliza uma importante demanda cognitiva diante do grau de dificuldade e do esforço mental em sua resolução.

Como as figuras tem características bem específicas, pois são geradas por definições, é possível fazer o cálculo dessas áreas de forma aberta, ou seja, sem atribuir valor numérico às variáveis, obtendo uma "fórmula fechada" para suas áreas.

De acordo com a Definição A.2 e observando a Figura A.16, mostraremos que  $S(A) = S(C)$  em função de  $p$ ,  $r$  e do diâmetro  $QS$  do círculo fazendo  $QS = h$ .

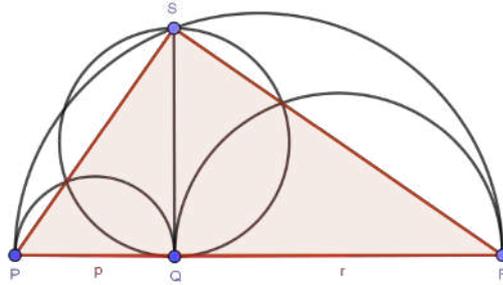
Figura A.16 – *Arbelos* de diâmetro  $p + r$ .



Fonte: Autoria própria.

*Demonstração.* Inicialmente, determinamos  $h$  em função de  $p$  e  $r$ , traçamos o segmento  $SP$  e o segmento  $SR$  obtendo o triângulo  $PSR$ , que é retângulo por estar inscrito em uma semicircunferência, conforme Figura A.17.

Figura A.17 – Arbelos de diâmetro  $p + r$



Fonte: Autoria própria.

Como  $QS$  é a altura relativa à hipotenusa do  $\triangle PSR$  e fazendo  $QS = h$ , das relações métricas do triângulo retângulo, sabemos que o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Para o triângulo retângulo  $PSR$  da Figura A.17 essa relação pode ser expressa por  $h^2 = p \cdot r$ . Assim, segue que

$$(QS)^2 = h^2 = p \cdot r \Rightarrow QS = h = \sqrt{p \cdot r}. \quad (\text{A.15})$$

Obtemos a área  $\mathcal{S}(A)$  do arbelos através da diferença da área do semicírculo de raio  $\frac{p+r}{2}$  e as áreas dos semicírculos de raios  $\frac{p}{2}$  e  $\frac{r}{2}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A) &= \frac{1}{2} \left( \frac{p+r}{2} \right)^2 \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{p}{2} \right)^2 \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2} \right)^2 \pi = \frac{1}{2} \pi \cdot \left[ \frac{p^2 + 2pr + r^2}{4} - \frac{p^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \pi \left[ \frac{p^2 + 2pr + r^2 - p^2 - r^2}{4} \right] = \frac{2pr}{8} \pi = \frac{pr}{4} \pi \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

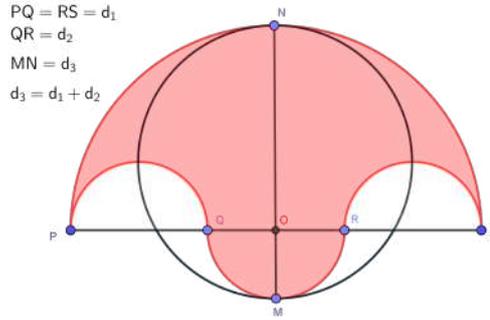
Por outro lado, a área do círculo de diâmetro  $QS$  é

$$\mathcal{S}(C) = \left( \frac{\sqrt{pr}}{2} \right)^2 \pi = \frac{pr}{4} \pi \quad (\text{A.17})$$

Portanto,  $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(C)$ . □

Na sequência, mostraremos que para o *Salinon* vale a relação  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$ , onde  $\mathcal{S}(S)$  é a área do *Salinon* e  $\mathcal{S}(C)$  é a área do círculo de diâmetro  $MN$  da Figura A.18.

De acordo com a Definição A.3 e conforme podemos observar na Figura A.18, demonstraremos que  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$ .

Figura A.18 – Salinon e círculo de diâmetro  $d_3$ .

Fonte: Autoria própria.

*Demonstração.* Inicialmente mostraremos que, como consta na Figura A.18,  $d_3 = d_1 + d_2$ . Note que  $OP = PQ + \frac{QR}{2}$  e  $OQ = OM = OR$ . Como  $ON = OP$  e  $OM = OQ = \frac{QR}{2}$  e  $MN = NO + OM = d_3$ , temos:

$$\begin{aligned}
 d_3 = MN &= OM + ON = OM + OP \\
 &= OM + PQ + \frac{QR}{2} \\
 &= \frac{QR}{2} + PQ + \frac{QR}{2} = PQ + \frac{QR}{2} + \frac{QR}{2} \\
 &= PQ + QR.
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Da Figura A.18 temos  $PQ = d_1$  e  $QR = d_2$ . Substituindo em (A.18), temos,

$$d_3 = d_1 + d_2. \tag{A.19}$$

Podemos observar que a área do Salinon é a área do semicírculo de raio  $PO = d_1 + \frac{d_2}{2}$  mais a área do semicírculo de diâmetro  $QR = d_2$  subtraído da área de dois semicírculos de diâmetro  $PQ = RS = d_1$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(S) &= \frac{\left(d_1 + \frac{d_2}{2}\right)^2}{2} \cdot \pi + \frac{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}{2} \cdot \pi - 2 \cdot \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{2} \cdot \pi = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + \frac{d_2^2}{4}}{2} \cdot \pi + \frac{d_2^2}{4} \cdot \pi - \frac{2d_1^2}{4} \cdot \pi \\
 &= \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1^2}{2}}{2} \cdot \pi \\
 &= \frac{\frac{d_1^2}{2} + d_1 d_2 + \frac{d_2^2}{2}}{2} \cdot \pi = \left(\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_1 d_2}{2} + \frac{d_2^2}{4}\right) \cdot \pi \\
 &= \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{(d_1 + d_2)^2}{4} \cdot \pi
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Por outro lado, a área  $\mathcal{S}(C)$  do círculo de diâmetro  $MN = d_3 = d_1 + d_2$  é

$$\mathcal{S}(C) = \left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{(d_1 + d_2)^2}{4} \cdot \pi. \tag{A.21}$$

Portanto,  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$ . □

**Orientações para Professores(as):** O propósito desse momento da Aula é demonstrar algebricamente a veracidade das definições já verificadas pelos estudantes na Atividade Principal bem como apresentar a forma aberta de se desenvolver um cálculo essencialmente algébrico. Essa etapa deve ser desenvolvida pelo professor em um tempo sugerido de 20 minutos.

**Fechamento da Aula 3:** Nesta aula, conhecemos algumas figuras geométricas planas interessantes que foram encontradas nas tentativas de solucionar o problema da quadratura do círculo, a *Lúnula*, o *Arbelos* e o *Salinon*. Verificamos numericamente a validade das definições do *Arbelos* e do *Salinon*, e trabalhamos com métodos de determinar valores de áreas destacadas ou hachuradas dentro figuras planas. Retomamos algumas relações métricas do triângulo retângulo, como o Teorema de Pitágoras, por exemplo, e a fórmula de obtenção da área do círculo e, além disso, acompanhamos as verificações das definições de *Arbelos* e *Salinons*, trabalhando de forma aberta, isto é, sem atribuir valores numéricos para as variáveis.

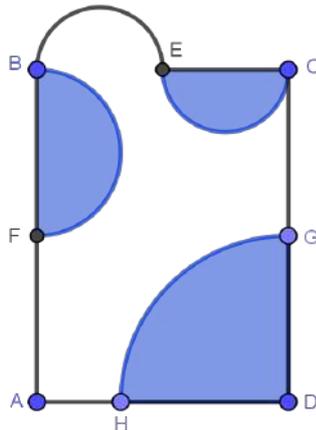
### A.3.4 Atividade Avaliativa – Aula 3

**Avaliação 3.** Resolva o seguinte problema:

Na Figura A.19,  $ABCD$  é um retângulo cujas medidas estão indicadas. Determine, em  $cm^2$  a área em branco. Deixe o resultado indicado em função de  $\pi$ .

Figura A.19 – Área não poligonal  $AFBECGH$ .

ABCD é um retângulo  
 E é ponto médio de BC.  
 F e G são pontos médios de AB e CD respectivamente.  
 AB = 4 cm  
 BC = 3 cm



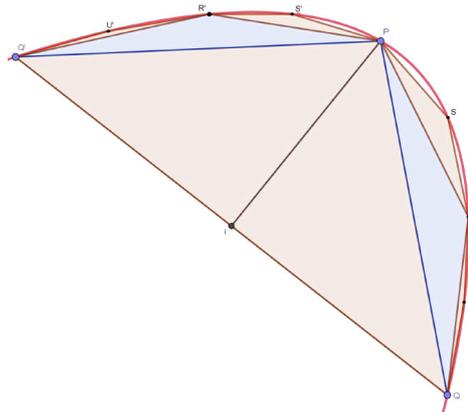
Fonte: Autoria própria.

**Orientações para Professores(as):** O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado durante a Aula. Nessa etapa, os estudantes devem resolver individualmente um problema similar aos propostos anteriormente, porém com um enunciado mais direto e focado apenas no cálculo de área. Essa questão avaliativa deve ser corrigida na lousa nos minutos finais da aula. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso seja necessário, a correção pode ser feita na aula seguinte.

### A.3.5 Atividades Complementares – Aula 3

**Questão 1:** Arquimedes foi um dos maiores matemáticos da antiguidade e considerado por muitos estudiosos um dos maiores de todos os tempos. Um de seus trabalhos mais importantes foi a *quadratura da parábola pelo método da exaustão*. Através da subdivisão da área de um segmento parabólico em triângulos cada vez menores, conforme Figura A.20.

Figura A.20 – Segmento de parábola exaurido em triângulos.



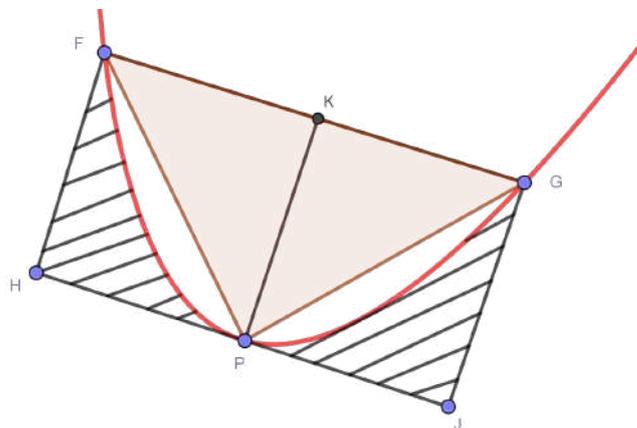
Fonte: Autoria própria.

Aplicando o método da exaustão, Arquimedes provou que:

**Proposição A.3.** *Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda  $QQ'$  é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele.*

Na Figura A.21 o segmento parabólico de base  $FG$  está inscrito no retângulo  $FGJH$ , de dimensões  $FH = 5\text{ cm}$  e  $FG = 9\text{ cm}$ .

Figura A.21 – Segmento parabólico inscrito no retângulo  $FGJH$ .

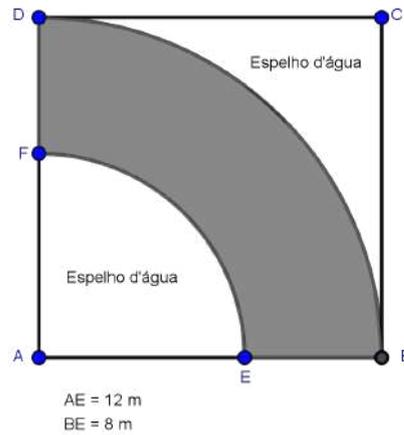


Fonte: Autoria própria.

Utilizando a proposição do enunciado deste problema, determine a área hachurada da Figura A.21.

**Questão 2:** Em uma reforma executada em um museu de artes, um arquiteto planejou, na entrada do museu uma passarela  $BDFE$  que será revestida em granito, sobre um espelho d'água, conforme mostra a Figura A.22.

Figura A.22 – Passarela  $BDFE$  sobre um espelho d'água.

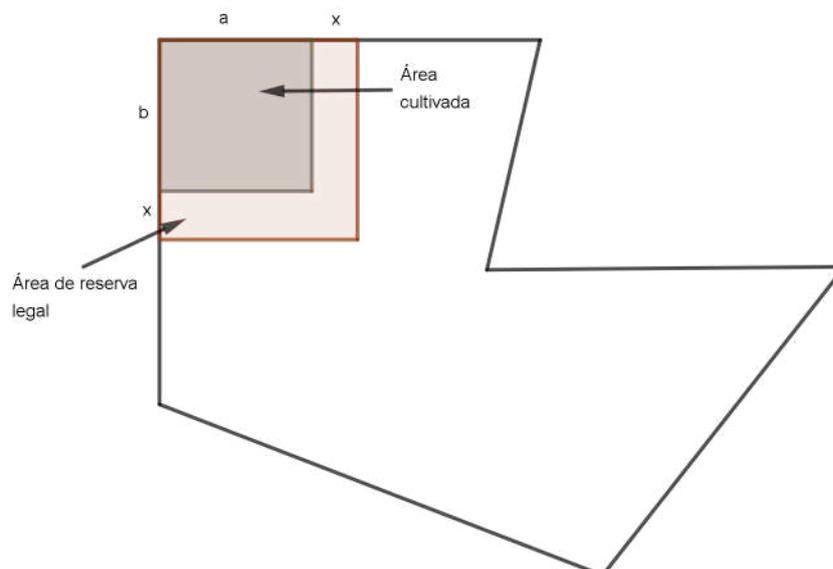


Fonte: Autoria própria.

Usando os dados da Figura A.22, determine a quantidade de granito, em  $m^2$  que será usada para revestir a referida passarela (use  $\pi = 3,14$ ).

**Questão 3:** (Enem 2009) Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na Figura A.23 como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a Figura A.23.

Figura A.23 – Área cultivável  $a \cdot b$  e faixa  $x$  de reserva legal.



Fonte: Adaptado da prova do ENEM - 2009.

De acordo com a Figura A.23, o novo terreno do filho cumpre a lei após acrescentar uma faixa com largura de  $x$  metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal. O dobro da largura  $x$  da faixa é:

a)  $10\% (a+b)^2$ .

b)  $10\% (a \cdot b)^2$ .

c)  $\sqrt{a+b} - (a+b)$ .

d)  $\sqrt{(a+b)^2 a \cdot b} + (a+b)$ .

e)  $\sqrt{(a+b)^2 a \cdot b} - (a+b)$ .

**Orientações para Professores(as):** As Atividades Complementares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da Atividade Principal ou da Atividade Avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

### A.3.6 REFERÊNCIAS – Aula 3

#### Atividade Motivadora:

- GALVÃO, Maria Elisa E. L.; SOUZA, Vera H. G. As Luas de Hipócrates: a longa história de um problema na história da matemática. 2013. Revista do professor de Matemática, n. 82, 2013. Disponível em <<https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/RPM%2082%20-%20Histrias%20e%20histrias%20-%20As%20luas%20Hipcrates.pdf>>. Acesso em 19 de janeiro de 2020.

#### Atividade Principal:

- ASSIS, André Koch Torre; MAGNAGHI, Ceno Pietro. **O método de Arquimedes: análise e tradução comentada**. Montreal: Roy Keys Inc., 2019.
- DALCIN, Mário. As circunferências gêmeas de Arquimedes. 2005. Revista do Professor de Matemática, 2005. Disponível em <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/54/5.htm>>. Acesso em 22 de janeiro de 2020.

#### Sistematização:

- DALCIN, Mário. As circunferências gêmeas de Arquimedes. 2005. Revista do Professor de Matemática, 2005. Disponível em <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/54/5.htm>>. Acesso em 22 de janeiro de 2020.

#### Atividades Complementares:

- ENEM. Exame nacional do ensino médio. 2020. Disponível em <<http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>>. Acesso em: 02 de novembro de 2020.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

## A.4 AULA 4: O TEOREMA DE PICK

Nessa Aula, trataremos de um teorema muito interessante para ser aplicado ao cálculo de área. Trata-se do Teorema de Pick, esse teorema fornece uma fórmula que possibilita determinar a área de um polígono inscrito em uma malha/rede quadricular fazendo a contagem dos pontos da malha que pertencem ao perímetro e a região interior do polígono.

### **Objetivos:**

- Apresentar a fórmula de Pick para determinar áreas de polígonos inscritos em uma malha quadricular.
- Trabalhar com porcentagens e cálculos de estimativas.
- Conhecer e aplicar formas não convencionais de se obter o valor aproximado de uma área.

### **Observações:**

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua e calculadora.
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos dessa Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executada em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula.

### **A.4.1 Descrição das atividades da aula 4**

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada Atividade Principal. Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

#### **A.4.1.1 Atividade Motivadora – Aula 4**

Existe um jeito muito interessante e curioso de calcular a área de alguns polígonos. Esse método de cálculo de áreas de polígonos é feito através da contagem de pontos em uma malha quadricular em que a figura plana está inscrita.

Estamos falando do **Teorema de Pick**, que possibilita calcular áreas de polígonos sobre malhas ou redes quadriculares, fazendo a contagem de pontos de coordenadas inteiras presentes nos lados e no interior do polígono.

### *Sobre a vida e a obra de Pick*

Georg Alexander Pick (1859 – 1942), estudou matemática e física na Universidade de Viena, onde ingressou em 1875 e graduou-se em 1879 qualificado a ensinar ambas as disciplinas. Seus trabalhos em matemática abordaram variados temas, publicou artigos sobre Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria, no entanto, é amplamente conhecido pelo teorema que leva seu nome, o Teorema de Pick, publicado em 1899 na cidade de Praga, na forma de um artigo científico de oito páginas intitulado *Geometrisches zur Zahlenlehre*. De início, esse seu trabalho não recebeu muita atenção. Mas em 1969, após a ser citado pelo matemático H. Steinhaus, em um de seus livros, o Teorema de Pick atraiu muita atenção e admiração por ser simples, elegante e interessante.

Pick tinha descendência judia e sofreu perseguição nazista, era membro da Academia de Ciências e Artes da República Tcheca, porém foi excluído dessa academia e mandado para um campo de concentração onde faleceu aos oitenta e dois anos de idade.

