UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

BRUNA ZIGOVSKI BIAOBOCK

Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio

Joinville
2020

BRUNA ZIGOVSKI BIAOBOCK

Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas–CCT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse

Coorientador: Prof. Dr. Rogério de Aguiar

Joinville

2020

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da

Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,

com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Biaobock, Bruna Zigovski
Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio / Bruna Zigovski Biaobock. -- 2020.
144 p.

Orientador: Fernando Deeke Sasse
Coorientador: Rogério de Aguiar
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2020.

1. Matemática financeira. 2. Financiamentos. 3. Empréstimos. 4. Ensino médio. I. Sasse, Fernando Deeke. II. Aguiar, Rogério de. III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Titulo.

BRUNA ZIGOVSKI BIAOBOCK

Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional do Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse

Instituição: CCT/UDESC (Presidente)

Prof. Dr. Volnei Soethe

Instituição: CCT/UDESC

Prof. Dr. Milton Procópio de Borba

Instituição: IFSULDEMINAS/Inconfidentes

Ao meu marido.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar saúde e proteção em toda essa caminhada.

Agradeço ao meu marido por todo o incentivo e paciência durante esses anos de estudo.

Agradeço a toda a minha família pelo apoio direta e indiretamente, principalmente aos meus pais por toda a ajuda recebida.

A todos os meus colegas do mestrado por toda a ajuda e companheirismo.

A todos os professores do curso por todo o aprendizado e evolução.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal colaborar com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos do primeiro ano do ensino médio através da elaboração de uma caderno de atividades com foco em financiamentos e empréstimos. Esse material salienta a tomada de decisões por parte dos educandos quando a frente dessas operações no cotidiano, portanto é uma alternativa que pode auxiliar professores que trabalham o conteúdo de matemática financeira em sala de aula e que buscam a conexão da teoria com a realidade. O presente trabalho inicia apresentando uma análise da matemática financeira contida nos documentos oficiais que norteiam a educação no país, apresenta a definição e exemplos de conceitos bastante utilizados na matemática financeira, como juro, taxa de juro, valor atual e futuro, séries uniformes e sistemas de amortização e também descreve os principais tipos de financiamentos e empréstimos utilizados atualmente no Brasil. Como resultado possui um caderno de atividades com questões que enfatizam a tomada de decisões diante de financiamentos, empréstimos e outras situações financeiras.

Palavras-chaves: Matemática financeira. Financiamentos. Empréstimos. Ensino médio.

Abstract

This work has as main objective to collaborate with the teaching and learning process of the students of the first year of high school through the elaboration of an activity book focusing on financing and loans. This material highlights students' decision-making when in charge of these operations in everyday life, so it is an alternative that can assist teachers who work on the content of financial mathematics in the classroom and who seek the connection of theory with reality. The present work begins by presenting an analysis of the financial mathematics contained in the official documents that guide education in the country, presents the definition and examples of concepts widely used in financial mathematics, such as interest, interest rate, current and future value, uniform series and systems amortization and also describes the main types of financing and loans currently used in Brazil. As a result, it has an activity book with questions that emphasize decision-making in the face of financing, loans and other financial situations.

Keywords: Financial math. Financing. Loans. High school.

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

ABAC	Associação Brasileira de Administradoras de Consórcio
BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CDC	Crédito Direto ao Consumidor
COPOM	Comitê de Política Monetária
INSS	Instituto Nacional do Seguro Social
IOF	Imposto sobre Operações Financeiras
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCSC	Proposta Curricular de Santa Catarina
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAA	Sistema de Amortização Americano
SAC	Sistema de Amortização Constante
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e Custódia

Sumário

1 Introdução

A matemática financeira contribui para o entendimento dos cálculos que envolvem as operações que ocorrem nas finanças do cotidiano. Por essa importância deve ser trabalhada desde o início da formação dos indivíduos. Logo, na escola, ela deverá ter espaço dentro do currículo de modo a fornecer as ferramentas necessárias para os alunos lidarem com problemas que envolvem a matemática financeira. Quando focamos nos adolescentes do ensino médio, uma pesquisa intitulada "Juventude na escola - por que frequentam?"feita pelo Ministério da Educação, Organização dos Estados Interamericanos e Faculdade Latino-Americana de Ciências Sociais (ZINET, 2016) aponta que mais da metade dos estudantes concilia ou já conciliou trabalho e estudo, o que faz com que eles entrem em contato com os aspectos financeiros da relação trabalhista e com a necessidade de gerenciar seus salários. A partir daí surge a vontade e a necessidade de adquirir produtos e serviços. Como a maioria não trabalha a muito tempo, surge a necessidade de procurar financiamentos ou empréstimos para a aquisição dos bens de consumo, e com pouco conhecimento dessas operações, é capaz do indivíduo acabar se envolvendo em um plano que o fará pagar mais do que o necessário, quando comparado com outros planos que podem apresentar condições melhores, como taxas de juro menores, por exemplo. Com base nisso, percebe-se a relevância de se trabalhar esses temas quando se aborda a matemática financeira no ensino médio.

Existem vários trabalhos relacionados à matemática financeira e ao ensino médio, mas quando se trata de enfatizar os financiamentos e empréstimos aplicados no ensino médio, nota-se que não existem muitas produções. Entre alguns dos poucos trabalhos que abordam essa temática específica temos os de Araújo (2013), Fernandes (2014), Neto (2014) e Pitzer (2018).

A matemática financeira deve ser melhor aplicada em sala de aula. Oliveira (2013, p. 5) diz que " trazer a educação financeira para o sistema de ensino não significa oferecer informações financeiras ou conselhos. A escola precisa contribuir com a formação de indivíduos capazes de buscar novas informações e se adaptarem a novas situações". Um dos problemas encontrados é a falta de contextualização por parte dos professores que acabam trabalhando a matemática financeira de maneira mecânica com aplicação de fórmulas apenas, ao invés disso,

> se faz necessário à aplicação de metodologias que tragam o cotidiano para as salas de aula, promovendo o desenvolvimento de nossos alunos quanto ao domínio de cálculos com porcentagens, acréscimos, descontos, lucro, prejuízo, capital, taxa de juros, montante, regime de capitalização, juros simples, juros compostos e parcelas, para que eles possam avaliar a adequação de propostas de intervenção na realidade e assim fazer as devidas aplicações destes conhecimentos matemáticos em situações reais, em especial, em outras áreas do conhecimento. (OLIVEIRA, 2013, p. 6).

Outros problemas também podem levar à falta de aprendizagem da matemática financeira no ensino básico. Segundo Gisele Valle de Farias:

> A educação financeira é fundamental para a formação de um cidadão crítico e consciente de suas decisões. Entretanto, esse conteúdo é, muitas das vezes, negligenciado pelas escolas e, em particular, pelos professores. Quando lecionada no ensino médio, a disciplina é abordada com grau de relevância baixíssimo, com exemplos e exercícios que "fogem" do nosso cotidiano. Acreditamos que isso se dê, em parte, pela formação deficiente do licenciado nesse campo da matemática. (FARIAS, 2013, p. 7).

Para então desenvolver o estudo da matemática financeira no ensino médio de maneira efetiva, precisa-se, além de desenvolver estratégias de ensino voltadas aos alunos, criar trabalhos que auxiliem professores a ensinar esse conteúdo em sala de aula de maneira mais eficaz.

De maneira pessoal, a matemática financeira sempre me despertou curiosidade. Moro no interior de uma pequena cidade e sempre vi pessoas caindo em golpes de vendedores de porta em porta ou utilizando operações bancárias sem nem compreender seu funcionamento. Será que falta a informação da matemática financeira pra que essas pessoas consigam analisar os processos de compra e venda de forma mais crítica, evitando que caiam em golpes nessa área, ou para que compreendam o que acontece com seu dinheiro numa operação financeira?

Quando comecei a lecionar nas escolas públicas, principalmente de ensino médio, senti que esse problema não era apenas com pessoas do interior que não tem muito acesso à informação, mas até adolescentes que possuem acesso constante à internet apresentam dificuldades no entendimento de finanças, com dificuldade até em calcular o troco de uma conta pequena. Resolvi, finalmente, prestar mais atenção e trabalhar a matemática financeira em sala de aula com mais profundidade depois que li uma matéria sobre educação financeira trabalhada em uma escola de Santa Catarina por um professor de matemática da revista Its intitulada "Economia da moeda nossa de cada dia", onde nessa matéria havia uma informação do SPC Brasil de janeiro de 2018 de que 20% dos jovens entre 18 e

24 anos já eram inadimplentes (INÁCIO, 2018). O que faz com que jovens que acabaram de sair do ensino médio se apropriem de dívidas que não conseguem pagar?

A matemática financeira é trabalhada no ensino médio de maneira superficial, não abordando muito mais do que porcentagem, juros simples e compostos. Pela sua importância na preparação dos adolescentes para o exercício pleno da cidadania, deveria ter mais espaço no currículo da educação básica, abordando também outros assuntos relacionados a esse tema, tais como o funcionamento dos cartões de crédito, investimentos, economia, financiamentos e empréstimos.

Os alunos de ensino médio, em sua maioria, se já não estão no mercado de trabalho, estão próximos dessa etapa, portanto, o conhecimento da matemática financeira pode auxiliar os jovens nas tomadas de decisões importantes. Este trabalho tem foco no primeiro ano do ensino médio pelo fato de, nessa idade, começarem a trabalhar. Então é útil que eles possam adquirir a consciência financeira antes de se apropriarem de dívidas, o que já acontece muito no terceiro ano do ensino médio, quando os alunos completam 18 anos.

O objetivo geral desse trabalho é elaborar um caderno de atividades sobre financiamentos e empréstimos voltados para turmas de primeiro ano do ensino médio. E entre os objetivos específicos estão investigar o que os documentos oficiais nacionais e estaduais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Proposta Curricular de Santa Catarina propõe sobre a matemática financeira na educação básica, efetuar o estudo dos conceitos de matemática financeira que são a base para a compreensão do funcionamento de financiamentos e empréstimos, como juros simples e composto, taxas proporcionais, equivalentes, efetivas e nominais, séries uniformes, tipos de sistemas de amortização, entre outros, analisar e relatar a forma de operação de alguns tipos de financiamentos disponíveis no mercado atual, como o CDC (Crédito Direto ao Consumidor), o Leasing e o Consórcio, analisar e relatar a forma de operação de alguns tipos de empréstimos disponíveis no mercado atual, como o empréstimo pessoal, o empréstimo consignado e o empréstimo por penhor e criar uma sequência de atividades sobre financiamentos e empréstimos para aplicar com turmas primeiro ano do ensino médio.

Nesse contexto, a presente pesquisa visa a criação de um caderno de atividades, para promover a aprendizagem dos alunos do primeiro ano do ensino médio. Diante da problemática levantada surge a seguinte questão de pesquisa: Quais as possibilidades de abordagem ao se trabalhar financiamentos e empréstimos no primeiro ano do ensino médio?

2 Revisão de literatura

A educação financeira pode ser trabalhada na educação básica de diversas maneiras. É importante desenvolver o olhar crítico dos alunos diante de decisões relacionadas nas finanças. Para isso, uma alternativa que pode ser eficaz é a inserção de financiamentos e empréstimos no processo de ensino e aprendizagem da matemática financeira.

Ao se analisar os trabalhos sobre essa temática, verifica-se que existem variados estudos, que envolvem diferentes abordagens. O levantamento bibliográfico foi realizado a partir dos seguintes descritores: Matemática financeira; Financiamentos; Empréstimos; Ensino médio. Os resultados são mostrados no quadro 1 com dados de 2019 do Portal BDTD, no quadro 2 com dados de 2019 do Portal Capes e no quadro 3 com dados de 2019 do Portal PROFMAT.

Quadro 1 – Portal BDTD

PALAVRA-CHAVE	MF	F	E	F + E	F + EM	E + EM	F + E + EM
PRODUÇÕES	701	12418	937	206	320	21	8

Fonte: Autora

Quadro 2 – Portal Capes

PALAVRA-CHAVE	MF	F	E	F + E	F + EM	E + EM	F + E + EM
PRODUÇÕES	57112	967	1072	1938	181432	1181519	182249

Fonte: Autora

Quadro 3 – Portal PROFMAT

PALAVRA-CHAVE	MF	F	E	F + E	F + EM	E + EM	F + E + EM
PRODUÇÕES	135	7	1	0	0	0	0

Fonte: Autora

Legenda: Matemática financeira (MF); Financiamentos (F); Empréstimos (E); e Ensino médio (EM).

Fazendo-se um levantamento das produções já existentes sobre a matemática financeira, principalmente relacionada a financiamentos e empréstimos, foram selecionadas as seguintes produções:

A dissertação de mestrado de Neto (2014) sob o título "matemática financeira: o estudo de empréstimos consignados e consórcios voltados para o ensino médio" trata da matemática financeira focando em empréstimos consignados e consórcios, assuntos que não são abordados normalmente no ensino médio. Iniciando pela história da matemática financeira e do surgimento de juros, seguindo pelas definições e exemplos envolvendo juros simples e compostos, e posteriormente explicando o funcionamento dos empréstimos consignados e consórcios, o autor mostra com exemplos e atividades, que é possível se trabalhar com esses assuntos no ensino médio, pois os alunos já têm a base para a compressão desses esquemas, que são juros simples e compostos, descontos e progressão geométrica. Ele também afirma que a matemática financeira aliada a empréstimos e consórcios pode contribuir para a formação crítica dos educandos, fazendo com que os mesmos tomem decisões nas finanças com mais credibilidade e segurança.

A dissertação de Fernandes (2014) sob o título "matemática financeira: uma abordagem sobre financiamentos" se aproxima deste trabalho. Ela relata um pouco da história da matemática financeira, seguindo para definições de elementos importantes desse conteúdo, como juros compostos, descontos compostos, rendas certas ou anuidades, focando nas definições e conhecimento de tudo que envolve financiamentos de automóveis e bens de valores não muito elevados. Em sua metodologia, apresenta vários exemplos sobre os conceitos estudados, deixando claro suas finalidades. O trabalho apresenta também, de forma detalhada, duas categorias de financiamentos para compra de um carro, o CDC e o Leasing. O autor preocupa-se em mostrar os cálculos necessários para a compreensão do funcionamento desses financiamentos e compara-os com situações reais do cotidiano para que se possa perceber quando se há propostas enganosas. Ele conclui afirmando que a matemática financeira é uma parte da matemática com grande aplicabilidade e que pode aproximar o aluno da disciplina, que pode também tornar esse aluno mais crítico em sua relação com o dinheiro e que seu trabalho foi desenvolvido para que o professor possa utilizá-lo construindo uma matemática financeira onde a "utilidade justifique a necessidade de aprender".

A dissertação de mestrado de Araújo (2013) sob o título "construção de calculadoras de financiamentos usando o Microsoft Excel: uma proposta de ensino para a matemática financeira" se inicia com definições de conteúdos básicos da matemática financeira, como razão, porcentagem, juros simples e compostos. Em sua metodologia, utiliza muitos exemplos cotidianos, onde afirma que o objetivo mais importante de seu trabalho é desenvolver o raciocínio para que o aluno entenda o que acontece nas operações. Posteriormente, explica dois métodos muito utilizados em financiamentos de bens de maior valor, como imóveis, os sistemas SAC e Price. Seu foco principal é a construção de calculadoras no Microsoft Excel, que utilizam esses métodos, para cálculo de financiamentos e verificação de propostas reais, que muitas vezes são enganosas. Essas calculadoras se aproximam do que é utilizado em bancos e agências. A proposta do autor é utilizá-las com o objetivo de despertar curiosidade no aluno pra entender e investigar operações financeiras do cotidiano.

A dissertação de mestrado de Pitzer (2018) sob o título “financiamentos e investimentos: uma proposta para o ensino médio” trabalha o tema de forma bem detalhada, explicando todos os tópicos que estão envolvidos nos conteúdos de financiamentos e investimentos. Inicia analisando a forma como a matemática financeira é abordada no ensino básico público no Brasil, o que dizem os parâmetros curriculares nacionais, a BNCC, a proposta curricular de SC e de que maneira os livros didáticos tratam desse tema no ensino médio. Inclui alguns fatos históricos sobre a matemática financeira e explica vários elementos básicos, como juros, taxas e séries uniformes. Posteriormente, de forma muita completa, analisa vários itens sobre os sistemas de amortização de empréstimos e noções de investimentos financeiros, inclui também o cálculo financeiro em contexto inflacionário, e por fim, propõe algumas atividades sobre matemática financeira que podem ser aplicadas no ensino médio. Essa sequência didática apresentada pelo autor em seu trabalho inclui situações problema em financiamento e investimento para que desenvolva no aluno a sabedoria necessária para saber qual decisão tomar. Além de auxiliar o aluno, a proposta é orientar o professor, para que conheça o cenário financeiro de algumas instituições de financiamento brasileiras.

2.1 Documentos oficiais

Os conceitos, definições, fórmulas e aplicações que serão estudados no decorrer dessa dissertação devem ser fundamentados teoricamente para que tenham validade. Portanto, para justificar a necessidade de trabalhar com conteúdos da matemática financeira no primeiro ano do ensino médio que vão além dos conteúdos que são apresentados atualmente para essa turma, procuramos argumentos apontados em documentos oficiais da educação básica. Os documentos que servirão de base para essa justificativa são: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2000), criado para orientar a ação pedagógica em todo o Brasil; Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), documento que conduz o ensino nas escolas brasileiras e trata dos conteúdos a serem trabalhados em cada ano; Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, 2017), legislação que rege toda a educação nacional; Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) (SANTA CATARINA, 2014), conjunto de orientações curriculares para a rede pública de ensino de Santa Catarina.

A Proposta Curricular de Santa Catarina deixa claro que “Desde o início do percurso formativo é importante considerar o sujeito em sua integralidade, como um ser biológico, afetivo, social, histórico e cultural em contato com o meio físico e social” (SANTA CATARINA, 2014, p. 165). Essa integralidade deve ser considerada em todas as etapas da educação, inclusive na disciplina de matemática, como diz nesse mesmo documento,

> Os conceitos matemáticos contribuem na formação integral dos estudantes em sua participação na vida social, econômica e política para compreensão da realidade, tendo como objetos de estudo deste conhecimento as grandezas e formas, desenvolvendo instrumentos para conduzir a vida pessoal, assim como para incorporar saberes científicos e suas correlações sociais. (SANTA CATARINA, 2014, p. 163).

A matemática financeira está inclusa nesse propósito, e para que essa formação ocorra de maneira apropriada, cabe à escola com todo seu conjunto pedagógico oportunizá-la. Assim, os professores têm um papel fundamental nesse desenvolvimento que deve incluir um currículo bem estruturado. De acordo com os PCN,

> é indispensável que os professores se apropriem não só dos princípios legais, políticos, filosóficos e pedagógicos que fundamentam o currículo proposto, de âmbito nacional, mas da própria proposta pedagógica da escola. Outro reconhecimento, portanto, aqui se aplica: se não há lei ou norma que possa transformar o currículo proposto em currículo em ação, não há controle formal nem proposta pedagógica que tenha impacto sobre o ensino em sala de aula, se o professor não se apropriar dessa proposta como seu protagonista mais importante. (BRASIL, 2000, p. 91).

Indo de acordo com a formação integral citada, a escola deve preparar seus alunos para a cidadania. De acordo com a BNCC,

> cabe às escolas de ensino médio contribuir para a formação de jovens críticos e autônomos, entendendo a crítica como a compreensão informada dos fenômenos naturais e culturais, e a autonomia como a capacidade de tomar decisões fundamentadas e responsáveis. (BRASIL, 2018, p. 463).

Para que a escola forme jovens críticos e autônomos, deve apresentar os conteúdos não apenas de maneira teórica, mas também relacionando-os com o cotidiano do educando. Assim, a BNCC cita,

> no ensino médio o foco é a construção de uma visão integrada da matemática, aplicada à realidade [...]. Nesse contexto, quando a realidade é

> a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do ensino médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 518).

Diante do que é apresentado nesses documentos, enxerga-se a necessidade de trabalhar conteúdos como a matemática financeira na educação básica, indo além do que é apresentado atualmente em sala de aula. Analisando os PCN, que foi criado para orientar a ação pedagógica, se observa que o documento pouco cita o ensino da matemática financeira. De maneira específica, esse tema só é citado nos PCN+, que são Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002). Esse documento quando trata do tema Álgebra, relata que ela se apresenta na vivência cotidiana, entre outros, como instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral. Posteriormente, aborda a matemática financeira como aplicação de outros conteúdos,

> As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (BRASIL, 2002, p. 118).

Já a BNCC trás uma abordagem mais desenvolvida do tema matemática financeira, numa perspectiva diferente dos PCN. Ela cita inicialmente o tema educação financeira, onde diz,

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas, a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre esses temas, destacam-se: [...], educação financeira e fiscal [...]. (BRASIL, 2018, p. 19).

Logo, recomenda trabalhar o tema da educação financeira de maneira transversal e conjunta entre as disciplinas, exemplificando posteriormente com um projeto entre as disciplinas de matemática e história sobre dinheiro e sua função na sociedade entre outros.

A área de matemática é dividida, na parte do ensino fundamental da BNCC, em cinco unidades temáticas, sendo a primeira: Números. Esta unidade aborda novamente a educação financeira,

> Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. (BRASIL, 2018, p. 269).

A BNCC sugere que esses aspectos citados servem de contextos para o desenvolvimento da matemática financeira, inclusive.

A matemática financeira especificamente é citada em algumas habilidades do ensino fundamental e médio. No ensino médio, é relacionada com os conteúdos de função exponencial, função logarítmica e máximo e mínimo da função quadrática. Dentre essas habilidades, destacam-se,

- Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo nesses números. (EM13MAT104).
- Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões. (EM13MAT203).
- Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial. (EM13MAT303).
- Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da matemática financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros. (EM13MAT304).
- Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, matemática financeira, entre outros. (EM13MAT305).
- Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da matemática financeira ou da cinemática, entre outros. (EM13MAT503).

Diante disso, percebe-se que os documentos com PCN e PCSC não tratam com grande ênfase a matemática financeira, apesar de relatarem sua importância. Na maioria dos casos, sua aparição no documento é associada a outros conteúdos ou à sua abordagem como tema transversal, que não é obrigatório sua inserção no currículo, dificultando ainda mais o acesso à esse conhecimentos pelos jovens do ensino médio que necessitam de sua aprendizagem. Já a BNCC, que será obrigatória em todo ensino público a partir de

2022, apresenta uma outra visão, dando mais relevância ao assunto, conectando-o com a realidade, o que poderá auxiliar no tratamento desse conteúdo no ensino básico.

Tendo em vista a discussão da importância de se trabalhar a matemática financeira de forma significativa desde o ensino básico para que os jovens se tornem cidadãos críticos e responsáveis, essa dissertação colaborará com teoria e atividades para que, principalmente professores, possam melhorar suas práticas pedagógicas com relação a abordagem desse conteúdo, contribuindo no processo de ensino aprendizagem do ensino básico.

3 Procedimentos metodológicos

Do ponto de vista do modo como o problema é abordado, essa pesquisa é do tipo qualitativa. De acordo com Moreira (2011, p. 49),

> Os fenômenos de interesse da pesquisa qualitativa em ensino têm também a ver com ensino propriamente dito, aprendizagem, currículo, avaliação e contexto, mas são analisados sob outros pontos de vista. A sala de aula, por exemplo, é vista como um ambiente organizado social e culturalmente, no qual ações mudam constantemente, significados são adquiridos, trocados, compartilhados.

Este trabalho desenvolve a aprendizagem do conteúdo de matemática financeira, buscando a compreensão do funcionamento das operações de financiamentos e empréstimos. Do ponto de vista de seus objetivos, essa pesquisa é do tipo exploratória, que, de acordo com Kauark, Manhães e Medeiros (2010, p. 28), “objetiva a maior familiaridade com o problema, tornando-o explícito, ou à construção de hipóteses”. Este trabalho apresenta a chance de explorar a matemática financeira ao estudar as possibilidades de financiamentos e empréstimos, revendo conceitos e cálculos necessários para a compreensão dessas operações e relacionando-as com situações do dia a dia do educando. Neste trabalho, a metodologia busca o conhecimento da matemática financeira, com a confecção de um caderno de atividades que objetiva o entendimento das operações de financiamento e empréstimo, aos estudantes do primeiro ano do ensino médio. As atividades desenvolverão a capacidade dos educandos de diferenciar os regimes de juros simples e compostos, de conhecer vários tipos de financiamentos e empréstimos e de conseguir calcular prestações e taxas efetivas dessas operações.

4 Conceitos

4.1 Juros

No desenvolvimento da sociedade de acordo com o tempo, percebe-se a necessidade das pessoas de adquirir bens e serviços que iniciou o processo de trocas de mercadorias e, mais tarde, a criação da moeda. A ideia de juro vem do fato de que as pessoas preferem consumir seus bens no presente e não no futuro. Ou seja, havendo uma preferência temporal para o consumo, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio para que não haja consumo é o juro. (MATHIAS; GOMES, 2008).

Define-se juro como sendo a remuneração do capital a qualquer título. Assim, outras expressões podem ser utilizadas para a definição desse conceito, como a remuneração do capital empregado em atividades produtivas, o custo do capital de terceiros ou a remuneração paga pelas instituições financeira sobre o capital nelas aplicado. (PUCCINI, 2009).

O juro é representado na maioria dos casos por meio de uma taxa percentual que tem como referência uma unidade de tempo, podendo ser dia, mês, semestre, ano, entre outros.

Exemplos.

- 8% ao dia = 8% a.d.
- 2% ao mês = 2% a.m.
- 0,6% ao ano = 0,6% a.a.

Existem outras representações das taxas de juro além da percentual, como a fracionária e a decimal, que são utilizadas para efetuar os cálculos nas operações com taxa de juro, como mostra o quadro 4.

Quadro 4 – Formas da taxa de juro

Forma percentual	**Forma fracionária**	**Forma decimal**
15%	$\frac{15}{100}$	0,15
2%	$\frac{2}{100}$	0,02
0,6%	$\frac{0,6}{100} = \frac{6}{1000}$	0,006

Fonte: Autora

Para obter a quantidade em unidades monetárias de juro em um período, é necessário fazer a aplicação da taxa de juro sobre o capital da operação.

Exemplo. Qual o valor de juro que rende um capital de R$ 2000,00 aplicado a uma taxa de juro de 5% a.m. ao final de um mês?
Resolução. Temos que $5\% = 0,05$, logo, $5\% \cdot \text{R\$}\, 2000,00 = 0,05 \cdot 2000 = \text{R\$}\, 100,00\,.$

4.1.1 Juro simples

O regime de juro simples é o menos utilizado no sistema financeiro, por ser menos lucrativo. Nesse sistema o juro de cada período é sempre calculado em função do capital inicial aplicado. O juro do período, que não for pago no final do período, não é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. (PUCCINI, 2009).

