

Neste trabalho é apresentado um método de desenvolvimento de uma lei de controle para sistemas chaveados afins comutados a tempo discreto a partir da função 'max' que leve a uma região de equilíbrio aceitável e garanta a estabilidade prática deste.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Jackson May Dezuo

Joinville, 2019

ANO
2019

RENÊ ADRIANO WEISE | CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS EM TEMPO
DISCRETO



UDESC

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO PROFISSIONAL EM ENG. ELÉTRICA - PPGPEE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS EM TEMPO DISCRETO

RENÊ ADRIANO WEISE

JOINVILLE, 2019

RENÊ ADRIANO WEISE

CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS EM TEMPO DISCRETO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Engenharia Elétrica, do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Jackson May Dezuo

JOINVILLE

2019

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Weise, Renê Adriano
Controle de sistemas chaveados afins em tempo discreto /
Renê Adriano Weise. -- 2019.
97 p.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuó
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa
de Pós-Graduação Profissional em Engenharia Elétrica,
Joinville, 2019.

1. Sistemas chaveados. 2. Sistemas de tempo discreto. 3.
Lei de controle. 4. Desigualdades matriciais lineares. 5.
Estabilidade de Lyapunov. I. Dezuó, Tiago Jackson May. II.
Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de
Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação
Profissional em Engenharia Elétrica. III. Título.

Controle de Sistemas Chaveados Afins em Tempo Discreto

por

Renê Adriano Weise

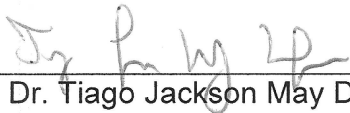
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

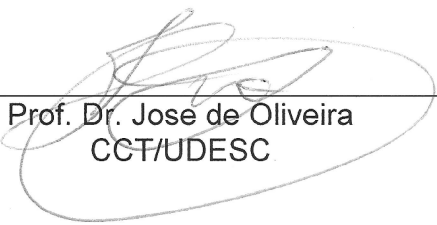
Área de concentração em “Automação de Sistemas”
e aprovada em sua forma final pelo

**CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENGENHARIA ELÉTRICA
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.**

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Tiago Jackson May Dezuo
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Jose de Oliveira
CCT/UDESC



Prof. Dr. César Cataldo Scharlau
ENE/UFSC

Joinville, SC, 16 de dezembro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer inicialmente aos meus pais, Herival Weise e Idelena Maria da Silva Weise, por serem sempre fonte de inspiração, terem sido sempre onde pude me apoiar e por me incentivarem continuamente a alçar voos mais altos.

Aos meus irmãos, Renato Ryan Weise e Lara Martina Weise, por serem fundamentais na minha vida e por estarem sempre ao meu lado.

A minha esposa, Suelen Bachmann, por todo o amor e carinho que compartilha diariamente comigo e por toda a paciência durante os momentos de foco que este trabalho exigiu.

A todos os meus demais familiares que foram importantes na minha jornada.

Ao professor Dr. Tiago Jackson May Dezuo que ao me orientar demonstrou contínua disposição a ajudar e contribuir e foi sempre fonte de conhecimento para que este trabalho pudesse se concretizar.

A todos os demais professores, colegas de trabalho e colegas de estudos que contribuíram para a expansão dos meus conhecimentos e experiências.

Meu muito obrigado a todos vocês.

Não há arte patriótica nem ciência patriótica. As duas, tal como tudo o que é bom e elevado, pertencem ao mundo inteiro e não podem progredir a não ser pela livre ação recíproca de todos os contemporâneos, tendo sempre em mente aquilo que herdamos do passado. (Johann Goethe)

RESUMO

Neste trabalho será apresentado um método de desenvolvimento de uma lei de controle para sistemas chaveados afins comutados a tempo discreto a partir da função ‘max’ que leve a uma região de equilíbrio aceitável e garanta a estabilidade prática deste. Este método terá como base a técnica contínua de controle a partir da função ‘max’ para sistemas chaveados afins. Serão explicadas as diferentes abordagens que cada técnica demanda e os problemas que o controle a tempo discreto acarreta, sendo uma destas a necessidade da região de equilíbrio. Serão demonstrados ainda um método para a determinação desta região de equilíbrio minimizando o volume de uma região de convergência determinada pelo valor unitário das funções auxiliares de Lyapunov. O projeto do controle através deste método é descrito como um problema de desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMI), problema este resolvido com o auxílio das ferramentas computacionais. Assim, por fim, são demonstrados os resultados simulados para a técnica proposta.

Palavras-chave: Sistemas Chaveados, Controle a Tempo Discreto, Projeto de Lei de Chaveamento, LMIs.

ABSTRACT

This work shows a method to develop a control law for discrete-time switched affine systems based on the ‘max’ function that leads to an acceptable equilibrium region and guarantees its practical stability. This method is based on the continuous control technique that uses the ‘max’ function for switched affine systems. It is explained the different approaches that each technique demands and the problems that the discrete time control entails, one of them being the need for the equilibrium region. A method for determining this equilibrium region is demonstrated by minimizing the volume of a convergence region determined by the unit value of the Lyapunov auxiliary functions. The control design through this method is described as a linear matrix inequalities (LMI) problem, which is solved with the aid of computational tools. Finally, the simulations and their results for the proposed technique are demonstrated.

Keywords: Switched Systems, Discrete Time Control, Switching Rule Project, LMIs.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação generalizada de um sistema computacional usado para controle. . .	27
2.2	Exemplo de trajetória das variáveis de estado relativo a estabilidade.	33
3.1	Representação generalizada de um sistema chaveado contínuo	38
3.2	Representação generalizada de um sistema chaveado discreto.	39
3.3	Casos (a) e (b) na superfície de chaveamento.	39
3.4	Conversor de potência Buck-Boost	44
3.5	Representação generalizada de um sistema chaveado contínuo	45
3.6	Representação generalizada de um sistema chaveado contínuo	46
4.1	Variáveis de estado ao longo do tempo para $\delta = 1$	51
4.2	Sinal de chaveamento para $\delta = 1$	51
4.3	Variáveis de estado ao longo do tempo para $\delta = -1$	52
4.4	Sinal de chaveamento para $\delta = -1$	52
4.5	Corrente (a) e tensão (b) do conversor controlado.	55
4.6	Trajetoária dos erros e região de atração.	55
5.1	Gráfico das funções de Lyapunov auxiliares ao longo do tempo.	58
5.2	Conversor de potência Buck ideal.	62
5.3	Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 400$	63
5.4	Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha = 400$	64
5.5	Trajetoária de erros para $\alpha = 400$	64
5.6	Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 2500$	65
5.7	Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha = 2500$	66
5.8	Trajetoária de erros para $\alpha = 2500$	66
5.9	Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 3 \times 10^4$	68
5.10	Sinal de chaveamento para $\alpha = 3 \times 10^4$	68
5.11	Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 3 \times 10^2$	69
5.12	Sinal de chaveamento para $\alpha = 3 \times 10^2$	70
7.1	Corrente (a) e tensão (b) do conversor para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5 \times 10^{-5}$. .	78
7.2	Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5 \times 10^{-5}$. .	79
7.3	Trajetoária de erros para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5 \times 10^{-5}$	79
7.4	Corrente (a) e tensão (b) do conversor para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$. .	80
7.5	Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$. .	80
7.6	Trajetoária de erros para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$	81
7.7	Corrente (a) e tensão (b) do conversor para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$. .	82

7.8	Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema Buck-Boost discretizado. . . .	82
7.9	Trajetória de erros para o sistema Buck-Boost discretizado.	83
7.10	Plano de fases para o conversor Buck-Boost contendo a superfície de chaveamento.	83
7.11	Variáveis de estado ao longo do tempo para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).	85
7.12	Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).	85
7.13	Trajetória de erros para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).	86
7.14	Detalhe da trajetória de erros para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).	86
7.15	Variáveis de estado ao longo do tempo para o sistema proposto em (TROFINO et al., 2011).	87
7.16	Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema proposto em (TROFINO et al., 2011).	88
7.17	Trajetória de erros para o sistema proposto em (TROFINO et al., 2011).	88
7.18	Variáveis de estado ao longo do tempo para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).	89
7.19	Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).	90
7.20	Trajetória de erros para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).	90
7.21	Detalhe da trajetória de erros para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).	91

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros numéricos utilizados na simulação.	54
5.1	Parâmetros numéricos para o conversor buck.	63
7.1	Parâmetros para o conversor Buck.	77
7.2	Parâmetros para o conversor Buck-Boost.	81

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADC	<i>Analog Digital Converter</i> (Conversor analógico digital)
DAC	<i>Digital Analog Converter</i> (Conversor digital analógico)
ZOH	<i>Zero Order Holder</i> (Segurador de ordem zero)
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> (Desigualdades matriciais lineares)
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequalities</i> (Desigualdades matriciais bilinear)
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (Modulação por largura de pulso)

LISTA DE SÍMBOLOS

$*$	Componente simétrico de uma matriz
x	Vetor contendo as variáveis de estado
x_o	Vetor com os valores iniciais das variáveis de estado
x_{eq}	Valores de equilíbrio das variáveis de estado
e	Vetor contendo os erros das variáveis de estado
θ	Vetor contendo a proporção das combinações convexas
$\bar{\theta}$	Vetor contendo a proporção das combinações convexas no equilíbrio
Θ	Simplex unitário contendo todas as possibilidades para o vetor θ
λ	Vetor dos autovalores de uma matriz da dinâmica
σ	Sinal de comutação do sistema chaveado
ξ	Região de atração para um modo específico
Λ	Região de atração de um sistema chaveado
N_i	i-ésimo componente de um vetor genérico N
A_c	Vetor de matrizes da dinâmica contínua
B_c	Vetor dos termos afim de um sistema contínuo
K_c	Vetor dos termos afim para o sistema contínuo com base alterada para o erro
A_d	Vetor de matrizes da dinâmica discreta
B_d	Vetor dos termos afim de um sistema discreto
K_d	Vetor dos termos afim para o sistema discreto com base alterada para o erro
P	Termo quadrático da função de Lyapunov
S	Termo linear da função de Lyapunov
I_n	Matriz identidade de ordem n
1_m	Vetor formado por componentes unitários de ordem m

$0_{m \times n}$	Matriz formada por valores nulos de ordem m por n
t	Instante de tempo qualquer
T	Período de comutação do sistema chaveado
t_k	Tempo na amostragem k
k	Instante de amostragem qualquer
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reais
$\mathbb{R}^n$	Vetor de números reais de ordem n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matriz de números reais de ordem n por m
$\mathcal{M}$	Conjunto de modos de um sistema chaveado
$\mathfrak{N}_\theta$	Anulador linear
$\otimes$	Produto de Kronecker
$ \cdot $	Operador de norma euclidiana
$ \cdot $	Valor absoluto de uma variável

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Motivação	23
1.2	Estrutura do Trabalho	24
2	CONCEITOS BÁSICOS	27
2.1	Sistemas Discretos	27
2.1.1	Discretização de sistemas contínuos	28
2.2	Desigualdades Matriciais Lineares	29
2.2.1	Artifícios para resolução dos problemas	29
2.2.1.1	Mudança de variáveis	30
2.2.1.2	Complemento de Schur	30
2.2.1.3	Procedimento-S	31
2.2.1.4	Lema de Finsler	31
2.2.2	Método de resolução das LMIs	32
2.3	Estabilidade e Teoria de Lyapunov	32
2.3.1	Condições de estabilidade	32
2.3.2	CrITÉrio de Lyapunov para sistemas contínuos	33
2.3.3	CrITÉrio de Lyapunov para sistemas discretos	35
3	SISTEMAS CHAVEADOS	37
3.1	Sistemas Chaveados Contínuos	37
3.2	Sistemas Chaveados Discretos	38
3.3	Modos Deslizantes	39
3.3.1	Modos deslizantes em sistemas contínuos	40
3.3.2	Combinação convexa dos subsistemas para sistemas discretos	41
3.4	Pontos de Equilíbrio	42
3.4.1	Pontos de equilíbrio em um sistema chaveado contínuo	42
3.4.2	Pontos de equilíbrio em um sistema chaveado discreto	43
3.5	Modelagem de um Sistema Chaveado	44
4	ESTADO DA ARTE	49
4.1	Controle de Sistemas Chaveados Contínuos com Dados Amostrados	49
4.1.1	Exemplo numérico	50

4.2	Controle de Sistema Chaveados Naturalmente Discretos	52
4.2.1	Exemplo numérico	54
4.3	Abordagem Através de Desigualdades de Lyapunov-Metzler	56
5	PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO UTILIZANDO A FUNÇÃO ‘MAX’ PARA SISTEMAS CONTÍNUOS	57
5.1	Resultados das simulações	62
5.1.1	Exemplo 1	62
5.1.2	Exemplo 2	67
6	PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO UTILIZANDO A FUNÇÃO ‘MAX’ PARA SISTEMAS DISCRETOS	71
7	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES UTILIZANDO A LEI DE CHAVEAMENTO DESENVOLVIDA PARA SISTEMAS DISCRETOS	77
7.1	Exemplo 1	77
7.2	Exemplo 2	81
7.3	Exemplo 3	84
7.4	Exemplo 4	87
7.5	Exemplo 5	88
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da sua história, a humanidade vem tentando entender o ambiente que a rodeia e controlá-lo através da criação de modelos precisos o suficiente e, a medida do possível, impor comportamento com base nesses modelos e no resultado esperado. Junto com a evolução humana veio também o melhor entendimento dos vários fenômenos que ela observa resultando assim em um refinamento da ciência e das teorias nas quais ela se baseia.

Na área de controle o processo evolutivo não foi diferente e desde os estudos de James Clerk Maxwell com os governadores centrífugos (MAXWELL, 1868) esta área vem ampliando exponencialmente o número de técnicas e teorias de como resolver os problemas que o mundo ao redor impõe.

Dentre os campos que a área de controle estuda estão os sistemas híbridos, sistemas estes que podem alterar suas características dinâmicas a partir de eventos discretos (LIBERZON, 2003). Esse tipo de sistema descreve bem o comportamento de plantas que sofrem alterações abruptas no seu comportamento como saturação de uma das variáveis, mudanças de estado de uma válvula, falha de um componente ou mudança do comportamento de um sistema térmico com termostato, e por isso tem recebido especial atenção nos últimos anos.

Uma subclasse dos sistemas híbridos é a dos sistemas chaveados. Sistemas chaveados possuem como característica um número finito de subsistemas com dinâmicas próprias e têm seu funcionamento controlado por uma regra de comutação entre eles. Conversores de potência são os exemplos mais comuns desta subclasse e são usados extensivamente no desenvolvimento e teste dos métodos de controle dentro dos sistemas chaveados (TROFINO et al., 2009a, 2009c; GARCIA et al., 2010, 2009; MAINARDI JUNIOR et al., 2015). Esta subclasse será a fonte de estudo deste trabalho, em particular serão analisados sistemas chaveados com termos afins quando estes são limitados por uma comutação a tempo discreto.

1.1 MOTIVAÇÃO

Diversos trabalhos vêm abordando métodos para o projeto de leis de controle para sistemas chaveados e, em geral, estes trabalhos optam por regras de chaveamento baseadas nos estados do sistema. Este tipo de regra utiliza ou a função ‘min’ (GEROMEL; COLANERI, 2006a; SANTOS; DEAECTO, 2014; DUAN; WU, 2012; MAINARDI JUNIOR et al., 2013) ou a função ‘max’ (TROFINO et al., 2009b; SCHARLAU et al., 2014) dentro de um conjunto de funções Lyapunov auxiliares, tendo este conjunto o mesmo número de componentes que o conjunto de subsistemas e estando ambos relacionados entre si.

