



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA - DEM  
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL  
DE UMA LONGARINA EM  
MATERIAL COMPÓSITO DE  
UMA AERONAVE RÁDIO  
CONTROLADA

LUCAS WAGNER CRESTANI

JOINVILLE

2019

LUCAS WAGNER CRESTANI

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE UMA LONGARINA EM MATERIAL  
COMPÓSITO DE UMA AERONAVE RÁDIO CONTROLADA

Trabalho de Conclusão apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

**Orientador:** Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

JOINVILLE

2019

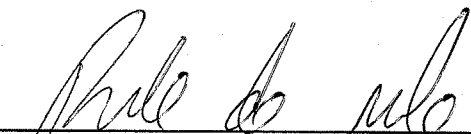
LUCAS WAGNER CRESTANI

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE UMA LONGARINA EM MATERIAL  
COMPÓSITO DE UMA AERONAVE RÁDIO CONTROLADA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC0001) do Curso de Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

**Banca Examinadora:**

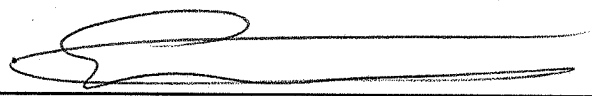
Orientador:



---

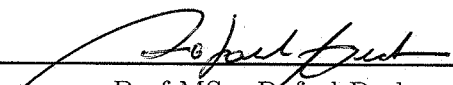
Prof. Dr. Ricardo de Medeiros  
CCT/UDESC

Membros:



---

Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso  
CCT/UDESC



---

Prof MSc. Rafael Beck  
CCT/UDESC

Joinville, 31 de Maio de 2019



## AGRADECIMENTOS

A elaboração deste trabalho não teria sido possível sem a colaboração de diversas pessoas. Gostaria de expressar toda a minha gratidão e apreço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para essa realização. A todos quero manifestar meus sinceros agradecimentos.

Aos meus pais, Gerson e Elizete, por sempre terem me apoiado em meus desafios e decisões, além de me proporcionar educação e condições para que eu sempre pudesse crescer.

Ao meu orientador prof. Dr. Ricardo de Medeiros, que além de ter me auxiliado em diversos obstáculos, me deu total liberdade para decidir o caminho que este trabalho iria tomar. Sugeriu ideias e métodos, me despertando cada vez mais curiosidade e motivação.

Ao Guilherme de Faveri, pela gentileza em ceder a máquina de ensaios mecânicos e de também ter se disponibilizado a me auxiliar na execução da maior parte dos ensaios.

Ao Instituto SENAI, por ter realizado uma parcela dos ensaios mecânicos, sempre com ótima receptividade e profissionalismo, principalmente por parte de Clayton de Souza.

Aos meus caros colegas de projeto, Matheus Ponick, por ter fornecido os dados dos ensaios de tração do compensado e Victor Negosek por ter me auxiliado em diversos momentos.

À Equipe Albatroz Aerodesign, da Universidade do Estado de Santa Catarina, principal influenciadora deste trabalho. Que me inspirou a estudar este e tantos outros temas. Por ter fornecido dados de ensaios e também bancou os custos dos materiais necessários para a elaboração dos corpos de prova. Quero agradecer também a todos os membros e ex-membros que por lá passaram.

A todos meus amigos e colegas, obrigado por permitirem que este trabalho seja uma realidade.

## RESUMO

Com o advento da tecnologia, crescem os projetos nos quais deseja-se alta performance. Materiais compósitos surgem para satisfazer essa questão, sendo aplicados em diversos campos da indústria, principalmente no seguimento aeroespacial e aeronáutico. Com foco na função estrutural, materiais compósitos foram combinados neste trabalho para formar uma viga em caixão, resultando em elevada rigidez e baixo peso específico. A sua composição se dá por meio de barras de fibra de carbono e resina epóxi, juntamente com laminados de madeira compensada. Diante deste contexto, o presente trabalho visa avaliar o comportamento à flexão estática de vigas compostas, por meio do modelo de viga de Timoshenko. Para isso, foram realizados ensaios mecânicos de tração, flexão e torção, com o intuito de determinar as propriedades efetivas dos materiais. Além disso, realizou-se um estudo para obter a homogeneização dessas propriedades e assim estimar as tensões na estrutura submetida à flexão. Com isso, é desenvolvido um algoritmo que realiza o projeto estrutural da longarina de uma aeronave rádio controlada, sendo o mesmo acoplado a um algoritmo de otimização pelo método de evolução diferencial, já implementado na biblioteca do Python. Pretende-se então desenvolver uma metodologia que possa ser aplicada para o dimensionamento de uma longarina de elevada eficiência. Vale ressaltar que a sua aplicação tem como foco auxiliar no projeto preliminar e que não substitui o projeto estrutural como um todo, visto que não é avaliado a falha no compensado e na cola. Como resultado, teve-se que o algoritmo apresentou respostas similares à simulação computacional, tendo seu comportamento determinado com grande precisão pelo modelo de viga de Timoshenko. Ao final, a aplicação do programa em um determinado projeto resultou em uma redução de 29% de massa da longarina.

**Palavras-chave:** Projeto estrutural. Ensaio mecânicos. Longarina em material compósito. Aeronave rádio controlada.

## ABSTRACT

*With the advent of technology, the higher the number of projects in which high performance is desired. Composite materials arise to satisfy this question, being applied in several industrial fields, but mainly in aerospace and aeronautics. Focusing on structural design, composite materials were combined to form a box beam, resulting in high stiffness and low specific weight. The composite is made of carbon fiber bars and epoxy resin, along with laminates of plywood. In this context, the present work aims to evaluate the static bending behaviour of composite beams, using the Timoshenko beam theory. For this, tensile, bending and torsion mechanical tests were performed to determine the effective properties of the materials. In addition, a study to obtain the homogenization of these properties was carried out and thus to estimate the stresses in the structure submitted to bending. An algorithm is developed, responsible for designing the wingspan's structure from a radio-controlled aircraft, which is coupled to an optimization algorithm by the differential evolution method, already implemented in Python's library. It is intended then to develop a methodology that can be applied for the design of a high efficiency wingspan. It is worth mentioning that its application is focused on the preliminary design and does not replace the total structural design since the failure in the plywood and glue is not evaluated. As a result, it was found that the algorithm presented similar responses to the computational simulation, having its behaviour determined with great precision by the Timoshenko's beam model. Its application in a given project resulted in a reduction of 29% of the wingspan mass.*

**Keywords:** *Structural design. Mechanical tests. Span wing made by composite. Radio-controlled aircraft.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Longarina Almejada .....	13
Figura 2	Sistema de Referência da Aeronave (Avião Albatroz Regular de 2016) ...	14
Figura 3	Sistema de Referência da Longarina e Vigas .....	14
Figura 4	Arranjos típicos das fibras .....	15
Figura 5	Componentes de tensão em um cubo elementar .....	16
Figura 6	Esquema do Ensaio de Tração .....	18
Figura 7	Esquema do Ensaio de Flexão .....	19
Figura 8	Máquina para Ensaio de Torção.....	20
Figura 9	Vista da Seção Transversal .....	22
Figura 10	Viga Submetida à um Esforço de Flexão em Três Pontos .....	23
Figura 11	Processo de geração o vetor doador para uma função objetivo bidimensional.....	28
Figura 12	Orientação das Fibras no Laminado.....	30
Figura 13	Barra de Carbono .....	31
Figura 14	Esquema do Processo de Pultrusão da Fibra de Vidro, Resina e Aditivos	32
Figura 15	Chapas de Compensado .....	33
Figura 16	Defeitos no Compensado.....	33
Figura 17	Seção Transversal da Barra .....	35
Figura 18	Ensaio de Flexão nas Barras de Carbono.....	36
Figura 19	Dados do Ensaio de Flexão nas Barras de Carbono .....	36
Figura 20	Ensaio de Torção nas Barras de Carbono .....	38
Figura 21	Corpos de Prova - Ensaio de Torção .....	38
Figura 22	Dados do Ensaio de Torção nas Barras de Carbono .....	39
Figura 23	Dados do Ensaio de Torção nas Barras de Carbono (de 0° a 8°) .....	39
Figura 24	Convergência de Malha .....	41
Figura 25	Qualidade da Malha .....	41
Figura 26	Modelo em Elementos Finitos do Ensaio de Flexão.....	42
Figura 27	Campo de Deslocamentos da Simulação do Ensaio de Flexão.....	42
Figura 28	Modelo em Elementos Finitos do Ensaio de Torção.....	43
Figura 29	Campo de Deslocamentos da Simulação do Ensaio de Torção.....	43
Figura 30	Distribuição das lâminas do compensado.....	44
Figura 31	Ensaio do Compensado em Tração .....	45
Figura 32	CP com as Fibras Externas à 0° em (1) e à 90° em (2). .....	45
Figura 33	Dados do Ensaio de Tração à 0° .....	46
Figura 34	Linhas de Tendência para o Ensaio de Tração à 0° .....	46
Figura 35	Dados do Ensaio de Tração à 90° .....	47
Figura 36	Dados do Ensaio de Tração à 45° .....	48
Figura 37	Linhas de Tendência para o Ensaio de Tração à 45° .....	48



Figura 38	Modelo em Elementos Finitos do Ensaio de Tração.....	49
Figura 39	Estudo de Convergência de Malha .....	50
Figura 40	Campo de Deslocamentos para o Ensaio de Tração à 0° .....	51
Figura 41	Campo de Deslocamentos para o Ensaio de Tração à 90° .....	51
Figura 42	Campo de Deslocamentos para o Ensaio de Tração à 45° .....	51
Figura 43	Campo dos índices do critério de falha para o ensaio de tração à 0° .....	52
Figura 44	Campo dos índices do critério de falha para o ensaio de tração à 90° .....	52
Figura 45	Campo dos índices do critério de falha para o ensaio de tração à 45° .....	52
Figura 46	Campo dos índices de falha para tração à 45°. (Elementos da região central) .....	53
Figura 47	Estrutura - Viga em Caixão .....	54
Figura 48	Conceitos de Estruturas para a Longarina .....	54
Figura 49	Ensaio de Flexão da Viga Caixão .....	55
Figura 50	Dados do Ensaio de Flexão na Viga em Caixão .....	56
Figura 51	Ensaio de Torção da Viga Caixão .....	57
Figura 52	CP para Ensaio de Torção da Viga Caixão .....	57
Figura 53	Dados do Ensaio de Torção da Viga Caixão .....	58
Figura 54	Malha .....	59
Figura 55	Parte Superior da Viga à Esquerda e Inferior à Direita .....	59
Figura 56	Simulação Numérica do Ensaio de Flexão .....	60
Figura 57	Simulação Numérica do Ensaio de Flexão - Campo de Deslocamentos ...	60
Figura 58	Simulação Numérica do Ensaio de Flexão - Tensão na Direção X .....	61
Figura 59	Simulação Numérica do Ensaio de Flexão - Índice de Falha .....	61
Figura 60	Simulação Numérica do Ensaio de Torção .....	61
Figura 61	Campo de Deslocamento do Ensaio de Torção .....	62
Figura 62	Campo de Rotação do Ensaio de Torção .....	62
Figura 63	Modelo de Cada Altura Avaliada .....	63
Figura 64	Posição dos Deslocamentos Considerados .....	63
Figura 65	Componente EI de Rigidez Flexural para a Viga em Caixão .....	65
Figura 66	Componente $\frac{f_c}{GA}$ de Rigidez Flexural para a Viga em Caixão .....	65
Figura 67	Modelo em Elementos Finitos para Verificação .....	66
Figura 68	Campo de Deslocamentos do Modelo para Verificação .....	66
Figura 69	Contribuição do termo envolvendo EI na determinação da flecha máxima	67
Figura 70	Modelo em Elementos Finitos para a Barra .....	68
Figura 71	Modelo em Elementos Finitos para as Barras, L=200mm e H=36mm ...	69
Figura 72	a) Vista Lateral. b) Condições de contorno. c) Aplicação da Carga .....	69
Figura 73	Componente EI de Rigidez Flexural para duas Barras de Carbono conectadas .....	70
Figura 74	Componente $\frac{f_c}{GA}$ de Rigidez Flexural para duas Barras de Carbono conectadas .....	70

Figura 75	Campo de Deslocamentos para L=200mm e H=36mm.....	71
Figura 76	Componente $EI$ de Rigidez Flexural para duas Chapas de Compensado.	71
Figura 77	Componente $\frac{f_c}{GA}$ de Rigidez Flexural para duas Chapas de Compensado.	72
Figura 78	Componentes $EI$ de Rigidez Flexural.....	73
Figura 79	Componentes $\frac{f_c}{GA}$ de Rigidez Flexural.....	73
Figura 80	Modelo de Longarina.....	74
Figura 81	Modelamento do Problema.....	74
Figura 82	Fluxograma do Algoritmo para o Cálculo da Deflexão.....	76
Figura 83	Posições onde a Tensão nas Barras de Carbono é Calculada.....	76
Figura 84	Fluxograma do Algoritmo para o Cálculo de Tensão.....	77
Figura 85	Dimensões da Longarina.....	78
Figura 86	Modelo em Elementos Finitos da Longarina.....	78
Figura 87	Campo de Deslocamentos.....	79
Figura 88	Campo de Tensões das Barras na Direção Longitudinal.....	79
Figura 89	Comparação da $\sigma_{x,max}$ entre o modelo em elementos finitos e o algoritmo	79
Figura 90	Fluxograma Geral.....	81
Figura 91	Sistema de Referência Local da Barra Inferior.....	83
Figura 92	Modelo em Elementos Finitos para L=100mm.....	83
Figura 93	Influência da inclinação da barra.....	84
Figura 94	Representação dos pontos de controle.....	85
Figura 95	Representação da distância avaliada.....	85
Figura 96	Avaliação da Escolha da Estratégia de Evolução Diferencial.....	88
Figura 97	Avaliação da Faixa de Mutação.....	89
Figura 98	Avaliação da Faixa de Recombinação.....	89
Figura 99	Avaliação do Tamanho da População.....	90
Figura 100	Avaliação da Tolerância.....	90
Figura 101	Estudo da Influência dos Valores de Penalidade.....	91
Figura 102	Caminho de Convergência das Variáveis.....	92
Figura 103	Convergência da função objetivo.....	93

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Estimativa Inicial das Propriedades da Barra de Carbono.....	35
Tabela 2	Resultados do Ensaio de Flexão nas Barras de Carbono.....	37
Tabela 3	Comprimentos dos Corpos de Prova.....	37
Tabela 4	Resultados do Ensaio de Torção nas Barras de Carbono.....	40
Tabela 5	Propriedades Finais da Barra de Carbono.....	40
Tabela 6	Avaliação dos Resultados.....	42
Tabela 7	Avaliação dos Resultados.....	43
Tabela 8	Dimensões de CP.....	44
Tabela 9	Resultados do Ensaio de Tração à 0°.....	47
Tabela 10	Resultados do Ensaio de Tração à 90°.....	47
Tabela 11	Resultados do Ensaio de Tração à 45°.....	48
Tabela 12	Propriedades Finais do Compensado.....	49
Tabela 13	Avaliação dos Resultados.....	51
Tabela 14	Forças de Ruptura.....	52
Tabela 15	Forças de Ruptura.....	53
Tabela 16	Dimensões do CP.....	56
Tabela 17	Resultados do Ensaio de Flexão na Viga em Caixão.....	56
Tabela 18	Dimensões do CP.....	58
Tabela 19	Resultados do Ensaio de Torção na Viga Caixão.....	58
Tabela 20	Avaliação dos Resultados.....	62
Tabela 21	Avaliação dos Resultados.....	62
Tabela 22	Resultado das Simulações para H=36mm.....	64
Tabela 23	Parâmetros de Rigidez Flexural da Viga em Caixão com H=36mm.....	64
Tabela 24	Comparação Da Flecha Máxima.....	66
Tabela 25	Resultado das Simulações para a Barra.....	68
Tabela 26	Comparação Da Flecha Máxima.....	78
Tabela 27	Dados para cada partição da asa.....	87

## CONTEÚDO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMA DE REFERÊNCIA</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>MATERIAIS COMPÓSITOS</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>MATERIAIS ORTOTRÓPICOS</b>	<b>16</b>
4.1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
4.2	LEI DE HOOKE . . . . .	16
4.3	LEI DE HOOKE PARA MATERIAIS ORTOTRÓPICOS . . . . .	16
4.4	ESTADO PLANO DE TENSÕES . . . . .	17
<b>5</b>	<b>ENSAIOS MECÂNICOS</b>	<b>18</b>
5.1	ENSAIO DE TRAÇÃO . . . . .	18
5.2	ENSAIO DE FLEXÃO . . . . .	19
5.3	ENSAIO DE TORÇÃO . . . . .	20
<b>6</b>	<b>DETERMINAÇÃO DA TENSÃO</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>TEOREMA DE CASTIGLIANO</b>	<b>23</b>
7.1	CONSIDERAÇÃO DOS ESFORÇOS CISALHANTES EM FLEXÃO EM TRÊS PONTOS . . . . .	23
<b>8</b>	<b>CRITÉRIOS DE FALHA</b>	<b>25</b>
8.1	INTRODUÇÃO . . . . .	25
8.2	TEORIA DE HILL . . . . .	25
8.3	TENSÃO MÁXIMA . . . . .	26
<b>9</b>	<b>OTIMIZAÇÃO PELO MÉTODO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL</b>	<b>27</b>
9.1	OPERADORES DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL . . . . .	27
<b>9.1.1</b>	<b>Mutação</b> . . . . .	27
<b>9.1.2</b>	<b>Cruzamento</b> . . . . .	27
<b>9.1.3</b>	<b>Seleção</b> . . . . .	28
9.2	ESTRATÉGIAS DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL . . . . .	29
<b>10</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>30</b>
10.1	METODOLOGIA DO TRABALHO . . . . .	30
10.2	BARRAS DE CARBONO . . . . .	31
<b>10.2.1</b>	<b>Perfil das Barras de Carbono</b> . . . . .	31
<b>10.2.2</b>	<b>Processo de Pultrusão</b> . . . . .	31
10.3	COMPENSADO . . . . .	32
<b>11</b>	<b>ESTUDO DE CASO 1: BARRAS DE CARBONO</b>	<b>35</b>
11.1	ENSAIO DE FLEXÃO . . . . .	35
11.2	ENSAIO DE TORÇÃO . . . . .	37
11.3	SIMULAÇÃO NUMÉRICA: ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA . . . . .	40

11.3.1	Estudo de Convergência de Malha . . . . .	41
11.3.2	Ensaio de Flexão . . . . .	42
11.3.3	Ensaio de Torção . . . . .	43
<b>12</b>	<b>ESTUDO DE CASO 2: COMPENSADO</b>	<b>44</b>
12.1	ENSAIOS DE TRAÇÃO . . . . .	45
12.1.1	Ensaio de Tração à 0° . . . . .	45
12.1.2	Ensaio de Tração à 90° . . . . .	47
12.1.3	Ensaio de Tração à 45° . . . . .	47
12.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA: ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA . . . . .	49
12.2.1	Estudo de Convergência de Malha . . . . .	50
12.2.2	Campos de Deslocamento . . . . .	50
12.3	SIMULAÇÃO NUMÉRICA: CRITÉRIO DE FALHA . . . . .	51
<b>13</b>	<b>ESTUDO DE CASO 3: VIGA EM CAIXÃO</b>	<b>54</b>
13.1	ENSAIO DE FLEXÃO . . . . .	55
13.2	ENSAIO DE TORÇÃO . . . . .	57
13.3	SIMULAÇÃO NUMÉRICA . . . . .	59
13.3.1	Flexão . . . . .	59
13.3.2	Torção . . . . .	60
<b>14</b>	<b>ESTUDO DE CASO 4: RIGIDEZ</b>	<b>63</b>
14.1	VIGA EM CAIXÃO . . . . .	63
14.1.1	Verificação das Equações . . . . .	66
14.1.2	Análise de Sensibilidade . . . . .	67
14.2	RIGIDEZ DE UMA ÚNICA BARRA DE CARBONO . . . . .	68
14.3	RIGIDEZ DAS BARRAS DE CARBONO . . . . .	68
14.4	RIGIDEZ DAS CHAPAS DE COMPENSADO . . . . .	71
14.5	COMPARAÇÃO DE RIGIDEZES . . . . .	72
<b>15</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO</b>	<b>74</b>
15.1	EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULO DA DEFLEXÃO NA EXTRE- MIDADE DA LONGARINA . . . . .	74
15.2	FLUXOGRAMA PARA A DETERMINAÇÃO DA DEFLEXÃO . . . . .	75
15.3	EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULO DA TENSÃO . . . . .	76
15.4	FLUXOGRAMA PARA A DETERMINAÇÃO DA TENSÃO . . . . .	77
15.5	VALIDAÇÃO DO ALGORITMO COM A SIMULAÇÃO NUMÉRICA . . . . .	78
15.6	FUNÇÃO OBJETIVO: CÁLCULO DA MASSA DA LONGARINA . . . . .	80
<b>16</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO PELO MÉTODO DE EVO- LUÇÃO DIFERENCIAL</b>	<b>81</b>
16.1	RESTRIÇÕES . . . . .	82
16.1.1	Limites Estruturais . . . . .	82
16.1.2	Limite de Comprimento da Partição . . . . .	82
16.1.3	Dimensões máximas da seção . . . . .	84
16.1.4	Limitações do Algoritmo . . . . .	86
<b>17</b>	<b>APLICAÇÃO EM UM PROBLEMA REAL</b>	<b>87</b>
17.1	PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO . . . . .	87

17.1.1	Estratégia de Evolução Diferencial . . . . .	87
17.1.2	Faixa de Mutação . . . . .	88
17.1.3	Faixa de Recombinação . . . . .	88
17.1.4	Tamanho da População . . . . .	88
17.1.5	Tolerância . . . . .	90
17.1.6	Influência dos valores de Penalidade . . . . .	91
17.2	RESULTADOS FINAIS . . . . .	92
18	CONCLUSÃO	94
19	SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS	95
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	96

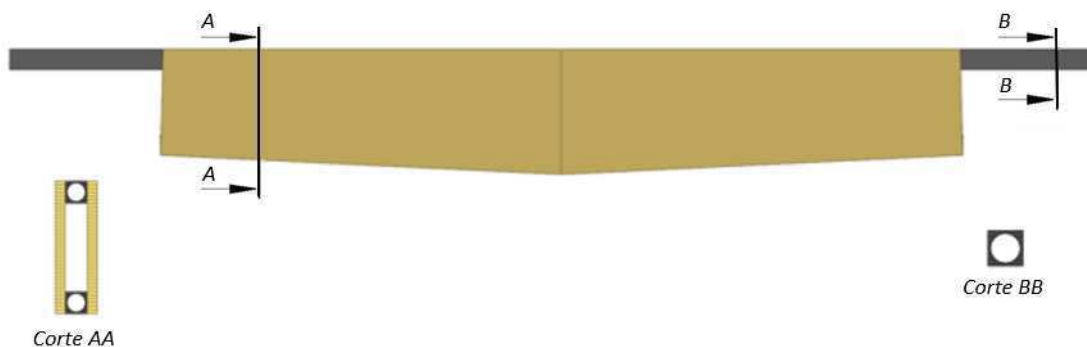
## 1 INTRODUÇÃO

A Sociedade de Engenheiros de Mobilidade (SAE Brasil) realiza diversas competições estudantis com o fim de promover a disseminação de técnicas e conhecimentos relativos a tecnologia da mobilidade. Entre as competições, existe a de Aerodesign, cujo regulamento surge com base nos obstáculos encontrados pela própria indústria aeronáutica. Assim, ressalta-se que este trabalho surge de desafios encontrados na participação da Equipe Albatroz Aerodesign na competição SAE Brasil Aerodesign.

Um dos grandes desafios das equipes é de obter uma aeronave leve, o qual alcançado através de um projeto estrutural e ao mesmo tempo ousado e confiável. Para isso, as equipes vem investindo em conhecimento na área de materiais compósitos, os quais apresentam um grande potencial para servir de componente estrutural nas aeronaves, visto o seu baixo peso específico e alta resistência mecânica.

Este trabalho nasceu da necessidade de se otimizar uma estrutura feita de compensado e barras de fibra de carbono, para compor a longarina da asa da aeronave. A longarina almejada é composta de duas seções em cada semi envergadura, sendo a primeira uma estrutura caixão e a segunda apenas um prolongamento da barra de fibra de carbono, conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Longarina Almejada



Fonte: Autor, 2019.

Realiza-se uma abordagem desde a determinação das propriedades dos materiais através de ensaios mecânicos, até a elaboração de um algoritmo para a realização do cálculo de tensão e deflexão da estrutura. Nesse processo, foi necessário também obter as equações homogeneizadas de rigidez dos materiais e fazer o equacionamento de problemas mecânicos de equilíbrio.

O software Altair Hyperworks<sup>®</sup> foi utilizado para a elaboração de modelos em elementos finitos e o algoritmo foi desenvolvido em Python.

## 2 SISTEMA DE REFERÊNCIA

O sistema de referência considerado é o apresentado na Figura 2, quando tratado de alguma superfície aerodinâmica.

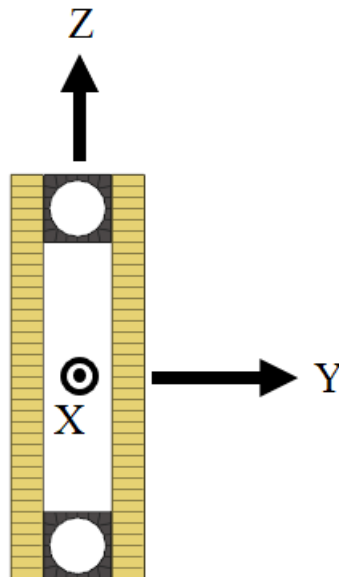
Figura 2 – Sistema de Referência da Aeronave (Avião Albatroz Regular de 2016)



Fonte: Autor, 2019.

Segundo a mesma lógica, a longarina da asa possuirá a mesma referência. Selecionando a partição direita da asa e, para uma longarina com sua seção transversal apenas representativa, a Figura 3 apresenta o sistema de coordenadas utilizado neste trabalho. É importante constatar que a tríade está posicionada no centro aerodinâmico da asa.

Figura 3 – Sistema de Referência da Longarina e Vigas



Fonte: Autor, 2019.



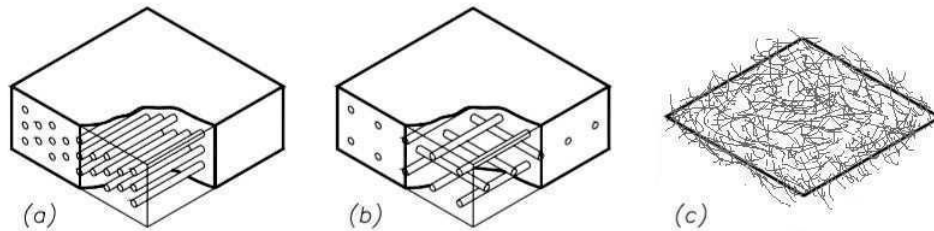
### 3 MATERIAIS COMPÓSITOS

Segundo Mendonça (2005), um material compósito é definido como a combinação de dois ou mais materiais distintos, associados em escala macroscópica, com o objetivo de se adquirir um conjunto de propriedades que não seria possível com cada um isolado. Dessa maneira, permite ao engenheiro manipular a quantidade específica de cada material, como também o arranjo da estrutura, de forma a dar mais importância às características almejadas.

Os compósitos podem ser classificados pelo seu tipo de reforço, de forma geral, segundo Mendonça (2005):

**Compósitos reforçados por fibras:** as fibras garantem ao material uma elevada rigidez e resistência na direção de sua orientação. A sua disposição, Figura 4, pode ser de forma unidirecional (a), bidirecional (b) ou aleatoriamente orientada como uma nuvem (c), em fibras contínuas ou picotadas. Como exemplo tem-se as fibras de carbono, de Kevlar e a de vidro.

Figura 4 – Arranjos típicos das fibras



Fonte: adaptado. Disponível em:

[https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/3779571592480/Compositos\\_0.pdf](https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/3779571592480/Compositos_0.pdf). Acesso em: 15 set. 2018.

**Compósitos reforçados por partículas ou particulados:** na sua maioria, a presença do particulado não melhora a resistência do componente de forma tão efetiva, sendo que, em alguns casos pode fragilizar o material em virtude da concentração de tensões. Apesar desse ponto negativo, o uso de partículas visa incrementar outras propriedades, como o isolamento ou condutividade térmica e elétrica, redução de atrito, resistência a altas temperaturas, resistência ao desgaste superficial, melhoria da usinabilidade, aumento da dureza superficial e redução de custos. Como exemplo tem-se o asfalto e os cermets.

**Outros tipos de compósitos:** neste grupo estão os compósitos naturais, como a madeira, que é constituída de resina de linino reforçada pelas fibras longitudinais da celulose. A balsa é um exemplo de composto natural e possui grande aplicação na indústria aeronáutica, pois se trata de um material leve e de elevada resistência mecânica em relação a seu peso específico.

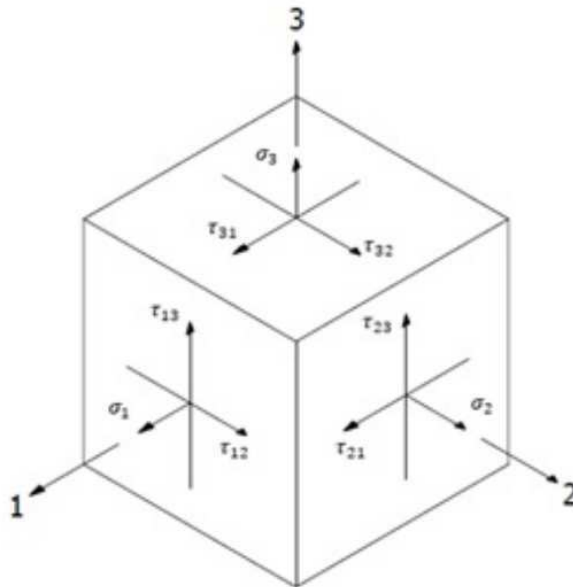
## 4 MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Um material ortotrópico é caracterizado, segundo Palma (1994), por possuir propriedades que diferem ao longo de três eixos duplos e ortogonais. A teoria a seguir refere-se estritamente à materiais com comportamento linear-elástico e suas relações entre tensões e deformações são descritas anteriormente à falha do material. A teoria implica que as deformações são consideradas pequenas, o material é homogêneo e que não há interferência entre os componentes de tensões.

As componentes de tensão para um cubo elementar, Figura 5, tem-se que  $\tau_{ij} = \sigma_{ji}$ . O primeiro índice indica a direção normal ao plano onde a tensão atua e o segundo a direção da tensão em si. Sendo,  $\tau$  os esforços cisalhantes e  $\sigma$  os esforços normais.

Figura 5 – Componentes de tensão em um cubo elementar



Fonte: Fuga (2017).

### 4.2 LEI DE HOOKE

A Lei de Hooke, na forma tensorial, pode ser escrita segundo Bodig & Jayne (1982), citado por (PALMA, 1994) como:

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j, \quad (4.1)$$

onde  $C_{ij}$  é conhecida como matriz de rigidez do material.

### 4.3 LEI DE HOOKE PARA MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Existem nove componentes de tensão e nove de deformação, o que geram 81 cons-

tantes elásticas independentes. Entretanto, é possível simplificar o problema considerando o fato de que há simetria das tensões, reduz-se de seis para três o número de componentes de cisalhamento, passando então para 36 constantes elásticas. Ainda, considerando um material ortotrópico tri-ortogonal, admitem-se três planos de simetria, o que anula os coeficientes de influência mútua, resultando em apenas 12 constantes elásticas.

A Lei de Hooke então, na forma matricial, citado por Palma (1994) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde:

- $\epsilon_i$ : deformação longitudinal na direção  $i$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ ;
- $\gamma_i$ : deformação angular, sendo  $i$  o plano de atuação e  $j$  a direção, para  $i, j = 1, 2$  e  $3$ ;
- $E_i$ : módulo de elasticidade longitudinal na direção  $i$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ ;
- $G_{ij}$ : módulo de elasticidade transversal, sendo  $i$  o plano de atuação e  $j$  a direção, para  $i, j = 1, 2$  e  $3$ ;
- $\nu_{ij}$ : coeficiente de Poisson, sendo  $i$  o plano de atuação e  $j$  a direção, para  $i, j = 1, 2$  e  $3$ ;
- $\sigma_i$ : tensão normal na direção  $i$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ ;
- $\tau_{ij}$ : tensão cisalhante, sendo  $i$  o plano de atuação e  $j$  a direção, para  $i, j = 1, 2$  e  $3$ .

#### 4.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES

Um corpo está em estado plano de tensões (EPT) quando todo o seu domínio está submetido à tensões em um único plano. Segundo Palma (1994), isso ocorre quando as tensões em outros planos são tão pequenas que podem ser desprezadas e, a deformação na direção normal ao plano não é tão relevante, tendo em vista a sua pequena influência na flexão. Assim sendo, com estas considerações, para materiais ortotrópicos em EPT, a Equação (4.2) pode ser reduzida a:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

## 5 ENSAIOS MECÂNICOS

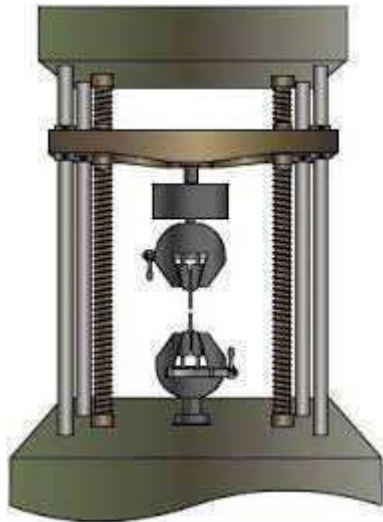
Ensaio mecânicos possibilitam a obtenção das propriedades mecânicas do material. Deve-se ter em mente que existem fatores que influenciam de forma direta no resultado do ensaio, por exemplo: temperatura, alinhamento do sistema, qualidade do corpo de prova, velocidade e tempo de ensaio, fixação adequada na máquina, entre outros. Dessa forma, existem normas, que são elaboradas para que a execução do ensaio seja tal que o resultado obtido tenha a mínima influência de parâmetros externos, garantindo uma padronização dos ensaios e qualidade dos resultados. Nesta seção será abordado apenas o necessário para o entendimento básico dos ensaios de tração, flexão e torção.

Geralmente, os corpos de prova possuem dimensões padronizadas para que seus resultados possam ser comparados e usados tecnicamente. Às vezes, não é possível atender a todos os requisitos da norma, nestes casos são feitas algumas adaptações.

### 5.1 ENSAIO DE TRAÇÃO

O ensaio de tração, Figura 6, é caracterizado por submeter o corpo de prova (CP) a um esforço axial, onde é alongado até a sua ruptura.

Figura 6 – Esquema do Ensaio de Tração



Fonte: Fredel (2010).

Este ensaio proporciona a obtenção do módulo de elasticidade (E) e da tensão de ruptura ( $\sigma_{rup}$ ). No qual, necessita-se conhecer a força axial (P) e a área da seção transversal (A). Sendo assim, calcula-se a tensão através de:

$$\sigma = \frac{P}{A}. \quad (5.1)$$

Lembrando que existe uma relação entre as tensões e deformações, que vem da lei de Hooke,

$$\sigma = E\epsilon. \quad (5.2)$$

## 5.2 ENSAIO DE FLEXÃO

Fácil preparação, baixo custo e simples instrumentação (SANTOS, 2015), são alguns dos motivos que tornam o ensaio de flexão, Figura 7, um dos procedimentos mais simples de serem executados. Permite obter o módulo de elasticidade flexural e a tensão de ruptura à flexão.

Figura 7 – Esquema do Ensaio de Flexão



Disponível em:

<<https://afinkopolimeros.com.br/servicos/ensaios-laboratoriais/ensaios-mecanicos/>>.

Para evitar efeitos indesejados da tensão de cisalhamento, a norma ASTM D790 indica que o corpo de prova deva possuir um comprimento de no mínimo 16 vezes a sua altura.

A equação da linha elástica, Equação (5.3), é uma relação entre: os esforços, as propriedades do material e as condições de contorno da estrutura, podendo-se calcular a deflexão da sua seção transversal ao longo do seu comprimento, através de uma incorporação das equações constitutivas e de equilíbrio às equações de compatibilidade.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI_{eq}}, \quad (5.3)$$

onde  $M$  é o momento fletor,  $v$  a flecha e  $EI_{eq}$  a rigidez flexural em torno do eixo Y.

A determinação da rigidez flexural ( $EI_{eq}$ ), no caso de flexão 3 pontos, pode ser feita através de uma dupla integração da equação da linha elástica, resultando em:

$$EI_{eq} = \frac{PL^3}{48v\left(\frac{L}{2}\right)}, \quad (5.4)$$

onde  $v_{1/2}$  designa a flecha máxima,  $P$  a intensidade da força e  $L$  o comprimento do vão.

A origem de erros nos ensaios de flexão pode estar relacionada à diversos fatores, tanto de fontes internas como externas, dentre eles, podemos destacar: quando a teoria assumida não é compatível com a teoria elástica de uma viga; quando existem defeitos nos corpos de prova, seja pela falta de paralelismo entre as faces, variações de geometria

ou uma fissura que não pode ser vista a olho nu; ou a falta de calibração do sistema de medição; entre outros fatores.