### *A Fórmula de Pick*

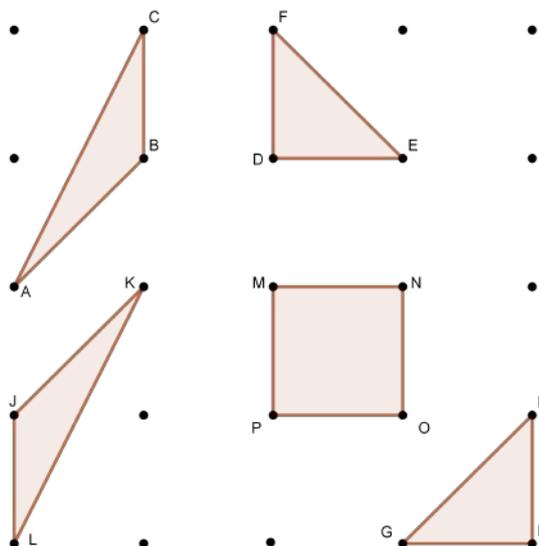
O Teorema de Pick fornece uma fórmula que possibilita obter a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma malha quadricular ou rede quadricular. Essa rede quadricular é análoga ao primeiro quadrante do plano cartesiano. Os pontos que pertencem a essa rede são apenas os pontos do primeiro quadrante que possuem coordenadas inteiras. A área  $\mathcal{S}(P)$  de um polígono sobre a malha quadricular, segundo o Teorema de Pick, é dada pela expressão

$$\mathcal{S}(P) = \frac{B}{2} + I - 1, \quad (\text{A.22})$$

onde  $B$  é o número de pontos da malha situados sobre o perímetro do polígono e  $I$  é o número de pontos da malha existentes no interior do polígono. Nos exemplos a seguir, determinaremos a área de alguns polígonos construídos sobre uma malha quadriculada.

Na Figura A.24 temos um quadrado e quatro triângulos, todos com vértices sobre pontos da rede quadricular. Note que esses polígonos não possuem pontos da rede em seu interior.

Figura A.24 – Quadrado de lado 1 e alguns triângulos fundamentais.



Fonte: Autoria própria.

É trivial assimilar que os triângulos  $DEF$  e  $GHI$  tenham área igual a  $\frac{1}{2}$ , percebemos visualmente que equivalem à metade da área do quadrado  $MNOP$  de lado 1, conforme Figura A.24. Esses triângulos são denominados "triângulos fundamentais". Nessa figura, os triângulos  $ABC$  e  $JKL$  também possuem área  $\frac{1}{2}$  e seus vértices são os únicos pontos pertencentes à rede quadricular, então, também são triângulos fundamentais. Note que tanto o quadrado como os triângulos da Figura A.24 não possuem pontos da rede em seus interiores.

Usando a Fórmula de Pick, vamos determinar as áreas dos triângulos fundamentais  $ABC$  e  $JKL$ . Observe que para o triângulos  $ABC$  e  $JKL$  temos a seguinte contagem de pontos da rede:  $B = 3$  e  $I = 0$ , logo,

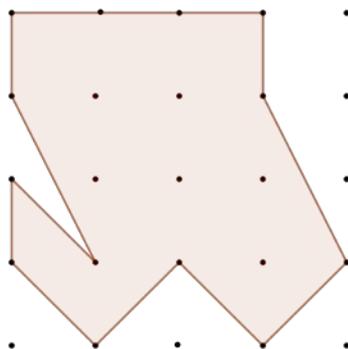
$$S(ABC) = S(FGH) = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2} \quad (\text{A.23})$$

Dessa forma, verificamos para alguns triângulos fundamentais da rede quadricular a área igual a  $\frac{1}{2}$ .

**Orientações para Profesoress(as):** Após apresentar a forma de aplicar o Teorema de Pick para os triângulos da Figura A.24, exponha o **Problema Resolvido** a seguir na lousa para que os estudantes se familiarizem com o uso do Teorema de Pick, ou até, convide um estudante para ir à lousa resolvê-lo. Sugerimos que o tempo para a organização da turma, a leitura dos objetivos da aula e o desenvolvimento da Atividade Motivadora seja de no máximo 15 minutos.

**Problema Resolvido:** Determine pela fórmula de Pick a área do polígono  $P$  apresentado na Figura A.25.

Figura A.25 – Polígono  $P$  sobre a rede quadricular.



Fonte: Autoria própria.

**Resolução:**

Contando os pontos interiores e os pontos sobre o perímetro do polígono, temos:  $B = 13$  e  $I = 6$ . Substituindo na fórmula de Pick, segue que:

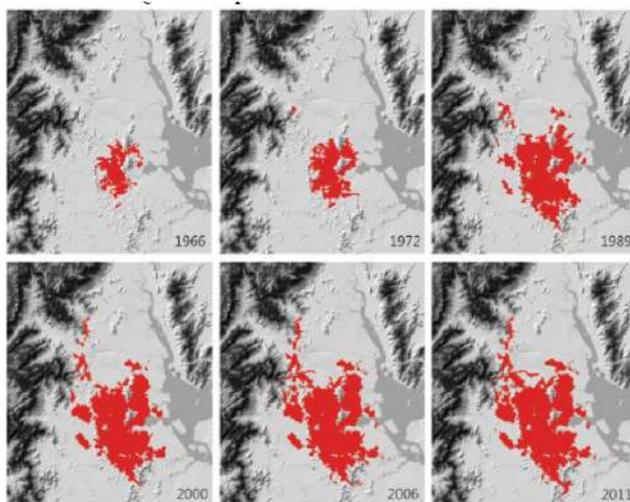
$$\begin{aligned} S(P) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{13}{2} + 6 - 1 \\ &= 6,5 + 5 \\ &= 11,5 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Portanto, o polígono  $P$  possui 11,5 de unidades de área.

## A.4.1.2 Atividade Principal – Aula 4

A Figura A.26 mostra uma sequência de imagens que retratam o crescimento da região urbana (área em vermelho) do município de Joinville entre os anos 1966 e 2011.

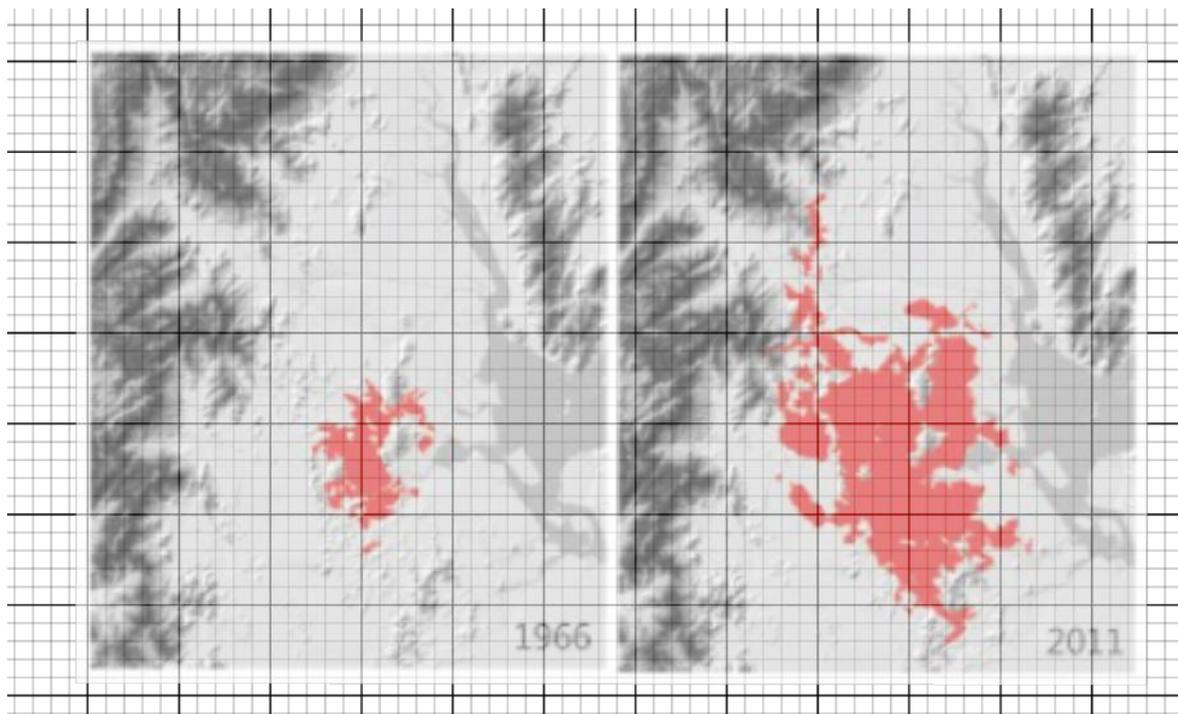
Figura A.26 – Crescimento da região urbana do município de Joinville /SC entre 1966 e 2011.



Fonte: Joinville bairro a bairro, 2015.

**Problema:** Usando a rede quadricular da Figura A.27, encontre uma estimativa para o crescimento percentual da área urbana do município entre 1966 e 2011.

Figura A.27 – Território urbano do município de Joinville /SC em 1966 e em 2011.



Fonte: Joinville bairro a bairro, 2015.

**Orientações para Professores(as):** O propósito dessa atividade é desenvolver a resolução de um problema onde a área de um centro urbano será comparada em dois momentos, pretendendo estabelecer uma aproximação para o percentual de crescimento entre os anos considerados. Peça que os alunos leiam o enunciado da Atividade Principal em silêncio e pensem, por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, libere para discutir as idéias com seus companheiros de equipe e terminar a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos que essa atividade seja trabalhada em um tempo de 25 minutos.

#### A.4.2 Painel de Soluções – Aula 4

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

#### A.4.3 Sistematização – Aula 4

O Teorema de Pick é interessante pois permite calcular a área de um polígono simples a partir da contagem de pontos da malha quadricular formada no plano cartesiano. É de fato surpreendente que seja possível substituir o processo habitual de cálculo de área, que envolve medições de grandezas contínuas por uma simples contagem de quantidades discretas. É claro que esse caso deve respeitar algumas condições, no Teorema de Pick, por exemplo, o polígono deve estar sobre uma rede quadricular.

Na demonstração a seguir usaremos um **caso particular**, onde o polígono em questão é formado por lados cujos pontos da malha sobre eles são exclusivamente os vértices.

**Proposição A.4.** *A área  $S(P)$  de um polígono inscrito em uma rede quadricular cujos únicos pontos do perímetro pertencentes a essa rede quadricular são seus vértices é*

$$S(P) = \frac{B}{2} + I - 1, \quad (\text{A.25})$$

onde  $B$  é o número de pontos da rede sobre o perímetro do polígono e  $I$  o número de pontos da rede interiores ao polígono.

*Demonstração.* A Figura A.28 representa um polígono  $ABCDE$ , cujos únicos pontos do perímetro pertencentes à malha quadricular são seus vértices.

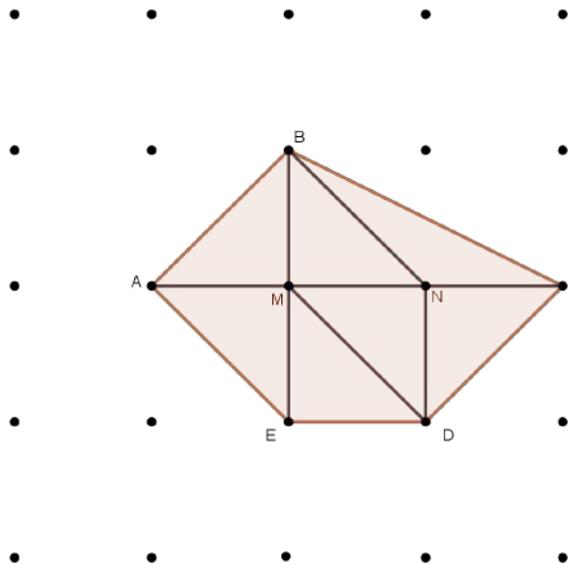
O caso considerado é um **caso particular** onde o número de pontos da malha sobre o perímetro,  $B = 5$ , é igual ao número de vértices que é igual ao número de lados do referido polígono.

Note que há diferença entre as letras  $S$  e  $S$ , a primeira é usada em nosso texto para denotar a área de uma região plana e a segunda, com índice  $i$ , isto é,  $S_i$  representará a soma dos ângulos internos de um polígono, com  $i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ .

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo, em graus, é dada por  $S_i = 180^\circ \cdot (n - 2)$ , onde  $n$  é o número de lados desse polígono. Para nosso **caso particular**, onde  $n = B$ , temos:

$$S_i = 180^\circ \cdot (B - 2). \quad (\text{A.26})$$

Figura A.28 – Polígono  $ABCDE$  sobre uma malha quadricular.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura A.28 observamos que o polígono  $ABCDE$  está dividido nos seguintes triângulos fundamentais:  $\triangle ABM$ ,  $\triangle BMN$ ,  $\triangle BNC$ ,  $\triangle CDN$ ,  $\triangle DNM$ ,  $\triangle DME$  e  $\triangle EMA$ . O número de triângulos fundamentais será representado por  $T$  e cada um deles tem área igual a  $\frac{1}{2}$ .

No entorno dos pontos  $M$  e  $N$  existem ângulos de  $360^\circ$  em cada um desses pontos. Representaremos por  $I$  a quantidade desses ângulos. Note que essa quantidade corresponde ao número de pontos da malha internos ao polígono. Dessa forma a soma dos ângulos ao redor de  $M$  e  $N$ , é

$$360^\circ \cdot I \quad (\text{A.27})$$

Por outro lado, a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais é  $180^\circ \cdot T$ . Dessa forma,

$$180^\circ \cdot T = 360^\circ I + 180^\circ \cdot (B - 2) \quad (\text{A.28})$$

Dividindo ambos os membros da Equação (A.28) por  $180^\circ$ , temos:

$$T = 2I + B - 2. \quad (\text{A.29})$$

Levando em conta que cada triângulo fundamental tem área igual a  $\frac{1}{2}$  e que o polígono em questão é decomposto em  $T$  triângulos fundamentais podemos dizer que a área do polígono é

$$S(P) = \frac{1}{2} \cdot T. \quad (\text{A.30})$$

Substituindo a Equação (A.29) na Equação (A.30), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(P) &= \frac{1}{2} \cdot T \\ \mathcal{S}(P) &= \frac{1}{2} \cdot (2I + B - 2) \\ \mathcal{S}(P) &= I + \frac{B}{2} - 1. \end{aligned} \tag{A.31}$$

Portanto, para esse **caso particular**, a área do polígono  $P$  é

$$\mathcal{S}(P) = \frac{B}{2} + I - 1, \tag{A.32}$$

onde  $B$  é o número de pontos da rede quadricular sobre os lados de  $P$  e  $I$  número de pontos da rede quadricular internos a  $P$ .  $\square$

Embora a Equação (A.32) tenha sido demonstrada para um caso particular, ela serve para o caso geral, ou seja, podemos usá-la para obter a área de qualquer polígono inscrito em uma rede quadricular. Uma prova completa para o caso geral do Teorema de Pick pode ser encontrada de forma detalhada em Lima (1991, pp. 103-113), ou em ANDRÉ (2018, pp.90-96), nesse último, há uma interessante prova usando convexidade.

**Orientações para Professores(as):** O propósito desse momento da Aula é mostrar a dedução do Teorema de Pick para um caso especial, onde o polígono em questão tem somente os vértices do perímetro pertencentes a rede quadricular. Essa demonstração deve ser desenvolvida na lousa pelo professor. Para esse momento, sugerimos um tempo de 20 minutos.

**Fechamento da Aula 4:** Nessa aula, conhecemos o Teorema de Pick e o aplicamos no cálculo de área. O teorema é associado a uma fórmula que possibilita determinar a área de um polígono inscrito em uma rede quadricular plana. É interessante percebermos que a área é uma grandeza contínua, porém o Teorema de Pick possibilita determinar uma área através da contagem de uma quantidade discreta de pontos da rede quadricular a qual o polígono está inscrito. Em nossa atividade, percebemos que esse teorema tem uma excelente aplicação na cartografia, em casos onde queremos determinar valores relativos sobre mapas, mesmo desconhecendo a escala em que o mapa foi desenhado.

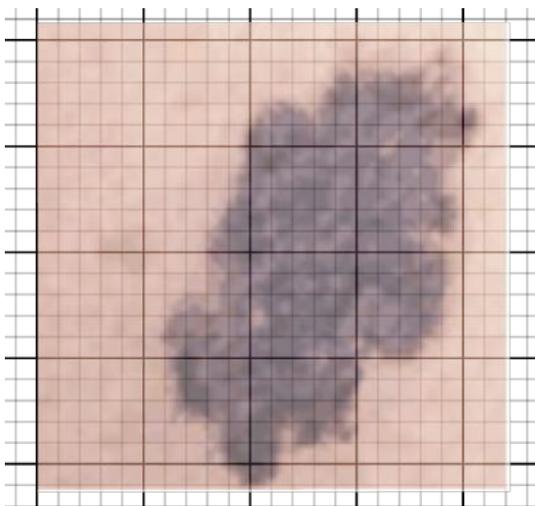
#### A.4.4 Atividade Avaliativa – Aula 4

**Avaliação 4.** Resolva o seguinte problema:

Segundo o Instituto Nacional do Câncer (INCA), o câncer de pele responde por 33% de todos os diagnósticos desta doença no Brasil, registrando, a cada ano, cerca de 180 mil novos casos desse tipo de tumor. A doença é provocada pelo crescimento anormal e descontrolado das células que compõem a pele. Essas células se dispõem formando camadas e, de acordo com as que forem afetadas, são definidos os diferentes tipos de câncer. Os mais comuns são os carcinomas e o melanomas, esse último, o melanoma é o tipo mais agressivo de câncer de pele.

Na Figura A.29 temos a imagem de um melanoma (a mancha escura sobre a pele) em uma malha quadriculada com quadrados de lado  $0,4 \text{ mm}$ . Determine em  $\text{mm}^2$  a área desse tumor.

Figura A.29 – Melanoma: tipo maligno de câncer de pele.