Por outro lado, a aplicação prática das técnicas contínuas de controle para sistema chaveados podem ser difíceis de serem implementadas tendo em vista que elas demandam, na maioria das vezes, uma frequência de chaveamento elevada. Como frequências de chaveamento elevadas nesses sistemas podem significar maiores perdas de eficiência ou maior estresse nos componentes, ou ainda serem ineficazes devido ao tempo necessário para a comutação efetiva das chaves, faz-se necessário restringir essa frequência para a maioria das aplicações.

Enquanto trabalhos que abordem técnicas para o projeto de leis de controle para sistemas chaveados a tempo discreto baseadas na função ‘max’ ainda são escassos, uma quantidade considerável de trabalhos trazem diversas propostas para a resolução do problema utilizando a função ‘min’. Alguns desses trabalhos continuam a utilizar as dinâmicas contínuas como base mas permitem um excursionamento das variáveis dentro de uma área de convergência baseada no período máximo de comutação (HETEL; FRIDMAN, 2012, 2013). Outros, por sua vez, utilizam a dinâmica discreta como ponto de partida e desenvolvem leis de chaveamento específicas (DEAECTO; GEROMEL, 2017; EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017). Esta última abordagem permite que esta técnica seja empregada tanto por sistemas contínuos que são discretizados quanto por sistemas naturalmente discretos e, portanto, apresenta vantagens em relação ao primeiro tipo.

Sendo assim é de interesse deste trabalho o estudo de uma técnica para o projeto de uma lei de controle para sistemas chaveados afins comutados a tempo discreto a partir da função ‘max’. Esta técnica também partirá do modelo de planta já discretizada e contará com uma tentativa de implementar uma região de atração que relaxe as condições de projeto e permita a estabilidade do sistema dentro dessa zona considerada.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 8 capítulos, sendo estes descritos a seguir.

- Capítulo 1: são realizadas as introduções, discutido o problema sobre o qual pretende-se agir, descritas as motivações iniciais desta dissertação e por fim dividida a estrutura do trabalho;
- Capítulo 2: são descritos os conceitos matemáticos necessários para a compreensão dos demais capítulos e de como os problemas propostos neste texto têm sua resolução alcançada. Para isso são explicadas a discretização de sistemas lineares, as ferramentas para resolução das desigualdades lineares matriciais e a teoria de estabilidade de Lyapunov;

- Capítulo 3: aqui são analisadas as definições de sistemas chaveados, como são descritos matematicamente, o que são modos deslizantes, a representação de Filippov, os pontos de equilíbrio e como é modelado um sistema chaveado;
- Capítulo 4: neste capítulo são analisadas diversas técnicas que visam a resolução do problema de interesse ou de problemas similares para que, posteriormente, possam ser diferenciadas da técnica sugerida;
- Capítulo 5: a técnica de controle de sistemas chaveados contínuos utilizando a função ‘max’ é deduzida e demonstrada. Esta técnica é importante pois trata da técnica contínua da qual a versão discreta desenvolvida neste projeto é análoga;
- Capítulo 6: aqui são realizadas todas as deduções matemáticas para encontrar as LMIs que levam a técnica de controle para sistemas chaveados a tempo discreto a uma solução estabilizante;
- Capítulo 7: neste capítulo são demonstradas as simulações ao empregar o método desenvolvido e os resultados obtidos;
- Capítulo 8: No capítulo de conclusões são revisadas todas as observações relevantes durante o desenvolvimento do projeto, discutidos quais são os resultados importantes obtidos para a técnica proposta e quais os futuros desenvolvimentos que podem ser feitos a partir deste trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos que são utilizados durante todo o trabalho a fim de munir o leitor das ferramentas básicas para a compreensão de todo o texto.

Será explicado, rapidamente, como sistemas lineares são amostrados e têm então sua dinâmica representada no domínio discreto. Em seguida as desigualdades lineares matriciais são discutidas bem como os artifícios utilizados para encontrar a resolução dos problemas propostos. Por fim são apresentadas a teoria de estabilidade de Lyapunov e as adaptações necessárias para ser utilizada para sistemas discretos.

2.1 SISTEMAS DISCRETOS

Ainda antes do amplo uso de computadores para controle de sistemas, os primeiros estudos sobre o controle de sistemas com dados amostrados começaram a aparecer, sendo eles pesquisas sobre frequência de amostragem, métodos alternativos para equações diferenciais e transformadas para o domínio discreto (ASTROM; WITTENMARK, 1997). O uso de computadores para o controle de sistemas, por sua vez, só começou a ser analisado na metade do século XX. De início as características dos computadores da época, como tamanho e consumo de energia, limitavam seu uso mas com o passar do tempo, avanço tecnológico e surgimento de computadores de propósito específico o seu emprego foi se tornando mais frequente até chegar aos dias atuais com o uso massificado.

Não por acaso o método mais comum de representar discretamente um sistema contínuo é através da transformada pelo método ZOH ou *Zero-Order-Hold* (segurador de ordem zero). Essa transformada representa a reconstrução de um sinal discreto através de um segurador de ordem zero, o que na prática, na maioria dos sistemas computacionais, é realizado pelos conversores DAC (conversor digital-analógico) como pode ser visto na Figura 2.1.

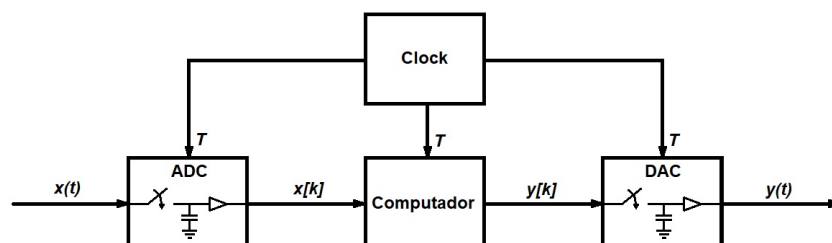


Figura 2.1 – Representação generalizada de um sistema computacional usado para controle.

Outro conversor importante que pode ser visto na Figura 2.1 integra o sistema computacional. Se trata do conversor ADC (conversor analógico-digital) que realiza as amostragens do sinal contínuo.

2.1.1 Discretização de sistemas contínuos

Os conversores ADC e DAC realizam amostragem e a reconstrução dos sinais contínuos a cada T segundos. Como notação usual para sistemas discretos o indexador de amostras utilizado é $k \in \mathbb{Z}$.

Para que seja explicada essa transformada considere o seguinte sistema dinâmico contínuo invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t). \quad (2.1)$$

Sendo que $T = t_{k+1} - t_k$ e $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ a solução para a equação diferencial será

$$x(t) = e^{A_c(t-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A_c(t-z)} B_c u(z) dz,$$

$$x(t) = e^{A_c(t-t_k)} x(t_k) + B_c \int_0^{t-t_k} e^{A_c(t-z)} dz u(t),$$

$$x(t_{k+1}) = e^{A_c(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + B_c \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{A_c(t_{k+1}-z)} dz u(t),$$

$$x(t_{k+1}) = e^{A_c T} x(t_k) + B_c \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau u(t) \quad \text{onde} \quad \tau = t_{k+1} - z. \quad (2.2)$$

A representação discreta do sistema então é dada por

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k], \quad (2.3)$$

onde

$$A_d = e^{A_c T}, \quad B_d = B_c \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau. \quad (2.4)$$

Assim é possível descrever desta forma os sistemas que não são originalmente discretos e que serão utilizados na sequência deste trabalho.

2.2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

As desigualdades matriciais lineares ou LMIs (*Linear Matrix Inequalities*), como são comumente conhecidas, são ferramentas matemáticas amplamente usadas na área de controle (BOYD et al., 1994) por possibilitarem a resolução de problemas contendo otimização de performance e garantia de robustez.

As LMIs expressam desigualdades matriciais lineares ou afins com relação as variáveis de decisão o que por sua vez tornam as restrições convexas. Uma LMI pode ser representada na seguinte forma

$$F(g) > 0 \quad \text{onde} \quad F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^q g_i F_i, \quad (2.5)$$

sendo que $g \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de variáveis de decisão e o conjunto de matrizes simétricas $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall i \in \mathcal{M}$.

A simples resolução do problema ao encontrar um dos resultados possíveis pode não ser o suficiente para a garantia de uma característica qualquer que é desejada. Critérios adicionais podem necessitar serem otimizados e essa otimização, se puder ser descrita como uma função linear, normalmente segue o seguinte padrão

$$\begin{cases} \min_g & c'g \\ \text{sujeito a} & F(g) > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Com c indicando o sentido da otimização, o menor valor para $c'g$ que ainda satisfaça a condição imposta pela LMI $F(g) > 0$ será encontrado pelos programas solucionadores.

2.2.1 Artíficos para resolução dos problemas

Nem sempre representar as restrições convexas através de LMIs é uma tarefa trivial. Algumas vezes variáveis de decisão possuem condições para suas resoluções ou encontram-se multiplicando outras variáveis de decisão, o que torna o problema não linear.

Como tentativa de linearizar o problema ou descrever as condições das restrições dentro das próprias LMIs é possível utilizar alguns artifícios (ZHANG et al., 2016; BOYD et al., 1994; DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001) que serão apresentados nesta seção.

2.2.1.1 Mudança de variáveis

O primeiro dos artifícios é a mudança de variável. Este artifício é particularmente útil na tentativa de isolar as variáveis de decisão dentro da desigualdade tornando-a linear. Um exemplo da necessidade de utilização da mudança de variável é a seguinte desigualdade

$$(A + BF)'P + P(A + BF) < 0 \quad (2.7)$$

Onde P e F são variáveis de decisão. É possível visualizar claramente as variáveis de decisão sendo multiplicadas entre si, o que a torna uma desigualdade matricial bilinear ou BMI (*Bilinear Matrix Inequalities*). BMIs demandam programas de resolução mais complexos, portanto, é interessante torná-la uma LMI.

Uma proposta de substituição de variáveis seria

$$QA' + AQ + L'B' + BL < 0, \text{ onde } Q = P^{-1} \text{ e } L = FP^{-1}. \quad (2.8)$$

Dessa forma as novas variáveis de decisão são Q e L e a desigualdade é uma LMI. Neste caso para obter os valores das variáveis originais basta reconstruir as variáveis substituídas como

$$P = Q^{-1} \text{ e } F = LP. \quad (2.9)$$

2.2.1.2 Complemento de Schur

Um formato comum que algumas desigualdades são descritas é

$$Q(x) - S(x)' R(x)^{-1} S(x) > 0. \quad (2.10)$$

Apesar deste formato ser comum as desigualdades apresentadas não são lineares e portanto não são simples de serem resolvidas. Uma maneira de reorganizar a desigualdade transformando-a em uma LMI é através do complemento de Schur.

Através do complemento de Schur pode-se afirmar que se as matrizes $Q(x)$ e $R(x)$ forem simétricas e $R(x) > 0$ então a Equação (2.10) é equivalente à

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x)' \\ S(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.11)$$

Assim (2.11) é apresentada como uma LMI e pode ser facilmente resolvida.

2.2.1.3 Procedimento-S

O Procedimento-S (*S-procedure*) é uma técnica que permite expressar uma ou mais restrições para que uma determinada desigualdade seja resolvida e, assim, não criando obrigações para os demais casos.

Sendo $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ funções afim em g tal que

$$F_i(g) = \begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} T_i & u_i' \\ u_i & v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = \{0, \dots, p\}. \quad (2.12)$$

Agora considere que é esperado a resolução da seguinte desigualdade com a dada restrição

$$F_0(g) > 0, \quad \forall g : F_i(g) \geq 0, \quad i = \{1, \dots, p\}. \quad (2.13)$$

Havendo escalares $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ de tal forma que

$$F_0(g) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(g) > 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

então a desigualdade (2.13) é resolvida dentro da restrição proposta.

É fácil verificar como isso ocorre, quando o termo $F_i(g)$ é negativo ele permite que $F_0(g)$ assumam valores negativos sem desobedecer a condição (2.14).

2.2.1.4 Lema de Finsler

Assim como no Procedimento-S, o intuito da utilização do lema de Finsler é introduzir restrições, neste caso de igualdade, para que uma LMI seja resolvida (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001).

Sendo $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz dada considere a seguinte LMI com a dada restrição

$$x'Fx < 0, \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n : Cx = 0, \quad (2.15)$$

então as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $F + LC + C'L' < 0, L \in \mathbb{R}^{n \times m};$
- (b) $C_0'FC_0 < 0;$
- (c) $F - \alpha C'C < 0, \alpha \in \mathbb{R}.$

Onde C_0 é uma base para o espaço nulo de C . Assim as restrições de igualdade dentro de uma LMI podem ser concatenadas.

2.2.2 Método de resolução das LMIs

As resoluções numéricas das LMIs neste trabalho serão realizadas com a utilização dos programas SeDuMi e do Yalmip (LÖFBERG, 2004). SeDuMi é o programa responsável por solucionar as desigualdades através do método de otimização por cones simétricos enquanto Yalmip é o interpretador que permite a utilização de uma linguagem comum e simplificada entre diferentes programas solucionadores. Ambos os programas serão usados dentro do ambiente do programa Matlab, o qual também será utilizado nas simulações numéricas deste trabalho.

2.3 ESTABILIDADE E TEORIA DE LYAPUNOV

Sendo o intuito do trabalho encontrar um método para desenvolver uma lei estabilizante de controle é necessário descrever tal método de modo que seja possível provar formalmente sua estabilidade. Então primeiramente será descrito o que estabilidade significa nesse contexto e como garantir esta prova formal através da teoria de estabilidade de Lyapunov.

2.3.1 Condições de estabilidade

Considere um sistema dinâmico genérico representado por

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_o, \quad (2.16)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de variáveis de estado do sistema e $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua por partes. Um estado x_e será considerado um ponto de equilíbrio do sistema uma vez que $x(t)$ sendo igual a x_e ele permanecerá nesse mesmo estado para todo tempo futuro (SLOTINE; LI, 1991), ou seja

$$0 = f(t, x_e), \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.17)$$

Assim a estabilidade do ponto de equilíbrio desse sistema pode ser considerada da seguinte maneira:

- Lyapunov estável se para qualquer $R > 0$ existir um $r > 0$ tal que $\|x(0) - x_e\| < r$ implique em $\|x(t) - x_e\| < R$ para todo $t \geq 0$. Caso contrário o ponto de equilíbrio será instável.

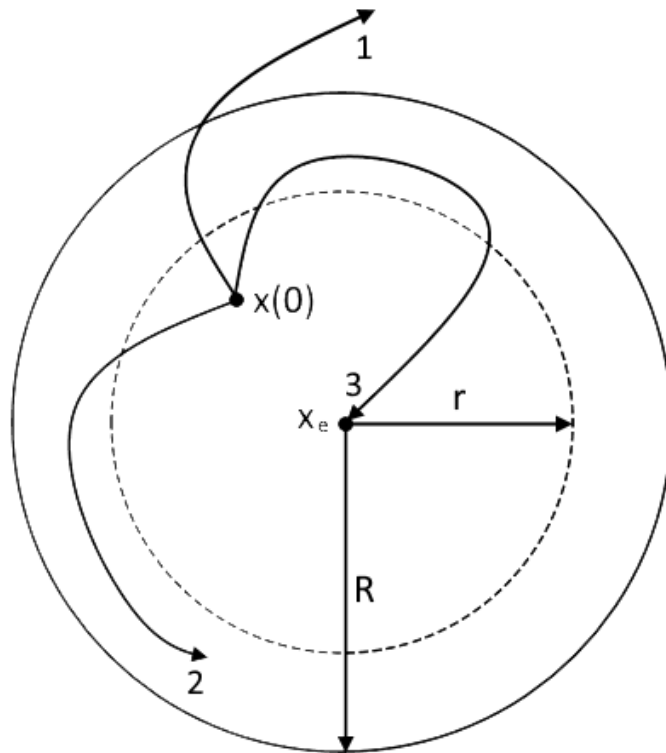
- Assintoticamente estável se existir um $r > 0$ tal que $\|x(0) - x_e\| < r$ implique em

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

- Exponencialmente estável se for assintoticamente estável e existirem $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r > 0$ tais que $\|x(0) - x_e\| < r$ implique em $\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\beta t}$ para todo $t \geq 0$.