Exemplo. Um capital de R$ 5000,00 é aplicado por 3 meses à taxa de juro de 2% a.m. Qual será o valor do juro ao final desse período?
Resolução.
Capital $(C) = \text{R\$}\, 5000,00\,.$
Taxa de juro $(i) = 2\%$ a.m.
Períodos $(n) = 3$ meses.
O juro J_1 após o primeiro mês é

$$J_1 = 5000 \cdot 0,02 = \text{R\$}\, 100,00\,. \tag{1}$$

Após o segundo mês, teremos

$$J_2 = 5000 \cdot 0,02 = \text{R\$}\, 100,00\,. \tag{2}$$

Da mesma forma após o terceiro mês

$$J_3 = 5000 \cdot 0,02 = \text{R\$}\, 100,00\,. \tag{3}$$

Portanto, o juro correspondente a todo o período será igual a soma dos juros dos três meses,

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = 100 + 100 + 100 = \text{R\$}\, 300,00\,. \tag{4}$$

Resolvendo diretamente, temos

$$J = 5000 \cdot 0,02 + 5000 \cdot 0,02 + 5000 \cdot 0,02 = \text{R\$}\,300,00\,. \tag{5}$$

Logo, se utilizarmos a notação geral, vemos que, um capital C aplicado a uma taxa i de juro simples, durante n períodos, gera o juro J, dado por

$$J = C\,i\,n\,. \tag{6}$$

Exemplo. Utilizando o exemplo anterior, vamos calcular o montante ao final do mesmo período.
Resolução. O montante será a soma do capital com o juro produzido, então

$$M = C + J = 5000 + 300 = \text{R\$}\,5300,00\,. \tag{7}$$

Como $J = C\,i\,n$, podemos reescrever (7) utilizando a notação geral, assim o montante M, resultante da aplicação de um capital C, durante n períodos, com uma taxa de juro i por período, no regime de juro simples é dado por

$$M = C + C\,i\,n = C(1 + i\,n)\,. \tag{8}$$

Exemplo. Qual é o rendimento de juro simples de um capital de R\$ 4560, 00, aplicado a um taxa de 3% ao mês, durante 6 meses?
Resolução. De acordo com os dados do problema, temos $C = 4560$, $i = 3\% = 0,03$ e $n = 6$, logo, usando a equação (6),

$$J = 4560 \cdot 0,03 \cdot 6 = 820,80\,. \tag{9}$$

Portanto, o rendimento será de R\$ 820, 80 em 6 meses.

Exemplo. Qual deverá ser o capital aplicado para que se tenha um montante de R\$ 12300, 00 ao final de dois anos com um taxa de juro de 10% ao ano no regime de juro simples?
Resolução. O montante é $M = 12300$, a taxa é $i = 10\% = 0,1$ e o número de períodos é $n = 2$. Usando a equação (8) temos

$$12300 = C(1 + 0,1 \cdot 2) \tag{10}$$

que implica em

$$12300 = 1,2C\,. \tag{11}$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = \frac{12300}{1,2} = \text{R\$}\,10250,00 \tag{12}$$

que é o capital que deve ser aplicado.

Exemplo. Um banco emprestou a quantia de R\$ 450, 00 a um cliente que deve devolver a quantia de R\$ 510, 00 ao final de três meses. Sabendo que foi empregado o regime de juro simples, qual a taxa de juro cobrada pelo banco?
Resolução. O montante é $M = 510$, o capital é $C = 450$ e o número de períodos é $n = 3$. Usando a equação (8) temos

$$510 = 450(1 + 3\,i) \tag{13}$$

que implica em

$$\frac{510}{450} - 1 = 3i \tag{14}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = \frac{0,13333}{3} = 0,0444 = 4,44\%\,\text{a.m.}, \tag{15}$$

que é a taxa de juro ao mês empregada pelo banco.

Exemplo. A distribuidora de energia elétrica Celesc do Estado de Santa Catarina cobra por atraso de pagamento em suas contas, além de multa e correção monetária, juro de mora de 1% ao mês. Ou seja, além da multa e da correção monetária, é cobrado juro simples de 1% que é dividido por 30 dias, isto é, $1\%/30 = 0,0333\%$ ao dia. Na matemática financeira consideramos sempre o mês comercial que contém 30 dias. Sendo assim, quanto pagará de juro de mora um proprietário de uma residência que atrasou sua conta no valor de R\$ 234, 58 por 16 dias?
Resolução. Sendo $C = 234,58$, $i = 0,000333$ e $n = 16$, usando a equação (6) obtemos

$$J = 234,58 \cdot 0,000333 \cdot 16 = 1,25\,. \tag{16}$$

Portanto, esse proprietário pagará R\$ 1, 25 de juro de mora nessas condições.

4.1.2 Juros compostos

O regime de juro composto possui um crescimento exponencial, consequentemente é mais lucrativo nas operações com mais de um período, o que faz com que seja o regime mais utilizado no sistema financeiro.

Neste regime, o juro de cada período, que não for pago no final do período, é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. O juro é capitalizado, e consequentemente, rende juro, o que faz com que esse regime seja conhecido como juro sobre juro. Assim, o juro de cada período é calculado sobre o saldo existente no início do respectivo período, e não apenas sobre o capital inicial aplicado. (PUCCINI, 2009).

Exemplo. Um capital de R\$ 1000, 00 foi emprestado à taxa de juro de 15% a.a. durante 3 anos. Vamos analisar o juro e o respectivo montante ao final de cada período.
Resolução. O juro e montante (equações (6) e (7)) ao final do primeiro, segundo e terceiro ano são dados respectivamente por

$$J_1 = \text{R\$}\,150,00,\ M_1 = \text{R\$}\,1150,00\,. \tag{17}$$

$$J_2 = \text{R\$}\,172,50,\ M_2 = \text{R\$}\,1322,50\,. \tag{18}$$

$$J_3 = \text{R\$}\,198,375,\ M_3 = \text{R\$}\,1520,88\,. \tag{19}$$

Os valores de J_2 e J_3 são diferentes de J_1 pelo fato do capital usado nesses casos ser o montante do ano anterior. O elemento que multiplica o capital em cada ano é $(1+i)$ sendo i a taxa de juro aplicada.
Primeiro período:

$$M_1 = C + C\,i = C(1+i)\,. \tag{20}$$

Segundo período:

$$M_2 = M_1 + M_1\,i = M_1(1+i) = C(1+i)\,(1+i) = C(1+i)^2\,. \tag{21}$$

Terceiro período:

$$M_3 = M_2 + M_2\,i = M_2(1+i) = C(1+i)^2\,(1+i) = C(1+i)^3\,. \tag{22}$$

Quarto período:

$$M_4 = M_3 + M_3\,i = M_3(1+i) = C(1+i)^3\,(1+i) = C(1+i)^4\,. \tag{23}$$

Em geral, no regime de juro composto, um capital C, aplicado à taxa i, em n períodos de tempo, gera o montante dado por

$$M_n = C(1+i)^n\,. \tag{24}$$

Exemplo. Qual será o montante de uma aplicação de um capital de R\$ 900,00, a uma taxa de 1,3% ao mês durante 8 meses?
Resolução. De acordo com os dados, temos $C = 900$, $i = 1,3\% = 0,013$ e $n = 8$, logo, usando a equação (24) obtemos

$$M = C(1+i)^n = 900(1+0,013)^8 = 900 \cdot 1,0138 = 900 \cdot 1,108857 = 997,97\,. \tag{25}$$

Portanto, o montante será de R\$ 997,97.

Exemplo. Paulo tomou um empréstimo à taxa de juro de 2,1% a.m. e o devolveu ao final de 4 meses no valor de R\$ 5900,00. Qual foi o capital emprestado por Paulo?
Resolução. Segundo o problema, o montante é $M = 5900$, a taxa é $i = 2,1\% = 0,021$ e o número de períodos é $n = 4$, assim, usando a equação (24) temos

$$5900 = C(1+0,021)^4\,. \tag{26}$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 5429,37\,. \tag{27}$$

Portanto, o capital emprestado foi de R\$ 5429,37.

Exemplo. Um capital de R\$ 3800,00 aplicado ao regime de juro composto durante 3 anos gerou um montante de R\$ 6100,00. Qual foi a taxa de juro usada na aplicação?
Resolução. O capital é $C = 3800$, o número de períodos é $n = 3$ e o montante $M = 6100$. Usando a equação (24) temos

$$6100 = 3800(1+i)^3\,, \tag{28}$$

onde temos

$$(1+i)^3 = \frac{6100}{3800} = 1,60526. \tag{29}$$

Aplicando a raiz cúbica em ambos os lados da equação, obtemos

$$1 + i = 1,170888. \tag{30}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 1,170888 - 1 = 0,170888 = 17,09\% \,\text{a.a.}, \tag{31}$$

que é a taxa de juro empregada ao ano na aplicação.

Exemplo. O rendimento da poupança em janeiro de 2020 é de 0,2588% a.m. Suponha que uma pessoa tenha vendido seu automóvel por R$ 35300,00 e decida investir esse dinheiro na poupança. Considerando que a mesma taxa de rendimento da poupança permanecerá pelos próximos meses, calcule seu montante após 7 meses de aplicação.
Resolução. O capital é $C = 35300$, a taxa de juro é $i = 0,2588\% = 0,002588$ e o número de períodos é $n = 7$. Usando a equação (24) obtemos

$$M = 35300(1 + 0,002588)^7 = 35300 \cdot 1,018257261 = 35944,48\,. \tag{32}$$

Portanto, o montante obtido após 7 meses de aplicação na poupança é de R$ 35944,48.

4.2 Taxa de juro

4.2.1 Taxas proporcionais e taxas equivalentes

A taxa proporcional está relacionada diretamente com o regime de juro simples. Duas taxas são proporcionais quando, apesar de expressas em unidades de tempo diferentes, geram o mesmo montante quando aplicado o mesmo capital por um mesmo período.

Exemplo. A taxa anual de juro proporcional a 5% ao mês é de $12 \cdot 5\% = 60\%$ a.a.

Taxas equivalentes possuem a mesma definição de taxas proporcionais, porém estão ligadas ao regime de juro composto. De acordo com Morgado e Carvalho (2015, p. 53), se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então

$$1 + I = (1 + i)^n\,. \tag{33}$$

Demonstração: Seja C o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $C(1+I)^1$. Como um período de tempo T equivale a n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $C(1+i)^n$. Logo,

$$C(1+I)^1 = C(1+i)^n \tag{34}$$

e

$$(1+I) = (1+i)^n \,. \tag{35}$$

Exemplo. A taxa de juro ao mês é $i = 5\% = 0,05$ e o número de períodos é $n = 12$. Usando a equação (33) temos

$$(1+I) = (1+0,05)^{12} \,. \tag{36}$$

Isolando I nesta equação obtemos

$$I = 0,795856 = 79,59\% \,\text{a.s.}, \tag{37}$$

que é a taxa anual de juro equivalente a 5% ao mês.

4.2.2 Taxa efetiva e taxa nominal

A taxa efetiva é aquela na qual há coincidência entre a unidade de tempo usada na taxa de juro e nos períodos de capitalização. Como por exemplo, 6% ao mês com capitalização mensal, ou 10% ao semestre com capitalização semestral.

Já a taxa nominal é aquela em que sua unidade de tempo não coincide com a unidade de tempo da capitalização. Esse tipo de taxa não deve ser utilizada no regime de juro composto por não representar uma taxa efetiva.

Exemplo. Juliana fez um investimento a juro de 7,2% ao semestre com capitalização mensal. Nesse investimento qual é a taxa de juro semestral?

Resolução. Como o investimento é de 7,2% ao semestre, isto é proporcional a 1,2% ao mês. Assim, a taxa de juro é $i = 1,2\% = 0,012$ e o número de períodos é $n = 6$. Usando a equação (33) temos

$$(1+I) = (1+0,012)^6 \,. \tag{38}$$

Isolando I nesta equação obtemos

$$I = 0,074195 = 7,42\% \,\text{a.s.}, \tag{39}$$

que é a taxa de juro semestral. A taxa de 7,2% ao semestre é nominal, enquanto a taxa de 7,42% ao semestre é efetiva.

4.3 Valor atual e valor futuro

Em uma aplicação, sabemos que uma quantia de dinheiro não terá o mesmo valor depois de certo tempo. Por exemplo, digamos que você empreste R\$ $3000,00$ para um amigo que deverá ser devolvido em dois anos. Dificilmente você aceitará receber os mesmos R\$ $3000,00$ ao final do empréstimo porque você sabe que esse dinheiro não tem mais o mesmo poder de compra, devido principalmente a inflação. E também porque você sabe que se tivesse investido esse dinheiro ele renderia mais ao final desse período. Logo, para analisar quantias de dinheiro através do tempo, devemos considerar uma única data, chamada de data focal.

Valor atual ou PV (que vem do inglês, *present value*) corresponde, portanto, ao valor da aplicação em uma data anterior à do vencimento. Para calcular o valor atual, precisa-se do valor nominal que é o valor do título na data de seu vencimento, a data focal e a taxa de juro utilizada na operação.

Exemplo. Maria tem uma dívida de R\$ $2000,00$ que deve ser quitada em um mês. Qual valor deve ser aplicado hoje a uma taxa de juro composto de 3% a.m. para que Maria tenha o valor da dívida em um mês?

Resolução. O montante é $M = 2000$, a taxa de juro é $i = 3\% = 0,03$ e o número de períodos é $n = 1$. Logo, obtemos

$$PV = \frac{2000}{(1,03)^1} = \text{R\$}\,1941,75\,, \tag{40}$$

que é o capital que deve ser aplicado.

Exemplo. Pedro tem 3 dívidas, de R\$ $500,00$, R\$ $780,00$ e R\$ $1250,00$, que devem ser quitadas em 2, 5 e 9 meses, respectivamente. Supondo que ele irá aplicar uma quantia em uma operação de juro composto com uma taxa de juro de 2% a.m. para pagar todas as dívidas, que quantia deverá ser aplicada por Pedro?

Resolução. Sendo PV o valor atual, temos

$$PV = \frac{500}{(1,02)^2} + \frac{780}{(1,02)^5} + \frac{1250}{(1,02)^9} = 2233,00\,. \tag{41}$$

Portanto, o valor a ser investido é de R\$ 2233, 00.

Em geral, dado valores C_1 na data t_1, C_2 na data t_2, C_3 na data t_3, ..., C_n na data t_n, o valor atual PV é o valor que aplicado a uma taxa de juro i gera as rendas C_1, C_2, C_3, ..., C_n,

$$PV = \frac{C_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{t_2}} + \frac{C_3}{(1+i)^{t_3}} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^{t_n}}\,. \tag{42}$$

Exemplo. Mariane pretende adquirir um aparelho de som no valor de R\$ 1800, 00. A vendedora da loja ofereceu a Mariane um desconto de 3,5% no pagamento à vista ou então os R\$ 1800, 00 parcelados em seis vezes sem entrada, sendo as três primeiras parcelas no valor de R\$ 200, 00 cada e as três últimas no valor de R\$ 400, 00 cada. Qual é a melhor opção para Mariane, sabendo que seu dinheiro vale 1% ao mês?

Resolução. Se Mariane optasse pelo pagamento à vista, teria que desembolsar R\$ 1737, 00. Vamos analisar com a ideia de dinheiro através do tempo se o parcelamento sugerido é mais vantajoso que o pagamento à vista. Usando a equação (42) temos

$$PV = \frac{200}{(1+0,01)^1} + \cdots + \frac{200}{(1+0,01)^3} + \frac{400}{(1+0,01)^4} + \cdots + \frac{400}{(1+0,01)^6} = 1729,99\,. \tag{43}$$

Portanto, não é vantagem para Mariane a compra à vista nessas condições. É mais vantajoso o pagamento parcelado que tem um valor atual de R\$ 1729, 99.

Nos exemplos acima, analisamos o valor atual trazendo valores para o tempo presente, mas essa não é a única maneira de comparar valores no tempo. A data focal a ser utilizada no cálculo também pode ser uma data futura, como a data de vencimento da última parcela de uma dívida, por exemplo, então, os valores são levados para o futuro no desenvolvimento do cálculo.

Vimos que quando queremos calcular o valor atual é necessário dividir o valor futuro por $(1+i)^n$. Logo, para calcular o valor futuro ou FV (do inglês, *future value*) basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$.

Dessa forma, dado valores C_1 na data t_1, C_2 na data t_2, C_3 na data t_3, ..., C_n na data t_n aplicados a uma taxa de juro i, geram na data n o valor futuro FV,

$$FV = C_1(1+i)^{t_n-t_1} + C_2(1+i)^{t_n-t_2} + C_3(1+i)^{t_n-t_3} + \cdots + C_n(1+i)^{t_n-t_n}\,. \tag{44}$$

4.4 Séries uniformes

Um grupo de quantias monetárias referidos a diversos tempos é chamado de série ou anuidade. A série é dita uniforme quando essas quantias forem todas iguais e tiverem intervalos de tempo iguais entre si. Nessas condições e levando em consideração o que foi visto em valor atual, temos:

$$PV = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}\,, \tag{45}$$

sendo PV o valor atual da série, referente a um período antes da primeira prestação, P o valor das prestações iguais, i a taxa de juro e n o número de prestações.

Nota-se que a expressão acima, da série uniforme, representa a soma de uma progressão geométrica de n termos, da forma,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\,. \tag{46}$$

sendo

$$a_1 = \frac{P}{(1+i)},\ q = \frac{1}{(1+i)}\,. \tag{47}$$

Substituindo os elementos da série uniforme na expressão da soma da progressão geométrica, temos:

$$PV = \frac{\frac{P}{(1+i)}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)}{1 - \frac{1}{(1+i)}} = \frac{P}{(1+i)} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)}{i} = P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n\, i}\,. \tag{48}$$

Multiplicando a expressão por

$$\frac{(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n}}\,, \tag{49}$$

obtemos

$$PV = P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n\, i} \cdot \frac{(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n}} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,. \tag{50}$$

Isolando P em (50) obtemos

$$P = PV\frac{(1+i)^n\, i}{(1+i)^n - 1} = PV\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\,. \tag{51}$$

Exemplo. Uma concessionária está vendendo um automóvel seminovo em 24 parcelas mensais iguais de R$ 998,90, sendo a primeira paga um mês após a compra. Sabendo que a concessionária emprega uma taxa de juro de 3% a.m., qual é o valor à vista desse automóvel?

Resolução. Queremos encontrar o valor atual de uma série uniforme onde a prestação é $P = 998$, a taxa é $i = 3\% = 0,03$ e o número de períodos é $n = 24$. Assim, usando a equação (48) obtemos

$$PV = 998,90\,\frac{(1+0,03)^{24}-1}{(1+0,03)^{24}\cdot 0,03} = 16916,91\,. \tag{52}$$

Portanto, o valor à vista do automóvel é de R\$ $16916,91$, enquanto a soma das parcelas é de R\$ $23973,60$. Sendo assim, o comprador pagará um total de R\$ $7056,69$ de juro à concessionária durante esses dois anos, uma quantia que poderia ser evitada se o comprador tivesse economizado para a compra do veícula à vista ou pelo menos reduzida por um financiamento com taxa de juro mais baixa.

Exemplo. O jornal de ofertas Koerich – Ano 20 – Edição 284 – Janeiro 2020 apresenta a oferta de um smartphone Samsung A80 a ser pago em 15 vezes iguais e fixas de R\$ $255,00$ sem entrada. O tabloide também informa uma taxa de juro para essa condição de 3,97% a.m. Qual é o preço à vista desse produto?

Resolução. Para encontrar o valor à vista do smartphone devemos procurar o valor atual da série de pagamentos onde a prestação é $P = 255,00$, a taxa é $i = 3,97\% = 0,0397$ e o número de períodos é $n = 15$. Usando a equação (48) obtemos

$$PV = 255,00\,\frac{(1+0,0397)^{15}-1}{(1+0,0397)^{15}\cdot 0,0397} = 2841,15\,. \tag{53}$$

Assim, o smartphone Samsung A80 custa à vista R\$ $2841,15$, enquanto que o total a prazo é de R\$ $3825,00$.

Da mesma forma, conseguimos encontrar uma expressão para uma série que forneça o valor futuro de pagamentos iguais em espaços de tempo iguais. Como visto em valor futuro, temos

$$FV = C_1(1+i)^{t_n-t_1} + C_2(1+i)^{t_n-t_2} + C_3(1+i)^{t_n-t_3} + \cdots + C_n(1+i)^{t_n-t_n}\,. \tag{54}$$

Assim, considerando prestações (P) iguais

$$FV = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + P(1+i)^{n-3} + \cdots + P(1+i)^{n-n}\,, \tag{55}$$

ou então,

$$FV = P(1+i)^{0} + P(1+i)^{1} + P(1+i)^{2} + \cdots + P(1+i)^{n-1}\,, \tag{56}$$

onde temos novamente a soma de uma progressão geométrica, com:

Primeiro termo $a_1 = P(1+i)^0$ e a razão $q = (1+i)$. Usando a equação (46) temos

$$FV = \frac{P(1+i)^0[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = P\frac{1-(1+i)^n}{-i} = P\frac{(1+i)^n-1}{i}\,. \tag{57}$$

Isolando P nessa equação encontramos o valor da prestação P em função do valor futuro FV dos pagamentos aplicados à taxa i durante n períodos de tempo

$$P = FV\frac{i}{(1+i)^n-1}. \tag{58}$$

5 Sistemas de amortização

Na maioria das vezes em que um empréstimo é realizado, uma taxa de juro age sobre o capital emprestado por um período determinado e no final o devedor paga o capital mais o juro gerado. Amortização é a devolução de parte do capital emprestado através da parcelas. Por exemplo, se João emprestou R$ 1000, 00 a uma taxa de juro de 3% ao mês, depois do primeiro mês ele estará devendo R$ 1030, 00, se as parcelas do empréstimo são de R$ 250, 00, então ele ainda estará devendo R$ 1030, 00 − R$ 250, 00 = R$ 780, 00, portanto a parcela da dívida que ele amortizou foi de R$ 220, 00.

A amortização então é calculada como o valor da prestação menos o juro. Mas existem várias maneiras de estabelecer as prestações, as amortizações e o juro. Há sistemas em que as amortizações são constantes, há sistemas em que as prestações são constantes e também há os que são mistos. Esses sistemas são muito utilizados para financiamentos de bens em longo prazo, como imóveis e automóveis.

5.1 Sistema de amortização constante (SAC)

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é um dos mais utilizados nas operações financeiras. Nesse sistema, todas as parcelas de amortização são iguais. E, de acordo com Mathais e Gomes (2008, p. 285) "o juro é calculado, a cada período, multiplicando-se a taxa de juro contratada (na forma unitária) pelo saldo devedor existente no período anterior". Como as parcelas de amortização são todas iguais, as prestações vão diminuindo com o decorrer do tempo, o que torna esse sistema atraente do ponto de vista dos consumidores.

No Sistema de Amortização Constante as parcelas de amortização (A) são dadas pela expressão

$$A = \frac{V_0}{n}\,, \tag{59}$$

sendo V_0 é o valor do empréstimo e n é o número de parcelas.

Consideremos k o período de tempo (onde cada período se refere a uma amortização), por exemplo, quando $k = 0$, estamos nos referindo ao tempo inicial, $k = 1$ se refere a uma parcela de amortização depois (geralmente um mês), e assim sucessivamente. Então V_0 é a dívida inicial, V_1 é o estado da dívida um mês depois, e assim por diante.

Como as parcelas de amortização são todas iguais, o estado da dívida após k períodos (amortizações) é dado na forma

$$V_k = V_0 - k\,A = V_0 - k\,\frac{V_0}{n} = V_0\,\frac{n-k}{n}\,. \tag{60}$$

O juro J_k no tempo k é determinado multiplicando-se a taxa de juro i pelo estado da dívida do período anterior

$$J_k = i\,V_{k-1}\,. \tag{61}$$

As parcelas P_k da dívida a serem pagas são compostas pela parcela de amortização e o juro do período, logo

$$P_k = A + J_k\,. \tag{62}$$

Exemplo. Uma dívida de R\$ 6000,00 será paga pelo Sistema de Amortização Constante em 15 meses, com juro de 3% ao mês. Construa a tabela de amortização dessa dívida.
Resolução. A parcela de amortização será, por (59),

$$A = \frac{6000}{15} = 400\,. \tag{63}$$

Logo, com as parcelas de amortização iguais a R\$ 400,00, temos o quadro de amortização 5.

Quadro 5 – Quadro de amortização constante

Tempo (k)	**Parcela (P_k)**	**Amortização (A)**	**Juro (J_k)**	**Dívida (V_k)**
0	-	-	-	R\$ 6000,00
1	R\$ 580,00	R\$ 400,00	R\$ 180,00	R\$ 5600,00
2	R\$ 568,00	R\$ 400,00	R\$ 168,00	R\$ 5200,00
3	R\$ 556,00	R\$ 400,00	R\$ 156,00	R\$ 4800,00
4	R\$ 544,00	R\$ 400,00	R\$ 144,00	R\$ 4400,00
5	R\$ 532,00	R\$ 400,00	R\$ 132,00	R\$ 4000,00
6	R\$ 520,00	R\$ 400,00	R\$ 120,00	R\$ 3600,00
7	R\$ 508,00	R\$ 400,00	R\$ 108,00	R\$ 3200,00
8	R\$ 496,00	R\$ 400,00	R\$ 96,00	R\$ 2800,00
9	R\$ 484,00	R\$ 400,00	R\$ 84,00	R\$ 2400,00
10	R\$ 472,00	R\$ 400,00	R\$ 72,00	R\$ 2000,00
11	R\$ 460,00	R\$ 400,00	R\$ 60,00	R\$ 1600,00

12	R$ 448, 00	R$ 400, 00	R$ 48, 00	R$ 1200, 00
13	R$ 436, 00	R$ 400, 00	R$ 36, 00	R$ 800, 00
14	R$ 424, 00	R$ 400, 00	R$ 24, 00	R$ 400, 00
15	R$ 412, 00	R$ 400, 00	R$ 12, 00	-

Fonte: Autora

5.2 *Sistema de amortização francês (Tabela Price)*

O sistema de amortização francês tem como característica o fato de todas as prestações serem iguais. Segundo Mathias e Gomes (2008, p. 285), essas prestações são calculadas de forma que uma parte paga o juro e outra o principal. Esse sistema foi criado pelo francês Richard Price e, juntamente com o Sistema de Amortização Constante, é um dos sistemas mais utilizados para financiamentos. Por suas características, é denominado sistema de amortização crescente.

Como o sistema de amortização francês tem todas as parcelas iguais, a expressão que determina essas parcelas é a mesma vista na equação 51,

$$P = V_0 \, \frac{(1+i)^n \, i}{(1+i)^n - 1} \, , \tag{64}$$

sendo P o valor das parcelas, V_0 o valor da dívida, i a taxa de juro e n o total de parcelas.

Para determinar o estado atual da dívida V_k no período k, levamos em consideração que V_k é a dívida que ainda deve ser paga por $n-k$ períodos, assim recorrendo a fórmula (48) já vista em séries uniformes,

$$V_k = P \, \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \, i} \, , \tag{65}$$

substituindo P pelo valor da expressão anterior,

$$V_k = V_0 \, \frac{(1+i)^n \, i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \, i} = V_0 \, \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \, . \tag{66}$$

A expressão que determina o juro J_k é a mesma vista no SAC, a multiplicação da taxa de juro i pelo estado da dívida anterior,

$$J_k = i \, V_{k-1} \, . \tag{67}$$

A amortização A_k será definida pela diferença entre a parcela P_k e o juro J_k,

$$A_k = P - J_k \tag{68}$$

Exemplo. Uma dívida no valor de R$ 5000, 00 será paga pelo sistema Price, com uma taxa de juro de 4% ao mês durante 12 meses. Construa a tabela de amortização dessa dívida.

Resolução. O valor da dívida é $V_0 = 5000$, a taxa é $i = 4\% = 0,04$ e o número de perídos é $n = 12$. Usando a equação (64) obtemos

$$P = 5000\,\frac{(1+0,04)^{12}\cdot 0,04}{(1+0,04)^{12}-1} = 532,76\,, \tag{69}$$

assim, teremos o quadro de amortização 6.