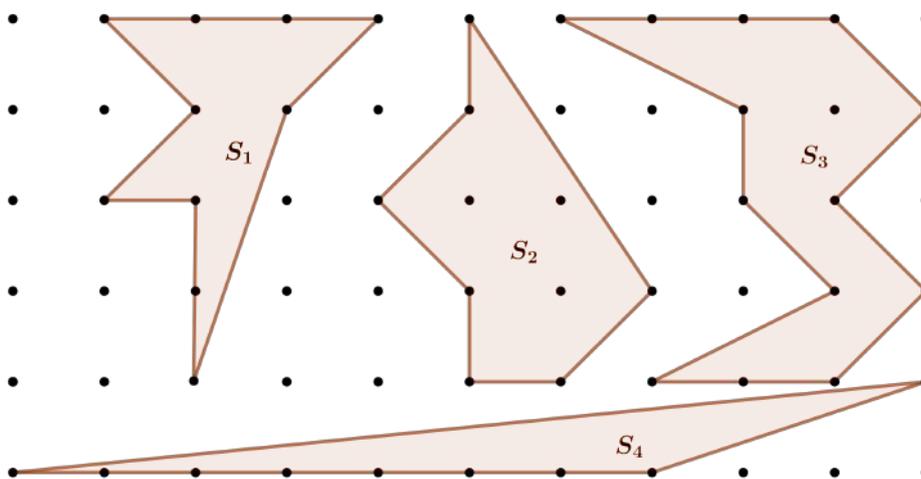
Fonte: <https://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/doencas-e-problemas/cancer-da-pele/64/>

**Orientações para Professores(as):** O propósito dessa atividade é avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado nas atividades da Aula. Nessa etapa, os estudantes resolverão individualmente um problema similar aos propostos anteriormente, aplicando o Teorema de Pick na resolução. Sugerimos para esse momento um tempo de 10 minutos para a resolução e 5 minutos para a correção na lousa. Caso julgue necessário dar mais tempo, faça a correção da Atividade Avaliativa na aula seguinte.

#### A.4.5 Atividades Complementares – Aula 4

**Questão 1:** Aplique o Teorema de Pick para determinar as áreas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  dos polígonos representadas na Figura A.30.

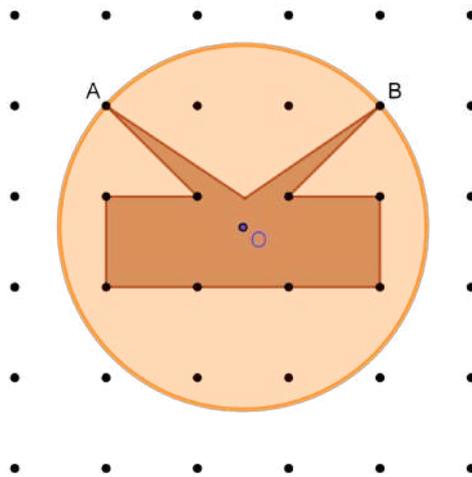
Figura A.30 – Polígonos sobre uma rede quadricular.



Fonte: Autoria própria.

**Questão 2:** A empresa de eletrônicos e telecomunicações *L.b&R.a Corporation* encomendou ao seu departamento de *marketing* um logotipo para inserir na sua nova linha de *smart TV*, de tal forma que indicasse que esse aparelho se conecta com a rede *world wide web* (*www*) e é possível usufruir de todos os serviços oferecidos na *web* através dessa televisão. A Figura A.31 representa a proposta de logotipo apresentada para a *CEO* (*Chief Executive Officer*) da empresa.

Figura A.31 – Logotipo da empresa fictícia *L.b&R.a Corporation*.



Fonte: Autoria própria.

Os *designers* explicaram à diretoria que o círculo laranja de centro *O* de raio igual a  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  *cm* representa a região do espaço onde orbitam os satélites. Os pontos *A* e *B* representam as posições desses satélites, que estão transmitindo o sinal que chega na *smart TV*, representada pela parte retangular do polígono marrom. Considerando que a distância entre dois pontos consecutivos da malha, tanto verticais quanto horizontais é 1 *cm*, determine em  $\text{cm}^2$  a área marrom e a laranja desse logotipo.

**Questão 3:** O geoprocessamento é um procedimento para estudo da superfície terrestre que usa imagens de satélite e fotografias aéreas para a produção cartográfica, para a agrimensura e várias outras aplicações onde a necessidade de informações detalhadas sobre uma superfície se fazem necessárias.

Essa técnica de estudos de superfície e cálculo de área é produto de inovações científicas e tecnológicas relacionadas a satélites, aviação civil e militar, drones ou VANT's (veículo aéreo não tripulado), matemática e computação científica, que permitem a obtenção de imagens, o processamento de dados e obtenção de resultados sem a necessidade de executar medições *in loco*, logo, proporciona uma melhor precisão das representações gráficas de superfícies terrestres bem como de medidas das grandezas físicas envolvidas.

Os *softwares* utilizados no processamento dos dados são capazes de detectar características que não podem ser vistas na frequência de onda da luz visível, são capazes de produzir imagens no espectro infravermelho, por exemplo. Dessa forma, é possível obter dados muito refinados sobre o relevo, a hidrografia, a altitude, a ocupação urbana, a vegetação, dentre outros.

A imagem da Figura A.32 obtida por geoprocessamento, fotografada por VANT, destaca o perímetro de uma fazenda na região centro-oeste do estado de Santa Catarina, no município de Fraiburgo. O proprietário deseja reflorestar essa área com *pinus elliottii* para corte, que

fornece celulose de fibra longa, matéria prima para os mais variados tipos de papel de alta qualidade. Porém, a legislação ambiental brasileira prevê para esse bioma (campos gerais) que uma propriedade rural deve dispor de 20% de sua área como Reserva Legal, conforme disposto na Lei 12651, de 25 de maio de 2012.

Figura A.32 – Fotografia aérea de uma fazenda em Fraiburgo, SC.



Fonte: Imagem de propriedade do autor.

Conversando com o engenheiro florestal responsável pelo trabalho, o proprietário indicou na imagem que desejaria que a área mais escura, à direita do segmento  $AB$  fosse utilizada para a Reserva Legal dessa propriedade. A região indicada pelo fazendeiro corresponde a 20% da propriedade, conforme recomendado na Lei?

**Orientações para Professores(as):** As Atividades Complementares devem ser propostas como tarefas ou aplicadas a estudantes que desenvolverem muito rápido a resolução da atividade principal ou da atividade avaliativa. Porém, destacamos que é de suma importância a aplicação e a correção dessas atividades.

#### A.4.6 REFERÊNCIAS – Aula 4

##### Atividade Motivadora:

- HERMES, J.D.V. O Teorema de Pick. 2015. Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p.203–213. Disponível em <<http://oaji.net/articles/2017/1602-1486644173.pdf>>. Acesso em 12 de maio de 2020.

##### Atividade principal:

- Joinville Bairro a Bairro. 2020. Prefeitura Municipal de Joinville. Disponível em <<https://www.joinville.sc.gov.br/publicacoes/joinville-bairro-a-bairro/>>. Acesso em 7 de outubro de 2020.

##### Sistematização:

- LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Rio de Janeiro: GRAFITEX Comunicação visual, 1991.

##### Atividade Avaliativa

- Sociedade Brasileira de Dermatologia. O que é câncer de pele? 2017. Disponível em <<https://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/doencas-e-problemas/cancer-da-pele/64/>> Acesso em 23 de outubro de 2020.

##### Atividades Complementares

- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE. Tutorial de Geoprocessamento. Disponível em <[http://www.dpi.inpe.br/spring/portugues/tutorial/introducao\\_geo.html](http://www.dpi.inpe.br/spring/portugues/tutorial/introducao_geo.html)> Acesso em 14 de novembro de 2020.
- Lei n. 12.651 de 25 de maio de 2012. Código Florestal Brasileiro. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2011-2014/2012/lei/112651.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2012/lei/112651.htm)>. Acesso em: 14 de novembro de 2020.

## A.5 AULA 5: CÁLCULO DE ÁREA PELA SOMA DE RIEMANN

O tema que trataremos nessa aula, atualmente não faz parte do currículo da Educação Básica e dessa forma, acreditamos que o desenvolvimento de cada momento será desafiador e envolvente. Nessa Aula, trataremos do cálculo de área através da Soma de Riemann. Essa técnica de calcular área permite obter com exatidão a área sob o gráfico de uma função. A motivação inicial dessa técnica consiste em particionar a área que se deseja calcular em finíssimos retângulos, e efetuar a soma das áreas de todos os retângulos obtidos, que corresponderá ao valor da área desejada. Para essa aula, estabelecemos como sugestão os objetivos a seguir.

### **Objetivos:**

- Conhecer o "Princípio dos Indivisíveis" de Bonaventura Cavalieri.
- Estabelecer o primeiro contato com o estudo dos limites.
- Determinar áreas de figuras planas utilizando a Soma de Riemann.
- Propor uma noção de integral através da Soma de Riemann.
- Aplicar expressões algébricas de somas de potências de naturais para obter as áreas procuradas.

### **Observações:**

- Tempo estimado: 2 horas/aula – 90 min.
- Materiais solicitados: régua e calculadora;
- Solicite o material a ser usado com antecedência e inicie a aula lendo para a turma os objetivos dessa Aula. O tempo para a organização da classe, apresentação do tema da aula e leitura dos objetivos é contado junto com o tempo estabelecido para o desenvolvimento da Atividade Motivadora.
- Essa Aula é elaborada para ser executado em duas aulas seguidas, conhecidas como aula-faixa. Caso o professor queira usar apenas uma aula, ou mais aulas, basta fazer a adequação proporcional do tempo sugerido para cada momento da aula.

### **A.5.1 Descrição das Atividades da aula 5**

As atividades a seguir devem ser aplicadas conforme a descrição feita na Introdução desse Caderno de Atividades. Planejamos cada aula dividida em momentos que possibilitam a melhor interpretação e possível resolução de uma atividade denominada Atividade Principal. Sua resolução possibilita aprender o conceito principal da aula através de uma única atividade de nível desafiador, envolvendo algum tópico da história, e sua correção deve ser feita através da participação dos alunos expondo para a turma suas resoluções.

## A.5.1.1 Atividade Motivadora

Um dos maiores desafios em cada uma das épocas da história da matemática, era encontrar uma técnica eficaz para se calcular áreas de figuras planas curvas. Essas práticas remontam desde o Princípio da Exaustão, usado pelos gregos, e utilizado por Arquimedes para demonstrar sua famosa quadratura da parábola, cerca de 300 anos antes de Cristo.

Entre os séculos XVI e XVII da nossa era, o problema ainda estava em aberto, pois o método da exaustão não fornecia um caminho direto para obter área. Mas a partir do trabalho de Bonaventura Cavalieri (1598 -1647), ao estudar métodos de obtenção de áreas e volumes de figuras curvas, usando o "Princípio dos Indivisíveis", começou-se a obter êxito nesse tipo de cálculo. Esse princípio se fundamentava em duas ideias básicas:

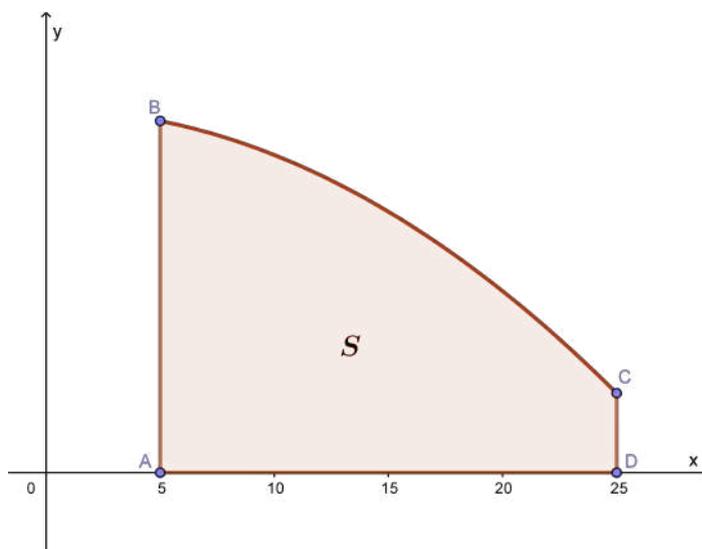
- i) Uma região plana pode ser considerada como um conjunto infinito de segmentos de reta paralelos, postos lado a lado.
- ii) Um sólido pode ser considerado um conjunto infinito de regiões planas paralelas, postos um sobre outro.

Como exemplo, podemos pensar em uma esteira de praia, feita com finíssimas tiras de bambu, cada tira representa um segmento de reta e o conjunto todo, a esteira, é o plano obtido. No caso de um sólido, podemos pensar em um baralho, cada carta é um plano, e quando organizamos umas sobre as outras temos um prisma retangular ou paralelepípedo.

Usando esse raciocínio, Cavalieri podia calcular áreas e volumes que seus antecessores tiveram muita dificuldade em calcular. Trabalhos semelhantes ao de Cavalieri foram feitos por Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662), além de muitos outros matemáticos europeus, mas nessa época (entre os séculos XVI e XVII), ainda não existia um método geral para a obtenção de áreas e volumes.

Como exemplo, observe a Figura A.33, onde existe uma região  $S$ , cuja área será denotada como  $\mathcal{S}$ , e o arco  $BC$  representa um segmento da função  $f(x) = -\frac{x^2}{50} + 16$  tal que  $5 \leq x \leq 25$ . Perceba que há diferença entre os símbolos  $S$  e  $\mathcal{S}$ .

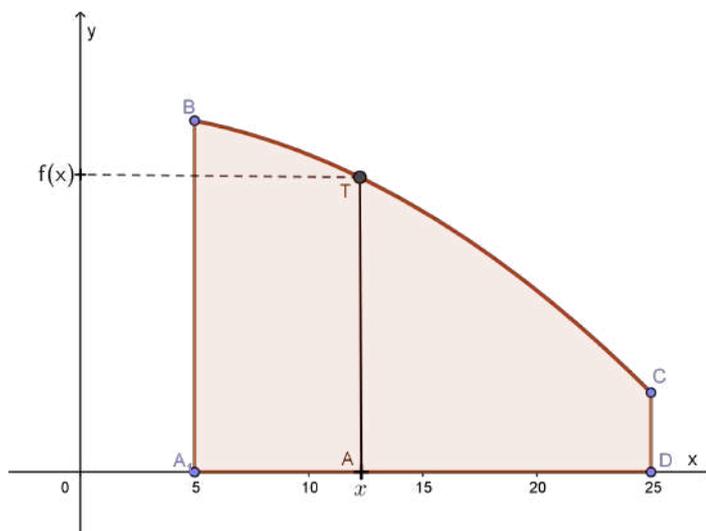
Figura A.33 – Região  $S$  sob o gráfico de uma função.



Fonte: Autoria própria.

Uma estratégia para calcular o valor dessa área, é através da justaposição dos infinitos segmentos de reta de comprimentos iguais aos valores numéricos da função, medidos perpendicularmente a partir do eixo  $Ox$  para cada um dos infinitos valores de  $x$  do intervalo  $5 \leq x \leq 25$  (observe a Figura A.34).

Figura A.34 – Comprimento do segmento  $AT$  da origem até  $f(x)$ .



Fonte: Autoria própria.

Pensar nos infinitos segmentos de reta que lado a lado formam a área  $S$  é relativamente fácil, lembre-se do exemplo da esteira de praia, mas temos aí um grande desafio quando queremos traduzir matematicamente essa ideia. "É possível listarmos os infinitos valores de  $x$  do intervalo  $5 \leq x \leq 25$  e aplicá-los um a um na função?"

A resposta para a pergunta é **NÃO**. Também não podemos somar as larguras desses segmentos, pois um segmento de reta não tem o atributo da largura e por se tratar de um ente geométrico unidimensional, tem apenas comprimento.

Contorna-se o problema usando retângulos para particionar a região  $S$ , tão finos quanto desejarmos e esses, já sabemos, possuem altura e largura.

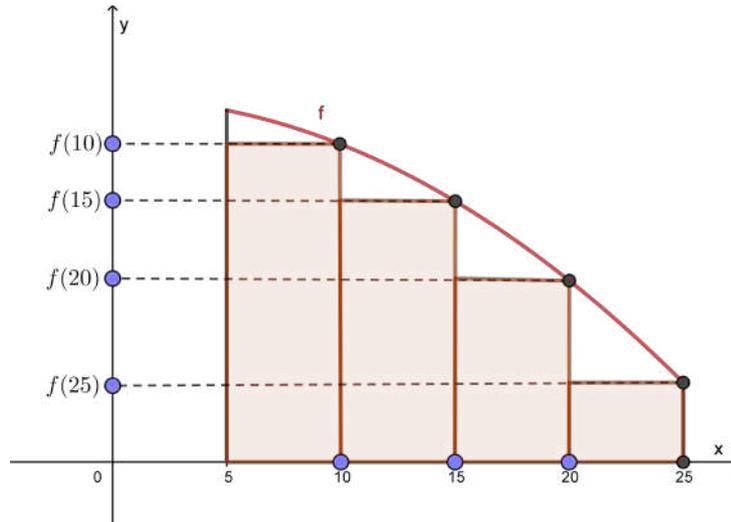
**Orientações para Professores(as):** O propósito do problema a seguir é apresentar na lousa a obtenção de um valor aproximado para uma área sob o gráfico de uma função, através da Soma de Riemann Inferior, usando partição de 5 retângulos. A organização da turma, a leitura dos objetivos e a resolução dessa atividade pelo professor deve ser realizada em um tempo sugerido de 15 minutos.

**Problema:** Iniciaremos construindo um modelo bem simples para começar a entender um pouco sobre a técnica mais avançada para calcular área nesse tipo de figura. Pretendemos inclusive, que até o final dessa aula o estudante, conheça e aplique em um exercício essa técnica.

Mesmo em sua forma mais singela, a técnica consiste no método geral para calcular área entre o gráfico da função e o eixo  $Ox$ , delimitadas lateralmente por retas paralelas ao eixo  $Oy$ , que provavelmente tirou muitas noites de sono dos matemáticos europeus dos séculos XV e XVI, anteriores a Cavalieri, Pascal e Fermat.

Particionaremos a região  $S$  em retângulos de 5 *cm* de base, conforme a Figura A.35, pois para qualquer número finito de retângulos o procedimento apresentado será o mesmo. Observamos na própria Figura A.35 que obteremos uma aproximação do valor real da área e note que quanto maior o número de retângulos que particionarmos a região  $S$ , melhor será a aproximação obtida.

Figura A.35 – Região S dividida em retângulos de base 5 cm.