Estas condições de estabilidade podem ser vistas na Figura 2.2. Nela existem as seguintes trajetórias: (1) Trajetória instável, a qual não consegue se manter em dentro de um raio pré-determinado; (2) Trajetória Lyapunov estável pois se mantém dentro da área pré estabelecida; (3) Trajetória assintoticamente estável pois o seu valor tende pra origem.

Figura 2.2 – Exemplo de trajetória das variáveis de estado relativo a estabilidade.



Fonte: produção do autor.

2.3.2 Critério de Lyapunov para sistemas contínuos

Uma método rigoroso para verificar esta estabilidade é o critério de estabilidade de Lyapunov. A teoria de estabilidade de Lyapunov, também conhecida como segundo método de Lyapunov, versa sobre a energia de um sistema em seus pontos instáveis ou de equilíbrio (FA-

DALI; VISIOLI, 2013). É esperado que para um dado sistema um ponto de instabilidade possua o máximo de energia enquanto ao se aproximar do ponto de equilíbrio essa energia decaia até seu mínimo.

De acordo com o critério de estabilidade de Lyapunov (SUN; GE, 2005), o equilíbrio deste sistema será assintoticamente estável se existir uma função continuamente diferenciável $V(x, t)$ tal que

$$V(x, t) > 0, \quad \forall x(t) \neq 0, \quad V(0) = 0, \quad (2.18)$$

$$-\dot{V}(x, t) > 0. \quad (2.19)$$

Como exemplo considere o sistema (2.1) com uma matriz B_c nula. Será utilizada como função candidata de Lyapunov para este sistema a seguinte função quadrática largamente utilizada na literatura

$$V(x(t)) = x(t)' P x(t), \quad (2.20)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica. Em seguida ao derivar esta função candidata com relação ao tempo o resultado é

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)' P x(t) + x(t)' P \dot{x}(t) \\ &= (A_c x(t))' P x(t) + x(t)' P (A_c x(t)) \\ &= x(t)' (A_c' P + P A_c) x(t) \\ &= -x(t)' Q x(t) < 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sendo assim se existir uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida que resulte em uma matriz P positiva definida isso implicará que o exemplo proposto é exponencialmente estável.

A verificação dessa condição é realizada a partir de (2.21), assim

$$A_c' P + P A_c = -Q \quad (2.22)$$

Considerando esta igualdade no caso da matriz A_c ser Hurwitz estável e Q uma matriz positiva definida será solução única

$$P = \int_0^\infty e^{A_c' t} Q e^{A_c t} dt. \quad (2.23)$$

A substituição então de P da Equação (2.23) em (2.22) resulta em

$$\begin{aligned}
(A'_c P + P A_c) &= \int_0^\infty (A'_c e^{A'_c t} Q e^{A_c t} + e^{A'_c t} Q e^{A_c t} A'_c) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} e^{A'_c t} Q e^{A_c t} \right) dt
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Como quando $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A'_c t} Q e^{A_c t} = 0$, o resultado será

$$\begin{aligned}
(A'_c P + P A_c) &= \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} e^{A'_c t} Q e^{A_c t} \right) dt \\
&= -Q.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim fica provado que se existir uma Q positiva definida que resulte em uma matriz P positiva definida o sistema será estável (LIBERZON, 2003; GEROMEL; COLANERI, 2006a).

2.3.3 Critério de Lyapunov para sistemas discretos

Segundo Astrom e Wittenmark (1997) a primeira vez que a teoria de estabilidade de Lyapunov foi utilizada para sistemas discretos foi em (KALMAN; BERTRAM, 1960). Logo de partida é possível verificar a necessidade de adaptações para a sua utilização tendo em vista que sistemas discretos possuem descontinuidades entre cada amostra realizada e portanto a derivada da função de Lyapunov não traduz de maneira correta o decaimento de energia que a função espera garantir. Ao invés disso é realizada uma diferença entre os valores das funções de Lyapunov para duas amostras consecutivas, ou seja

$$V(x[k]) > 0 \quad \forall x[k] \neq 0, \quad V(0) = 0, \tag{2.26}$$

$$\Delta V = V(x[k+1]) - V(x[k]) < 0. \tag{2.27}$$

Para exemplificar será adotado o sistema (2.3) com uma matriz B_d nula. Será utilizada uma função de Lyapunov candidata análoga ao caso contínuo (2.20), assim

$$V(x[k]) = x[k]' P x[k] \tag{2.28}$$

Onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ também aqui deverá ser uma matriz simétrica. Em seguida ao aplicar a condição (2.27) obtém-se

$$\begin{aligned}
\Delta V(x[k]) &= x[k+1]' P x[k+1] - x[k]' P x[k] \\
&= (A_d x[k])' P (A_d x[k]) - x[k]' P x[k] \\
&= x[k]' (A_d' P A_d - P) x[k] \\
&= -x[k]' Q x[k] < 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

De maneira similar ao caso contínuo se existir uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida que resulte em uma matriz P positiva definida isso implicará que o exemplo proposto é exponencialmente estável.

Esta verificação é realizada a partir de (2.29), ou seja

$$A_d' P A_d - P = -Q, \tag{2.30}$$

assim no caso da matriz A_d ser Schur estável e Q ser uma matriz positiva definida a solução única será

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A_d^k{}' Q A_d^k. \tag{2.31}$$

Para finalizar a prova é substituído então P de (2.31) em (2.30) e o resultado é

$$\begin{aligned}
A_d' P A_d - P &= A_d' \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_d^k{}' Q A_d^k \right) A_d - \sum_{k=0}^{\infty} A_d^k{}' Q A_d^k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_d^k{}' Q A_d^k \right) - \sum_{k=0}^{\infty} A_d^k{}' Q A_d^k \\
&= -A_d^0{}' Q A_d^0 \\
&= -Q.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Então assim fica provado que se existir uma Q positiva definida que resulte em uma matriz P positiva definida o sistema discreto proposto será estável (GEROMEL; COLANERI, 2006b).

3 SISTEMAS CHAVEADOS

Sistemas híbridos são sistemas que possuem interação entre dinâmicas contínuas e discretas (LIBERZON, 2003). Um exemplo de um sistema híbrido seria uma regra de escolha entre diferentes controladores dentro de um conjunto finito alterando assim a dinâmica da planta como um todo.

Sistemas chaveados, por sua vez, são uma subclasse de sistemas híbridos e são caracterizados por possuírem dois ou mais modos de operação, ou subsistemas, onde cada um desses modos possui uma dinâmica diferente (TROFINO et al., 2012), sejam eles contínuos ou discretos. Em um sistema chaveado a escolha entre estes modos de operação ocorre através de eventos discretos e ela irá ditar a dinâmica do sistema como um todo.

3.1 SISTEMAS CHAVEADOS CONTÍNUOS

Um sistema chaveado e seus subsistemas podem ser matematicamente representado (LIBERZON, 2003) por

$$\dot{x}(t) = f_i(x(t)), \quad i \in \mathcal{M} := \{1, \dots, m\}. \quad (3.1)$$

Neste trabalho o interesse é a análise dos sistemas chaveados afins, portanto tem-se os subsistemas com seus termos afins descritos como

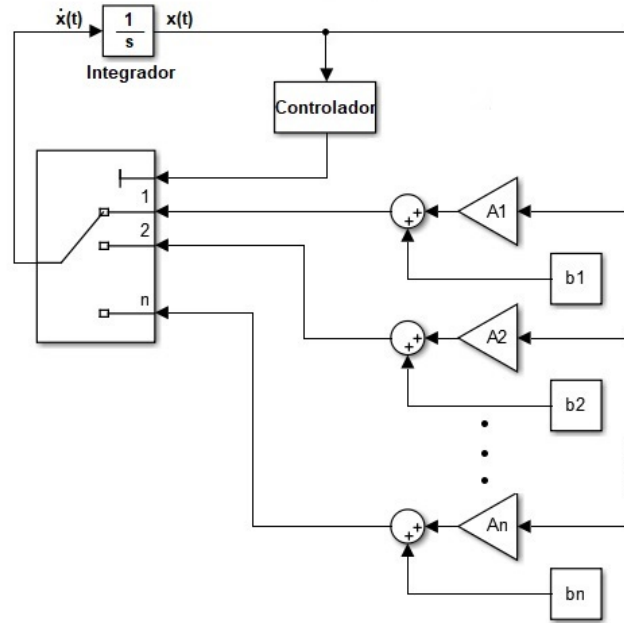
$$f_i(x(t)) = A_{ci} x(t) + b_{ci}. \quad (3.2)$$

Todos os sistemas chaveados deverão contar ainda com uma lei de chaveamento entre os m subsistemas que resulte no sinal de comutação. O sinal de comutação pode ser classificado como dependente do tempo ou dependente do estado, sendo este último o método adotado para o restante das discussões e, portanto,

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}. \quad (3.3)$$

Pode ser visualizado na Figura 3.1 um sistema chaveado genérico contínuo o qual é controlado através da escolha do modo de operação.

Figura 3.1 – Representação generalizada de um sistema chaveado contínuo



Fonte: produção do autor.

3.2 SISTEMAS CHAVEADOS DISCRETOS

De forma análoga à contínua, um sistema chaveado discreto pode ser matematicamente representado por

$$x[k+1] = f_i(x[k]), \quad i \in \mathcal{M} := 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Para sistemas chaveados afins discretos a representação dos subsistemas pode ser descrita como

$$f_i(x[k]) = A_{di} x[k] + b_{di} \quad (3.5)$$

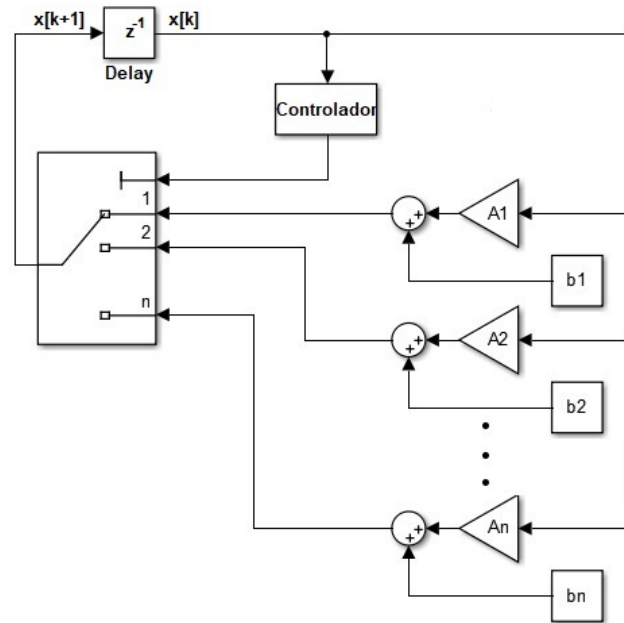
Onde as matrizes dinâmicas A_{di} e b_{di} são resultado das discretizações realizadas com as Equações (2.4) quando o sistema é originalmente contínuo.

O sinal de chaveamento para o caso discreto é dado por

$$\sigma(x[k]) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}. \quad (3.6)$$

A Figura 3.2 mostra um sistema chaveado genérico discreto o qual é controlado por uma lei de chaveamento que realiza a escolha do modo de operação.

Figura 3.2 – Representação generalizada de um sistema chaveado discreto.

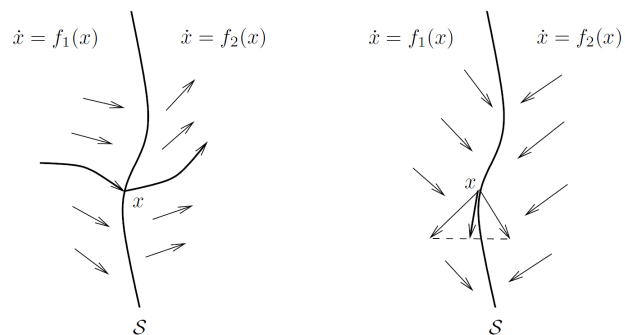


Fonte: produção do autor.

3.3 MODOS DESLIZANTES

Um fenômeno muito estudado nos sistemas chaveados são os modos deslizantes. São caracterizados modos deslizantes quando dois ou mais modos têm seus campos vetoriais convergindo para o mesmo ponto ou superfície. Nesta condição, a utilização isolada da dinâmica de um desses modos pode não representar corretamente o comportamento do sistema e por isso os modos deslizantes merecem uma atenção especial. Para exemplificar considere as superfícies de chaveamento da Figura 3.3.

Figura 3.3 – Casos (a) e (b) na superfície de chaveamento.



Fonte: (LIBERZON, 2003).

Na Figura 3.3 pode-se observar dois casos comuns em sistemas chaveados. No exemplo (a) a superfície de chaveamento S para uma determinada lei de controle divide dois subsistemas com dinâmicas $f_1(x)$ e $f_2(x)$ os quais possuem seus campos vetoriais apontando para sentidos semelhantes, um na direção da superfície de chaveamento S e o outro se afastando desta. No caso (b) ambas dinâmicas apontam na direção da superfície de chaveamento S forçando a trajetória a mover-se sobre esta, caracterizando assim o modo deslizante.

3.3.1 Modos deslizantes em sistemas contínuos

Como foi observado anteriormente a troca de modos acontece em uma frequência elevada de tal maneira que a melhor forma para caracterizar a dinâmica neste ponto é uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada um dos seus subsistemas (FILIPPOV, 1988), ou seja

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t)) \cdot f_i(x(t)), \quad \theta(x(t)) \in \Theta, \quad (3.7)$$

onde θ é o vetor de elementos θ_i e

$$\Theta := \left\{ \theta : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}. \quad (3.8)$$

Assim qualquer combinação de subsistemas pode ser representada por

$$\dot{x}(t) = f_\theta(x(t)). \quad (3.9)$$

Note então que os modos deslizantes ocorrem quando há uma combinação convexa dos campos vetoriais tal que $\dot{x}(t)$ seja um vetor tangente à superfície de chaveamento. Mas mesmo que isso não ocorra, essa notação ainda representa fielmente o sistema pois basta qualquer θ_i assumir o valor unitário para que o sistema seja exclusivamente representado pela dinâmica do modo i .

Sendo assim, é possível substituir (3.2) em (3.7) para assim obter

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t)) (A_{ci} x(t) + b_{ci}), & \theta(x(t)) \in \Theta, \\ &= A_{c\theta} x(t) + b_{c\theta}, & \theta(x(t)) \in \Theta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$A_{c\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t)) A_{ci} \quad \text{e} \quad b_{c\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t)) b_{ci} \quad (3.11)$$

3.3.2 Combinação convexa dos subsistemas para sistemas discretos

A ocorrência de modos deslizantes ideais pode trazer problemas para o sistema, devido ao seu chaveamento de alta frequência chamado *chattering* (ruído ou vibração), como danificar componentes do sistema ou redução de eficiência devido a perdas no chaveamento. Enquanto para sistemas contínuos este permanece sendo um ponto sério de atenção na hora da definição do controle usado, para sistemas discretos este problema é minimizado, se não nulo, pois a frequência de chaveamento máxima é, afinal, imposta pelo projetista dentro das possibilidades técnicas.