Quadro 6 – Tabela Price

Tempo (k)	**Parcela (P)**	**Amortização (A_k)**	**Juro (J_k)**	**Dívida (V_k)**
0	-	-	-	R$ 5000, 00
1	R$ 532, 76	R$ 332, 76	R$ 200, 00	R$ 4667, 24
2	R$ 532, 76	R$ 346, 07	R$ 186, 69	R$ 4321, 17
3	R$ 532, 76	R$ 359, 91	R$ 172, 85	R$ 3961, 26
4	R$ 532, 76	R$ 374, 31	R$ 158, 45	R$ 3586, 95
5	R$ 532, 76	R$ 389, 28	R$ 143, 48	R$ 3197, 67
6	R$ 532, 76	R$ 404, 85	R$ 127, 91	R$ 2792, 82
7	R$ 532, 76	R$ 421, 05	R$ 111, 71	R$ 2371, 77
8	R$ 532, 76	R$ 437, 89	R$ 94, 87	R$ 1933, 88
9	R$ 532, 76	R$ 455, 40	R$ 77, 36	R$ 1478, 48
10	R$ 532, 76	R$ 473, 62	R$ 59, 14	R$ 1004, 86
11	R$ 532, 76	R$ 492, 57	R$ 40, 19	R$ 512, 29
12	R$ 532, 76	R$ 512, 29	R$ 20, 49	-

Fonte: Autora

5.3 Sistema de amortização americano (SAA)

Nesse sistema Mathias e Gomes (2008, p. 286) afirmam: “após um certo prazo o devedor paga, em uma única parcela, o capital emprestado” e também “a modalidade mais comum é aquela em que o devedor paga juro durante a carência”. Esse sistema pode ser vantajoso se pretende pagar o financiamento em pouco tempo, do contrário o juro pode totalizar até 100% do valor financiado, isto é, o total de juro a ser pago pode até ultrapassar o valor financiado, o que não mostra vantagem com relação a outros sistemas de amortização.

Existe o sistema "sinking fund" que combina o sistema americano (pagamento total ao final) e uma forma de poupança feita pelo tomador com o objetivo de diminuir o risco para o credor. O tomador contrata um empréstimo para ser devolvido ao final com uma certa taxa de juro, e paralelamente faz um contrato de depósito remunerado periódico com um banco a uma outra taxa de juro com o mesmo período do empréstimo para que ao final o montante dos depósitos seja suficiente para pagar o empréstimo.

Vamos observar um exemplo onde é utilizada a modalidade onde só se cobra o juro durante a carência.

Exemplo. Uma dívida de R\$ $10000,00$ será paga após 10 meses pelo sistema americano de amortização com taxa de juro de 2% ao mês. Construa a tabela de amortização dessa dívida.

Resolução. Como a taxa de juro é de 2%, então $J = 0,02 \cdot 10000 = 200$, e portanto, $P = 200$ também. Assim, temos o quadro 7.

Quadro 7 – Quadro de amortização do sistema americano com juro pago durante a vigência do empréstimo

Tempo (k)	**Parcela (P_k)**	**Amortização (A_k)**	**Juro (J_k)**	**Dívida (V_k)**
0	-	-	-	R\$ 10000,00
1	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
2	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
3	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
4	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
5	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
6	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
7	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
8	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
9	R\$ 200,00	-	R\$ 200,00	R\$ 10000,00
10	R\$ 10200,00	R\$ 10000,00	R\$ 200,00	-

Fonte: Autora

Percebe-se que o juro foi calculado sempre sobre o valor de R\$ 10000, 00, então nesse sistema utiliza-se o regime de juro simples, e não composto como na maioria dos casos. Esse tipo de sistema é mais utilizado em transações internacionais.

Vamos analisar no exemplo seguinte o funcionamento do sistema americano de amortização onde paga-se no final em uma única parcela, o capital emprestado mais o juro.

Exemplo. Uma dívida de R\$ 12000, 00 será paga em 8 meses a uma taxa de 2,5% ao mês no sistema americano de amortização. Construa a tabela de amortização dessa dívida.

Resolução. Como a taxa de juro é de 2,5%, então $J = 0,025 \cdot 12000 = 300$. Assim, temos o quadro 8.

Quadro 8 – Quadro de amortização do sistema americano com juro pago ao final do empréstimo

Tempo (k)	**Parcela** (P_k)	**Amortização** (A_k)	**Juro** (J_k)	**Dívida** (V_k)
0	-	-	-	R\$ 12000, 00
1	-	-	R\$ 300, 00	R\$ 12300, 00
2	-	-	R\$ 300, 00	R\$ 12600, 00
3	-	-	R\$ 300, 00	R\$ 12900, 00
4	-	-	R\$ 300, 00	R\$ 13200, 00
5	-	-	R\$ 300, 00	R\$ 13500, 00
6	-	-	R\$ 300, 00	R\$ 13800, 00
7	-	-	R\$ 300, 00	R\$ 14100, 00
8	R\$ 14400, 00	R\$ 14400, 00	R\$ 300, 00	-

Fonte: Autora

6 Financiamentos e empréstimos

Os financiamentos e empréstimos são tipos de transações. Transações comerciais são atividades econômicas de trocas de produtos ou serviços por algum tipo de remuneração que envolvem duas ou mais partes e é uma transação à vista. Já a transação financeira é uma troca de recursos que possui prazo de pagamento. Nessas operações financeiras há um profissional ou empresa chamado agente financeiro que atua com as operações no mercado ou que representa uma instituição financeira, como garantidor ou financiador.

6.1 Financiamentos

Financiamento é uma operação de compra parcelada de um bem ou serviço onde há uma finalidade já estabelecida no ato de sua aquisição. As parcelas são definidas em acordo entre quem compra e quem vende o financiamento, podendo ter valores iguais ou não e podendo ser submetidas a cobrança de juro com relação ao tempo ou não. Na maioria das vezes é tomado para a obtenção de um veículo ou um imóvel.

O automóvel, com o passar do tempo, se tornou uma aquisição necessária para a maioria da população, que o utiliza para ir para o trabalho, para o lazer, para atividades do dia a dia, entre outras funções. Diante dessas utilidades, o número de veículos nas ruas do país aumentou consideravelmente. Mas, por ser um bem de valor mais elevado, a maioria da população não consegue adquiri-lo à vista, e acabam recorrendo ao financiamento.

O financiamento de um veículo é realizado, geralmente, por bancos públicos ou privados e pode ser tomado diretamente nesses locais ou então através da própria concessionária. Nesse tipo de operação, o automóvel passa a ter um valor muito maior do que o valor à vista, o que é uma desvantagem para o consumidor. Mas, comparado com as taxas de financiamento praticadas no passado, as taxas de juro hoje no Brasil estão muito mais atrativas. Os bancos oferecem financiamentos sem entrada, com parcelas pequenas e pagas em até 84 meses.

Existem três principais tipos de financiamentos para aquisição de automóveis: o CDC (Crédito Direto ao Consumidor), o leasing e o consórcio.

O CDC é um tipo de financiamento onde um agente financeiro empresta dinheiro para o comprador em troca da aquisição de um bem ou serviço, como um automóvel, e o bem fica no seu nome. O automóvel fica relacionado como garantia da dívida do empréstimo e o juro é mais alto quando comparado a outro tipo de financiamento como o Leasing, principalmente porque no CDC é cobrado o IOF (Imposto sobre Operações Financeiras). Se tratando de financiamento de veículos, é a modalidade mais utilizada no país. O comprador pode adiantar o pagamento das parcelas do empréstimo com redução do juro que seria cobrado e o carro pode ser quitado a qualquer momento. Também há cobrança, por alguns bancos, de uma multa por rescisão de contrato, que geralmente é de 5% sobre o saldo devedor ou então qualquer outro valor mínimo estabelecido em acordo na contratação do financiamento.

O Leasing, também chamado de arrendamento mercantil, é um tipo de financiamento onde o bem, como o automóvel, por exemplo, não fica no nome do comprador até o final da quitação das parcelas, que é quando ele decide se vai ficar ou não com o veículo, portanto é uma espécie de aluguel. Apesar de suas taxas de juro serem menores comparadas as taxas do CDC, principalmente por não haver a cobrança do IOF, é pouco utilizado no Brasil. Um dos motivos para essa pouca utilização do Leasing talvez, seja a burocracia relacionada à antecipação da quitação do bem, onde existem épocas estipuladas para que esse procedimento aconteça. Entre as burocracias existentes nesse tipo de financiamento estão: o fato de não existir contratos para prazos menores que dois anos, o carro só poder ser quitado depois de três meses ou então se for quitado 30% de seu valor, para quitar entre 3 e 24 meses precisa ter uma terceira pessoa para a transferência, somente depois de 24 meses o carro pode ser quitado antecipadamente com o carro transferido para o arrendatário, e, em todos os casos de quitação antecipada existe uma multa entre 3% e 5%.

Consórcio é um termo que admite variadas definições. É um tipo de financiamento o qual funciona com uma espécie de poupança em grupo. Segundo a Associação Brasileira de Administradoras de Consórcio (ABAC, 2020):

> Consórcio é “a arte de poupar em grupo”, pois se baseia na união de pessoas (físicas ou jurídicas) que contribuem mensalmente (ou conforme estabelecido em contrato) para a formação de uma poupança comum. Essa poupança, chamada de “fundo comum”, é utilizada por todos os participantes do grupo para aquisição do bem ou serviço desejado, em ordem definida por sorteio e lance. Por ser financiado pelos próprios integrantes do grupo, consórcio é chamado de autofinanciamento.

No sorteio, todos os integrantes tem iguais chances de serem contemplados com o crédito para a aquisição do bem, já com o lance o integrante tem maior chance de conseguir essa contemplação pois funciona como um leilão onde quem der o maior lance, que é um valor que será abatido no saldo devedor, é o contemplado. Quem participa de um consórcio é chamado consorciado. Existem grupos de consorciados homogêneos e mistos. Grupos homogêneos são formados por participantes que desejam a aquisição de bens de um mesmo valor. Já nos grupos mistos, os bens almejados possuem valores diferenciados.

Para entrar no Sistema de Consórcios, o primeiro passo é procurar uma administradora de consórcios que seja autorizada pelo Banco Central do Brasil, a lista dessas empresas administradoras pode ser encontrada no site do Banco Central do Brasil ou entrando em contato com a ABAC, que é uma associação que faz a comunicação entre as administradoras e os consorciados. Após, escolhe-se o plano que mais se encaixa no perfil procurado de acordo com prazos e valores. Recomenda-se a leitura de todo o contrato prestando atenção em todas as cláusulas quanto à inadimplência, ao crédito, às despesas, entre outros elementos.

As prestações pagas pelo consorciado são compostas pelo fundo comum, fundo de reserva (se existir), seguro (se for contratado) e taxa de administração. O fundo comum é o valor referente à formação do fundo para uso do grupo de consorciados. Geralmente é calculando dividindo percentualmente o valor do bem pelas duração dos pagamentos. A taxa de administração é a remuneração da administradora pelos serviços prestados e a empresa é livre para escolher o percentual cobrado, é calculado sobre o valor do bem e diluído durante os períodos de duração do consórcio. O fundo de reserva é um fundo de proteção que auxilia no funcionamento do grupo em algumas situações. Deverá ser pago se constar no contrato. É calculado da mesma forma que a taxa administrativa. O seguro também só será pago se estiver previsto em contrato e existem vários tipos que podem ser incluídos, como seguro desemprego, seguro de vida e seguro de quebra de garantia. Logo, a prestação é a soma de todos esse elementos, fundo comum, taxa administrativa, fundo de reserva e seguro, os dois últimos se existirem. Uma simulação de consórcio feita através do site da Caixa Econômica Federal mostra como todas essas taxas influenciam na parcela. O valor do crédito escolhido foi de R$ $50000,00$ pelo período de 73 meses. Sendo assim, em cada prestação será pago o valor de R$ $50000,00/73 =$ R$ $684,93$ de fundo comum. Além do fundo comum, existe a cobrança do fundo de reserva que equivale a 3% do valor do crédito, ou seja, R$ $50000,00 \cdot 0,03 =$ R$ $1500,00$, que dividido pelas prestações adiciona R$ $1500,00/73 =$ R$ $20,55$ em cada prestação. Outra taxa cobrada é a taxa de administração que equivale a 17% do valor do crédito, portanto R$ $50000,00 \cdot 0,17 =$ R$ $8500,00$, adicionando R$ $8500,00/73 =$ R$ $116,44$ às prestações. Por fim, há cobrança de seguro que corresponde a 6% do valor do crédito, isto é, R$ $50000,00 \cdot 0,06 =$ R$ $3000,00$ que acrescenta o valor de R$ $3000,00/73 =$ R$ $41,10$ às prestações. Logo, as prestações resultam no valor de R$ $684,93 +$ R$ $20,55 +$ R$ $116,44 +$ R$ $41,10 =$ R$ $863,02$. Nota-se que em cada parcela é cobrado o valor de R$ $178,09$ equivalente apenas às taxas.

O consórcio nem sempre se mostra vantajoso com relação à outras opções, como os financiamentos por exemplo. Se não há pressa pela aquisição do veículo, o ideal é a aplicação de uma quantia mensal em um investimento, como a poupança. Com um valor equivalente ou até menor que as prestações do consórcio, é possível adquirir o veículo à vista sem o pagamento das taxas cobradas pelo consórcio. Comparando com os financiamentos, os consórcios possuem o benefício de não possuir taxa de juro, mas possuem as taxas administrativas e de reserva que podem até mesmo se igualar às taxas de juro de um financiamento e nesta última opção o veículo é adquirido no ato. Vejamos as simulações de um consórcio e de um financiamento de valores iguais para comparação. No site da Consórcio Embracon podemos adquirir um consórcio de um veículo no valor de R$ $40000,00$ com 36 pagamentos de R$ $1322,22$ cada. Nestas parcelas de R$ $1322,22$ estão incluídos o fundo comum que é calculado dividindo-se o crédito pelas 36 parcelas, ou seja, R$ $40000,00/36 =$ R$ $1111,11$, o fundo reserva de 3% do valor do crédito, isto é, R$ $40000,00 \cdot 0,03 =$ R$ $1200,00$ que dividido em 36 parcelas resulta em R$ $1200,00/36 =$ R$ $33,33$ e a taxa de administração de 16%, ou ainda, R$ $40000,00 \cdot 0,16 =$ R$ $6400,00$, que distribuído em 36 vezes resulta em R$ $177,78$ nas prestações. Portanto, R$ $1111,11 +$ R$ $33,33 +$ R$ $177,78 =$ R$ $1322,22$. Calculando o valor atual relativo à essa dívida e considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês temos que

$$PV = 1322,22\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{36}}\right) = 45882,48\,. \quad (70)$$

Portanto, o valor atual a ser pago no consórcio é de R$ $45882,48$.

O site do Banco Itaú oferece um financiamento no valor de R$ $40000,00$, mas exige uma entrada de R$ $4000,00$ e mais 36 parcelas mensais de R$ $1326,89$. Neste financiamento o Custo Efetivo Total é de $1,6166\%$. Considerando uma taxa de inflação de 0,2% ao mês, o valor atual relativo a esse financiamento é

$$PV = 4000 + 1326,89\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{36}}\right) = 50044,54\,. \quad (71)$$

Portanto, o valor atual a ser pago no financiamento é de R\$ 50044, 54. Logo, existe uma diferença de R\$ 50544, 54 − R\$ 45882, 48 = R\$ 4162, 06. Apesar do consórcio ter o valor atual menor, existe a chance de ser contemplado com o veículo apenas no 36º mês, enquanto que no financiamento o veículo é utilizado desde o início do contrato.

6.2 Empréstimos

Empréstimo é um valor concedido para uso livre de quem o está recebendo. Como não existe a obrigatoriedade de informação de sua utilização como satisfação à quem está emprestando, costuma ter taxas de juro maiores que o financiamento.

De acordo com Mathias e Gomes (2008, p. 283), os empréstimos classificam-se em: de curto, de médio e de longo prazo, onde os de curto e de médio prazo caracterizam-se, geralmente, por serem saldados em até 3 anos e os empréstimos de longo prazo sofrem um tratamento especial porque existem várias modalidades de restituição do principal e juro.

Nos empréstimos podem ser cobradas taxas e tributos além da taxa de juro, uma dessas taxas é o IOF, o mesmo imposto cobrado nos financiamentos, outra taxa comum a ser cobrada é a tarifa de cadastro, que é definida pela agência. Além disso pode haver a cobrança de um seguro, como garantia em caso de desemprego ou óbito do tomador. Todas essas taxas e tarifas compõe o Custo Efetivo Total (CET) que permite comparar os empréstimos de forma mais justa, já que um empréstimo pode ter taxa de juro menor, mas ter as outras taxas mais altas.

Existem vários tipos de empréstimos. O mais comum é conhecido como empréstimo pessoal, onde a pessoa vai até uma agência, é realizada uma análise e o dinheiro é concedido, geralmente em 24 horas o dinheiro é depositado na conta corrente do cliente. Mas, geralmente, nesse tipo de operação a taxa de juro é muito alta e na maioria dos casos o valor máximo emprestado pela agência é de R\$ 5000, 00.

Outro tipo de empréstimo comum é o denominado consignado. Nesta modalidade as parcelas são descontadas diretamente na folha de pagamento ou da aposentadoria do tomador, somente aposentados, pensionistas do INSS ou funcionários de empresas que possuem convênios com algum banco é que podem se beneficiar desse tipo de empréstimo. Para esse tipo de empréstimo não é necessário um avalista.

Também existe o empréstimo por penhor, realizado pela Caixa Econômica Federal, onde um bem é concedido à agência, geralmente joias, utensílios e metais nobres, e o valor do empréstimo é relativo a esse bem, se o pagamento for realizado no prazo, o bem é devolvido. Nesse tipo de empréstimo podem participar pessoas com crédito negativado, porém as taxas de juro costumam ser muito altas.

6.3 Taxa Selic

A Selic (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia) é uma taxa de juro básica da economia do país. Como explica o Banco Central do Brasil:

> É o principal instrumento de política monetária utilizado pelo Banco Central (BC) para controlar a inflação. Ela influencia todas as taxas de juro do país, como as taxas de juro dos empréstimos, dos financiamentos e das aplicações financeiras. A taxa Selic refere-se à taxa de juro apurada nas operações de empréstimos de um dia entre as instituições financeiras que utilizam títulos públicos federais como garantia. (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2020).

O Copom (Comitê de Política Monetária do Banco Central) faz reuniões oito vezes ao ano onde definem a meta da Selic e o Banco Central trabalha nas operações com títulos públicos para que sempre fique nivelada com a meta da Selic. Quando a meta da Selic é alterada, os títulos relacionados à taxa também têm seu rendimento alterado e, consequentemente, o recolhimento dos bancos também muda.

Se a taxa Selic está alta, aumenta o juro dos financiamentos, empréstimos e cartões de crédito, o que faz com que o consumo da população diminua e a inflação cai. Do contrário, se a taxa Selic está baixa, o juro das operações também diminui, o que faz com que estimule os empréstimos e financiamentos e o consumo em geral.

7 Atividades

7.1 Atividade 1

Essa atividade exige que os alunos já possuam conhecimento dos cálculos de juro e montante dos regimes de capitalização simples e composto e da conversão de taxas nesses regimes. A atividade incentiva os educandos a compararem os valores de montante obtidos após certos períodos nos dois regimes de capitalização (simples e composto). O objetivo é fazer com que eles enxerguem que o juro simples, quando calculado em tempos menores do que o período da taxa de juro, rende mais do que o juro composto. Ao mesmo tempo, auxilia no conhecimento dos alunos de como é calculado o juro no atraso do pagamento de contas, como a de energia elétrica, de suas residências. Recomenda-se que, para a realização dessa atividade, o professor leve para sala de aula uma conta de energia elétrica de sua cidade, para que se aproxime mais da realidade do aluno.

Para iniciar essa atividade, primeiramente, o professor lê as condições de cobrança de atraso na conta de energia elétrica. Entre essas cobranças, existe uma chamada juro de mora de 1% ao mês (pro rata die). O professor questiona os alunos se sabem o significado e como se calcula esse tipo de juro, também pode aproveitar para perguntar se alguém conhece o temo "pro rata die" contido na descrição da taxa. O professor prossegue a atividade explicando que o significado de pro rata die é de proporção por dia, ou seja, a taxa de juro cobrada por mês deve ser convertida para dia, e lembra também que um mês comercial contém 30 dias. Assim, solicita que os alunos, utilizando conhecimentos sobre conversão de taxas já vistos anteriormente, calculem a taxa de juro por dia com relação à taxa de 1% ao mês, nos regimes de capitalização simples e composto.

Com essas taxas, o professor supõe o seguinte problema: O proprietário de uma empresa recebeu sua conta de energia elétrica com vencimento em 10 de dezembro de 2019 no valor de R$ 10000, 00, mas alguns problemas aconteceram na empresa e ele sabe que pagará a conta com atraso. Então, com os conhecimentos de cálculo de juro e montante em regime de juro simples e composto já vistos, o professor pede que os alunos calculem o montante considerando os juro de mora que já foram convertidos para a proporção em dia da conta de energia elétrica se ela for paga com os seguintes dias de atraso: 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50 e 55. Depois de todos os cálculos necessários, o professor deve incentivar os alunos a analisar e comparar os montantes obtidos pelo atraso do pagamento nos dois regimes de capitalização.

Os montantes calculados, analisados e discutidos foram obtidos calculando o juro de mora no pagamento em atraso da conta de energia elétrica. Mas além dessa taxa, a conta possui uma multa de 2% pelo atraso. Então, para finalizar a atividade e chegar mais próximo da realidade do aluno, o professor sugere o seguinte cálculo: Dado o valor da conta de energia elétrica trazida pelo professor, calcular o novo valor da conta a ser paga com 23 dias de atraso.

Resolução. Para a resolução do início do problema, quando o professor questiona o significado de juro de mora e da expressão "pro rata die" não se espera que os alunos conheçam tais termos. Quanto aos cálculos de conversão para a taxa de 1% ao mês, deve-se ter:

Regime de juro simples:

$$\frac{1\%}{30} = 0,03333\% \text{ ao dia} \tag{72}$$

Regime de juro compostos:

Usando a equação (33) temos

$$1 + 0,01 = (1 + i)^{30}. \tag{73}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0003317 = 0,03317\%, \tag{74}$$

que é a taxa juro ao dia.

Em seguida, utilizando os valores do problema proposto, temos;

Para o regime de juro simples:

$C = 10000$ e $i = 0,03333\% = 0,0003333$.

Para o regime de juro composto: $C = 10000$ e $i = 0,03317\% = 0,0003317$.

Logo, o quadro será preenchido como mostrado no quadro 9.

Quadro 9 – Montante calculado pelos dias de atraso

Dias	**Juro simples (Montante)**	**Juro composto (Montante)**
5	R\$ 10016,67	R\$ 10016,60
10	R\$ 10033,33	R\$ 10033,22

15	R$ 10050, 00	R$ 10049, 87
20	R$ 10066, 66	R$ 10066, 55
30	R$ 10099, 99	R$ 10099, 99
40	R$ 10133, 32	R$ 10133, 54
50	R$ 10166, 65	R$ 10167, 20
55	R$ 10183, 32	R$ 10184, 08

Fonte: Autora

Durante a comparação dos montantes obtidos, espera-se que os alunos enxerguem que para períodos menores que 30 dias, o juro simples supera o juro composto, observem também que esses valores são iguais quando o período é exatamente um mês, e que a partir daí o juro composto é maior que os simples. Assim, o professor pode questionar os alunos sobre qual dos dois regimes eles acreditam que é utilizado no cálculo do atraso da conta de luz e mostrar que geralmente as contas são cobradas com juro simples quando o período é menor que o período da taxa de juro, justamente por render mais nesses casos.

Para finalizar a atividade, vamos supor que a conta que o professor trouxe para a sala de aula é no valor de R$ 178, 90. Então, como o atraso foi de 23 dias, o novo valor será corrigido por uma multa de 2%, correspondendo a $178,90 \cdot 0,02 = R\$3,58$. Por outro lado como a taxa de juro de mora é de 1% a.m., a taxa de juro diário é calculada como $1\%/30 = 0,03333\%$ de modo que o juro correspondente é $178,90 \cdot 0,0003333 \cdot 23 = \text{R\$}\,1,37142951$. Logo, o valor final da conta é de $\text{R\$}\,178,90 + \text{R\$}\,3,58 + \text{R\$}\,1,37 = \text{R\$}\,183,85$.

7.2 Atividade 2

A atividade a seguir simula a realização de um empréstimo e pode servir como base para a criação de outras atividades por professores que desejem aplicar em sala de aula. Ela tem duração de uma hora aula e pode ser resolvida em grupos. O objetivo é desenvolver a capacidade de análise dos alunos em escolher o empréstimo mais adequado à situação. Para isso utilizarão conhecimentos de cálculos apresentados nesse projeto sobre taxas e valores no tempo.

Marco Antônio abriu uma livraria recentemente. Como utilizou toda sua reserva de dinheiro no estoque e equipamentos para a livraria, está sem verba para comprar uma remessa de livros que acabaram de ser lançados. Então decidiu adquirir um empréstimo no valor de R$ $5000,00$ para esse fim. Marco Antônio é muito cauteloso, então resolveu pesquisar em várias agências o empréstimo que melhor se encaixa em seu orçamento. Ele quer pagar o menos possível, mas as parcelas não devem ultrapassar R$ $450,00$.

A pesquisa resultou nas propostas de empréstimos apresentadas no quadro 10.

Quadro 10 – Propostas de empréstimos

Agência	**Taxa aplicada**	**Período**
Banco Cordial	33,6% ao ano com capitalização mensal	13 meses
Empréstimos Alfa	40% ao ano com capitalização trimestral	14 meses
Banco Ideal	3,4% ao mês com capitalização mensal	14 meses
Financeira Beta	16,5% ao semestre com capitalização semestral	12 meses

Fonte: Autora

Qual é a melhor opção de empréstimo para Marco Antônio?

Resolução. Vamos inicialmente analisar as taxas efetivas ao mês das propostas acima para comparação.

Banco Cordial: 33,6% ao ano com capitalização mensal é equivalente a $33,6\%/12 = 2,8\%$ ao mês.

Empréstimos Alfa: 40% ao ano com capitalização trimestral é equivalente a $40\%/4 = 10\%$ ao trimestre. Como está ao trimestre, devemos deixar na mesma unidade de tempo que a anterior. Logo, usando a equação (33), temos:

$$1 + 0,1 = (1 + i)^3 \,. \tag{75}$$

Isolando i nesta equação obtemos a taxa mensal

$$i = 0,0322801 = 3,22801\% \,. \tag{76}$$

Banco Ideal: 3,4% ao mês com capitalização mensal já é a taxa efetiva.

Financeira Beta: 16,5% ao semestre com capitalização semestral devemos deixar por mês. Logo, usando a equação (33), obtemos

$$1 + 0,165 = (1 + i)^6 \,. \tag{77}$$

Isolando i nesta equação temos a taxa mensal

$$i = 0,0257802 = 2,57802\% \,. \tag{78}$$

Portanto, analisando apenas as taxas de juro cobradas, podemos concluir que a melhor opção de empréstimo para Marco Antônio é a da Financeira Beta, seguida do Banco Cordial, dos Empréstimos Alfa e por último o Banco Ideal. Porém, nem todas as opções oferecem o mesmo período de pagamento do empréstimo, então precisa-se analisar se as parcelas estão dentro do orçamento mensal de R\$ $450,00$ de Marco Antônio.

Utilizaremos a noção de dinheiro no tempo e a fórmula que apresenta diretamente o valor das parcelas dos empréstimos, para encontrar as parcelas de cada empréstimo:

$$P = V\,\frac{(1+i)^n\, i}{(1+i)^n - 1}\,, \tag{79}$$

sendo P o valor das parcelas do empréstimo, V o valor do empréstimo, i a taxa de juro e n o tempo, nesse caso em meses. Assim, obtemos:

Banco Cordial:

$$P = \frac{5000(1+0,028)^{13}\cdot 0,028}{(1+0,028)^{13}-1} = 464,15\,. \tag{80}$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ $464,15$, totalizando em 13 parcelas o valor de R\$ $6033,95$.

Empréstimos Alfa:

$$P = \frac{5000(1+0,0323)^{14}\cdot 0,0323}{(1+0,0323)^{14}-1} = 449,54\,. \tag{81}$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ $449,54$, totalizando em 14 parcelas o valor de R\$ $6293,56$.