Fonte: Autoria própria.

Podemos observar pela Figura A.35, que nossa divisão em 4 retângulos de base igual a 5 cm fornece uma aproximação não muito razoável da área.

O valor dessa aproximação é dada pela soma das áreas dos 4 retângulos que particionam a Figura A.35. Da esquerda para a direita, vamos calcular a área de cada um e somar os valores encontrados, acompanhe:

- Retângulo  $R_1$  de base 5 e altura  $f(10)$ , sua área é dada por:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 5 \cdot f(10) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{10^2}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{100}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot (-2 + 16) \\
 &= 5 \cdot 14 \\
 &= 70 \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

- Retângulo  $R_2$  de base 5 e altura  $f(15)$ , sua área é dada por:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= 5 \cdot f(15) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{15^2}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{225}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot (-4,5 + 16) \\
 &= 5 \cdot 11,5 \\
 &= 57,5 \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

- Retângulo  $R_3$  de base 5 cm e altura  $f(20)$ , sua área é dada por:

$$\begin{aligned}
 R_3 &= 5 \cdot f(20) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{20^2}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{400}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot (-8 + 16) \\
 &= 5 \cdot 8 \\
 &= 40 \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

- Retângulo  $R_4$  de base 5 cm e altura  $f(25)$ , sua área é dada por:

$$\begin{aligned}
 R_4 &= 5 \cdot f(25) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{25^2}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot \left( -\frac{625}{50} + 16 \right) \\
 &= 5 \cdot (-12,5 + 16) \\
 &= 5 \cdot 3,5 \\
 &= 17,5 \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

Somando os valores das áreas dos retângulos,

$$\begin{aligned}
 R_1 + R_2 + R_3 + R_4 &= 70 + 57,5 + 40 + 17,5 \\
 &= 185 \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

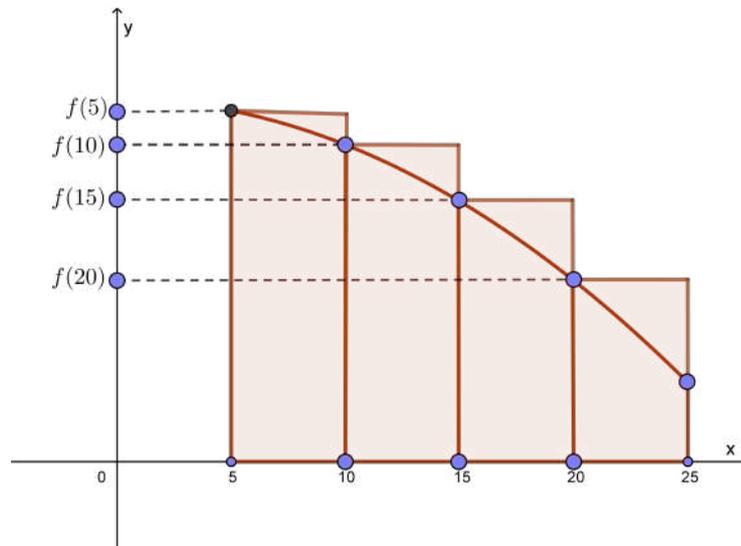
O valor aproximado da área da região **S** da Figura A.33 é  $185 \text{ cm}^2$ , mas não sabemos o quão aproximado é esse valor. Na atividade a seguir, veremos como encontrar uma aproximação melhor para o valor dessa área. Atualmente essa partição em retângulos e posterior soma das suas áreas é chamado de *Soma de Riemann* pois foi desenvolvida pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

#### A.5.1.2 Atividade Principal

**Orientações para Professores(as):** Peçam que os alunos leiam o enunciado da Atividade Principal em silêncio e pensem por alguns minutos (sugerimos 3 a 5 minutos) em uma estratégia para a resolução. Após passar esse tempo, liberem para discutirem as idéias com seus companheiros de equipe e terminarem a resolução. Essa primeira parte de leitura e início da resolução de forma individual faz com que cada um tenha suas próprias idéias para poder discutir com seu companheiro de equipe, evitando que alguns alunos participem de forma passiva na resolução. Enquanto os alunos resolvem a atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução de cada equipe. Caso haja dúvidas ou dificuldades durante a resolução, não forneça uma resposta pronta, busque fazer questionamentos que o ajudem a pensar e encontrar sozinho a saída para a dúvida. Sugerimos que esse momento seja realizado em 25 minutos.

Para melhorar nossa noção sobre o valor da área da região **S** da Figura A.33, observe a Figura A.36, onde os retângulos de base 5 cm circunscrevem a região **S**. Note que no caso anterior, na Figura A.35 os retângulos eram inscritos em **S**.

Figura A.36 – Região **S** dividida em retângulos de base 5 cm.

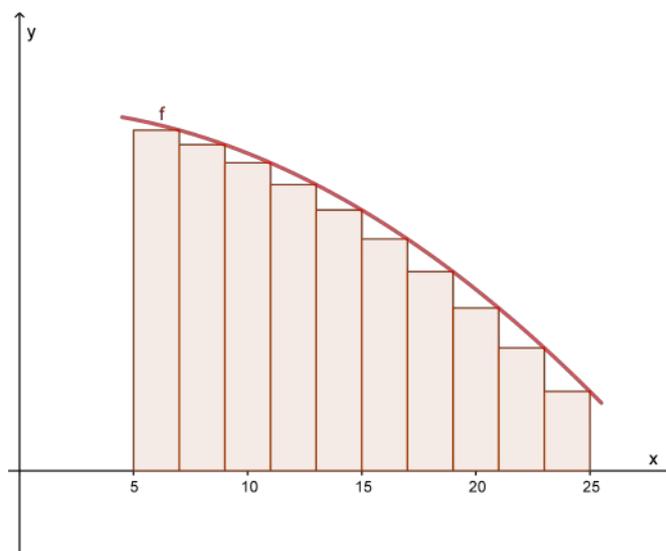


Fonte: Autoria própria.

**Problema 1:** Nessas condições, determine a soma das áreas dos retângulos da Figura A.36 e complete a frase a seguir: A área **S** da Figura A.36 é um valor entre  $185 \text{ cm}^2$  e .....  $\text{cm}^2$ .

**Problema 2:** Agora que já conhecemos um intervalo onde se situa o valor da área da figura, procure uma melhor aproximação para esse valor, conforme as divisões apresentadas na Figura A.37 e na Figura A.38.

Figura A.37 – Soma de Riemann Inferior para a área da região **S**.

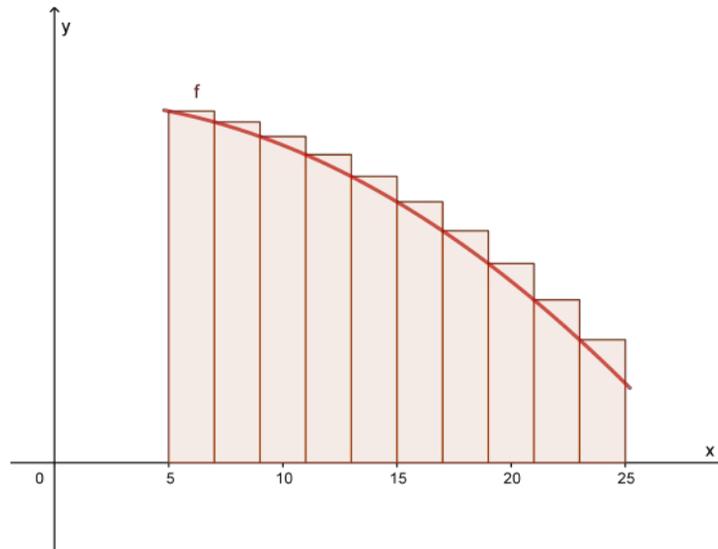


Fonte: Autoria própria.

Observe que na Figura A.37, os retângulos estão no interior da região que queremos obter a área, chamamos a soma das áreas desses retângulos de *Soma de Riemann Inferior*. Já a Figura

A.38, mostra os retângulos circunscritos na região **S** e para esse caso obteremos a *Soma de Riemann Superior*.

Figura A.38 – Soma de Riemann Superior para a área da região **S**.



Fonte: Autoria própria.

Após determinar as duas somas, compare a diferença entre os valores e responda:

- Em qual intervalo se situa a área procurada?
- Observando os gráficos das Figuras A.37 e A.38, o que diferencia a soma inferior da soma superior?
- Qual será o comportamento dessa diferença quando aumentarmos o número de retângulos?
- Quantos retângulos devemos usar para que a diferença entre os valores obtidos na soma superior e na soma inferior seja igual a zero? E nesse caso, ainda encontraremos apenas um valor aproximado para a área? Justifique.

**Orientações para Professores(as):** O propósito dessa atividade é fazer a Soma de Riemann superior, para a mesma área resolvida na atividade motivadora. A seguir, fazer a Soma de Riemann superior e inferior, ainda para a mesma área, porém usando partições de dez retângulos. E por fim os estudantes devem comparar as diferenças dos valores entre as somas com 5 retângulos e entre as somas com 10 retângulos. Nesse momento os estudantes irão construir, aplicar e discutir as estratégias para a resolução da atividade em duplas ou trios, em um tempo sugerido de 25 minutos.

### A.5.2 Painel de Soluções – Aula 5

Antes de passar para o Momento de Sistematização o professor deve promover o Painel de Soluções. Nesse momento da aula os alunos vão discutir as estratégias utilizadas na solução. Os estudantes devem ser convidados a ir a lousa para expor e comparar os resultados obtidos com os colegas, procurando selecionar as melhores estratégias para a resolução. Para essa etapa, estima-se um tempo de 15 minutos.

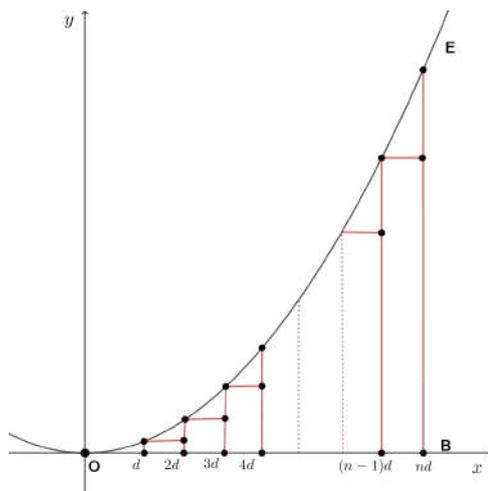
### A.5.3 Sistematização – Aula 5

O processo que usamos para determinar a área da região **S** da Figura A.33, atualmente é denominado *Soma de Riemann*, e fizemos seu uso de forma bem singela, mas trata-se de um dos temas de estudo mais avançados da matemática. Nesse momento da aula, apresentaremos um exemplo atribuído a Pierre de Fermat para obtenção da área sob o gráfico da função  $f(x) = kx^2$ . Pretende-se que os professores(as) executem esse momento em 20 minutos.

Muito antes de Riemann, Cavalieri, sucedido por Blaise Pascal e Pierre de Fermat foram os precursores dessa técnica de obtenção do valor numérico de uma área pela decomposição em finíssimos retângulos. Mostraremos como aplicar essa técnica particionando a área em questão em  $n$  retângulos, para um número  $n$  tão grande quanto se queira, proposto por Fermat, em meados do século XVII.

**Exemplo A.3.** Dada a parábola  $y = kx^2$  da Figura A.39, exaurindo-a em retângulos de lados paralelos ao eixo  $Oy$  e bases no eixo  $Ox$  tal que o vértice da parábola esteja na origem do sistema de coordenadas e seu eixo de simetria seja o próprio eixo  $Oy$ , encontre a área do setor parabólico entre o eixo  $Ox$ , a parábola e a reta vertical que passa por  $E$  e corta  $Ox$  no ponto  $B$ .

Figura A.39 – Retângulos decompondo a área sob uma curva.



Fonte: Adaptado de Eves, 2011, p. 435

#### Resolução.

No segmento  $OB$  marcamos  $n$  pontos equidistantes e seja  $d$  o comprimento dos subintervalos da partição, isto é,  $d = \frac{OB}{n}$ . Construindo retângulos como mostrado na Figura A.39, suas bases tem o comprimento fixo  $d$  e suas alturas, aplicando os valores  $n \cdot d$  das bases na equação da parábola serão, respectivamente,

$$d^2, 4d^2, 9d^2, \dots, (n-1)^2d^2, n^2d^2. \quad (\text{A.38})$$

Pelo "Princípio dos Indivisíveis" de Cavalieri a área de uma figura seria a soma de um número indefinido de segmentos de retas paralelas, ao tornarmos esses retângulos tão finos quanto possíveis, poderíamos obter a área do setor parabólico em questão fazendo a soma da área desse número indefinido de finíssimos retângulos aos quais o setor foi decomposto.

Como as bases de todos esses retângulos medem  $d$ , multiplicando por  $d$  cada uma das alturas da sequência (A.38) temos as áreas dos  $n$  retângulos e somando todas essas áreas, temos:

$$S = d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \dots + n^2d^3 = d^3 (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \quad (\text{A.39})$$

Fermat e Pascal já haviam trabalhado na soma das  $m$ -ésimas potências dos  $n$  primeiros números naturais, logo, a soma dos termos entre parênteses do segundo membro da Equação (A.39) já era fato conhecido, sendo

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \quad (\text{A.40})$$

mas  $d = \frac{OB}{n}$ , logo,

$$d^3 \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) = OB^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right). \quad (\text{A.41})$$

Note que quanto maior for o número de retângulos usados na soma, em (A.41) os termos  $\frac{1}{2n}$  e  $\frac{1}{6n^2}$  podem ser desprezados, e a soma do setor parabólico OBE da Figura A.39 será

$$S = \frac{OB^3}{3}. \quad (\text{A.42})$$

Vimos pelo exemplo anterior que a Soma de Riemann permite obter um valor ou até uma expressão analítica para essa área sob o gráfico de uma função. Mas se nos perguntarmos o seguinte: "O Exemplo A.3 nos deu uma expressão que permite obter o valor de uma área à direita da origem do eixo  $Ox$ . E se quisermos que a área sob a função esteja limitada à esquerda por uma reta vertical de abscissa negativa?"

Sabemos desde sempre, que a área é uma grandeza positiva, dessa forma, a fundamentação do conceito de Integral precisou se distanciar dessa aplicação na obtenção de área. E esse foi um dos motivos que fez Riemann definir a Integral como o limite da soma de uma série, como por exemplo a soma (A.39).

Por maior que queiramos tornar o valor de  $n$ , a soma das áreas desses  $n$  retângulos nunca vai ser maior que o valor real da área em questão. Em outras palavras essa soma se aproxima de um valor limite a medida que  $n$  cresce acima de qualquer número dado.

A esse limite, chamamos de *integral da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$* , onde  $a$  e  $b$  são as abscissas à esquerda e à direita, respectivamente, das retas verticais que delimitam a área e representamos por

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (\text{A.43})$$

Por fim, devemos interpretar a Integral como o Limite da Soma de Riemann quando  $n$  tende ao infinito.

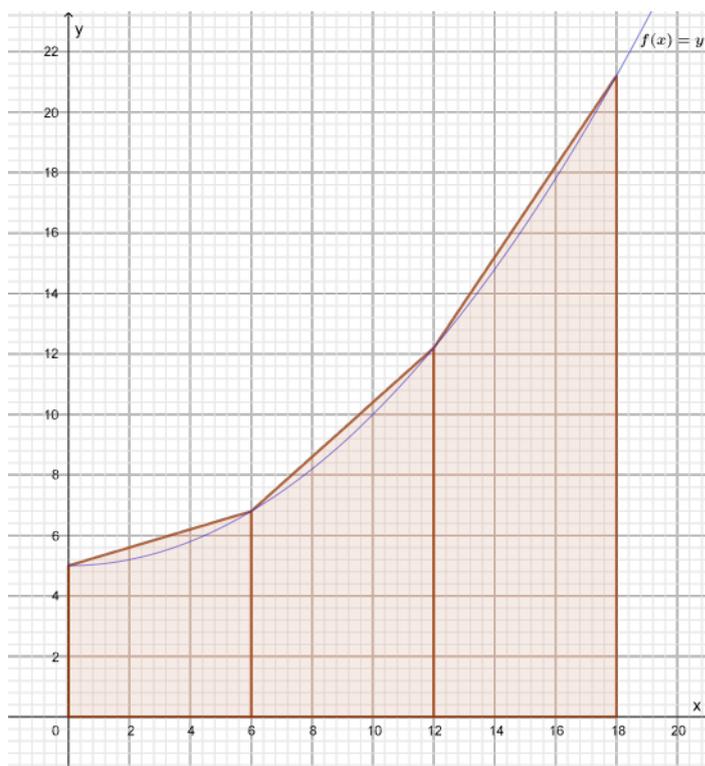
**Fechamento da Aula 5:** Nessa aula os estudantes tiveram contato com as primeiras noções de integral através das Somas de Riemann. A Soma de Riemann consiste em um procedimento que possibilita calcular a área sob o gráfico de uma função, através da partição dessa área em  $n$  retângulos, tão finos quanto se queira. O limite da soma das áreas desses  $n$  retângulos, para um  $n$  maior que qualquer outro valor dado, é a medida da área procurada.

### A.5.4 Atividade Avaliativa – Aula 5

**Avaliação 5.** Resolva o seguinte problema:

Determine uma aproximação para a área decomposta em trapézios, sob o gráfico da função  $f(x) = \frac{x^2}{20} + 5$ , delimitada pela função, pelo eixo do  $x$  e pelas retas  $x = 0$  e  $x = 18$ , conforme representa a Figura A.40. A área do trapézio é dada por  $S = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ , onde  $B$  é a base maior,  $b$  é a base menor e  $h$  é a altura.

Figura A.40 – Área sob o gráfico de uma função repartida em trapézios.



Fonte: Autoria própria.

**Orientações para Professores(as):** Essa atividade tem o propósito de avaliar o processo de aprendizagem em relação ao que foi trabalhado. Nesse momento, os estudantes resolverão individualmente um problema similar aos propostos anteriormente. Sugerimos que reservem 10 minutos para os estudantes resolverem e corrijam nos 5 minutos finais da Aula.

### A.5.5 REFERÊNCIAS – Aula 5

#### Atividade Motivadora:

- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.
- NETO, A. A. C. **Cálculo integral para o ensino médio**. 2019. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática: Professor de Matemática On line, 2019. Disponível em:  
<<https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo710>>. Acesso em: 19 de setembro de 2019.