Apesar disso não existe impedimento para que a mesma notação seja utilizada para descrever os sistemas chaveados discretos, portanto

$$x[k+1] = \sum_{i=1}^m \theta_i(x[k]) f_i(x[k]), \quad \theta(x[k]) \in \Theta \quad (3.12)$$

Com qualquer combinação podendo ser representada por

$$x[k+1] = f_\theta(x[k]) \quad (3.13)$$

Substituindo (3.5) em (3.12) o resultado é

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \sum_{i=1}^m \theta_i(x[k]) (A_{di} x[k] + b_{di}), & \theta(x[k]) \in \Theta, \\ &= A_{d\theta} x[k] + b_{d\theta}, & \theta(x[k]) \in \Theta, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Onde

$$A_{d\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(x[k]) A_{di} \quad \text{e} \quad b_{d\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(x[k]) b_{di} \quad (3.15)$$

Cabe aqui novamente ressaltar que para sistemas chaveados discretos essa combinação convexa não existe de fato e, portanto, para todo instante k existirá apenas um modo ativo que representará o sistema como um todo.

Uma interpretação mais válida seria do ponto de vista de um observador que realiza suas amostras num período T_s superior ao período de controle T , contendo assim n amostras. Sob este ponto de vista a combinação θ_i representaria a proporção de amostras para o modo i dentro deste período de observação.

3.4 PONTOS DE EQUILÍBRIO

Antes de definir uma lei de chaveamento capaz de controlar o sistema chaveado é necessário verificar se o objetivo é um ponto de equilíbrio válido para este sistema. Serão discutidas então as condições para que este ponto de equilíbrio exista tanto para sistemas chaveados contínuos quando para sistemas chaveados discretos.

3.4.1 Pontos de equilíbrio em um sistema chaveado contínuo

Um sistema chaveado irá se encontrar em ponto de equilíbrio constante x_{eq} quando seu estado não mais se alterar, ou seja

$$\dot{x}(t) = 0. \quad (3.16)$$

Sendo assim se para um dado ponto de equilíbrio constante existir um conjunto de escalares constantes $\bar{\theta}_i := \theta_i(x_{eq})$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (A_{ci} x_{eq} + b_{ci}) \\ 0 &= A_{c\bar{\theta}} x_{eq} + b_{c\bar{\theta}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

então este sistema poderá considerar como ponto de equilíbrio

$$x_{eq} = -(A_{c\bar{\theta}})^{-1} b_{c\bar{\theta}}. \quad (3.18)$$

Uma forma conveniente de descrever esse sistema é através do erro, o que pode facilitar como definir o sistema chaveado e a estabelecer as condições para encontrar as leis de chaveamento e a estabilidade do sistema, sendo assim

$$e(t) = x(t) - x_{eq} \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.1) e (3.2) obtém-se

$$\dot{e}(t) = A_{ci}e(t) + k_{ci}, \quad \text{com} \quad k_{ci} = b_{ci} + A_{ci}x_{eq} \quad (3.20)$$

E substituindo (3.19) em (3.10) a dinâmica do sistema chaveado fica descrita como

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) (A_{ci} e(t) + k_{ci}), \quad \theta(e(t)) \in \Theta \\
&= A_{c\theta} e(t) + K_{c\theta}, \quad \text{onde} \quad K_{c\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) k_{ci}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

É importante salientar que um dos benefícios da utilização do erro $e(t)$ no lugar das variáveis de estado $x(t)$ é que para o ponto de equilíbrio x_{eq} quando $\theta_i(x_{eq}) := \bar{\theta}_i$ os termos afins se anulam, ou seja

$$0 = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_{ci} \tag{3.22}$$

pois isso resulta em $\dot{e}(t) = 0$ quando $e(t) = 0$

3.4.2 Pontos de equilíbrio em um sistema chaveado discreto

Um sistema chaveado irá se encontrar em ponto de equilíbrio constante x_{eq} quando seu estado não mais se alterar, ou seja

$$x[k+1] = x[k] = x_{eq} \tag{3.23}$$

Sendo assim se para um dado ponto de equilíbrio constante existir um conjunto de escalares constantes $\bar{\theta}_i := \theta_i(x_{eq})$ tal que

$$\begin{aligned}
x_{eq} &= \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (A_{di} x_{eq} + b_{di}) \\
&= A_{d\bar{\theta}} x_{eq} + b_{d\bar{\theta}}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

então este sistema poderá considerar como ponto de equilíbrio

$$x_{eq} = -(A_{d\bar{\theta}} - I)^{-1} b_{d\bar{\theta}}. \tag{3.25}$$

Como dito anteriormente, a descrição do sistema chaveado em função do erro pode facilitar o equacionamento do problema, portanto

$$e[k] = x[k] - x_{eq} \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.4) e (3.5) obtem-se

$$e[k+1] = A_{di}e[k] + k_{di}, \quad k_{di} = b_{di} + (A_{di} - I)x_{eq} \quad (3.27)$$

E substituindo (3.26) em (3.14) obtém-se

$$\begin{aligned} e[k+1] &= \sum_{i=1}^m \theta_i(e[k]) (A_{di} e[k] + k_{di}), \quad \theta(e[k]) \in \Theta \\ &= A_{d\theta} e[k] + K_{d\theta}, \quad \text{onde} \quad K_{d\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e[k]) k_{di} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para sistemas chaveados discretos também é verdade que para o ponto de equilíbrio x_{eq} quando $\theta_i(x_{eq}) := \bar{\theta}_i$ os termos afins se anulam, ou seja

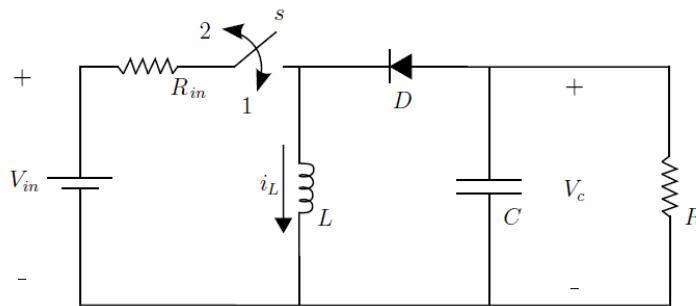
$$0 = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i k_{di} \quad (3.29)$$

pois isso resulta em $e[k+1] = 0$ quando $e[k] = 0$.

3.5 MODELAGEM DE UM SISTEMA CHAVEADO

Para exemplificar como a modelagem dos subsistemas de um sistema chaveado é feita e como é definido o ponto de equilíbrio será utilizado aqui como um exemplo comum o conversor de potência Buck-Boost. Este circuito pode ser observado na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Conversor de potência Buck-Boost

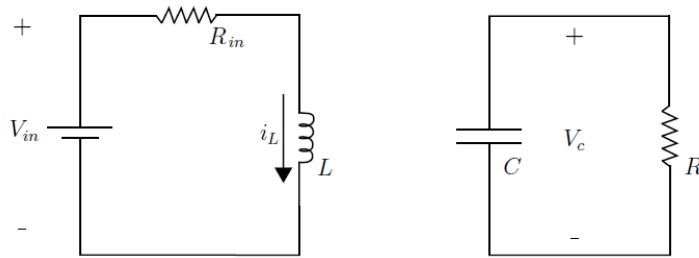


Fonte: produção do autor.

O circuito apresentado na Figura 3.4 conta com a fonte de alimentação V_{in} , a resistência da fonte R_{in} , a chave de potência s , o indutor L , o capacitor C , a carga resistiva R e o diodo D . Este circuito pode ser descrito por dois modos de operação: um com a chave s fechada e o segundo com a chave s aberta.

Para o primeiro modo a chave s se encontra na posição 1 e o diodo D não irá conduzir. Esta condição é vista na Figura 3.5.

Figura 3.5 – Representação generalizada de um sistema chaveado contínuo



Fonte: produção do autor.

Aplicando as leis de Kirchhoff são obtidas as equações dinâmicas que representam o comportamento desse modo

$$V_{in} = L \frac{di_L}{dt} + i_L R_{in}, \quad 0 = C \frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{R} \quad (3.30)$$

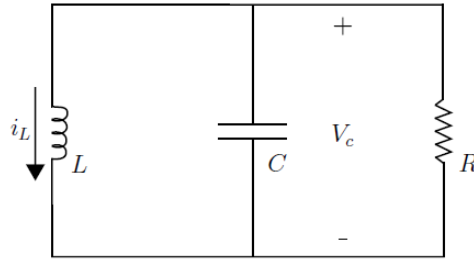
Então ao representar essas equações no espaço de estados o resultado é

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -R_{in}/L & 0 \\ 0 & -1/(RC) \end{bmatrix},$$

$$b_{c1} = \begin{bmatrix} V_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O segundo modo de operação conta com a chave s na posição 2, a tensão de entrada é desconectada junto com a resistência da fonte R_{in} e o diodo D passa a conduzir. Esta condição é vista na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Representação generalizada de um sistema chaveado contínuo



Fonte: produção do autor.

Aplicando novamente as leis de Kirchhoff as equações dinâmicas obtidas são

$$L \frac{di_L}{dt} = V_c, \quad 0 = i_L + C \frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{R}. \quad (3.31)$$

Representando então no espaço de estados

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/(RC) \end{bmatrix},$$

$$b_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando (3.17) para este sistema o resultado é

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(A_{c1}\bar{x} + b_{c1}) + (1 - \bar{\theta})(A_{c2}\bar{x} + b_{c2}) &= 0, \\ \bar{\theta}((A_{c1} - A_{c2})\bar{x} + b_{c1}) + A_{c2}\bar{x} &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

E substituindo os valores das matrizes enfim

$$-\bar{\theta}_1 \frac{R_{in}}{L} i_L - \bar{\theta}_1 \frac{V_c}{L} + \bar{\theta}_1 \frac{V_i}{L} + \frac{V_c}{L} = 0, \quad \text{e} \quad (3.33)$$

$$\bar{\theta}_1 \frac{i_L}{C} - \frac{i_L}{C} - \frac{V_c}{RC} = 0 \quad (3.34)$$

Assim para um determinado $\bar{\theta}$ o resultado será o ponto de equilíbrio

$$\begin{aligned}
 i_L &= V_{in} \frac{\bar{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 R_{in} + (1 - \bar{\theta}_1)^2 R}, \\
 V_c &= -V_{in} \frac{\bar{\theta}_1 (1 - \bar{\theta}_1) R}{\bar{\theta}_1 R_{in} + (1 - \bar{\theta}_1)^2 R}.
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

Este tipo de modelagem será utilizado para descrever alguns dos sistemas chaveados utilizados nos capítulos seguintes e em suas simulações.

4 ESTADO DA ARTE

Com todos os conceitos básicos descritos e os fundamentos comumente utilizados para sistemas chaveados, é possível então descrever as técnicas que resultam em leis de comutação que levam um sistema chaveado genérico ao seu ponto de equilíbrio x_{eq} . São analisados neste capítulo alguns dos trabalhos que descrevem o problema de chaveamento a tempo discreto e como a limitação de frequência é abordada por cada um deles.

4.1 CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS CONTÍNUOS COM DADOS AMOSTRADOS

Uma maneira de abordar o problema de uma comutação com períodos limitados é através do ponto de vista do sistema contínuo como proposto por Hetel e Fridman (2013). Os autores do trabalho citado estabelecem condições estabilizantes para um sistema que possua um período de amostragem T_k igual ou inferior a um período de amostragem máximo T_{max} .

A função de Lyapunov descrita em (2.20) é usada para determinar a estabilidade do sistema. Este sistema é descrito por sua dinâmica contínua com uma lei de chaveamento baseada em variáveis amostradas, ou seja

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(x[k])} x(t) + B_{\sigma(x[k])}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (4.1)$$

O teorema 1 do artigo (HETEL; FRIDMAN, 2013) estabelece que considerando o sistema (4.1), este será estabilizável pela lei de comutação

$$\sigma(x[k]) = \arg \min_{i \in \mathcal{M}} \{x[k]' P (A_{ci} x[k] + B_{ci})\}, \quad (4.2)$$

se existirem matrizes $P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ e $U_i \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ e escalares dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ que atendam as seguintes desigualdades matriciais

$$\begin{bmatrix} \Omega_i^1(0) & \Omega_i^2(0) \\ * & \Omega_i^3(0) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_i^1(T_{max}) & \Omega_i^2(T_{max}) & -T_{max} \Psi_i \\ * & \Omega_i^3(T_{max}) & T_{max} B_{ci}^T P \\ * & * & \Upsilon_i \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \mathcal{M}, \quad (4.4)$$

onde

$$\Omega_i^1(\tau) = A'_{c\bar{\theta}} P + P A_{c\bar{\theta}} + 2\alpha P + (T_{max} - \tau) A'_{ci} U_i A_{ci} \quad (4.5)$$

$$\Omega_i^2(\tau) = (T_{max} - \tau) A'_{ci} U_i B_{ci} \quad (4.6)$$

$$\Omega_i^3(\tau) = (T_{max} - \tau) B'_{ci} U_i B_{ci} - \beta T_{max} \quad (4.7)$$

$$\Upsilon_i = T_{max}^2 \Psi_i - T_{max} U_i e^{-2\alpha T_{max}} \quad (4.8)$$

$$\Psi_i = (A_{c\bar{\theta}} - A_i)' P + P (A_{c\bar{\theta}} - A_i) \quad (4.9)$$

Estas restrições invariavelmente levarão o sistema à sua região de atração elipsoidal descrita por

$$\mathcal{E}^{T_{max}} := \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)' P x(t) \leq T_{max} \frac{\beta}{2\alpha} \right\} \quad (4.10)$$

A prova pode ser verificada no artigo original.

4.1.1 Exemplo numérico

Como exemplo dos resultados dessa técnica considere o sistema chaveado (4.1) com 3 subsistemas descritos no exemplo 2 em (TROFINO et al., 2011), sendo eles descritos por

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{bmatrix}, \quad A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\delta & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{c3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$B_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{c3} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

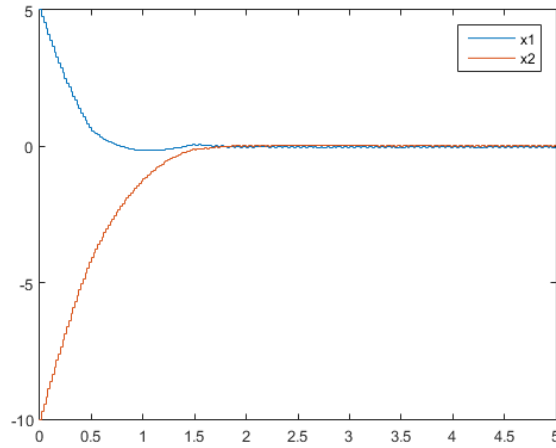
Deseja-se um controle que leve o sistema até o ponto de equilíbrio x_{eq} nulo. Para este caso o equilíbrio acontece em $\bar{\theta} = [0,3333 \quad 0,3333 \quad 0,3333]'$.