### 5.3 ENSAIO DE TORÇÃO

O comportamento de uma estrutura quando submetida à um esforço de torção depende das propriedades do material e da sua forma geométrica. A torção é caracterizada por gerar esforços cisalhantes, os quais podem ser responsáveis pela falha do material. Uma das normas existentes para o ensaio de torção, Figura 8, é a ASTM E143.

Figura 8 – Máquina para Ensaio de Torção



Fonte: adaptado de Biopdi. Disponível em:  
<<https://biopdi.com.br/ensaios-mecanicos/maquina-de-ensaio-de-torque>>.

No que tange aos cálculos, de forma similar à teoria aplicada para seções circulares, Hearn (1985) apresenta uma formulação conveniente para expressar a torção de seções não circulares:

$$\theta = \frac{TL}{GJ_{eq}}; \quad (5.5)$$

onde,  $\theta$  é o ângulo, T o momento torsor, L o comprimento do corpo de prova,  $J_{eq}$  é o “J equivalente” ou “momento polar de inércia efetivo” para a seção em questão e G o módulo de elasticidade transversal.

A rigidez torcional  $GJ_{eq}$  de qualquer seção é dada diretamente por

$$GJ_{eq} = \frac{TL}{\theta}. \quad (5.6)$$

## 6 DETERMINAÇÃO DA TENSÃO

Na mecânica dos sólidos é importante determinar a intensidade das forças internas no material, visto que sua resistência depende destes valores. Geralmente, essas forças variam de ponto à ponto no sólido e dependem diretamente da inclinação do plano da seção.

A intensidade da força perpendicular ou normal à seção de corte é denominada de tensão normal à um ponto, sendo designada neste trabalho por  $\sigma$ . Enquanto que a força tangencial à seção de corte à um ponto é denominada de tensão cisalhante e é designada por  $\tau$ .

Um sólido, solicitado por um momento fletor, apresentará na sua seção transversal um esforço de tração e outro de compressão. É um esforço que ocorre na direção longitudinal e seu valor máximo ocorre quanto mais afastada da linha neutra.

Popov (1990) apresenta as equações para calcular as tensões normal, de flexão e de cisalhamento, dadas respectivamente por

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad (6.1)$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I}, \quad (6.2)$$

$$\tau = \frac{V}{A}, \quad (6.3)$$

onde:

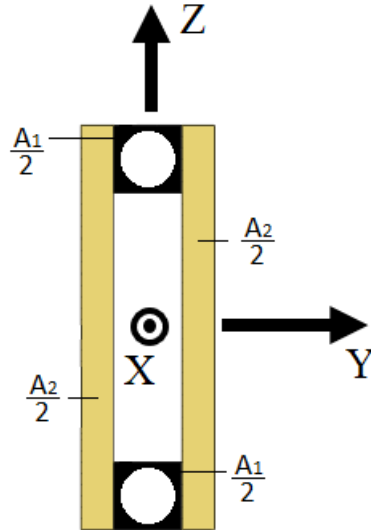
- $P$ : força axial;
- $A$ : área da seção transversal;
- $I$ : momento de inércia;
- $c$ : distância da linha neutra ao ponto avaliado;
- $M$ : momento fletor;
- $V$ : força cisalhante média.

Damkilde (2000) traz a metodologia para o cálculo da tensão de uma seção transversal composta de diferentes materiais. As equações apresentadas a seguir são todas retiradas de Damkilde (2000). Assume-se da teoria de viga que as deformações são pequenas e que **as seções transversais planas permanecem planas durante a flexão**. Essa suposição implica que a distribuição da deformação normal na seção transversal tem de ser linear. Esse axioma é válido para a flexão pura, independente da natureza do material.

A ideia básica da análise é a de escolher um módulo de elasticidade como referência ( $E_{ref}$ ) e calcular o que o autor chama de "propriedades da seção transversal transformadas". Essas propriedades dependem de uma referência, porém os resultados finais de tensão e deformação são independentes.

Considerando a seção transversal da Figura 9, serão calculadas essas propriedades transformadas. A área "transformada"  $A_t$  é dada por

Figura 9 – Vista da Seção Transversal



Fonte: Autor, 2019.

$$A_t = A_1 \left( \frac{E_1}{E_{ref}} \right) + A_2 \left( \frac{E_2}{E_{ref}} \right) \quad (6.4)$$

Visto que a seção transversal é simétrica em relação ao eixo Y, tanto em relação à área quanto ao material, a coordenada do centro elástico coincide com o centro geométrico.

O momento de inércia "transformado" em torno do eixo Y ( $I_{yyt}$ ) é descrito como:

$$I_{yyt} = I_{yy1} \left( \frac{E_1}{E_{ref}} \right) + I_{yy2} \left( \frac{E_2}{E_{ref}} \right). \quad (6.5)$$

A tensão nas diferentes partes do material dependem do módulo de elasticidade. No material  $i$  a tensão é

$$\sigma_x = \left( \frac{E_i}{E_{ref}} \right) \left( \frac{N}{A_t} - \frac{M_y}{I_{yyt}} z + \frac{M_z}{I_{zzt}} y \right). \quad (6.6)$$

A distribuição de tensão é linear em cada região individualmente, porém não é uniforme em toda a seção transversal, visto que existe uma descontinuidade no módulo de elasticidade. Independente da escolha do módulo de elasticidade de referência  $E_{ref}$ , o resultado sempre será o mesmo. Caso contrário, levaria a um método fisicamente inconsistente.



## 7 TEOREMA DE CASTIGLIANO

O Teorema de Castigliano, conforme Gere (2004), proporciona uma forma de calcular a deflexão de uma viga através da energia de deformação da estrutura ( $U$ ). A Equação (7.1) é conhecida como Teorema de Castigliano.

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad (7.1)$$

onde  $\delta_i$  é a deflexão da estrutura no mesmo ponto e direção da aplicação da carga  $P_i$ .

Apresentando a equação acima em termos dos esforços solicitantes, tem-se

$$\delta_i = \int \frac{N}{EA} \left( \frac{\partial N}{\partial P_i} \right) dx + \int \frac{M}{EI} \left( \frac{\partial M}{\partial P_i} \right) dx + \int \frac{f_c V}{GA} \left( \frac{\partial V}{\partial P_i} \right) dx + \int \frac{T}{GJ} \left( \frac{\partial T}{\partial P_i} \right) dx, \quad (7.2)$$

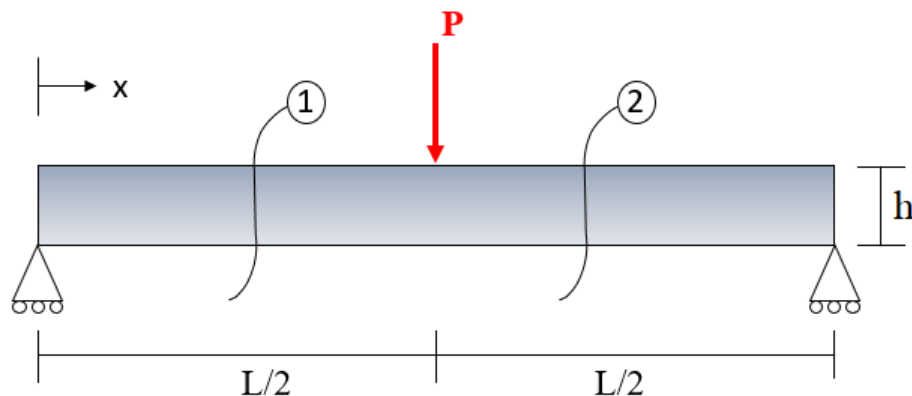
onde os termos do somatório são oriundos da tensão normal, de flexão, de cisalhamento e de torção, respectivamente.

### 7.1 CONSIDERAÇÃO DOS ESFORÇOS CISALHANTES EM FLEXÃO EM TRÊS PONTOS

Em vigas onde a sua esbelteza, razão ( $L/h$ ), é elevada, o modelo de viga de Euler-Bernoulli apresenta uma boa predição dos resultados (POPOV, 1990). Porém, em vigas nas quais essa razão é pequena, os efeitos do cisalhamento são expressivos. Assim, o modelo de viga de Timoshenko torna-se uma ferramenta importante, visto que considera os efeitos cisalhantes nos cálculos. Para se ter uma noção de quanto seria um valor de esbelteza pequeno, a norma (ASTM 790 (D), 2003) considera uma razão de 16:1 satisfatória quando a relação entre a tensão de tração pela tensão de cisalhamento for de pelo menos 8 para 1.

O Teorema de Castigliano será aplicado para o problema abaixo, no qual tem-se uma viga submetida à um esforço de flexão em três pontos, conforme a Figura (10).

Figura 10 – Viga Submetida à um Esforço de Flexão em Três Pontos



Fonte: Autor. 2019.

São realizados dois cortes na estrutura, um anterior e outro após à posição de aplicação da força. Aplicando o diagrama de equilíbrio na estrutura e em seus cortes, tem-se

como resultado as seguintes relações:

Para  $0 < x \leq \frac{L}{2}$ :  $V_1(x) = \frac{-P}{2}$ ;  $M_1(x) = \frac{Px}{2}$ ;  $\frac{\partial V_1}{\partial P}(x) = -\frac{1}{2}$ ;  $\frac{\partial M_1}{\partial P}(x) = \frac{x}{2}$ ;

Para  $\frac{L}{2} < x \leq L$ :  $V_2(x) = \frac{P}{2}$ ;  $M_2(x) = \frac{-Px+PL}{2}$ ;  $\frac{\partial V_2}{\partial P}(x) = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{\partial M_2}{\partial P}(x) = \frac{-x+L}{2}$ .

E, os esforços normais e de torção são nulos. Então, tem-se a contribuição de apenas dois termos no Teorema de Castigliano. Substituindo as relações encontradas na Equação (7.2), tem-se a relação

$$\delta_{x=L/2} = \left( \frac{PL^3}{48} \right) \frac{1}{EI} + \left( \frac{PL}{4} \right) \frac{f_c}{GA}. \quad (7.3)$$

## 8 CRITÉRIOS DE FALHA

### 8.1 INTRODUÇÃO

A estimativa correta da resistência do material é crucial para a segurança da estrutura. Em materiais compósitos, as falhas geralmente ocorrem devido à uma combinação de vários mecanismos ou modos de falha, sendo um processo complexo de acúmulo de danos no material (SOUZA, 2003).

De um modo geral, a análise da falha ou de resistência permite estimar o máximo carregamento suportado pela estrutura, sendo possível então projetar a estrutura para que resista até atingir a sua condição crítica de carga.

Critérios de falhas foram desenvolvidos com a finalidade de estimar os efeitos originados de esforços atuantes na estrutura, indicando a ocorrência de falha ou não do material. Segundo Souza (2003), esses critérios de falha podem ser classificados em vários grupos, tais como:

- Limites: que fornecem apenas limites de resistência, desconsiderando as interações entre as tensões ou deformações;
- Interativos: que considera essa interação entre os componentes de tensões e deformações;
- Híbridos: combinações de critérios distintos;
- Mecanismo de fratura: baseados nos conceitos de mecânica da fratura;
- Mecanismo de dano: baseados em descrições matemáticas oriundos da observação de danos;
- Micromecânicos: desenvolvidos com base nos micromecanismos de falha.

### 8.2 TEORIA DE HILL

Para materiais isotrópicos, von Mises propõem uma equação para calcular a tensão equivalente no material, dada por

$$\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + 3[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2] = \sigma_{eq}^2. \quad (8.1)$$

A partir de uma modificação da teoria da máxima energia de distorção, Hill (1964) propõe um critério que possibilita determinar a falha de um material anisotrópico, pela Equação (8.2). Na qual, o critério determina que o material está no limiar da falha quando a equação se aproxima do valor unitário e, que o material apresenta um fator de segurança quando este valor é menor que um.

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L(\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2) \leq 1. \quad (8.2)$$

É possível reescrever a Equação (8.2), substituindo as constantes F, G, H, L, M e N, determinadas supondo-se que as tensões são nulas, com exceção de uma. Assim, tem-se

$$A + B + C \leq 1, \quad (8.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\sigma_3^2}{Z^2}; \\ B &= -\sigma_1\sigma_2\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) - \sigma_2\sigma_3\left(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right) + \sigma_1\sigma_3\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right); \\ C &= \frac{\tau_{23}^2}{S_2^2} + \frac{\tau_{13}^2}{S_1^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}. \end{aligned}$$

### 8.3 TENSÃO MÁXIMA

No critério de falha de máxima tensão, segundo Souza (2003) as tensões aplicadas nas direções principais não devem exceder as tensões de resistência do material, em cada respectiva direção de carga. Este critério não considera as interações existentes entre os componentes tensoriais. Para falhas em tração, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_1 < X_t \Rightarrow \text{Modo de falha 1} \\ \sigma_2 < Y_t \Rightarrow \text{Modo de falha 2} \\ \sigma_3 < Z_t \Rightarrow \text{Modo de falha 3} \end{cases} \quad (8.4)$$

Para falhas em compressão:

$$\begin{cases} \sigma_1 > -X_c \Rightarrow \text{Modo de falha 1} \\ \sigma_2 > -Y_c \Rightarrow \text{Modo de falha 2} \\ \sigma_3 > -Z_c \Rightarrow \text{Modo de falha 3} \end{cases} \quad (8.5)$$

E por último, para falhas por cisalhamento:

$$\{\tau_{12} < S \Rightarrow \text{Modo de falha 4}, \quad (8.6)$$

onde:

- $\sigma_i$ : tensão de tração ou compressão aplicadas na direções principais do material;
- $\tau_{ij}$ : tensões de cisalhamento atuantes nos planos de simetria do material;
- $X_t, Y_t, Z_t$ : resistência do material à tração em suas direções principais;
- $X_c, Y_c, Z_c$ : resistência do material à compressão em suas direções principais;

## 9 OTIMIZAÇÃO PELO MÉTODO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Desenvolvida por Storn e Price, a Evolução Diferencial surgiu em meados dos anos noventa, devido à tentativas de resolver o problema de ajuste polinomial de Chebychev. Ficou famosa por logo em seguida conquistar o terceiro lugar na primeira Competição Internacional em Computação Evolutiva, durante o *International Conference on Evolutionary Computation* (IEEE), em Nagoya.

Como relatado por Araujo (2016), trata-se basicamente de um método estocástico de busca, de fácil implementação e de ótimo desempenho com aplicação em uma grande gama de problemas. Mostra-se eficaz para as funções objetivo que não são diferenciáveis ou convexas e tem facilidade na busca pelo ótimo com populações pequenas (ARAÚJO, 2016).

### 9.1 OPERADORES DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

O método pode ser descrito como uma manipulação de indivíduos (vetores) que representam as soluções candidatas, geradas pela função objetivo. Inicialmente o algoritmo preenche todo o espaço de busca, criando uma população inicial de forma aleatória. Por se tratar de um algoritmo evolutivo, em cada nova geração, os indivíduos sofrem modificações de mutação e cruzamento. Ocorre então a seleção dos melhores indivíduos e esse ciclo se repete até atingir o critério de parada atribuído pelo usuário, que pode ser definido por diversos parâmetros, conforme melhor se adequar ao problema.

#### 9.1.1 Mutação

O operador mutação gera vetores denominados doadores ou modificados através da adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios a um terceiro indivíduo, também aleatório, da população. O operador de mutação é definido por Oliveira e Saramago (2005) como:

$$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)}), \quad (9.1)$$

onde  $q$  é a geração,  $V^{(q+1)}$  é o novo indivíduo gerado e  $F$  determina a ponderação da diferença entre  $X_{\beta}^{(q)}$  e  $X_{\gamma}^{(q)}$ . O vetor  $X_{\alpha}^{(q)}$  é o vetor base, que indica onde é realizada a perturbação. Esses três vetores são escolhidos de forma aleatória.

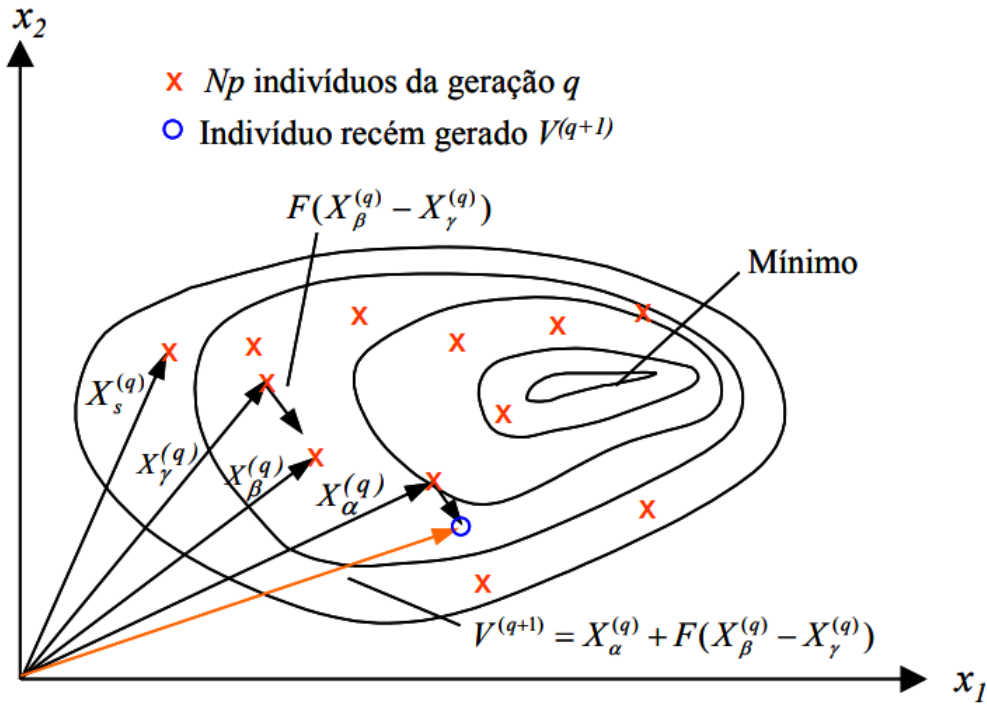
De maneira a auxiliar na compreensão desta operação de mutação, segue na Figura 11 um exemplo bidimensional que ilustra os diferentes vetores (indivíduos) que participam da geração do vetor doador  $V^{(q+1)}$ .

#### 9.1.2 Cruzamento

A operação de cruzamento ocorre pela permutação de tributos entre dois indivíduos, uma espécie de combinação genética, gerando um indivíduo denominado de vetor tentativa ou vetor experimental. Tem como objetivo amplificar a diversidade dos indivíduos que sofrem mutação (ARAÚJO, 2016).

As componentes do vetor experimental, segundo Oliveira e Saramago (2005) são formadas pela seguinte equação:

Figura 11 – Processo de geração o vetor doador para uma função objetivo bidimensional



Fonte: Oliveira e Saramago (2005).

$$u_i^{(q+1)} = \begin{cases} v_i^{(q+1)}, & \text{se } r_i \leq CR \\ x_{d,j}^{(q)} & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (9.2)$$

onde  $r_i$  é um número gerado aleatoriamente que pertence ao intervalo  $[0,1]$ .  $X_{d,i}^{(q)}$  é o vetor alvo.  $CR$  é a probabilidade de ocorrer o cruzamento, ou seja, a probabilidade do vetor experimental herdar os valores das variáveis do vetor doador, sendo fornecida pelo usuário e compreendida no intervalo  $[0,1]$ . Por exemplo, todas as componentes do vetor experimental virão do vetor doador  $V^{(q+1)}$  se  $CR=1$ . Porém, se  $CR=0$ , todas as componentes do vetor experimental virão do vetor alvo  $X_d^{(q)}$ .

### 9.1.3 Seleção

A evolução diferencial difere dos outros algoritmos evolutivos quanto à seleção dos indivíduos, pois esta não utiliza hierarquia nem seleção proporcional (Oliveira e Saramago, 2005). Em vez disso, o valor da função objetivo do vetor experimental  $U^{(q+1)}$  é comparada com a do vetor alvo  $X_d^{(q)}$ . O valor da função objetivo do vetor alvo deve ser sempre menor para prosseguir para a próxima geração, então caso aconteça de ser maior, as componentes do vetor alvo são substituídas pelas componentes do vetor experimental.

## 9.2 ESTRATÉGIAS DA EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

As estratégias da evolução diferencial alteram a forma como cada operação de evolução diferencial é executada. É possível alterar três parâmetros, são eles:

- mecanismo-de-seleção: especifica o vetor a ser perturbado, podendo ser "*rand*" ou "*best*", e implica ao vetor ser escolhido aleatoriamente ou ao vetor de menor valor da função objetivo, respectivamente.
- número-de-diferenças: indica o número de pares de vetores utilizados na diferenciação ponderada.
- modelo-de-recombinação: retorna o tipo de cruzamento, podendo ser exponencial ("*exp*") ou binominal ("*bin*").

Uma estratégia que funciona bem para um problema não necessariamente funcionará bem para outro. Segundo Oliveira e Saramago (2005), a estratégia a ser adotada é determinada por tentativa e erro.

## 10 MATERIAIS E MÉTODOS

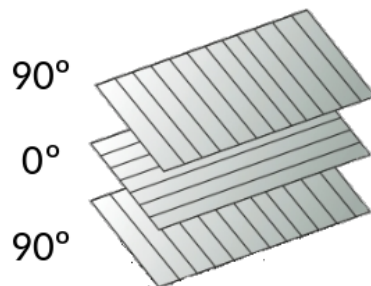
### 10.1 METODOLOGIA DO TRABALHO

O trabalho foi dividido em etapas, onde primeiro foi necessário obter as propriedades dos materiais e as equações de rigidez para em seguida elaborar o algoritmo de cálculo estrutural e realizar o acoplamento deste algoritmo ao de otimização. Barras de fibra de carbono e madeira compensada foram os materiais selecionados para compor a longarina em questão.

O primeiro estudo de caso consiste em determinar as propriedades efetivas da barra de carbono, comparando os resultados de ensaios mecânicos com a simulação numérica. Nesta etapa, foram realizados ensaios de flexão e torção. O modelo de viga utilizado neste estudo foi o de Euler-Bernoulli. Como é apenas para fins de comparação entre o modelo numérico e o ensaio, é avaliada a resposta elástica da estrutura.

O segundo estudo de caso tem como finalidade determinar as propriedades efetivas do laminado, as chapas de compensado. Comparam-se os resultados reais, adquiridos em testes mecânicos, com a simulação numérica. Os testes realizados são ensaios de tração, alterando a direção das fibras. Em relação ao núcleo, tem-se à  $0^\circ$ , à  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . Vale ressaltar que a orientação das lâminas entre si no laminado continuam sempre as mesmas, defasadas em  $90^\circ$ , conforme a Figura 12.

Figura 12 – Orientação das Fibras no Laminado



Fonte: Autor, 2019.

Parte-se então para o terceiro estudo de caso, no qual são determinadas as propriedades efetivas da viga em caixão, utilizando as propriedades obtidas dos estudos de caso 1 e 2. Por fim, compara-se o modelo numérico e o resultado real, dos ensaios mecânicos de flexão e torção. O modelo de viga utilizado também é o de Euler-Bernoulli.

O quarto estudo de caso consiste em determinar as equações de rigidez homogeneizadas para todos os componentes da longarina: a viga em caixão; a barra isolada; as chapas de compensado e; as barras de carbono. Este estudo foi realizado para diferentes alturas da estrutura, de forma que as equações encontradas têm-a como uma variável. O modelo de viga de Timoshenko foi utilizado.

Em seguida, todo o conteúdo obtido dos estudos de caso são aplicados no desenvolvimento do algoritmo, que determina as tensões críticas nas barras de carbono e calcula a deflexão na ponta da longarina. Esse programa é então modificado para que possa ser implementado ao algoritmo de otimização pelo método de evolução diferencial.

Por fim, aplica-se o algoritmo à um problema real, avaliando as estratégias de



otimização.

## 10.2 BARRAS DE CARBONO

Segundo Mendonça (2005), a fibra de carbono é muito reconhecida por sua elevada resistência mecânica. Existem várias maneiras de serem produzidas, como a técnica de enrolamento filamentar, moldagem por injeção, autoclave, entre outros. O foco deste trabalho será em fibras de carbono produzidas pelo processo de pultrusão.

### 10.2.1 Perfil das Barras de Carbono

As barras selecionadas para a confecção da longarina possuem sua seção externa quadrada e interna circular, conforme pode ser visto na Figura 13.

Figura 13 – Barra de Carbono



Fonte: Autor, 2019.

### 10.2.2 Processo de Pultrusão

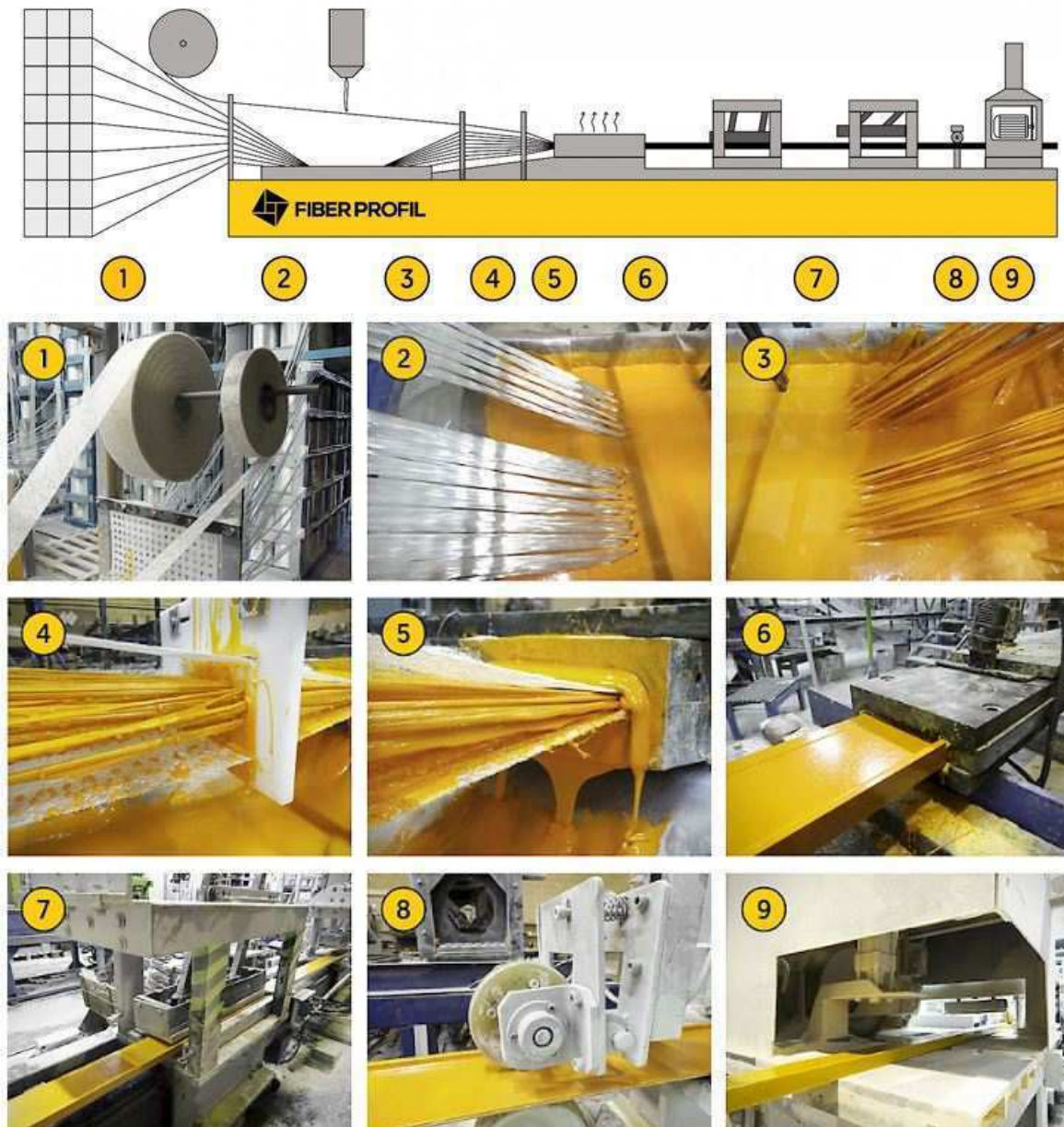
Para a realização deste trabalho foram selecionadas barras de carbono fabricadas pelo processo de pultrusão (Figura 14), processo esse responsável por fabricar perfis de geometria contínua, gerando uma elevada resistência mecânica aliado à um baixo peso específico e sem necessidade de fazer manutenções (CREATIVE PULTRUSIONS, INC, 2017).

Inicialmente são selecionados os elementos que darão origem ao compósito: o reforço em forma de fibra, a resina, os aditivos e as cargas que garantirão ao material as propriedades desejadas de resistências química, mecânica, características de reação ao fogo, coloração, etc.

As fibras são movidas pelo processo de estiramento contínuo até entrarem em contato com a mistura de resina e aditivos. Há uma impregnação da mistura no reforço, que entra no molde, responsável por compactar o compósito. O molde é confeccionado conforme o perfil estrutural demandado.

A cura da resina é garantida pelo aquecimento preciso do molde, que necessita de um controle de temperatura para evitar irregularidades nas propriedades do pultrido (FIBER PROFILE S.L., 2019).

Figura 14 – Esquema do Processo de Pultrusão da Fibra de Vidro, Resina e Aditivos



Fonte: (Fiber Profile S.L., 2019)

### 10.3 COMPENSADO

O compensado é constituído de lâminas de madeira coladas e prensadas de forma que as lâminas adjacentes sempre sejam ortogonais. Isso confere ao compensado uma alteração das propriedades elásticas e também da sua resistência em diferentes direções. Geralmente, a quantidade de lâminas empilhadas é ímpar, pois fornece uma tendência menor ao empenamento.

Quando se trata de ligações em estruturas de madeira, a resistência ao fendilhamento acaba sendo uma propriedade relevante. Segundo Olin (1990), a laminação cruzada

promove uma maior resistência ao fendilhamento, mas também ao impacto, ao empenamento e melhor estabilidade dimensional.

O compensado, segundo Palma (1994), deve possuir simetria estrutural em relação ao plano central para ter elevada rigidez e resistência a flexão nos dois sentidos da chapa. Assim, em ambos os lados do plano de simetria, as lâminas equidistantes devem possuir as mesmas propriedades físicas, espessura e direção da grã. A existência de um plano de simetria na camada do núcleo implica na existência de um número ímpar de camadas, denominado então de compensado balanceado, (PALMA, 1994).

Figura 15 – Chapas de Compensado



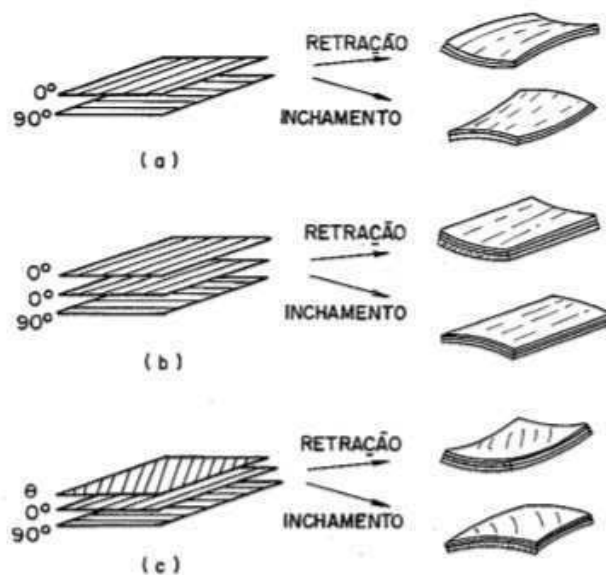
Disponível em:

<<http://madeirite.blogspot.com/2013/08/qualidade-de-chapas-de-compensados.html>>.

Acessado em: 12 jan. 2019.

Geralmente, na fabricação comercial do compensado orienta-se a direção das fibras em  $90^\circ$  em lâminas adjacentes. Permitindo dessa forma, uma rigidez e resistência mecânica superior à da madeira sólida. Conforme Palma (1994), pode chegar a ser duas vezes maior com a utilização de três camadas e, quanto maior o número de camadas, tem-se uma maior equalização de rigidezes e melhor distribuição de carga através do painel.

Figura 16 – Defeitos no Compensado



Fonte: Palma (1994).

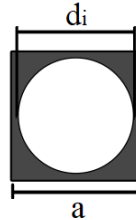
De acordo com Mclain & Bodig (1974), Noack & Roth (1976), Bodig & Jayne (1982) e Booth (1990), os materiais fibrosos de origem natural podem ser classificados, de um modo geral, como ortotrópicos (apud Palma, 1994, p. 32).

Conforme a distribuição das lâminas, existe o acoplamento das tensões. Esses efeitos, Figura 16, são decorrente da retração ou do inchamento do laminado. Se o laminado é simétrico, a matriz de acoplamento é nula, ou seja, não gera este acoplamento de tensões.

## 11 ESTUDO DE CASO 1: BARRAS DE CARBONO

O estudo visa validar as propriedades mecânicas da barra de carbono, através de ensaios estruturais e simulação numérica destes ensaios utilizando o software Altair HyperWorks®. A Figura 17 apresenta a geometria da seção transversal da barra quadrada adotada para este estudo.

Figura 17 – Seção Transversal da Barra



Fonte: Autor, 2019.

O processo de fabricação destas barras não é de muita precisão, principalmente no diâmetro interno. Por este motivo, é apresentado o resultado das medições das suas dimensões com um paquímetro analógico para cada ensaio realizado.

A barra de carbono é um material transversalmente ortotrópico. Dessa forma, as propriedades necessárias são:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $\nu_{12}$  e  $\nu_{23}$ . Sendo composta de fibra de carbono e resina epoxy.

Um grupo de pesquisa da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) fornece através do MECH-Gcomp propriedades de materiais compósitos e nanocompósitos. Deste banco de dados foram adotadas as propriedades mecânicas que se julgaram mais adequadas para as barras em questão. Na Tabela 1 estão dispostas estas propriedades, que foram adotadas como estimativa inicial.

Tabela 1 – Estimativa Inicial das Propriedades da Barra de Carbono

$E_1$ [MPa]	$E_2$ [MPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$ [MPa]	$G_{23}$ [MPa]
129346	8687	0,322	0,46	4195	4195

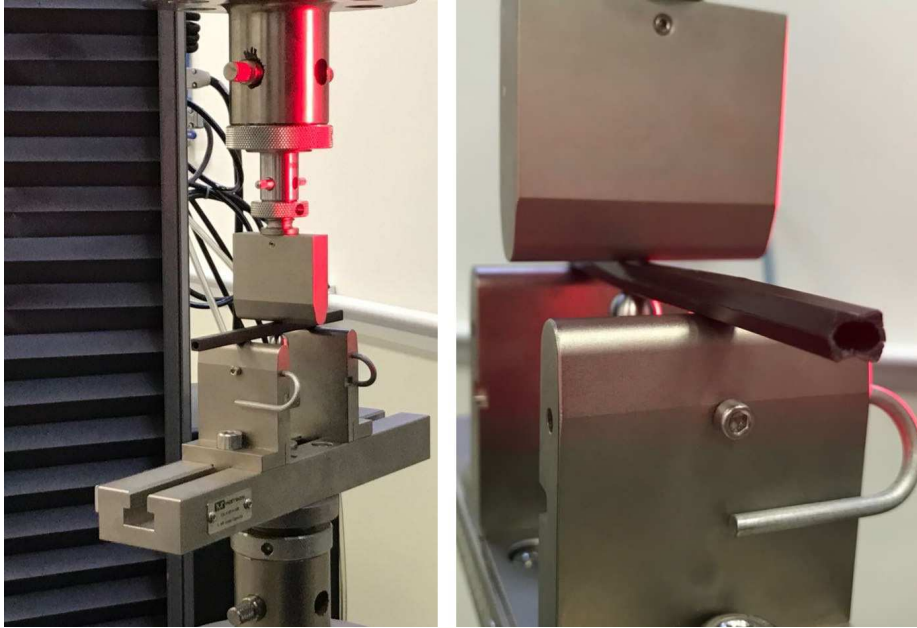
### 11.1 ENSAIO DE FLEXÃO

Através de uma parceria com Instituto SENAI, foi possível realizar um ensaio de flexão em 3 pontos nas barras de carbono, Figura 18. No qual a norma ASTM 790 foi adotada como referência. O diâmetro interno dos CP's medidos é de 5,20mm.