#### Atividade principal:

- NETO, A. A. C. **Cálculo integral para o ensino médio**. 2019. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática: Professor de Matemática On line, 2019. Disponível em:  
<<https://doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo710>>. Acesso em: 19 de setembro de 2019.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos da história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

#### Sistematização:

- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos da história da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

#### Atividade Avaliativa

- NETO, A. A. C. **Cálculo integral para o ensino médio**. 2019. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática: Professor de Matemática On line, 2019. Disponível em:

## A.6 RESOLUÇÕES DAS QUESTÕES DO CADERNO DE ATIVIDADES

Caro(a) Docente, nas páginas a seguir, estão registradas propostas de soluções para todas as atividades desse material, você deve tomar conhecimento dessas resoluções bem como das sugestões e orientações presentes nessas resoluções antes de aplicar as atividades.

### A.6.1 Resolução das atividades da Aula 1

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes iniciarem a correção.

#### A.6.1.1 Resolução da Atividade Motivadora – Aula 1

Professores(as), iniciem a resolução dessa atividade lendo o enunciado junto com a turma e pergunte se alguém quer propor alguma estratégia para sua solução. Deixe os estudantes pensando por alguns minutos. Com certeza alguém apontará o caminho correto, caso contrário, apontem a forma correta de resolver e iniciem a solução.

Tenha em mente que o propósito desta atividade é fixar a ideia da decomposição e composição de áreas, abrindo caminho para a resolução da atividade principal, que será executada pelos alunos no próximo momento da aula. Exploraremos basicamente as ideias sobre tomar uma unidade como padrão de medida, decomposição e composição de áreas e propriedade aditiva das áreas.

Note que no primeiro passo da resolução, mediremos a área do triângulo  $ABC$  em função dos triângulos menores resultantes da decomposição, esses triângulos menores serão usados como unidade de medida na obtenção da área do retângulo  $DEFG$  e não são quadrados.

#### **Resolução:**

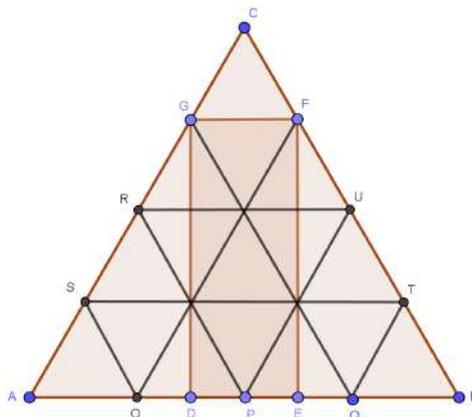
Observe a Figura A.41 e acompanhe o raciocínio exposto nos itens a seguir:

- i) Usando o fato de que a base  $DE$  do retângulo é  $\frac{1}{4}$  do lado do triângulo isósceles  $ABC$ , dividimos a base em 4 partes iguais, marcando os pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$ .
- ii) Traçamos os segmentos  $OS$ ,  $PR$  e  $QG$ , paralelos ao lado  $BC$ , dessa forma, os pontos  $G$ ,  $R$  e  $S$  dividem  $AC$  em 4 partes iguais. De modo análogo, dividimos o lado  $BC$  em 4 partes iguais pelos pontos  $F$ ,  $U$  e  $T$ , conforme Figura A.41.
- iii) Traçamos os segmentos  $RU$  e  $ST$  e então, o triângulo  $ABC$  fica subdividido em 16 triângulos equiláteros congruentes, cada um deles tem  $\frac{1}{16}$  da área de  $ABC$ , que vale  $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ , logo, cada um dos triângulos menores tem área

$$\frac{1}{16} \times \frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10}.$$

- iv) Fazendo a contagem, nota-se que o retângulo  $DEFG$  é composto por 6 triângulos menores, dessa forma sua área é  $6 \times \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$  unidades de área.

Figura A.41 – Triângulo ABC decomposto em 16 triângulos congruentes.



Fonte: Autoria própria.

Professores(as), a atividade motivadora deve ser resolvida de forma conduzida, e com ênfase na decomposição da área do retângulo feita através dos triângulos menores, essa ideia é fundamental na resolução da atividade principal. Observem também que quando usamos paralelismo para obter esses triângulos menores, isso garante congruência entre eles e a semelhança entre esses e o triângulo  $ABC$ .

#### A.6.1.2 Resolução da Atividade Principal – Aula 1

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que estão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.
- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.
- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

Na atividade motivadora, os estudantes observaram a resolução de um problema usando técnicas de decomposição e composição. Espera-se que na resolução da atividade principal, procedam de maneira análoga, contando os quadradinhos da malha que estão sob as manchas solares.

Espera-se que usem o *zoom* da câmera de seus telefones celulares, uma lente de aumento, ou até mesmo, reunir todas as manchas em uma área mais próxima copiando em um pedaço de papel manteiga.

De posse da quantidade aproximada de quadrados da malha sob as manchas, podem escolher muitos caminhos para obter a solução do problema. Apresentaremos a seguir, dois possíveis caminhos:

### Uma Resolução.

A imagem do Sol e das manchas solares estão impressas em uma malha quadriculada, **mas não é milimetrada**. Conforme indica a Figura A.3, os quadrados maiores têm lado  $1\text{ cm} = 10\text{ mm}$ . Os lados desse quadrado maior estão divididos em 5 partes, então o lado de cada quadradinho da malha é  $\frac{10\text{ mm}}{5} = 2\text{ mm}$  e dessa forma, os quadradinhos têm área de  $4\text{ mm}^2$ . Fazendo a contagem, o diâmetro do Sol, representado pelo segmento  $EF$ , contém aproximadamente 54 partes de  $2\text{ mm}$ , ou seja, o diâmetro tem 108 milímetros. O raio do Sol é dado no problema e vale  $695\,700\text{ km}$ , então o diâmetro é  $1\,391\,400\text{ km}$ .

Dividindo  $1\,391\,400\text{ km}$  por 108, cada milímetro corresponde à

$$1\,391\,400 \div 108 = 12\,883,3333\text{ km},$$

logo, cada quadrado de  $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$  representa a área de  $(12\,883,333)^2 = 165\,980\,276,9189\text{ km}^2$ .

Em nossa contagem, obtivemos 14 quadrados de  $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ , e isso equivale a  $4 \times 14 = 56\text{ mm}^2$ .

Dessa forma, a área total das manchas é de aproximadamente  $165\,980\,276,9189 \times 56 = 9\,294\,895\,507,458\text{ km}^2$ .

Em notação científica, a área das manchas é aproximadamente  $9,29 \times 10^9\text{ km}^2$ .

### Outra Resolução.

Se considerarmos que o diâmetro do círculo da Figura A.3 tem  $108\text{ mm}$ , seu raio possui  $54\text{ mm}$ , logo, a área total  $S_C$  é:

$$S_C = \pi \times R^2 = 3,141592 \times (54)^2 = 3,141592 \times 2916 = 9160,8822\text{ mm}^2, \quad (\text{A.44})$$

ou seja, no círculo que representa o disco solar, temos aproximadamente 9161 quadrados de  $1\text{ mm}^2$ .

A área de cada quadrado corresponde a  $\frac{1}{9161}$  da área total.

Usando o raio do Sol  $R = 695\,700\text{ km}$ , a área do disco solar é:

$$S_{Sol} = \pi \times R^2 = 3,141592 \times (695\,700)^2 = 1\,520\,525\,784\,196,08\text{ km}^2. \quad (\text{A.45})$$

Como as manchas solares abrangem 56 quadrados de  $1\text{ mm}^2$ , essas ocupam uma área de  $56 \times \frac{1}{9161} = \frac{56}{9161}$  da área total, ou seja,

$$\frac{56}{9161} \times 1\,520\,525\,784\,196,08 = 9\,294\,776\,106,863\text{ km}^2.$$

Em notação científica, temos aproximadamente  $9,29 \times 10^9\text{ km}^2$ .

Professores(as), na contagem dos quadrados da malha que compreendem as manchas solares expostas na figura, haverá muita variação nas quantidades obtidas por seus alunos, inclusive quando vocês forem resolver essa atividade pode ter diferença entre a contagem aqui exposta e as suas. Reforcem para os alunos que estamos apenas fazendo uma **estimativa** da área total dessas manchas, e é normal nesses casos obtermos diferenças no valor final, o importante aqui é que o procedimento empregado para obter o resultado seja produzido a partir de um raciocínio justificável através da matemática usada pelo estudante. Porém, resultados muito diferentes dos demais devem ser explorados junto à classe para analisar onde estão os erros que os geraram.

O item (b) dessa atividade pergunta "quais são os fatores que tornam nosso problema uma idealização da situação real?"

Professores(as), certamente vocês e as suas turmas poderão pontuar muitos outros fatores além dos sugeridos, a seguir:

- O Sol é esférico, então essas manchas pertencem a uma superfície esférica, e em nossos cálculos consideramos essa superfície como um disco plano.
- Para calcular com mais exatidão, deveríamos considerar a curvatura da superfície, ou seja, levar em conta a geodésia. Esse é um excelente tema para propor como pesquisa, introduzindo a noção de geometria esférica.
- A luz do sol sofre interferências ao chegar na Terra, por exemplo, ao sair do vácuo e entrar no ar. a luz sofre refração, então, é bem provável que Galileu viu uma imagem bastante distorcida dessas manchas.

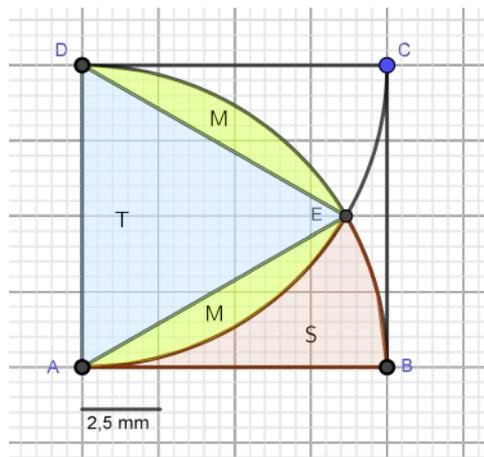
#### A.6.1.3 Resolução da Atividade Avaliativa – Aula 1

Professores(as) essa atividade avaliativa deve ser proposta nos últimos quinze minutos da aula, após cumpridas as etapas anteriores. Reservem dez minutos para a resolução e 5 minutos para sua correção na lousa. Exponha a resolução algébrica da questão, conforme apresentado a seguir.

#### Resolução.

A área procurada corresponde à região  $S$ , conforme Figura A.42.

Figura A.42 – Quadrado  $ABCD$  decomposto em áreas não poligonais.



Fonte: Autoria própria.

Observando a Figura A.42, note que a região delimitada pelo arco  $DB$  e pelos segmentos de reta  $AB$  e  $AD$  tem área

$$S(\widehat{DEB}) = 2S(M) + S(T) + S(S). \quad (\text{A.46})$$

Isolando o valor que queremos determinar, temos:

$$S(S) = S(\widehat{DEB}) - 2S(M) - S(T). \quad (\text{A.47})$$

Temos ainda,

- A área delimitada pelo arco  $DB$  e pelos lados  $AB$  e  $AD$ , representada por  $\mathcal{S}(\widehat{DEB})$  corresponde a área de um quarto de círculo de raio  $1\text{ cm}$  logo,

$$\mathcal{S}(\widehat{DEB}) = \frac{\pi}{4} \text{ cm}^2.$$

- A área  $\mathcal{S}(T)$  corresponde a área de um triângulo equilátero de lado  $1\text{ cm}$  logo,

$$\mathcal{S}(T) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

Para determinarmos a área da região  $M$ , observaremos a Figura A.42. Perceba que o arco  $AE$  delimita um setor circular de lados  $DA$  e  $DE$ , de raio  $1\text{ cm}$ , cujo ângulo do vértice  $D$  é  $60^\circ$  dado que o triângulo  $DEA$  é equilátero. A área desse setor corresponde a um sexto da área de um círculo de raio  $1\text{ cm}$ , ou seja, sua área é  $\frac{\pi}{6} \text{ cm}^2$ .

Dessa forma, a área  $M$  pode ser obtida pela diferença entre a área do setor circular  $DAE$  e do triângulo equilátero  $DEA$ :

$$\mathcal{S}(M) = \mathcal{S}(\widehat{AE}) - \mathcal{S}(T) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Agora que já sabemos todos os valores do segundo membro da Equação A.47, podemos fazer a substituição e determinar o valor procurado, acompanhe:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(S) &= \mathcal{S}(\widehat{DEB}) - 2\mathcal{S}(M) - \mathcal{S}(T) \\ &= \frac{\pi}{4} - 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12} \approx 0,1712 \text{ cm}^2. \end{aligned} \tag{A.48}$$

Espera-se que os estudantes resolvam o problema através da contagem de quadrados da malha, conforme o procedimento exposto na resolução da atividade principal. Esse caminho demanda mais tempo e provavelmente você não conseguirá desenvolver essa resolução algébrica. Assim, quando todos terminarem, apenas exponha o resultado na lousa. Os resultados dos alunos devem se aproximar de  $0,1712 \text{ cm}^2$ .

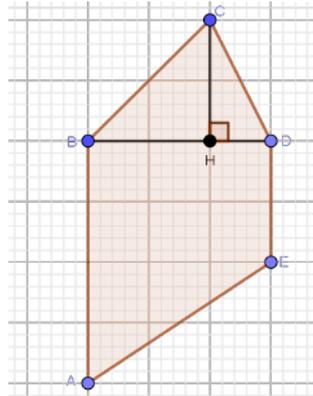
#### A.6.1.4 Resolução das Atividades Complementares – Aula 1

As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

**Resolução da questão 1:****ITEM (A):**

Observando a Figura A.43, percebemos que a área do pentágono  $ABCDE$  pode ser dividida em um triângulo  $BCD$  e um trapézio retângulo  $ABDE$ .

Figura A.43 – Pentágono  $ABCDE$  dividido em triângulo e trapézio.



Fonte: Autoria própria.

Como cada quadrado delimitado pela linha mais escura da malha tem  $90\text{ cm}$  de lado, o triângulo  $BCD$  tem base  $BD = 270\text{ cm}$  e altura  $CH = 180\text{ cm}$ , sendo o ponto  $H$  pé de perpendicular. Dessa forma, a área  $S(BCD)$  do referido triângulo é:

$$S(BCD) = \frac{BD \cdot CH}{2} = \frac{270 \cdot 180}{2} = 270 \cdot 90 = 24300\text{ cm}^2. \quad (\text{A.49})$$

Como a questão pede a área em metros quadrados, basta dividirmos o valor por 10000 pois  $1\text{ m}^2 = 10000\text{ cm}^2$ . Logo,  $S(BCD) = 2,43\text{ m}^2$ .

A área do trapézio retângulo  $ABDE$  é dada por:

$$\begin{aligned} S(ABDE) &= \frac{(AB + DE) \cdot BD}{2} \\ &= \frac{(360 + 180) \cdot 270}{2} \\ &= \frac{540 \cdot 270}{2} = 270 \cdot 270 \\ &= 72900\text{ cm}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Como a questão pede a área em metros quadrados, basta dividirmos o valor por 10000 pois  $1\text{ m}^2 = 10000\text{ cm}^2$ . Logo,  $S(BCD) = 7,29\text{ m}^2$ .

Dessa forma, a área total do pentágono  $ABCDE$  é:

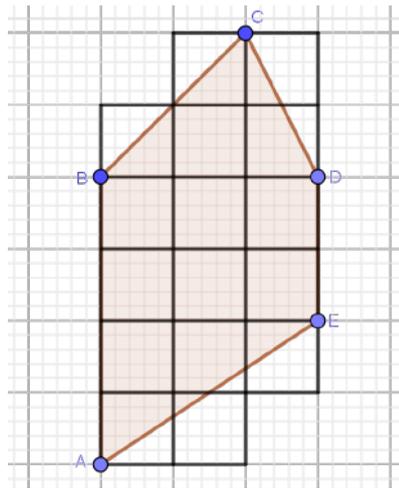
$$S(BCD) + S(BCD) = 2,43 + 7,29 = 9,72\text{ m}^2. \quad (\text{A.51})$$

Portanto, o valor da área total do piso representado pela Figura A.43 é  $9,72\text{ m}^2$ .

**ITEM (B):**

Considerando que os ladrilhos que são recortados não dão garantia de que o pedaço não ocupado poderá ser reaproveitado, devido a quebras inesperadas e possíveis erros no ato do corte, podemos dividir o pentágono  $ABCDE$  em quadrados de lados de  $90\text{ cm}$ , seguindo as linhas mais escuras da malha quadriculada, conforme Figura A.44.

Figura A.44 – Ladrilhos quadrados de lado  $90\text{ cm}$  pavimentando a superfície  $ABCDE$ .



Fonte: Autoria própria.

Contando os quadrados destacados em linha mais escura na Figura A.44, temos um total de 16 ladrilhos.

Portanto, usaremos 16 ladrilhos de  $90\text{ cm}$  de lado para pavimentar o referido piso.

**ITEM (C):**

Cada ladrilho de  $90\text{ cm}$  de lado tem área de  $90^2 = 8\,100\text{ cm}^2$ . Como usaremos 16 ladrilhos, temos  $16 \cdot 8\,100 = 129\,600\text{ cm}^2 = 12,96\text{ m}^2$ .

O desperdício pode ser obtido dividindo 12,96 pelo valor da área  $S(ABCDE)$ :

$$\frac{12,96}{9,72} \times 100\% = 133,3\%. \quad (\text{A.52})$$

A área de 16 ladrilhos corresponde a 133,3% da área total do pentágono da Figura A.44, portanto, teremos um desperdício de  $133,3\% - 100\% = 33,3\%$ .

É importante observar que desprezar as partes cortadas sem verificar se podem ser utilizadas não é uma boa decisão, pois gera um desperdício considerável.