Utilizando uma frequência de amostragem constante de $f = 50Hz$ e os parâmetros $\alpha = 0.4$ e $\beta = 5$ os resultados são

$$P = \begin{bmatrix} 0,3641 & 0,1207 \\ 0,1207 & 0,1405 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad U_i = \begin{bmatrix} 0,6575 & -0,0301 \\ -0,0301 & 0,4625 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

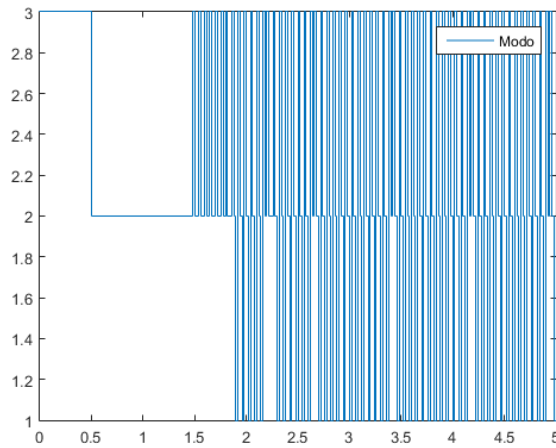
para o $\delta = 1$. O resultado do controle para essas matrizes encontradas podem ser vistos na evolução das variáveis de estado na Figura 4.1 e o sinal de chaveamento na Figura 4.2.

Figura 4.1 – Variáveis de estado ao longo do tempo para $\delta = 1$.



Fonte: produção do autor.

Figura 4.2 – Sinal de chaveamento para $\delta = 1$.



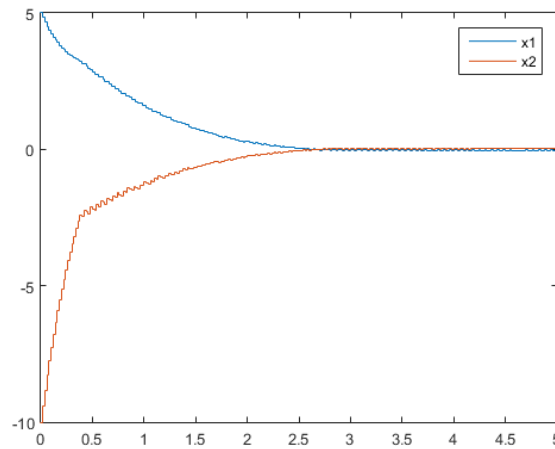
Fonte: produção do autor.

Utilizando a mesma frequência de amostragem e os mesmos parâmetros, os resultados são

$$P = \begin{bmatrix} 0,0692 & 0,0577 \\ 0,0577 & 0,0811 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad U_i = \begin{bmatrix} 0,2585 & 0,0844 \\ 0,0844 & 0,0945 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

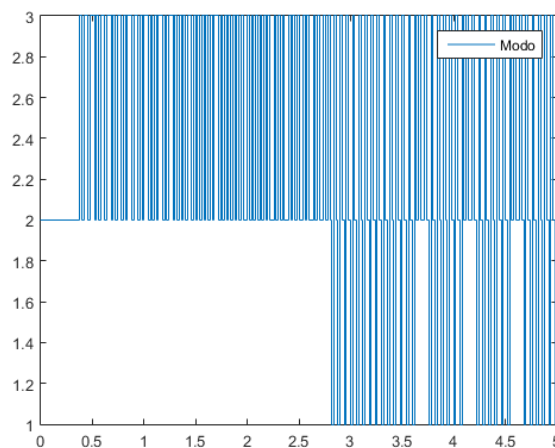
para o $\delta = -1$. O resultado do controle para as matrizes encontradas com este valor de δ são demonstrados na evolução das variáveis de estado da Figura 4.1 e no sinal de chaveamento da Figura 4.2.

Figura 4.3 – Variáveis de estado ao longo do tempo para $\delta = -1$.



Fonte: produção do autor.

Figura 4.4 – Sinal de chaveamento para $\delta = -1$.



Fonte: produção do autor.

A desvantagem desta técnica reside, principalmente, no fato de não poder ser aplicada a sistemas naturalmente discretos, ou seja, sistemas que são equacionados já no domínio discreto como a descrição de vendas semanais ou o crescimento populacional anual.

4.2 CONTROLE DE SISTEMA CHAVEADOS NATURALMENTE DISCRETOS

Outro modo de abordar o problema é partir da análise no domínio discreto. Esse tipo de abordagem além de não se limitar a sistemas contínuos também simplifica as restrições resultantes.

Em (GEROMEL; COLANERI, 2006b) são apresentados quatro teoremas sobre estabilidade e controle de sistemas chaveados. No primeiro deles, o artigo estabelece o critério de estabilidade para um sistema chaveado com um limite superior de tempo de permanência mínimo em um modo comandado. Este artigo é usado como base para vários outros apresentados na sequência, como (HAUROIGNE; RIEDINGER; IUNG, 2011; DEAECTO; EGIDIO, 2017; DEAECTO; GEROMEL, 2017; EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017; BENMESSAOUDA; BENZAOUIA; TADEO, 2011; KUNDU; DAAFOUZ; HEEMELS, 2017).

Em (HAUROIGNE; RIEDINGER; IUNG, 2011) é realizada uma análise robusta para o controle de sistemas chaveados discretos. A análise da atração para uma região de estabilidade é realizada comparando entre a comutação baseada puramente nas funções auxiliares de Lyapunov e a comutação utilizando um método preditivo dentro de um horizonte de N amostras.

No artigo (DEAECTO; EGIDIO, 2017) também é realizada a análise de um sistema chaveado a partir do domínio discreto. É adotada uma função candidata de Lyapunov (2.20) para a qual são descritas as condições necessárias para que haja uma região de atração que contenha um ponto de equilíbrio de interesse.

A função de comutação responsável por selecionar o modo de operação nesta técnica é

$$\sigma(x[k]) = \arg \min_{i \in \mathcal{M}} (A_{di} x[k] + k_{ci})' P (A_{di} x[k] + k_{ci}). \quad (4.15)$$

O artigo apresenta dois métodos para o desenvolvimento da lei de chaveamento. O primeiro desses métodos estabelece que se existirem matrizes positivas definidas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que atendam as restrições

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && -\ln(\det(W)) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i (A'_{di} P A_{di} - P) < -W \\ & && \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i \begin{bmatrix} 1 - k'_{di} P k_{di} & * \\ c_i & W \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde

$$c_i = A'_{di} P k_{di} \quad \text{e} \quad \mu = W^{-1} c_{\bar{\theta}}. \quad (4.17)$$

Então o ponto de equilíbrio desejado é estável e encontra-se dentro da região de atração χ_* , tal que

$$\chi_* = \{e[k] \in \mathbb{R}^n : (e[k] - \mu)' W (e[k] - \mu) \leq 1\}. \quad (4.18)$$

A prova para chegar nessas LMIs bem como o segundo método encontram-se em (DEAECTO; EGIDIO, 2017).

Em (DEAECTO; GEROMEL, 2017) há uma continuação do trabalho (DEAECTO; EGIDIO, 2017). Neste artigo a função de Lyapunov possui termos não quadráticos. Além da mudança na função de Lyapunov há ainda uma condição extra que estabelece uma área de atração invariável $\mathcal{V}$, ou seja, se $e[k] \in \mathcal{V}$ então $e[k+1] \in \mathcal{V}$.

Em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017) o teorema 3 proposto no artigo (DEAECTO; GEROMEL, 2017) é aplicado a um conversor buck-boost com o intuito de controlar a velocidade de um motor de corrente contínua. Os resultados práticos foram comparados com os resultados simulados e também foram confrontados com os resultados práticos de um controle através de um chaveamento periódico de um PWM.

Como já mencionado todas essas técnicas fazem uso da função ‘min’ para selecionar o modo que apresenta o menor valor de $\Delta V(e[k])$. Enquanto o uso dessa função se traduz em uma formulação simplificada das restrições elas podem, por outro lado, se apresentar como conservadoras por não permitir que as funções auxiliares assumam valores negativos quando não estão sendo comandadas (SCHARLAU, 2013).

4.2.1 Exemplo numérico

Será simulado aqui o controle de um sistema chaveado discreto representado por (3.28) com a técnica apresentada no artigo (DEAECTO; EGIDIO, 2017).

Considere o conversor buck-boost modelado na Seção 3.5 utilizando os parâmetros que descritos na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros numéricos utilizados na simulação.

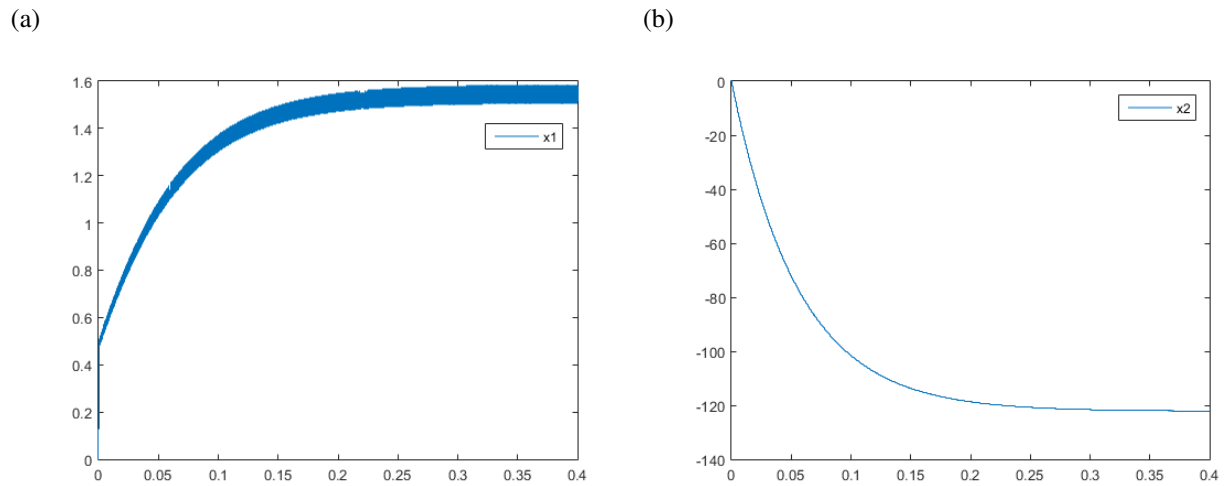
Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
V_{in}	80	V	Tensão de entrada
R_{in}	0,1	Ω	Resistência de entrada
L	5	mH	Indutância
C	220	μF	Capacitância
R	200	Ω	Resistência da carga
f	500	kHz	Frequência de amostragem

A tensão de saída V_c desejada é -120V. Para estas condições as matrizes P e W resultantes das restrições impostas por (4.16) são

$$P = \begin{bmatrix} 644,12 & 1,80 \\ 1,80 & 28,46 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad W = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 44,0274 & 0,5407 \\ 0,5407 & 2,0099 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

O controle realizado a partir da lei de chaveamento com estes valores pode ser observado nas figuras 4.5a e 4.5b , que apresentam a evolução da corrente e da tensão, respectivamente, ao longo do tempo.

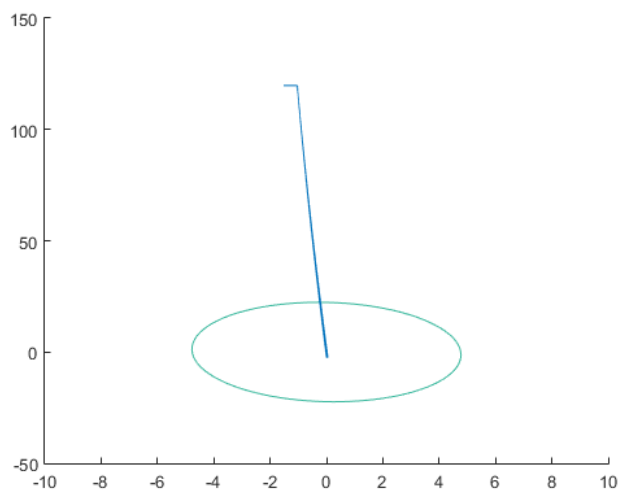
Figura 4.5 – Corrente (a) e tensão (b) do conversor controlado.



Fonte: produção do autor.

Na Figura 4.6 é mostrada a trajetória do erro e a convergência em direção à região de atração.

Figura 4.6 – Trajetória dos erros e região de atração.



Fonte: produção do autor.

4.3 ABORDAGEM ATRAVÉS DE DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER

Alguns trabalhos fazem ainda o uso das desigualdades de Lyapunov-Metzler.

As matrizes Metzler são compostas por todas as matrizes $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com elementos π_{ij} obedecendo ao critério

$$\pi_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = 0 \quad (4.20)$$

E seu uso é demonstrado em (GEROMEL; COLANERI, 2006b), onde os três últimos teoremas discorrem sobre o uso das desigualdades Lyapunov-Metzler para expressar condições de estabilidade de um sistema chaveado discreto.

Uma das técnicas estabelece que se existirem uma matriz Metzler Π e um grupo de matrizes positivas definidas $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ que atenda a restrição

$$A_i' \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ij} P_j \right) A_i - P_i < 0, \quad i \in \mathcal{M}, \quad (4.21)$$

então a função de comutação (4.22) irá controlar o sistema.

$$\sigma(x[k]) = \arg \min_{i \in \mathcal{M}} x[k]' P_i x[k]. \quad (4.22)$$

No artigo (BENMESSAOUDA; BENZAOUIA; TADEO, 2011) os teoremas do uso das desigualdades Lyapunov-Metzler abordados em (GEROMEL; COLANERI, 2006b) são expandidos e o autor passa a utilizar destas técnicas para resolver problemas de sistemas chaveados com incerteza politópicas.

Em (KUNDU; DAAFOUZ; HEEMELS, 2017) é traçado um paralelo entre o uso das técnicas de Procedimento-S e de Lyapunov-Metzler como ferramentas para caracterizar as estratégias de chaveamento utilizando a função ‘min’. A conclusão do autor é que o uso ferramentas tem resultados equivalentes e que em nenhum caso o Procedimento-S traz condições mais conservadoras para as restrições.

Com os resultados dos artigos abordados nessa seção será possível distinguir as diferenças construtivas e conceituais da técnica desenvolvida neste trabalho dos trabalhos já existentes.

5 PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO UTILIZANDO A FUNÇÃO ‘MAX’ PARA SISTEMAS CONTÍNUOS

Será apresentada agora a técnica que utiliza a função de Lyapunov do tipo *max*. Esta técnica é descrita com mais detalhes no artigo (TROFINO et al., 2011).

A importância desta técnica para o restante do trabalho reside no fato de que esta é a origem da técnica de controle para sistemas chaveados a tempo discreto que será apresentada no Capítulo 6 e é também sua versão análoga para sistemas contínuos.

Considere o sistema chaveado afim descrito pelas Equações (3.1) e (3.2). O objetivo desta técnica será encontrar uma lei de chaveamento com a utilização da função *max* que leve assintoticamente este sistema genérico ao ponto de equilíbrio x_{eq} tal como descrito na Seção 3.4.1, ou seja

$$\sigma(e(t)) = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\}. \quad (5.1)$$

Para isto são adotadas as seguintes funções auxiliares

$$v_i(e(t)) = e(t)' P_i e(t) + 2e(t)' S_i \quad (5.2)$$

que compõem a função de Lyapunov

$$V(e(t)) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e(t))\} = \max_{i \in \mathcal{M}} \left\{ \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) v_i(e(t)) \right\}. \quad (5.3)$$

Assim para provar a estabilidade através do segundo método de Lyapunov é necessário mostrar que as condições descritas por (2.18) e (2.19) estão satisfeitas.