#### Parâmetros do Ensaio:

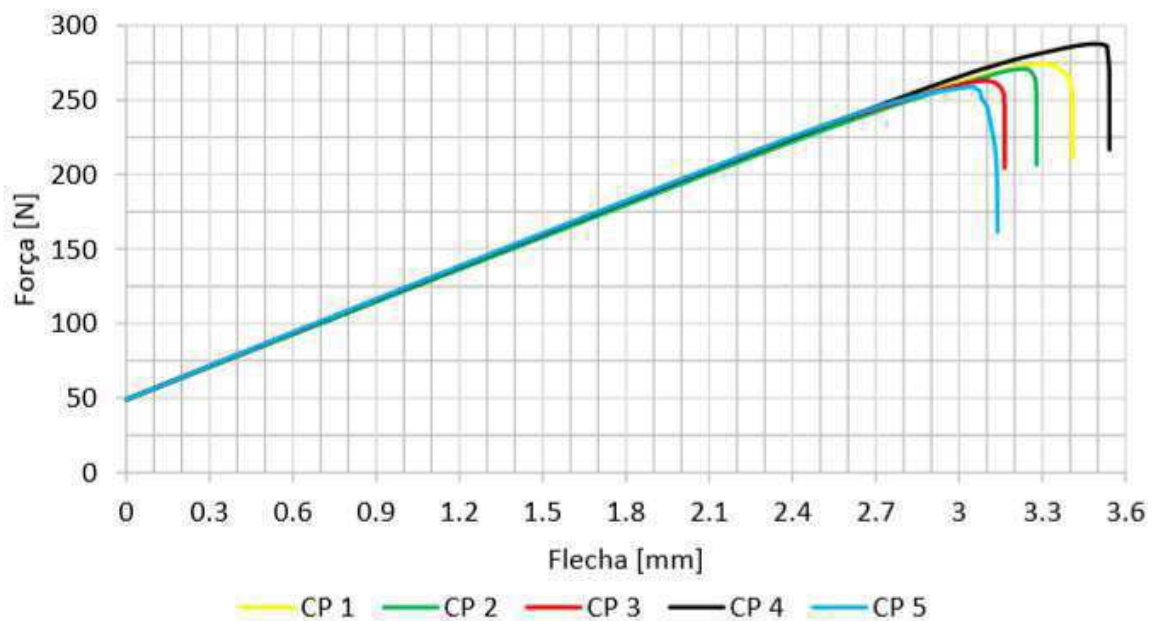
- Pré-Carga = 5kgf;
- Velocidade do Ensaio = 2mm/min;
- Relação do comprimento pela altura do CP (L/H) = 30,83;
- Distância entre os apoios L = 185mm.

Figura 18 – Ensaio de Flexão nas Barras de Carbono



Fonte: Autor, 2019.

Figura 19 – Dados do Ensaio de Flexão nas Barras de Carbono



Fonte: Autor, 2019.

Os dados adquiridos no ensaio podem ser observados na Figura 19. Em seguida, traçou-se uma curva de tendência pelo método dos mínimos quadrados até o ponto anteriormente à ruptura. Com isso obteve-se a inclinação de cada curva, cujos resultados estão apresentados na Tabela 2, juntamente com a tensão de ruptura, calculada pela Equação (6.2) e o módulo de elasticidade flexural  $E_f$ , originado do modelo de viga de Euler-Bernoulli, calculado de uma adaptação da Equação (5.4) para o problema em questão, tornando-se

$$E_f = \frac{\frac{\Delta P}{\Delta v(\frac{L}{2})} L^3}{48I_{yy}}. \quad (11.1)$$

Tabela 2 – Resultados do Ensaio de Flexão nas Barras de Carbono

CP	$\Delta P/\Delta v$ [N/mm]	$R^2$	$F$ [N]	$\sigma_{rup}$ [MPa]	$E_f$ [GPa]
1	70,7	0,9982	274,8	528,8	129,3
2	70,6	0,9993	271,0	521,4	129,1
3	71,5	0,9989	263,2	506,4	130,8
4	71,0	0,9988	287,7	553,9	129,9
5	71,6	0,9986	258,9	498,2	131,0
<b>Média</b>					130,0
<b>Desvio Padrão</b>					0,847

## 11.2 ENSAIO DE TORÇÃO

Além do ensaio de flexão, realizou-se também um ensaio de torção, Figura 20. Para este ensaio foi tomado como base a norma (ASTM 143-02 (E), 2009).

A peça de fixação da máquina possui três castanhas, isso impede a fixação de uma amostra com seção quadrangular. Dessa forma, foi necessário adaptar o corpo de prova (CP). A solução encontrada foi a de resinar com epoxy uma porca em cada uma das extremidades dos 04 corpos de prova, conforme apresentado na Figura 21.

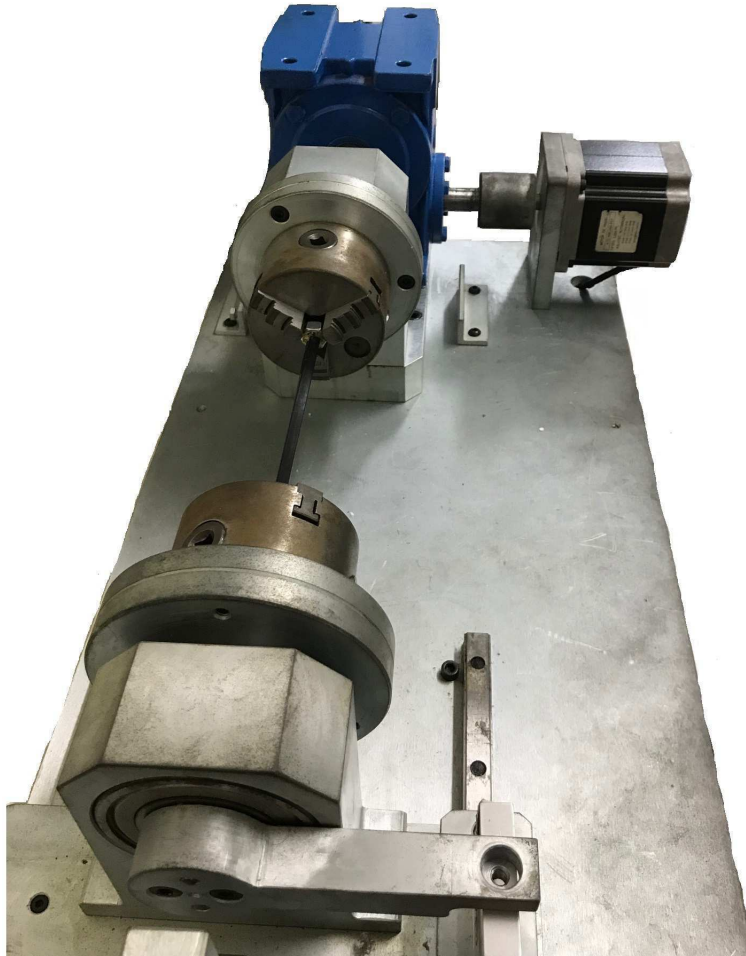
A norma indica, para tubos circulares, que o comprimento do CP seja de pelo menos quatro vezes o seu diâmetro. Fazendo uma analogia para tubos de seção não circular, tem-se a mesma relação. Entretanto, como não há um valor limite superior para o seu comprimento e, visando minimizar os efeitos da fixação, adotou-se um comprimento  $L = 130\text{mm}$ , tendo então uma relação de aproximadamente  $L/H = 21,67$ . A Tabela 3 apresenta as dimensões dos corpos de prova, medidas com um paquímetro analógico. Como todos os CP's foram cortado da mesma barra, todos apresentaram um diâmetro interno igual a 4.20 mm.

Tabela 3 – Comprimentos dos Corpos de Prova

CP	1	2	3	4
L [mm]	130,00	131,50	132,20	132,30

Visando realizar uma correta preparação para o ensaio, o primeiro corpo de prova (CP1) foi testado utilizando uma célula de carga de 500N, o que se mostrou ser de uma faixa muito ampla para estas amostras, portanto, trocou-se a célula de carga para uma de 100N. Por esse motivo o perfil da curva do CP 1 apresentou variações decorrentes de ruído, porém seus resultados não foram descartados, pois sua tendência não divergiu das demais. A velocidade de ensaio para o CP1 foi de 0,1 rpm, fazendo-o romper em aproximadamente 48 segundos. Para os demais a velocidade foi alterada para 0,05 rpm, que ainda foi suficiente para romperem em aproximadamente 2 minutos, sendo que a

Figura 20 – Ensaio de Torção nas Barras de Carbono



Fonte: Autor, 2019.

Figura 21 – Corpos de Prova - Ensaio de Torção



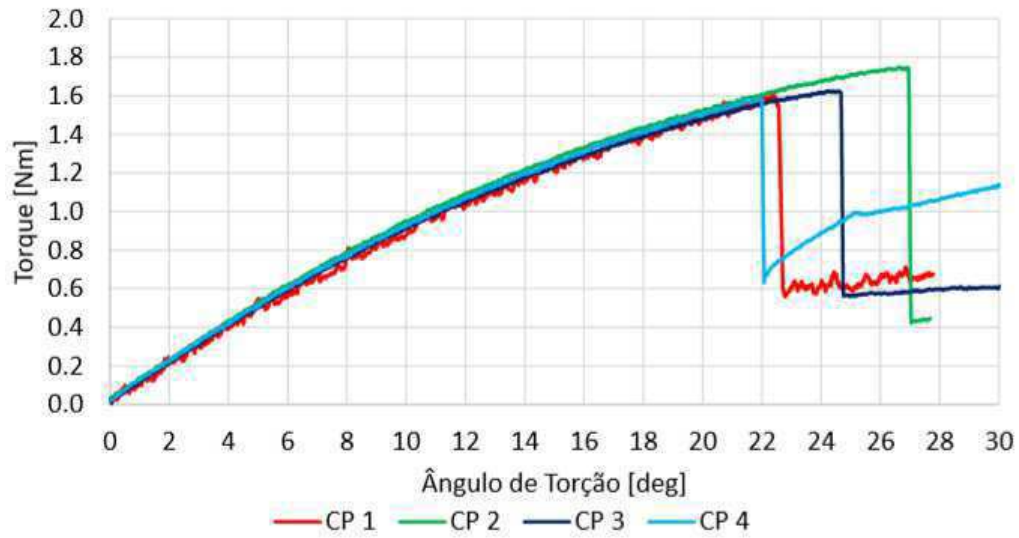
Fonte: Autor, 2019.

norma indica que seja abaixo de 4 minutos. Os resultados do ensaio estão apresentados na Figura 22.

Percebe-se que para ângulos pequenos há uma tendência linear de reposta à torção do material. Dessa forma, considerando até 8 graus de torção, foi traçado uma reta de tendência para cada CP pelo método dos mínimos quadrados. Obtendo-se os coeficientes angular e de determinação de cada reta, apresentados na Tabela 4.

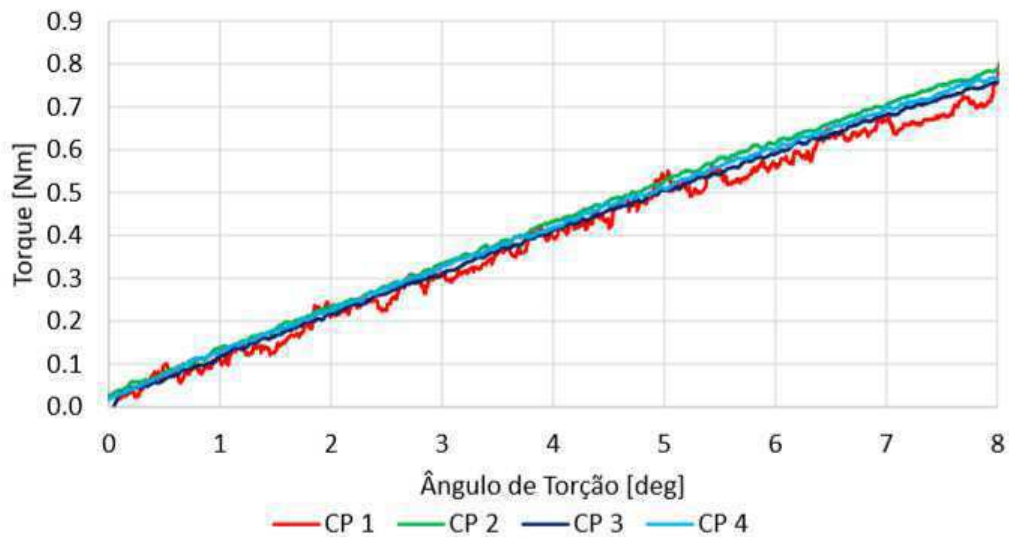


Figura 22 – Dados do Ensaio de Torção nas Barras de Carbono



Fonte: Autor, 2019.

Figura 23 – Dados do Ensaio de Torção nas Barras de Carbono (de 0° a 8°)



Fonte: Autor, 2019.

Devido à ocorrência de pequenos *offsets* no início da aplicação da carga até a sua estabilização, a norma indica que não se faz necessário que a curva de tendência passe por zero (origem do sistema). Assim sendo, conforme a mesma indica, a rigidez torcional pode ser determinada pela Equação (11.2), ou seja, o próprio coeficiente angular da reta.

$$GJ_{eq} = \frac{\Delta T}{(\Delta\theta/L)}. \quad (11.2)$$

Tabela 4 – Resultados do Ensaio de Torção nas Barras de Carbono

CP	$\Delta T/\Delta\theta$ [Nmm/deg]	$R^2$	$F_{rup}$ [N]	$GJ_{eq}$ [Nmm <sup>2</sup> ]
1	90,11	0,9916	1613,5	671187,4
2	97,96	0,9993	1746,0	738069,3
3	93,58	0,9989	1623,9	708791,6
4	91,81	0,9987	1585,9	695903,2
<b>Média</b>				703487,9
<b>Desvio Padrão</b>				27838,0

### 11.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA: ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA

Inicialmente, as propriedades elásticas adotadas para a barra de carbono são as apresentadas na Tabela 1. Realizou-se uma iteração manual, fazendo pequenos ajustes nestas propriedades, buscando minimizar a diferença de rigidez flexural e rigidez torcional obtidos da simulação com os valores reais. Dessa forma, obteve-se as propriedades elásticas finais das barras de carbono, Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades Finais da Barra de Carbono

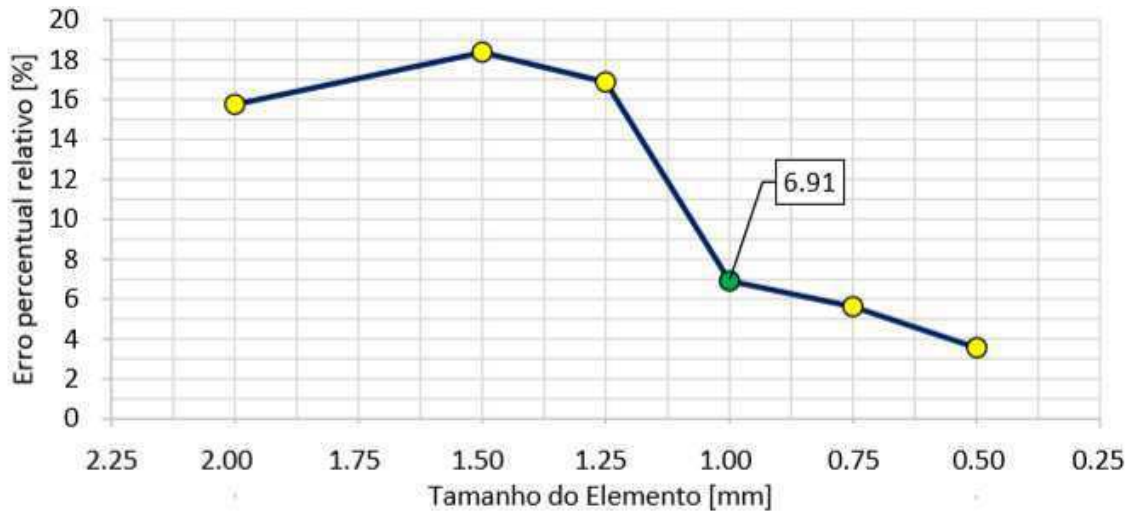
$E_1$ [MPa]	$E_2$ [MPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$G_{12}$ [MPa]	$G_{23}$ [MPa]
138000	9000	0,21	0,46	4700	3000

O modelo em elementos finitos foi criado pelo software Altair Hyperworks<sup>®</sup>, utilizando o solver Optistruct, o qual serve para solucionar problemas estruturais modernos, lineares e não lineares, em carregamentos estáticos, dinâmicos e térmicos. Por meio da análise linear estática tem-se o campo de deslocamentos, tensões e deformações. Portanto, para esta análise, supõem-se que os materiais apresentam comportamento linear elástico e considera-se pequenos deslocamentos.

O elemento hexaédrico trilinear de oito nós foi utilizado para a análise. No estudo de caso 3, serão utilizados os mesmos parâmetros do modelamento das barras de carbono. Entretanto, como a versão do software utilizada foi a estudantil, existe uma limitação da quantidade de nós e elementos para a simulação. Dessa forma, fica limitado um uso excessivo da quantidade de nós. Por isso utilizou-se a função de interpolação de primeira ordem.

### 11.3.1 Estudo de Convergência de Malha

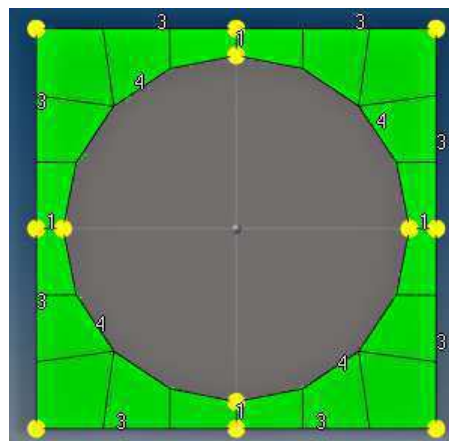
Figura 24 – Convergência de Malha



Fonte: Autor, 2019.

Elaborou-se um estudo de convergência para a verificação da qualidade da malha, onde foi avaliado o  $E_f$  entre cada tamanho de elemento. Para o estudo, considerou-se um diâmetro interno de 5 mm e aresta de 6mm da barra. A Figura 24 apresenta a convergência da malha. Devido ao fato que um tamanho de elemento menor que 1mm inviabilizaria as análises futuras, pois ficaria limitado a quantidade de nós disponíveis para a versão estudantil do software Altair Hyperworks®, adotou-se um tamanho de 1mm para as barras de carbono, onde teve-se uma erro menor que 7%. A malha 2D adotada pode ser vista na Figura 25.

Figura 25 – Qualidade da Malha

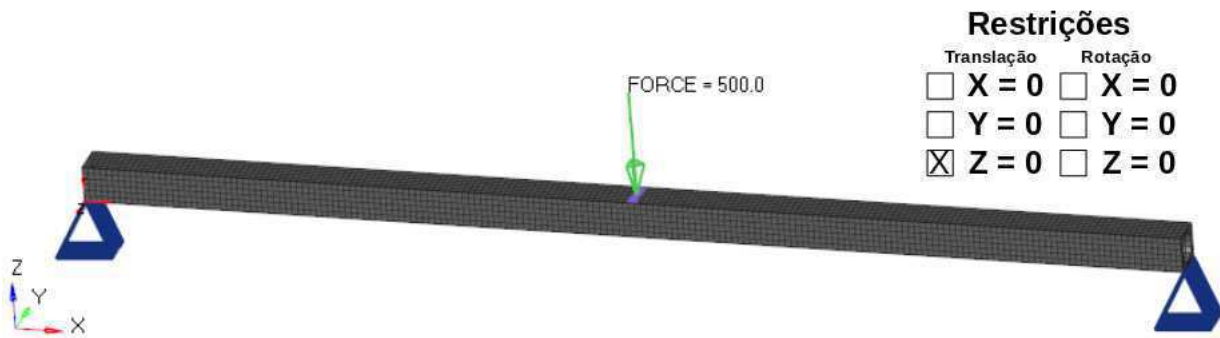


Fonte: Autor, 2019.

### 11.3.2 Ensaio de Flexão

As condições de contorno adotadas para o modelo estão ilustradas na Figura 26. Os ícones em azul representam os nós que tiveram o seu deslocamento restringido na direção Z. As linhas (estão sobrepostas) são elementos rígidos conectados aos seus nós próximos visando distribuir o carregamento uniformemente, evitando uma concentração de tensão na aplicação da carga.

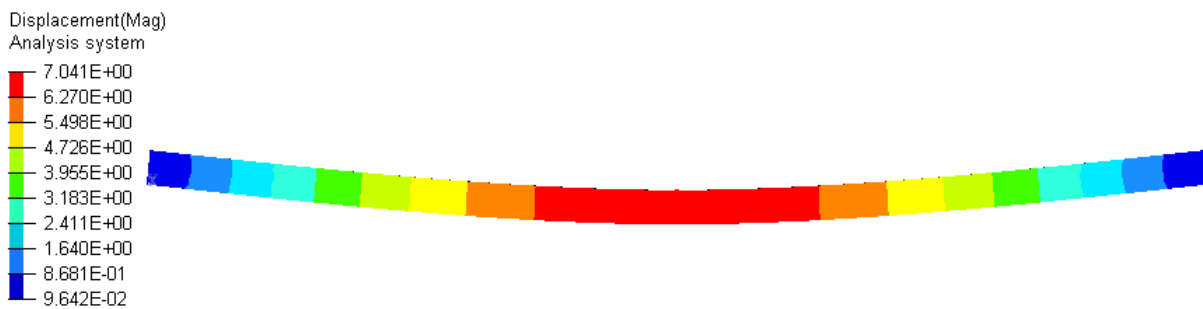
Figura 26 – Modelo em Elementos Finitos do Ensaio de Flexão



Fonte: Autor, 2019.

A Figura 27 apresenta o campo de deslocamentos obtidos da simulação.

Figura 27 – Campo de Deslocamentos da Simulação do Ensaio de Flexão



Fonte: Autor, 2019.

Para a simulação, adotando a mesma Equação (11.1) do ensaio de flexão para a obtenção do módulo de elasticidade flexural, tem-se o seu valor calculado apresentado na Tabela 20. Verifica-se que o  $E_f$  da simulação está dentro do desvio padrão do  $E_f$  ensaiado. Além disso, também foi comparado com o valor médio ensaiado, apresentado na mesma tabela.

Tabela 6 – Avaliação dos Resultados

$E_f$ Ensaio [MPa]	$E_f$ Simulação [MPa]	Erro Relativo [%]
$130015 \pm 847$	129369	0,50

### 11.3.3 Ensaio de Torção

Na Figura 28 estão ilustradas as condições de contorno adotadas no modelo. Os ícones em preto representam os nós que tiveram os seus deslocamentos rotacionais e translacionais restringidos em todas as direções. As linhas em azul são elementos rígidos conectados aos seus nós próximos visando distribuir o carregamento uniformemente, evitando uma concentração de tensão na aplicação da carga de torção.

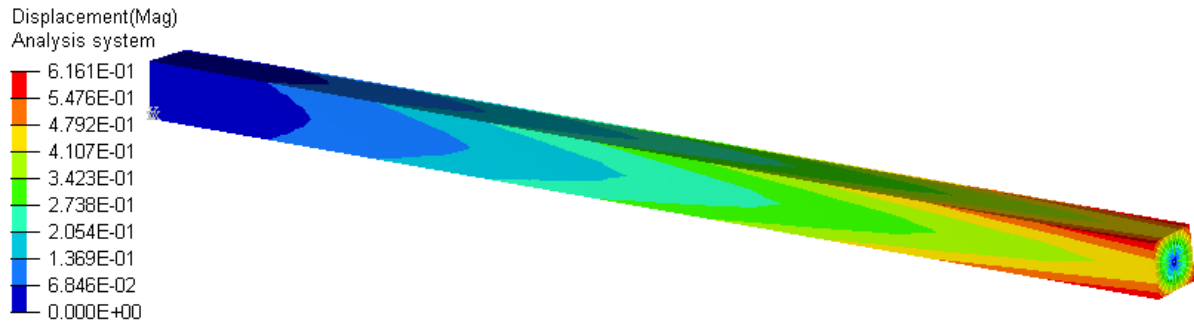
Figura 28 – Modelo em Elementos Finitos do Ensaio de Torção



Fonte: Autor, 2019.

A Figura 29 apresenta o campo de deslocamentos obtidos da simulação.

Figura 29 – Campo de Deslocamentos da Simulação do Ensaio de Torção



Fonte: Autor, 2019.

Pela Equação (11.2) do ensaio de torção, para a obtenção da rigidez torcional, tem-se o seu valor calculado apresentado na Tabela 7. Verifica-se que o  $GJ_{eq}$  da simulação está dentro do desvio padrão do  $GJ_{eq}$  ensaiado. Além disso, também foi comparado com o valor médio ensaiado, apresentado na mesma tabela.

Tabela 7 – Avaliação dos Resultados

$GJ_{eq}$ Ensaiado [ $Nmm^2$ ]	$GJ_{eq}$ Simulação [ $Nmm^2$ ]	Erro Relativo [%]
$703487,8 \pm 27838,0$	716253,4	1,81

## 12 ESTUDO DE CASO 2: COMPENSADO

O estudo visa obter as propriedades elásticas e de resistência do compensado por meio de ensaios mecânicos de tração e simulação numérica utilizando o software Altair Hyperworks<sup>®</sup>. As chapas de compensado avaliadas são constituídas de três lâminas, distribuídas conforme a Figura 30.

Figura 30 – Distribuição das lâminas do compensado



Fonte: Autor, 2019.

Tabela 8 – Dimensões de CP

Comprimento [mm]	Largura [mm]	Espessura [mm]
100,00	11,00	3,10

Vale ressaltar que os corpos de prova e os ensaios não foram realizados pelo autor, mas sim pela Equipe Albatroz Aerodesign, da Universidade do Estado de Santa Catarina. Por conta disso, alguns parâmetros do ensaio não são conhecidos. Os dados foram tratados pelo autor e apresentados no gráfico em forma de pontos devido à baixa sensibilidade do extensômetro. É apresentado também em seguida o gráfico com as retas interpoladas pelo método dos mínimos quadrados para cada CP.

A determinação das propriedades elásticas do compensado se deu através dos três ensaios de tração realizados em três direções: 0°, 90° e 45°, analisando as propriedades do laminado em si. Quando o autor refere-se à direção das fibras do laminado, está se referindo à direção da fibra da camada do núcleo, ou seja, da chapa central do laminado.

Por meio das Equações (5.1) e (5.2) é possível obter a relação tensão-deformação, aqui denominado  $E_{0^\circ}$ ,  $E_{90^\circ}$  e  $E_{45^\circ}$  conforme a direção da fibra interna à 0°, 90° e 45°, respectivamente. Assim, por meio de simulações dos ensaios, variando as propriedades de forma iterativa é possível obter as propriedades elásticas reais do laminado. As quais são:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$ .

Kretschmann (2010) cita diversos coeficientes de Poisson para a madeira. Em uma seção o autor apresenta nove tipos de madeira de pinheiro, com o coeficiente de Poisson variando entre 0,382 a 0,469. Sabe-se que o compensado utilizado neste trabalho é de pinheiro, então foi variado o coeficiente dentro da faixa apresentada.

## 12.1 ENSAIOS DE TRAÇÃO

Os ensaios foram realizados conforme está disposto na Figura 31.

Figura 31 – Ensaio do Compensado em Tração



Fonte: Autor, 2019.

A Figura 32 apresenta os corpos de provas (CP) para os ensaios à  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Figura 32 – CP com as Fibras Externas à  $0^\circ$  em (1) e à  $90^\circ$  em (2).

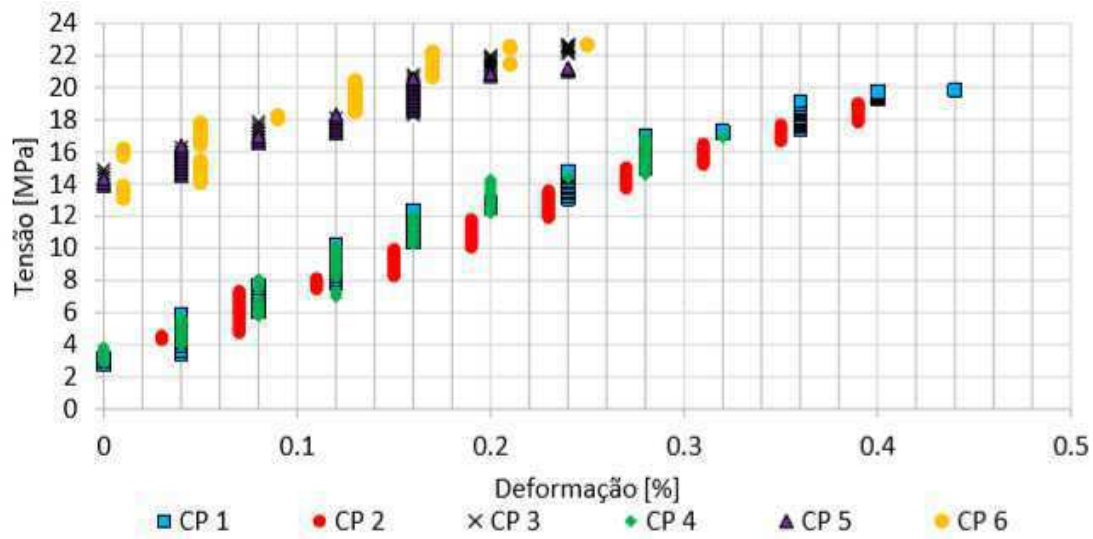


Fonte: Autor, 2019

### 12.1.1 Ensaio de Tração à 0°

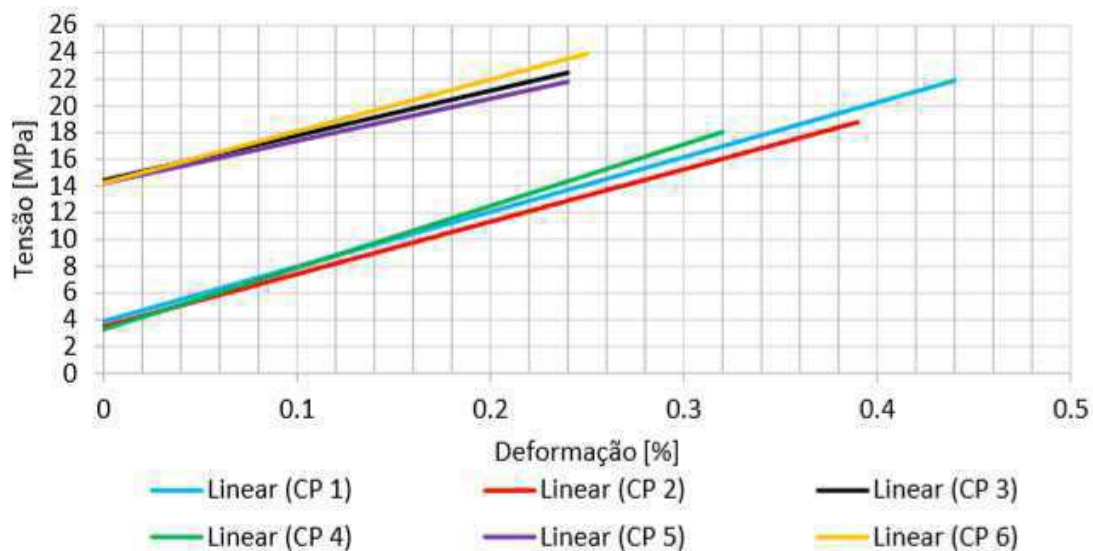
Neste teste, seis corpos de prova foram avaliados, sendo que em três deles não houve a aplicação de pré-carga. Os dados adquiridos estão apresentados na Figura 33 e as curvas interpoladas para cada ensaio na Figura 34.

Figura 33 – Dados do Ensaio de Tração à 0°



Fonte: Autor, 2019.

Figura 34 – Linhas de Tendência para o Ensaio de Tração à 0°



Fonte: Autor, 2019

A Tabela 9 apresenta os resultados, onde  $E_{0^\circ}$  é a relação tensão-deformação,  $R^2$  o coeficiente de determinação da reta de interpolação e  $\sigma_{rup}$  a tensão de ruptura do material.



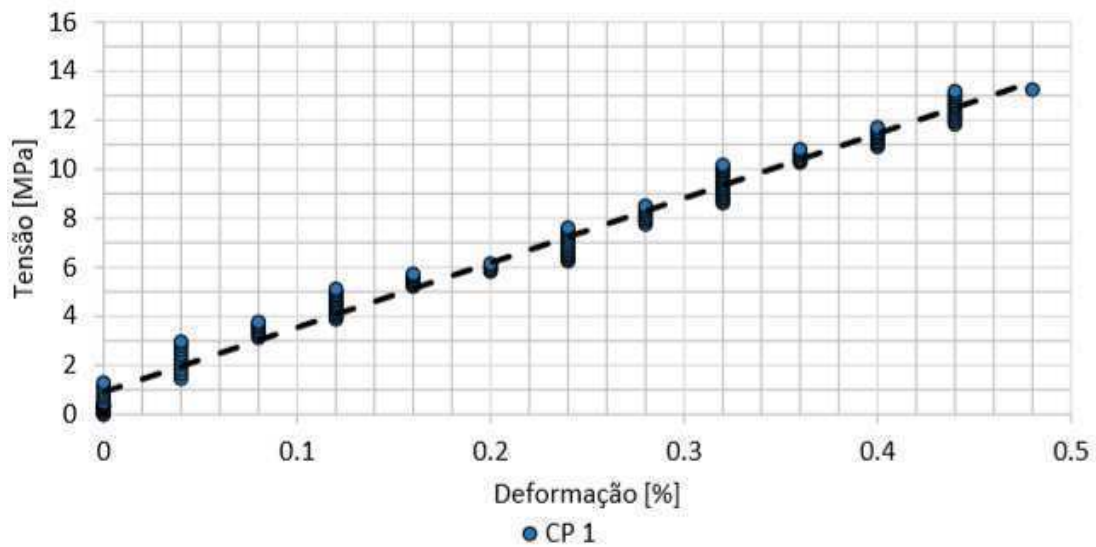
Tabela 9 – Resultados do Ensaio de Tração à 0°

CP	$E_{0^\circ}$ [MPa]	$R^2$	$\sigma_{rup}$ [MPa]
1	4095,0	0,9708	19,83
2	3919,0	0,9826	19,02
3	3355,0	0,9341	22,65
4	4615,0	0,9128	16,91
5	3164,0	0,9560	22,70
6	3868,0	0,9632	22,53
Média	3835,9		20,61
Desvio Padrão	522,6		2,41

### 12.1.2 Ensaio de Tração à 90°

No ensaio de tração à 90° foi possível ensaiar apenas um único CP. Dessa forma, não foi possível verificar a repetibilidade dos resultados. Os dados adquiridos no ensaio estão apresentados na Figura 35.

Figura 35 – Dados do Ensaio de Tração à 90°



Fonte: Autor, 2019.

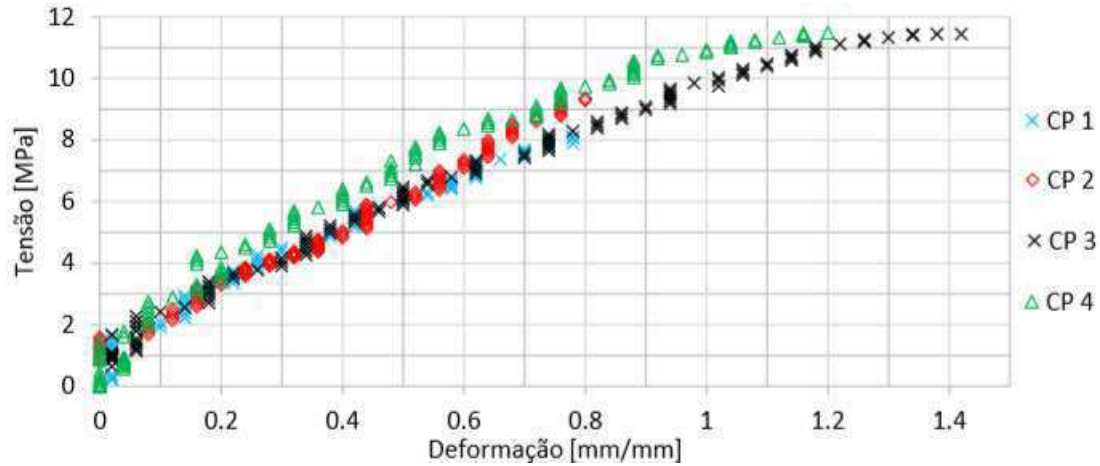
Tabela 10 – Resultados do Ensaio de Tração à 90°

CP	$E_{90^\circ}$ [MPa]	$R^2$	$\sigma_{rup}$ [MPa]
1	2635,0	0,9858	13,25

### 12.1.3 Ensaio de Tração à 45°

Com as fibras orientadas à 45° foram ensaiados quatro corpos de prova, cujo resultados do ensaio estão apresentados na Figura 36.