Banco Ideal:

$$P = \frac{5000(1+0,034)^{14}\cdot 0,034}{(1+0,034)^{14}-1} = 454,79\,. \tag{82}$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ $454,79$, totalizando em 14 parcelas o valor de R\$ $6367,06$.

Financeira Beta:

$$P = \frac{5000(1+0,0258)^{12}\cdot 0,0258}{(1+0,0258)^{12}-1} = 489,74\,. \tag{83}$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R\$ $489,74$, totalizando em 12 parcelas o valor de R\$ $5876,88$.

Portanto, tanto a Financeira Beta, quanto o Banco Cordial que seriam as melhores taxas de juro tem suas parcelas ultrapassando o orçamento de Marco Antônio de R\$ $450,00$. No Banco Ideal, além de ter a maior taxa de juro mensal, também tem parcela acima de R\$ $450,00$. Assim, podemos concluir que o melhor empréstimo para as condições de Marco Antônio é o da Empréstimos Alfa.

7.3 Atividade 3, 4 e 5

Essas atividades apresentam alternativas de financiamentos reais que envolvem também empréstimos e investimentos com o objetivo de levar os alunos a investigarem, analisarem e decidirem de maneira segura, através de cálculos e interpretação, a melhor proposta apresentada ao perfil de comprador estabelecido.

7.3.1 Atividade 3

O site da Toyota apresenta um financiamento chamado Ciclo Toyota onde oferece um Etios Hatch X Man sendo pago da seguinte forma:

- Entrada de R$ 30834,00, mais 24 parcelas de R$ $672,78$ e mais uma parcela residual de R$ $10278,00$ paga junto com a última das 24 parcelas.

Já o valor à vista é de R$ 51390,00.

O site da BV Financeira faz uma simulação de financiamento para o mesmo carro no mesmo valor à vista sendo pago da seguinte forma:

- Entrada de R$ $30834,00$ e mais 24 parcelas de R$ $1140,88$.

Considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, analise qual das propostas é mais vantajosa referente ao valor final pago nos financiamentos.

Resolução. Analisando a proposta do Ciclo Toyota através do tempo e considerando a taxa de inflação de 0,2%, temos:

$$V_1 = 30834 + 672,78\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{24}}\right) + \frac{10278}{(1+0,002)^{24}} \tag{84}$$

$$= 56380,734\,. \tag{85}$$

Logo, o valor presente relativo ao financiamento no Ciclo Toyota será de aproximadamente R$ $56380,73$.

Analisando a proposta da BV Financeira através do tempo e considerando a taxa de inflação de 0,2%, temos:

$$V_2 = 30834 + 1140,88\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{24}}\right) \tag{86}$$

$$= 57542,298\,. \tag{87}$$

Logo, o valor presente relativo ao financiamento na BV Financeira será de aproximadamente R\$ 57542, 30. Portanto, a proposta do Ciclo Toyota se mostra mais vantajosa com relação à proposta da BV Financeira.

7.3.2 Atividade 4

A seguinte situação é apresentada: Você decidiu comprar um automóvel zero km através de um financiamento. O carro escolhido é um Etios Sedan X Man da Toyota, que à vista, custa R\$ 56690, 00. Você tem uma economia de R\$ 34000, 00 que irá utilizar na entrada do financiamento e pode gastar até R\$ 850, 00 nas prestações, além disso pretende quitar a dívida em três anos.

Temos duas propostas diferentes. A primeira delas retirada do próprio site da Toyota, chamada Ciclo Toyota, oferece o Etios Sedan X Man por uma entrada no valor de R\$ 34014, 00, 36 parcelas de R\$ 552, 54 e mais uma parcela residual que deve ser paga junto com a última das 36 parcelas no valor de R\$ 11338, 00. Como você não sabe se terá R\$ 11338, 00 na 36ª parcela, mas tem R\$ 850, 00 para gastar com as prestações, uma alternativa é aplicar a diferença de R\$ 297, 46 entre esse valor e a real parcela da proposta (R\$ 850, 00 − R\$ 552, 54) em um investimento, como a poupança, por exemplo.

A taxa de juro da poupança varia de acordo com a taxa Selic e a taxa de Referencial (TR). Vamos supor uma aplicação na poupança com taxa de rendimento de 0,35% ao mês. Como a parcela residual de R\$ 11338, 00 deve ser paga junto com a 36ª prestação, a aplicação de R\$ 297, 46 por mês será feita nesse período.

A segunda alternativa de financiamento foi realizada através de uma simulação no site do banco Itaú, onde foram escolhidos os mesmos valores do carro à vista (R\$ 56690, 00) e de entrada (R\$ 34014, 00) do Ciclo Toyota. Assim, a proposta apresentada pelo site foi de uma entrada de R\$ 34014, 00 e mais 36 parcelas no valor de R\$ 849, 38, o que cabe no seu orçamento.

A questão é: Qual a melhor proposta?

Resolução. Primeiramente precisamos saber se o investimento de R\$ 297,46 renderá o valor de R\$ 11338,00 necessário para a parcela residual ao final de 36 meses.

$$V = 297,46\,(1,0035)^0 + 297,46\,(1,0035)^1 + \cdots + 297,46\,(1,0035)^{34} + 297,46\,(1,0035)^{35} \tag{88}$$

$$= 297,46\,(1 + 1,0035^1 + \cdots + 1,0035^{34} + 1,0035^{35}) \tag{89}$$

$$= 297,46\left[1\left(\frac{1,0035^{36}-1}{1,0035-1}\right)\right] \tag{90}$$

$$= 11391,12\,. \tag{91}$$

Como o valor necessário será adquirido, então as duas propostas cabem no orçamento, restando ainda da aplicação o valor de R\$ 53,25.

Podemos então analisar qual das propostas tem valor menor se comparadas no tempo atual. Assim, considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, temos para a primeira proposta:

$$V = 34014 + 552,54\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} + \frac{11338}{(1+0,002)^{36}} \tag{92}$$

$$= 34014 + 19173,74 + 10551,12 \tag{93}$$

$$= 63738,89\,. \tag{94}$$

Como restam R\$ 53,25 ao final de 36 meses, trazendo para o tempo atual,

$$V = \frac{53,25}{(1+0,002)^{36}} = 49,55\,. \tag{95}$$

Portanto, R\$ 63738,89 − R\$ 49,55 = R\$ 63689,14 é o valor atual da proposta de financiamento do Ciclo Toyota já descontado o valor que resta do investimento para a parcela residual.

Da mesma forma, calculando o valor atual para a segunda proposta e considerando também a taxa contante de 0,2% de inflação, temos:

$$V = 34014 + 849,38\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} = 341014 + 29474,40 = 63488,40\,. \tag{96}$$

Assim, o valor atual da proposta de financiamento do banco Itaú é de R\$ 63488,40. Portanto, vemos que essa proposta se mostra ligeiramente mais vantajosa do que o Ciclo Toyota, com uma diferença de R\$ 63689,14 − R\$ 63488,40 = R\$ 200,72, além de, mensalmente, não gastar todos os R\$ 850,00.

7.3.3 Atividade 5

Nessa atividade também supomos a compra do carro Etios Sedan X Man da Toyota de R$ $56690,00$ à vista, comparando o Ciclo Toyota com uma opção de financiamento do banco Bradesco sob outras condições de compra.

Nesse caso, supomos que você só pode pagar uma entrada de 20% do valor à vista do automóvel, ou seja, R$ $11338,00$,ou se necessário, no máximo R$ $11500,00$ e quer quitá-lo em 36 meses. A primeira opção de financiamento é a do banco Bradesco, obtida através de uma simulação no site do banco. Esse financiamento exige a entrada de R$ $11338,00$ e mais 36 pagamentos de R$ $1738,47$.

A segunda proposta é o Ciclo Toyota. Nesse caso, a entrada exigida é de, no mínimo, 30% do valor à vista do veículo, ou seja, R$ $17017,00$, mais 36 parcelas de R$ $1147,83$ e também uma prestação residual de R$ $11338,00$. Como o valor máximo que você pode dar de entrada é R$ $11500,00$, então uma alternativa é obter um empréstimo de R$ $5500,00$ para completar a entrada exigida. Foi realizada uma simulação de empréstimo no site do Serasa Crédito, que utiliza a taxa média de juro usada nas opções de empréstimo disponíveis do mercado. Essa alternativa empresta os R$ $5500,00$ sendo pago em 36 vezes de R$ $271,18$. E, ainda, para você obter R$ $11338,00$ para a parcela residual, uma possibilidade é fazer uma aplicação financeira que renda esse valor ao final dos três anos, como a poupança, por exemplo. Vamos supor um investimento com juro de 0,5% ao mês.

Qual das propostas é mais vantajosa?

Resolução. Inicialmente vamos calcular o valor atual da proposta do banco Bradesco, considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês.

$$V = 11338 + 1738,47\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} = 11338 + 60326,81 = 71664,81\,. \tag{97}$$

Para a análise do Ciclo Toyota, primeiramente vamos calcular a parcela que deverá ser depositada todo mês no investimento, a partir do primeiro mês de financiamento, para que se obtenha R$ $11338,00$ ao final de 36 meses.

$$P = 11338\,\frac{0,005}{(1+0,005)^{36}-1} = 288,23\,. \tag{98}$$

Agora, calculando o valor atual do Ciclo Toyota sem considerar o empréstimo de R\$ $5500,00$ e considerando a taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, temos:

$$V = 11517 + 1147,83\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} + \frac{11338}{(1+0,002)^{36}} \tag{99}$$

$$= 11517 + 39830,96 + 10551,12 \tag{100}$$

$$= 61899,08\,. \tag{101}$$

Da mesma forma, vamos calcular o valor atual para o empréstimo de R\$ $5500,00$:

$$V = 271,18\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} = 9410,25\,. \tag{102}$$

Portanto, o valor atual de todo o pagamento nessa proposta é de R\$ $61899,08$+R\$ $9410,24$ = R\$ $71309,33$. Analisando os valores atuais das duas propostas, vemos que a segunda opção que une o Ciclo Toyota com um empréstimo e mais um investimento é ligeiramente mais vantajosa com relação ao financiamento do banco Bradesco, com uma diferença de R\$ $355,48$. Outro ponto que podemos comparar é o valor da prestação desembolsada. Na opção do banco Bradesco temos uma parcela de R\$ $1738,47$, enquanto que na segunda proposta temos como prestação a soma da parcela do Ciclo Toyota, do empréstimo e do investimento, ou seja, R\$ $1147,83$ + R\$ $271,18$ + R\$ $288,23$ = R\$ $1707,24$, o que mostra que, novamente, o Ciclo Toyota está em vantagem com relação ao banco Bradesco.

7.3.4 Atividade 6

Nessa atividade o aluno encontrará duas alternativas diferentes para a compra de um celular. O objetivo é fazer com que, através de cálculos e interpretação se tome a melhor decisão para as condições financeiras do consumidor, ou seja, comparando valores no tempo presente que se escolha a opção com menor valor.

Pedro começou a trabalhar há pouco tempo e decidiu trocar seu velho celular por um Smartphone Motorola Moto G8. Ele tem a quantia de R\$ $300,00$ para dar de entrada na compra e pode gastar até R\$ $150,00$ nas prestações. Em sua pesquisa ele encontrou uma proposta da loja Berlanda que oferece o celular procurado para ser pago em 10 prestações iguais de R\$ $139,90$ sem juros e sem entrada. Ele gostou da proposta, mas seu amigo lhe disse que fez um financiamento de celular no Banco do Brasil na semana anterior, então Pedro resolveu fazer uma simulação no Banco do Brasil no valor de R\$ $1100,00$, já que ele pode dar R$ 300,00 de entrada. Na simulação o banco oferece o financiamento no valor de R$ 1100,00 pago em 9 parcelas iguais de R$ 145,93. Qual a melhor opção para Pedro?

Resolução. Para comparar as dívidas, calculamos os valores das dívidas no tempo presente. Considerando uma taxa de inflação constante de 0,2%, o valor atual da compra na loja Berlanda é

$$PV = 139,90\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{10}}\right) = 1383,73\,. \quad (103)$$

O valor atual relativo ao financiamento do Banco do Brasil é

$$PV = 300,00 + 145,93\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^9}\right) = 1600,33\,. \quad (104)$$

Portanto, a opção oferecida pela loja Berlanda é mais vantajosa para Pedro.

8 Questões de concursos

É essencial às famílias saber gerenciar sua vida financeira. Entretanto, as estatísticas nos mostram que isso não ocorre de maneira eficaz, pois é grande o número de pessoas inadimplentes no país. Independente do poder aquisitivo, todos fazem escolhas financeiras em seu cotidiano. Entender as operações e cálculos que existem nessas escolhas é fundamental para uma tomada de decisão consciente e crítica. Diante dessa realidade é nítida a necessidade da educação financeira ser trabalhada desde o início da vida do cidadão, para isso é a escola a responsável por repassar os conteúdos necessários para um bom entendimento das operações e por desenvolver a criticidade e a conscientização na tomada de decisões. Assim, o professor de matemática precisa buscar alternativas metodológicas que contribuam para essa formação e que sejam eficientes no ensino desse conteúdo aos alunos.

Entre as estratégias metodológicas para o ensino da matemática financeira, temos a apresentada por Almeida (2004), onde a autora não se utiliza apenas de aulas expositivas com resolução de listas de exercícios, inclui a utilização de reportagens de jornais para discutir conceitos e termos matemáticos, como imposto de renda, taxas por atraso, entre outros. A autora também escolheu trabalhar na maioria do tempo em grupos e propôs a troca de problemas formulados pelos próprios alunos sobre porcentagem.

Outra opção de metodologia é a utilização de jogos. Os jogos despertam a curiosidade e o interesse dos educandos em vários conteúdos, incluindo a matemática financeira. Rade (2010) criou e aplicou jogos que envolvem matemática financeira em uma turma de 3º ano do ensino médio e conclui como eficaz sua utilização, contribuindo para a construção do conhecimento, aprofundando e fixando conteúdos.

O uso de planilhas eletrônicas também apresenta uma alternativa interessante para o ensino de matemática financeira. Teixeira (2015) mostra a utilização do Excel para compreensão de fórmulas financeiras, construção de gráficos e resolução de situações-problema que envolvem o cotidiano da população, como financiamentos, empréstimos e conversão de taxas. O autor enfatiza que o uso da planilha facilita os cálculos, o que faz com que a aula seja melhor aproveitada.

Não existe uma só metodologia que seja eficaz e deva ser usada no ensino da matemática financeira no ensino médio. Como vimos nas propostas acima, várias estratégias podem ser úteis, porém a contextualização é um recurso muito citado pelos professores em vários trabalhos. O conteúdo deve ser aproximado o máximo possível do cotidiano do aluno, como cita Oliveira (2013, p. 4):

> Assim, uma boa formação matemática presume a apropriação dos conteúdos dessa disciplina de maneira significativa, relacionando teoria e prática, pois cabe à escola concretizar essa contextualização. Nesse sentido, o conteúdo de matemática financeira tem lugar de destaque na disciplina de matemática na educação dos alunos e assume uma posição de importância que não deve ser ignorada, dada sua aplicabilidade imediata na vida adulta.

A matemática financeira é trabalhada em sala de aula por professores da disciplina de matemática, entretanto a educação financeira pode ser muito bem trabalhada entre várias disciplinas. Como afirma Junior (2008, p. 4):

> Pela direção e abrangência dada ao tema, fica nítida a necessidade de uma visão multidisciplinar sobre ele. É conveniente explorá-lo a partir de projetos escolares envolvendo diversas disciplinas, abordando formas alternativas de consumo, de estilo de vida, a macro-economia, a geografia econômica, a globalização. Portanto, a história, a sociologia, a psicologia, a geografia, a biologia e a língua portuguesa, por exemplo, podem articular com a matemática num debate dessa temática.

Esse caderno de atividades propõe a abordagem de oito questões sobre os conteúdos da matemática financeira selecionadas de concursos públicos de todo o país. Foram divididas por níveis, fácil, médio e difícil, e escolhidas por tratarem de assuntos como juro simples e composto, conversão de taxas, valor atual, financiamentos e tomada de decisão em investimentos. Cada questão apresenta dicas ao professor com recursos e metodologias que podem ser adotadas durante a aplicação das atividades.

8.1 Questão 1

Nível: Fácil

Conteúdo: Avaliação de alternativas de investimento; Juro;

Ano: 2011

Banca: CESPE

Órgão: EBC

Prova: Analista - Contabilidade

Objetivo: Fazer com que o aluno use o conhecimento de juro composto para comparar os investimentos das instituições, seja calculando o montante ou encontrando a taxa de juro.

Sugestão ao professor: Essa questão exige o conhecimento de juro simples e composto.

Pode ser abordada depois do ensino desses conteúdos em sala de aula ou como abertura para eles, usando apenas o cálculo de porcentagem para descobrir o montante no caso do primeiro investimento com os capitais do segundo e comparando-os. Pode também ser usada em um teste ou avaliação. Pode também ser sugerida uma pesquisa das taxas de juro da poupança, por exemplo, de bancos de sua cidade e complementar essa questão com o cálculo do montante dos capitais de acordo com essas taxas, para depois analisar qual banco oferece o investimento mais vantajoso.
Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juro composto, destacando o crescimento exponencial.

Um investidor mantém seu capital aplicado em uma instituição financeira que paga a taxa líquida de juro composto mensais de $0,6\%$. Uma segunda instituição financeira ofereceu a esse investidor as seguintes opções de investimento.
Opção I: Investimento inicial de R$ $100.000,00$ com retorno líquido, em um mês, do montante no valor de R$ $100.580,00$;
Opção II: Investimento inicial de R$ $85.000,00$ com retorno líquido, em um mês, do montante no valor de R$ $85.527,00$.
A respeito dessas opções e da comparação com aquela oferecida pela primeira instituição financeira, onde o capital do investidor já está aplicado, julgue o item seguinte.
Para o investidor, as opções I e II são menos vantajosas que a oferecida pela primeira instituição financeira.

- Certo
- Errado

Resolução: Uma alternativa para encontrar a solução dessa questão é determinar a taxa de juro aplicada a cada opção e compará-las. Assim, utilizando a equação (24):
Opção I:

$$100580 = 100000(1+i)^1\,. \tag{105}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0058 = 0,58\%\,, \tag{106}$$

que é a taxa utilizada na opção I.

Opção II:

$$85527 = 85000(1+i)^1\,. \tag{107}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0062 = 0,62\%\,, \tag{108}$$

que é a taxa utilizada na opção II.

Assim, vemos que a opção II é mais vantajosa que a oferecida pela primeira instituição financeira onde o capital do investidor já está aplicado.

Outra alternativa de resolução é aplicar a taxa de $0,6\%$ da primeira instituição nas duas opções de investimento da segunda. Logo, usando a equação (24):

Opção I:

$$M = 100000(1+0,006)^1 = 100000 \cdot 1,006 = 100600 \tag{109}$$

Opção II:

$$M = 85000(1+0,006)^1 = 85000 \cdot 1,006 = 85510 \tag{110}$$

Portanto, para a opção II, a taxa de $0,6\%$ renderia menos que o montante de R\$ 85527,00 proposto pela segunda instituição. Logo, a alternativa correspondente é "Errado".

8.2 Questão 2

Nível: Médio

Conteúdo: Taxa de juro; Juro composto;

Ano: 2019

Banca: FUNDATEC

Órgão: Prefeitura de Porto Alegre - RS

Prova: Auditor Fiscal da Receita Municipal

Objetivo: Testar o conhecimento do aluno quanto ao cálculo do montante de juro composto e verificar a atenção quanto a transformação da taxa de juro necessária.

Sugestão ao professor: Essa questão exige dos educandos o conhecimento de juro composto e de diferentes tipos de taxas e suas transformações. Supondo já possuírem o conhecimento de juro composto, para que entendam os tipos de taxas o professor pode utilizar um vídeo explicativo com as definições, com exemplos e até situações do cotidiano onde esses tipos de taxas aparecem. Por não ser uma questão de nível difícil, pode ser resolvida individualmente.

Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juro composto, destacando o crescimento exponencial.

Nesta prova serão utilizados os resultados aritméticos que estão nas tabelas 11 e 12.

Quadro 11 – Tabela para o fator $(1+i)^n$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4801	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8983	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/5f97b063-4c

Quadro 12 – Tabela para o fator $1/(1+i)^n$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513

4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9420	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7441	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394

Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/5f97b063-4c

Qual o valor do montante composto recebido na aplicação de R$ 50.000, 00, durante oito meses, o qual rende com uma taxa de 6% ao trimestre, capitalizada mensalmente?

A) R$ 56585, 00

B) R$ 57585, 00

C) R$ 58585, 00

D) R$ 59585, 00

E) R$ 60585, 00

Resolução: Notemos que a taxa de 6% está ao trimestre, mas sua capitalização é mensal. Assim, como um trimestre equivale a 3 meses, então a taxa é de $6\%/3 = 2\%$ ao mês. Determinamos o montante usando a equação (24) e encontrando o valor da potência indicada na tabela:

$$M = 50000(1 + 0,02)^8 = 50000(1,02)^8 = 50000 \cdot 1,1717 = 58585\,. \qquad (111)$$

Logo, o montante será de R$ 58585, 00, correspondendo à opção C.

8.3 Questão 3

Nível: Difícil
Conteúdo: Juro simples e composto
Ano: 2019
Banca: FCC
Órgão: SANASA Campinas
Prova: Analista administrativo - Serviços administrativos
Objetivo: Saber utilizar as fórmulas de juro simples e composto com o intuito de utiliza-las em uma comparação para encontrar o capital.
Sugestão ao professor: Essa questão exige o conhecimentos dos alunos sobre juro simples e composto e transformação de taxas, além de uma interpretação e uso das fórmulas de maneira um pouco mais complexa. Portanto o professor pode sugerir a resolução dessa questão em equipes, podendo até ser incluída em algum tipo de jogo ou competição entre essas equipes.
Habilidade da BNCC: Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juro composto, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Uma pessoa tem duas opções para aplicar um capital na data de hoje.
Primeira opção: Aplicar todo o capital, durante 8 meses, a juro simples com uma taxa de $9,6\%$ ao ano.
Segunda opção: Aplicar todo o capital, durante 1 semestre, a juro composto com uma taxa de 2% ao trimestre.
Sabe-se que o valor do juro referente à primeira opção supera o valor do juro da segunda opção em R$ $354,00$. O valor do juro referente à primeira opção é, em R$, igual a:

A) R$ $1080,00$

B) R$ $1140,00$

C) R$ $1200,00$

D) R$ $960,00$

E) R\$ $1314,00$

Resolução: Vamos analisar as opções inicialmente sem saber qual é o capital a ser aplicado. Primeira opção: Primeiro tem-se que $9,6\%$ ao ano equivale a $9,6\%/12 = 0,8\%$ ao mês. Usando a equação (6), temos

$$J_1 = C \cdot 0,008 \cdot 8 = 0,064C\,. \tag{112}$$

Segunda opção: Sabemos que um semestre equivale a dois trimestres. Logo, usando a equação (24) obtemos

$$M = C(1+0,02)^2 = C(1,02)^2 = 1,0404C\,. \tag{113}$$

E, como $M = C + J_2$, então

$$1,0404C = C + J_2 \rightarrow J_2 = 0,0404C\,. \tag{114}$$

De acordo com o enunciado da questão, $J_1 = J_2 + 354$, assim

$$0,064C = 0,0404C + 354\,. \tag{115}$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 15000\,, \tag{116}$$

que é o capital. Portanto

$$J_1 = 0,064 \cdot 15000 = 960\,, \tag{117}$$

que é o juro da primeira opção. Logo, a alternativa correta é a C.

8.4 Questão 4

Nível: Fácil

Conteúdo: Juro simples e composto

Ano: 2017

Banca: IBFC

Órgão: CEDUC - MT

Prova: Professor de Educação Básica - Matemática

Objetivo: Saber calcular o juro simples e composto de uma aplicação.

Sugestão ao professor: Essa questão exige apenas o conhecimento de juro simples e composto. Por ser de fácil resolução pode ser feita individualmente e até mesmo incluída em algum tipo de teste. O professor também pode complementar essa questão levando para a sala de aula panfletos de lojas com ofertas de produtos que podem ser pagos parcelados e utilizar as taxas de juro cobradas por essas lojas para calcular o juro nos dois regimes e comparar os valores.
Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Considere que para uma quantia de R\$ 2.000,00 sejam oferecidas duas opções de investimento:

- Opção 1: Juro simples de 7% ao mês, ao longo de 3 meses.
- Opção 2: Juro composto de 5% ao mês, ao longo de 2 meses.

Assinale a alternativa que indica qual a diferença entre o total de juro obtido nestas duas opções:

A) R\$ 215,00

B) R\$ 225,00

C) R\$ 235,50

D) R\$ 305,25

E) R\$ 321,25

Resolução: Usando a equação (6) obtemos

$$J_1 = 2000 \cdot 0,07 \cdot 3 = 420\,, \tag{118}$$

que é o juro da primeira opção. Usando a equação (24) obtemos

$$M = 2000(1 + 0,05)^2 = 2000 \cdot 1,1025 = 2205\,, \tag{119}$$

que é o montante da segunda opção, e como $M = C + J_2$ temos

$$2205 = 2000 + J_2\,. \tag{120}$$

Isolando J_2 nesta equação obtemos

$$J_2 = 205\,, \tag{121}$$

que é o juro da segunda opção.
A diferença pedida entre J_1 e J_2 é de R\$ $215,00$, correspondendo à opção A.

8.5 Questão 5

Nível: Médio
Conteúdo: Sistema Price
Ano: 2019
Banca: IBFC
Órgão: IDAM
Prova: Técnico de Nível Superior - Contador
Objetivo: Utilizar os conhecimentos de sistemas de amortização para calcular juro e amortização do capital de uma dívida.
Sugestão ao professor: Essa questão exige do aluno o conhecimento do sistema de amortização francês, também conhecido como Price, além do regime de juro composto. Como não é comum em sala de aula o ensino sobre os sistemas de amortização, o professor pode preparar uma apresentação de slides em Power Point explicando e mostrando exemplos sobre as definições, diferenças e exemplos de utilização no dia a dia de sistemas de amortização. Essa questão pode ser resolvida individualmente, já que está em um nível médio de dificuldade.
Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da matemática financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.

Uma prefeitura do interior do estado adquiriu um equipamento de terraplanagem no valor de R\$ $300000,00$. Impossibilitada de efetuar o pagamento à vista, a citada prefeitura solicitou ao banco de seu relacionamento um financiamento para a compra do equipamento. O banco aceitou a operação, financiando o valor total do equipamento em 10 parcelas iguais e consecutivas no valor de R\$ $33398,00$ cada uma. O juro pactuado foi de 2% ao mês. A primeira parcela vence 30 dias a partir da assinatura do contrato e pagamento pelo banco ao fornecedor, e o sistema de amortização é o PRICE. Com base nos dados acima descritos, assinale a alternativa correta que indica respectivamente o valor aproximado do juro e da amortização do capital, relativos à segunda prestação do financiamento.

A) $\text{R\$}\,6000,00$ e $\text{R\$}\,27398,00$

B) $\text{R\$}\,6000,00$ e $\text{R\$}\,27946,00$

C) $\text{R\$}\,5452,00$ e $\text{R\$}\,27946,00$

D) $\text{R\$}\,4893,00$ e $\text{R\$}\,28515,00$

Resolução: No sistema Price as parcelas do financiamento são todas iguais, onde em cada parcela uma parte paga o juro e outra amortiza a dívida. Por esse motivo, as parcelas de amortização são crescentes. Analisando a primeira parcela, temos que o juro será de

$$\text{R\$}\,300000,00 \cdot 0,02 = \text{R\$}\,6000,00, \tag{122}$$

enquanto que a amortização será de

$$\text{R\$}\,33398,00 - \text{R\$}\,6000,00 = \text{R\$}\,27398,00. \tag{123}$$

Logo, vemos que a alternativa A já pode ser descartada, já que esses valores referem-se à primeira prestação e o que nos interessa são os valores da segunda prestação. Assim,

$$\text{R\$}\,300000,00 - \text{R\$}\,27398,00 = \text{R\$}\,272602,00, \tag{124}$$

ou seja, o estado atual da dívida é de $\text{R\$}\,272602,00$. Portanto, para o segundo mês, temos que o juro é de

$$\text{R\$}\,272602,00 \cdot 0,02 = \text{R\$}\,5452,04, \tag{125}$$

e a amortização é de

$$\text{R\$}\,33398,00 - \text{R\$}\,5452,04 = \text{R\$}\,27945,96. \tag{126}$$

Sendo assim, a alternativa que mais se aproxima desses valores é a C.