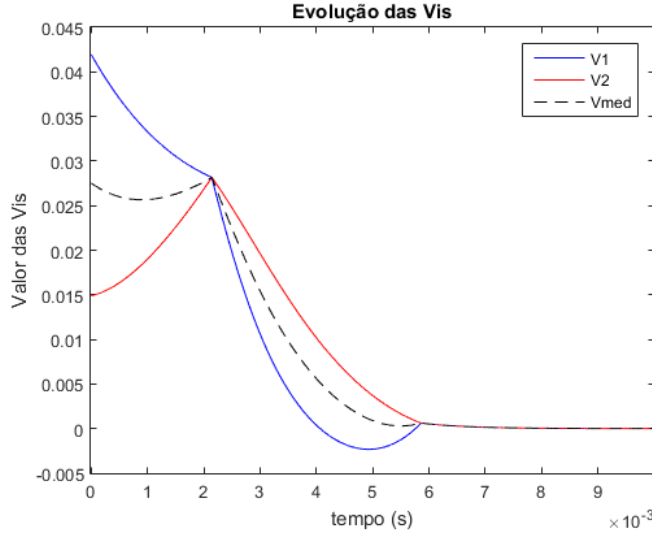
A primeira condição é a positividade da função de Lyapunov. Garantir a positividade de todas as funções auxiliares, porém, é uma limitação excessiva e torna a condição mais conservadora do que necessário pois somente o modo ativo deverá obrigatoriamente ter sua função auxiliar positiva.

Uma maneira de garantir a positividade da função de Lyapunov e tornar menos conservadora a condição é utilizar a combinação convexa com as razões conhecidas de equilíbrio $\bar{\theta}$ que levam ao equilíbrio para validar a positividade, ou seja

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i > 0 \quad \text{e} \quad \bar{S} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0 \quad (5.4)$$

Essa condição libera os sistemas para que tenham respostas como a exemplificada na Figura 5.1 para um determinado sistema.

Figura 5.1 – Gráfico das funções de Lyapunov auxiliares ao longo do tempo.



Fonte: produção do autor.

Nesta Figura, observa-se a combinação convexa das funções auxiliares com $\theta = \bar{\theta}$ sendo representada pela linha preta tracejada. Mesmo com uma das funções auxiliares assumindo valores negativos em um dos momentos a combinação convexa continuou com valor positivo garantindo assim a positividade para a função Lyapunov aplicada neste sistema utilizado como exemplo.

E neste caso prova-se que

$$V(e(t)) \geq \bar{V}(e(t)) = e(t)' \bar{P} e(t) > 0 \quad (5.5)$$

O segundo critério que precisa ser atendido para garantir a estabilidade de Lyapunov é que a função de Lyapunov seja decrescente, assim

$$\sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) \dot{v}_i(e(t)) < 0. \quad (5.6)$$

Se a condição 5.6 acontece para todo modo ativo ou para a combinação convexa dada pelo vetor θ , então a função de Lyapunov V será decrescente. Portanto ao substituir $\dot{v}_i(t)$ o resultado é

$$e(t)' P_{\theta} \dot{e}(t) + \dot{e}(t)' P_{\theta} e(t) + \dot{e}(t)' S_{\theta} + S_{\theta}' \dot{e}(t) < 0, \quad (5.7)$$

onde

$$P_{\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) P_i \quad \text{e} \quad S_{\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) S_i. \quad (5.8)$$

Aplicando as Equações (3.20) e (3.21) em (5.7) tem-se

$$\begin{aligned} e(t)' P_\theta (A_{c\theta} e(t) + K_{c\theta}) + (A_{c\theta} e(t) + K_{c\theta})' P_\theta e(t) \\ + (A_{c\theta} e(t) + K_{c\theta})' S_\theta + S_\theta' (A_{c\theta} e(t) + K_{c\theta}) < 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ao colocar (5.9) na forma matricial encontra-se

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_{c\theta}' P_\theta + P_\theta A_{c\theta} & * \\ K_{c\theta}' P_\theta + S_\theta' A_{c\theta} & K_{c\theta}' S_\theta + S_\theta' K_{c\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix} < 0. \quad (5.10)$$

Essa condição então adiciona como limitação que nenhuma combinação das funções auxiliares podem ter um valor crescente. Porém essa condição é excessivamente conservadora e como é possível observar na Figura 5.1 quando o modo não está ativo o valor de sua função auxiliar pode sim crescer sem trazer prejuízos para o decréscimo de $V(e(t))$. Como já discutido, o modo ativo necessariamente precisa obedecer (5.5), observando isso o conservadorismo pode ser diminuído adicionando essa condição para que a derivada da função de Lyapunov seja negativa, ou seja, a seguinte condição será adicionada

$$V(e(t)) - \bar{V}(e(t)) = e(t)' P_\theta e(t) + 2 e(t)' S_\theta - e(t)' \bar{P} e(t) \geq 0. \quad (5.11)$$

Esta condição pode ser adicionada através do Procedimento-S descrito na Seção 2.2.1.3. Assim adotando um escalar α_θ descrito como uma combinação convexa de escalares constantes positivos α_i , ou seja

$$\alpha_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i(e(t)) \alpha_i. \quad (5.12)$$

A condição (5.10) pode então ser relaxada resultando em

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_{c\theta}' P_\theta + P_\theta A_{c\theta} + 2\alpha_\theta (P_\theta - \bar{P}) & * \\ K_{c\theta}' P_\theta + S_\theta' A_{c\theta} + 2S_\theta' \alpha_\theta & K_{c\theta}' S_\theta + S_\theta' K_{c\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix} < 0. \quad (5.13)$$

Pois $2(V(e(t)) - \bar{V}(e(t))) > 0$ continua sendo verdadeiro e facilitará a notação adotada na sequência.

A partir de agora a descrição dos valores $\theta_i(e(t))$ será realizada sem sua dependência do erro $e(t)$, devido as dificuldades de descrever através de LMIs essas dependências, tornando assim o problema mais conservador. As variáveis θ_i passam então a representar um valor qualquer dentro do simplex Θ .

Sendo assim, as seguintes combinações podem ser representadas através da seguinte notação mais conveniente

$$\begin{aligned} P_\theta &= P\theta & S_\theta &= S\theta \\ A_{c\theta} &= A_c \theta & K_{c\theta} &= K_c \theta \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= [\theta_1 \quad \cdots \quad \theta_m]' \\ P &= [P_1 \quad \cdots \quad P_m] \\ S &= [S_1 \quad \cdots \quad S_m] \\ A_c &= [A_{c1} \quad \cdots \quad A_{cm}] \\ K_c &= [k_{c1} \quad \cdots \quad k_{cm}] \end{aligned} \quad (5.15)$$

O mesmo pode ser feito com α_θ

$$\alpha_\theta = \alpha \theta \quad \text{onde} \quad \alpha = [\alpha_1 I_n \quad \cdots \quad \alpha_m I_n]. \quad (5.16)$$

Assim os escalares α_i aparecem multiplicando as matrizes identidade de ordem n .

Dando sequência, com a utilização do produto de Kronecker é possível isolar o vetor θ de tal forma que

$$e_\theta = \theta \otimes e(t) \quad (5.17)$$

O intuito com essa notação é remover o vetor θ da matriz que será utilizada na LMI final e pra isso é necessária a utilização de uma matriz extra de transformação tal que os elementos que não sejam multiplicados por este vetor continuem dentro da condição sem prejuízo. Considere então um vetor $1_m = [1 \quad \cdots \quad 1] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ e assim obtem-se

$$e(t) = I_a e_\theta \quad \text{onde} \quad I_a = 1_m \otimes I_n \quad (5.18)$$

Assim se torna possível reescrever a desigualdade (5.13) como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} < 0, \quad (5.19)$$

onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} (A_c + \alpha)'P + P'(A_c + \alpha) + \alpha'\bar{P}I_a + I_a'\bar{P}\alpha' & * \\ K_c'P + S'A_c + S'\alpha + \alpha'S & K_c'S + S'K_c \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Lembrando que $K\bar{\theta} = 0$ e $S\bar{\theta} = 0$ é possível afirmar que

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.21)$$

É possível incluir condições para relaxar ainda mais as restrições sem prejudicar o problema. A primeira delas é incluir a condição de que o somatório da diferença de todos os θ e todos os $\bar{\theta}$ será nulo, ou seja

$$\sum_{i=1}^m (\theta_i - \bar{\theta}_i) = 0 \quad (5.22)$$

Reescrevendo então na forma matricial

$$C_a \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times mn} & 1_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.23)$$

Outra maneira de adicionar condições relaxantes para esta LMI é através dos anuladores lineares.

Uma função matricial $\mathfrak{N}_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{r \times s}$ é um anulador linear para a função vetorial $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$ quando for linear e quando $\mathfrak{N}_f(z)f(z) = 0, \forall z \in \mathbb{R}^q$ de interesse.

Um anulador linear pode possuir inúmeras representações e a mais comum leva em conta todos os possíveis pares z_i, z_j para $i \neq j$ sem repetição resultando em uma matriz com o número de linhas igual a $r = \sum_{i=1}^{m-1} i$.

Como exemplo para um anulador linear $\mathfrak{N}_\theta$ para o vetor $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]'$ seria

$$\mathfrak{N}_\theta(\theta) \cdot \theta = \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.24)$$

É possível utilizar então os anuladores lineares para escrever a seguinte igualdade

$$C_b \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_\theta \otimes I_n & 0_{rn \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.25)$$

Sendo Q_a uma base de espaço nulo para C_a é possível adicionar essas duas novas restrições pelo lema de Finsler da Seção 2.2.1.4 e obter

$$Q_a(\Psi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L')Q_a < 0. \quad (5.26)$$

Assim se existirem matrizes P , S e L que resolvam a LMI proposta com um dado α , então isso implica que $A_{c\bar{\theta}}$ é Hurwitz estável e o sistema é globalmente assintoticamente estável sob o controle da lei de chaveamento proposta.

5.1 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

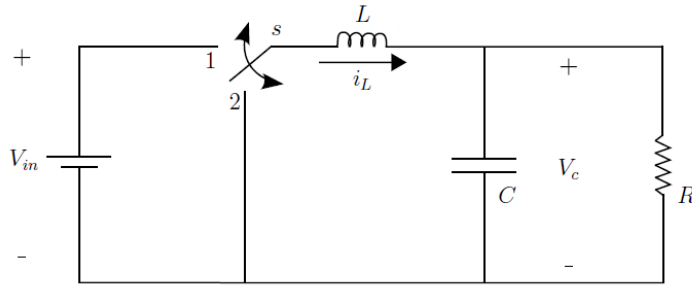
Serão aqui realizadas duas simulações para demonstrar a técnica de controle contínuo.

No primeiro exemplo são mostradas as influências da constante α_i e sugerida uma faixa para a escolha inicial desta. No segundo exemplo é demonstrado a capacidade da técnica de controlar sistemas com um número maior de modos, quatro neste caso.

5.1.1 Exemplo 1

Para o primeiro exemplo considere o conversor Buck ideal apresentado na Figura 5.2.

Figura 5.2 – Conversor de potência Buck ideal.



Fonte: produção do autor.

Ao modelar este conversor são obtidas as matrizes que descrevem a sua dinâmica:

$$A_{c1} = A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/(RC) \end{bmatrix}, \quad b_{c1} = \begin{bmatrix} V_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Para este conversor buck deseja-se controlar para uma tensão de saída $V_{out} = 25V$ e corrente de carga $i_L = 1,25A$. Para esta condição de equilíbrio o vetor θ será $\bar{\theta} = [0,5 \ 0,5]'$. A Tabela 5.1 descreve os demais valores utilizados neste exemplo.

Tabela 5.1 – Parâmetros numéricos para o conversor buck.

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
V_{in}	50	V	Tensão de entrada
L	2	mH	Indutância
C	200	μF	Capacitância
R	20	Ω	Resistência da carga

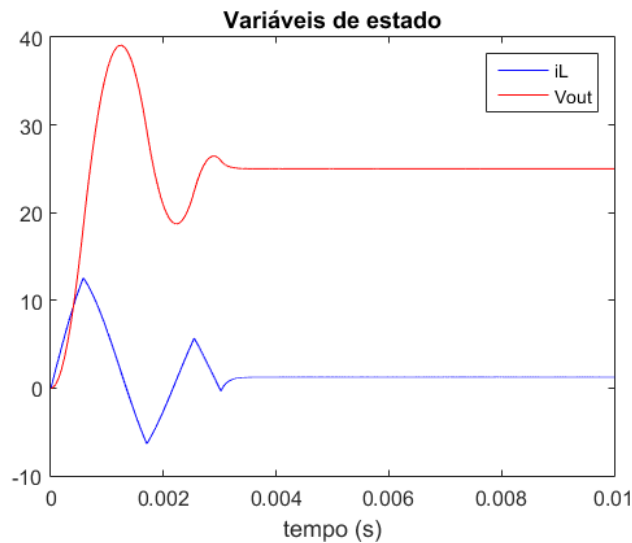
O primeiro ponto de observância é a necessidade da escolha dos escalares constantes α_i que atendam as restrições impostas. A escolha deve levar em conta que Ψ_{11} precisa ser negativa definida, ou seja, $(A_\theta + \alpha_\theta I_n)'P_\theta + P_\theta(A_\theta + \alpha_\theta I_n) - 2\alpha_\theta \bar{P} < 0$. Como a positividade de $\bar{P}$ é garantida e α_θ é sempre positivo essa condição sugere que as constantes α_i possa ser escolhida na faixa $0 < \alpha_i < |\lambda_i|$ onde λ_i representa a parte real do autovalor da matriz A_i mais próximo do eixo imaginário. Valores pequenos de α_i tendem a diminuir o tempo de resposta do sistema chaveado, por vezes tornando-o oscilatório, enquanto valores altos de α_i tornam o sistema amortecido e aumentam o seu tempo de assentamento (TROFINO et al., 2011).

Utilizando então um $\alpha = \begin{bmatrix} 400 & 400 \end{bmatrix}$ os resultados de P e S serão

$$P_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,9401 & -0,0138 \\ -0,0138 & 0,0981 \end{bmatrix}, \quad S_1 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0,1177 \\ -0,2031 \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

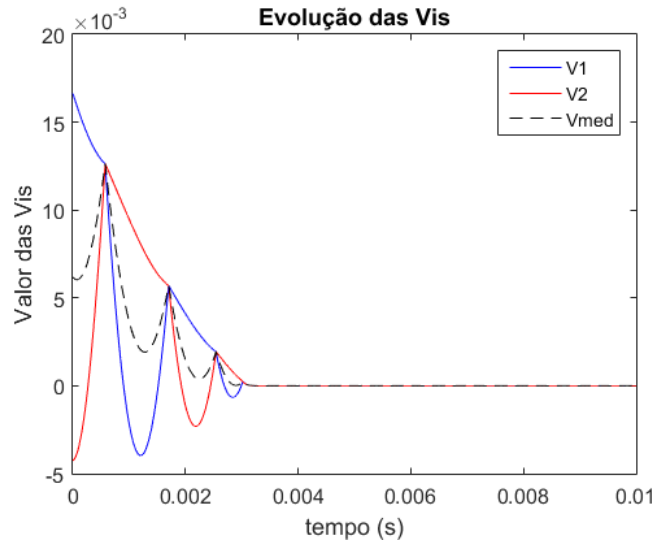
$$P_2 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,9401 & -0,0138 \\ -0,0138 & 0,0981 \end{bmatrix}, \quad S_2 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1177 \\ 0,2031 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

A evolução das variáveis de estado é mostrada na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 400$.

Os valores das funções auxiliares, o valor para sua combinação convexa com $\bar{\theta}$ e o decaimento destas com o controle em ação podem ser vistos na Figura 5.4.