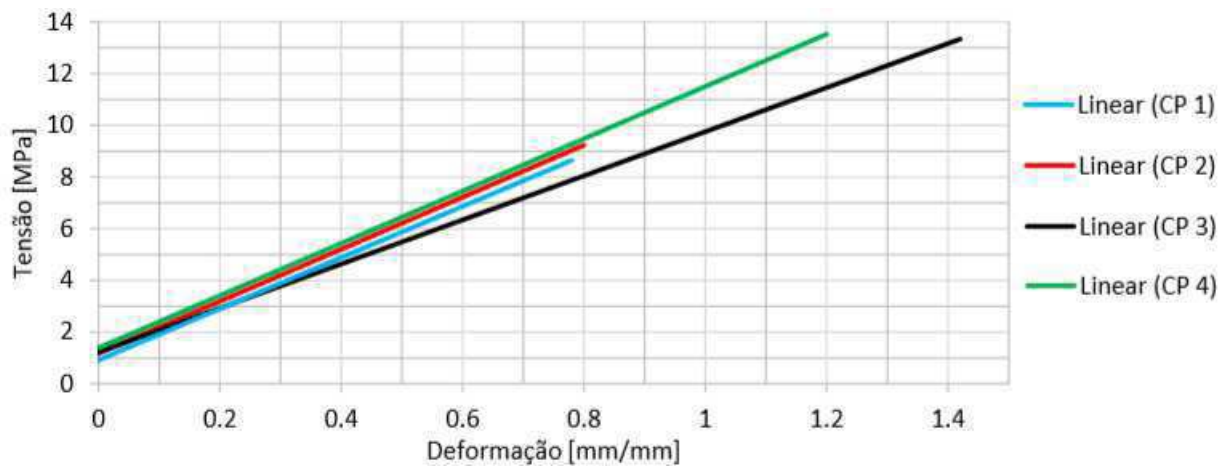
Figura 36 – Dados do Ensaio de Tração à 45°



Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 37 tem-se as curvas de tendência para cada CP e na Tabela 11 tem-se um resumo geral do resultados.

Figura 37 – Linhas de Tendência para o Ensaio de Tração à 45°



Fonte: Autor, 2019

Tabela 11 – Resultados do Ensaio de Tração à 45°

CP	$E_{45^\circ}$ [MPa]	$R^2$	$\sigma_{rup45^\circ}$ [MPa]
1	990,0	0,9789	8,12
2	1001,0	0,9936	5,83
3	853,0	0,9788	8,69
4	1011,0	0,9548	9,74
Média	965,1		8,10
Desvio Padrão	75,4		1,65

## 12.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA: ANÁLISE LINEAR ESTÁTICA

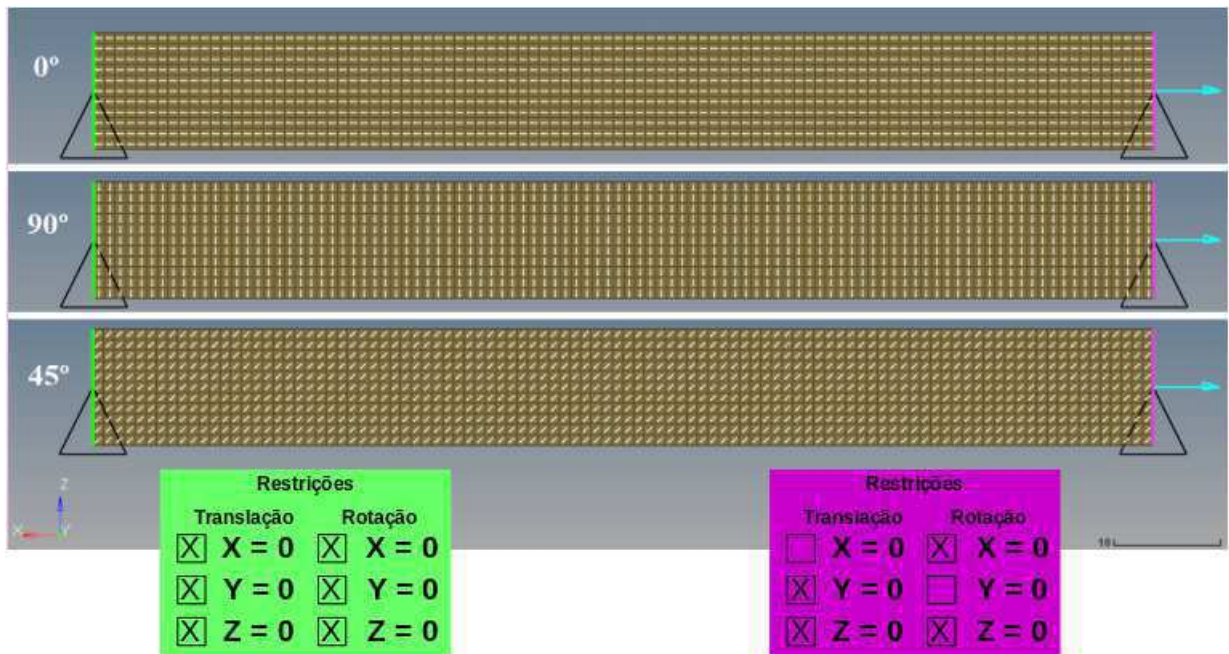
Inicialmente, foram adotados valores de módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$  próximos aos valores  $E_{0^\circ}$  e  $E_{90^\circ}$  obtidos dos ensaios, respectivamente. Por meio de um processo iterativo, variando todas as quatro propriedades e buscando minimizar a diferença de rigidez do entre os ensaios com as simulações, foram obtidas as propriedades elásticas finais do compensado, Tabela 12.

Tabela 12 – Propriedades Finais do Compensado

$E_1$ [MPa]	$E_2$ [MPa]	$\nu_{12}$	$G_{12}$ [MPa]
3600	2700	0,47	250

O modelo em elementos finitos foi criado pelo software Altair Hyperworks®, utilizando o solver Optistruct. A Figura 38 apresenta o modelo, o qual foi o mesmo para os três ensaios de tração, sendo alterado apenas a orientação das propriedades. Foram feitas algumas considerações para esta análise linear estática, supondo que o material apresenta comportamento linear elástico e considerando pequenos deslocamentos. Assim, foi possível obter o campo de deslocamentos, tensões e deformações. As linhas em verde e rosa são elementos rígidos. A linha em verde une os nós que possuem o seu deslocamento e sua rotação restringidos em todos os seus graus de liberdade. A linha em rosa une os nós que apenas possuem os graus de liberdade de translação na direção X e rotação em Y livres.

Figura 38 – Modelo em Elementos Finitos do Ensaio de Tração



Fonte: Autor, 2019.

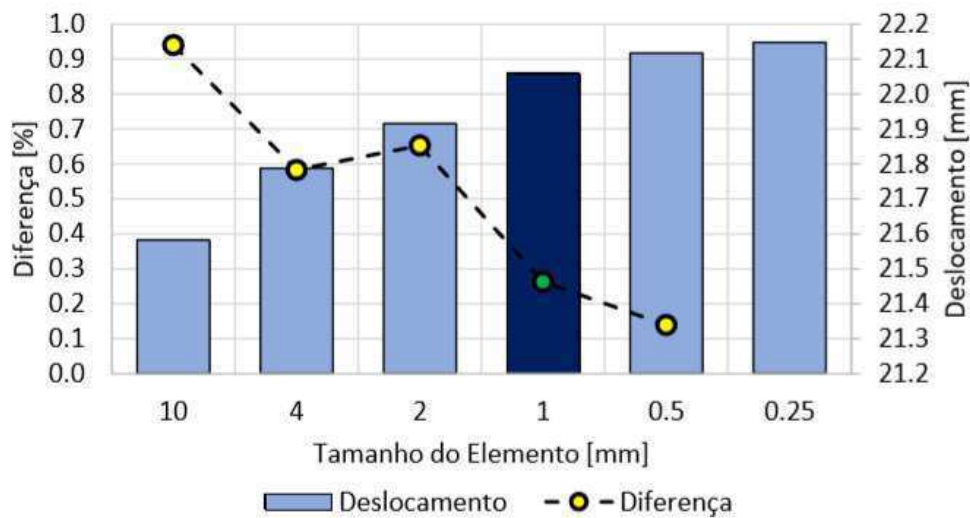
Foi escolhido a propriedade PCOMPP para o elemento, que é baseada na teoria de placa e é utilizada em laminados. Esta propriedade foi eleita ao invés de PSHELL, pois

permite uma fácil manipulação da orientação das propriedades mecânicas. Elementos 3D resultaria em muitos nós, o que impossibilitaria a análise e, além disso, para as análises posteriores será necessário trabalhar com contato e o elemento de barra não representaria bem o contato real.

### 12.2.1 Estudo de Convergência de Malha

Para verificar a qualidade da malha, realizou-se um estudo de convergência, Figura 39. O gráfico de barras, "Deslocamento", representa o deslocamento obtido da simulação do ensaio de tração com as fibras orientadas à 45°. Já a curva "Diferença" é a diferença dos deslocamentos entre aquele tamanho de elemento e o próximo.

Figura 39 – Estudo de Convergência de Malha



Fonte: Autor, 2019.

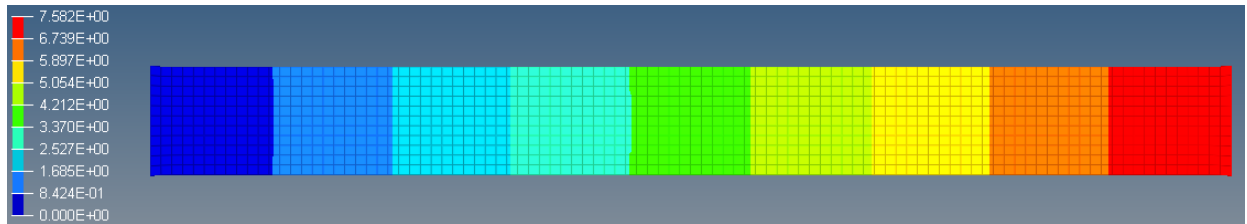
Percebe-se que, como a malha é simples, teve-se uma influência pequena do tamanho de elemento na qualidade do resultado. Assim, adotou-se um tamanho de elemento igual ao utilizado nas barras, de 1mm, pois posteriormente os materiais serão acoplados. Dessa forma, fornecerá uma região demarcada corretamente para a realização do contato.

### 12.2.2 Campos de Deslocamento

As Figuras 40, 41 e 42 apresentam o campo de deslocamentos para cada uma das simulações.

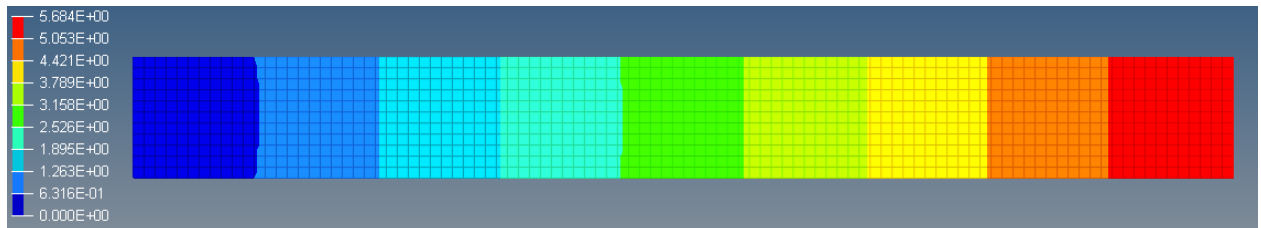
Na Tabela 13, uma comparação dos valores de rigidez dos ensaios reais com os da simulação. Para os valores  $E_{0^\circ}$  e  $E_{45^\circ}$  do Ensaio, tem-se também o desvio padrão. Verificase que o valor obtido na simulação fica dentro da faixa do desvio padrão. Além disso, foi calculado a diferença em porcentagem entre a média do ensaio e do valor simulado.

Figura 40 – Campo de Deslocamentos para o Ensaio de Tração à 0°



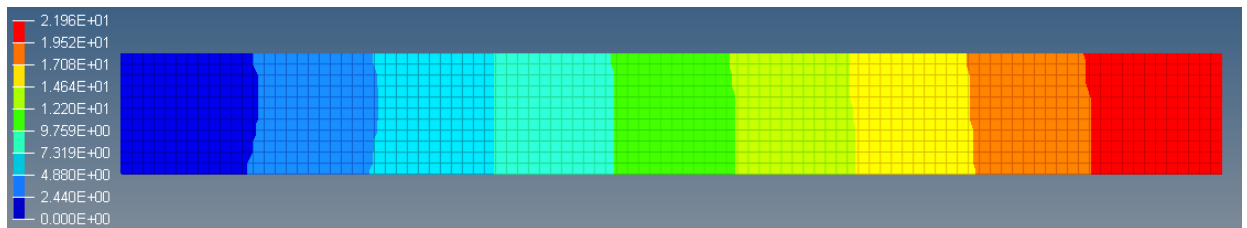
Fonte: Autor, 2019.

Figura 41 – Campo de Deslocamentos para o Ensaio de Tração à 90°



Fonte: Autor, 2019.

Figura 42 – Campo de Deslocamentos para o Ensaio de Tração à 45°



Fonte: Autor, 2019.

Tabela 13 – Avaliação dos Resultados

	<i>Ensaio</i> [MPa]	Simulação [MPa]	Erro Relativo [%]
$E_{0^\circ}$	$3835,9 \pm 522,6$	3611,5	2,75
$E_{90^\circ}$	2635,0	2707,6	5,85
$E_{45^\circ}$	$965,1 \pm 75,4$	934,9	3,13

### 12.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA: CRITÉRIO DE FALHA

A determinação das propriedades de resistência do compensado é de suma importância para o dimensionamento estrutural da longarina. Como não tem-se informação do comportamento do material quanto à compressão, supõe-se que a resistência à tração e à compressão são iguais ( $X_t = X_c$  e  $Y_t = Y_c$ ). Além disso, considerou-se ainda que as tensões agem apenas num plano e, como trata-se de um material ortotrópico optou-se por utilizar o critério de falha de Tsai-Hill, Equação (8.2).

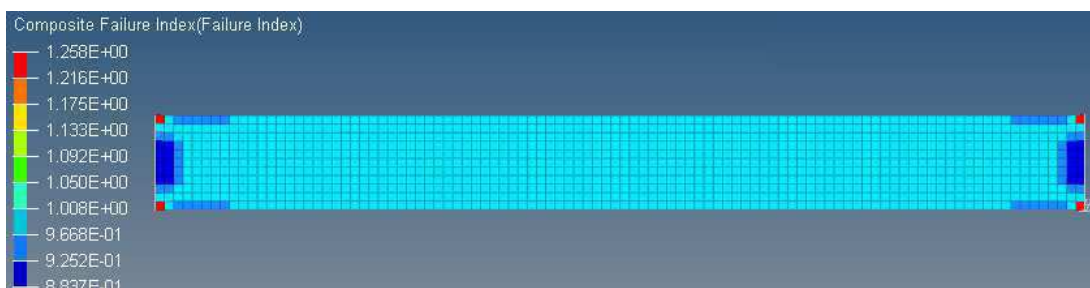
Para chegar nos valores de resistência, foi realizado uma iteração, visando obter o índice de falha unitário para cada simulação, através da variação destas propriedades.

As Figuras 43, 44 e 45 apresentam o mapa dos índices do critério de falha. Lembrando que o material é considerado seguro quando este valor é menor que um e, quando se aproxima do valor unitário, mais próximo se encontra da falha. As forças aplicadas em cada simulação estão apresentadas na Tabela 14, onde foram adotados os valores médios de cada ensaio.

Tabela 14 – Forças de Ruptura

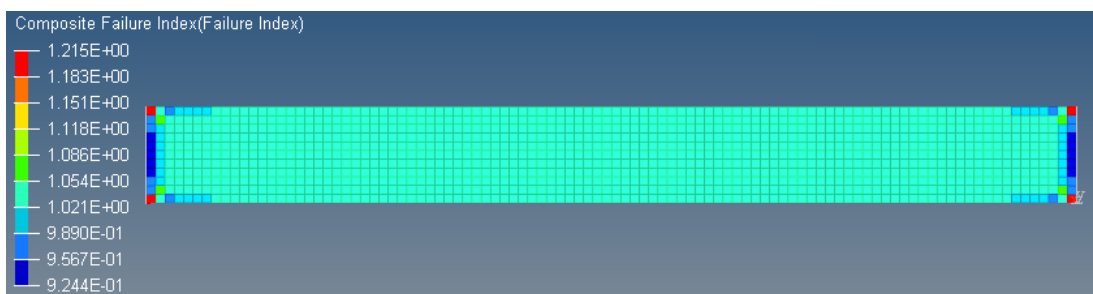
$F_{0^\circ}$ [N]	$F_{90^\circ}$ [N]	$F_{45^\circ}$ [N]
7279	4518	2866

Figura 43 – Campo dos índices do critério de falha para o ensaio de tração à  $0^\circ$



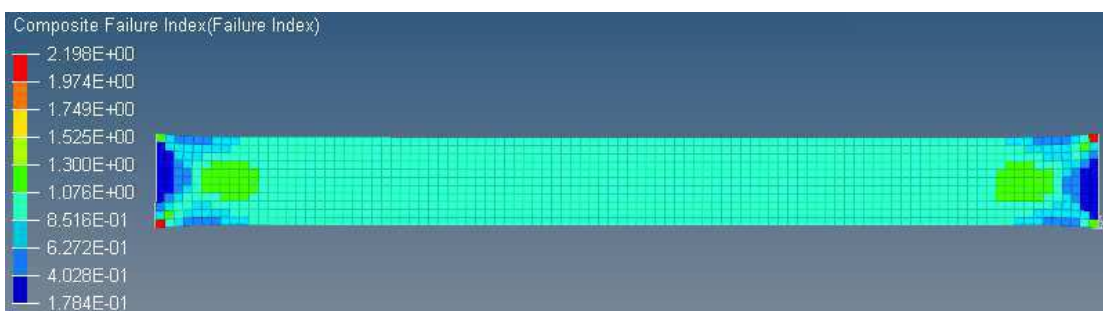
Fonte: Autor, 2019

Figura 44 – Campo dos índices do critério de falha para o ensaio de tração à  $90^\circ$



Fonte: Autor, 2019.

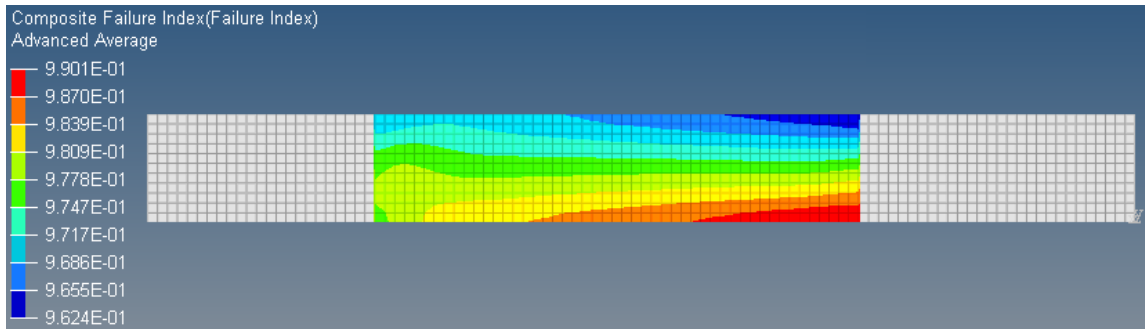
Figura 45 – Campo dos índices do critério de falha para o ensaio de tração à  $45^\circ$



Fonte: Autor, 2019.

Observa-se que houve concentração de tensão nas bordas do modelo. Como no ensaio real há uma transição suave do CP, não existe concentração de tensão, tem-se então que é um problema apenas do modelo devido as bordas quadradas. Porém como a tensão de tração deve se distribuir igualmente ao longo de todo o CP, foi então desejado adquirir o índice de falha numa região não influenciada pelas bordas, exemplo, Figura 46. Assim, os índices foram obtidos dos elementos no centro do CP.

Figura 46 – Campo dos índices de falha para tração à 45°. (Elementos da região central)



Fonte: Autor, 2019.

Sendo então, as propriedades de resistência finais apresentadas na Tabela 15.

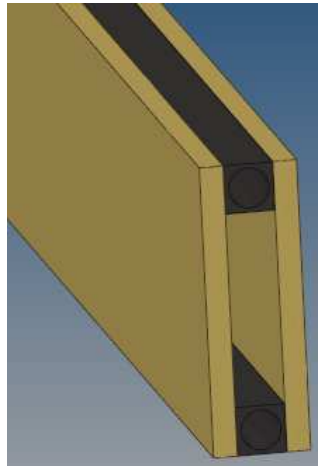
Tabela 15 – Forças de Ruptura

$X_t$ [MPa]	$X_c$ [MPa]	$Y_t$ [MPa]	$Y_c$ [MPa]	S [MPa]
215	215	130	130	45

### 13 ESTUDO DE CASO 3: VIGA EM CAIXÃO

Este estudo de caso visa validar as propriedades mecânicas das barras de carbono e do compensado em conjunto, por meio de uma montagem dos materiais formando uma estrutura em viga caixão, conforme a Figura 47. Essa estrutura foi ensaiada em torção e flexão e suas rigidezes foram comparadas com simulações numéricas dos ensaios, realizadas na versão estudantil do software Altair HyperWorks®.

Figura 47 – Estrutura - Viga em Caixão

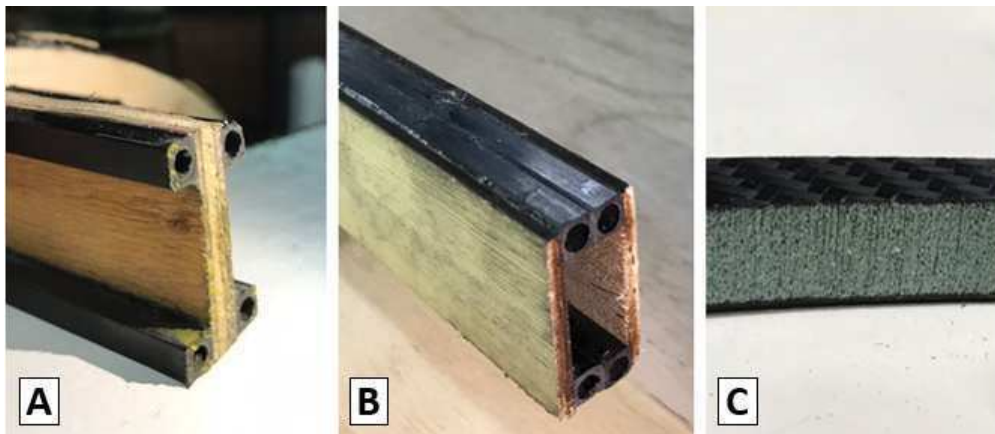


Fonte: Autor, 2019.

Vale ressaltar que os corpos de prova e os ensaios foram realizados pela Equipe Albatroz Aerodesign, da Universidade do Estado de Santa Catarina. Porém, o tratamento dos dados e as simulações foram realizados pelo autor. Por questões de custo, a equipe só decidiu por elaborar um único corpo de prova para cada ensaio, o que inviabiliza a avaliação da repetibilidade dos resultados.

Este conceito de estrutura veio de um aprimoramento, realizado no projeto Albatroz em 2018, a partir de uma avaliação do autor, quando era membro da equipe em 2017, onde ficou responsável pelo dimensionamento da asa da longarina da aeronave no projeto. As configurações de estrutura avaliadas em 2017 estão apresentadas na Figura 48.

Figura 48 – Conceitos de Estruturas para a Longarina



Fonte: Autor, 2019.



- A. Viga em I: constituída de madeirite (6mm) e barras de fibra de carbono;
- B. Viga em Caixão: constituída de compensado (3mm) e barras de fibra de carbono;
- C. Estrutura-Sanduíche: constituída de mantas de fibra de carbono, Divinycell e resina epóxi.

A Viga em Caixão tinha sido a configuração que mais se destacou, por ter a maior rigidez torcional, além de ter custo e massa menores em relação à configuração C. Para o projeto em 2018, as cargas aerodinâmicas eram menores, o que possibilitou à Equipe Albatroz utilizar o conceito da Figura 47.

### 13.1 ENSAIO DE FLEXÃO

Através do ensaio de flexão, Figura 49, foi possível determinar o módulo de elasticidade flexural e da tensão de ruptura da estrutura.

#### **Parâmetros do Ensaio:**

- Velocidade do Ensaio = 2mm/min;
- Relação do comprimento pela altura do CP ( $L/H$ ) = 13,89;
- Distância entre os apoios  $L = 500$ mm.

Figura 49 – Ensaio de Flexão da Viga Caixão



Fonte: Autor, 2019.

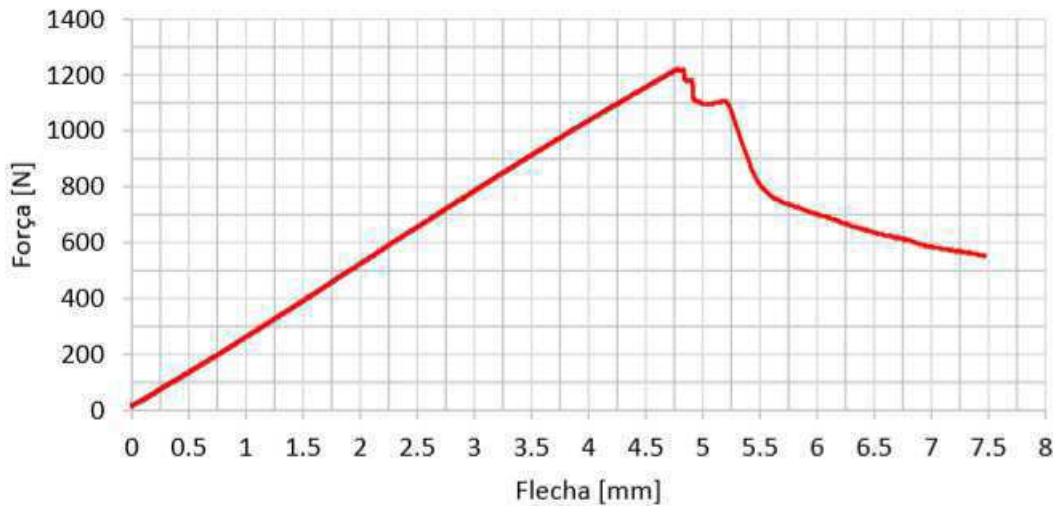
As dimensões do corpo de prova estão dispostas na Tabela 16, onde  $e_{comp}$  designa a espessura do compensado,  $d_{i,carb}$  o diâmetro interno da barra de carbono e  $a_{carb}$  a dimensão da aresta da barra de carbono.

Tabela 16 – Dimensões do CP

$e_{comp}$ [mm]	$d_{i,carb}$ [mm]	$a_{carb}$ [mm]	Altura [mm]
3,10	4,80	6,00	36,00

Na Figura 50 têm-se os dados adquiridos no ensaio de flexão. Nota-se que o material apresentou um comportamento linear até a sua ruptura. Para a obtenção da inclinação da curva na região linear, obteve-se uma reta interpolada pelo método dos mínimos quadrados.

Figura 50 – Dados do Ensaio de Flexão na Viga em Caixão



Fonte: Autor, 2019.

Por meio da Equação (5.4) é possível obter o Módulo de Young para flexão ( $E_{feq}$ ), que neste caso representa o módulo de elasticidade "equivalente", visto que o material é um compósito. Para isso utilizou-se o momento de inércia total da seção e não de cada material isolado. O coeficiente angular da reta interpolada pelo método dos mínimos quadrados, juntamente com seu coeficiente de determinação, também estão apresentados na Tabela 17.

Tabela 17 – Resultados do Ensaio de Flexão na Viga em Caixão

$\Delta P/\Delta v$ [N/mm]	$R^2$	$I_{yy}$ [mm <sup>4</sup> ]	$F_{rup}$ [N]	$E_{feq}$ [MPa]
255,97	0,9998	32326,4766	1220,13	20620,51

## 13.2 ENSAIO DE TORÇÃO

O ensaio de torção, Figura 51, proporcionou a tensão de ruptura da estrutura e a determinação da sua rigidez torcional.

Figura 51 – Ensaio de Torção da Viga Caixaão



Fonte: Autor, 2019.

A máquina disponível para os ensaios possui castanhas que não permitem a fixação de um CP retangular. Por conta disso, nas extremidades do CP foi elaborado uma geometria hexagonal, constituída de compensado e resina epóxi, conforme a Figura 52. Assim, o comprimento efetivo considerado foi apenas da parte reta, que é de 300,00mm.

Figura 52 – CP para Ensaio de Torção da Viga Caixaão



Fonte: Autor, 2019.

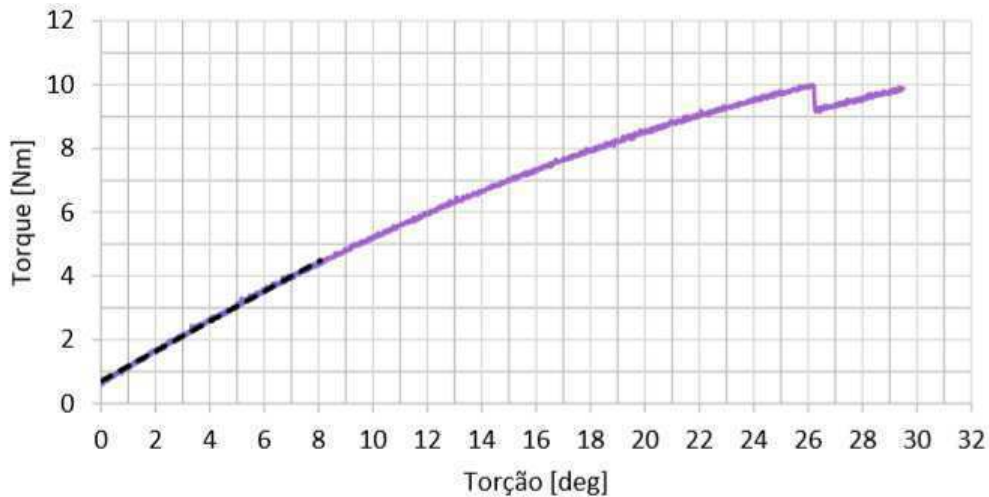
As dimensões do corpo de prova estão dispostas na Tabela 18, onde  $e_{comp}$  designa a espessura do compensado,  $d_{i,carb}$  o diâmetro interno da barra de carbono e  $a_{carb}$  a dimensão da aresta da barra de carbono.

Tabela 18 – Dimensões do CP

$e_{comp}$ [mm]	$d_{i,carb}$ [mm]	$a_{carb}$ [mm]	Altura [mm]
3,00	5,00	6,00	36,00

Na Figura 53 têm-se os dados adquiridos no ensaio de torção. Nota-se que o material apresentou um comportamento linear até cerca de  $8^\circ$ , então a região linear considerada foi de 0 à  $8^\circ$ . Para a obtenção da inclinação da curva na região linear, obteve-se uma reta interpolada pelo método dos mínimos quadrados, a qual está representada tracejada.

Figura 53 – Dados do Ensaio de Torção da Viga Caixão



Fonte: Autor, 2019.

Os resultados do ensaio estão dispostos na Tabela 19. A rigidez torcional foi obtida por meio da Equação (11.2).

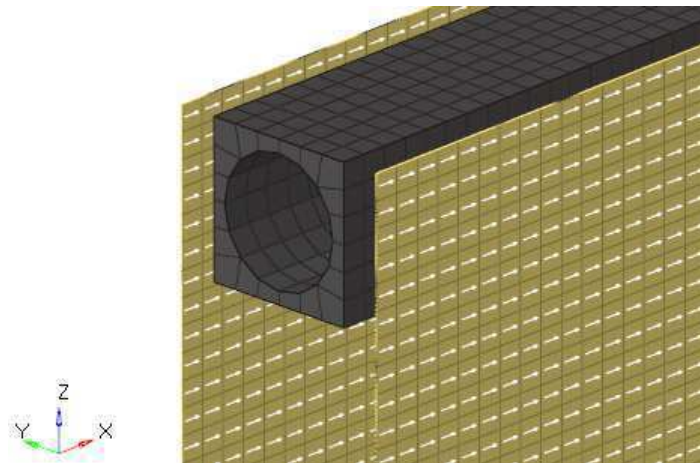
Tabela 19 – Resultados do Ensaio de Torção na Viga Caixão

$\Delta T/\Delta\theta$ [Nmm/deg]	$R^2$	$T_{rup}$ [Nmm]	$GJ_{eq}$ [Nmm <sup>2</sup> ]
469,60	0,9985	9999,74	8071829,42

### 13.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

O modelo em elementos finitos foi criado pelo software Altair Hyperworks<sup>®</sup>, utilizando o solver Optistruct. Supõem-se para esta análise que os materiais apresentam comportamento linear elástico e os deslocamentos são pequenos. Para ambos os materiais, as propriedades e tamanho de elemento utilizados foram os mesmos dos estudos de caso 1 e 2. A malha dos componentes pode ser verificada na Figura 54.

Figura 54 – Malha

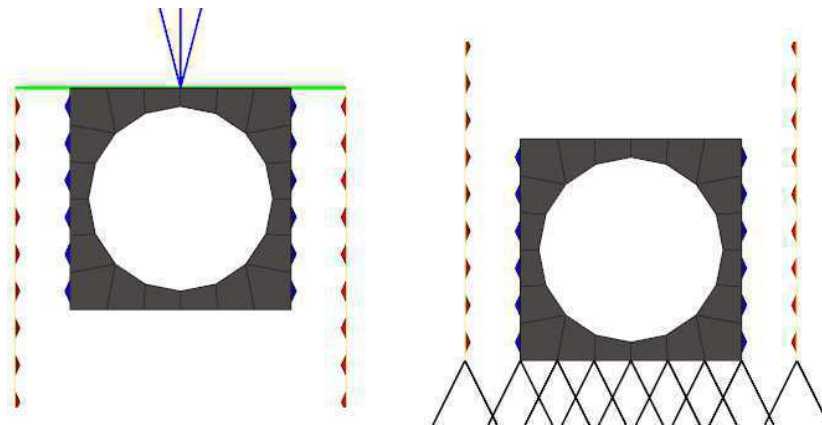


Fonte: Autor, 2019.

Vale ressaltar que os três estudos de caso (1, 2 e 3) ocorreram de forma simultânea. Ou seja, as propriedades dos materiais foram ajustadas visando minimizar a diferença entre o ensaio real e o simulado em todos os casos.

O contato utilizado foi o *Master-Slave*, do tipo *tie*, ou seja, colado. Foi considerado a separação de 1,5mm entre as barras e a superfície média do compensado. Como sugere a Altair<sup>®</sup>, a superfície mais rígida deve ser definida como superfície *Master* (pirâmides em azul), como pode ser visto na Figura 55.

Figura 55 – Parte Superior da Viga à Esquerda e Inferior à Direita

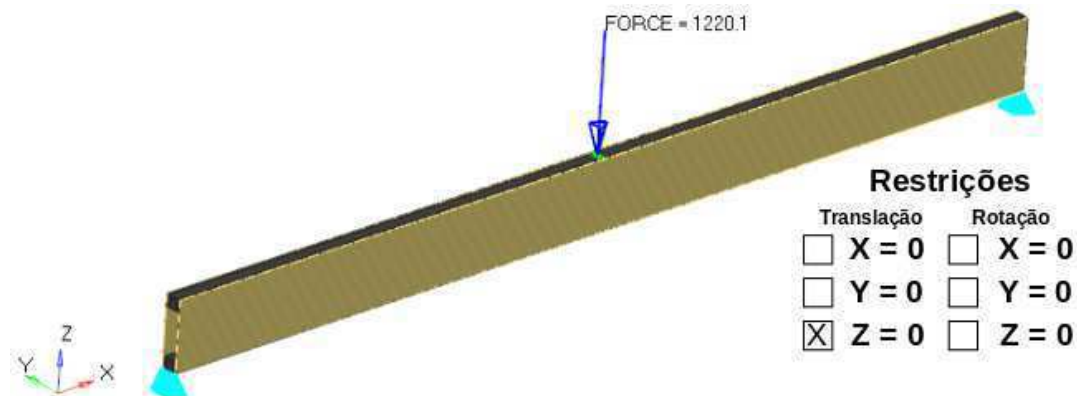


Fonte: Autor, 2019.

### 13.3.1 Flexão

A reprodução do modelo numérico, em elementos finitos, do ensaio de flexão da viga em caixão está apresentado na Figura 56, cuja força aplicada foi a mesma que rompeu a estrutura no ensaio.

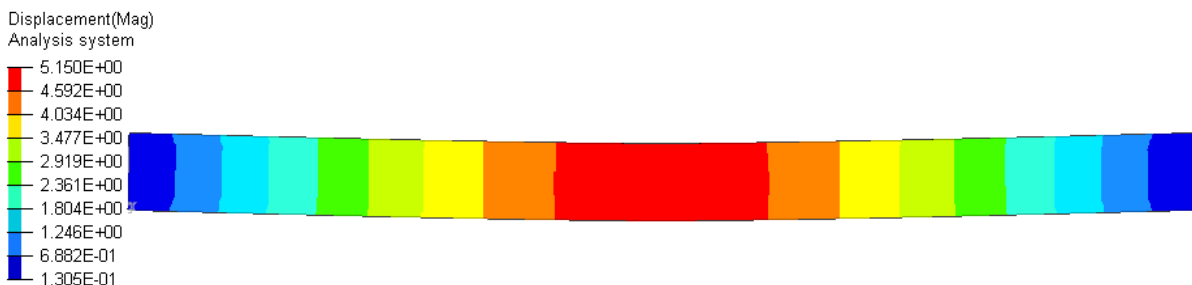
Figura 56 – Simulação Numérica do Ensaio de Flexão



Fonte: Autor, 2019.