8.6 Questão 6

Nível: Fácil
Conteúdo: Avaliação de alternativas de investimento; Taxas de juro
Ano: 2013
Banca: CESGRANRIO
Órgão: IBGE
Prova: Analista - Recursos Materiais e Logística
Objetivo: Calcular a taxa de retorno pedida para conseguir avaliar a melhor opção de investimento entre as apresentadas.
Sugestão ao professor: Essa questão é de fácil resolução, uma vez que basta para o aluno o conhecimento de conversão de taxas para resolvê-la. O professor pode levar para sala de aula um notícia que inclua um tipo de taxa como a questão mostra, e pode pedir para que os alunos calculem também aquela taxa equivalente a dois anos de aplicação ou pode usar como um exemplo introdutório.
Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Uma empresa planeja um fundo de reserva. Para tal deseja investir R\$ $500000,00$ hoje e resgatar o montante da aplicação daqui a 2 anos. Após pesquisa de mercado, a equipe financeira da empresa identificou cinco opções de investimento apresentadas a seguir.
Investimento 1 – taxa de 3% ao mês
Investimento 2 – taxa de 6% ao bimestre
Investimento 3 – taxa de 19% ao semestre
Investimento 4 – taxa de 40% ao ano
Investimento 5 – taxa de 90% ao biênio
Dos investimentos apresentados, qual proporciona a maior taxa de retorno em 2 anos?
Dados:
$1,03^{12} \equiv 1,43;$
$1,06^{12} \equiv 2,01;$

$1,19^2 \equiv 1,42;$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Resolução: Essa questão se refere à taxas equivalentes. Como a pergunta pede a maior taxa de retorno em dois anos, pode-se transformar todas as taxas para esse período. Assim, usando a equação (33) encontraremos I_n que será a taxa equivalente a 24 meses.
Investimento 1:

$$(1 + I_1) = (1 + 0,03)^{24} = (1,03^{12})^2 = 1,43^2 = 2,0449\,. \tag{127}$$

$$I_1 = 1,0449 = 104,49\%\,. \tag{128}$$

Investimento 2:

$$(1 + I_2) = (1 + 0,06)^{12} = 1.06^{12} = 2,01\,. \tag{129}$$

$$I_2 = 1,01 = 101\%\,. \tag{130}$$

Investimento 3:

$$(1 + I_3) = (1 + 0,19)^4 = (1,19^2)^2 = 1,42^2 = 2,0164\,. \tag{131}$$

$$I_3 = 1,0164 = 101,64\%\,. \tag{132}$$

Investimento 4:

$$(1 + I_4) = (1 + 0,4)^2 = 1,96\,. \tag{133}$$

$$I_4 = 0,96 = 96\% \,. \tag{134}$$

Investimento 5: Nesse caso a taxa não precisa ser transformada, pois foi dada no período de 24 meses. Portanto a taxa de retorno em dois anos será de 90%.

Logo, o investimento que dará o maior retorno é o investimento 1, correspondendo à opção A.

É importante observar que nem todos os cálculos precisam ser efetuados até o fim. Percebe-se, em alguns casos, de maneira rápida que sua taxa será menor, sem precisar chegar a um resultado final.

8.7 Questão 7

Nível: Difícil
Conteúdo: Séries de pagamento
Ano: 2018
Banca: CESPE
Órgão: SEFAZ - RS
Prova: Auditor do Estado - Bloco II
Objetivo: Apresentar conhecimento necessário para calcular o valor futuro do investimento e as prestações, utilizando a fórmula correta de modo que os valores dados no enunciado sejam utilizados.
Sugestão ao professor: Essa questão apresenta um nível de dificuldade de resolução difícil, portanto uma alternativa é fazer com que os alunos formem equipes para discuti-la e respondê-la. Exige o conhecimento de valores no tempo, incluindo a fórmula de valor futuro. Uma alternativa é a apresentação de um vídeo aos alunos, podendo ser um documentário sobre o conteúdo, mostrando como os valores se comportam através do tempo, apresentando exemplos e fórmulas.
Habilidade da BNCC: Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juro composto, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Um pai, preocupado em compor recursos para a educação superior de seu filho, idealizou juntar dinheiro em uma conta investimento que rende 8% ao ano. O pai depositaria, durante nove anos, R\$ $24000,00$ por ano nessa conta, para que o filho fizesse cinco saques de valores iguais, um a cada ano, com o primeiro saque um ano após o último depósito. O saldo remanescente a cada saque ficaria rendendo à mesma taxa até o quinto saque, quando o saldo se anularia.
Nessa situação, considerando-se 0,68 e 2 como valores aproximados para $(1,08)^{-5}$ e $(1,08)^{9}$, respectivamente, cada saque anual teria o valor de

A) R\$ $67100,00$

B) R\$ $75000,00$

C) R\$ $150000,00$

D) R\$ $10500,00$

E) R\$ $43200,00$

Resolução: Iniciamos calculando o valor da série de pagamentos após os nove anos de depósitos. Assim, usando a equação (57) temos

$$FV = 24000\frac{(1+0,08)^9-1}{0,08} = 24000\frac{(2-1)}{0,08} = \frac{24000}{0,08} = 300000\,. \tag{135}$$

Portanto, o valor dos depósitos depois de nove anos é de R\$ $300000,00$.

Em seguida, precisamos encontrar o valor de cada saque que o filho fará. Para isso, como o valor dado no enunciado da questão é o resultado de $(1,08^{-5})$, então utilizando a equação (58) temos

$$\begin{aligned}
P &= 300000\frac{0,08}{1-(1+0,08)^{-5}} && (136)\\
&= 300000\frac{0,08}{(1-0,68)} && (137)\\
&= 300000\frac{0,08}{0,32} && (138)\\
&= 300000\cdot 0,25 && (139)\\
&= 75000\,. && (140)
\end{aligned}$$

Portanto, o valor de cada saque do filho será de R\$ $75000,00$, correspondendo à opção B.

8.8 Questão 8

Nível: Médio
Conteúdo: Juro simples e composto; Dinheiro no tempo;
Ano: 2020
Banca: CESPE
Órgão: SEFAZ - DF
Prova: Auditor Fiscal
Objetivo: Saber utilizar os cálculos de juro e dinheiro no tempo necessários para tomar a decisão correta.
Sugestão ao professor: Essa questão exige do aluno o conhecimento de juro composto e dinheiro no tempo. Pode ser resolvida e discutida em equipes. Como é dividida em três partes, pode ser incluída em algum jogo ou competição entre os alunos. O professor pode também trazer para a sala de aulas exemplos reais resolvidos que envolvem a noção do valor do dinheiro em função do tempo.
Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Em determinada loja, uma bicicleta é vendida por R$ $1720,00$ à vista ou em duas vezes, com uma entrada de R$ $920,00$ e uma parcela de R$ $920,00$ com vencimento para o mês seguinte. Caso queira antecipar o crédito correspondente ao valor da parcela, o lojista paga para a financeira uma taxa de antecipação correspondente a 5% do valor da parcela. Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

1. Considere que um comprador sabe que o preço da bicicleta não irá aumentar durante 1 mês e tem a possibilidade de investir suas economias em uma aplicação com rendimento líquido de 5% ao mês. Nessa situação, o comprador poderá realizar a compra à vista da bicicleta investindo nessa aplicação uma quantia inferior a R$ $1650,00$, independentemente de o regime de capitalização da aplicação ser simples ou composto.

- Certo
- Errado

Resolução: Primeiramente é importante lembrar que para o prazo de um período, nesse caso um mês, o rendimento no regime de juro simples ou composto é o mesmo. Portanto, basta analisar se dadas as condições, o valor a ser aplicado será mesmo inferior a R\$ 1650, 00. Assim, usando a equação (8) temos

$$1720 = C(1 + 0,05 \cdot 1)\,. \tag{141}$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 1638,10\,. \tag{142}$$

Logo, o valor a ser aplicado é de R\$ 1638, 10, que é inferior a R\$ 1650, 00. A alternativa correta é "Certo".

2. Na compra a prazo, o custo efetivo da operação de financiamento pago pelo cliente será inferior a 14% ao mês.

- Certo
- Errado

Resolução: Para encontrar a taxa pedida, é necessário avaliar o dinheiro através do tempo. Sabemos que o valor atual é de R\$ 1720, 00 e temos uma entrada de R\$ 920, 00 com mais uma parcela paga no mês seguinte também de R\$ 920, 00. Assim

$$1720 = 920 + \frac{920}{(1+i)}\,. \tag{143}$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,15 = 15\%\,. \tag{144}$$

Ou seja, a taxa é de 15%, o que é superior a 14%. A alternativa correta é "Errado".

3. No caso de uma venda a prazo em que o lojista optasse pela antecipação do crédito correspondente à parcela que só seria paga no mês seguinte, o valor total que ele receberia (entrada mais antecipação) seria superior a R\$ 1790, 00.

- Certo
- Errado

Resolução: Nesse caso, o lojista recebe os R$ $920,00$ da entrada e mais a parcela de R$ $920,00$ subtraída de 5%, ou seja, R$ $920,00 \cdot 0,95 =$ R$ $874,00$. Isso totaliza R$ $1794,00$, o que é superior a R$ $1790,00$. A alternativa correta é "Certo".

9 Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi a realização de um caderno de atividades sobre matemática financeira com foco em financiamentos e empréstimos voltado ao professor que trabalha esse conteúdo no primeiro ano do ensino médio. Esse tema foi escolhido com o intuito de auxiliar professores a trabalhar esse conteúdo conectando-o com a realidade da população de forma consciente e crítica, uma vez que a matemática financeira é, muitas vezes, abordada em sala de aula de forma mecânica, com realização de exercícios de fixação sem conexão à realidade do aluno.

Para iniciar o trabalho buscamos em documentos oficiais da educação suas orientações sobre a prática pedagógica da matemática financeira no ensino médio, onde a BNCC trás de maneira específica em suas habilidades o tratamento desse conteúdo, aliando-o até a outros conteúdos da matemática, como funções exponenciais e logarítmicas e também recomenda que esse tema seja abordado nas escola de maneira transversal, ou seja, envolvendo outras disciplinas, como a língua portuguesa e a história.

Na fundamentação teórica apresentamos os conceitos e a resolução de exemplos sobre elementos básicos da matemática financeira, como juro simples e composto, taxas de juro, valor atual e valor futuro e séries uniformes. Também explicamos os sistemas de amortização, conceituando e diferenciando os sistemas como o Sistema de Amortização Constante, Sistema de Amortização Francês e Sistema de Amortização Americano, o que pudemos verificar que oferecem vantagens diferentes para cada tipo de situação. Em outro capítulo incluímos um relato sobre os principais tipos de financiamentos e empréstimos utilizados atualmente no Brasil, suas principais características, vantagens e desvantagens e também um breve resumo sobre a taxa Selic e como ela interfere nesses tipos de operações.

Por fim acrescentamos dois capítulos com questões resolvidas. O primeiro deles contém atividades criadas para esse trabalho, focando principalmente em financiamentos e empréstimos. São atividades que desenvolvem a criticidade do aluno já que objetivam em sua maioria a tomada de decisões por parte deles frente a situações reais. Já o segundo capítulo contém questões selecionadas de concursos públicos de todo o país sobre matemática financeira que também priorizam a tomada de decisões.

O produto educacional contido no apêndice desse trabalho é um caderno de atividades voltado ao professor com sugestões e questões já resolvidas que mesclam as atividades criadas e as questões de concursos públicos. Espero que esse produto contribua de maneira significativa na prática pedagógica do professor frente ao conteúdo de matemática financeira, valorizando em sala de aula a criticidade do aluno e sua consciência financeira para que saiba tomar decisões corretas com propriedade.

Para trabalhos futuros espero poder aplicar esse caderno de atividades em sala de aula no primeiro ano do ensino médio e poder verificar sua eficácia com relação a esse tema.

REFERÊNCIAS

ABAC, Associação Brasileira de Administradoras de Consórcios. **Sistema de Consórcios: o que é e como funciona**. São Paulo, 2020. Disponível em: http://blog.abac.org.br/consorcio-de-a-a-z/sistema-de-consorcios-o-que-e-e-como-funciona-2. Acesso em: 12 set. 2020.

ALMEIDA, Adriana Correa. **Trabalhando matemática financeira em uma sala de aula do ensino médio da escola pública**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, 2004.

ARAUJO, Magnum Miranda de. **Construção de calculadoras de financiamentos usando o Microsoft Exel: uma proposta de ensino para a matemática financeira**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Vale de São Franscisco, 2013.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxa Selic**. Brasília, 2020. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic. Acesso em: 12 set. 2020.

BRASIL, Ministério de Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

FARIAS, Gisele Valle de. **A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

FERNANDES, Nilo César Costa. **Matemática financeira: uma abordagem sobre financiamentos**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Ceará, 2014.

INACIO, Lucas. **Economia da moeda nossa de cada dia**. Revista Its, Santa Catarina, ed. 152, janeiro, 2018.

JUNIOR, Olindo Possiede. **O ensino da matemática financeira: relato de uma experiência de aprendizagem**. Caderno: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE, v. 1, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde. Acesso em: 05 jan. 2020.

KAUARK, Fabiana; MANHÃES, Fernanda Castro; MEDEIROS, Carlos Henrique. **Metodologia da pesquisa: um guia prático**. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

LDB. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria.**Matemática Financeira**. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

MOREIRA, Marco Antonio. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Pulo: Editora Livraria da Física, 2011.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

NETO, Antonio Sabino de Paula. **Matemática financeira: o estudo de empréstimos consignados e consórcios voltados para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Ceará, 2014.

OLIVEIRA. Darení Portela de. **A matemática financeira e o cotidiano do aluno do ensino médio**. Caderno: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE, v. 1, 2013. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde. Acesso em: 03 jan. 2020.

PITZER, Luiz Carlos. **Financiamentos e investimentos: uma proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Santa Catarina, 2018.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática Financeira: objetiva e aplicada**. 8. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.

RADE, Arlei Vaz. **Contribuição de jogos como recurso didático nas aulas de matemática financeira**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2010.

SANTA CATARINA. Governo do Estado. **Proposta Curricular de Santa Catarina: formação integral na Educação Básica**. Santa Catarina, 2014.

TEIXEIRA, Enilton de Abreu. **Uso da planilha eletrônica Excel como ferramenta didática para o ensino da matemática financeira no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Tocantins, 2015.

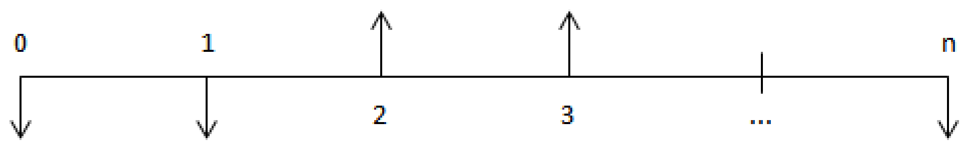
ZINET, Caio. **Pesquisa aponta que maioria dos jovens brasileiros concilia trabalho e estudo**. Centro de Referências em Educação Integral, 2016. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/reportagens/pesquisa-aponta-maioria-dos-jovens-brasileiros-concilia-trabalho-estudo. Acesso em: 9 out. 2020.

APÊNDICE: FLUXOS DE CAIXA E PLANILHA EXCEL

Fluxos de caixa

Fluxo de caixa é um conjunto de entradas e saídas de dinheiro ao longo do tempo. Podem ser representados com esquemas de flechas, como na figura 1.

Figura 1 – Fluxo de caixa - Exemplo



Fonte: Autora

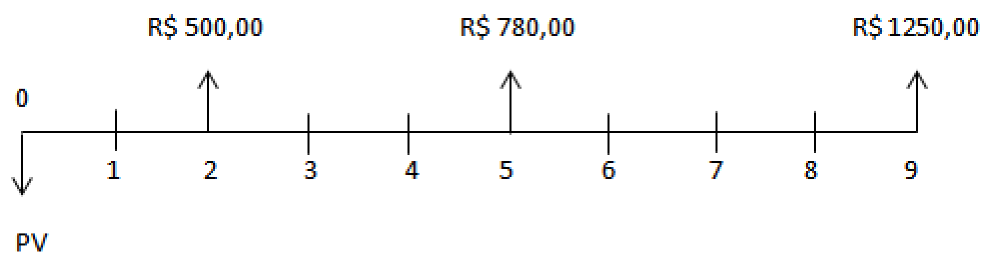
O eixo horizontal representa o tempo dividido em períodos que podem ser meses, anos, dias trimestres ou semestres. As flechas para cima representam os recebimentos e as flechas para baixo os pagamentos. Todos os intervalos de tempo devem ser iguais.

Vamos mostrar a representação de um exemplo através do esquema de flechas do fluxo de caixa.

Exemplo. Pedro tem 3 dívidas, de R$ 500, 00, R$ 780, 00 e R$ 1250, 00, que devem ser quitadas em 2, 5 e 9 meses, respectivamente. Supondo que ele irá aplicar uma quantia em uma operação de juro composto com uma taxa de juro de 2% a.m. para pagar todas as dívidas, que quantia deverá ser aplicada por Pedro?

Veja a figura 2.

Figura 2 – Fluxo de caixa da aplicação de Pedro



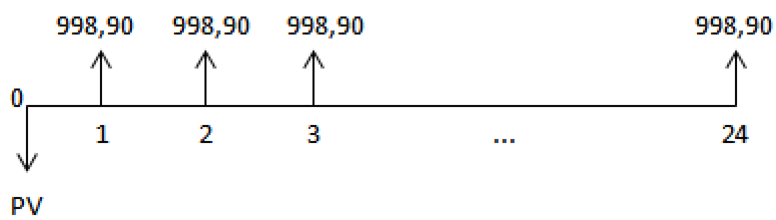
Fonte: Autora

Nesse caso, PV será o valor procurado que é o valor a ser depositado por Pedro, então os demais valores devem ser trazidos para a época 0.

Uso de planilhas na resolução de cálculos financeiros

Uma alternativa para a resolução de vários tipos de cálculos financeiros sem precisar utilizar fórmulas é o uso das planilhas eletrônicas, como a Microsoft Excel. As células da planilha Excel apresentam os valores monetários arredondados para duas casas decimais, mas isso ocorre apenas na exibição, pois no armazenamento e cálculo é utilizada precisão máxima, geralmente de 15 dígitos, isso pode ser alterado com a utilização do comando "ARRED"da planilha Excel. Para mostrar como funciona o cálculo financeiro utilizando a planilha Excel, apresentamos o exemplo abaixo retirado da seção de séries uniformes, resolvido inicialmente com a precisão de 15 casas decimais do Excel e depois verificado com o cálculo utilizando o comando "ARRED"com arredondamento para duas casas decimais.
Exemplo. Uma concessionária está vendendo um automóvel seminovo em 24 parcelas mensais iguais de R\$ 998, 90, sendo a primeira paga um mês após a compra. Sabendo que a concessionária emprega uma taxa de juro de 3% a.m., qual é o valor à vista desse automóvel? Para calcular o valor à vista do automóvel, devemos procurar o valor atual PV relativo à situação. O fluxo de caixa é apresentado na figura 3.

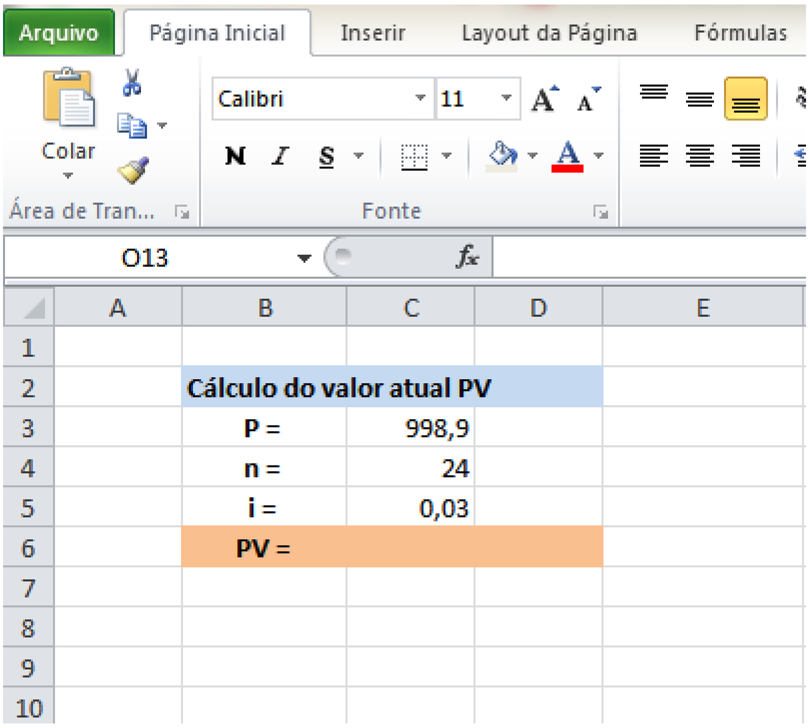
Figura 3 – Fluxo de caixa do financiamento



Fonte: Autora

A flecha correspondente a PV para baixo significa que a soma dos valores de todas as prestações, trazidas ao tempo 0 com PV deve ser igual a zero. A resolução deste problema na planilha Excel é ilustrada na figura 4.

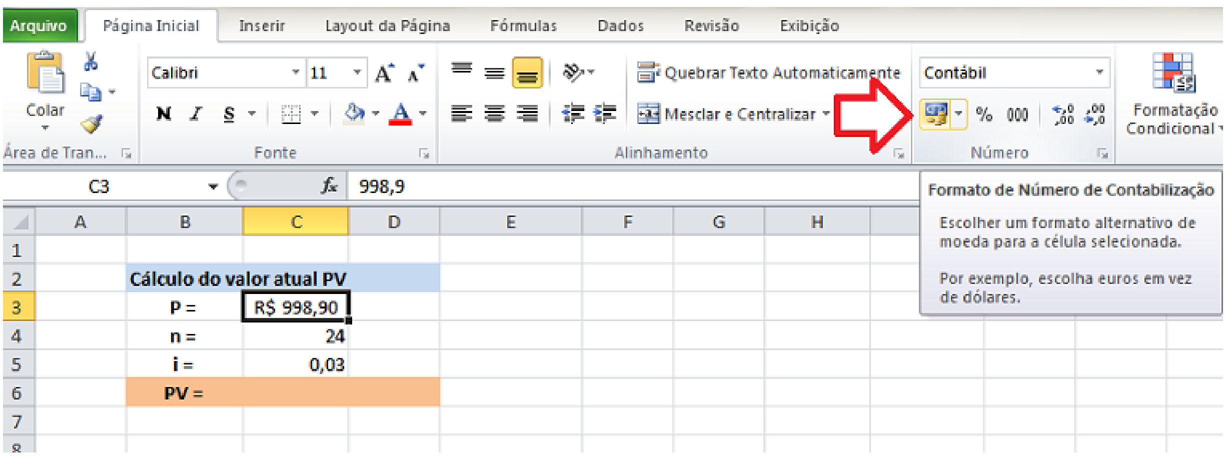
Figura 4 – Cálculo de PV através de planilha Excel



Fonte: Autora

Para inserir valores monetários, como as prestações, clicamos na célula em questão e no ícone "Formato de Número de Contabilização" com a opção em reais. Veja a figura 5.

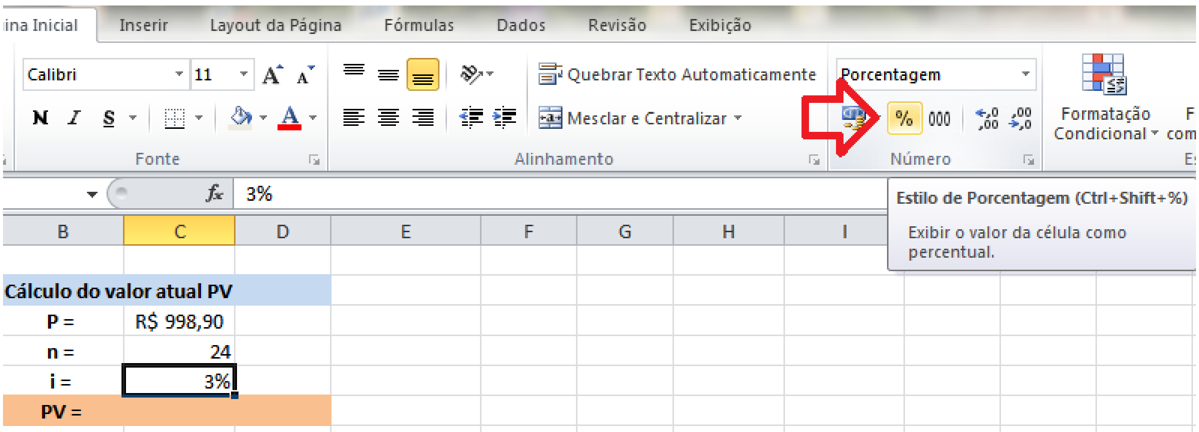
Figura 5 – Cálculo de PV através de planilha Excel: escolha do formato numérico



Fonte: Autora

Para inserir valores em porcentagem, como a taxa de juro, clicamos na célula em questão e depois no ícone “Estilo de porcentagem”. Veja a figura 6.

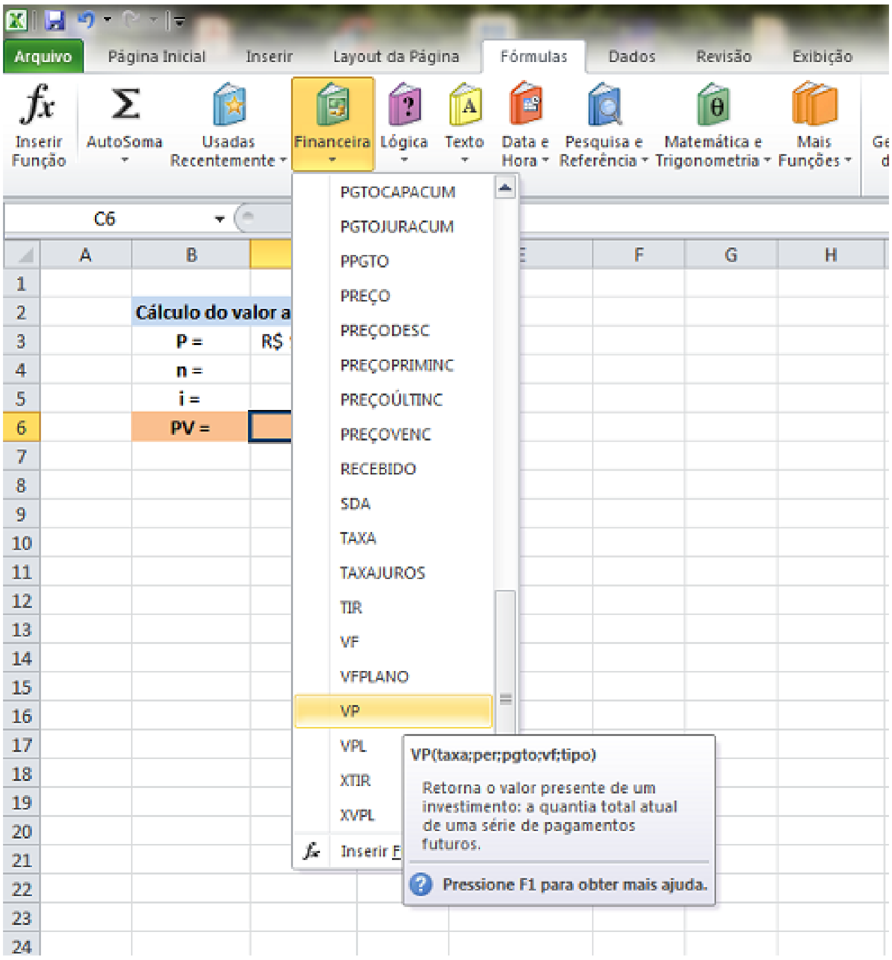
Figura 6 – Cálculo de PV através de planilha Excel: escolha do formato de porcentagem



Fonte: Autora

Para encontrar o valor atual PV clicamos na célula em que o resultado deve aparecer, depois clicamos na aba “Fórmulas” e escolhemos a opção “Financeira”. Em seguida selecionamos “VP”, como na figura 7.