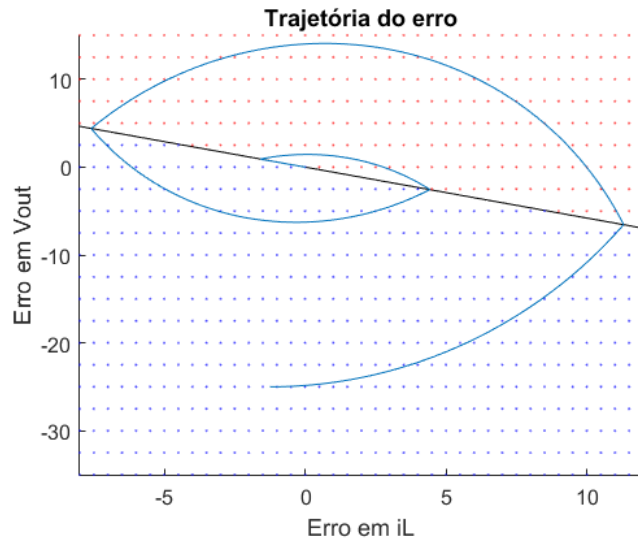
Figura 5.4 – Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha = 400$.



Fonte: produção do autor.

A trajetória do erro para esse α escolhido e a oscilação em torno da superfície de chaveamento podem ser visualizados na Figura 5.5.

Figura 5.5 – Trajetória de erros para $\alpha = 400$.



Fonte: produção do autor.

Apesar das considerações anteriores sobre valores de escolha iniciais para α_i é possível testar constantes acima desta faixa sugerida. Para este conversor foi encontrada uma faixa ideal $\alpha_i \in \{40|\lambda_i|, |\lambda_i|/6\}$.

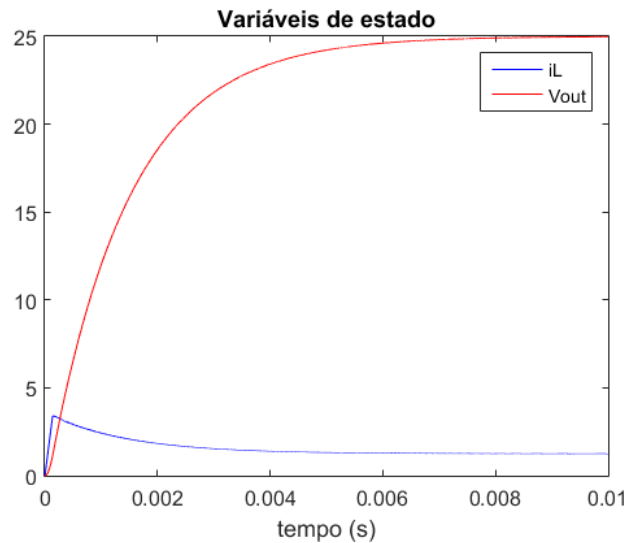
Realizando agora os testes para $\alpha_i = 20|\lambda_i|$ na tentativa de amortecer a resposta do sistema. Através da resolução das LMIs, foram obtidos os seguintes valores numéricos:

$$P_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,5648 & -0,0172 \\ -0,0172 & 0,0582 \end{bmatrix}, \quad S_1 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0,1170 \\ -0,0105 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$P_2 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,5648 & -0,0172 \\ -0,0172 & 0,0582 \end{bmatrix}, \quad S_2 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1170 \\ 0,0105 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

Como pode ser visto na Figura 5.6 a resposta do sistema para $\alpha = 2500$ é mais lenta e menos oscilante se comparada ao caso com $\alpha = 400$

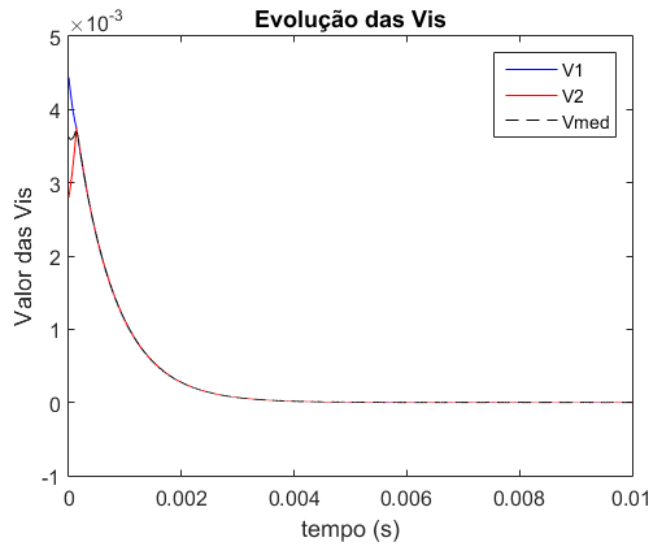
Figura 5.6 – Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 2500$.



Fonte: produção do autor.

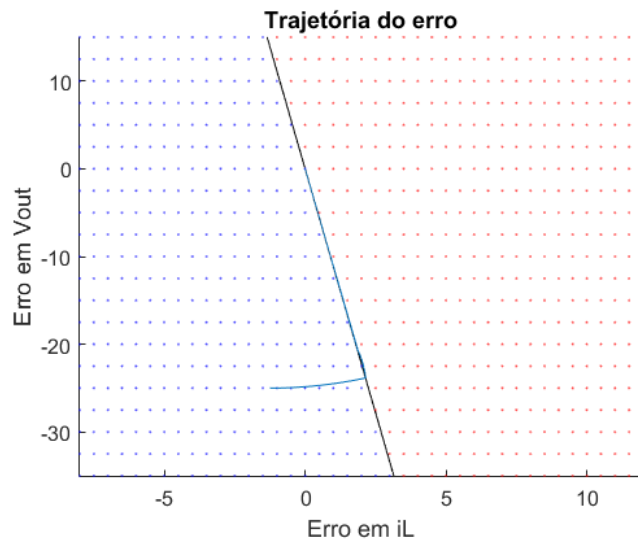
Esta resposta amortecida também pode ser vista nas figuras 5.7 e 5.8. Para esta primeira Figura as funções auxiliares V_i convergindo para valores próximos muito antes que no caso $\alpha = 400$, permanecendo assim por menos tempo continuamente em um único modo e corrigindo sua trajetória antes da oscilação começar. Assim na Figura 5.8 a trajetória do erro não realiza diversos cruzamentos pela superfície de chaveamento mas sim tende a zero percorrendo-a uma vez que a encontra.

Figura 5.7 – Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha = 2500$.



Fonte: produção do autor.

Figura 5.8 – Trajetória de erros para $\alpha = 2500$.



Fonte: produção do autor.

Uma observação oportuna é que a maioria das implementações reais de um conversor Buck não apresentaria a corrente negativa para os primeiros valores de α_i escolhidos. A implementação nestes casos se dá através de um diodo, que por sua vez bloquearia o fluxo reverso da corrente. Considerar este caso real levaria o sistema a um modo extra que não poderia ser arbitrariamente selecionado pela regra de chaveamento, caso que não é abordado por este trabalho.

5.1.2 Exemplo 2

Para a segunda simulação considere o exemplo de (HETEL; FRIDMAN, 2013) composto por 4 subsistemas descritos como

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 4,15 & -1,06 & -6,70 \\ 5,74 & 4,78 & -4,68 \\ 26,38 & -6,38 & -8,29 \end{bmatrix}, \quad B_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} -3,20 & -7,60 & -2,00 \\ 0,90 & 1,20 & -1,00 \\ 1,00 & 6,00 & 5,00 \end{bmatrix}, \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

$$A_{c3} = \begin{bmatrix} 5,75 & -16,48 & 2,41 \\ 9,51 & -9,49 & 19,55 \\ 16,19 & 4,64 & 14,05 \end{bmatrix}, \quad B_{c3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

$$A_{c4} = \begin{bmatrix} -12,38 & 18,42 & 0,54 \\ -11,90 & 3,24 & -16,32 \\ -26,50 & -8,64 & -16,60 \end{bmatrix}, \quad B_{c4} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

o qual possui seu ponto de equilíbrio em $\bar{\theta} = [0,15 \ 0,20 \ 0,30 \ 0,35]'$. Resolvendo a LMI (5.26) para esse sistema com um $\alpha = 3 \times 10^4$ as matrizes P e S obtidas são

$$P_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,2564 & -0,0901 & 0,0018 \\ -0,0901 & 0,3439 & -0,0529 \\ 0,0018 & -0,0529 & 0,0544 \end{bmatrix}, \quad S_1 = 10^{-8} \times \begin{bmatrix} -0,1054 \\ 0,2570 \\ -0,0427 \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

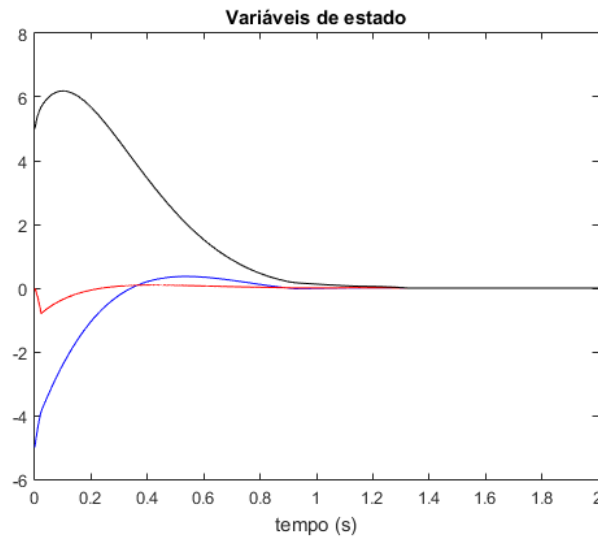
$$P_2 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,2564 & -0,0901 & 0,0018 \\ -0,0901 & 0,3440 & -0,0530 \\ 0,0018 & -0,0530 & 0,0544 \end{bmatrix}, \quad S_2 = 10^{-8} \times \begin{bmatrix} -0,2030 \\ 0,1697 \\ -0,0079 \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

$$P_3 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,2564 & -0,0901 & 0,0018 \\ -0,0901 & 0,3441 & -0,0531 \\ 0,0018 & -0,0531 & 0,0545 \end{bmatrix}, \quad S_3 = 10^{-8} \times \begin{bmatrix} 0,0985 \\ -0,0925 \\ 0,0204 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

$$P_4 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,2565 & -0,0902 & 0,0018 \\ -0,0902 & 0,3440 & -0,0529 \\ 0,0018 & -0,0529 & 0,0544 \end{bmatrix}. \quad S_4 = 10^{-8} \times \begin{bmatrix} 0,0702 \\ -0,1171 \\ 0,0108 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

A evolução das variáveis de estado ao longo do tempo para o controle do tipo ‘max’ com estas matrizes P e S encontradas é mostrado na Figura 5.9.

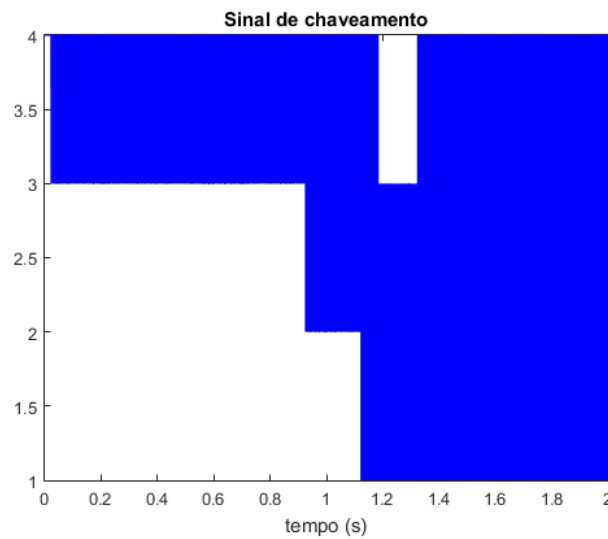
Figura 5.9 – Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 3 \times 10^4$.



Fonte: produção do autor.

O perfil de chaveamento pode ser observado na Figura 5.10.

Figura 5.10 – Sinal de chaveamento para $\alpha = 3 \times 10^4$.



Fonte: produção do autor.

Ao resolver a LMI (5.26) com um $\alpha = 3 \times 10^2$ o resultado é

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,1720 & -0,0604 & -0,0080 \\ -0,0604 & 0,7353 & -0,2274 \\ -0,0080 & -0,2274 & 0,2957 \end{bmatrix}, \quad S_1 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -0,7036 \\ 5,4999 \\ -2,0626 \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

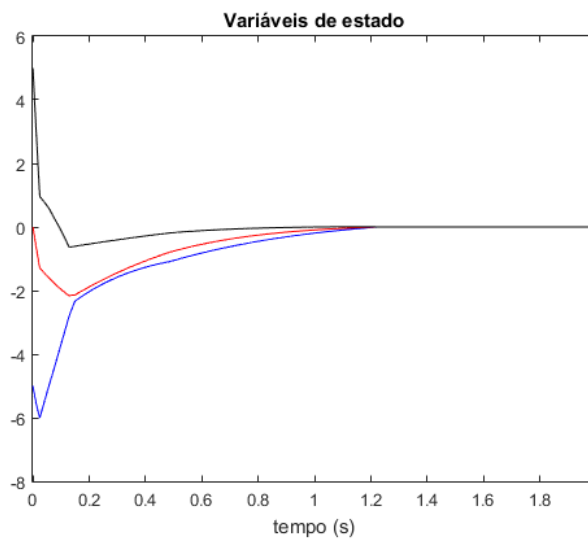
$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,1749 & -0,0635 & 0,0017 \\ -0,0635 & 0,7525 & -0,2338 \\ 0,0017 & -0,2338 & 0,2858 \end{bmatrix}, \quad S_2 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} -1,3786 \\ 2,5443 \\ -0,3017 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0,1713 & -0,0656 & -0,0014 \\ -0,0656 & 0,7756 & -0,2594 \\ -0,0014 & -0,2594 & 0,2927 \end{bmatrix}, \quad S_3 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,6782 \\ -1,8555 \\ 0,8825 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0,1761 & -0,0667 & 0,0073 \\ -0,0667 & 0,7412 & -0,2155 \\ 0,0073 & -0,2155 & 0,2939 \end{bmatrix}, \quad S_4 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,5080 \\ -2,2206 \\ 0,3000 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

As variáveis de estado para esta configuração podem ser visualizadas na Figura 5.11.

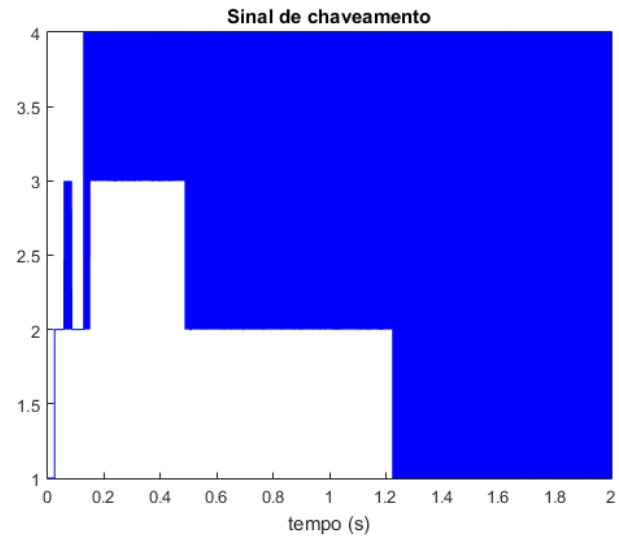
Figura 5.11 – Variáveis de estado ao longo do tempo para $\alpha = 3 \times 10^2$.



Fonte: produção do autor.

O sinal de chaveamento para este controle é mostrado na Figura 5.12.

Figura 5.12 – Sinal de chaveamento para $\alpha = 3 \times 10^2$.