Os ícones em azul claro representam os nós que tiveram o seu deslocamento restringido na direção Z. A linha em verde é um elemento rígido, unindo os nós, para que não se tenha concentração de tensões na aplicação da carga e também pois representa a condição real do ensaio. Tem-se, o campo de deslocamentos, Figura 57, e o campo de tensões na direção longitudinal, Figura 58.

Figura 57 – Simulação Numérica do Ensaio de Flexão - Campo de Deslocamentos



Fonte: Autor, 2019.

Além disso, é apresentado o índice de falha do das chapas de compensado, Figura 59. Foi evitado selecionar os elementos onde há concentração de tensões devido malha.

Avaliando a falha estrutural, da simulação, as chapas de compensado ficaram com um fator de segurança  $FS=11,42$ . Verificando a tensão na barra, Figura 58, a tensão foi de aproximadamente 400 MPa. Do **Estudo de Caso 1**, dos cinco corpos de prova avaliados, a menor tensão de ruptura foi de 498 MPa. Como não foi feito nenhuma estudo da falha na cola, adotou-se a hipótese de que esta ocorreu nas barras. Lembrando que qualquer pequena fragilização durante a construção pode resultar numa redução da resistência da estrutura. Dessa forma, será considerado a tensão máxima de ruptura das barras de  $X_t=400\text{MPa}$ .

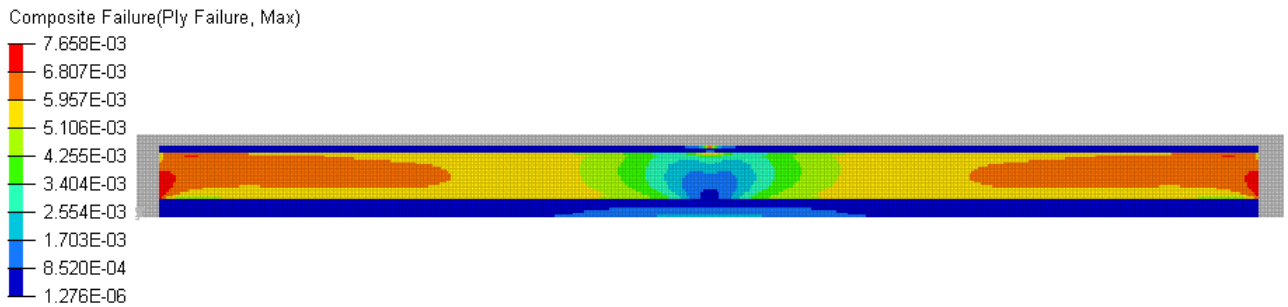
Comparando o módulo de elasticidade flexural do ensaio com a simulação, obteve-se uma diferença de 0,49%, Tabela 20.

Figura 58 – Simulação Numérica do Ensaio de Flexão - Tensão na Direção X



Fonte: Autor, 2019.

Figura 59 – Simulação Numérica do Ensaio de Flexão - Índice de Falha

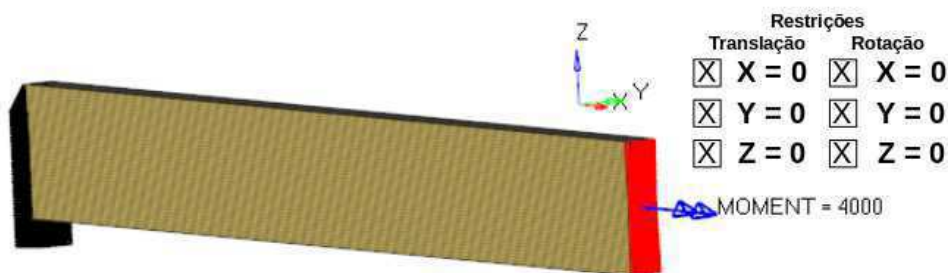


Fonte: Autor, 2019.

### 13.3.2 Torção

Reproduziu-se também o ensaio de torção, com um modelo em elementos finitos gerado pelo software Altair Hyperworks®, Figura 56.

Figura 60 – Simulação Numérica do Ensaio de Torção



Fonte: Autor, 2019.

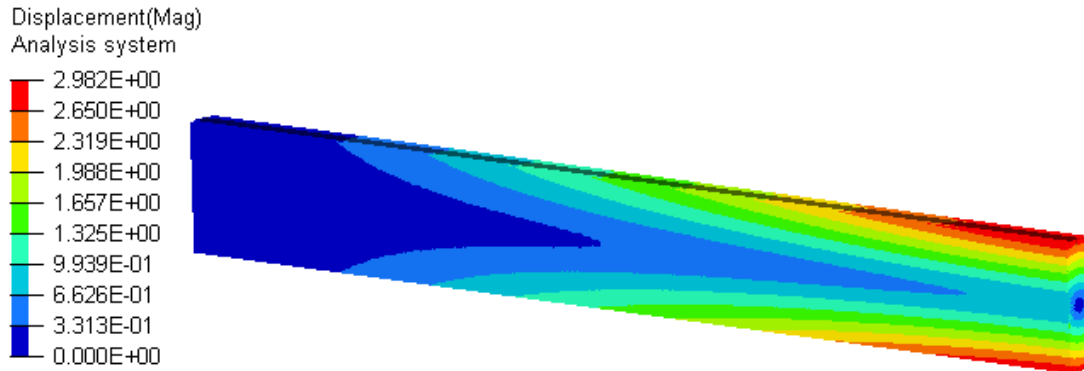
O deslocamento e rotação dos nós marcado com os ícones em preto são restringidos nas direções X, Y e Z. Todos os nós da face, onde estão as linhas em vermelho, foram unidas por um elemento rígido, no qual foi aplicado a carga de momento torsor. O campo de deslocamentos é mostrado na Figura 61 e o de rotação na Figura 62.

Realizou-se uma comparação da rigidez torcional do ensaio com a simulação, Tabela 21. A diferença obtida foi menor que 10%.

Tabela 20 – Avaliação dos Resultados

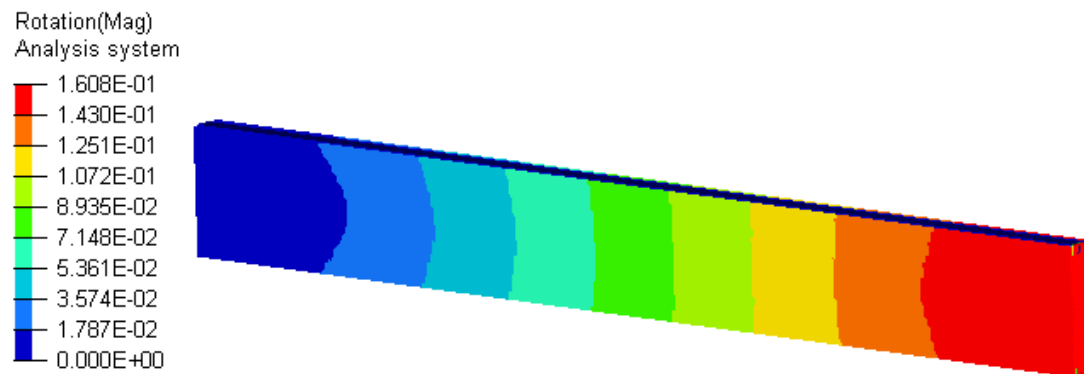
$E_f$ Ensaio [MPa]	$E_f$ Simulação [MPa]	Erro Relativo [%]
20620,51	20519,12	0,49

Figura 61 – Campo de Deslocamento do Ensaio de Torção



Fonte: Autor, 2019.

Figura 62 – Campo de Rotação do Ensaio de Torção



Fonte: Autor, 2019.

Tabela 21 – Avaliação dos Resultados

$GJ_{eq}$ Ensaio [Nmm <sup>2</sup> ]	$GJ_{eq}$ Simulação [Nmm <sup>2</sup> ]	Diferença [%]
8071829,42	7462686,57	7,55



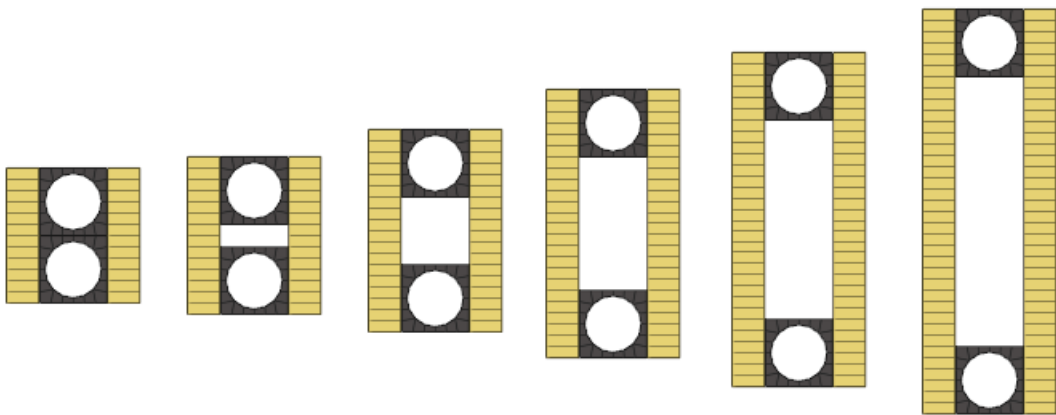
## 14 ESTUDO DE CASO 4: RIGIDEZ

Com o objetivo de determinar uma equação que possibilite obter a rigidez flexural da longarina para diferentes configurações de altura e comprimento do compensado, foi realizado este estudo de caso. As barras permaneceram com as dimensões fixas de seção transversal de 6x5 mm e a espessura da chapa de compensado fixa em 2,9mm.

### 14.1 VIGA EM CAIXÃO

Fez-se a análise para a viga em caixão, na qual a faixa avaliada de altura é de 18 à 36mm e de comprimento de 100 à 500mm. Devido à estas dimensões, a esbeltez da viga pode variar de 2,78 à 41,67. Assim, os esforços cisalhantes são considerados nos cálculos.

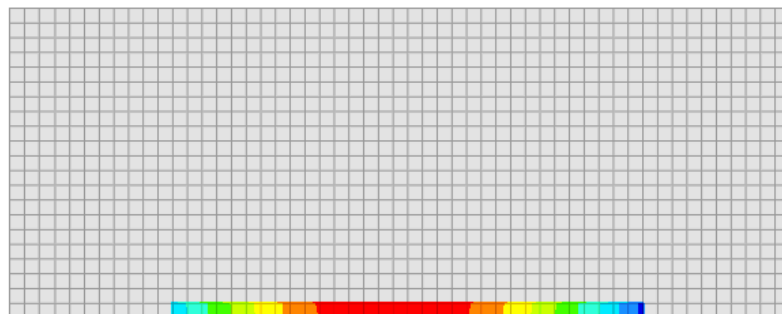
Figura 63 – Modelo de Cada Altura Avaliada



Fonte: Autor, 2019.

Obteve-se a rigidez flexural da viga em caixão com uma altura de 36mm, ou seja, com as mesmas dimensões que do Estudo de Caso 3. Conforme reduziu-se o comprimento da viga, verificou-se que boa parte da deformação era localizada. Visando manter o mesmo padrão para todos os comprimentos avaliados, foi então considerado o valor máximo de deslocamento dos elementos inferiores, conforme mostrado na Figura 64. A força aplicada na simulação foi de 100N.

Figura 64 – Posição dos Deslocamentos Considerados



Fonte: Autor, 2019.

A Equação (7.3) foi utilizada, porém os termos foram rearranjados, tendo como variáveis:  $EI$  e  $\frac{f_c}{GA}$ , resultando em:

$$\frac{f_c}{GA} = \left(\frac{L^2}{12}\right) \frac{1}{EI} + \left(\frac{4\delta}{PL}\right). \quad (14.1)$$

Sabe-se que  $EI$  e  $\frac{f_c}{GA}$  são constantes. Então, simulando a viga com dois comprimentos diferentes já é suficiente para solucionar o sistema linear e encontrar os valores de  $EI$  e  $\frac{f_c}{GA}$ . Porém, de forma a validar os resultados, para a viga de H=36mm foram simulados cinco comprimentos distintos, conforme a Tabela 25.

Tabela 22 – Resultado das Simulações para H=36mm

L [mm]	$\delta$ [mm]	$\frac{L^2}{12}$ [ $10^4 mm^2$ ]	$\frac{4\delta}{PL}$ [ $10^{-5} N^{-1}$ ]
500	0,4209	2,083	3,367
400	0,2725	1,333	2,725
300	0,1672	0,750	2,229
200	0,0944	0,333	1,887
100	0,0419	0,083	1,676

Solucionando os sistemas lineares, tomando os comprimentos dois a dois, tem-se os valores de rigidez flexural para a viga em caixão de H=36mm apresentados na Tabela 23.

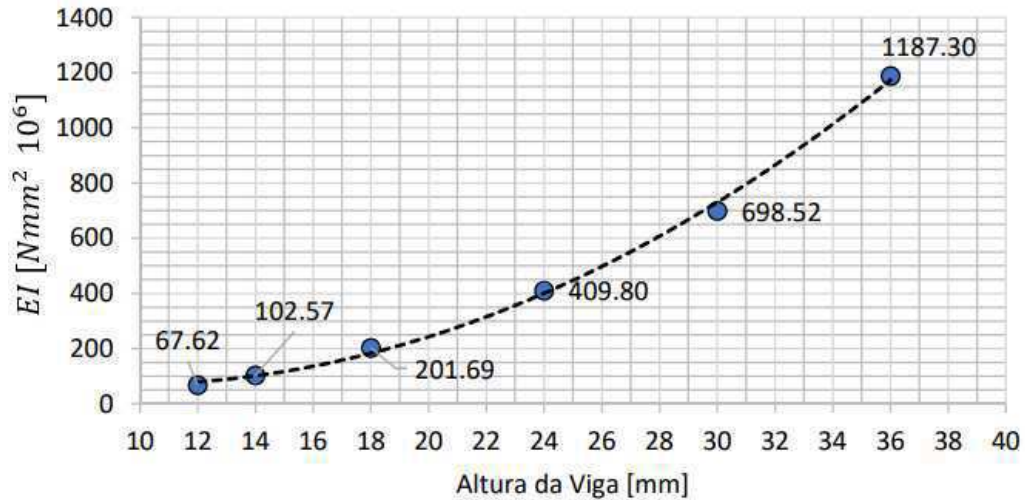
Tabela 23 – Parâmetros de Rigidez Flexural da Viga em Caixão com H=36mm

L's considerados	$EI$ [ $Nmm^2 \cdot 10^9$ ]	$\frac{f_c}{GA}$ [ $N^{-1} \cdot 10^{-5}$ ]
500 e 400 mm	1,168	1,583
400 e 300 mm	1,177	1,592
300 e 200 mm	1,219	1,614
200 e 100 mm	1,185	1,606
Média	$1,187 \pm 0,0222$	$1,599 \pm 0,0139$
100 e 500 mm	1,183	1,606
Diferença [%]	0,350	0,446

Verifica-se da Tabela 23 que os valores encontrados de rigidezes não aparentam ser influenciados pelo comprimento da viga, o que faz sentido, caso contrário a rigidez iria variar dentro do seu próprio comprimento mesmo com uma altura constante.

O processo foi repetido, sendo avaliadas seis configurações de altura, cujo resultados estão presentes nas Figuras 14.2 e 14.3.

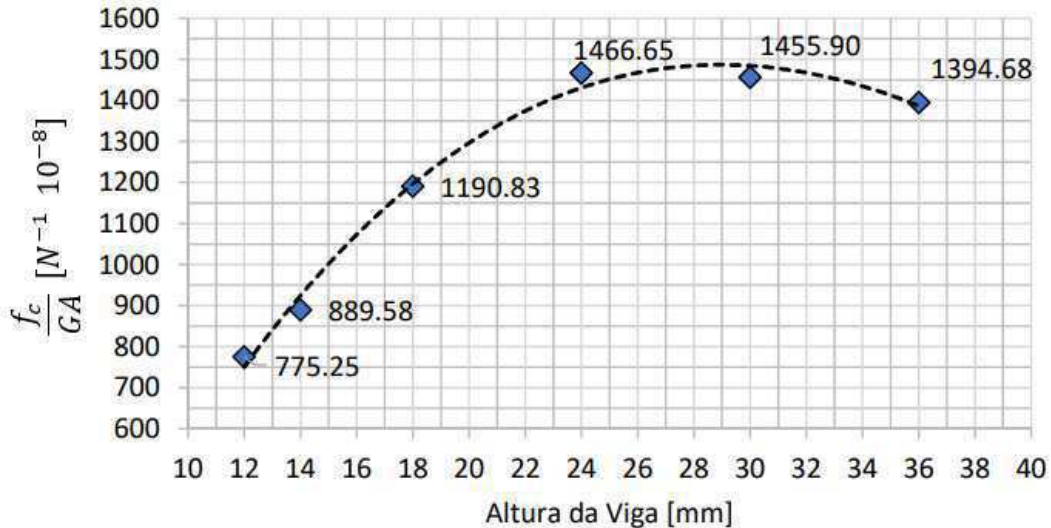
Figura 65 – Componente EI de Rigidez Flexural para a Viga em Caixaão



Fonte: Autor, 2019.

A curva  $EI(h)$  foi interpolada por um polinômio de segundo grau, resultando na Equação (14.2). E apresentou um coeficiente de determinação ajustado  $R_a^2 = 0,99990$ . A altura  $h$  deve ser inserida em milímetros.

$$EI(h) = (1,1547h^2 - 13,2751h + 62,4841) 10^6 \text{ Nmm}^2. \quad (14.2)$$

Figura 66 – Componente  $\frac{f_c}{GA}$  de Rigidez Flexural para a Viga em Caixaão

Fonte: Autor, 2019.

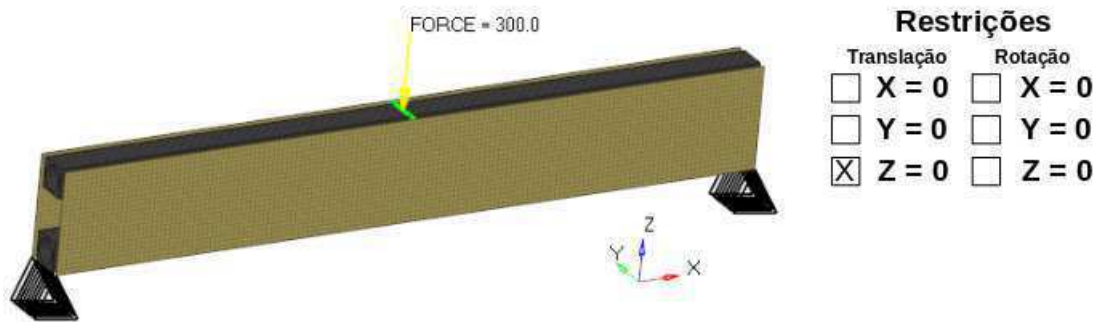
A curva  $\frac{f_c}{GA}(h)$  foi interpolada por um polinômio de terceiro grau, resultando na Equação (14.3). E apresentou um coeficiente de determinação ajustado  $R_a^2 = 0,99998$ . A altura  $h$  deve ser em milímetros.

$$\frac{f_c}{GA}(h) = (0,0229h^3 - 4,1635h^2 + 183,4859h - 891,4078) 10^{-8} \text{ N}^{-1}. \quad (14.3)$$

### 14.1.1 Verificação das Equações

De forma a verificar a precisão das Equações (14.2) e (14.3), a flecha máxima foi calculada, pela Equação (7.3), para uma dimensão qualquer de viga em caixão, que não havia sido anteriormente simulada numericamente. Em seguida, fez-se a simulação em elementos finitos e os resultados foram comparados. As dimensões e carga optadas foram:  $L = 150\text{mm}$ ,  $H = 21\text{mm}$ , e  $P = 300\text{mm}$ . O modelo é apresentado na Figura 67.

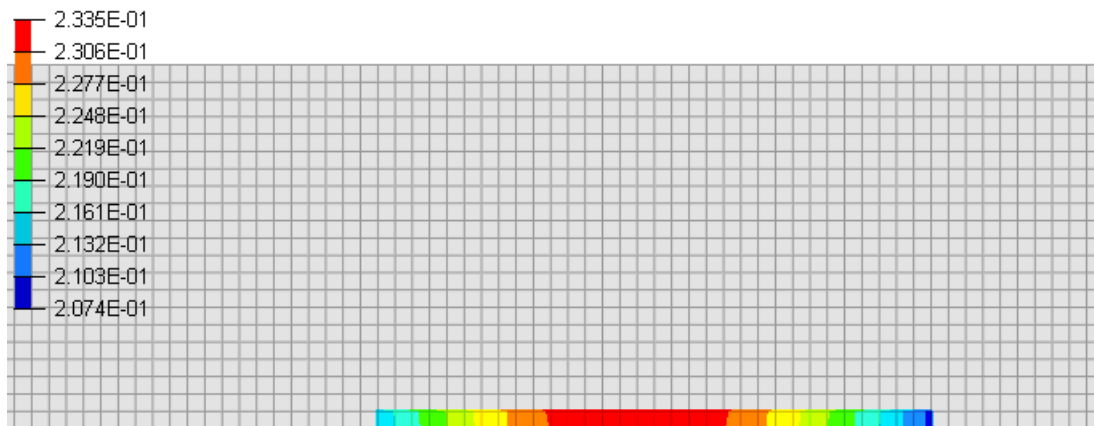
Figura 67 – Modelo em Elementos Finitos para Verificação



Fonte: Autor, 2019.

Como resultado, teve-se o campo de deslocamentos, Figura 68. Vale observar que o parâmetro de avaliação deve ser o mesmo utilizado para fazer o equacionamento, portanto, o primeiro plano de elementos foi também desconsiderado, devido ao acúmulo de tensões.

Figura 68 – Campo de Deslocamentos do Modelo para Verificação



Fonte: Autor, 2019.

A Tabela 24 apresenta a comparação dos resultados entre o cálculo e a simulação.

Tabela 24 – Comparação Da Flecha Máxima

$EI_{calc} [Nmm^2 \cdot 10^8]$	$\frac{f_c}{GA_{calc}} [N^{-1} \cdot 10^{-5}]$	$\delta_{calc} [mm]$	$\delta_{sim} [mm]$	Diferença [%]
2,929	1,338	0,2225	0,2335	4,70

Apesar da diferença ser de 4,70%, isso não quer dizer que a utilização das equações resultará numa diferença dessa magnitude para todos os casos. Porém, verifica-se que

a determinação das equações foi realizada da maneira correta e que, representam um resultado próximo de uma simulação em elementos finitos.

### 14.1.2 Análise de Sensibilidade

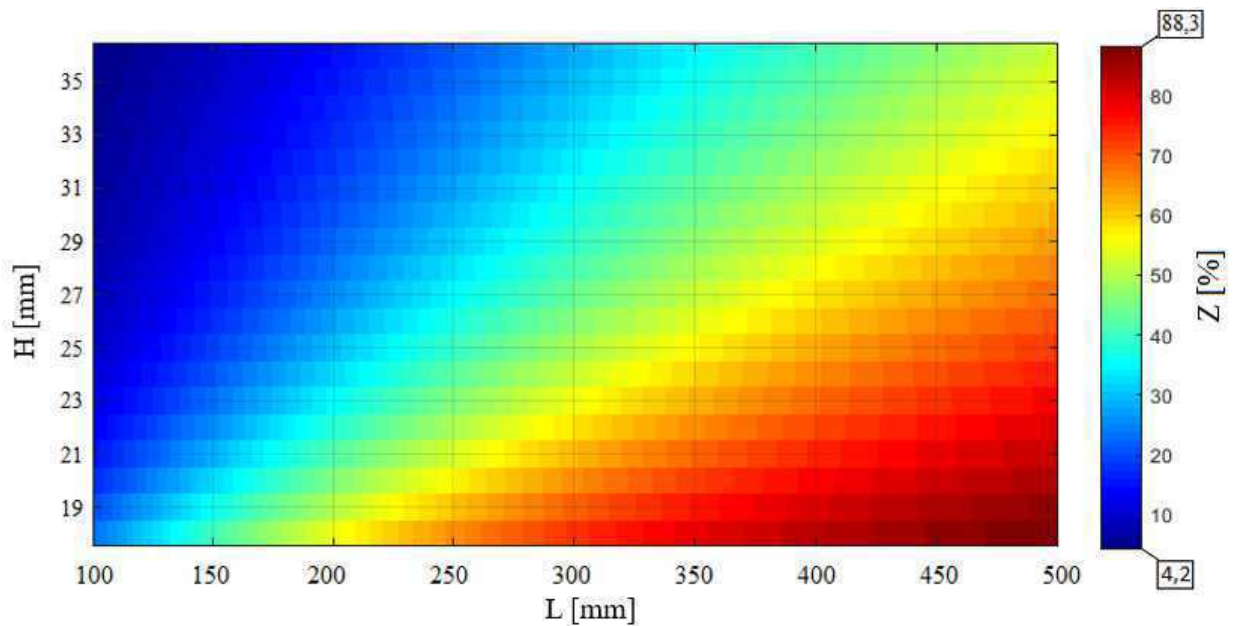
Como visto na Seção 7.1, A Equação (7.3), apresentada para flexão em 3 pontos, é um somatório de dois termos, o primeiro representa o deslocamento resultante dos esforços de momento fletor e o segundo dos esforços cisalhantes.

De forma a averiguar a contribuição isolada dos termos, foi elaborado um mapa de cores, Figura 69, onde é possível notar que para longos comprimentos e pequenas alturas da viga, o valor da flecha máxima provém significativamente do esforço de momento fletor. Enquanto que, para pequenos comprimentos e grandes alturas, a contribuição do esforço de momento é mínima, portanto o deslocamento é mais expressivo por conta dos esforços de cisalhamento.

A porcentagem de contribuição do momento fletor foi calculada da seguinte forma:

$$Z = \frac{\left(\frac{PL^3}{48}\right)\frac{1}{EI}}{\left(\frac{PL^3}{48}\right)\frac{1}{EI} + \left(\frac{PL}{4}\right)\frac{f_c}{GA}} 100\%. \quad (14.4)$$

Figura 69 – Contribuição do termo envolvendo EI na determinação da flecha máxima

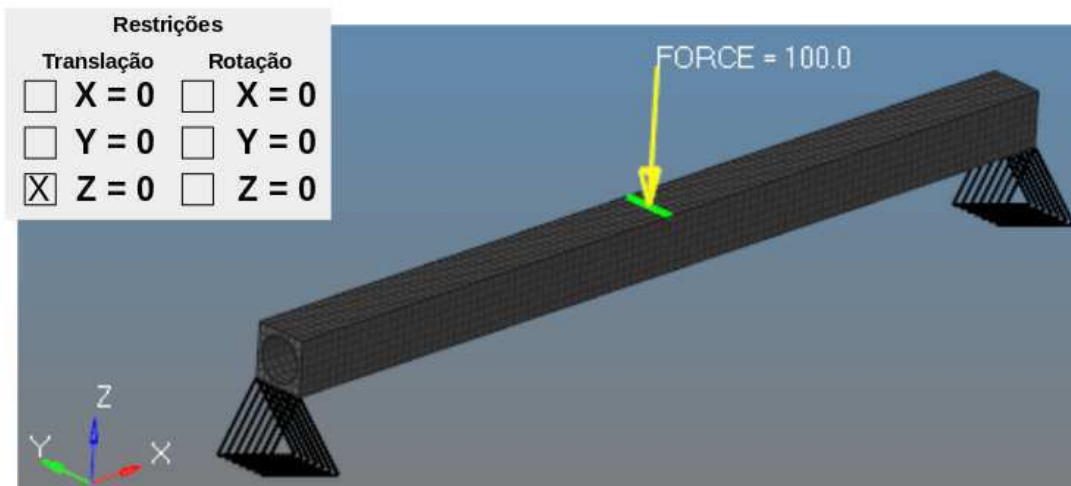


Fonte: Autor, 2019.

## 14.2 RIGIDEZ DE UMA ÚNICA BARRA DE CARBONO

Teve-se como objetivo obter uma equação numérica para calcular a rigidez flexural da barra, igual foi realizado para a estrutura composta, porém apenas para uma barra. Como visto anteriormente,  $EI$  e  $\frac{f_c}{GA}$  são constantes, independente do comprimento da barra. Então, simulando a viga com dois comprimentos diferentes já é suficiente para solucionar o sistema linear e descobrir os valores de  $EI$  e  $\frac{f_c}{GA}$ .

Figura 70 – Modelo em Elementos Finitos para a Barra



Fonte: Autor, 2019.

Tabela 25 – Resultado das Simulações para a Barra

L [mm]	$\delta$ [mm]	$\frac{L^2}{12}$ [ $10^4 mm^2$ ]	$\frac{4\delta}{PL}$ [ $10^{-5} N^{-1}$ ]
500	12,5400	2,083	100,320
100	0,1577	0,083	6,308

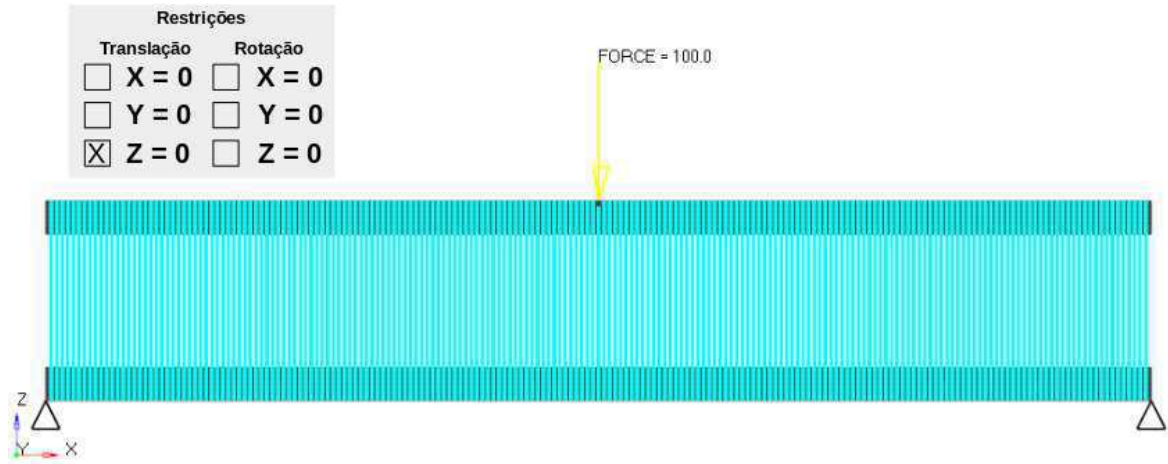
Pela Equação (14.1), os resultados obtidos foram:  $EI = 21,274 [Nmm^2 10^6]$  e  $\frac{f_c}{GA} = 2,391 [N^{-1} 10^{-5}]$ .

## 14.3 RIGIDEZ DAS BARRAS DE CARBONO

Em uma seção transversal composta, como na viga em caxão, a realização do cálculo da tensão se dá através do conhecimento da rigidez  $EI$  de cada material que a compõem. De forma semelhante ao que foi realizado anteriormente, quanto à determinação da rigidez da estrutura composta e da barra unitária, é feito para as barras de carbono em conjunto.

O modelo em elementos finitos, Figura 71, foi elaborado de tal maneira que os elementos das laterais, em azul, fossem unidos por elementos rígidos, em uma linha vertical (que no caso representariam as chapas de compensado, porém sem inércia). Esse contato

Figura 71 – Modelo em Elementos Finitos para as Barras, L=200mm e H=36mm

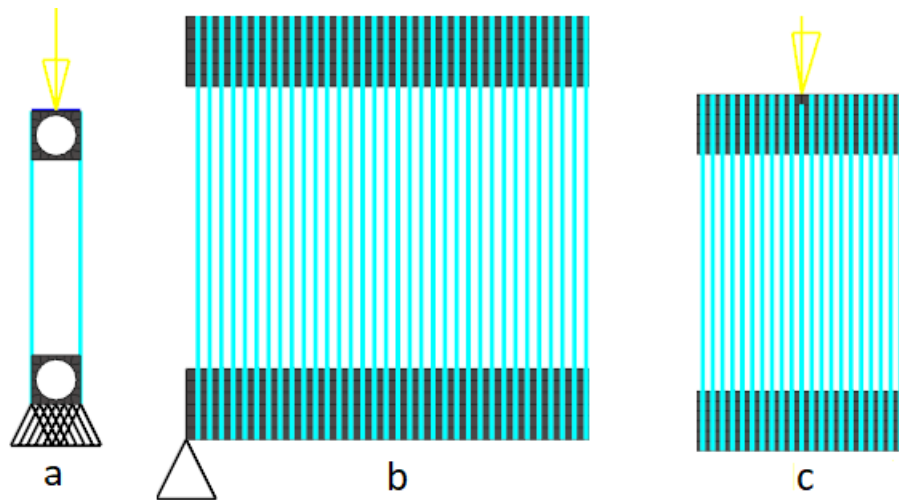


Fonte: Autor, 2019.

é tal que o deslocamento e rotação em todos os seis graus de liberdade dos nós conectados são impostos a serem iguais.

Na Figura 72, tem-se uma vista lateral do modelo e também uma vista aproximada das condições de contorno e da aplicação da carga. Os ícones em preto representam os nós que tiveram seu movimento restringido na direção vertical (eixo Z). A força foi aplicada em um elemento rígido que conecta os nós na direção Y, igualmente foi feito nas demais análises.

Figura 72 – a) Vista Lateral. b) Condições de contorno. c) Aplicação da Carga

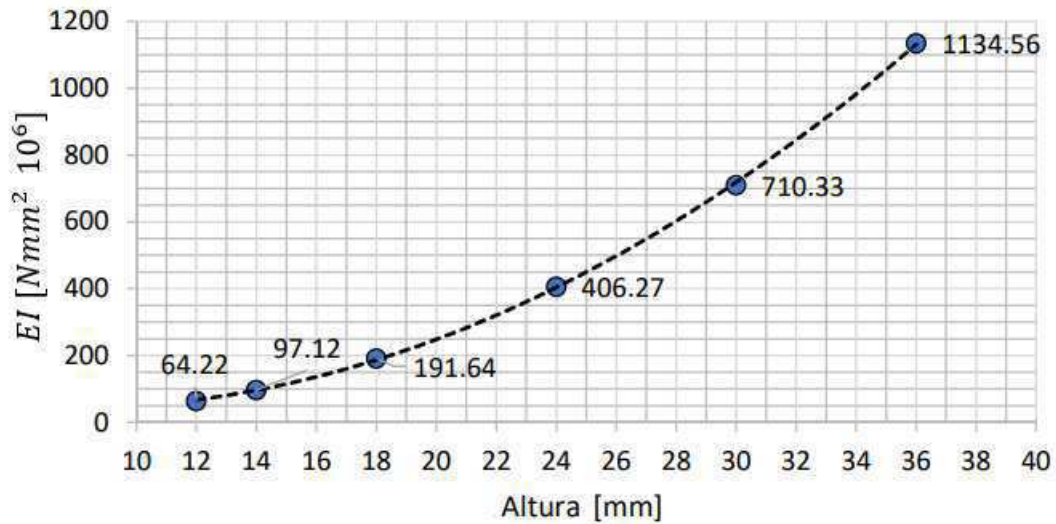


Fonte: Autor, 2019.

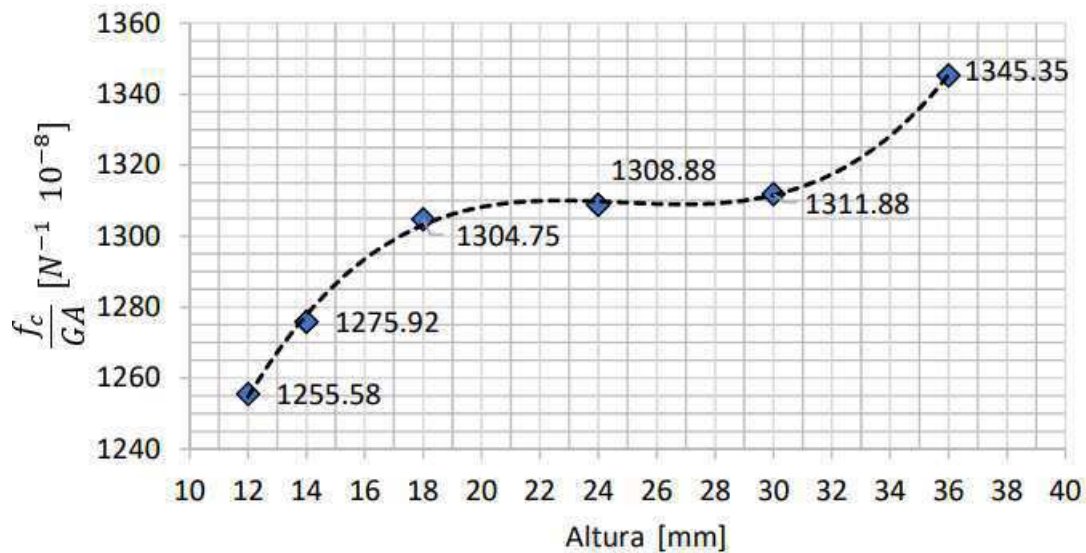
A estrutura foi simulada em dois comprimentos de seção, para seis alturas diferentes, resultando nas curvas de rigidez, Figura 73 para  $EI(x)$  e Figura 74 para  $\frac{f_c}{GA}(x)$ .