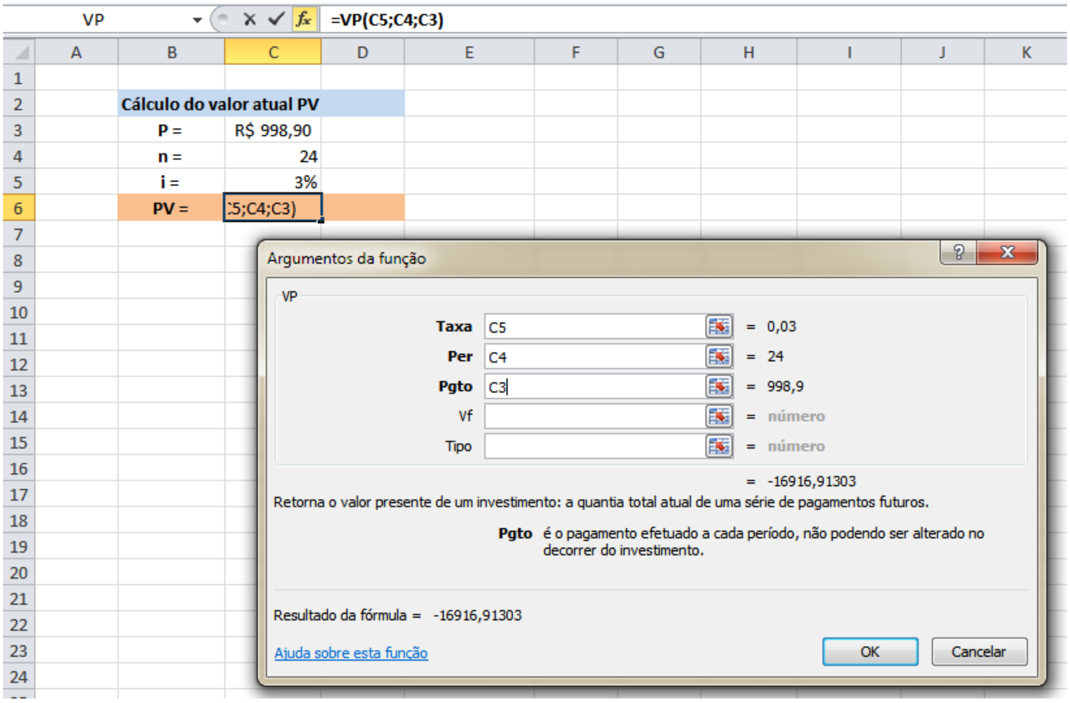
Figura 7 – Cálculo de PV através de planilha Excel: seleção da quantidade a ser calculada



Fonte: Autora

Na nova janela, com o cursor no campo “Taxa”, clicamos na célula onde se encontra a taxa de juro na planilha, mudando o cursor para o campo “Per” clicamos na célula onde se encontra o número de períodos da operação na planilha. Da mesma forma, no campo “Pgto” clicamos na célula que se encontra o valor das prestações. Os campos “Vf” e “Tipo” não precisam ser preenchidos, pois não serão usados nesse caso. Veja como fica na figura 8.

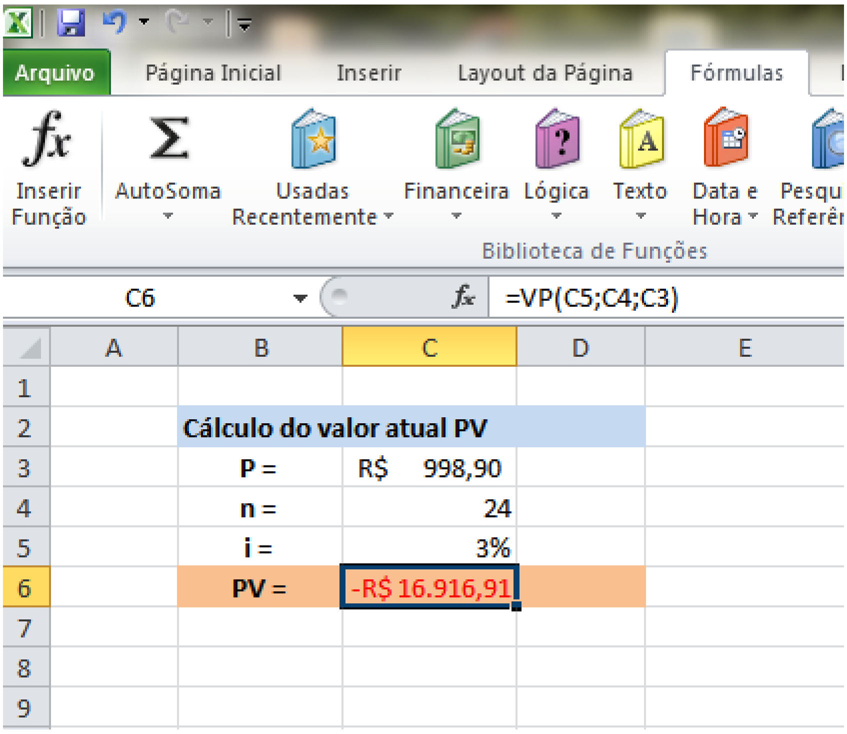
Figura 8 – Cálculo de PV através de planilha Excel: escolha dos argumentos de PV



Fonte: Autora

Clicando em "OK" aparecerá automaticamente o valor atual PV da operação, como mostrado na figura 9. Ele aparece com sinal negativo por termos colocado o valor das prestações com sinal positivo.

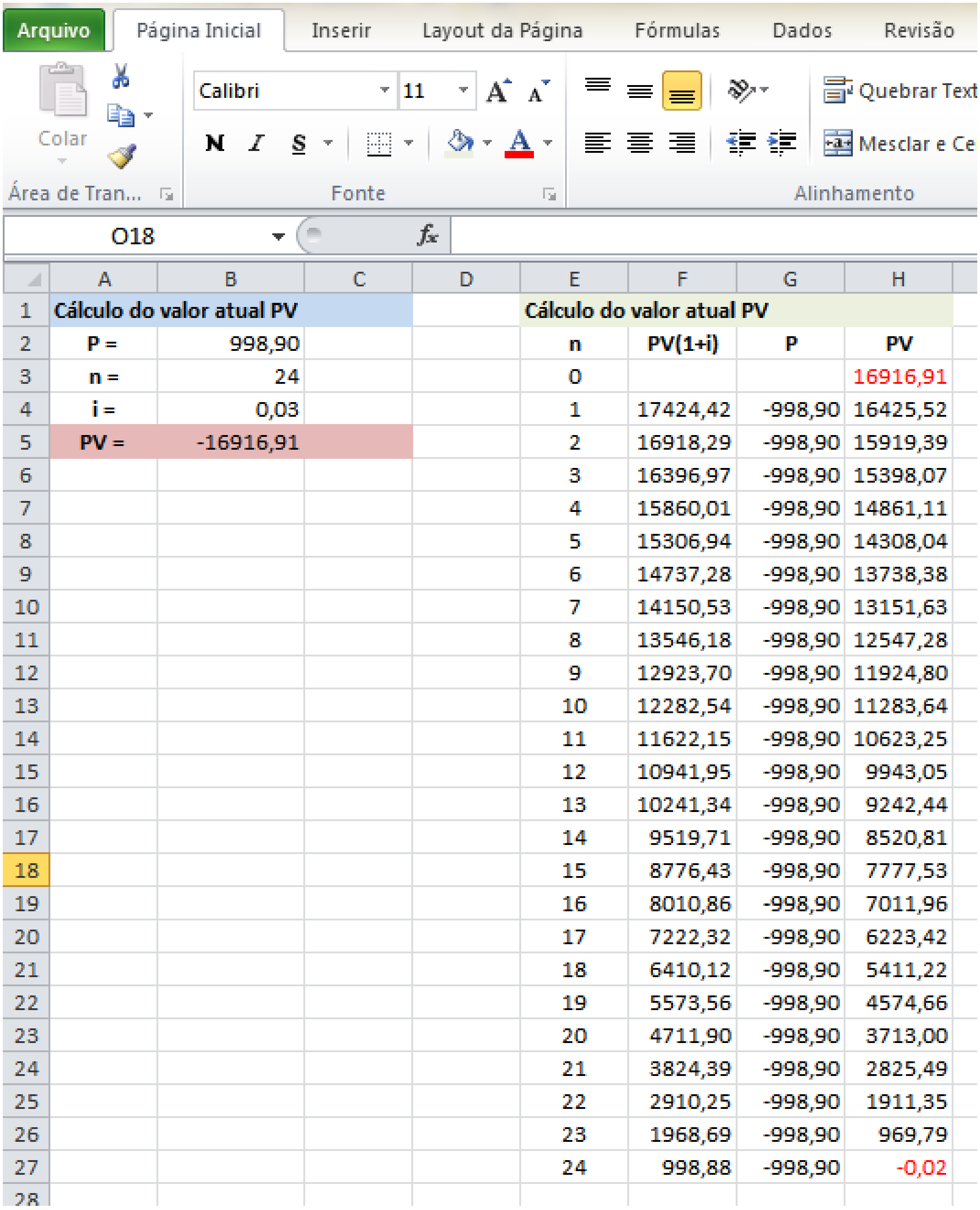
Figura 9 – Cálculo de PV através de planilha Excel: apresentação do resultado



Fonte: Autora

Logo, o valor à vista do automóvel é R$ 16916, 91. Esse valor foi calculado pela planilha Excel com precisão de 15 casas decimais e arredondado para duas casas apenas no resultado final, porém nos cálculos financeiros deve ser utilizado o arredondamento para duas casas decimais durante todos os passos do cálculo, para isso usa-se o comando "ARRED"da planilha Excel. Dessa forma, com o valor de R$ 16916, 91 encontrado e a função "ARRED"do Excel para que os valores sejam arredondados para duas casas decimais, vemos na figura 10 que para a prestação do último mês faltaria R$ 0, 02.

Figura 10 – Verificação do PV com arredondamento de duas casas decimais em todas os passos do cálculo

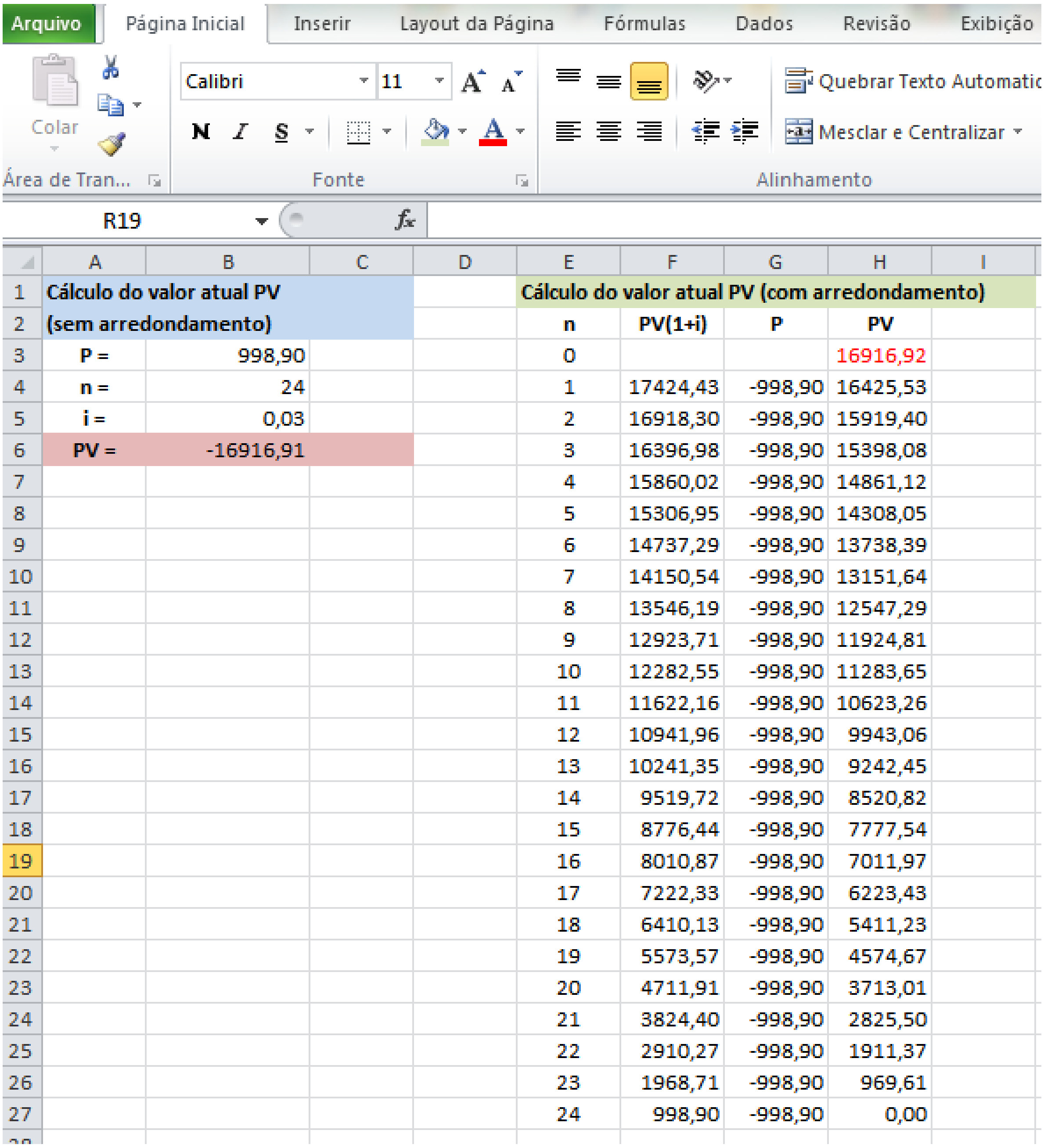


	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Cálculo do valor atual PV				Cálculo do valor atual PV			
2	P =	998,90			n	PV(1+i)	P	PV
3	n =	24			0			16916,91
4	i =	0,03			1	17424,42	-998,90	16425,52
5	PV =	-16916,91			2	16918,29	-998,90	15919,39
6					3	16396,97	-998,90	15398,07
7					4	15860,01	-998,90	14861,11
8					5	15306,94	-998,90	14308,04
9					6	14737,28	-998,90	13738,38
10					7	14150,53	-998,90	13151,63
11					8	13546,18	-998,90	12547,28
12					9	12923,70	-998,90	11924,80
13					10	12282,54	-998,90	11283,64
14					11	11622,15	-998,90	10623,25
15					12	10941,95	-998,90	9943,05
16					13	10241,34	-998,90	9242,44
17					14	9519,71	-998,90	8520,81
18					15	8776,43	-998,90	7777,53
19					16	8010,86	-998,90	7011,96
20					17	7222,32	-998,90	6223,42
21					18	6410,12	-998,90	5411,22
22					19	5573,56	-998,90	4574,66
23					20	4711,90	-998,90	3713,00
24					21	3824,39	-998,90	2825,49
25					22	2910,25	-998,90	1911,35
26					23	1968,69	-998,90	969,79
27					24	998,88	-998,90	-0,02
28								

Fonte: Autora

Portanto, o valor correto de PV nessa situação é de R\$ 16916,92 como demonstrado na figura 11.

Figura 11 – Cálculo de PV através de planilha Excel: arredondamento de duas casas decimais em todas os passos do cálculo



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Cálculo do valor atual PV				Cálculo do valor atual PV (com arredondamento)				
2	(sem arredondamento)				n	PV(1+i)	P	PV	
3	P =	998,90			0			16916,92	
4	n =	24			1	17424,43	-998,90	16425,53	
5	i =	0,03			2	16918,30	-998,90	15919,40	
6	PV =	-16916,91			3	16396,98	-998,90	15398,08	
7					4	15860,02	-998,90	14861,12	
8					5	15306,95	-998,90	14308,05	
9					6	14737,29	-998,90	13738,39	
10					7	14150,54	-998,90	13151,64	
11					8	13546,19	-998,90	12547,29	
12					9	12923,71	-998,90	11924,81	
13					10	12282,55	-998,90	11283,65	
14					11	11622,16	-998,90	10623,26	
15					12	10941,96	-998,90	9943,06	
16					13	10241,35	-998,90	9242,45	
17					14	9519,72	-998,90	8520,82	
18					15	8776,44	-998,90	7777,54	
19					16	8010,87	-998,90	7011,97	
20					17	7222,33	-998,90	6223,43	
21					18	6410,13	-998,90	5411,23	
22					19	5573,57	-998,90	4574,67	
23					20	4711,91	-998,90	3713,01	
24					21	3824,40	-998,90	2825,50	
25					22	2910,27	-998,90	1911,37	
26					23	1968,71	-998,90	969,61	
27					24	998,90	-998,90	0,00	

Fonte: Autora

A figura 11 apresenta o cálculo detalhado do problema com o arredondamento para duas casas decimais realizado a cada passo utilizando a função "ARRED" do Excel, o que mostra que o valor de R$ 16916,92 é o correto para essa situação da matemática financeira. Quando não se utiliza o comando "ARRED" da planilha Excel existe o risco do resultado final não ser o correto, como demonstrado nesta situação. Em um grande financiamento essa diferença pode ser ainda mais significativa.

APÊNDICE: PRODUTO EDUCACIONAL

Financiamentos e empréstimos: Uma abordagem prática

APRESENTAÇÃO

Caro (a) professor (a),

Este Produto Educacional é resultado da pesquisa intitulada “Financiamentos e empréstimos: uma abordagem para o ensino médio”, realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse.

Este produto é um caderno de atividades voltado ao professor com sugestões e questões com resolução que mesclam atividades criadas especificamente para esse trabalho e questões de concursos públicos.

Espero que esse material contribua de maneira significativa na prática pedagógica do professor frente ao conteúdo de matemática financeira, valorizando em sala de aula a capacidade crítica do aluno e sua consciência financeira para que saiba tomar decisões corretas diante das inúmeras ofertas de créditos disponibilizadas por instituições financeiras e estabelecimentos comerciais. O conteúdo deste material pode ser utilizado e modificado livremente, sempre que esta fonte for citada.

Considerações adicionais sobre esse assunto podem ser encontradas através do site https://www.udesc.br/cct/profmat/defesas ou no e-mail bruna.biaobock2014@gmail.com.

Bruna Zigovski Biaobock

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Quando focamos nos adolescentes do ensino médio, uma pesquisa intitulada "Juventude na escola - por que frequentam?"feita pelo Ministério da Educação, Organização dos Estados Interamericanos e Faculdade Latino-Americana de Ciências Sociais (ZINET, 2016) aponta que mais da metade dos estudantes concilia ou já conciliou trabalho e estudo, o que faz com que eles entrem em contato com os aspectos financeiros da relação trabalhista e com a necessidade de gerenciar seus salários. A partir daí surge a vontade e a necessidade de adquirir produtos e serviços. Como a maioria não trabalha a muito tempo, surge a necessidade de procurar financiamentos ou empréstimos para a aquisição dos bens de consumo, e com pouco conhecimento dessas operações, é capaz do indivíduo acabar se envolvendo em um plano que o fará pagar mais do que o necessário, quando comparado com outros planos que podem apresentar condições melhores, como taxas de juro menores, por exemplo. Com base nisso, percebe-se a relevância de se trabalhar esses temas quando se aborda a matemática financeira no ensino médio.

A matemática financeira é trabalhada no ensino médio de maneira superficial, não abordando muito mais do que porcentagem, juros simples e compostos. Pela sua importância na preparação dos adolescentes para o exercício pleno da cidadania, deveria ter mais espaço no currículo da educação básica, abordando também outros assuntos relacionados a esse tema, tais como o funcionamento dos cartões de crédito, investimentos, economia, financiamentos e empréstimos.

Em consonância com as recomendações da BNCC pode-se trabalhar o tema da educação financeira de maneira transversal e conjunta entre as disciplinas, exemplificando posteriormente com um projeto entre as disciplinas de matemática e história sobre dinheiro e sua função na sociedade entre outros.

Os alunos de ensino médio, em sua maioria, se já não estão no mercado de trabalho, estão próximos dessa etapa. Portanto, o conhecimento da matemática financeira pode auxiliar os jovens nas tomadas de decisões importantes. Abordando os financiamentos e empréstimos, este trabalho apresenta uma sequência de atividades a serem aplicadas a alunos de ensino médio.

A bibliografia usada para a fundamentação teórica deste material inclui os livros de Mathias e Gomes (2008) e Puccini (2009), que trazem definições, fórmulas e aplicações dos conteúdos da matemática financeira de maneira objetiva. Este trabalho também é todo baseado na dissertação de mestrado de Biaobock (2020) que traz um estudo do tema focando na aplicação em sala de aula. As figuras contidas nesse material foram tiradas do site da Wikicommons (https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4657697, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15660715, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=88502136, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=44755458).

CONCEITOS INICIAIS

JUROS

No desenvolvimento da sociedade de acordo com o tempo, percebe-se a necessidade das pessoas de adquirir bens e serviços que iniciou o processo de trocas de mercadorias e, mais tarde, a criação da moeda. A ideia de juro vem do fato de que as pessoas preferem consumir seus bens no presente e não no futuro. Ou seja, havendo uma preferência temporal para o consumo, as pessoas querem uma recompensa pela abstinência. Este prêmio para que não haja consumo é o juro. Define-se juro como sendo a remuneração do capital a qualquer título. Assim, outras expressões podem ser utilizadas para a definição desse conceito, como a remuneração do capital empregado em atividades produtivas, o custo do capital de terceiros ou a remuneração paga pelas instituições financeira sobre o capital nelas aplicado.

JUROS SIMPLES

O regime de juro simples é o menos utilizado no sistema financeiro, por ser menos lucrativo. Nesse sistema o juro de cada período é sempre calculado em função do capital inicial aplicado. O juro do período, que não for pago no final do período, não é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes.

Assim, um capital C aplicado a uma taxa i de juro simples durante n períodos gera a quantidade de juro J através da regra

$$J = C\,i\,n\,.$$

O montante M, resultante da aplicação de uma capital C durante n períodos com uma taxa de juro i por período, no regime de juro simples, é obtido pela expressão

$$M = C(1 + i\,n)\,.$$

Exemplo. Qual é o rendimento de juro simples de um capital de R\$ $4560,00$, aplicado a um taxa de 3% ao mês, durante 6 meses?

Resolução. De acordo com os dados do problema, temos $C = 4560$, $i = 3\% = 0,03$ e $n = 6$, logo, usando a equação $J = C\,i\,n$,

$$J = 4560 \cdot 0,03 \cdot 6 = 820,80\,.$$

Portanto, o rendimento será de R\$ $820,80$ em 6 meses.

Exemplo. Qual deverá ser o capital aplicado para que se tenha um montante de R\$ $12300,00$ ao final de dois anos com um taxa de juro de 10% ao ano no regime de juro simples?

Resolução. O montante é $M = 12300$, a taxa é $i = 10\% = 0,1$ e o número de períodos é $n = 2$. Usando a equação $M = C(1 + i\,n)$ temos

$$12300 = C(1 + 0,1 \cdot 2)$$

que implica em

$$12300 = 1,2C\,.$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = \frac{12300}{1,2} = \text{R\$}\,10250,00$$

que é o capital que deve ser aplicado.

Exemplo. Um banco emprestou a quantia de R\$ $450,00$ a um cliente que deve devolver a quantia de R\$ $510,00$ ao final de três meses. Sabendo que foi empregado o regime de juro simples, qual a taxa de juro cobrada pelo banco?

Resolução. O montante é $M = 510$, o capital é $C = 450$ e o número de períodos é $n = 3$. Usando a equação $M = C(1 + i\,n)$ temos

$$510 = 450(1 + 3\,i)$$

que implica em

$$\frac{510}{450} - 1 = 3i$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = \frac{0,13333}{3} = 0,0444 = 4,44\%\,\text{a.m.},$$

que é a taxa de juro ao mês empregada pelo banco.

JUROS COMPOSTOS

O regime de juro composto possui um crescimento exponencial, consequentemente é mais lucrativo nas operações com mais de um período, o que faz com que seja o regime mais utilizado no sistema financeiro. Aqui o juro de cada período que não for pago no final do período é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Os juros são capitalizados, e consequentemente, rendem juro, o que faz com que esse regime seja conhecido como juro sobre juro. Assim, o juro de cada período é calculado sobre o saldo existente no início do respectivo período, e não apenas sobre o capital inicial (principal) aplicado.

Nesse regime um cpital C aplicado à taxa i gera, em n períodos de tempo, um montante

$$M = C(1+i)^n\,.$$

Exemplo. Qual será o montante de uma aplicação de um capital de R$ 900, 00, a uma taxa de 1,3% ao mês durante 8 meses?

Resolução. De acordo com os dados, temos $C = 900$, $i = 1,3\% = 0,013$ e $n = 8$, logo, usando a equação $M = C(1+i)^n$ obtemos

$$M = C(1+i)^n = 900(1+0,013)^8 = 900 \cdot 1,013^8 = 900 \cdot 1,108857 = 997,97\,.$$

Portanto, o montante será de R$ 997, 97.

Exemplo. Paulo tomou um empréstimo à taxa de juro de 2,1% a.m. e o devolveu ao final de 4 meses no valor de R$ 5900, 00. Qual foi o capital emprestado por Paulo?

Resolução. Segundo o problema, o montante é $M = 5900$, a taxa é $i = 2,1\% = 0,021$ e o número de períodos é $n = 4$, assim, usando a equação $M = C(1+i)^n$ temos

$$5900 = C(1+0,021)^4\,.$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 5429,37\,.$$

Portanto, o capital emprestado foi de R$ 5429, 37.

Exemplo. Um capital de R$ 3800, 00 aplicado ao regime de juro composto durante 3 anos gerou um montante de R$ 6100, 00. Qual foi a taxa de juro usada na aplicação?

Resolução. O capital é $C = 3800$, o número de períodos é $n = 3$ e o montante $M = 6100$. Usando a equação $M = C(1+i)^n$ temos

$$6100 = 3800(1+i)^3\,,$$

onde temos

$$(1+i)^3 = \frac{6100}{3800} = 1,60526.$$

Aplicando a raiz cúbica em ambos os lados da equação, obtemos

$$1 + i = 1,170888.$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 1,170888 - 1 = 0,170888 = 17,09\% \text{ a.a.},$$

que é a taxa de juro empregada ao ano na aplicação.

TAXAS DE JUROS

TAXAS PROPORCIONAIS E TAXAS EQUIVALENTES

A taxa proporcional está relacionada diretamente com o regime de juro simples. Duas taxas são proporcionais quando, apesar de expressas em unidades de tempo diferentes, geram o mesmo montante quando aplicado o mesmo capital por um mesmo período.

Exemplo. A taxa anual de juro proporcional a 5% ao mês é de $12 \cdot 5\% = 60\%$ a.a.