**Resolução da questão 2:**

Do enunciado, temos que:

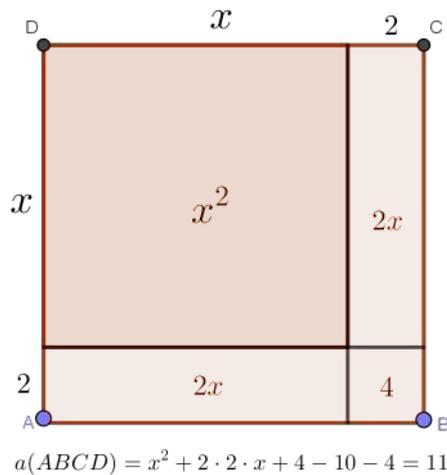
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (\text{A.53})$$

A identidade (A.53) é comumente associada a um quadrado, conforme ilustrado na Figura A.8 do enunciado desse problema (ver Seção A.1.2.5).

Na Figura A.8,  $ABCD$  é um quadrado de área  $a^2$ ,  $BCFE$  e  $DCHK$  são dois retângulos congruentes de áreas  $ab$  e  $HCFG$  um quadrado de área  $b^2$ .

A equação quadrática  $x^2 + 4x - 10 = 11$ , ao ser comparada à identidade (A.53) pode indicar que é possível obtermos um quadrado de lados  $(x+2)$  cuja área é 11 (ver Figura A.45).

Figura A.45 – Quadrado de lado  $(x+2)$ .



Fonte: Autoria própria.

Escrevendo a equação quadrática  $x^2 + 4x - 10 = 11$  na forma  $(a + b)^2 = c$  e usando a técnica de completar quadrados, podemos encontrar as suas raízes:

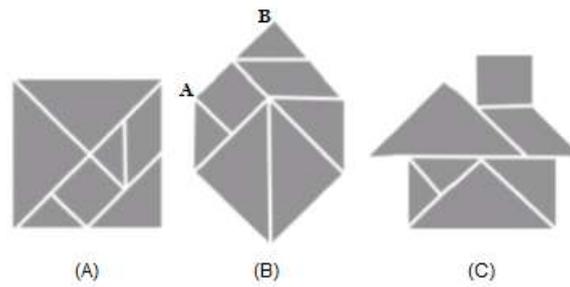
$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x - 10 &= 11 \\
 x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 10 - 2^2 &= 11 \\
 x^2 + 4x + 4 - 10 - 4 &= 11 \\
 x^2 + 4x + 4 - 14 &= 11 \\
 x^2 + 4x + 4 &= 11 + 14 \\
 (x + 2)^2 &= 25 \\
 x + 2 &= \pm\sqrt{25} \\
 x + 2 &= \pm 5 \implies x = 3 \text{ ou } x = -7
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Portanto a solução é  $\{-7, 3\}$ .

### Resolução da questão 3:

Primeiramente, notamos que nas três configurações de tangran mostradas na Figura A.46 as áreas são iguais, pois são formadas pelas mesmas peças justapostas sem que haja sobreposição.

Figura A.46 – Composições com o Tangran



Fonte: [exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br](http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br)

Se o lado  $AB$  da Figura A.46 (B) mede  $2\text{ cm}$ , os lados do triângulo e do quadrado que o formam valem  $1\text{ cm}$ . Notamos também que o lado adjacente a  $AB$  é um paralelogramo e devido à simetria, tem o lado maior igual a  $2\text{ cm}$ .

Dessa forma, ao observarmos o quadrado da Figura A.46 (A), e comparando com as medidas já descobertas, conclui-se que suas diagonais medem  $4\text{ cm}$ . Podemos então obter a área da casinha calculando a área do quadrado.

Sabemos o valor das diagonais, e como todo quadrado é também um losango, temos

$$S(\text{casinha}) = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8\text{ cm}^2. \quad (\text{A.55})$$

Portanto, a alternativa correta é (B).

## A.6.2 Resolução das atividades da Aula 2

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes iniciarem a correção.

### A.6.2.1 Resolução da atividade motivadora

Professores(as), iniciem a resolução dessa atividade lendo o enunciado junto com a turma e perguntem se alguém quer propor alguma estratégia para encontrar o número  $x$ , pertencente ao intervalo real  $1 < x < 2$ , tal que  $x$  elevado ao quadrado é igual a 2. Deixem os estudantes pensando por alguns minutos. Com certeza alguém apontará o caminho correto, caso contrário, apontem esse caminho, conforme o texto dessa atividade e iniciem a exposição das ideias, pois nesse caso, não temos uma atividade e sim um texto sobre o tema.

Nessa atividade, pretende-se fixar a ideia da existência de números irracionais, a partir da descoberta das grandezas incomensuráveis na Grécia Antiga. Pretende-se fazer com que os estudantes percebam por inspeção, que não conseguimos encontrar um número decimal/racional que elevado ao quadrado é igual a 2. Para esse momento da aula basta discutir as tabelas expostas no próprio texto da atividade com as respectivas discussões sobre o fato.

Esse Momento da Aula tem o objetivo de despertar o interesse e a curiosidade sobre o tema da aula, inclusive fornecendo ferramentas, tais como fórmulas e conceitos necessários para a solução da atividade principal, da atividade avaliativa e das atividades complementares. Lembre-se que o tempo estimado para esse momento da aula é de 15 minutos.

### A.6.2.2 Resolução da Atividade Principal

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que estão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.
- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.
- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

A finalidade dessa atividade é verificar a teoria das proporções de Eudoxo para alguns valores de grandezas, bem como propiciar ao estudante a oportunidade de pensar e escolher alguns valores que se encaixem nas implicações dessa teoria.

**Resolução da Atividade Principal:****ITEM (A)**

Para verificar se quatro grandezas formam uma proporção, devemos observar se elas satisfazem a Propriedade Fundamental das Proporções (PFP), expressa no resultado (A.56) a seguir,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, \quad (\text{A.56})$$

Sejam  $a = 2 \text{ cm}^2$ ,  $b = \sqrt{5} \text{ cm}^2$ ,  $c = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$  e  $d = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ cm}^2$  e os números inteiros  $m = 5$  e  $n = 3$ , aplicando esses valores no resultado (A.56), temos,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5}} &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} &= \sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{3} &= \frac{2\sqrt{5}}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Como os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  satisfazem a propriedade (A.56), eles estão em proporção.

**ITEM (B)**

Para os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  do enunciado, usando  $\sqrt{5} = 2,24$ , e substituindo os valores, temos:

$$\begin{aligned} m \cdot a > n \cdot b &\Rightarrow m \cdot c > n \cdot d \\ 5 \cdot 2 > 3 \cdot \sqrt{5} &\Rightarrow 5 \cdot \frac{2}{3} > 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 10 > 3 \cdot \sqrt{5} &\Rightarrow \frac{10}{3} > \sqrt{5} \\ 10 > 3 \cdot 2,24 &\Rightarrow 3,33 > 2,24 \\ 10 > 6,72 &\Rightarrow 3,33 > 2,24. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Portanto, a implicação entre as desigualdades é verdadeira.

**ITEM (C)**

Nas desigualdades  $10 > 6,72 \Rightarrow 3,33 > 2,24$ , faremos a diferença entre o maior e o menor valor em cada uma. Logo,

$$10 - 6,72 = 3,28 \text{ e } 3,33 - 2,24 = 1,09. \quad (\text{A.59})$$

Note que a razão entre as grandezas  $\frac{c}{a}$  e  $\frac{d}{b}$  é  $\frac{1}{3}$ , conforme exposto no enunciado. Ao observarmos as diferenças obtidas em (A.59), notamos que  $3,28 \approx 3 \cdot 1,09$ , logo, a proporção se manteve. Não conseguimos um resultado mais aproximado devido ao uso de  $\sqrt{5}$  com apenas duas casas decimais.

**ITEM (D)**

Nesse item, os estudantes devem escolher valores para  $a, b, c, d$ , em proporção, sendo  $b$  e  $d$  incomensuráveis (irracionais). Os valores de  $m = 5$  e  $n = 7$  são dados. Mostraremos aqui uma possível resolução para os valores  $a = 1, b = \sqrt{3}, c = \frac{1}{5}$  e  $d = \frac{\sqrt{3}}{5}$ .

Inicialmente verifique se há proporção entre os valores escolhidos, acompanhe:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{5}} \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} \quad (\text{A.60})$$

Verificada a proporção, faremos a verificação e usaremos  $\sqrt{3} = 1,73$ :

$$\begin{aligned} m \cdot a < n \cdot b &\Rightarrow m \cdot c < n \cdot d \\ 5 \cdot 1 < 7 \cdot \sqrt{3} &\Rightarrow 5 \cdot \frac{1}{5} < 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} \\ 5 < 7 \cdot 1,73 &\Rightarrow 1 < \frac{7}{5} \cdot \sqrt{3} \\ 5 < 7 \cdot 1,73 &\Rightarrow 1 < 1,4 \cdot 1,73 \\ 5 < 12,11 &\Rightarrow 1 < 2,422. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Com as desigualdades  $5 < 12,11 \Rightarrow 1 < 2,422$ , faremos a diferença entre o maior e o menor valor em cada uma. Logo,

$$12,11 - 5 = 7,11 \text{ e } 2,422 - 1 = 1,422. \quad (\text{A.62})$$

Note que a razão entre as grandezas  $\frac{c}{a}$  e  $\frac{d}{b}$  é  $\frac{1}{5}$  e ao observarmos as diferenças obtidas em (A.62), notamos que  $7,11 \approx 5 \cdot 1,422$ , logo, a proporção se manteve. Não conseguimos um resultado mais aproximado devido ao uso de  $\sqrt{3}$  com apenas duas casas decimais.

**ITEM (E)**

A igualdade ocorre quando as grandezas são comensuráveis. Observe o exemplo a seguir.

**Exemplo A.4.** Verifique se o item (ii) da Definição V.5 (Definição A.1 do enunciado da atividade) se verifica para as seguintes grandezas comensuráveis:  $a = 0,5, b = 1,5, c = 1, d = 3$ . Use  $m = 9$  e  $n = 3$ .

**Resolução.**

O item (ii) dessa definição indica que

$$m \cdot a = n \cdot b \Rightarrow m \cdot c = n \cdot d. \quad (\text{A.63})$$

Substituindo os valores dados, temos:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 0,5 &= 3 \cdot 1,5 \Rightarrow 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3 \\ 4,5 &= 4,5 \Rightarrow 9 = 9. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Portanto, o caso (ii) se verifica para grandezas comensuráveis.

### A.6.2.3 Resolução da Atividade Avaliativa

Professores(as), nessa atividade avaliativa há dois itens a serem resolvidos. Acompanhem a resolução de cada item.

#### **Resolução do item (I):**

O Triângulo  $ABC$  da Figura A.11 é retângulo de catetos  $AB = x$ ,  $BC = 1 \text{ cm}$  e hipotenusa  $AC = \frac{5}{2} \text{ cm}$ . Obtemos o valor de  $x$  pelo Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 (AB)^2 + (BC)^2 &= (AC)^2 \\
 x^2 + 1^2 &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\
 x^2 + 1 &= \frac{25}{4} \\
 x^2 &= \frac{25}{4} - 1 \\
 x^2 &= \frac{21}{4} \\
 x &= \sqrt{\frac{21}{4}} \\
 x &= \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{A.65}$$

Agora, conhecido o comprimento do cateto  $AB$ , determinaremos a área do triângulo  $ABC$ .

$$\begin{aligned}
 S(ABC) &= \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (BC) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot 1 \\
 &= \frac{\sqrt{21}}{4} \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.66}$$

O número 21 não é um quadrado perfeito então,  $\sqrt{21}$  é irracional, portanto, a área do triângulo  $ABC$  é uma grandeza incomensurável.

#### **Sugestão para a correção do item (II):**

Para esse item, os alunos devem atribuir valores às medidas do triângulo  $DEF$  da Figura A.11 de forma que a área seja uma grandeza incomensurável. Priorize a correção da primeira questão na lousa ao final da aula e na segunda questão, você deve pedir para alguns alunos exporem para a turma os valores usados bem como suas resoluções. É provável que a correção da segunda questão precise ser deixada para a aula seguinte, devido ao tempo, mas é de suma importância que se trabalhe a habilidade de os estudantes escolherem os valores visando um resultado solicitado.

#### A.6.2.4 Resolução das Atividades Complementares - Aula 2

As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

##### **Resolução da Questão 1:**

De acordo com o que foi apresentado nesse enunciado, verifique se há comensurabilidade entre a grandeza  $p$  em relação à grandeza  $q$ . A comensurabilidade existirá se, e somente se, a razão  $\frac{p}{q}$  for racional. Pode-se também aproveitar a questão para reforçar que devemos ter  $q \neq 0$ . Questione os alunos sobre isso.

**ITEM A:**  $p = 6$  e  $q = 3$ ;

$$\frac{p}{q} = \frac{6}{3} = 2. \quad (\text{A.67})$$

Como 2 é um número racional,  $p$  e  $q$  são comensuráveis entre si.

**ITEM B:**  $p = 5$  e  $q = 15$ ;

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. \quad (\text{A.68})$$

Como  $\frac{1}{3}$  é um número racional,  $p$  e  $q$  são comensuráveis entre si.

**ITEM C:**  $p = 7\sqrt{3}$  e  $q = 14\sqrt{3}$ ;

$$\frac{p}{q} = \frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.69})$$

Como  $\frac{1}{2}$  é um número racional,  $p$  e  $q$  são comensuráveis entre si.

**ITEM D:**  $p = 6\sqrt{2}$  e  $q = 2\sqrt{2}$ ;

$$\frac{p}{q} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 3. \quad (\text{A.70})$$

Como 3 é um número racional,  $p$  e  $q$  são comensuráveis entre si.

**ITEM E:**  $p = 9$  e  $q = 21\sqrt{3}$ ;

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{9}{21\sqrt{3}} = \frac{3}{7\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Como  $\frac{1}{7} \cdot \sqrt{3}$  é um número irracional,  $p$  e  $q$  são incomensuráveis entre si.

**Resolução da Questão 2:**

De acordo com os exemplos dados no enunciado, faremos a antifairese entre os valores dados.

**ITEM A:** 12 e 4;

$$\begin{aligned} 12 - 4 &= 8 \\ 8 - 4 &= 4 \\ 4 - 4 &= 0 \end{aligned} \tag{A.72}$$

Portanto,  $MDC(8, 12) = 4$ .

**ITEM B:** 75 e 30;

$$\begin{aligned} 75 - 30 &= 45 \\ 45 - 30 &= 15 \\ 30 - 15 &= 15 \\ 15 - 15 &= 0 \end{aligned} \tag{A.73}$$

Portanto,  $MDC(75, 30) = 15$ .

**ITEM C:** 47 e 21;

$$\begin{aligned} 47 - 21 &= 26 \\ 26 - 21 &= 5 \\ 21 - 5 &= 16 \\ 16 - 5 &= 11 \\ 11 - 5 &= 6 \\ 6 - 5 &= 1 \end{aligned} \tag{A.74}$$

Portanto,  $MDC(47, 21) = 1$ . Observe que 47 e 21 são primos entre si pois o m.d.c. entre eles é 1.

**ITEM D:** 108 e 60;

$$\begin{aligned} 108 - 60 &= 48 \\ 60 - 48 &= 12 \\ 48 - 12 &= 36 \\ 36 - 12 &= 24 \\ 24 - 12 &= 12 \\ 12 - 12 &= 0. \end{aligned} \tag{A.75}$$

Portanto,  $MDC(108, 60) = 12$ .

**ITEM E:**  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{2}$ ;

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} &= 0.\end{aligned}\tag{A.76}$$

Portanto,  $MDC\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$ .

**Resolução da Questão 3:**

A solicitação do arquiteto foi de cortar as tábuas de um mesmo tamanho sem sobras, dessa forma, o carpinteiro precisa determinar o maior número inteiro que divide simultaneamente 540, 810 e 1080. Trata-se de encontrar o m.d.c. entre esses valores. Inicialmente, determinaremos pelas subtrações sucessivas o m.d.c. entre 1080 e 810:

$$\begin{aligned}1080 - 810 &= 270 \\ 810 - 270 &= 540 \\ 540 - 270 &= 270 \\ 270 - 270 &= 0.\end{aligned}\tag{A.77}$$

Dessa forma,  $(1080, 810) = 270$ .

Agora faremos o m.d.c entre 540 e 270:

$$\begin{aligned}540 - 270 &= 270 \\ 270 - 270 &= 0.\end{aligned}\tag{A.78}$$

Logo,  $MDC(540, 810, 1080) = 270$ .

O arquiteto ainda deu outra condição, as tábuas devem ter menos de 2 metros de comprimento, logo, fazendo  $\frac{270}{2} = 135$  e 135 também é divisor comum de 540, 810 e 1080. Assim, as tábuas devem ser cortadas com 135 *cm* de comprimento.

- Há 40 tábuas de 540 *cm*. Cada uma delas pode ser dividida em quatro peças de 135 *cm*. Teremos 160 peças.
- Há 30 tábuas de 810 *cm*. Cada uma delas pode ser dividida em seis peças de 135 *cm*. Teremos 180 peças.
- Há 10 tábuas de 1080 *cm*. Cada uma delas pode ser dividida em oito peças de 135 *cm*. Teremos 80 peças.

Somando o número de peças de cada tipo de tábua, temos:  $160 + 180 + 80 = 420$  peças, portanto, a alternativa **(e)** é a correta.

### A.6.3 Resolução das atividades da Aula 3

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes iniciarem a correção.

#### A.6.3.1 Resolução da atividade motivadora

Essa atividade tem o objetivo de despertar o interesse e a curiosidade sobre o tema da aula, inclusive fornecendo ferramentas, tais como fórmulas e conceitos necessários para a solução da Atividade Principal, da Atividade Avaliativa e das Atividades Complementares. Lembre-se que o tempo estimado para esse momento da aula é de 15 minutos.

Nessa atividade, pretende-se retomar e fixar a habilidade de se calcular áreas inscritas e/ou hachuradas pela diferença e/ou soma entre áreas conhecidas nas figuras dadas. Também se propõe relembrar o Teorema de Pitágoras e as fórmulas para obter a área de um círculo e a área de um triângulo.

#### **Resolução:**

(a) Inicialmente, vamos determinar o raio do semicírculo de diâmetro  $AB$ . Note que  $AB$  é também hipotenusa do triângulo retângulo  $ABC$ , conforme Figura A.13. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (AC)^2 + (BC)^2 \\ &= 9^2 + (3\sqrt{7})^2 \\ &= 81 + 63 = 144 \Rightarrow AB = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}\end{aligned}\tag{A.79}$$

Dessa forma, chamando de  $\mathcal{S}(D)$  a área procurada, esta é dada pela diferença entre a área do semicírculo de diâmetro  $AB$  e a área do triângulo retângulo  $ABC$ .