A curva  $EI(h)$  foi interpolada por um polinômio de segundo grau, resultando na Equação (14.5). E apresentou um coeficiente de determinação ajustado  $R_a^2 = 0,99965$ . A altura  $h$  deve ser inserida em milímetros.

$$EI(h) = (1,3563h^2 - 20,7958h + 121,7771) 10^6 \text{ Nmm}^2. \quad (14.5)$$

Figura 73 – Componente  $EI$  de Rigidez Flexural para duas Barras de Carbono conectadas

Fonte: Autor, 2019.

Figura 74 – Componente  $\frac{f_c}{GA}$  de Rigidez Flexural para duas Barras de Carbono conectadas

Fonte: Autor, 2019.

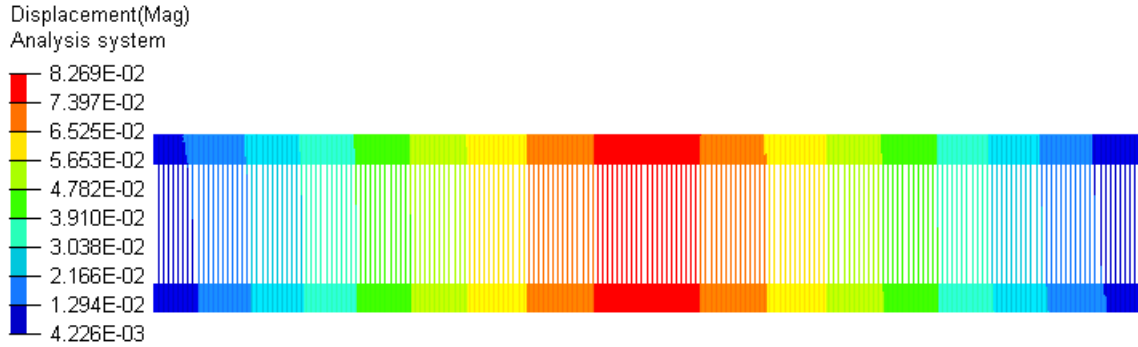
A curva  $\frac{f_c}{GA}(h)$  foi interpolada por um polinômio de terceiro grau, resultando na Equação (14.6). E apresentou um coeficiente de determinação ajustado  $R_a^2 = 0,99603$ . A altura  $h$  deve ser em milímetros.

$$\frac{f_c}{GA}(h) = (0,02851h^3 - 2,11983h^2 + 52,16818h + 884,69682) 10^{-8} N^{-1}. \quad (14.6)$$

O campo de deslocamentos para um dos casos está apresentado na Figura 75.



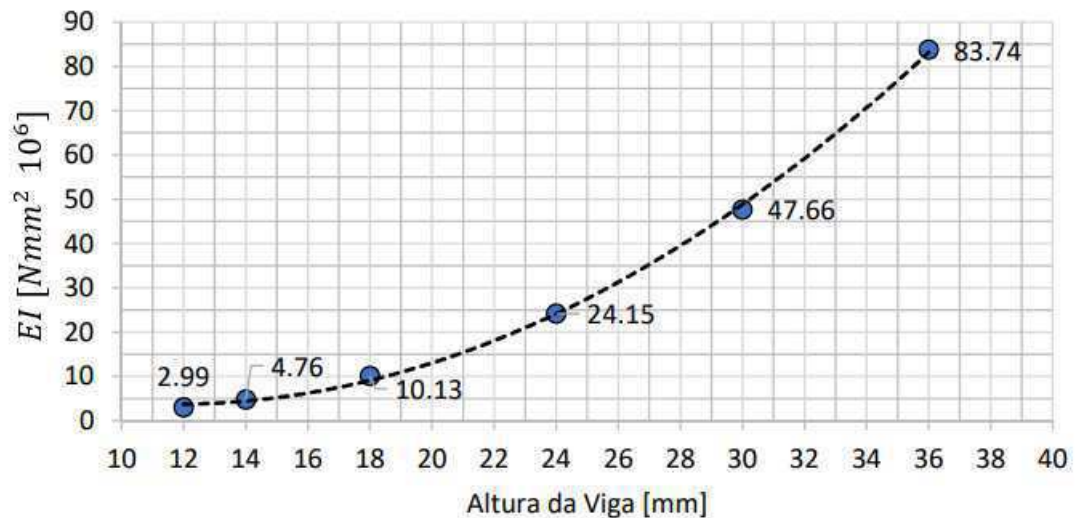
Figura 75 – Campo de Deslocamentos para L=200mm e H=36mm.



Fonte: Autor, 2019.

#### 14.4 RIGIDEZ DAS CHAPAS DE COMPENSADO

O modelo em elementos finitos para a chapa de compensado foi simplificado, pois a estrutura em caixão se trata de duas chapas iguais e de mesmo momento de inércia  $I_{yy}$ . Assim, apenas uma chapa foi avaliada e, os resultados de rigidez podem ser facilmente estimados para o conjunto de duas chapas, multiplicando-se por dois. Para facilitar ainda mais a análise, em vez de multiplicar o resultado por dois, a força utilizada foi 50N ao invés de 100N. Assim, os gráficos e equações já podem representar o conjunto de duas chapas.

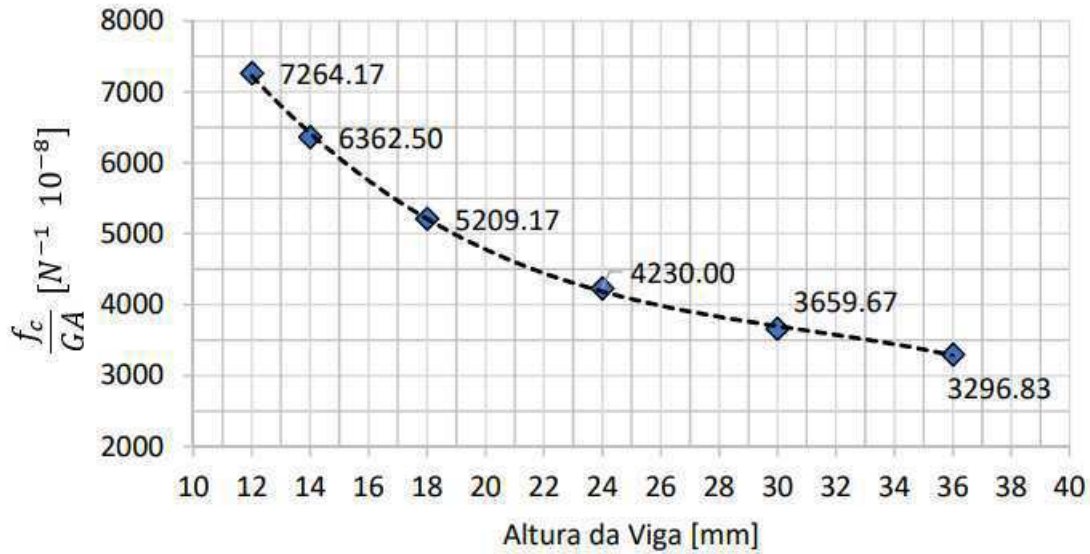
Figura 76 – Componente  $EI$  de Rigidez Flexural para duas Chapas de Compensado

Fonte: Autor, 2019.

A curva  $EI(h)$  foi interpolada por um polinômio de segundo grau, resultando na Equação (14.7). E apresentou um coeficiente de determinação ajustado  $R_a^2 = 0,99833$ . A altura  $h$  deve ser inserida em milímetros.

$$EI(h) = (1,1341h^2 - 3,1281h + 21,9699) 10^6 \text{ Nmm}^2. \quad (14.7)$$

Figura 77 – Componente  $\frac{f_c}{GA}$  de Rigidez Flexural para duas Chapas de Compensado



Fonte: Autor, 2019.

A curva  $\frac{f_c}{GA}(h)$  foi interpolada por um polinômio de terceiro grau, resultando na Equação 14.8. E apresentou um coeficiente de determinação ajustado  $R_a^2 = 0,99843$ . A altura  $h$  deve ser em milímetros.

$$\frac{f_c}{GA}(h) = (-0,3529h^3 + 32,8550h^2 - 1080,5296h + 16072,6083) 10^{-8} N^{-1}. \quad (14.8)$$

#### 14.5 COMPARAÇÃO DE RIGIDEZES

Com o intuito de verificar as rigidezes das estruturas que compõem a viga, os gráficos das curvas de rigidezes das estruturas da viga caixão foram unidos em uma só figura, nas Figuras 78 e 79. Constata-se das figuras que as barras de carbono têm maior influência na componente  $EI$  de rigidez, enquanto que as chapas de compensado têm na  $\frac{f_c}{GA}$ . Isso acontece, pois o módulo de elasticidade das barras de carbono é muito superior ao do compensado, enquanto que o compensado é o único material que está presente mais próximo da linha neutra da estrutura, ou seja, as chapas de compensado serão responsáveis por boa parte da tensão cisalhante.

Figura 78 – Componentes  $EI$  de Rigidez Flexural

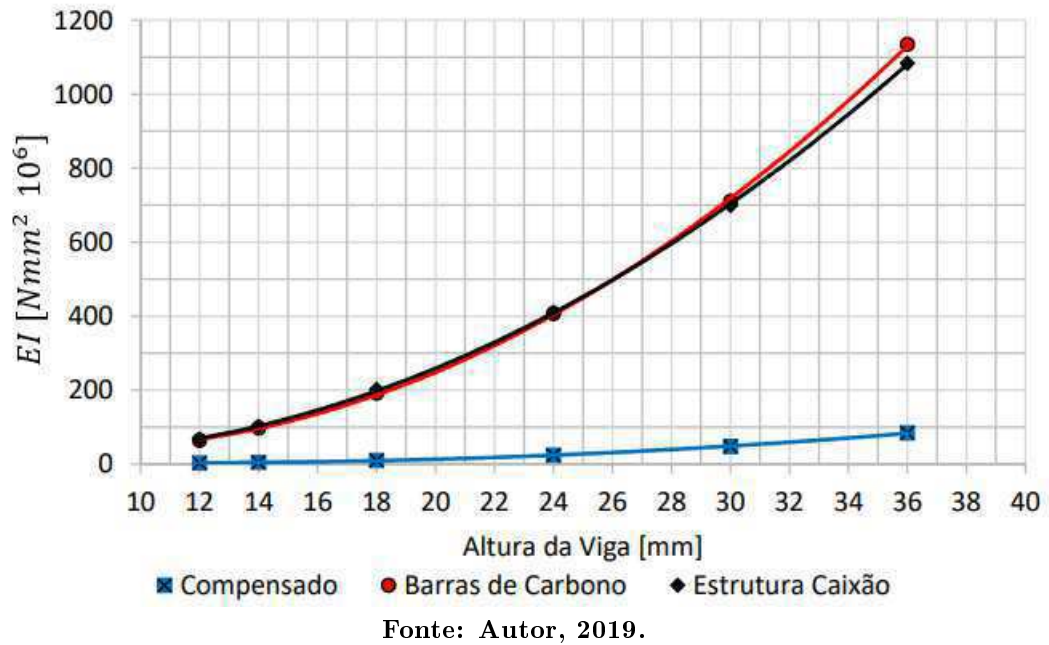
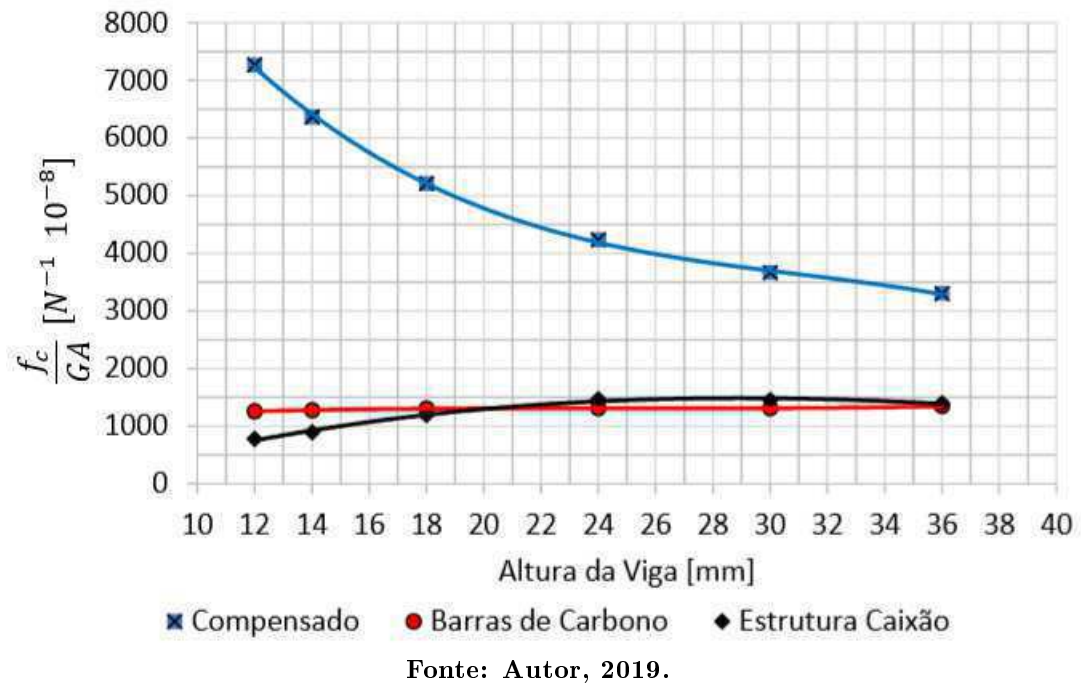


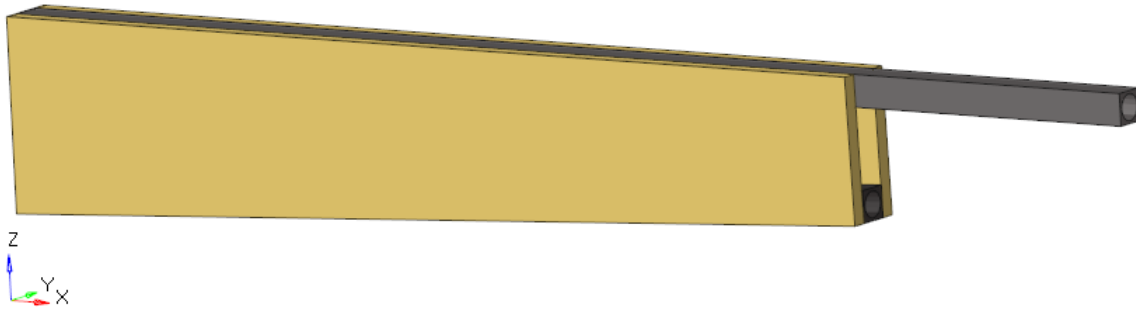
Figura 79 – Componentes  $\frac{f_c}{GA}$  de Rigidez Flexural



## 15 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO

O algoritmo foi elaborado para realizar cálculos estruturais de uma longarina de um aeromodelo, com um formato e um material específico. A estrutura em si, consiste de chapas de madeira (compensado) e de barras de carbono com um furo circular. É dividida em duas seções, sendo a primeira composta dos dois materiais supracitados e a segunda seção composta apenas por uma única barra de carbono, conforme apresentado na Figura 80.

Figura 80 – Modelo de Longarina

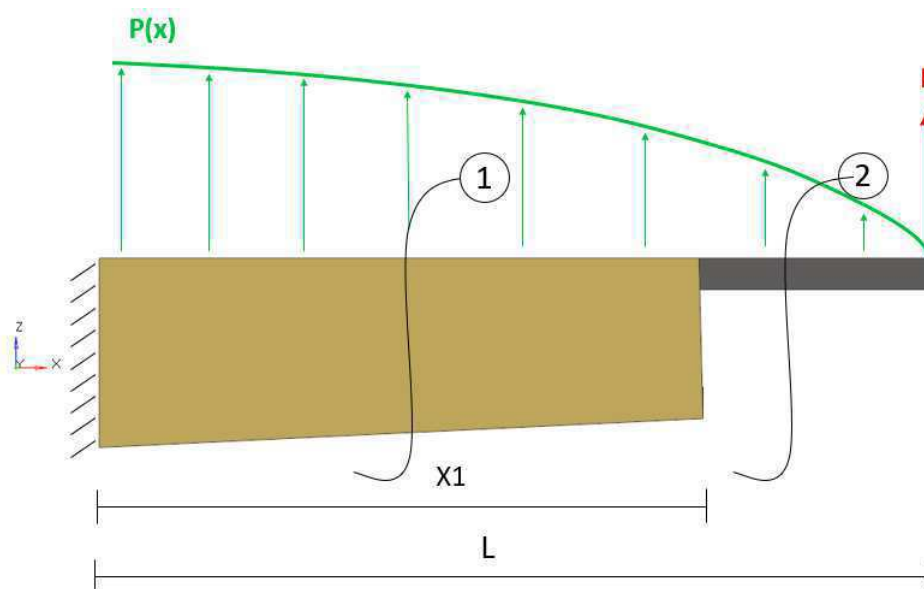


Fonte: Autor, 2019.

### 15.1 EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULO DA DEFLEXÃO NA EXTREMIDADE DA LONGARINA

As equações foram deduzidas a partir do modelo da Figura 81. No qual,  $P(x)$  representa o carregamento da asa,  $P$  é uma força imaginária, que foi aplicada para que seja possível calcular a deflexão na ponta da longarina através do Teorema de Castigliano. Dessa forma, foi possível considerar os esforços de momento e também os cisalhantes.

Figura 81 – Modelamento do Problema



Fonte: Autor, 2019.

É interessante notar que existe um afilamento na primeira seção, dessa forma  $EI$  e  $\frac{fc}{GA}$  deixam de ser constantes e passam a serem funções dependentes da altura. Como a seção afila de forma linear, a equação que representa a altura da estrutura em função do comprimento da viga pode ser descrita por:

$$H(x) = \frac{H_1 - H_{root}}{X_1}x + H_{root}, \quad (15.1)$$

onde  $H_1$  é a altura no final da seção 1,  $H_{root}$  é a altura na raiz e  $X_1$  é o comprimento da seção 1.

Tem-se para este problema a equação de momento fletor:

$$M(x) = - \int_0^x P(x)dx + x \int_0^x P(x)dx - x \int_0^L P(x)dx + \int_0^L P(x)xdx - Px + PL, \quad (15.2)$$

onde sua derivada parcial em relação à P, é dada por:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = L - x. \quad (15.3)$$

Para a força cisalhante, tem-se:

$$V(x) = - \int_0^x P(x)dx + \int_0^L P(x)dx + P, \quad (15.4)$$

onde sua derivada parcial em relação à P, é dada por:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial P} = 1. \quad (15.5)$$

Aplicando a Equação 7.2 e fazendo  $P=0$ , onde neste caso os esforços normais e de torção são também nulos, tem-se a contribuição de cada seção para a deflexão na ponta, dada por  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , respectivamente:

$$\delta_1 = \int_0^{X_1} \frac{M_1(x)}{EI_1(x)} \frac{\partial M_1(x)}{\partial P} dx + \int_0^{X_1} \frac{fc}{GA}(x) V_1(x) \frac{\partial V_1(x)}{\partial P} dx, \quad (15.6)$$

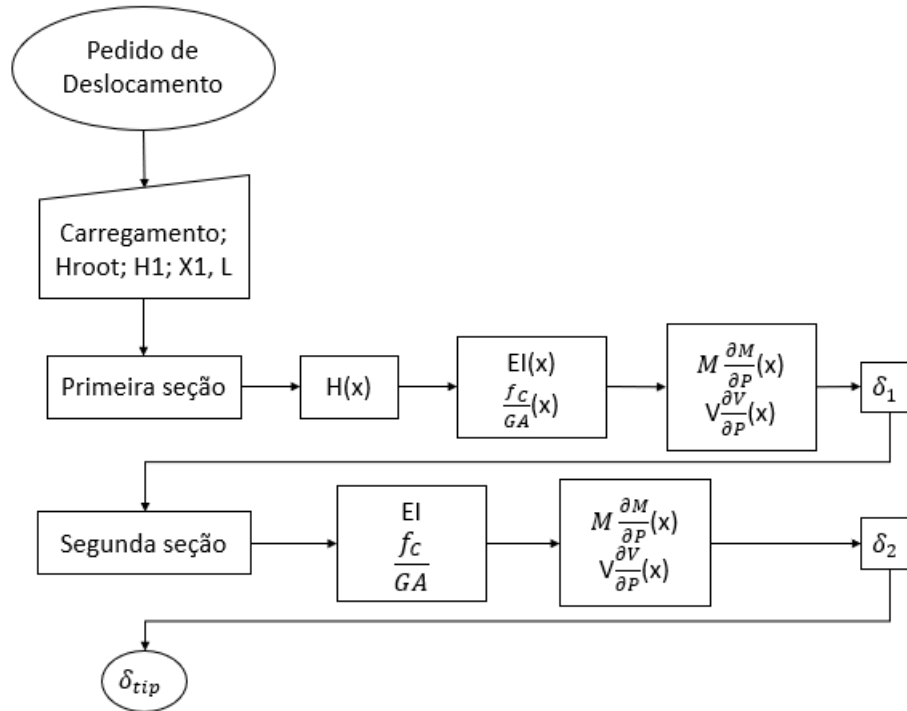
$$\delta_2 = \int_{X_1}^L \frac{M_2(x)}{EI_2(x)} \frac{\partial M_2(x)}{\partial P} dx + \int_{X_1}^L \frac{fc}{GA} V_2(x) \frac{\partial V_2(x)}{\partial P} dx, \quad (15.7)$$

onde a deflexão na ponta  $\delta_{tip}$  é a soma de  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

## 15.2 FLUXOGRAMA PARA A DETERMINAÇÃO DA DEFLEXÃO

O fluxograma do algoritmo, para o cálculo da deflexão, segue na Figura 82.

Figura 82 – Fluxograma do Algoritmo para o Cálculo da Deflexão



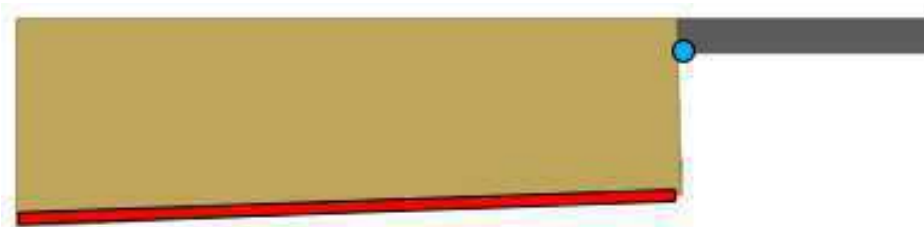
Fonte: Autor, 2019.

### 15.3 EQUACIONAMENTO PARA CÁLCULO DA TENSÃO

Além da deflexão na ponta da asa, outro critério estrutural utilizado para o dimensionamento da longarina é o de máxima tensão, onde é avaliado a tensão máxima nas barras de carbono em diversas seções transversais ao longo da envergadura.

Da Figura 83, a área em vermelho representa os pontos onde pode ser calculado a máxima tensão na primeira partição da longarina, enquanto que a região em azul é um ponto crítico para a segunda partição da asa.

Figura 83 – Posições onde a Tensão nas Barras de Carbono é Calculada



Fonte: Autor, 2019.

Percebe-se para a primeira seção, que existe a necessidade de se avaliar a tensão não só na raiz, pois existe um afilamento e isso causa uma variação na tensão. Já na segunda partição, a estrutura possui rigidez e dimensões constantes, portanto só é avaliado a tensão no início da seção.

Apenas o esforço devido ao momento foi considerado para calcular a tensão nas quais as barras de carbono estão submetidas. O esforço devido a tensão cisalhante não foi considerado, visto que a maior intensidade do esforço cisalhante se dá próximo à linha neutra e as barras estão localizadas na extremidade superior e inferior da estrutura.

O índice de falha nas chapas de compensado não será avaliado, pois as barras de carbono ficaram muito mais suscetíveis à falhar. Assim, não foi necessário desenvolver um algoritmo para determinar o índice de falha nas chapas de compensado.

O cálculo é iniciado com a determinação do momento de inércia transformado, que substituindo as variáveis na Equação (6.5) para se adequar problema, resulta em:

$$I_{yy,t} = I_{yy,carbonbars} + I_{yy,plywoods} \frac{EI_{plywoods}}{EI_{carbonbars}}, \quad (15.8)$$

onde foi considerado o  $E_{ref}$  como o próprio módulo de elasticidade do carbono, calculado pela equação:

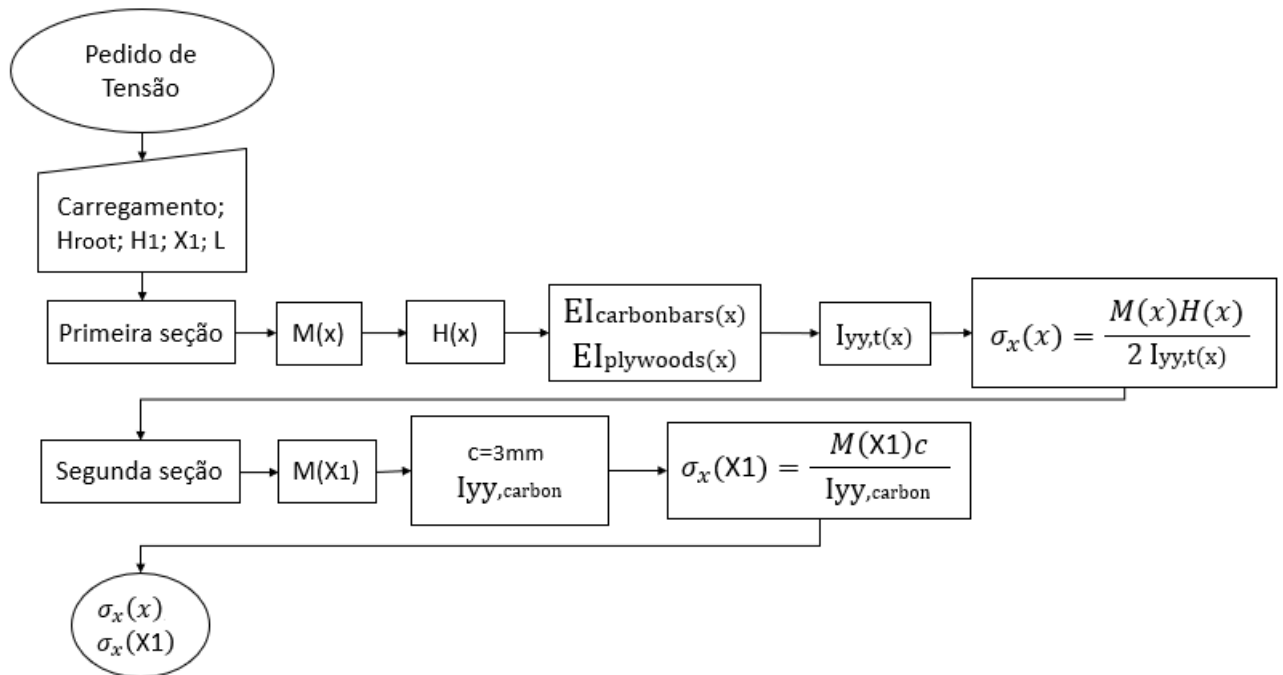
$$E_{ref} = E_{carbonbars} = \frac{EI_{carbonbars}}{I_{yy,carbonbars}}. \quad (15.9)$$

Lembrando que  $EI_{carbonbars}$  e  $EI_{plywoods}$  são estimados numericamente pelas Equações (14.5) e (14.7). Os termos *carbonbars* e *plywoods* fazem referência ao conjunto de duas barras de carbono e às chapas de compensado, respectivamente.

#### 15.4 FLUXOGRAMA PARA A DETERMINAÇÃO DA TENSÃO

O fluxograma do algoritmo para o cálculo da deflexão segue na Figura 84.

Figura 84 – Fluxograma do Algoritmo para o Cálculo de Tensão



Fonte: Autor, 2019.

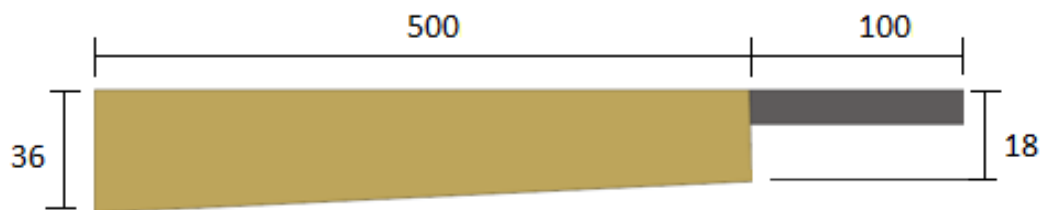
## 15.5 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO COM A SIMULAÇÃO NUMÉRICA

De forma a verificar a confiabilidade do algoritmo desenvolvido, foi simulado numericamente em elementos finitos um problema específico e comparado com os resultados de deflexão e tensão obtidos do algoritmo desenvolvido em Python.

O problema criado consiste de uma longarina cujo carregamento é descrito pela Equação (15.10) e suas dimensões são apresentadas na Figura 85.

$$P(x) = -3,9566E^{-18}x^6 + 6,3343E^{-15}x^5 - 3,8439E^{-12}x^4 + 1,0840E^{-09}x^3 - 1,3930E^{-07}x^2 + 5,3581E^{-06}x + 2,9998E^{-03}[Nmm]. \quad (15.10)$$

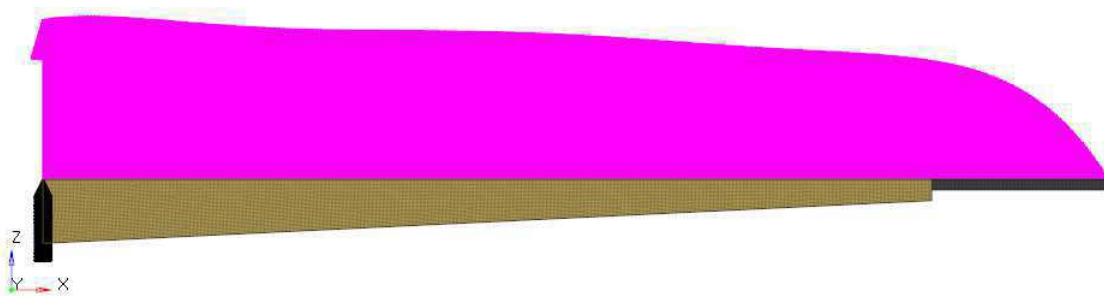
Figura 85 – Dimensões da Longarina



Fonte: Autor, 2019.

O modelo em elementos finitos elaborado pelo software Altair Hyperworks® é apresentado na Figura 86.

Figura 86 – Modelo em Elementos Finitos da Longarina



Fonte: Autor, 2019.

Campo de deslocamentos obtidas através do software Altair Hyperworks® através de uma análise linear estática, Figura 87.

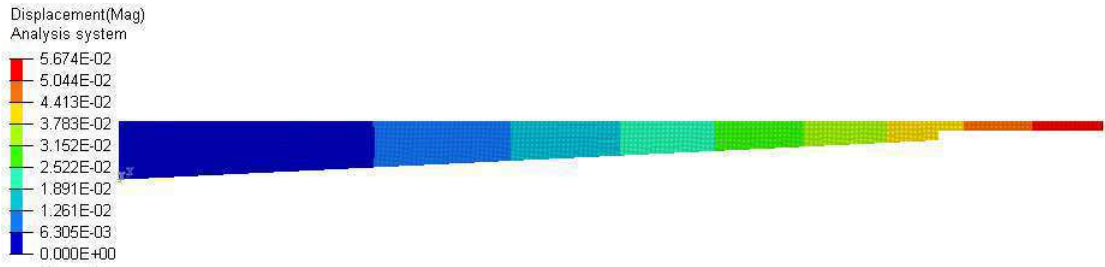
A Tabela 26 apresenta a comparação da deflexão na extremidade da longarina entre a simulação em elementos finitos e o algoritmo.

Tabela 26 – Comparação Da Flecha Máxima

$\delta_{FEM}$ [mm]	$\delta_{algoritmo}$ [mm]	Diferença [%]
0,056714	0,059700	5,26



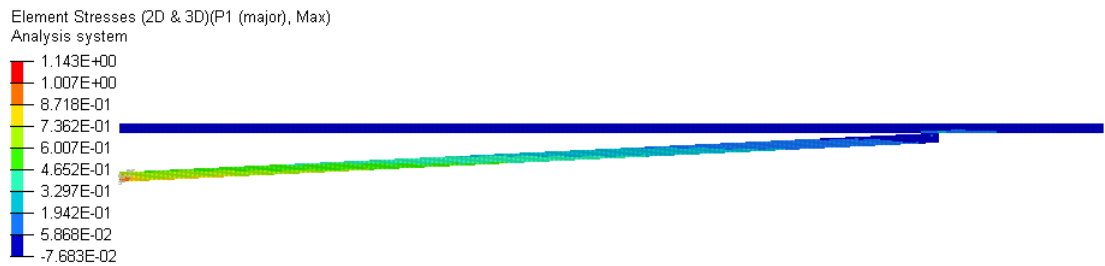
Figura 87 – Campo de Deslocamentos



Fonte: Autor, 2019.

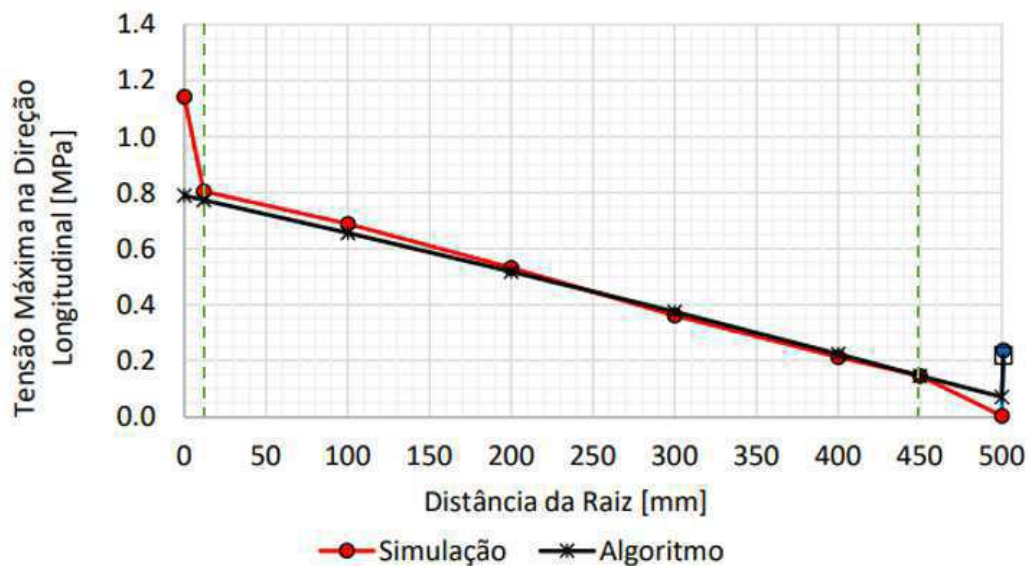
Campo de tensões dos elementos das barras de carbono na direção longitudinal (X), obtidas por meio do software Altair Hyperworks<sup>®</sup>, Figura 88.

Figura 88 – Campo de Tensões das Barras na Direção Longitudinal



Fonte: Autor, 2019.

A tensão máxima na direção longitudinal suportada pelas barras de carbono foi obtida em diversas seções ao longo do eixo longitudinal (X), sendo possível traçar uma curva de tensão e comparar entre os modelos. Na qual, o último ponto das curvas, em 501mm é a tensão suportada após a transição da seção, ou seja, na barra de carbono superior.

Figura 89 – Comparação da  $\sigma_{x,max}$  entre o modelo em elementos finitos e o algoritmo

Fonte: Autor, 2019.

Quanto à tensão, verifica-se que os resultados do algoritmo tiveram uma boa aproximação aos do modelo em elementos finitos, descrevendo bem o comportamento entre 10mm e 450mm. Teve-se uma pequena divergência nas extremidades. Na raiz, isso pode ser explicado pelo fato de que no modelo em elementos finitos ocorre uma concentração de tensão nos elementos próximos à raiz, o que não aconteceria numa condição real. Já no final da seção, há uma diferença resultante da troca de seção abrupta, enquanto que na teoria considera-se uma troca suave.

De todo modo, devido à boa conformidade dos resultados, é possível afirmar que o algoritmo cumpre o seu propósito com sucesso.

## 15.6 FUNÇÃO OBJETIVO: CÁLCULO DA MASSA DA LONGARINA

O objetivo da programação é minimizar uma função de variáveis, a função objetivo, sujeita a uma série de inequações (restrições). A função objetivo deste trabalho é a função que calcula a massa da longarina, que envolve somar a massa das chapas de compensado, das barras de carbono e da cola.

Do banco de dados da Equipe Albatroz, a densidade linear ( $\lambda$ ) das barras de carbono são de  $25,67 \cdot 10^{-3} g/mm$ , onde deve-se multiplicar pelo comprimento da barra para obter a sua massa. As chapas de compensado possuem uma densidade volumétrica ( $\rho$ ) de  $474 \cdot 10^{-6} g/mm^3$  e a densidade superficial ( $\phi$ ) de cola que é gasta por área de contato é de  $2,325 \cdot 10^{-4} g/mm^2$ .