Taxas equivalentes possuem a mesma definição de taxas proporcionais, porém estão ligadas ao regime de juro composto. De acordo com Morgado e Carvalho (2015, p. 53), se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então

$$1 + I = (1+i)^n .$$

Exemplo. A taxa de juro ao mês é $i = 5\% = 0,05$ e o número de períodos é $n = 12$. Usando a equação $1 + I = (1+i)^n$ temos

$$(1 + I) = (1 + 0,05)^{12} .$$

Isolando I nesta equação obtemos

$$I = 0,795856 = 79,59\% \text{ a.s.},$$

que é a taxa anual de juro equivalente a 5% ao mês.

TAXA EFETIVA E TAXA NOMINAL

A taxa efetiva é aquela na qual há coincidência entre a unidade de tempo usada na taxa de juro e nos períodos de capitalização. Como por exemplo, 6% ao mês com capitalização mensal, ou 10% ao semestre com capitalização semestral.

Já a taxa nominal é aquela em que sua unidade de tempo não coincide com a unidade de tempo da capitalização. Esse tipo de taxa não deve ser utilizada no regime de juro composto por não representar uma taxa efetiva.

Exemplo. Juliana fez um investimento a juro de 7,2% ao semestre com capitalização mensal. Nesse investimento qual é a taxa de juro semestral?

Resolução. Como o investimento é de 7,2% ao semestre, isto é proporcional a 1,2% ao mês. Assim, a taxa de juro é $i = 1,2\% = 0,012$ e o número de períodos é $n = 6$. Usando a equação $1 + I = (1 + i)^n$ temos

$$(1 + I) = (1 + 0,012)^6 .$$

Isolando I nesta equação obtemos

$$I = 0,074195 = 7,42\% \, \text{a.s.},$$

que é a taxa de juro semestral. A taxa de 7,2% ao semestre é nominal, enquanto a taxa de 7,42% ao semestre é efetiva.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

O Sistema de Amortização Constante (SAC) é um dos mais utilizados nas operações financeiras. Nesse sistema, todas as parcelas de amortização são iguais. O juro é calculado, a cada período, multiplicando-se a taxa de juro contratada pelo saldo devedor existente no período anterior.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE)

O sistema de amortização francês tem como característica o fato de todas as prestações serem iguais. Essas prestações são calculadas de forma que uma parte paga o juro e outra o principal. Muito utilizado em empréstimos e financiamentos de automóveis.

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO

Neste tipo de sistema após um certo prazo, o devedor paga o capital emprestado em uma única parcela. Na modalidade mais comum o juro é pago durante o período de carência. É pouco utilizado no Brasil.

FINANCIAMENTOS

Financiamento é uma operação de compra parcelada de um bem ou serviço onde há uma finalidade já estabelecida no ato de sua aquisição. As parcelas são definidas em acordo entre quem compra e quem vende o financiamento, podendo ter valores iguais ou não e podendo ser submetidas a cobrança de juro com relação ao tempo ou não. Na maioria das vezes é tomado para a obtenção de um veículo ou um imóvel.

Existem três principais tipos de financiamentos para aquisição de automóveis: o CDC (Crédito Direto ao Consumidor), o leasing e o consórcio.

- O CDC (Crédito Direto ao Consumidor) é um tipo de financiamento onde a agência empresta dinheiro para o comprador em troca da aquisição de um bem ou serviço e o bem fica no seu nome. Com isso, há o risco de inadimplência para a agência, mesmo que o bem fique relacionado como garantia da dívida do empréstimo, o que faz com que o juro seja mais alto. Nessa forma de financiamento há também a cobrança do imposto IOF. Se tratando de financiamento de veículos, é a modalidade mais utilizada no país. O comprador pode adiantar o pagamento das parcelas do empréstimo com redução do juro que seria cobrado.
- O leasing, também chamado de arrendamento mercantil, é um tipo de financiamento onde o bem não fica no nome do comprador até o final da quitação das parcelas, portanto é uma espécie de aluguel. Apesar de suas taxas de juro serem menores, sem cobrança do IOF, é pouco utilizado no Brasil. Um motivo para isso é talvez a burocracia para quitação do financiamento e a dificuldade para compradores entenderem seu funcionamento.
- Consórcio é um tipo de financiamento o qual funciona com uma espécie de poupança em grupo. Segundo a ABAC (Associação Brasileira de Administradoras de Consórcio, 2020) consórcio é uma espécie de autofinanciamento que tem como base uma união de pessoas contribuindo mensalmente em uma mesma poupança que será utilizada por todos do grupo para a aquisição do produto, como um carro, por exemplo. A ordem para usufruir da poupança em grupo é definida por sorteio e lance. Todos os participantes do grupo podem ser sorteados para utilizarem o crédito, porém não

há como saber em que data, mas existem possibilidades no lance de aumentar as chances de ser contemplado.

EMPRÉSTIMOS

Empréstimo é um valor concedido para uso livre de quem o está recebendo. Como não existe a obrigatoriedade de informação de sua utilização como satisfação à quem está emprestando, costuma ter taxa de juro maior que o financiamento.

Os empréstimos classificam-se em: de curto, de médio e de longo prazo, onde os de curto e de médio prazo caracterizam-se, geralmente, por serem saldados em até 3 anos e os empréstimos de longo prazo sofrem um tratamento especial porque existem várias modalidades de restituição do principal e juro.

Existem vários tipos de empréstimos. O mais comum é conhecido como empréstimo pessoal, onde a pessoa vai até uma agência, é realizada uma análise e o dinheiro é concedido. Mas, geralmente, nesse tipo de operação a taxa de juro é muito alta. Outro tipo de empréstimo comum é chamado de consignado, onde as parcelas são descontadas diretamente na folha de pagamento ou da aposentadoria do tomador, e se tem como vantagem uma taxa de juro mais baixa que o empréstimo pessoal. Também existe o empréstimo por penhor, realizado pela Caixa Econômica Federal, onde um bem é concedido à agência, geralmente joias, e o valor do empréstimo é relativo a esse bem, se o pagamento for realizado no prazo, o bem é devolvido.

TAXA SELIC

A Selic (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia) é uma taxa de juros básica da economia do país. Como explica o Banco Central do Brasil (2020), é um instrumento que controla a inflação e influencia todas as taxas de juro no Brasil, a taxa Selic tem como referência a taxa de juro apurada nas operações de empréstimos de um dia entre as financeiras que utilizam títulos públicos federais como garantia.

O Copom (Comitê de Política Monetária do Banco Central) faz reuniões oito vezes ao ano onde definem a meta da Selic e o Banco Central trabalha nas operações com títulos públicos para que sempre fique nivelada com a meta da Selic. Quando a meta da Selic é alterada, os títulos relacionados à taxa também têm seu rendimento alterado e, consequentemente, o recolhimento dos bancos também muda.

Se a taxa Selic está alta, aumenta o juro dos financiamentos, empréstimos e cartões de crédito, o que faz com que o consumo da população diminua e a inflação cai. Do contrário, se a taxa Selic está baixa, os juros das operações também diminui, o que faz com que estimule os empréstimos e financiamentos e o consumo em geral.

Para obter mais conhecimento sobre a matemática financeira indicamos os livros "Matemática financeira" de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes, 2008, e "Matemática financeira: objetiva e aplicada" de Abelardo de Lima Puccini, 2009.

ATIVIDADES PARA MATEMÁTICA FINANCEIRA

As atividades a seguir foram elaboradas pensando na abordagem da matemática financeira no primeiro ano do ensino médio sobre matemática financeira com foco em financiamentos e empréstimos. Cada atividade possui sugestão ao professor que tem o objetivo de auxiliar o professor na aplicação da questão em sala de aula. As soluções dos problemas constantes das atividades estão no final desse caderno de atividades.

ATIVIDADE 1

Conteúdo abordado: Juro simples, juro composto e conversão de taxas.

Objetivo: Fazer com que os alunos enxerguem que o juro simples, quando calculado em tempos menores do que o período da taxa de juro, rende mais do que o juro composto. Ao mesmo tempo, auxilia no conhecimento dos alunos de como é calculado o juro no atraso do pagamento de contas, como a de energia elétrica, de suas residências.

Procedimento: Para iniciar essa atividade, primeiramente, o professor lê as condições de cobrança de atraso na conta de energia elétrica. Entre essas cobranças, existe uma chamada juro de mora de 1% ao mês (pro rata die). O professor questiona os alunos se sabem o significado e como se calcula esse tipo de juro, também pode aproveitar para perguntar se alguém conhece o termo "pro rata die" contido na descrição da taxa. O professor prossegue a atividade explicando que o significado de pro rata die é de proporção por dia, ou seja, a taxa de juro cobrada por mês deve ser convertida para dia, e lembra também que um mês comercial contém 30 dias. Assim, solicita que os alunos, utilizando conhecimentos sobre conversão de taxas já vistos anteriormente, calculem a taxa de juro por dia com relação à taxa de 1% ao mês, nos regimes de capitalização simples e composto.

Com essas taxas, o professor supõe o seguinte problema: O proprietário de uma empresa recebeu sua conta de energia elétrica com vencimento em 10 de dezembro de 2019 no valor de R$ $10000,00$, mas alguns problemas aconteceram na empresa e ele sabe que pagará a conta com atraso. Então, com os conhecimentos de cálculo de juro e montante em regime de juro simples e composto já vistos, o professor pede que os alunos calculem o montante considerando os juro de mora que já foram convertidos para a proporção em dia da conta de energia elétrica se ela for paga com os seguintes dias de atraso: 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50 e 55. Depois de todos os cálculos necessários, o professor deve incentivar os alunos a analisar e comparar os montantes obtidos pelo atraso do pagamento nos dois regimes de capitalização.

Os montantes calculados, analisados e discutidos foram obtidos calculando o juro de mora no pagamento em atraso da conta de energia elétrica. Mas além dessa taxa, a conta possui uma multa de 2% pelo atraso. Então, para finalizar a atividade e chegar mais próximo da realidade do aluno, o professor sugere o seguinte cálculo: Dado o valor da conta de energia elétrica trazida pelo professor, calcular o novo valor da conta a ser paga com 23 dias de atraso.

Sugestão ao professor

Essa atividade exige que os alunos já possuam conhecimento dos cálculos de juro e montante dos regimes de capitalização simples e composto e da conversão de taxas nesses regimes. A atividade incentiva os educandos a compararem os valores de montante obtidos após certos períodos nos dois regimes de capitalização (simples e composto). Recomenda-se que, para a realização dessa atividade, o professor leve para sala de aula uma conta de energia elétrica de sua cidade, para que se aproxime mais da realidade do aluno. Durante a comparação dos montantes obtidos, espera-se que os alunos enxerguem que para períodos menores que 30 dias, o juro simples supera o juro composto, observem também que esses valores são iguais quando o período é exatamente um mês, e que a partir daí o juro composto é maior que o simples. Assim, o professor pode questionar os alunos sobre qual dos dois regimes eles acreditam que é utilizado no cálculo do atraso da conta de luz e mostrar que geralmente as contas são cobradas com juro simples quando o período é menor que o período da taxa de juro, justamente por render mais nesses casos.

ATIVIDADE 2

Conteúdo abordado: Cálculo de transformação de taxas de juro e valores em função do tempo.

Objetivo: Desenvolver a capacidade de análise dos alunos em escolher o empréstimo mais adequado à situação, utilizando o conhecimento adquirido sobre o conteúdo abordado.

Procedimento: Antes de apresentar o problema o professor pode fazer uma explanação sobre a abertura de uma empresa, sobre o capital inicial, capital de giro. Isto fornece ao aluno uma ideia de empreendedorismo. Também deve ser explanado que para abrir uma empresa um conhecimento de matemática financeira e contabilidade básica é essencial.

Marco Antônio abriu uma livraria recentemente. Como utilizou toda sua reserva de dinheiro no estoque e equipamentos para a livraria, está sem verba para comprar uma remessa de livros que acabaram de ser lançados. Então decidiu adquirir um empréstimo no valor de R$ $5000,00$ para esse fim. Marco Antônio é muito cauteloso, então resolveu pesquisar em várias agências o empréstimo que melhor se encaixa em seu orçamento. Ele quer pagar o menos possível, mas as parcelas não devem ultrapassar R$ $450,00$.

A pesquisa resultou nas propostas de empréstimos apresentadas no quadro 13.

Quadro 13 – Propostas de empréstimos

Agência	**Taxa aplicada**	**Período**
Banco Cordial	33,6% ao ano com capitalização mensal	13 meses
Empréstimos Alfa	40% ao ano com capitalização trimestral	14 meses
Banco Ideal	3,4% ao mês com capitalização mensal	14 meses
Financeira Beta	16,5% ao semestre com capitalização semestral	12 meses

Fonte: Autora

Qual é a melhor opção de empréstimo para Marco Antônio?

Sugestão ao professor

Essa atividade simula uma a realização de um empréstimo e pode servir como base para a criação de outras atividades do mesmo estilo por professores que desejem aplicar em sala de aula. Ela tem duração de uma hora aula e pode ser resolvida em grupos entre os estudantes. Espera-se que os alunos façam a transformação das taxas para que haja uma comparação entre as mesmas, verificando a menor delas que por consequência será mais vantajosa para Marco Antônio. Além disso, deve-se verificar se o empréstimo com menor taxa atende o valor de prestação mensal que a personagem pode pagar.

ATIVIDADE 3

Conteúdo abordado: Cálculo de valores através do tempo.
Objetivo: Levar os alunos a investigarem, analisarem e decidirem de maneira segura, através de cálculos e interpretação, a melhor proposta apresentada ao perfil de comprador estabelecido.

Procedimento: Informar aos alunos que este problema trata-se de uma situação real, o professor pode aproveitar para discutir os tipos de financiamentos de veículos como o CDC e o Leasing.

O site da Toyota apresenta um financiamento chamado Ciclo Toyota onde oferece um Etios Hatch X Man sendo pago da seguinte forma:

- Entrada de R$ 30834,00, mais 24 parcelas de R$ 672,78 e mais uma parcela residual de R$ 10278,00 paga junto com a última das 24 parcelas.

Já o valor à vista é de R$ 51390,00.

O site da BV Financeira faz uma simulação de financiamento para o mesmo carro no mesmo valor à vista sendo pago da seguinte forma:

- Entrada de R$ 30834,00 e mais 24 parcelas de R$ 1140,88.

Considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, analise qual das propostas é mais vantajosa referente ao valor final pago nos financiamentos.

Sugestão ao professor

Essa atividade simula uma opção de financiamento de um veículo por uma financiadora real. Espera-se que os alunos calculem o valor total a ser pago pelo financiamento levando em consideração a inflação. O professor pode personalizar essa atividade escolhendo outras ofertas de carros com valores atuais e outras opções de financiamentos.

ATIVIDADE 4

Conteúdo abordado: Cálculo de valores em função do tempo.
Objetivo: Levar os alunos a investigarem, analisarem e decidirem de maneira segura, através de cálculos e interpretação, a melhor proposta apresentada ao perfil de comprador estabelecido.

Procedimento: No problema anterior foi discutido o financiamento de um veículo, discutir com os alunos a existência de várias opções de crédito informando que a financeira da revendedora nem sempre é a melhor opção. Aproveitar para discutir a aquisição de veículo e imóveis por meio de consórcios.

A seguinte situação é apresentada: Você decidiu comprar um automóvel zero km através de um financiamento. O carro escolhido é um Etios Sedan X Man da Toyota, que à vista, custa R$ $56690,00$. Você tem uma economia de R$ $34000,00$ que irá utilizar na entrada do financiamento e pode gastar até R$ $850,00$ nas prestações, além disso pretende quitar a dívida em três anos.

Temos duas propostas diferentes. A primeira delas retirada do próprio site da Toyota, chamada Ciclo Toyota, oferece o Etios Sedan X Man por uma entrada no valor de R$ $34014,00$, 36 parcelas de R$ $552,54$ e mais uma parcela residual que deve ser paga junto com a última das 36 parcelas no valor de R$ $11338,00$. Como você não sabe se terá R$ $11338,00$ na 36ª parcela, mas tem R$ $850,00$ para gastar com as prestações, uma alternativa é aplicar a diferença de R$ $297,46$ entre esse valor e a real parcela da proposta (R$ $850,00$ – R$ $552,54$) em um investimento, como a poupança, por exemplo.

A taxa de juro da poupança varia de acordo com a taxa Selic e a taxa de Referencial (TR). Vamos supor uma aplicação na poupança com taxa de rendimento de 0,35% ao mês. Como a parcela residual de R$ $11338,00$ deve ser paga junto com a 36ª prestação, a aplicação de R$ $297,46$ por mês será feita nesse período.

A segunda alternativa de financiamento foi realizada através de uma simulação no site do banco Itaú, onde foram escolhidos os mesmos valores do carro à vista (R$ $56690,00$) e de entrada (R$ $34014,00$) do Ciclo Toyota. Assim, a proposta apresentada pelo site foi de uma entrada de R$ $34014,00$ e mais 36 parcelas no valor de R$ $849,38$, o que cabe no seu orçamento.

A questão é: Qual a melhor proposta?

Sugestão ao professor

Nessa atividade, assim como a anterior, espera-se que os alunos consigam, através dos cálculos necessários, decidir a melhor proposta de financiamento. O professor pode solicitar uma pesquisa sobre a taxa de rendimento da poupança atual dos principais bancos de sua cidade, usando-as em substituição da taxa apresentada nessa atividade.

ATIVIDADE 5

Conteúdo abordado: Cálculo de valores em função do tempo e prestações.
Objetivo: Levar os alunos a investigarem, analisarem e decidirem de maneira segura, através de cálculos e interpretação, a melhor proposta apresentada ao perfil de comprador estabelecido.

Procedimento: Dividir a turma em grupos de 3 alunos e inicialmente solicitar que cada aluno leia individualmente o problema. Após a leitura individual solicitar que a leitura seja feita em grupo e dar um tempo pequeno para as discussões. Observe que neste problema solicita-se a comparação entre três propostas. Discutir com os alunos que a escolha da melhor proposta implica em economia de dinheiro.

Nessa atividade também supomos a compra do carro Etios Sedan X Man da Toyota de R$ $56690,00$ à vista, comparando o Ciclo Toyota com uma opção de financiamento do banco Bradesco sob outras condições de compra.

Nesse caso, supomos que você só pode pagar uma entrada de 20% do valor à vista do automóvel, ou seja, R$ 11338,00,ou se necessário, no máximo R$ 11500,00 e quer quitá-lo em 36 meses. A primeira opção de financiamento é a do banco Bradesco, obtida através de uma simulação no site do banco. Esse financiamento exige a entrada de R$ 11338,00 e mais 36 pagamentos de R$ 1738,47.

A segunda proposta é o Ciclo Toyota. Nesse caso, a entrada exigida é de, no mínimo, 30% do valor à vista do veículo, ou seja, R$ 17017,00, mais 36 parcelas de R$ 1147,83 e também uma prestação residual de R$ 11338,00. Como o valor máximo que você pode dar de entrada é R$ 11500,00, então uma alternativa é obter um empréstimo de R$ 5500,00 para completar a entrada exigida. Foi realizada uma simulação de empréstimo no site do Serasa Crédito, que utiliza a taxa média de juro usada nas opções de empréstimo disponíveis do mercado. Essa alternativa empresta os R$ 5500,00 sendo pago em 36 vezes de R$ 271,18. E, ainda, para você obter R$ 11338,00 para a parcela residual, uma possibilidade é fazer uma aplicação financeira que renda esse valor ao final dos três anos, como a poupança, por exemplo. Vamos supor um investimento com juro de 0,5% ao mês.

Qual das propostas é mais vantajosa?

Sugestão ao professor

O professor pode sugerir a resolução dessa questão em grupos de três ou quatro alunos, já que vários aspectos devem ser analisados para se chegar a uma conclusão com coerência. Espera-se que os alunos façam os cálculos necessários para uma real comparação dos financiamentos.

ATIVIDADE 6

Conteúdo abordado: Cálculo de valores em função do tempo.
Objetivo: Fazer com que o aluno tome a melhor decisão de acordo com o perfil do consumidor, fazendo isso através de cálculos e interpretação.

Procedimento: O professor pode introduzir a questão perguntando sobre os hábitos de consumo dos alunos, se costumam comprar à vista ou à prazo e se fazem pesquisa dos preços e condições antes de adquirir um produto ou serviço.

Pedro começou a trabalhar há pouco tempo e decidiu trocar seu velho celular por um Smartphone Motorola Moto G8. Ele tem a quantia de R$ 300, 00 para dar de entrada na compra e pode gastar até R$ 150, 00 nas prestações. Em sua pesquisa ele encontrou uma proposta da loja Berlanda que oferece o celular procurado para ser pago em 10 prestações iguais de R$ 139, 90 sem juros e sem entrada. Ele gostou da proposta, mas seu amigo lhe disse que fez um financiamento de celular no Banco do Brasil na semana anterior, então Pedro resolveu fazer uma simulação no Banco do Brasil no valor de R$ 1100, 00, já que ele pode dar R$ 300, 00 de entrada. Na simulação o banco oferece o financiamento no valor de R$ 1100, 00 pago em 9 parcelas iguais de R$ 145, 93. Qual a melhor opção para Pedro?

Sugestão ao professor

A questão pode ser trabalhada individualmente pelos alunos e depois o professor pode promover uma discussão na turma para relatarem suas respostas e decisões sobre a melhor opção. A questão pode ser personalizada com ofertas de panfletos encontrados na cidade ou propostas de bancos da cidade pesquisadas.

QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

As questões a seguir foram selecionadas de concursos públicos de todo o país. Foram escolhidas com base em conteúdos da matemática financeira a serem trabalhados em sala de aula e também enfatizando a tomada de decisões por parte dos alunos diante de financiamentos, empréstimos e investimentos. Estas atividades têm como objetivo o desenvolvimento da interpretação e a análise crítica nos estudantes, além da resolução de cálculos.

Nesta parte deixamos os procedimentos a escolha do professor. Diferente das atividades anteriores, nesta parte apresentamos as habilidades que podem ser desenvolvidas pelos alunos de acordo com a BNCC, nas atividades anteriores não foram colocadas as habilidades porque os problemas envolvem várias habilidades e competências e o professor deverá selecionar aquela que mais se adequa ao seu planejamento de aula.

QUESTÃO 1

Nível: Fácil.

Conteúdo: Avaliação de alternativas de investimento; Juro.

Objetivo: Fazer com que o aluno use o conhecimento de juro composto para comparar os investimentos das instituições, seja calculando o montante ou encontrando a taxa de juro.

Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juro composto, destacando o crescimento exponencial.

Um investidor mantém seu capital aplicado em uma instituição financeira que paga a taxa líquida de juro composto mensais de $0,6\%$. Uma segunda instituição financeira ofereceu a esse investidor as seguintes opções de investimento.

Opção I: Investimento inicial de R\$ $100.000,00$ com retorno líquido, em um mês, do montante no valor de R\$ $100.580,00$;

Opção II: Investimento inicial de R\$ $85.000,00$ com retorno líquido, em um mês, do montante no valor de R\$ $85.527,00$.

A respeito dessas opções e da comparação com aquela oferecida pela primeira instituição financeira, onde o capital do investidor já está aplicado, julgue o item seguinte.

Para o investidor, as opções I e II são menos vantajosas que a oferecida pela primeira instituição financeira.

- Certo
- Errado

Sugestão ao professor

Essa questão exige o conhecimento de juro simples e compostos. Pode ser abordada depois do ensino desses conteúdos em sala de aula ou como abertura para eles, usando apenas o cálculo de porcentagem para descobrir o montante no caso do primeiro investimento com os capitais do segundo e comparando-os. Pode também ser usada em um teste ou avaliação. Pode também ser sugerida uma pesquisa das taxas de juro da poupança, por exemplo, de bancos de sua cidade e complementar essa questão com o cálculo do montante dos capitais de acordo com essas taxas, para depois analisar qual banco oferece o investimento mais vantajoso.

QUESTÃO 2

Nível: Médio.
Conteúdo: Taxa de juro; Juros compostos.
Objetivo: Testar o conhecimento do aluno quanto ao cálculo do montante de juro composto e verificar a atenção quanto a transformação da taxa de juro necessária.
Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juro composto, destacando o crescimento exponencial.

Nesta prova serão utilizados os resultados aritméticos que estão nas nas tabelas 14 e 15.

Quadro 14 – Tabela para o fator $(1+i)^n$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641

5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4801	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8983	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772

Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/5f97b063-4c

Quadro 15 – Tabela para o fator $1/(1+i)^n$ na qual "i" está na coluna e "n" está na linha.

	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9420	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7441	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394

Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/5f97b063-4c

Qual o valor do montante composto recebido na aplicação de R\$ 50.000, 00, durante oito meses, o qual rende com uma taxa de 6% ao trimestre, capitalizada mensalmente?

A) R\$ 56585, 00

B) R\$ 57585, 00

C) R\$ 58585, 00

D) R\$ 59585, 00

E) R\$ 60585, 00

Sugestão ao professor

Essa questão exige dos educandos o conhecimento de juro composto e de diferentes tipos de taxas e suas transformações. Supondo já possuírem o conhecimento de juro composto, para que entendam os tipos de taxas o professor pode utilizar um vídeo explicativo com as definições, com exemplos e até situações do cotidiano onde esses tipos de taxas aparecem. Por não ser uma questão de nível difícil, pode ser resolvida individualmente.

QUESTÃO 3

Nível: Difícil.

Conteúdo: Juro simples e composto.

Objetivo: Saber utilizar as fórmulas de juro simples e composto com o intuito de utilizá-las em uma comparação para encontrar o capital.

Habilidade da BNCC: Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juro composto, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Uma pessoa tem duas opções para aplicar um capital na data de hoje.

Primeira opção: Aplicar todo o capital, durante 8 meses, a juro simples com uma taxa de $9,6\%$ ao ano.

Segunda opção: Aplicar todo o capital, durante 1 semestre, a juro composto com uma taxa de 2% ao trimestre.

Sabe-se que o valor do juro referente à primeira opção supera o valor do juro da segunda opção em R$ 354,00. O valor do juro referente à primeira opção é, em R$, igual a:

A) R$ 1080,00

B) R$ 1140,00

C) R$ 1200,00

D) R$ 960,00

E) R$ 1314,00

Sugestão ao professor

Essa questão exige o conhecimento dos alunos sobre juro simples e composto e transformação de taxas, além de uma interpretação e uso das fórmulas de maneira um pouco mais complexa. Portanto o professor pode sugerir a resolução dessa questão em equipes, podendo até ser incluída em algum tipo de jogo ou competição entre essas equipes.

QUESTÃO 4

Nível: Fácil.

Conteúdo: Juro simples e composto.

Objetivo: Saber calcular o juro simples e composto de uma aplicação.

Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Considere que para uma quantia de R\$ $2.000,00$ sejam oferecidas duas opções de investimento:

- Opção 1: Juro simples de 7% ao mês, ao longo de 3 meses.
- Opção 2: Juro composto de 5% ao mês, ao longo de 2 meses.

Assinale a alternativa que indica qual a diferença entre o total de juro obtido nestas duas opções:

A) R\$ $215,00$

B) R\$ $225,00$

C) R\$ $235,50$

D) R\$ $305,25$

E) R\$ $321,25$

Sugestão ao professor

Essa questão exige apenas o conhecimento de juro simples e composto. Por ser de fácil resolução pode ser feita individualmente e até mesmo incluída em algum tipo de teste. O professor também pode complementar essa questão levando para a sala de aula panfletos de lojas com ofertas de produtos que podem ser pagos parcelados e utilizar as taxas de juro cobradas por essas lojas para calcular o juro nos dois regimes e comparar os valores.

QUESTÃO 5

Nível: Médio.
Conteúdo: Sistema Price.
Objetivo: Utilizar os conhecimentos de sistemas de amortização para calcular juro e amortização do capital de uma dívida.
Habilidade da BNCC: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da matemática financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.