Sendo  $\mathcal{S}(S)$  a área do semicírculo de diâmetro  $AB$  e  $\mathcal{S}(T)$  a área do triângulo  $ABC$ , temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(D) = \mathcal{S}(S) - \mathcal{S}(T) &= \frac{\pi \cdot r^2}{2} - \frac{AC \cdot BC}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 6^2}{2} - \frac{3\sqrt{7} \cdot 9}{2} = \frac{36 \cdot \pi - 27\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{9}{2} \cdot (4\pi - 3\sqrt{7}) \text{ cm}^2.\end{aligned}\tag{A.80}$$

Portanto, a área procurada é  $\mathcal{S}(D) = \frac{9}{2} \cdot (4\pi - 3\sqrt{7}) \text{ cm}^2$ .

(b) O valor  $\mathcal{S}(D) = \frac{9}{2} \cdot (4\pi - 3\sqrt{7}) \text{ cm}^2$  é a área exata mas, note que se quisermos saber seu valor numérico, teremos que substituir  $\pi = 3,141592\dots$  e como sabemos,  $\pi$  é irracional, logo, por mais casas decimais que se use, encontraremos sempre um valor aproximado para a área em questão. Porém, quanto maior o número de casas decimais de  $\pi$  usadas, melhor será a aproximação obtida.

### A.6.3.2 Resolução da atividade principal

A finalidade dessa atividade é verificar a validade das definições de *Arbelos* e *Salinons* para alguns valores numéricos dados. Também pretende-se propiciar ao estudante a oportunidade de conhecer as definições e as formas dessas figuras planas, a história relacionada à essas figuras, bem como de retomar algumas fórmulas relacionadas ao círculo e ao triângulo retângulo.

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que estão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.
- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.
- Aproveitem essa aula para que os estudantes aprendam, ou melhorem as habilidades, no uso de régua e do compasso. Peçam que reproduzam as figuras em seus cadernos, junto com as anotações da resolução da atividade.
- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

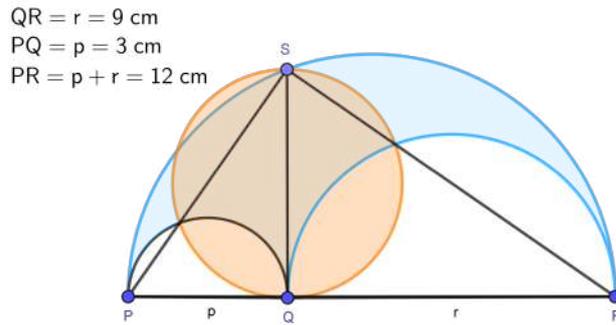
#### **Resolução:**

#### **Verificação para a Definição A.2.**

Para o *Arbelos*, temos as medidas indicadas na Figura A.47 e a área  $\mathcal{S}(A)$ , conforme Definição A.2, pode ser obtida fazendo a diferença entre a área do semicírculo de diâmetro  $PR$  com a área dos semicírculos de diâmetros  $PQ$  e  $QR$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(A) &= \frac{1}{2} \left( \frac{p+r}{2} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{p}{2} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2} \right)^2 \cdot \pi \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{3+9}{2} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{9}{2} \right)^2 \cdot \pi \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{12}{2} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{9}{2} \right)^2 \cdot \pi \\
 &= \frac{1}{2} \frac{144}{4} \cdot \pi - \frac{1}{2} \frac{9}{4} \cdot \pi - \frac{1}{2} \frac{81}{4} \cdot \pi = \frac{144}{8} \cdot \pi - \frac{9}{8} \cdot \pi - \frac{81}{4} \cdot \pi \\
 &= \frac{144 \cdot \pi - 9 \cdot \pi - 81 \cdot \pi}{8} \\
 &= \frac{54 \cdot \pi}{8} \Rightarrow \mathcal{S}(A) = \frac{27 \cdot \pi}{4} \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.81}$$

Figura A.47 – *Arabelos* de diâmetro  $p + r$ .



Fonte: Autoria própria.

Para verificarmos se a área do *Arbelos* é igual a área do círculo de diâmetro  $SQ$ , iniciaremos determinando o valor do diâmetro  $d = SQ$ .

Note que  $d$  é a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo  $ABC$ , logo:

$$\begin{aligned} d^2 &= p \cdot r \Rightarrow d = \sqrt{p \cdot r} \\ d &= \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{27} \Rightarrow d = \sqrt{27} \text{ cm.}, \end{aligned} \tag{A.82}$$

Logo, o raio do círculo de diâmetro  $SQ$  é  $\frac{\sqrt{27}}{2}$  cm e a área do círculo é:

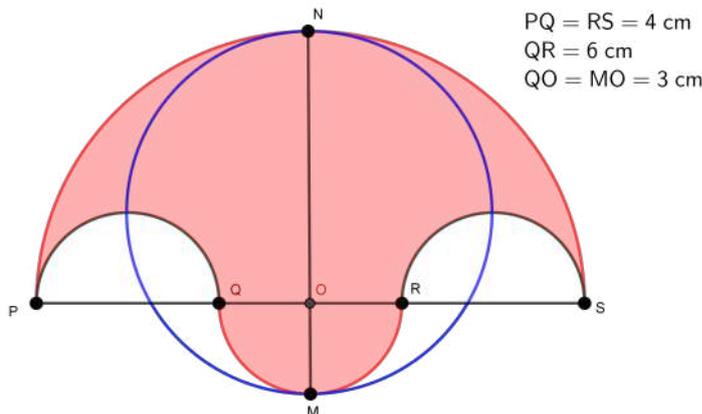
$$S(C) = \left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{27 \cdot \pi}{4}. \tag{A.83}$$

Portanto, de acordo com a Definição A.2, verificamos que  $S(A) = S(C)$ .

**Verificação para a Definição A.3.**

Para o *Salinon* temos as medidas indicadas na Figura A.48 e a área  $S(S)$ , conforme a Definição A.3, pode ser obtida somando as áreas dos semicírculos de diâmetros  $PS$  e  $QR$  subtraindo da área de um círculo de diâmetro  $PQ = RS$ .

Figura A.48 – *Salinon* de Arquimedes.



Fonte: Autoria própria.

Devemos verificar se a área do salinon é igual a área do círculo de diâmetro  $MN$ , ou seja,  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$ .

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(S) &= \frac{1}{2}(PQ + OQ)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2}(OQ)^2 \cdot \pi - \left(\frac{RS}{2}\right)^2 \cdot \pi \\
 &= \frac{1}{2}(4 + 3)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2}(3)^2 \cdot \pi - \left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdot \pi \\
 &= \frac{1}{2}(7)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2}(3)^2 \cdot \pi - (2)^2 \cdot \pi \\
 &= \frac{49}{2} \cdot \pi + \frac{9}{2} \cdot \pi - 4 \cdot \pi = \frac{49 \cdot \pi + 9 \cdot \pi - 8 \cdot \pi}{2} \\
 &= \frac{50 \cdot \pi}{2} \implies \mathcal{S}(S) = 25 \cdot \pi \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.84}$$

A área do círculo de raio  $\frac{MN}{2}$  onde  $MN = PQ + QO + OM$  logo,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(C) &= \left(\frac{PQ + QO + OM}{2}\right)^2 \cdot \pi \\
 &= \left(\frac{4 + 3 + 3}{2}\right)^2 \cdot \pi = 5^2 \cdot \pi \implies \mathcal{S}(C) = 25 \cdot \pi \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.85}$$

Portanto, de acordo com a Definição A.3, verificamos que  $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(C)$ .

#### A.6.3.3 Resolução da atividade avaliativa

Professor(a) a atividade avaliativa deve ser aplicada nos minutos finais da aula, de forma individual, conforme o tempo estimado nas orientações iniciais da aula. Reserve 10 minutos para os estudantes trabalharem na resolução e nos 5 minutos finais faça a correção na lousa.

#### **Resolução:**

A área em branco a ser determinada na Figura A.19 é dada pela área do retângulo  $ABCD$  subtraindo-se dela a área do semicírculo de diâmetro  $BF$  e a área do quarto de círculo de raio  $HD$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(\text{branca}) &= 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \pi \\
 &= 12 - \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \pi = 12 - \frac{\pi}{2} - \pi \\
 &= 12 - \frac{3\pi}{2} = \frac{24 - 3\pi}{2} \\
 &= \frac{3(8 - \pi)}{2} \text{ cm}^2.
 \end{aligned} \tag{A.86}$$

Portanto, a área procurada é  $\frac{3(8 - \pi)}{2} \text{ cm}^2$ .

## A.6.3.4 Resolução das atividades complementares - Aula 3

As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

**Resolução da questão 1:**

A área hachurada da Figura A.21 pode ser obtida pela diferença entre a área do retângulo  $FGJH$  e a área do segmento parabólico de base  $FG$  e altura  $PK$ , e, denominando  $\mathcal{S}(SP)$  a área do segmento parabólico e  $\mathcal{S}(T)$  a área do triângulo inscrito  $FGP$  de mesma base e mesma altura que o segmento parabólico, pela Proposição A.3 (Proposição de Arquimedes para a quadratura da parábola), temos:

$$\mathcal{S}(SP) = \frac{4}{3}\mathcal{S}(T), \quad (\text{A.87})$$

onde,

$$\mathcal{S}(T) = \frac{FG \cdot FH}{2} = \frac{5 \cdot 9}{2} \text{ cm}^2. \quad (\text{A.88})$$

Dessa forma, temos

$$\mathcal{S}(SP) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5 \cdot 9}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 30 \text{ cm}^2. \quad (\text{A.89})$$

Sendo  $\mathcal{S}(R)$  a área do retângulo  $FGJH$ , segue que

$$\mathcal{S}(\text{hachurada}) = \mathcal{S}(R) - \mathcal{S}(SP) = 5 \cdot 9 - 30 = 45 - 30 = 15 \text{ cm}^2. \quad (\text{A.90})$$

Portanto, a área hachurada da Figura A.21 é  $15 \text{ cm}^2$ .

**Resolução da questão 2:**

A quantidade de granito em metros quadrados a ser usada no revestimento é a área da passarela representada na Figura A.22, dada pela diferença entre as áreas de um quarto do círculo de raio  $AB = AE + EB = 8 + 12 = 20 \text{ cm}$  e um quarto do círculo de raio  $AE = 12 \text{ cm}$ . Sendo  $\mathcal{S}(P)$  a área da passarela, temos

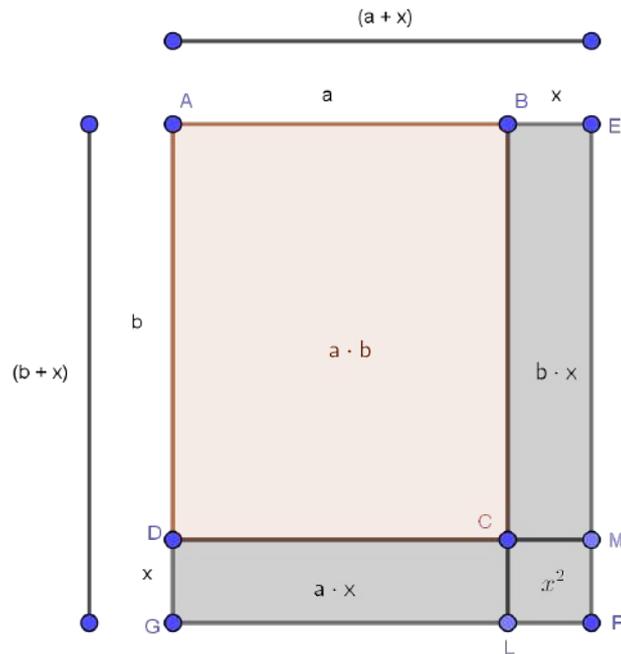
$$\begin{aligned} \mathcal{S}(P) &= \frac{(AB)^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(AE)^2 \cdot \pi}{4} \\ &= \frac{(20)^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(12)^2 \cdot \pi}{4} \\ &= \frac{400 \cdot \pi}{4} - \frac{144 \cdot \pi}{4} = \frac{400 \cdot \pi - 144 \cdot \pi}{4} = \frac{256 \cdot \pi}{4} \\ &= 64 \cdot \pi \text{ m}^2 \implies \mathcal{S}(P) = 64 \cdot (3,14) = 200,96 \approx 201 \text{ m}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

Portanto, serão usados aproximadamente  $201 \text{ m}^2$  de granito para revestir o piso da passarela.

**Resolução da questão 3:**

A Figura A.49 mostra a área cultivável  $ABCD$  e a faixa de terra de largura  $x$  doada para cumprir os requisitos da legislação.

Figura A.49 – Retângulo de lados  $a + x$  e  $b + x$ .



Fonte: Autoria própria.

A faixa de terra de largura  $x$  que circunda a área cultivada pode ser decomposta em 3 outras áreas: os retângulos de áreas  $a \cdot x$  e  $b \cdot x$  e o quadrado  $CMFL$  de área  $x^2$ , conforme indicado na Figura A.49.

Dado que a área de largura  $x$  que circunda o terreno deve ser de 20% da área cultivada, temos

$$\begin{aligned}
 ax + bx + x^2 &= 0,2 \cdot (a+x) \cdot (b+x) \\
 &= 0,2 \cdot (ab + ax + bx + x^2) \\
 &= 0,2 \cdot ab + 0,2 \cdot ax + 0,2 \cdot bx + 0,2 \cdot x^2 \\
 0,8 \cdot x^2 + 0,8 \cdot ax + 0,8 \cdot bx - 0,2 \cdot ab &= 0 \\
 0,8 \cdot x^2 + 0,8 \cdot (a+b)x - 0,2 \cdot ab &= 0. \tag{A.92}
 \end{aligned}$$

Multiplicando todos os termos da Equação A.92 por 5, temos

$$4 \cdot x^2 + 4 \cdot (a+b)x - ab = 0. \tag{A.93}$$

Obtemos uma equação quadrática na incógnita  $x$  do tipo  $Ax^2 + Bx + C = 0$  onde os coeficientes são  $A = 4$ ,  $B = 4(a+b)$  e  $C = -ab$ .

Aplicando os coeficientes na fórmula resolutive, e considerando apenas o resultado maior que zero, temos,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-4(a+b) + \sqrt{[4(a+b)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-ab)}}{2 \cdot 4} \\
 &= \frac{-4(a+b) + \sqrt{16(a+b)^2 + 16ab}}{8} \\
 &= \frac{-4(a+b) + \sqrt{16[(a+b)^2 + ab]}}{8} \\
 &= \frac{-4(a+b) + 4 \cdot \sqrt{(a+b)^2 + ab}}{8} \\
 &= \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + ab}}{2} \\
 2 \cdot x &= 2 \cdot \left[ \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + ab}}{2} \right] \\
 2x &= -(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + ab} = \sqrt{(a+b)^2 + ab} - (a+b). \quad (\text{A.94})
 \end{aligned}$$

Como (A.94) é o dobro de  $x$ , a alternativa (e) é a correta.

#### A.6.4 Resolução das atividades da aula 4

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenham em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, devemos estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções, inclusive, convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes de vocês iniciarem suas correções.

Nessa aula, abordamos o Teorema de Pick. Esse teorema propõe um jeito muito interessante de se obter a área de um polígono inscrito em uma rede quadricular. Além de ser estimulante, curioso e divertido, possibilita trabalhar com atividades relacionadas a mapas e imagens obtidas por satélites e *drones*, ideal para se fazer um trabalho multidisciplinar com Geografia.

##### A.6.4.1 Resolução da Atividade motivadora

Professores(as) a Atividade Motivadora dessa aula já está resolvida no texto introdutório, basta ler esse texto e desenvolver as ideias e resoluções da forma com que estão expostas. Observem que os triângulos fundamentais expostos na Figura A.24 de área igual a  $\frac{1}{2}$  são os responsáveis por fornecer o valor da área do polígono e a fórmula de Pick nos dá uma contagem indireta da quantidade de triângulos fundamentais que compõe o polígono. Sugerimos um tempo de 10 minutos para o desenvolvimento desse momento da aula.

##### A.6.4.2 Resolução da Atividade Principal

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecer eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que estão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.
- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.
- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

Após a leitura silenciosa e individual, libere as equipes para discutir as ideias e terminar a resolução em dupla/trio, utilizando qualquer estratégia, porém, é mais provável e desejável que todos procurem resolver aplicando o Teorema de Pick.

Enquanto os alunos resolvem essa atividade, circule pela sala e observe as estratégias de resolução que as equipes estão desenvolvendo. Caso os estudantes tenham dúvidas, ou até mesmo apresentem dificuldades, procure não indicar de forma direta o caminho para a solução, e sim, fazer algum questionamento simples ao aluno que ao respondê-lo, o ajude a encontrar a resposta desejada.

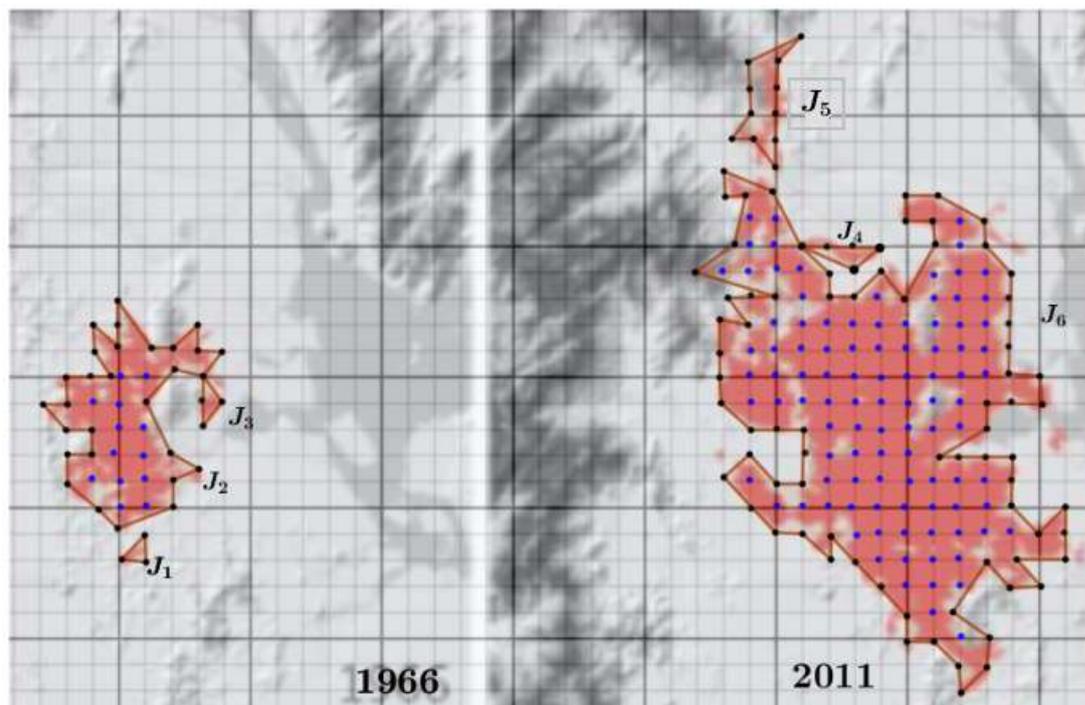
Essa atividade será resolvida através da construção de um polígono que circunscreve a área da região urbana da cidade nos dois anos considerados, e com certeza haverá variações na forma com que os estudantes construirão esse polígono, logo, apresentaremos aqui uma possível solução, mas cabe ao professor analisar as resoluções dos alunos e orientá-los como devem fazer esse procedimento com a maior precisão possível.