A equação para encontrar a massa total das barras de carbono é:

$$mass_{carbonbars} = \lambda_{carb}(L + \sqrt{(H_{root} - H_1)^2 + X_1^2}). \quad (15.11)$$

Para calcular a massa das chapas de compensado:

$$mass_{plywoods} = 2\rho_{plywood}\left(\frac{H_{root} + H_1}{2}\right)X_1. \quad (15.12)$$

Para calcular a massa de cola:

$$mass_{glue} = 3\phi_{glue}a_{carb}(L + \sqrt{(H_{root} - H_1)^2 + X_1^2}), \quad (15.13)$$

onde  $a_{carb}$  é a aresta da barra de carbono.

Considerando a simetria da asa, a massa total da longarina será então:

$$mass = 2(mass_{carbonbars} + mass_{plywoods} + mass_{glue}). \quad (15.14)$$

Em diversos momentos, haverá casos em que alguma das restrições imposta não será cumprida e é preciso passar esta informação para o otimizador. A única maneira de se fazer isto é aplicando uma penalidade ao valor da função objetivo. Como o algoritmo possui três restrições, tem-se então as penalidades  $penalty_{size}$ ,  $penalty_{stress}$  e  $penalty_{deflection}$ . A função objetivo é definida como:

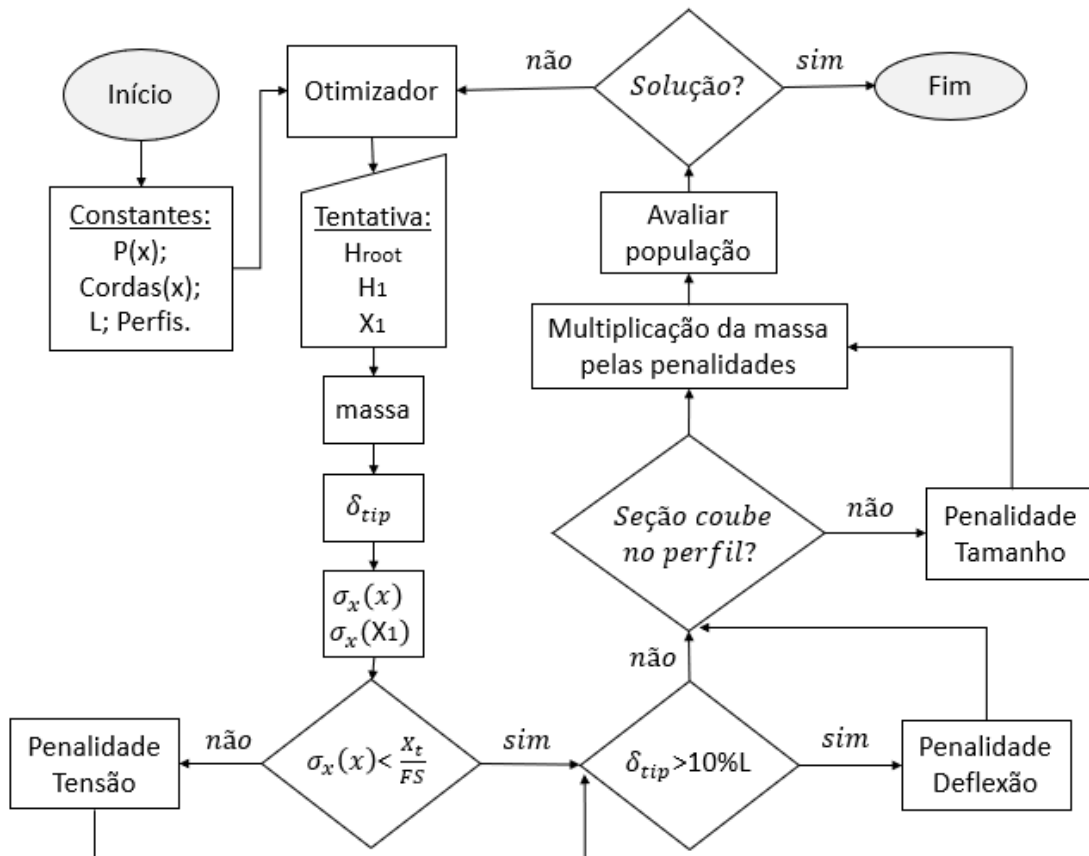
$$f.obj. = mass * penalty_{size} * penalty_{stress} * penalty_{deflection}. \quad (15.15)$$

## 16 IMPLEMENTAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO PELO MÉTODO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

O Python contém uma vasta biblioteca com algoritmos já desenvolvidos. Entre eles existe o algoritmo que otimiza pelo método de evolução diferencial, em inglês *Differential Evolution*.

A sua implementação é muito simples, basta informar o limite superior e inferior das variáveis de entrada. O fluxograma do programa completo ficou da seguinte forma:

Figura 90 – Fluxograma Geral



Fonte: Autor, 2019.

Sendo que as variáveis a serem otimizadas e a faixa na qual cada uma varia é de:

- $H_{root}$ : 12 à 36mm;
- $pH_1$ : 0 à 1;
- $X_1$ : 500mm à L.

Sendo que  $H_1 = pH_1 * (36 - 12) + 12$ . Foi utilizada esta lógica para que  $H_1$  seja sempre maior que 12mm e menor que  $H_{root}$ , visto que como o maior esforço está na raiz, logo a maior altura será na raiz. Portanto, não faz sentido deixar o otimizador caminhar para este espaço de solução.

## 16.1 RESTRIÇÕES

Nesta seção serão apresentados os limites estruturais e geométricos adotados para o desenvolvimento do algoritmo.

### 16.1.1 Limites Estruturais

Como já comentado, dois critérios estruturais são avaliados, o de tensão nas barras de carbono devido ao momento fletor e a deflexão máxima na ponta da longarina.

Para o primeiro caso, a tensão nas barras de carbono não devem exceder a tensão limite do material. Um fator de segurança de 1,5 é aplicado, valor recomendado pelas normas aeronáuticas. No entanto, este valor pode ser alterado conforme o usuário desejar. Vale ressaltar que a competição de Aerodesign é muito competitiva e os limites da aeronave como um todo são expostos à prova e, qualquer redução de massa contribuí para um ganho de pontuação pela equipe. Assim, muitas vezes os fatores de segurança chegam a ser menores que 1,5.

O segundo critério estabelecido é que a deflexão na ponta não deve exceder 10% da semi-envergadura, conforme indica ZHAO Qun DING Yunliang (2011). Entretanto, novamente, este limite é apenas sugerido pelo autor, podendo ser alterado pelo usuário. Grandes deflexões na asa resultam num decaimento de sustentação, uma longarina muito flexível complica o projeto aerodinâmico.

### 16.1.2 Limite de Comprimento da Partição

O **Estudo de Caso 4: Rigidez** foi primeiramente direcionada para uma estrutura de seção constante, e assim, posteriormente foram aplicados os conceitos e as equações para uma estrutura de seção variável. No entanto, isso acaba por provocar algumas imperfeições nos cálculos.

Como a longarina afila, na montagem, as barras deixam de estar paralelos ao eixo longitudinal da viga, reduzindo a rigidez flexural da estrutura.

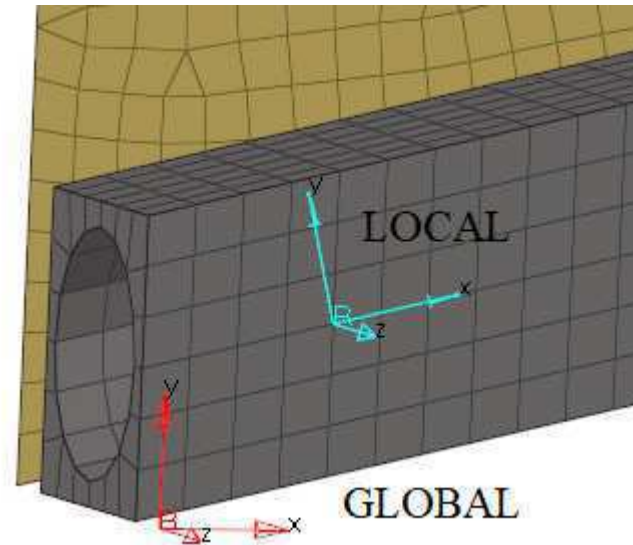
A montagem foi realizada de forma que a barra superior permaneça na horizontal e que apenas a inferior tenha inclinação, assim, como as fibras de carbono são paralelas à barra, a modelagem correta da estrutura deve levar isto em consideração, alterando o sistema de referência local da barra, conforme Figura 91.

Porém, como o algoritmo não leva isto em consideração, existirá um erro proveniente desta angulação. Realizou-se então um estudo para verificar a influência do comprimento total da viga, considerando apenas a primeira partição ( $X_1$ ), em uma faixa de 100 à 500mm, considerando à maior inclinação possível, ou seja, a altura na raiz será sempre de 36mm e na ponta de 12mm. O carregamento aplicado foi linear, visando manter um mesmo padrão para todos os comprimentos.

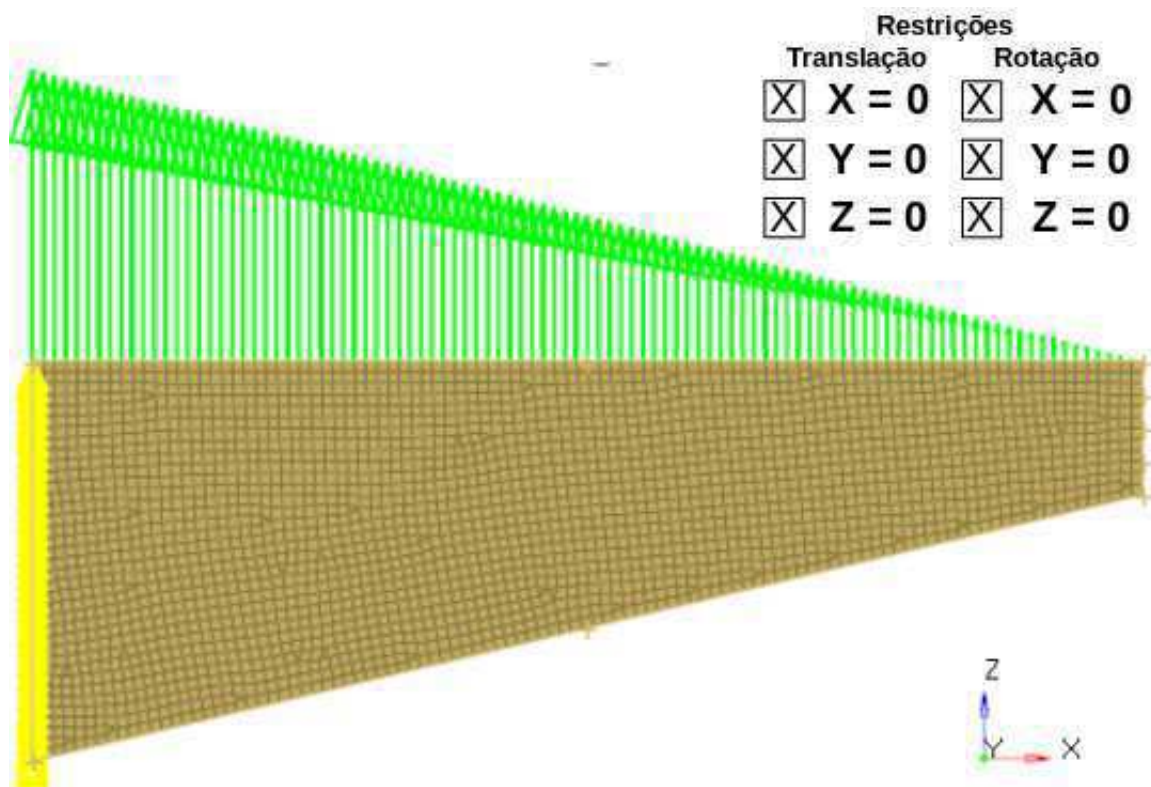
O modelo em elementos finitos foi gerado pelo software Hyperworks da Altair®, Figura 92.

Na Figura 93 foram comparado dois casos, a curva em azul representa uma comparação do algoritmo com uma simulação considerando as fibras de carbono orientadas na direção longitudinal da viga, ou seja, o sistema de referência em vermelho (Figura 91),

Figura 91 – Sistema de Referência Local da Barra Inferior



Fonte: Autor, 2019.

Figura 92 – Modelo em Elementos Finitos para  $L=100\text{mm}$ 

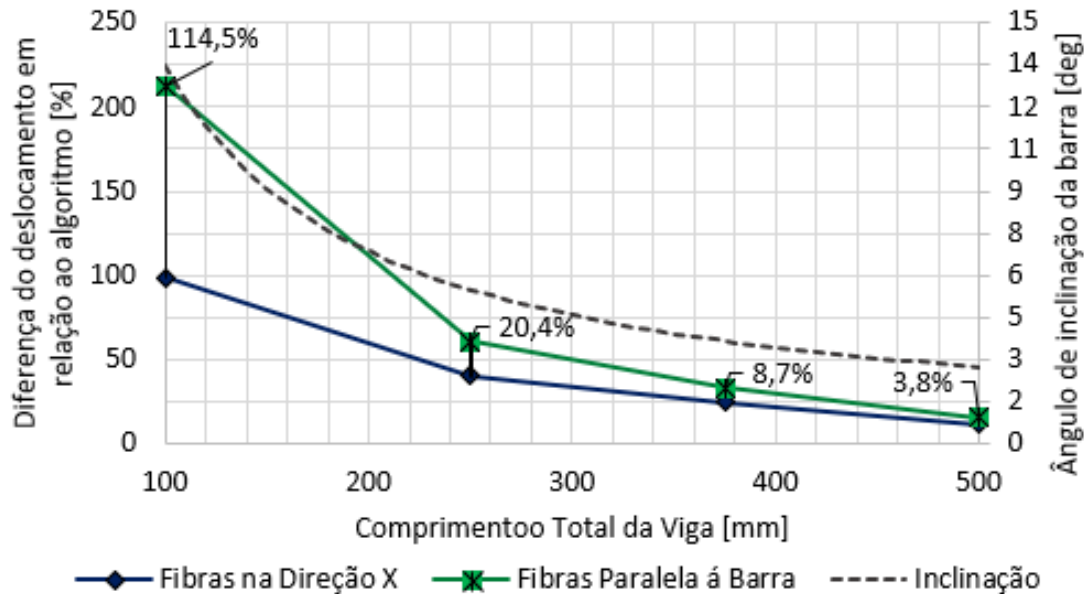
Fonte: Autor, 2019.

e é o modelo que melhor representa o algoritmo, pois ele não considera a inclinação da barra. Percebe-se que a curva em azul não é pequena e constante em toda a faixa avaliada e por isso, chega-se a conclusão de que ainda existe um erro relacionado ao modelo que não é proveniente da inclinação da barra. De toda forma, os resultados convergem quanto maior for o comprimento da viga.

O segundo caso a ser comparado, a curva em verde, representa uma comparação

do algoritmo com uma simulação considerando agora as fibras de carbono orientadas paralelamente às barras, o que seria o caso real, ou seja, o sistema de referência utilizado é o em azul claro (Figura 91), e é o modelo que mais representa a condição real. Percebe-se que quanto maior for o ângulo de inclinação da barra, maior será a diferença entre a curva verde e a azul, cujos valores da diferença estão apresentados acima da curva. E essa diferença é justamente o erro gerado somente pela desconsideração da inclinação na propriedade da barra.

Figura 93 – Influência da inclinação da barra



Fonte: Autor, 2019.

É possível perceber que quanto maior o comprimento da viga, mais a resposta converge, ou seja, os resultados do algoritmo se aproximam da simulação. Porém, com o intuito de minimizar essas imperfeições, foi essencial restringir o comprimento mínimo da primeira partição da longarina, sendo considerado então um valor mínimo de 500mm.

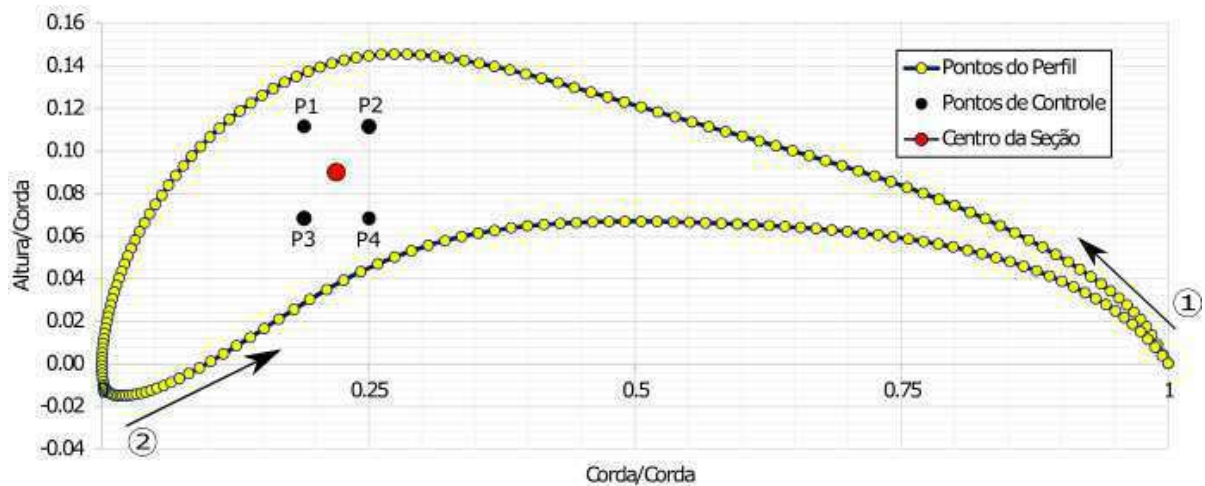
### 16.1.3 Dimensões máximas da seção

A largura e a altura da longarina são características de extrema importância para obter um resultado ótimo, por este motivo deve-se maximizar o espaço definido pelo perfil. Para isso, foi definido um equacionamento objetivando-se que distância mínima entre a seção da longarina e o perfil fosse de até 3 milímetros. Este valor foi adotado através da experiência do autor dentro do Aerodesign, pois sabe-se que é uma distância suficiente para que a balsa não seja rompida nessa região durante a construção.

A Figura 94 representa os pontos de controle adotados, os quais delimitam a fronteira da seção da longarina no perfil para um caso genérico.

O algoritmo desenvolvido para este módulo importa os pontos do perfil de um arquivo de texto e realiza em seguida uma varredura, começando pelos pontos superiores, da direita para a esquerda e finalizando com os pontos inferiores, da esquerda para a direita, conforme demonstrado na Figura 94. Nessa varredura, os pontos do perfil receberam uma denominação para facilitar a rotina do programa, sendo o ponto  $A = i$  e o  $B = i + 1$ .

Figura 94 – Representação dos pontos de controle



Fonte: Autor, 2019.

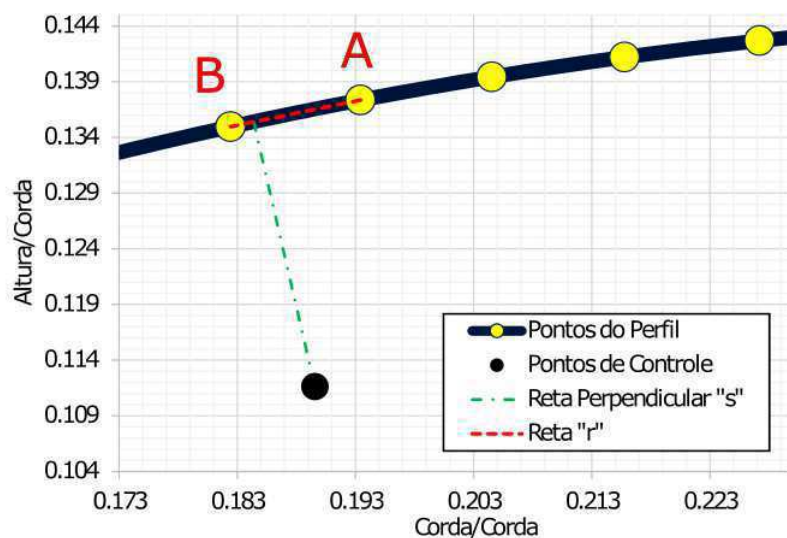
A lógica utilizada para extrair a distância mínima entre os pontos de controle e os pontos do perfil foi a de realizar uma aproximação entre os pontos do perfil por uma reta, denominada reta "r". Através dela obtêm-se uma reta perpendicular, denominada reta "s", a qual deverá passar pelo ponto de controle e seu módulo ditará a distância avaliada, conforme a Figura 95.

As Equações (16.2) e (16.1) representam as equações das retas, definidas como:

$$s : y = m_s x + (P_{iy} - m_s P_{ix}). \quad (16.1)$$

$$r : y = m_r x + (A_y - m_r A_x). \quad (16.2)$$

Figura 95 – Representação da distância avaliada



Fonte: Autor, 2019.

Entretanto, apenas ter como restrição uma distância mínima entre os pontos de controle e a extremidade do perfil não garante-se que a seção fique totalmente dentro do perfil, pois podem ocorrer casos nos quais os pontos de controle fiquem fora do perfil e

mesmo assim respeitem a condição de distância mínima. Com o objetivo de se evitar essas situações, foi implementado uma verificação adicional. Dada por:

$$Y_{i_{max}} = \frac{A_y - B_y}{A_x - B_x}(P_{i_x} - B_x) + B_y. \quad (16.3)$$

#### 16.1.4 Limitações do Algoritmo

É importante ressaltar que o estudo realizado neste trabalho envolveu a definição de algumas restrições. Entre elas tem-se:

- a altura da seção deve ficar entre  $12mm \leq H \leq 36mm$ ;
- as barras de carbono possuem dimensões fixas, sendo sua aresta de  $6mm$  e seu diâmetro interno de  $5mm$ ;
- a chapa de compensado constituiu-se de três lâminas, sendo a espessura do laminado de  $3mm$ ;
- o comprimento mínimo da primeira partição da longarina é de  $500mm$ ;
- a primeira partição deve possuir um afilamento constante.



## 17 APLICAÇÃO EM UM PROBLEMA REAL

O algoritmo desenvolvido é aplicado ao projeto da Equipe Albatroz Aerodesign da classe regular, do ano de 2019, para a segunda aeronave de protótipo. As constantes de projeto são: meia envergadura da asa  $L=1145\text{mm}$  e o carregamento é dado pela Equação (17.1).

$$P(x) = -2,3880E^{-18}x^6 + 7,6026E^{-15}x^5 - 9,0179E^{-12}x^4 + 4,7844E^{-09}x^3 - 1,2042E^{-06}x^2 + 1,0782E^{-04}x + 2,1710E^{-01}. \quad (17.1)$$

A semi-envergadura da asa é dividida em quatro partições, sendo seus dados apresentados na Tabela 27, onde "X" é a distância da quebra de partição até a raiz e "corda" é a corda naquela seção. As constantes " $y_{ACw}$ " e " $z_{ACw}$ " representam a posição horizontal do centro aerodinâmico (AC) e a posição vertical do centro do perfil, ambos adimensionais e referenciados pelo bordo de ataque, respectivamente. Por experiência da equipe, um fator de segurança de  $FS=1,20$  será considerado para realizar as análises.

Tabela 27 – Dados para cada partição da asa

Partição	1	2	3	4
X	0	630	1061	1145
corda	521,1	521,1	260,0	130,0
$y_{ACw}$		0,2508		
$z_{ACw}$		0,0976		
Perfil	<i>Possenti24022018</i>			

### 17.1 PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO

Os parâmetros de otimização do algoritmo são alterados e seus resultados avaliados. Como o tempo de processamento é uma informação importante dependendo da aplicação, este também é avaliado.

Os parâmetros da otimização serão definidos para o algoritmo com base na aplicação neste problema. Sendo que para cada resultado apresentado, foi realizada uma média de três otimizações.

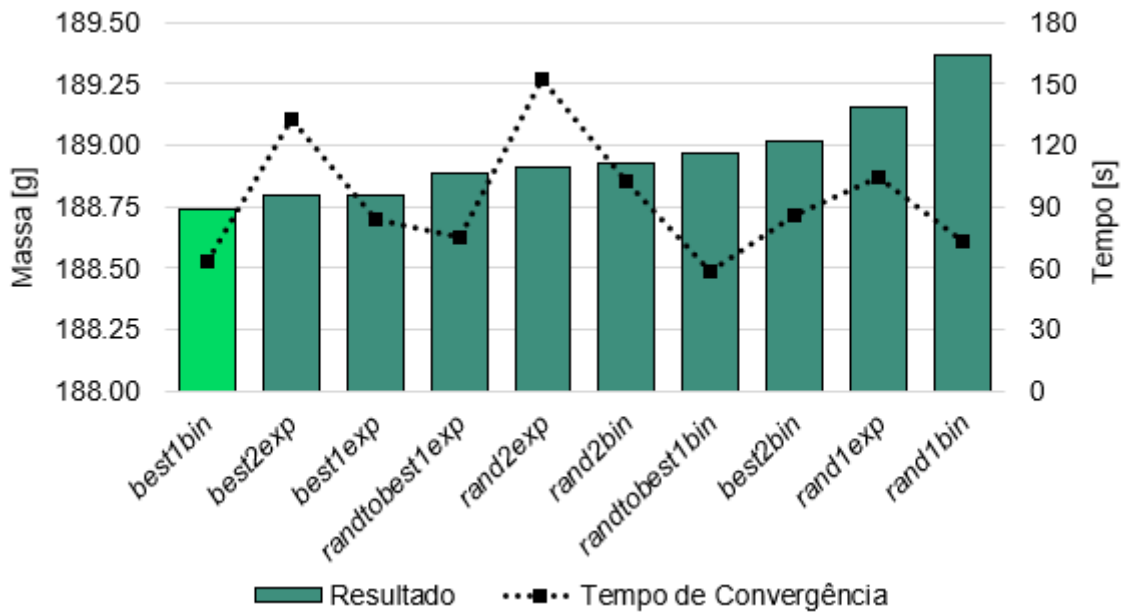
#### 17.1.1 Estratégia de Evolução Diferencial

Lembrando que é possível variar três parâmetros na definição da estratégia da evolução diferencial, sendo eles: o mecanismo de seleção; o número de diferenças e o modelo de recombinação. Por exemplo, os parâmetros da estratégia *best1bin* significam: *best* implica que é selecionado o vetor de menor valor da função objetivo para a próxima geração; *1* denota que apenas um par de vetores é utilizado na diferenciação ponderada e *bin* implica que o tipo de cruzamento é binominal.

O estudo foi então realizado, fazendo uma combinação destes parâmetros.

Observa-se da Figura 96 que a estratégia *best1bin* apresentou o melhor resultado e,

Figura 96 – Avaliação da Escolha da Estratégia de Evolução Diferencial



Fonte: Autor, 2019.

ainda assim, o seu tempo decorrido para o processamento está entre os melhores. Dessa forma, esta estratégia foi adotada para o algoritmo. Outra observação importante, é que as estratégias não implicaram num resultado tão distanciado, cuja variação foi de apenas algumas gramas.

### 17.1.2 Faixa de Mutação

Aumentando a constante de mutação, aumenta-se o raio de busca, porém reduz a velocidade de convergência. A constante de mutação é alterada em cada geração, sendo um valor randômico escolhido dentro da faixa especificada [mín, máx].

Um estudo para verificar a consequência de se alterar essa faixa foi realizado, apresentado na Figura 97. Lembrando que essa faixa deve estar entre [0, 2].

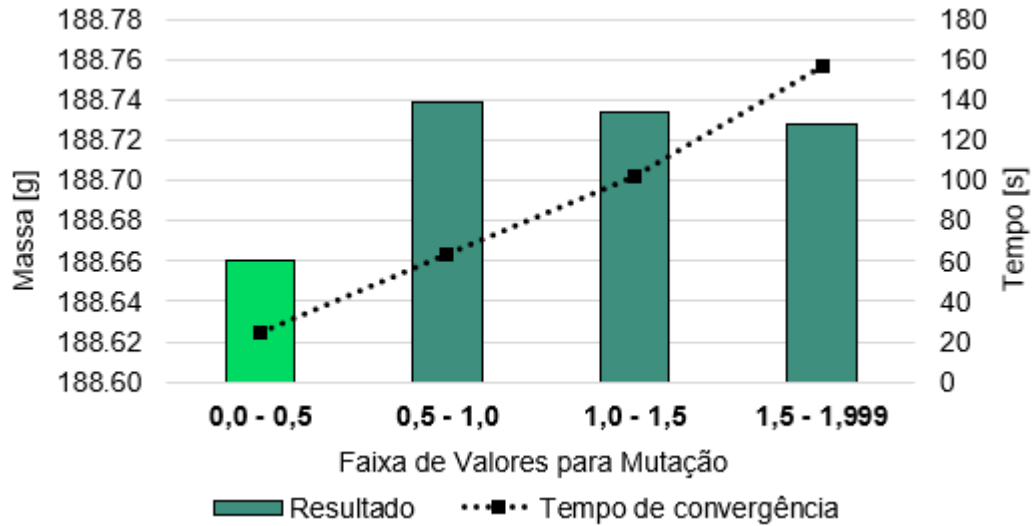
Verifica-se que o tempo de convergência é extremamente afetado e que apesar disso, os resultados permanecem praticamente os mesmos, independente da constante de mutação. Dessa forma, priorizando o tempo de processamento, uma faixa de 0 à 0,5 foi selecionada.

### 17.1.3 Faixa de Recombinação

Uma maior constante de recombinação, permite-se que uma maior quantidade de mutantes progridam para a próxima geração, com um risco de afetar a estabilidade da população. Diferentemente da faixa de mutação, na recombinação o otimizador possui o valor mínimo fixo em zero, sendo permitida a alteração apenas do limitante superior.

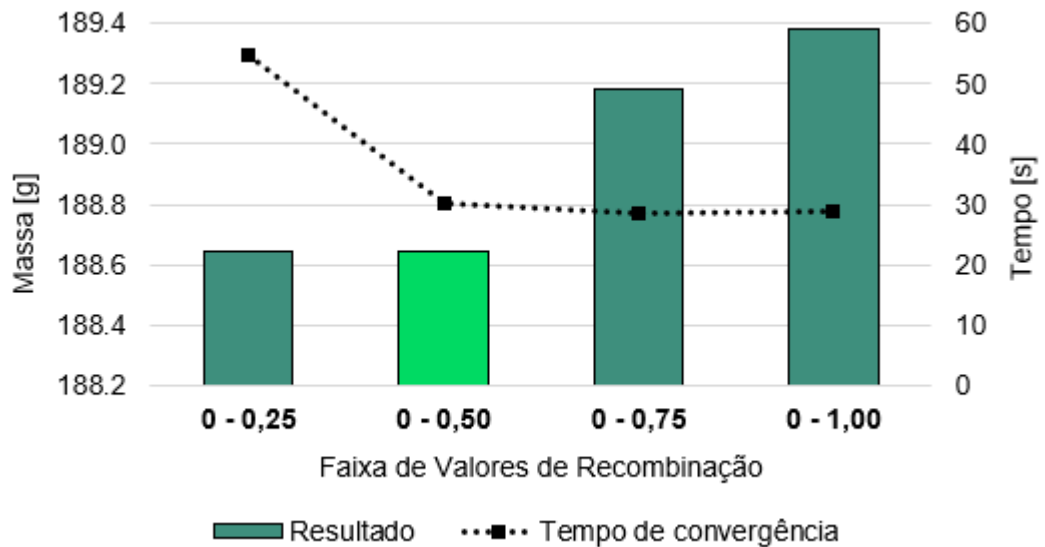
Realizando um estudo para verificar a consequência da escolha da faixa de recombinações, tem-se que os resultados se saíram um pouco melhores para uma faixa de 0 à 0,5 e que o tempo de convergência ficou maior para a menor faixa estudada, porém, se estabilizou para as demais. Assim, foi selecionada a faixa de recombinação de 0 à 0,5.

Figura 97 – Avaliação da Faixa de Mutação



Fonte: Autor, 2019.

Figura 98 – Avaliação da Faixa de Recombinação



Fonte: Autor, 2019.

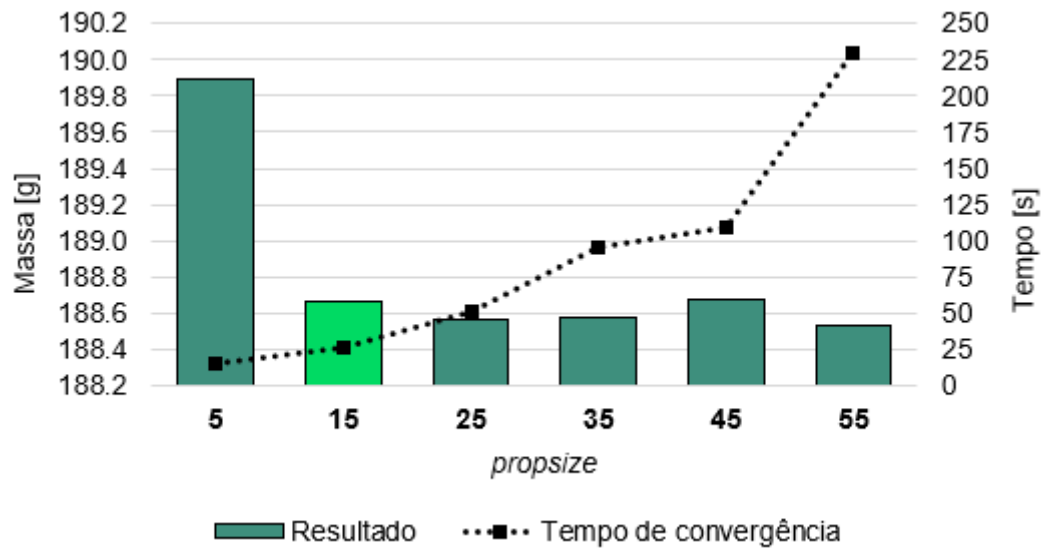
#### 17.1.4 Tamanho da População

O tamanho da população é definido com base numa multiplicação entre uma constante denotada por *popsize* e a quantidade de variáveis à serem otimizadas.

Foi realizado um estudo, variando está constante e observando a sua influência na resposta, cujos resultados estão presentes na Figura 99.

Nota-se que um alto tamanho da população reduz a velocidade de convergência e que um tamanho muito pequeno diminui a probabilidade de se obterem os melhores resultados. Dessa maneira, foi adotado o valor de 15 para a constante *popsize*, pois assim, a velocidade de convergência é alta e o resultado ficou entre os melhores.

Figura 99 – Avaliação do Tamanho da População



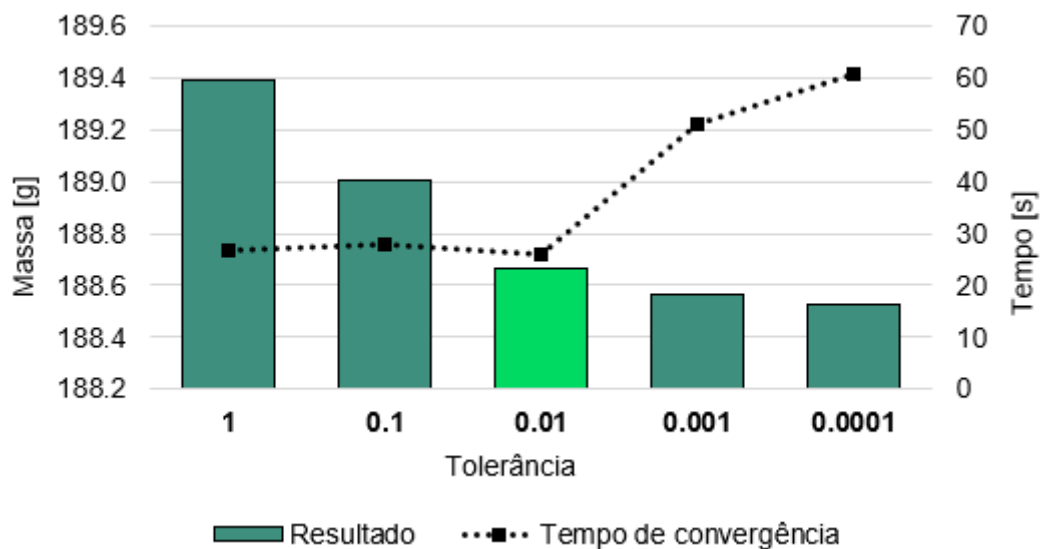
Fonte: Autor, 2019.

### 17.1.5 Tolerância

A tolerância é um dos critérios de parada do otimizador. Quando a média dos resultados da população multiplicada pela tolerância e, dividido pelo desvio padrão destes resultados for maior que o valor unitário, o processo de solução termina.

Avaliando a escolha da tolerância, chega-se a conclusão que quanto mais apertada for, melhor será o resultado, mas como consequência, maior será o tempo de processamento. Os resultados são apresentados na Figura 100.

Figura 100 – Avaliação da Tolerância



Fonte: Autor, 2019.