Uma prefeitura do interior do estado adquiriu um equipamento de terraplanagem no valor de R$ $300000,00$. Impossibilitada de efetuar o pagamento à vista, a citada prefeitura solicitou ao banco de seu relacionamento um financiamento para a compra do equipamento. O banco aceitou a operação, financiando o valor total do equipamento em 10 parcelas iguais e consecutivas no valor de R$ $33398,00$ cada uma. O juro pactuado foi de 2% ao mês. A primeira parcela vence 30 dias a partir da assinatura do contrato e pagamento pelo banco ao fornecedor, e o sistema de amortização é o PRICE. Com base nos dados acima descritos, assinale a alternativa correta que indica respectivamente o valor aproximado do juro e da amortização do capital, relativos à segunda prestação do financiamento.

A) R$ $6000,00$ e R$ $27398,00$

B) R\$ 6000, 00 e R\$ 27946, 00

C) R\$ 5452, 00 e R\$ 27946, 00

D) R\$ 4893, 00 e R\$ 28515, 00

Sugestão ao professor

Essa questão exige do aluno o conhecimento do sistema de amortização francês, também conhecido como Price, além do regime de juro composto. Como não é comum em sala de aula o ensino sobre os sistemas de amortização, o professor pode preparar uma apresentação de slides em Powerpoint explicando e mostrando exemplos sobre as definições, diferenças e exemplos de utilização no dia a dia de sistemas de amortização. Essa questão pode ser resolvida individualmente, já que está em um nível médio de dificuldade.

QUESTÃO 6

Nível: Fácil.
Conteúdo: Avaliação de alternativas de investimentos; Taxas de juro.
Objetivo: Calcular a taxa de retorno pedida para conseguir avaliar a melhor opção de investimento entre as apresentadas.
Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Uma empresa planeja um fundo de reserva. Para tal deseja investir R\$ 500000,00 hoje e resgatar o montante da aplicação daqui a 2 anos. Após pesquisa de mercado, a equipe financeira da empresa identificou cinco opções de investimento apresentadas a seguir.

Investimento 1 – taxa de 3% ao mês

Investimento 2 – taxa de 6% ao bimestre

Investimento 3 – taxa de 19% ao semestre

Investimento 4 – taxa de 40% ao ano

Investimento 5 – taxa de 90% ao biênio

Dos investimentos apresentados, qual proporciona a maior taxa de retorno em 2 anos?

Dados:

$1,03^{12} \equiv 1,43;$

$1,06^{12} \equiv 2,01;$

$1,19^{2} \equiv 1,42;$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Sugestão ao professor

Essa questão é de fácil resolução, uma vez que basta para o aluno o conhecimento de conversão de taxas para resolvê-la. O professor pode levar para sala de aula uma notícia que inclua um tipo de taxa como a questão mostra,

e pode pedir para que os alunos calculem também aquela taxa equivalente a dois anos de aplicação ou pode usar como um exemplo introdutório.

QUESTÃO 7

Nível: Difícil.
Conteúdo: Séries de pagamento.
Objetivo: Apresentar conhecimento necessário para calcular o valor futuro do investimento e as prestações, utilizando a fórmula correta de modo que os valores dados no enunciado sejam utilizados.
Habilidade da BNCC: Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juro composto, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Um pai, preocupado em compor recursos para a educação superior de seu filho, idealizou juntar dinheiro em uma conta investimento que rende 8% ao ano. O pai depositaria, durante nove anos, R$ $24000,00$ por ano nessa conta, para que o filho fizesse cinco saques de valores iguais, um a cada ano, com o primeiro saque um ano após o último depósito. O saldo remanescente a cada saque ficaria rendendo à mesma taxa até o quinto saque, quando o saldo se anularia.
Nessa situação, considerando-se 0,68 e 2 como valores aproximados para $(1,08)^{-5}$ e $(1,08)^9$, respectivamente, cada saque anual teria o valor de

A) R$ $67100,00$

B) R$ $75000,00$

C) R$ $150000,00$

D) R$ $10500,00$

E) R\$ 43200, 00

Sugestão ao professor

Essa questão apresenta um nível de dificuldade de resolução difícil, portanto uma alternativa é fazer com que os alunos formem equipes para discuti-la e respondê-la. Exige o conhecimento de valores no tempo, incluindo a fórmula de valor futuro. Uma alternativa é a apresentação de um vídeo aos alunos, podendo ser um documentário sobre o conteúdo, mostrando como os valores se comportam através do tempo, apresentando exemplos e fórmulas.

QUESTÃO 8

Nível: Médio.
Conteúdo: Juro simples e composto; Dinheiro no tempo.
Objetivo: Saber utilizar os cálculos de juro e dinheiro no tempo necessários para tomar a decisão correta.
Habilidade da BNCC: Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.

Em determinada loja, uma bicicleta é vendida por R\$ 1720, 00 à vista ou em duas vezes, com uma entrada de R\$ 920, 00 e uma parcela de R\$ 920, 00 com vencimento para o mês seguinte. Caso queira antecipar o crédito correspondente ao valor da parcela, o lojista paga para a financeira uma taxa de antecipação correspondente a 5% do valor da parcela. Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

1. Considere que um comprador sabe que o preço da bicicleta não irá aumentar durante 1 mês e tem a possibilidade de investir suas economias em uma aplicação com rendimento líquido de 5% ao mês. Nessa situação, o comprador poderá realizar a compra à vista da bicicleta investindo nessa aplicação uma quantia inferior a R$ 1650,00, independentemente de o regime de capitalização da aplicação ser simples ou composto.

- Certo
- Errado

2. Na compra a prazo, o custo efetivo da operação de financiamento pago pelo cliente será inferior a 14% ao mês.

- Certo
- Errado

3. No caso de uma venda a prazo em que o lojista optasse pela antecipação do crédito correspondente à parcela que só seria paga no mês seguinte, o valor total que ele receberia (entrada mais antecipação) seria superior a R$ 1790,00.

- Certo
- Errado

Sugestão ao professor

Essa questão exige do aluno o conhecimento de juros compostos e dinheiro no tempo. Pode ser resolvida e discutida em equipes. Como é dividida em três partes, pode ser incluída em algum jogo ou competição entre os alunos. O professor pode também trazer para a sala de aula exemplos reais resolvidos que envolvem a noção do valor do dinheiro em função do tempo.

RESOLUÇÕES DAS QUESTÕES

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

ATIVIDADE 1

Para a resolução do início do problema, quando o professor questiona o significado de juro de mora e da expressão “pro rata die” não se espera que os alunos conheçam tais termos.

Quanto aos cálculos de conversão para a taxa de 1% ao mês, deve-se ter:

Regime de juro simples:

$$\frac{1\%}{30} = 0,03333\% \text{ ao dia}$$

Regime de juro compostos:

Usando a equação $(1 + I) = (1 + i)^n$ temos

$$1 + 0,01 = (1 + i)^{30}\,.$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0003317 = 0,03317\%\,,$$

que é a taxa juro ao dia.

Em seguida, utilizando os valores do problema proposto, temos;

Para o regime de juro simples:

$C = 10000$ e $i = 0,03333\% = 0,0003333$.

Para o regime de juro composto: $C = 10000$ e $i = 0,03317\% = 0,0003317$.

Logo, o quadro será preenchido como no quadro 16.

Quadro 16 – Montante calculado pelos dias de atraso

Dias	**Juro simples (Montante)**	**Juro composto (Montante)**
5	R\$ 10016,67	R\$ 10016,60
10	R\$ 10033,33	R\$ 10033,22
15	R\$ 10050,00	R\$ 10049,87
20	R\$ 10066,66	R\$ 10066,55
30	R\$ 10099,99	R\$ 10099,99
40	R\$ 10133,32	R\$ 10133,54
50	R\$ 10166,65	R\$ 10167,20
55	R\$ 10183,32	R\$ 10184,08

Fonte: Autora

Durante a comparação dos montantes obtidos, espera-se que os alunos enxerguem que para períodos menores que 30 dias, o juro simples supera o juro composto, observem também que esses valores são iguais quando o período é exatamente um mês, e que a partir daí o juro composto é maior que os simples. Assim, o professor pode questionar os alunos sobre qual dos dois regimes eles acreditam que é utilizado no cálculo do atraso da conta de luz e mostrar que geralmente as contas são cobradas com juro simples quando o período é menor que o período da taxa de juro, justamente por render mais nesses casos.

Para finalizar a atividade, vamos supor que a conta que o professor trouxe para a sala de aula é no valor de R\$ 178, 90. Então, como o atraso foi de 23 dias, o novo valor será corrigido por uma multa de 2%, correspondendo a $178,90 \cdot 0,02 = R\$3,58$. Por outro lado como a taxa de juro de mora é de 1% a.m., a taxa de juro diário é calculada como $1\%/30 = 0,03333\%$ de modo que o juro correspondente é $178,90 \cdot 0,0003333 \cdot 23 =$ R\$ 1, 37142951. Logo, o valor final da conta é de R\$ 178, 90+R\$ 3, 58+R\$ 1, 37 = R\$ 183, 85.

ATIVIDADE 2

Vamos inicialmente analisar as taxas efetivas ao mês das propostas acima para comparação.

Banco Cordial: 33,6% ao ano com capitalização mensal é equivalente a $33,6\%/12 = 2,8\%$ ao mês.

Empréstimos Alfa: 40% ao ano com capitalização trimestral é equivalente a $40\%/4 = 10\%$ ao trimestre. Como está ao trimestre, devemos deixar na mesma unidade de tempo que a anterior. Logo, usando a equação $(1 + I) = (1 + i)^n$, temos:

$$1 + 0,1 = (1 + i)^3 .$$

Isolando i nesta equação obtemos a taxa mensal

$$i = 0,0322801 = 3,22801\% .$$

Banco Ideal: 3,4% ao mês com capitalização mensal já é a taxa efetiva.

Financeira Beta: 16,5% ao semestre com capitalização semestral devemos deixar por mês. Logo, usando a equação $(1 + I) = (1 + i)^n$, obtemos

$$1 + 0,165 = (1 + i)^6 .$$

Isolando i nesta equação temos a taxa mensal

$$i = 0,0257802 = 2,57802\% .$$

Portanto, analisando apenas as taxas de juro cobradas, podemos concluir que a melhor opção de empréstimo para Marco Antônio é a da Financeira Beta, seguida do Banco Cordial, dos Empréstimos Alfa e por último o Banco Ideal. Porém, nem todas as opções oferecem o mesmo período de pagamento do empréstimo, então precisa-se analisar se as parcelas estão dentro do orçamento mensal de R$ 450, 00 de Marco Antônio.

Utilizaremos a noção de dinheiro no tempo e a fórmula que apresenta diretamente o valor das parcelas dos empréstimos, para encontrar as parcelas de cada empréstimo:

$$P = V\,\frac{(1+i)^n\,i}{(1+i)^n-1}\,,$$

sendo P o valor das parcelas do empréstimo, V o valor do empréstimo, i a taxa de juro e n o tempo, nesse caso em meses. Assim, obtemos:

Banco Cordial:

$$P = \frac{5000(1+0,028)^{13}\cdot 0,028}{(1+0,028)^{13}-1} = 464,15\,.$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R$ 464, 15, totalizando em 13 parcelas o valor de R$ 6033, 95.

Empréstimos Alfa:

$$P = \frac{5000(1+0,0323)^{14}\cdot 0,0323}{(1+0,0323)^{14}-1} = 449,54\,.$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R$ 449, 54, totalizando em 14 parcelas o valor de R$ 6293, 56.

Banco Ideal:

$$P = \frac{5000(1+0,034)^{14}\cdot 0,034}{(1+0,034)^{14}-1} = 454,79\,.$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R$ 454, 79, totalizando em 14 parcelas o valor de R$ 6367, 06.

Financeira Beta:

$$P = \frac{5000(1+0,0258)^{12}\cdot 0,0258}{(1+0,0258)^{12}-1} = 489,74\,.$$

Logo, o valor das parcelas desse empréstimo é de R$ 489, 74, totalizando em 12 parcelas o valor de R$ 5876, 88.

Portanto, tanto a Financeira Beta, quanto o Banco Cordial que seriam as melhores taxas de juro tem suas parcelas ultrapassando o orçamento de Marco Antônio de R$ 450, 00. No Banco Ideal, além de ter a maior taxa de juro mensal, também tem parcela acima de R$ 450, 00. Assim, podemos concluir que o melhor empréstimo para as condições de Marco

Antônio é o da Empréstimos Alfa.

ATIVIDADE 3

Analisando a proposta do Ciclo Toyota através do tempo e considerando a taxa de inflação de 0,2%, temos:

$$V_1 = 30834 + 672,78\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{24}}\right) + \frac{10278}{(1+0,002)^{24}} \tag{145}$$

$$= 56380,734\,. \tag{146}$$

Logo, o valor presente relativo ao financiamento no Ciclo Toyota será de aproximadamente R\$ 56380,73.

Analisando a proposta da BV Financeira através do tempo e considerando a taxa de inflação de 0,2%, temos:

$$V_2 = 30834 + 1140,88\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{24}}\right) \tag{147}$$

$$= 57542,298\,. \tag{148}$$

Logo, o valor presente relativo ao financiamento na BV Financeira será de aproximadamente R\$ 57542,30. Portanto, a proposta do Ciclo Toyota se mostra mais vantajosa com relação à proposta da BV Financeira.

ATIVIDADE 4

Primeiramente precisamos saber se o investimento de R\$ 297,46 renderá o valor de R\$ 11338,00 necessário para a parcela residual ao final de 36 meses.

$$V = 297,46\,(1,0035)^0 + 297,46\,(1,0035)^1 + \cdots + 297,46\,(1,0035)^{34} + 297,46\,(1,0035)^{35} \tag{149}$$

$$= 297,46\,(1 + 1,0035^1 + \cdots + 1,0035^{34} + 1,0035^{35}) \tag{150}$$

$$= 297,46\left[1\left(\frac{1,0035^{36}-1}{1,0035-1}\right)\right] \tag{151}$$

$$= 11391,12\,. \tag{152}$$

Como o valor necessário será adquirido, então as duas propostas cabem no orçamento, restando ainda da aplicação o valor de R\$ 53,25.

Podemos então analisar qual das propostas tem valor menor se comparadas no tempo atual. Assim, considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, temos para a primeira proposta:

$$\begin{aligned} V &= 34014 + 552,54\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} + \frac{11338}{(1+0,002)^{36}} && (153)\\ &= 34014 + 19173,74 + 10551,12 && (154)\\ &= 63738,89\,. && (155) \end{aligned}$$

Como restam R\$ 53,25 ao final de 36 meses, trazendo para o tempo atual,

$$V = \frac{53,25}{(1+0,002)^{36}} = 49,55\,.$$

Portanto, R\$ 63738,89 − R\$ 49,55 = R\$ 63689,14 é o valor atual da proposta de financiamento do Ciclo Toyota já descontado o valor que resta do investimento para a parcela residual.

Da mesma forma, calculando o valor atual para a segunda proposta e considerando também a taxa contante de 0,2% de inflação, temos:

$$V = 34014 + 849,38\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} = 341014 + 29474,40 = 63488,40\,.$$

Assim, o valor atual da proposta de financiamento do banco Itaú é de R\$ 63488,40. Portanto, vemos que essa proposta se mostra ligeiramente mais vantajosa do que o Ciclo Toyota, com uma diferença de R\$ 63689,14 − R\$ 63488,40 = R\$ 200,72, além de, mensalmente, não gastar todos os R\$ 850,00.

ATIVIDADE 5

Inicialmente vamos calcular o valor atual da proposta do banco Bradesco, considerando uma taxa de inflação constante de 0,2% ao mês.

$$V = 11338 + 1738,47\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} = 11338 + 60326,81 = 71664,81\,.$$

Para a análise do Ciclo Toyota, primeiramente vamos calcular a parcela que deverá ser depositada todo mês no investimento, a partir do primeiro mês de financiamento, para que se obtenha R\$ 11338,00 ao final de 36 meses.

$$P = 11338\,\frac{0,005}{(1+0,005)^{36}-1} = 288,23\,.$$

Agora, calculando o valor atual do Ciclo Toyota sem considerar o empréstimo de R\$ $5500,00$ e considerando a taxa de inflação constante de 0,2% ao mês, temos:

$$V = 11517 + 1147,83\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} + \frac{11338}{(1+0,002)^{36}} \tag{156}$$

$$= 11517 + 39830,96 + 10551,12 \tag{157}$$

$$= 61899,08\,. \tag{158}$$

Da mesma forma, vamos calcular o valor atual para o empréstimo de R\$ $5500,00$:

$$V = 271,18\,\frac{(1+0,002)^{36}-1}{(1+0,002)^{36}\cdot 0,002} = 9410,25\,.$$

Portanto, o valor atual de todo o pagamento nessa proposta é de R\$ $61899,08$+R\$ $9410,24 =$ R\$ $71309,33$. Analisando os valores atuais das duas propostas, vemos que a segunda opção que une o Ciclo Toyota com um empréstimo e mais um investimento é ligeiramente mais vantajosa com relação ao financiamento do banco Bradesco, com uma diferença de R\$ $355,48$. Outro ponto que podemos comparar é o valor da prestação desembolsada. Na opção do banco Bradesco temos uma parcela de R\$ $1738,47$, enquanto que na segunda proposta temos como prestação a soma da parcela do Ciclo Toyota, do empréstimo e do investimento, ou seja, R\$ $1147,83$ + R\$ $271,18$ + R\$ $288,23$ = R\$ $1707,24$, o que mostra que, novamente, o Ciclo Toyota está em vantagem com relação ao banco Bradesco.

ATIVIDADE 6

Para comparar as dívidas, calculamos os valores das dívidas no tempo presente. Considerando uma taxa de inflação constante de 0,2%, o valor atual da compra na loja Berlanda é

$$PV = 139,90\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{10}}\right) = 1383,73\,.$$

O valor atual relativo ao financiamento do Banco do Brasil é

$$PV = 300,00 + 145,93\left(\frac{1}{(1+0,002)} + \frac{1}{(1+0,002)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+0,002)^{9}}\right) = 1600,33\,.$$

Portanto, a opção oferecida pela loja Berlanda é mais vantajosa para Pedro.

QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

QUESTÃO 1

Uma alternativa para encontrar a solução dessa questão é determinar a taxa de juro aplicada a cada opção e compará-las. Assim, utilizando a equação $M = C(1+i)^n$:

Opção I:

$$100580 = 100000(1+i)^1 .$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0058 = 0,58\% ,$$

que é a taxa utilizada na opção I.

Opção II:

$$85527 = 85000(1+i)^1 .$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,0062 = 0,62\% ,$$

que é a taxa utilizada na opção II.

Assim, vemos que a opção II é mais vantajosa que a oferecida pela primeira instituição financeira onde o capital do investidor já está aplicado.

Outra alternativa de resolução é aplicar a taxa de $0,6\%$ da primeira instituição nas duas opções de investimento da segunda. Logo, usando a equação $M = C(1+i)^n$:

Opção I:

$$M = 100000(1+0,006)^1 = 100000 \cdot 1,006 = 100600$$

Opção II:

$$M = 85000(1+0,006)^1 = 85000 \cdot 1,006 = 85510$$

Portanto, para a opção II, a taxa de $0,6\%$ renderia menos que o montante de R\$ $85527,00$ proposto pela segunda instituição. Logo, a alternativa correta é "Errado".

QUESTÃO 2

Notemos que a taxa de 6% está ao trimestre, mas sua capitalização é mensal. Assim, como um trimestre equivale a 3 meses, então a taxa é de $6\%/3 = 2\%$ ao mês. Determinamos o montante usando a equação $M = C(1+i)^n$ e encontrando o valor da potência indicada na tabela:

$$M = 50000(1+0,02)^8 = 50000(1,02)^8 = 50000 \cdot 1,1717 = 58585 .$$

Logo, o montante será de R\$ 58585, 00, correspondendo à opção C.

QUESTÃO 3

Vamos analisar as opções inicialmente sem saber qual é o capital a ser aplicado.

Primeira opção: Primeiro tem-se que $9,6\%$ ao ano equivale a $9,6\%/12 = 0,8\%$ ao mês.

Usando a equação $J = C\,i\,n$, temos

$$J_1 = C \cdot 0,008 \cdot 8 = 0,064C\,.$$

Segunda opção: Sabemos que um semestre equivale a dois trimestres. Logo, usando a equação $M = C(1+i)^n$ obtemos

$$M = C(1+0,02)^2 = C(1,02)^2 = 1,0404C\,.$$

E, como $M = C + J_2$, então

$$1,0404C = C + J_2 \rightarrow J_2 = 0,0404C\,.$$

De acordo com o enunciado da questão, $J_1 = J_2 + 354$, assim

$$0,064C = 0,0404C + 354\,.$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 15000\,,$$

que é o capital. Portanto

$$J_1 = 0,064 \cdot 15000 = 960\,,$$

que é o juro da primeira opção. Logo, a alternativa correta é a D.

QUESTÃO 4

Usando a equação $J = C\,i\,n$ obtemos

$$J_1 = 2000 \cdot 0,07 \cdot 3 = 420\,,$$

que é o juro da primeira opção. Usando a equação $M = C(1+i)^n$ obtemos

$$M = 2000(1+0,05)^2 = 2000 \cdot 1,1025 = 2205\,,$$

que é o montante da segunda opção, e como $M = C + J_2$ temos

$$2205 = 2000 + J_2\,.$$

Isolando J_2 nesta equação obtemos

$$J_2 = 205\,,$$

que é o juro da segunda opção.
A diferença pedida entre J_1 e J_2 é de R\$ $215,00$, correspondendo à opção A.

QUESTÃO 5

No sistema Price as parcelas do financiamento são todas iguais, onde em cada parcela uma parte paga o juro e outra amortiza a dívida. Por esse motivo, as parcelas de amortização são crescentes. Analisando a primeira parcela, temos que o juro será de

$$\text{R\$}\,300000,00 \cdot 0,02 = \text{R\$}\,6000,00,$$

enquanto que a amortização será de

$$\text{R\$}\,33398,00 - \text{R\$}\,6000,00 = \text{R\$}\,27398,00.$$

Logo, vemos que a alternativa A já pode ser descartada, já que esses valores referem-se à primeira prestação e o que nos interessa são os valores da segunda prestação. Assim,

$$\text{R\$}\,300000,00 - \text{R\$}\,27398,00 = \text{R\$}\,272602,00,$$

ou seja, o estado atual da dívida é de R\$ $272602,00$. Portanto, para o segundo mês, temos que o juro é de

$$\text{R\$}\,272602,00 \cdot 0,02 = \text{R\$}\,5452,04,$$

e a amortização é de

$$\text{R\$}\,33398,00 - \text{R\$}\,5452,04 = \text{R\$}\,27945,96.$$

Sendo assim, a alternativa que mais se aproxima desses valores é a C.

QUESTÃO 6

Essa questão se refere à taxas equivalentes. Como a pergunta pede a maior taxa de retorno

em dois anos, pode-se transformar todas as taxas para esse período. Assim, usando a equação $(1+I)=(1+i)^n$ encontraremos I_n que será a taxa equivalente a 24 meses.
Investimento 1:

$$(1+I_1)=(1+0,03)^{24}=(1,03^{12})^2=1,43^2=2,0449\,.$$

$$I_1=1,0449=104,49\%\,.$$

Investimento 2:

$$(1+I_2)=(1+0,06)^{12}=1.06^{12}=2,01\,.$$

$$I_2=1,01=101\%\,.$$

Investimento 3:

$$(1+I_3)=(1+0,19)^{4}=(1,19^{2})^2=1,42^2=2,0164\,.$$

$$I_3=1,0164=101,64\%\,.$$

Investimento 4:

$$(1+I_4)=(1+0,4)^{2}=1,96\,.$$

$$I_4=0,96=96\%\,.$$

Investimento 5: Nesse caso a taxa não precisa ser transformada, pois foi dada no período de 24 meses. Portanto a taxa de retorno em dois anos será de 90%.

Logo, o investimento que dará o maior retorno é o investimento 1, correspondendo à opção A.

É importante observar que nem todos os cálculos precisam ser efetuados até o fim. Percebe-se, em alguns casos, de maneira rápida que sua taxa será menor, sem precisar chegar a um resultado final.

QUESTÃO 7

Iniciamos calculando o valor da série de pagamentos após os nove anos de depósitos. Assim, usando a equação de valor futuro temos

$$FV = 24000\frac{(1+0,08)^9-1}{0,08} = 24000\frac{(2-1)}{0,08} = \frac{24000}{0,08} = 300000\,.$$

Portanto, o valor dos depósitos depois de nove anos é de R\$ 300000, 00.

Em seguida, precisamos encontrar o valor de cada saque que o filho fará. Para isso, como o valor dado no enunciado da questão é o resultado de $(1,08^{-5})$, então utilizando a equação para o cálculo de prestações, temos

$$\begin{aligned} P &= 300000\frac{0,08}{1-(1+0,08)^{-5}} && (159)\\ &= 300000\frac{0,08}{(1-0,68)} && (160)\\ &= 300000\frac{0,08}{0,32} && (161)\\ &= 300000\cdot 0,25 && (162)\\ &= 75000\,. && (163)\end{aligned}$$

Portanto, o valor de cada saque do filho será de R\$ 75000, 00, correspondendo à opção B.

QUESTÃO 8

Item 1.

Primeiramente é importante lembrar que para o prazo de um período, nesse caso um mês, o rendimento no regime de juro simples ou composto é o mesmo. Portanto, basta analisar se dadas as condições, o valor a ser aplicado será mesmo inferior a R\$ 1650, 00. Assim, usando a equação $M = C(1+i\,n)$ temos

$$1720 = C(1+0,05\cdot 1)\,.$$

Isolando C nesta equação obtemos

$$C = 1638,10\,.$$

Logo, o valor a ser aplicado é de R\$ 1638, 10, que é inferior a R\$ 1650, 00. A alternativa correta é "Certo".

Item 2.

Para encontrar a taxa pedida, é necessário avaliar o dinheiro através do tempo. Sabemos que o valor atual é de R\$ 1720,00 e temos uma entrada de R\$ 920,00 com mais uma parcela paga no mês seguinte também de R\$ 920,00. Assim

$$1720 = 920 + \frac{920}{(1+i)}\,.$$

Isolando i nesta equação obtemos

$$i = 0,15 = 15\%\,.$$

Ou seja, a taxa é de 15%, o que é superior a 14%. A alternativa correta é "Errado".

Item 3.

Nesse caso, o lojista recebe os R\$ 920,00 da entrada e mais a parcela de R\$ 920,00 subtraída de 5%, ou seja, R\$ $920,00 \cdot 0,95 =$ R\$ 874,00. Isso totaliza R\$ 1794,00, o que é superior a R\$ 1790,00. A alternativa correta é "Certo".

CONSIDERAÇÕES

Espero que este material contribua de maneira significativa para o processo de ensino e aprendizagem de matemática financeira no ensino médio.

Professor(a), sinta-se a vontade para alterar, complementar e adaptar este produto para que fique de acordo com a realidade de suas turmas. Este trabalho pode ser utilizado e modificado livremente para fins não lucrativos.

Bom trabalho!

REFERÊNCIAS

ABAC, Associação Brasileira de Administradoras de Consórcios. **Sistema de Consórcios: o que é e como funciona**. São Paulo, 2020. Disponível em: http://blog.abac.org.br/consorcio-de-a-a-z/sistema-de-consorcios-o-que-e-e-como-funciona-2. Acesso em: 12 set. 2020.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxa Selic**. Brasília, 2020. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic. Acesso em: 12 set. 2020.

BIAOBOCK, Bruna Zigovski. **Financiamentos e empréstimos: Uma abordagem para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Santa Catarina, 2020.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria.**Matemática Financeira**. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática Financeira: objetiva e aplicada**. 8. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.

ZINET, Caio. **Pesquisa aponta que maioria dos jovens brasileiros concilia trabalho e estudo**. Centro de Referências em Educação Integral, 2016. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/reportagens/pesquisa-aponta-maioria-dos-jovens-brasileiros-concilia-trabalho-estudo. Acesso em: 9 out. 2020.