Note também que não estamos trabalhando com unidades de área nem escala conhecida, porém a escala nos dois mapas é a mesma, e isso já basta para conhecermos a porcentagem de aumento da área urbana da cidade entre os anos considerados.

### **Uma resolução.**

Para o ano de **1966**, inicialmente, construímos os polígonos que circunscrevem as regiões e efetuamos a contagem do número de pontos  $B$  da malha sobre o perímetro e também dos pontos internos  $I$ , também pertencentes à malha, conforme a Figura A.50

Figura A.50 – Polígonos circunscritos aos mapas de Joinville em 1966 e 2011.



Fonte: Adaptado de Joinville Bairro a Bairro.

Para o polígono  $J_1$ , percebemos que se trata de um triângulo fundamental, logo  $S(J_1) = \frac{1}{2} = 0,5$  u.a.

Para o polígono  $J_2$ , temos  $B = 29$  e  $I = 13$ , logo, sua área é

$$S(J_2) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{29}{2} + 13 - 1 = 24,5 + 12 = 36,5 \text{ u.a.} \quad (\text{A.95})$$

Para o polígono  $J_3$ , temos  $B = 4$  e  $I = 0$ , logo, sua área é

$$S(J_3) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{4}{2} + 0 - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ u.a.} \quad (\text{A.96})$$

Por fim, basta somarmos as áreas dos três polígonos,

$$S(1966) = J_1 + J_2 + J_3 = 0,5 + 36,5 + 1 = 38 \text{ u.a.} \quad (\text{A.97})$$

Dessa forma, em **1966**, a região urbana do município de Joinville, nas condições dadas, tinha aproximadamente 38,0 u.a.(unidades de área).

Professores(as) é importante deixar claro para os alunos que a unidade de área usada nesse caso é o "quadrado" da malha quadricular.

Para o ano de **2011**, procedendo de maneira análoga a anterior, inicialmente, construímos os polígonos que circunscrevem o mapa e efetuamos a contagem do número de pontos  $B$  da malha sobre o perímetro e também dos pontos internos  $I$ , também pertencentes à malha, conforme a Figura A.50.

No caso do polígono  $J_4$ , temos  $B = 5$  e  $I = 5$ , logo, sua área é

$$S(J_4) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{5}{2} + 0 - 1 = 2,5 - 1 = 1,5 \text{ u.a.} \quad (\text{A.98})$$

Para o polígono  $J_5$ , temos  $B = 11$  e  $I = 0$ , logo, sua área é

$$S(J_5) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{11}{2} + 0 - 1 = 5,5 - 1 = 4,5 \text{ u.a.} \quad (\text{A.99})$$

No caso do polígono  $J_6$ , temos  $B = 79$  e  $I = 99$ , logo, sua área é

$$S(J_6) = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{79}{2} + 99 - 1 = 39,5 + 98 = 137,5 \text{ u.a.} \quad (\text{A.100})$$

Por fim, basta somarmos as áreas dos três polígonos,

$$S(2011) = J_4 + J_5 + J_6 = 1,5 + 4,5 + 137,5 = 143,5 \text{ u.a.} \quad (\text{A.101})$$

Dessa forma, em 2011, a região urbana do município de Joinville, nas condições dadas, tinha aproximadamente 143,5 u.a (unidades de área).

Resta agora determinarmos qual foi a porcentagem de crescimento da região urbana de Joinville entre 1966 e 2011. Seja  $P$  o crescimento percentual, temos:

$$P = \left( \frac{143,5}{38} \right) \times 100 = (3,7763...) \times 100 \approx 378\%. \quad (\text{A.102})$$

Portanto, a área urbana do município de Joinville em 2011 ocupa 378% da área que ocupava em 1966.

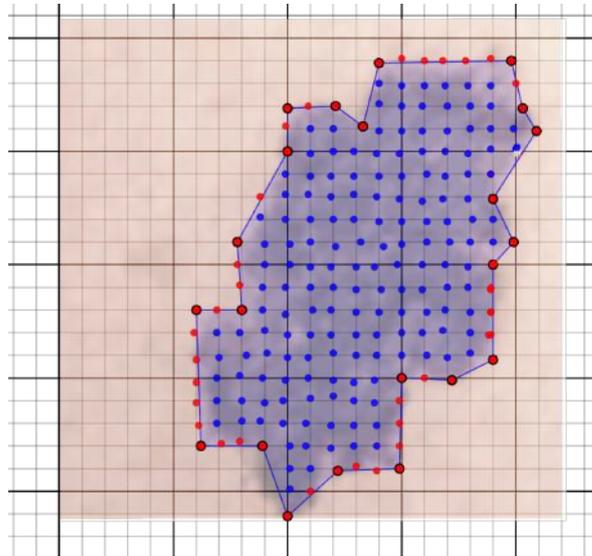
#### A.6.4.3 Resolução da Atividade Avaliativa - Aula 4

Para essa atividade, será muito difícil os estudantes chegarem ao mesmo resultado pois a sua solução vai depender de como inscreverá o melanoma da imagem dentro de um polígono. Dessa forma, vamos apresentar uma possível solução e o ideal é que os estudantes encontrem um valor aproximado ao que será aqui determinado. Seria importante o Professor(a) construir seu próprio polígono em torno da mancha e determinar o valor da área do melanoma, inclusive, é bem provável que seu resultado não seja idêntico ao nosso.

**Resolução.**

Inicialmente, temos que circunscrever a região do melanoma em uma região poligonal. Observe a Figura A.51.

Figura A.51 – Polígono circunscrevendo um melanoma.



Fonte: Autoria própria.

Após construído o polígono que circunscreve a região, pela contagem dos pontos sobre o perímetro temos  $B = 51$  e para os pontos internos temos  $I = 168$ . Aplicando os valores na fórmula de Pick, a área  $S(M)$  do melanoma é:

$$\begin{aligned} S(M) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{51}{2} + 168 - 1 \\ &= 25,5 + 167 = 192,5. \end{aligned} \tag{A.103}$$

A mancha ocupa 192,5 quadradinhos da malha, cada um com  $0,4 \text{ mm}$  de lado, então a área de cada quadradinho é  $(0,4)^2 = 0,16 \text{ mm}^2$ . Portanto, a área é  $192,5 \times 0,16 = 30,8 \text{ mm}^2$ .

#### A.6.4.4 Resolução das Atividades Complementares – Aula 4

As atividades complementares podem ser aplicadas aos estudantes que solucionarem mais rápido a atividade principal da aula e também propostas como tarefas. Salientamos que as atividades complementares *fazem parte do processo de aprendizagem do conteúdo*. Essa atividade deve ser corrigida pelo professor na aula seguinte àquela onde foi proposta como tarefa.

**Resolução da questão 1:**

Para a área  $S_1$  temos  $B = 10$  e  $I = 0$ , logo, Pela fórmula de Pick,

$$S_1 = \frac{10}{2} + 0 - 1 = 5 - 1 = 4 \text{ u.a.} \tag{A.104}$$

Por se tratar de uma simples aplicação da fórmula, apresentaremos apenas os resultados para as demais áreas.

$$S_2 = 5,5 \text{ u.a.}$$

$$S_3 = 6,5 \text{ u.a.}$$

$$S_4 = 3,5 \text{ u.a.}$$

(A.105)

**Resolução da questão 2:**

A área alaranjada do logotipo é dada pela diferença entre a área do círculo de centro  $O$  e o polígono marrom no interior desse círculo.

Pelo Teorema de Pick o polígono marrom tem área  $4,5 \text{ cm}^2$ .

O círculo de centro  $O$ , usando  $\pi = 3,14$  tem área  $11,775 \approx 11,8 \text{ cm}^2$ .

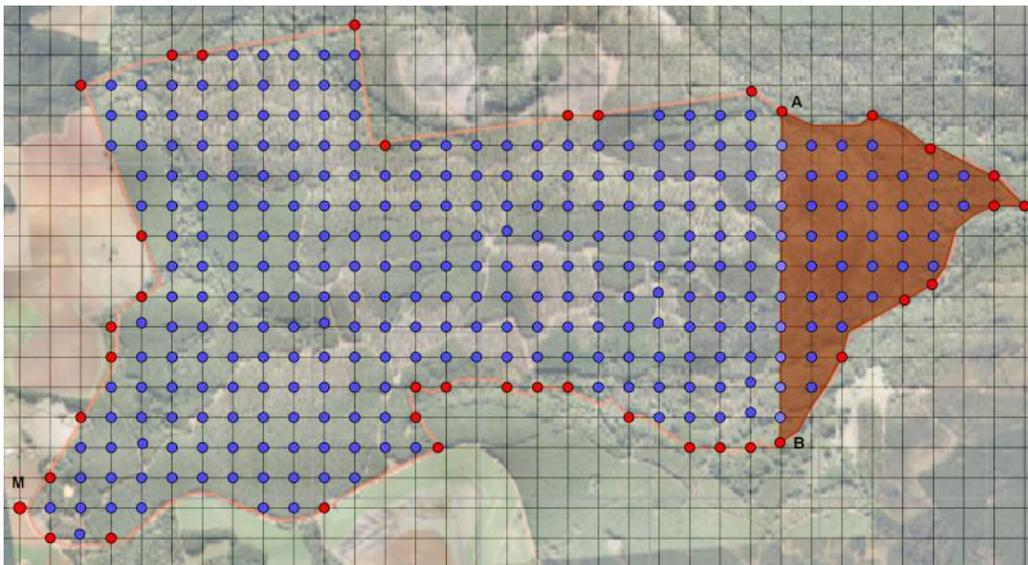
A diferença entre a área do círculo de centro  $O$  e o polígono marrom no interior desse círculo é o valor da área alaranjada:  $11,8 - 4,5 = 7,3 \text{ cm}^2$

Portanto, a área marrom é  $4,5 \text{ cm}^2$  e a área alaranjada é  $7,3 \text{ cm}^2$ .

**Resolução da questão 3:**

Inicialmente, vamos efetuar a contagem dos pontos de coordenadas inteiras sobre o perímetro da fazenda (pontos vermelhos) e dos pontos contidos no interior da fazenda (pontos azuis).

Figura A.52 – Uma possível contagem para os pontos da rede quadricular.



Fonte: Autoria própria.

A Figura A.52 apresenta uma possível contagem que gerou os dados dessa resolução. Observe o ponto M da Figura A.52, esse ponto está bem próximo a um ponto de coordenadas inteiras, logo, o consideramos. Se observar, há mais pontos na figura que usamos esse critério.

Sobre o perímetro da fazenda contamos o total de  $B = 40$  pontos, e no interior da fazenda, contamos o número de  $I = 295$  pontos. Pelo Teorema de Pick, a área da fazenda é aproximadamente

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{40}{2} + 295 - 1 \\ &= 20 + 294 \\ &= 314 \text{ u.a.} \end{aligned} \tag{A.106}$$

Faremos a mesma contagem para a região à direita do segmento  $AB$ .

Na parte indicada como provável reserva legal, sobre seu perímetro contamos o total de  $B = 20$  pontos, e no interior dessa área, contamos o número de  $I = 33$  pontos. Pelo Teorema de Pick, a área da fazenda é, aproximadamente,

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{20}{2} + 33 - 1 \\ &= 10 + 32 \\ &= 42 \text{ u.a.} \end{aligned} \tag{A.107}$$

Agora, basta conferir se a área que o proprietário indicou para ser a Reserva Legal equivale a 20% de toda a propriedade,

$$\left( \frac{42}{314} \right) \cdot 100\% \approx 13,38\% \tag{A.108}$$

Não esperamos que outra pessoa, ao resolver esse problema obtenha os mesmos valores, porém, o resultado deve ser aproximado e a conclusão final deve ser a mesma.

Portanto, a área desejada é muito inferior à porcentagem indicada na Lei.

### A.6.5 Resolução das Atividades da aula 5

Professores(as) a correção das atividades é um dos momentos fundamentais desse modelo de aula, tenha em mente que para uma melhor aprendizagem, na correção de cada atividade, exceto a Atividade Motivadora, você deve estimular os estudantes a exporem suas ideias e resoluções inclusive convidando-os à lousa para apresentarem seus raciocínios à turma, antes de você iniciar sua correção.

Nessa aula, abordamos a Soma de Riemann, esse conteúdo não faz parte do currículo do Ensino Médio, por isso, propomos atividades simples e elaboradas de forma a fazer o estudante entender a ideia principal relacionada ao tema.

#### A.6.5.1 Resolução da Atividade Motivadora – Aula 5

Professores(as) a Atividade Motivadora dessa aula já está resolvida no texto introdutório, basta ler esse texto e desenvolver as ideias e resoluções da forma com que estão expostas. Procurem detalhar bem a explicação dessa atividade motivadora, pois a partir dela, se desencadeará todos os outros momentos da aula.

#### A.6.5.2 Resolução da Atividade Principal – Aula 5

Professores(as), sugerimos que os alunos resolvam em duplas ou trios essa atividade. Procurem circular pela sala durante esse momento para esclarecerem eventuais dúvidas e acompanhar o desenvolvimento das resoluções que estão sendo construídas, e, observem os seguintes detalhes para a condução desse momento:

- Procurem formar equipes em que os integrantes apresentem o mesmo nível de aprendizagem, para que possam avançar de maneira homogênea. Assim evitamos que algum integrante da equipe acompanhe passivamente a construção da resolução.
- Leiam o enunciado junto com a turma e certifiquem-se de que todos estão acompanhando e prestando atenção.
- Após a leitura, peçam que por alguns instantes, cada um pense no problema, antes de compartilhar suas ideias com os colegas de equipe e iniciarem a resolução em conjunto.

Inicialmente é solicitado aos estudantes que refaçam o exemplo resolvido na Atividade Motivadora, mas com os 4 retângulos circunscritos à figura. Não detalharemos essa resolução, pois é análoga à resolvida no texto. Os alunos devem obter os seguintes valores:

A área do retângulo de altura  $f(5)$  é  $77,5 \text{ u.a.}$

A área do retângulo de altura  $f(10)$  é  $70,0 \text{ u.a.}$

A área do retângulo de altura  $f(15)$  é  $57,5 \text{ u.a.}$

A área do retângulo de altura  $f(20)$  é  $40 \text{ u.a.}$

Portanto a área total é  $77,5 + 70 + 57,5 + 40 = 245 \text{ u.a.}$

Note que o valor real dessa área se encontra em um intervalo entre  $185 \text{ u.a.}$  e  $2455 \text{ u.a.}$  Isso traz uma margem de erro muito grande, logo, fazer partições de 4 retângulos não foi uma boa decisão.

Na soma inferior com 10 retângulos a área deve ser  $204,4 \text{ u.a.}$ , e na soma superior com 10 retângulos, a área obtida deve ser  $228,4 \text{ u.a.}$ . Omitiremos esses cálculos, pois são análogos aos que já foram apresentados na Atividade Motivadora. E nesse caso, o valor exato da área está entre  $204,4 \text{ u.a.}$  e  $228,4 \text{ u.a.}$ . Note que para a partição com 10 retângulos, conseguimos estreitar um pouco mais o intervalo onde se situa o valor exato da área da região sob a curva. Agora, resta respondermos as perguntas da atividade.

- a) Em qual intervalo se situa a área procurada?

**Resposta.** O valor exato da área pertence ao intervalo  $[204,4, 228,4]$

- b) Observando os gráficos das Figuras A.37 e A.38, o que diferencia a soma inferior da soma superior?

**Resposta.** A soma superior é formada por retângulos circunscritos à região, logo, essa soma terá um valor maior que a soma inferior, onde os retângulos estão inscritos em tal região.

- c) Qual será o comportamento dessa diferença quando aumentarmos o número de retângulos?

**Resposta.** Conforme aumentamos o número de retângulos, a diferença entre as somas superior e inferior será cada vez menor.

- d) Quantos retângulos devemos usar para que a diferença entre os valores obtidos na soma superior e na soma inferior seja muito próxima de zero? E nesse caso, encontraremos apenas um valor aproximado para a área? Justifique.

**Resposta.** Devemos usar um número de retângulos acima de qualquer valor que se possa imaginar, por maior que seja, essa é uma maneira de dizer que o número de retângulos tende ao infinito, e para esse caso, a diferença entre as somas será muito próxima de zero. Quanto à soma das áreas dos infinitos retângulos, as figuras que trabalhamos, sugerem que há um valor limite para a soma, e esse limite é dado pela área da figura. A medida que o número de retângulos  $n$  cresce, a soma das áreas dos retângulos aproximam-se desse valor limite, chegando infinitamente próximo a ele, porém nunca no valor exato.

### A.6.5.3 Resolução da Atividade Avaliativa – Aula 5

Devido ao processo ser muito similar a Soma de Riemann, não iremos detalhar as resoluções, basta calcular a área de cada trapézio e efetuar a soma de todas elas. Os alunos devem encontrar o valor  $192,6 \text{ u.a.}$  para a área solicitada. Observe que essa aproximação por trapézios é mais precisa que a usada nas atividades da aula, feita com retângulos.