O valor padrão para a tolerância é de 0,01. Como podemos verificar, uma tolerância mais apertada que este valor não trás muitos benefícios, pois ganha-se muito pouco com o resultado e o tempo de convergência só aumenta. Dessa forma, este valor de tolerância

foi adotado para o algoritmo.

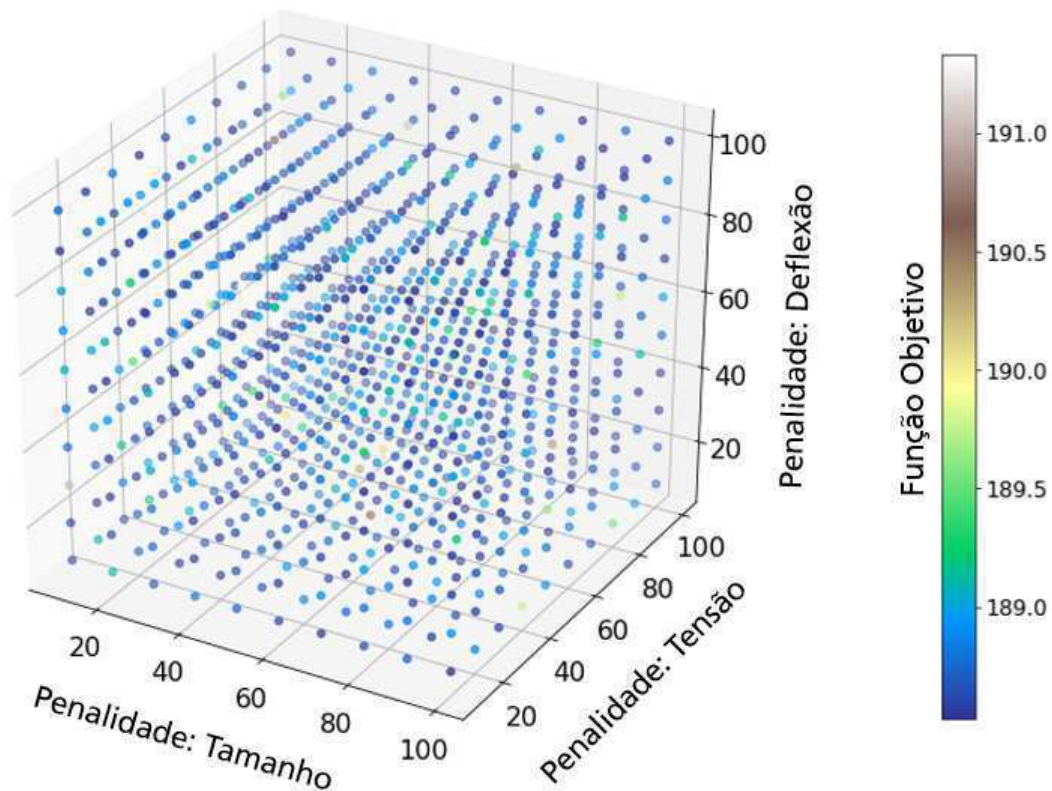
### 17.1.6 Influência dos valores de Penalidade

Mesmo quando a longarina não satisfaz as condições de projeto, o otimizador necessita de um valor de função objetivo para prosseguir com a otimização.

É aplicado então uma penalidade à função objetivo, visando condicionar o otimizador a procurar por outro espaço de solução. Entretanto, eis que surge uma questão, o valor que é utilizado para a penalidade influencia na busca pela resposta ótima?

Para responder a esse questionamento, realizou-se um pequeno estudo, que visa basicamente em rodar o otimizador utilizando diferentes valores de penalidade. A faixa avaliada para estes valores foi de 10 à 100. Lembrando que existem três penalidades no programa, uma devido ao tamanho da seção (quando ela não cabe no perfil), uma devido à tensão (ocorre falha estrutural), e uma última que é devido ao não cumprimento da restrição de máxima deflexão.

Figura 101 – Estudo da Influência dos Valores de Penalidade



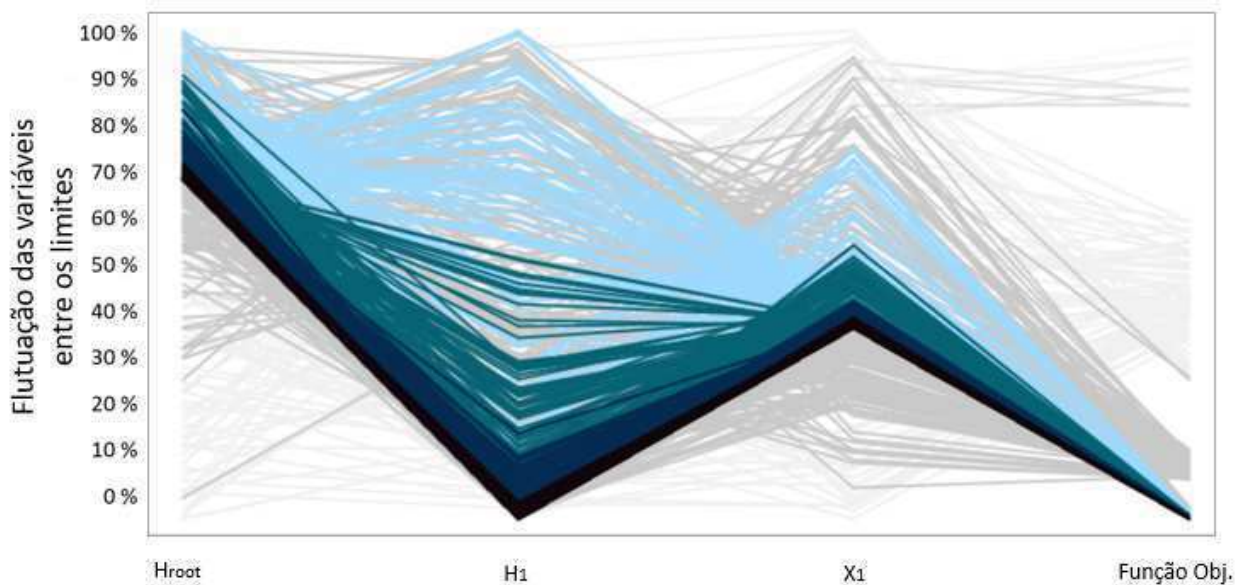
Fonte: Autor, 2019.

Como resultado, apresentado na Figura 101, percebe-se que não existiu uma região onde a resposta foi melhor ou pior devido à escolha da penalidade. Nota-se que em alguns pequenos casos, a resposta não convergiu exatamente para o ótimo, e isso decorre simplesmente por conta da otimização em si, que nem sempre entrega o resultado exato a cada vez em que o programa roda. Portanto, da análise, é possível concluir que os valores de penalidade não tenderam a influenciar na busca pela ótima resposta. É claro que, se fossem utilizados valores muito próximos de 1, iriam sim influenciar, pois na prática a penalidade deixaria de ser aplicada.

## 17.2 RESULTADOS FINAIS

Ao final, para fins comparativos, decidiu-se adotar um fator de segurança de 1,50. Do resultado do algoritmo, as variáveis ótimas encontradas para o problema em questão são:  $H_{root} = 28,7\text{mm}$ ;  $H_1 = 12,0\text{mm}$  e  $X_1 = 753,4\text{mm}$ . A massa final da estrutura é de 200,5g, representando um ganho de 29% com relação à longarina do primeiro protótipo, a qual foi otimizada manualmente.

Figura 102 – Caminho de Convergência das Variáveis

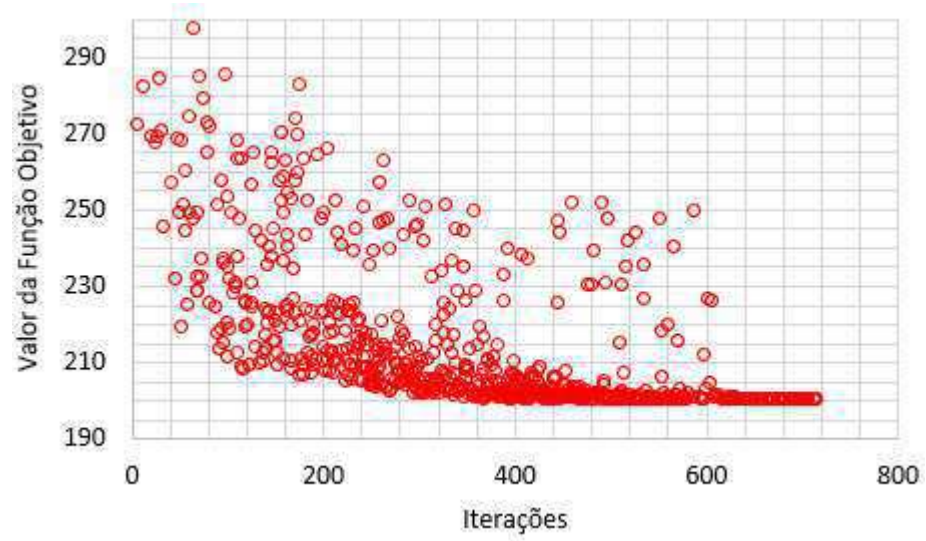


Fonte: Autor, 2019.

É possível observar o caminho de convergência das variáveis, Figura 102, onde os eixos verticais representam em porcentagem, de 0% à 100%, no qual 0% corresponde ao limite inferior e 100% ao limite superior imposto ao otimizador, ou seja,  $12\text{mm} < H_{root} < 36\text{mm}$ ,  $12\text{mm} < H_1 < 36\text{mm}$  e  $X_1$  de 500mm à 1145mm.

A respeito da convergência da resposta ao longo das iterações, Figura 103, nota-se que os valores da função objetivo vão cada vez mais se aproximando da resposta ótima, porém, no meio desse processo, existem alguns valores que geraram uma resposta bem diferente da tendência, grande maioria correspondente à ocorrência de mutação. Nesta otimização o número de iterações foi de 714, ou seja, ficou abaixo de um dos critérios de parada, no qual o limite imposto foi de 1000 iterações. O critério de parada neste caso ocorreu devido à tolerância, o que fica evidente visualizando os pontos finais do gráfico, os quais não apresentaram praticamente nenhum desvio.

Figura 103 – Convergência da função objetivo



Fonte: Autor, 2019.

## 18 CONCLUSÃO

Como motivação deste trabalho, definiu-se estabelecer uma metodologia para análise do comportamento à flexão de vigas compostas, aplicadas à um projeto de uma aeronave rádio controlada. Os estudos de caso apresentados forneceram toda a informação necessária para que um algoritmo pudesse ser desenvolvido, visando otimizar uma longarina de projeto.

A determinação das propriedades dos materiais foi um grande desafio, porém os resultados comparativos entre ensaios reais e simulação computacional foram bem interessantes.

Nota-se que o comportamento da viga caixão em material compósito foi determinada com grande precisão pelo modelo de viga de Timoshenko. Além disso, o comparativo dos resultados de tensão na seção transversal, da estrutura composta, devido ao esforço de flexão, pela metodologia apresentada e pela simulação computacional foram muito similares.

Os resultados provenientes do algoritmo desenvolvido para realizar os cálculos estruturais foram concordantes com a simulação computacional, quando respeita-se as limitações do algoritmo. Entretanto, é importante ressaltar que não foi possível testar todas as combinações possíveis, e que a aplicação à apenas um problema não significa que o erro encontrado será igual para todos os outros problemas.

O algoritmo foi desenvolvido de forma a auxiliar a encontrar uma estrutura leve num projeto preliminar, porém não substitui o projeto final em si. Deve-se avaliar posteriormente, se ocorreu falha no compensado e/ou na cola, visto que estes não calculados pelo algoritmo.

O trabalho desenvolvido serviu para ser aplicado ao projeto da Equipe Albatroz Aerodesign, da classe regular, e com a otimização foi possível reduzir a massa da longarina em 29%, comparando com a longarina do primeiro protótipo.



## 19 SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

A realização deste trabalho envolveu diversos temas e, infelizmente, não foi possível implementar tudo que o autor almejava. Deixa-se então, como sugestão de trabalhos futuros, para que outros possam contribuir para este projeto.

O efeito devido ao carregamento de torção na asa acabou não sendo considerado neste trabalho, porém é de grande importância para o projeto estrutural, pois em determinada aeronave a manobra crítica pode ser originada em condições onde a torção é bem significativa. Além disso, sugere-se avaliar mais profundamente a curva do ensaio de torção e realizar um estudo com uma análise não linear, pois foi este o comportamento das barras e da viga em caixão.

Pode-se avaliar a utilização de outros materiais, como madeira balsa ao invés de compensado e, de barras de carbono de diferentes dimensões. As implementações no programa acabam sendo fáceis.

O critério de máxima tensão foi utilizado para prever a falha das barras de carbono, porém, um melhor estudo poderia ser realizado, aplicando outros critérios de falha. Sabe-se que este critério não considera a interação entre os componentes de tensão no material e, seria necessário caso fosse implementado a consideração dos efeitos de torção da asa.

Um estudo mais detalhado visando analisar a perda de sustentação devido às interações aeroelásticas seria interessante em vez de limitar a deflexão na ponta da asa com base apenas em uma porcentagem da envergadura.

Um estudo do comportamento do contato entre as interfaces e da falha na cola seriam fascinantes. Além disso, implementar o cálculo de falha nas chapas de compensado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM 790**: Standard test methods for flexural properties of unreinforced and reinforced plastics and electrical insulating materials. United States, 2003. 11 p.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM 143 - 02**: Standard test method for shear modulus at room temperature. United States, 2009. 5 p.

ARAUJO, R. L. de. **Evolução Diferencial para Problemas de Otimização com Restrições Lineares**. Tese de Mestrado — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016.

DAMKILDE, L. General technical report. **Stress and Stiffness analysis of beam-sections**. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark, 2000.

Fiber Profile S.L. **Pultrusão**. 2019. Disponível em: <<http://www.fiberprofil.com/pt/pultrus-o/que-es/>>.

FREDEL, M. C. **Propriedades Mecânicas: Ensaio Fundamentais**. Florianópolis: CERMAT, Universidade Federal de Santa Catarina, 2010. v. 1.

FUGA, F. R. **ANÁLISE COMPUTACIONAL E ANALÍTICA DO COMPORTAMENTO À FLEXÃO DE VIGAS LAMINADAS**. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade do Estado de Santa Catarina, 2017.

GERE, J. M. **Mechanics of Materials**. 6. ed. United States: Thomson Learning, Inc, 2004.

HEARN, E. J. **Mechanics of Materials**. United Kingdom: University of Warwick, 1985.

HILL, R. **Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behaviour**. [S.l.]: Elsevier, 1964. v. 12. 199–212 p.

KRETSCHMANN, D. General technical report. **Mechanical properties of wood**. Madison, United States: Forest Products Laboratory, 2010.

MENDONÇA, P. d. T. R. de. **Materiais compostos e estruturas-sanduiche: projeto e análise**. Barueri, SP: Manole, 2005.

OLIN, H. B. **Construction: Principles, materials & methods**. New York, United States: Van Nostrand Reinhold, 1990.

Oliveira e Saramago. Evolução diferencial para problemas de otimização com restrições lineares. **Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**, 2005.

PALMA, H. A. L. **Determinação de Parâmetros Elásticos e de Resistência e a Influência da Madeira nas Propriedades de Compensados de Pinus elliottii Engelm. e Pinus taeda L.** Tese de Doutorado — Universidade Federal do Paraná, 1994.

POPOV, E. P. **Engineering Mechanics of Solids**. University of California, Berkeley: Prentice Hall, 1990.

SANTOS, J. R. R. B. Clayton Pereira da S. **Estudo Experimental das Propriedades Mecânicas para Compósito em Fibra de Carbono e Matriz Epóxi Pipefix (CFRP – Carbon Fiber Reinforced Polymer)**. Tese de Bacharelado — Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2015.

SOUZA, G. P. de. **Avaliação de Critérios de Falhas de Compósitos Poliméricos Reforçados Aplicados a Vigas sob Carregamento de Flexão**. Tese de Mestrado — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.

ZHAO Qun DING Yunliang, J. A layout optimization method of composite wing structures based on carrying efficiency criterion. **Chinese Journal of Aeronautics, ELSEVIER**, 2011.

```

1  """
2  Created on Sun Aug 19 14:03:16 2018
3
4  @author: Lucas Wagner Crestani
5  Equipe Albatroz Aerodesign
6
7  O autor aconselha a utilizar em mm, visto que as equações de rigidez estão em MPa.
8  """
9
10 from sympy import Symbol
11 from scipy import integrate
12 import timeit
13 from scipy.optimize import differential_evolution
14 #import matplotlib.pyplot as plt
15 import math
16 import numpy as np
17
18
19 """ Constantes de Projeto """
20 #Carregamento
21 spanLoad=[-2.3880E-18, 7.6026E-15, -9.0179E-12, 4.7844E-09, -1.2042E-06,
22 1.0782E-04, 2.1710E-01]
23
24 L = 1145 # Comprimento de meia envergadura
25 chord_x = [0, 630, 1061, L] # Posições onde há quebra de seção (para uma asa
26 multiafilada)
27 chord_chord = [521.1, 521.1, 260.0, 130.0] # Cordas onde há quebra de seção (para
28 uma asa multiafilada)
29 chord_airfoil =
30 ["Possenti_24_02_2018_optfoil-b2.dat", "Possenti_24_02_2018_optfoil-b2.dat", "Possenti_2
31 4_02_2018_optfoil-b2.dat", "Possenti_24_02_2018_optfoil-b2.dat"] # Perfis onde há
32 quebra de seção (para uma asa multiafilada)
33 chord_yAcw = [0.2508, 0.2508, 0.2508, 0.2508] # Posição ao longo da corda do centro
34 aerodinâmico, em relação ao bordo de ataque [onde há quebra de seção (para uma asa
35 multiafilada)]
36 chord_zAcw = [0.0976, 0.0976, 0.0976, 0.0976] # Posição na vertical do centro
37 aerodinâmico, em relação ao bordo de ataque [onde há quebra de seção (para uma asa
38 multiafilada)]
39
40
41 """ Limitações de Projeto """
42 FS = 1.5 # Fator de segurança de projeto
43 maxWingTipDeflection = 10*L/100 # Máxima deflexão permitida na ponta da asa em
44 porcentagem da envergadura
45
46
47 """ Constantes do Algoritmo - Não Alterar sem prévio estudo """
48 #Não alterar os valores do carbono e compensado abaixo:
49 carbon_e = 6 # Aresta da barra de carbono [mm]
50 carbon_d = 5 # Diâmetro interno da barra de carbono [mm]
51 plywood_t = 3 # Espessura da chapa de compensado [mm]
52 carbonbar_density = 25.67/1000 # Massa pelo comprimento da barra de carbono [g/mm]
53 plywood_density = 474E-6 # Densidade do compensado [g/mm³]
54 glue_density = 0.0002325 # Densidade da cola pela área de contato [g/mm²]
55 Xt = 400 # Tensão de ruptura da barra de carbono [MPa]
56 nFragmentsXt = 10 # Quantidade de pontos p/ avaliar a tensão na 1ª
57 partição
58
59
60 x = Symbol('x')
61
62 a = spanLoad[0] # x^6
63 b = spanLoad[1] # x^5
64 c = spanLoad[2] # x^4
65 d = spanLoad[3] # x^3
66 e = spanLoad[4] # x^2
67 f = spanLoad[5] # x^1
68 g = spanLoad[6] # x^0
69
70 """ Cálculo do Momento Fletor """
71 def moment(x,ctes):
72     (a, b, c, d, e, f, g, H1,Hroot, X1, L) = ctes

```

```

61 M =  $(-(g*x**2)/2 - (f*x**3)/3 - (e*x**4)/4 - (d*x**5)/5 - (c*x**6)/6 -$ 
     $(b*x**7)/7 - (a*x**8)/8) + x*(g*x + (f*x**2)/2 + (e*x**3)/3 + (d*x**4)/4 +$ 
     $(c*x**5)/5 + (b*x**6)/6 + (a*x**7)/7) + (-g*L - (f*L**2)/2 - (e*L**3)/3 -$ 
     $(d*L**4)/4 - (c*L**5)/5 - (b*L**6)/6 - (a*L**7)/7)*x + ((g*L**2)/2 + (f*L**3)/3$ 
     $+ (e*L**4)/4 + (d*L**5)/5 + (c*L**6)/6 + (b*L**7)/7 + (a*L**8)/8)$ 
62 return M
63
64 """ Cálculo do Variação da Altura na Primeira Partição """
65 def Heq(H1,Hroot,X1):
66     return lambda x: (H1-Hroot)/X1*x + Hroot
67
68 """ Cálculo das Equações de Rigidez para a Viga Caixaõ - Primeira Partição """
69 def calc_Stiffness_boxbeam(ctes,Heq): # 12mm < H < 36mm
70     (a, b, c, d, e, f, g, H1,Hroot, X1, L) = ctes
71
72 EI_boxbeam = lambda x: (1.1547*np.power(Heq(H1,Hroot,X1)(x),2) -
73     13.2751*Heq(H1,Hroot,X1)(x) + 62.4841)*np.power(10,6) #MPa
74 fc_GA_boxbeam = lambda x: (0.0229*np.power(Heq(H1,Hroot,X1)(x),3) -
75     4.1635*np.power(Heq(H1,Hroot,X1)(x),2) + 183.4859*Heq(H1,Hroot,X1)(x) -
76     891.4078)*10**(-8) #MPa
77
78 M1dM_dP = lambda x: (L - x)*(-(g*x**2)/2 - (f*x**3)/3 - (e*x**4)/4 - (d*x**5)/5
79     - (c*x**6)/6 - (b*x**7)/7 - (a*x**8)/8) + (L - x)*x*(g*x + (f*x**2)/2 +
80     (e*x**3)/3 + (d*x**4)/4 + (c*x**5)/5 + (b*x**6)/6 + (a*x**7)/7) + (-g*L -
81     (f*L**2)/2 - (e*L**3)/3 - (d*L**4)/4 - (c*L**5)/5 - (b*L**6)/6 - (a*L**7)/7)*(L
82     - x)*x + ((g*L**2)/2 + (f*L**3)/3 + (e*L**4)/4 + (d*L**5)/5 + (c*L**6)/6 +
83     (b*L**7)/7 + (a*L**8)/8)*(L - x)
84 V1dV_dP = lambda x: -(g*x) - (f*x**2)/2 - (e*x**3)/3 - (d*x**4)/4 - (c*x**5)/5 -
85     (b*x**6)/6 - (a*x**7)/7 + g*L + (f*L**2)/2 + (e*L**3)/3 + (d*L**4)/4 +
86     (c*L**5)/5 + (b*L**6)/6 + (a*L**7)/7
87
88 M_contribution = lambda x: (1/EI_boxbeam(x))*M1dM_dP(x)
89 V_contribution = lambda x: (fc_GA_boxbeam(x))*V1dV_dP(x)
90
91 # 0 < x < X1 Viga Caixaõ
92 [sec1_int_up_M,sec1_int_down_M] = integrate.quad(M_contribution, 0, X1)
93 [sec1_int_up_V,sec1_int_down_V] = integrate.quad(V_contribution, 0, X1)
94
95 deflection1 = ((sec1_int_up_M - sec1_int_down_M) + (sec1_int_up_V -
96     sec1_int_down_V))
97 return deflection1
98
99 """ Cálculo das Equações de Rigidez para a Barra de Carbono - Segunda Partição """
100 def calc_Stiffness_CarbonBar(ctes): # 12mm < H < 36mm
101     (a, b, c, d, e, f, g, H1,Hroot, X1, L) = ctes
102
103 EI_carbonBar = 21273879.9302217 #MPa
104 fc_GA_carbonBar = 0.00002390833333333334 #MPa
105
106 M2dM_dP = lambda x: (L - x)*(-(g*x**2)/2 - (f*x**3)/3 - (e*x**4)/4 - (d*x**5)/5
107     - (c*x**6)/6 - (b*x**7)/7 - (a*x**8)/8) + (L - x)*x*(g*x + (f*x**2)/2 +
108     (e*x**3)/3 + (d*x**4)/4 + (c*x**5)/5 + (b*x**6)/6 + (a*x**7)/7) + (-g*L -
109     (f*L**2)/2 - (e*L**3)/3 - (d*L**4)/4 - (c*L**5)/5 - (b*L**6)/6 - (a*L**7)/7)*(L
110     - x)*x + ((g*L**2)/2 + (f*L**3)/3 + (e*L**4)/4 + (d*L**5)/5 + (c*L**6)/6 +
111     (b*L**7)/7 + (a*L**8)/8)*(L - x)
112 V2dV_dP = lambda x: -(g*x) - (f*x**2)/2 - (e*x**3)/3 - (d*x**4)/4 - (c*x**5)/5 -
113     (b*x**6)/6 - (a*x**7)/7 + g*L + (f*L**2)/2 + (e*L**3)/3 + (d*L**4)/4 +
114     (c*L**5)/5 + (b*L**6)/6 + (a*L**7)/7
115
116 M2_contribution = lambda x: 1/EI_carbonBar*M2dM_dP(x)
117 V2_contribution = lambda x: fc_GA_carbonBar*V2dV_dP(x)
118
119 # X1 < x < L Barra de Carbono
120 [sec2_int_up_M,sec2_int_down_M] = integrate.quad(M2_contribution, X1, L)
121 [sec2_int_up_V,sec2_int_down_V] = integrate.quad(V2_contribution, X1, L)
122
123 deflection2 = ((sec2_int_up_M - sec2_int_down_M) + (sec2_int_up_V -
124     sec2_int_down_V))
125 return deflection2
126
127 """ Determinação do Momento de Inércia Transformado """
128 def calc_Iyy_t_bar_root(h,carbon_e,carbon_d,plywood_t):

```

```

110 carbon_Area = carbon_e**2 - math.pi*carbon_d**2/4
111 Iyy_carbonbars = 2*((carbon_e**4/12 - math.pi*carbon_d**4/64 + carbon_Area*(h/2
- carbon_e/2)**2))
112 Iyy_plywoods = 2*(plywood_t*h**3/12)
113
114 EI_carbonbars = (1.3563*h**2 - 20.7958*h + 121.7771)*10**6
115 EI_plywoods = (0.1341*h**2 - 3.1281*h + 21.9699)*10**6
116
117 Iyy_t_bar_root = Iyy_carbonbars + Iyy_plywoods*(EI_plywoods/EI_carbonbars)
118 return Iyy_t_bar_root
119
120 """ Cálculo da Massa da Longarina """
121 def
calc_massWing(Hroot,H1,X1,L,carbonbar_density,plywood_density,plywood_t,carbon_e,glue
_density):
122     mass_carbonbars = carbonbar_density*(L + math.sqrt((Hroot-H1)**2+X1**2))
123     mass_plywoods = 2*plywood_t*((Hroot+H1)/2)*X1*plywood_density
124     mass_glue = 3*glue_density*carbon_e*(L+math.sqrt((Hroot-H1)**2+X1**2))
125     massSemiWing = mass_carbonbars + mass_plywoods + mass_glue
126     return massSemiWing*2 # multiplcado por 2, pois considera toda a longarina e não
apenas meia asa
127
128
129 """ Função com o objetivo de verificar se a seção da longarina cabe no perfil
"""
130 def checkSectionSize(airfoilData,ySC,zSC,w,h,chord):
131
132     w = w/chord
133     h = h/chord
134     P1 = [(ySC - w/2), (zSC + h/2)]
135     P2 = [(ySC + w/2), (zSC + h/2)]
136     P3 = [(ySC - w/2), (zSC - h/2)]
137     P4 = [(ySC + w/2), (zSC - h/2)]
138
139
140     [linesData, columnsData] = np.shape(airfoilData)
141     airfoilData = np.float_(airfoilData)
142
143     checkSize = [1,1,1,1,0,0,0,0]
144     for iData in range(0,linesData-1):
145         Ay = airfoilData[iData][0]
146         Az = airfoilData[iData][1]
147         By = airfoilData[iData+1][0]
148         Bz = airfoilData[iData+1][1]
149
150         mr = (Bz-Az)/(By-Ay)
151         if mr == 0:
152             ms = 99999999
153         else:
154             ms = -1/mr
155
156         x1_intersec = [(Az-mr*Ay)-(P1[1]-ms*P1[0])]/(ms-mr)
157         x2_intersec = [(Az-mr*Ay)-(P2[1]-ms*P2[0])]/(ms-mr)
158         x3_intersec = [(Az-mr*Ay)-(P3[1]-ms*P3[0])]/(ms-mr)
159         x4_intersec = [(Az-mr*Ay)-(P4[1]-ms*P4[0])]/(ms-mr)
160
161         #1
162         if By <= x1_intersec and x1_intersec <= Ay:
163             y1_intersec = mr*x1_intersec + (Az-mr*Ay)
164             dist1 =
math.sqrt((x1_intersec-P1[0])**2+(y1_intersec-P1[1])**2)
165             if dist1< 3/(chord):
166                 checkSize[0] = 0
167
168         #2
169         if By <= x2_intersec and x2_intersec <= Ay:
170             y2_intersec = mr*x2_intersec + (Az-mr*Ay)
171             dist2 = math.sqrt((x2_intersec-P2[0])**2+(y2_intersec-P2[1])**2)
172             if dist2< 3/(chord):
173                 checkSize[1]= 0
174
175         #3
176         if By >= x2_intersec and x2_intersec >= Ay:
177             y3_intersec = mr*x3_intersec + (Az-mr*Ay)

```

```

176         dist3 = math.sqrt((x3_intersec-P3[0])**2+(y3_intersec-P3[1])**2)
177         if dist3< 3/(chord):
178             checkSize[2] = 0
179     #4
180     if By >= x2_intersec and x2_intersec >= Ay:
181         y4_intersec = mr*x4_intersec + (Az-mr*Ay)
182         dist4 = math.sqrt((x4_intersec-P4[0])**2+(y4_intersec-P4[1])**2)
183         if dist4< 3/(chord):
184             checkSize[3] = 0
185     #5
186     if P1[0] <= airfoilData[iData][0] and P1[0] > airfoilData[iData+1,0]:
187         Zmax1 = (airfoilData[iData+1][1] + (airfoilData[iData][1] -
188             airfoilData[iData+1][1])*(P1[0]-airfoilData[iData+1][0])/(airfoilData[iData]
189             a[0]-airfoilData[iData+1][0]))
190
191         if Zmax1 > P1[1]:
192             checkSize[4] = 1
193     #6
194     if P2[0] <= airfoilData[iData][0] and P2[0] > airfoilData[iData+1][0]:
195         Zmax2 = (airfoilData[iData+1][1] + (airfoilData[iData][1] -
196             airfoilData[iData+1][1])*(P2[0]-airfoilData[iData+1][0])/(airfoilData[iData]
197             a[0]-airfoilData[iData+1][0]))
198         if Zmax2 > P2[1]:
199             checkSize[5] = 1
200     #7
201     if P3[0] >= airfoilData[iData][0] and P3[0] < airfoilData[iData+1][0]:
202         Zmax3 = (airfoilData[iData+1][1] + (airfoilData[iData][1] -
203             airfoilData[iData+1][1])*(P3[0]-airfoilData[iData+1][0])/(airfoilData[iData]
204             ta[0]-airfoilData[iData+1][0]))
205         if Zmax3 < P3[1]:
206             checkSize[6] = 1
207     #8
208     if P4[0] >= airfoilData[iData][0] and P4[0] < airfoilData[iData+1][0]:
209         Zmax4 = (airfoilData[iData+1][1] + (airfoilData[iData][1] -
210             airfoilData[iData+1][1])*(P4[0]-airfoilData[iData+1][0])/(airfoilData[iData]
211             ta[0]-airfoilData[iData+1][0]))
212         if Zmax4 < P3[1]:
213             checkSize[7] = 1
214
215     if sum(checkSize) == 8:
216         checksize = 1
217         return checksize # OK, coube no perfil
218     else:
219         checksize = 0
220         return checksize # Não coube no perfil
221
222 """ Parte Principal do Algoritmo """
223 def main(inputs_opt):
224     Hroot = inputs_opt[0] # Altura da longarina na raiz
225     H1 = inputs_opt[1]*(36-12)+12 # Altura da longarina no final da primeira partição
226     X1 = inputs_opt[2] # Comprimento da primeira partição
227
228     ctes = (a, b, c, d, e, f, g, H1,Hroot, X1, L)
229
230     # Módulo para calcular a massa
231     massWing =
232     calc__massWing(Hroot,H1,X1,L,carbonbar_density,plywood_density,plywood_t,carbon_e,
233     glue_density)
234
235     # Módulo para checar a deflexão na ponta da asa
236     deflectionTip = calc__Stiffness_boxbeam(ctes,Heq) +
237     calc__Stiffness_CarbonBar(ctes)
238
239     # Módulo para checar a máxima tensão
240     Stress_boxbeam = lambda x:
241     moment(x,ctes)*Heq(H1,Hroot,X1)(x)/2/calc__Iyy_t_bar_root(Heq(H1,Hroot,X1)(x),carb
242     on_e,carbon_d,plywood_t)
243     Stress_carbonBar = moment(X1,ctes)*3/(carbon_e**4/12 - math.pi*carbon_d**4/64)
244

```

```

235 # Avaliar a tensão em diferentes pontos na primeira partição
236 stressFailure = np.ones(nFragmentsXt + 2)
237 for i in range(0,nFragmentsXt+1):
238
239     x = i*(Xl/nFragmentsXt)
240     Stress_x = Stress_boxbeam(x)
241     if Stress_x < Xt/FS:
242         stressFailure[i] = 0; # 0 ok, 1 falhou
243
244 # A barra de carbono da segunda partição falhou?
245 if Stress_carbonBar < Xt/FS:
246     stressFailure[i+1] = 0; # 0 OK, 1 FALHOU,
247
248
249
250 # Módulo para checar se a seção cabe no perfil por consequência da quebra de
251 seção da asa
252 checkSize = np.zeros(len(chord_x)+1)
253 for iSC in range(0,len(chord_x)):
254     xSC = chord_x[iSC] # Posição ao longo da envergadura (eixo X)
255     w = 18 # Largura da seção [mm] (3mm + 6mm + 6mm + 3mm)
256     h = Heq(Hl,Hroot,Xl)(xSC)
257     if xSC > Xl:
258
259         # Considerando a quebra de seção da longarina para a viga em caixão
260         w=18
261         h= Heq(Hl,Hroot,Xl)(Xl)
262         airfoil = chord_airfoil[iSC-1]
263         airfoilDataFile = open(airfoil).read()
264         airfoilData = ([item.split() for item in
265             airfoilDataFile.split('\n')[:-1]])
266         ySC = chord_yACw[iSC-1] # Posicao do centro da seção ao longo da corda
267         do perfil (% da corda, de 0 à 1)
268         zSC = chord_zACw[iSC-1] # Posição do centro da seção ao longo da
269         altura do perfil (altura sob a corda , de 0 à 1)
270         chord =
271         (chord_chord[iSC]-chord_chord[iSC-1])*((Xl-chord_x[iSC-1])/(chord_x[iSC]-c
272         hord_x[iSC-1])) + chord_chord[iSC-1] # Corda da asa naquela
273         seção
274         checkSize[len(chord_x)] = checkSectionSize(airfoilData,ySC,zSC,w,h,chord)
275
276         # Considerando a região onde só tem barra de carbono
277         w = 6 # Largura da seção, como é apenas 1 barra, é 6mm
278         h = 6 # Altura da seção, como é apenas 1 barra, é 6mm
279
280         airfoil = chord_airfoil[iSC]
281         airfoilDataFile = open(airfoil).read()
282         airfoilData = ([item.split() for item in airfoilDataFile.split('\n')[:-1]])
283         ySC = chord_yACw[iSC] # Posicao do centro da seção ao longo da corda do
284         perfil (% da corda, de 0 à 1)
285         zSC = chord_zACw[iSC] # Posição do centro da seção ao longo da altura do
286         perfil (altura sob a corda , de 0 à 1)
287         chord = chord_chord[iSC] # Corda da asa naquela seção
288
289         checkSize[iSC] = checkSectionSize(airfoilData,ySC,zSC,w,h,chord)
290
291
292
293 # Aplicando Penalidade de Tamanho
294 penalty_size = 20
295 if all(checkSize==1):
296     penalty_size = 1
297
298 # Aplicando Penalidade de Tensão
299 penalty_stress = 30
300 if all(stressFailure==0):
301     penalty_stress = 1
302
303 # Aplicando Penalidade de Deflexão
304 penalty_deflection = 1
305 if deflectionTip > maxWingTipDeflection:
306     penalty_deflection=40
307

```



```
298
299     #save_each = np.zeros(4)
300     #save_each[0] = massWing*penalty_deflection*penalty_stress*penalty_size
301     #save_each[1] = Hroot
302     #save_each[2] = H1
303     #save_each[3] = X1
304     #save.append(list(save_each))
305     #print(massWing)
306     return massWing*penalty_deflection*penalty_stress*penalty_size
307
308
309 tic = timeit.default_timer()
310 #save = []
311 bounds = [(12, 36), (0, 1), (500,L)] # Hroot, H1, X1
312 result = differential_evolution(main, bounds)
313
314 print("Massa:", result.fun)
315 print("Hroot:", result.x[0])
316 print("H1:", (result.x[1]*(36-12)+12))
317 print("X1:", result.x[2])
318
319 toc = timeit.default_timer()
320 print("RUN TIME : {0}".format(toc-tic))
321
322
```