Fonte: produção do autor.

6 PROJETO DE LEI DE CHAVEAMENTO UTILIZANDO A FUNÇÃO ‘MAX’ PARA SISTEMAS DISCRETOS

Neste capítulo será apresentada a técnica de controle de sistemas chaveados discretos utilizando a função ‘max’. A base desta técnica reside na sua versão contínua que é apresentada no Capítulo 5.

Para demonstrar essa técnica considere um sistema chaveado discreto representado pelas Equações (3.4) e (3.5). Será descrita aqui a técnica que levará o sistema a uma região de equilíbrio contendo o ponto de equilíbrio x_{eq} tal como descrito na Seção 3.4.2. A regra de chaveamento para que esta região de equilíbrio seja alcançada é descrita como

$$\sigma(e[k]) = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e[k])\}, \quad (6.1)$$

onde v_i são funções auxiliares. As funções auxiliares utilizadas nesta técnica são

$$v_i(e[k]) = e[k]' P_i e[k] + 2e[k]' S_i \quad (6.2)$$

que por fim formam a função de Lyapunov

$$V(e[k]) = \max_{i \in \mathcal{M}} \{v_i(e[k])\} = \max_{i \in \mathcal{M}} \left\{ \sum_{i=1}^m \theta_i(e[k]) \cdot v_i(e[k]) \right\}. \quad (6.3)$$

Para realizar a prova formal de estabilidade será utilizado o critério de estabilidade de Lyapunov adaptado para os casos discretos. Essas condições são descritas por (2.26) e (2.27).

A primeira restrição é a positividade da função de Lyapunov. Assim como no caso contínuo a positividade será garantida a partir da combinação convexa com as razões conhecidas de equilíbrio $\bar{\theta}$ que levam ao equilíbrio, reduzindo assim o conservadorismo ao possibilitar que modos não ativos assumam valores negativos, ou seja

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i P_i > 0 \quad \text{e} \quad \bar{S} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i S_i = 0, \quad (6.4)$$

e assim verifica-se que

$$V(e[k]) \geq \bar{V}(e[k]) = e[k]' \bar{P} e[k] > 0. \quad (6.5)$$

O segundo critério para garantir a estabilidade de Lyapunov é que a função de Lyapunov seja decrescente, assim para sistemas discretos

$$\sum_{i=1}^m \theta_i(e[k]) \cdot \Delta v_i(e[k]) < 0. \quad (6.6)$$

Se esta condição for atendida para todo modo ativo ou para a combinação convexa dada pelo vetor θ , então é possível afirmar que a função de Lyapunov V é decrescente. Substituindo $\Delta v_i[k]$ obtêm-se

$$e[k+1]' P_\theta e[k+1] + 2 e[k+1]' S_\theta - e[k]' P_\theta e[k] - 2 e[k]' S_\theta < 0, \quad (6.7)$$

onde

$$P_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i(e[k]) P_i \quad \text{e} \quad S_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i(e[k]) S_i. \quad (6.8)$$

É importante salientar que a combinação convexa não existe de fato. O que ocorre na prática é que dentro de um período específico cada um dos modos passa a assumir um tempo ativo proporcional aos valores dados por θ .

Na continuação as Equações (3.27) e (3.28) são aplicadas em (6.7), assim o resultado é

$$(A_{d\theta} e[k] + K_{d\theta})' P_\theta (A_{d\theta} e[k] + K_{d\theta}) + 2 (A_{d\theta} e[k] + K_{di})' S_\theta - e[k]' P_\theta e[k] - 2 e[k]' S'_\theta < 0, \quad (6.9)$$

ou em sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix}' \Psi_\theta \begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix} < 0. \quad (6.10)$$

onde

$$\Psi_\theta = \begin{bmatrix} (A'_{d\theta} P_\theta A_{d\theta} - P_\theta) & * \\ (K'_{d\theta} P_\theta K_{d\theta} + S'_\theta A_{d\theta} - S_\theta) & (K'_{d\theta} S_\theta K_{d\theta} + K'_{d\theta} S_\theta + S'_\theta K_{d\theta}) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Para reduzir o conservadorismo é então aplicada a mesma estratégia que foi utilizada no modo contínuo, na qual o modo ativo necessariamente precisa obedecer (6.5). Para possibilitar que a condição (6.10) seja verdadeira somente para o modo ativo, será adicionada a seguinte desigualdade

$$V(e[k]) - \bar{V}(e[k]) = e[k]' P_\theta e[k] + 2 e[k]' S_\theta - e[k]' \bar{P} e[k] \geq 0. \quad (6.12)$$

Essa desigualdade será inserida em (6.10) utilizando o Procedimento-S descrito na Seção 2.2.1.3. Adotando um escalar α_θ como uma combinação convexa dos escalares constantes positivos α_i , ou seja

$$\alpha_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i(e[k]) \alpha_i. \quad (6.13)$$

a condição (6.10) pode então ser relaxada resultando em

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix}' (\Psi_\theta + \varphi_\theta) \begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix} < 0. \quad (6.14)$$

onde

$$\varphi_\theta = \begin{bmatrix} \alpha_\theta(P_\theta - \bar{P}) & * \\ \alpha_\theta S'_\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

As descrições de θ_i na sequência serão realizadas sem sua dependência do erro $e[k]$, representado assim qualquer condição dentro do simplex Θ . Esta mudança simplifica o equacionamento das LMIs mas torna o problema mais conservador. Assim, a nova representação das combinações passa a ser a seguinte notação mais conveniente

$$\begin{aligned} P_\theta &= P\theta & S_\theta &= S\theta \\ A_{d\theta} &= A_d \theta & K_{d\theta} &= K_d \theta \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \theta &= [\theta_1 \quad \dots \quad \theta_m]' \\ P &= [P_1 \quad \dots \quad P_m] \\ S &= [S_1 \quad \dots \quad S_m] \\ A_d &= [A_{d1} \quad \dots \quad A_{dm}] \\ K_d &= [k_{d1} \quad \dots \quad k_{dm}] \end{aligned} \quad (6.17)$$

A notação de α_θ também passa a ser

$$\alpha_\theta = \alpha \theta \quad \text{onde} \quad \alpha = [\alpha_1 I_n \quad \dots \quad \alpha_m I_n], \quad (6.18)$$

com I_n sendo matrizes identidade de ordem n .

Com a utilização do produto de Kronecker o vetor θ é então isolado

$$e_\theta = \theta \otimes e[k] \quad (6.19)$$

A partir disso o vetor θ é removido da LMI e os elementos que não possuíam este vetor para ser isolado irão necessitar de uma transformação adicional para continuarem válidas. Sendo assim considere o vetor $1_m = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, a transformação é dada por

$$e[k] = I_a e_\theta \quad \text{onde} \quad I_a = 1_m \otimes I_n. \quad (6.20)$$

Assim é possível reescrever a desigualdade (6.14) como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' (\Psi + \varphi) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} < 0, \quad (6.21)$$

onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} (A_d' P_\theta A_d - P' I_a) & * \\ (K_d' P_\theta K_d + S' A_d - S' I_a) & (K_d' P_\theta K_d + K_d' S + S' K_d) \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0,5 \alpha' (P - \bar{P} I_a) + 0,5 (P - \bar{P} I_a)' \alpha & * \\ S' \alpha & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Como $K\bar{\theta} = 0$ e $S\bar{\theta} = 0$ então é possível afirmar que

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' (\Psi + \varphi) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix}' (\Psi + \varphi) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.24)$$

Duas condições podem ser incluídas para relaxar mais as restrições. Ambas são descritas no Capítulo 5 pelas Equações (5.23) e (5.25) para sistemas chaveados contínuos mas são igualmente válidas para o caso discreto.

Logo para

$$C_a = [0_{1 \times mn} \quad 1_m], \quad (6.25)$$

$$C_b = [\mathfrak{K}_\theta \otimes I_n \quad 0_{rn \times m}], \quad (6.26)$$

com Q_a sendo uma base de espaço nulo para C_a é possível adicionar essas restrições pelo lema de Finsler da Seção 2.2.1.4 e obter

$$Q_a(\Psi + \varphi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L')Q_a < 0. \quad (6.27)$$

Se a frequência de chaveamento desse sistema se aproximasse do infinito da mesma maneira que acontece com o caso contínuo, $V(e[k])$ apresentaria uma trajetória descendente para

todo instante de tempo dada as restrições encontradas em (6.27), porém com uma frequência de amostragem limitada isso não é mais uma condição verdadeira.

À medida que o sistema se aproxima do seu ponto de equilíbrio x_{eq} a função de Lyapunov $V(e[k])$ deixa de decair para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$. Ainda dentro desse período a função pode se tornar crescente e só retornar a diminuir seu valor no próximo momento de escolha do modo ativo.

A estabilidade assintótica neste caso se torna impossível quando o ponto de equilíbrio x_{eq} não for também o ponto de equilíbrio individual de algum subsistema do sistema chaveado.

Ainda assim é possível provar que o sistema controlado a partir da lei de chaveamento desenvolvida será Lyapunov estável criando uma região para que o sistema sempre retorne.

Considere então que para a LMI (6.27) ser atendida a seguinte condição precisa ser verificada

$$V(e[k]) > 1, \quad (6.28)$$

podendo ser também representada em sua notação matricial

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_\theta & * \\ S'_\theta & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e[k] \\ 1 \end{bmatrix} > 0. \quad (6.29)$$

Através do Procedimento-S e adotando um escalar β_θ como uma combinação convexa dos escalares constantes positivos β_i , tal qual realizada para α_θ em (6.13), é possível então adicionar essa condição na LMI (6.27) resultando em

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix}' Q_a(\Psi + \varphi + \Omega + LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L')Q_a \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \bar{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad (6.30)$$

onde

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0,5 \beta' P + 0,5 P' \beta & * & * \\ S' \beta & 0 & * \\ 0 & 0 & -\beta_\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = [\beta_1 I_n \quad \cdots \quad \beta_m I_n]. \quad (6.31)$$

Assim durante a resolução das desigualdades e optando pela maximização de $\bar{P}$ a área de convergência Λ dada por

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^m \xi_i \quad \text{onde} \quad \xi_i := \{e[k] \in \mathbb{R}^n : v_i(e[k]) < 1\} \quad (6.32)$$

A maximização de $\bar{P}$, porém, somente com essas condições é ilimitada fazendo com que a área de convergência decresça deixando fora dessa área inclusive valores que seriam alcançados imediatamente depois do sistema estar na área de equilíbrio.

Como condição para limitar esse decrescimento, uma nova restrição é adicionada para que os passos do sistema chaveado quando este se encontra no ponto de equilíbrio estejam dentro da área de convergência.

$$1 - v_i(k_j) > 0 \quad \forall i \in m \quad \text{e} \quad \forall j \in m \quad (6.33)$$

Assim se existirem matrizes P , S e L que resolvam todas as restrições impostas dados os vetores α e β , então $A_{d\bar{\theta}}$ é Schur estável e o sistema é Lyapunov estável sob o controle da lei de chaveamento proposta.

7 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES UTILIZANDO A LEI DE CHAVEAMENTO DESENVOLVIDA PARA SISTEMAS DISCRETOS

Serão aqui apresentados cinco exemplos para demonstrar a técnica de controle discreta descrita neste capítulo.

No primeiro exemplo são discutidos a influência das constantes α_i e β_i e uma faixa adequada para a escolha de ambas. No segundo exemplo são mostrados os erros em regime que ocorrem em um sistema chaveado a tempo discreto. No terceiro exemplo é apresentada a consequência para a região de atração quando uma das matrizes P obtidas possui autovalor negativo. Nos dois exemplos seguintes são demonstradas a generalidade da técnica ao aplicá-la em sistemas chaveados com três ou quatro subsistemas, respectivamente.

7.1 EXEMPLO 1

Para o primeiro exemplo considere o conversor Buck descrito pelas dinâmicas em (5.27). A tabela 7.1 descreve os valores de seus parâmetros.

Tabela 7.1 – Parâmetros para o conversor Buck.

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
V_{in}	15	V	Tensão de entrada
L	1	mH	Indutância
C	1	μF	Capacitância
R	30	Ω	Resistência da carga

Para este conversor Buck deseja-se controlar para uma tensão de saída $V_{out} = 11,25V$ e corrente de carga $i_L = 0,375A$. Para esta condição de equilíbrio o vetor θ será $\bar{\theta} = [0,75 \ 0,25]'$. A frequência de amostragem será $f = 10MHz$.

O primeiro ponto de observância é a necessidade da escolha dos escalares constantes α_i e β_i que atenda as restrições impostas.

A escolha deve levar em conta que $\Psi_{11} + \phi_{11} + \Omega_{11}$ precisa ser negativa definida, ou seja, $\alpha'_\theta \bar{P}_\theta + (1 - \alpha_\theta - \beta_\theta) P_\theta > A'_\theta P_\theta A_\theta$. Como a positividade de $\bar{P}$ é garantida e os valores de α_θ e β_θ são sempre positivos essa condição sugere que as constantes α_i e β_i possam ser escolhidas na faixa $0 < \alpha_i < 1$ e $\beta_i < \alpha_i$. Valores pequenos de α_i tendem a diminuir o tempo de resposta do sistema chaveado, por vezes tornando-o oscilatório, enquanto valores altos de α_i tornam o sistema amortecido e aumentam o seu tempo de assentamento. O mesmo vale para valores de β_i , valores menores tendem a melhorar o tempo de resposta do sistema e valores maiores tendem a torná-lo mais amortecido.

Utilizando um $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5 \times 10^{-5}$ o sistema apresenta os seguintes resultados

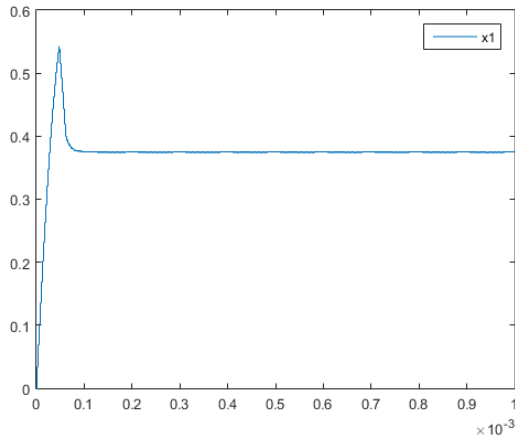
$$P_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 3,5930 & -0,0590 \\ -0,0590 & 0,0092 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} -422,6751 \\ -31,8854 \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

$$P_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 3,5930 & -0,0590 \\ -0,0590 & 0,0092 \end{bmatrix}, \quad S_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1,2680 \\ 0,0957 \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

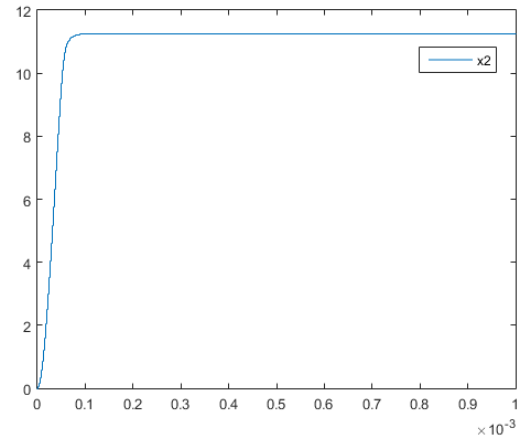
Os perfis de corrente e de tensão para o controle discreto do tipo ‘max’ dadas estas matrizes P e S encontradas são mostrados nas figuras 7.1a e 7.1b, respectivamente.

Figura 7.1 – Corrente (a) e tensão (b) do conversor para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5 \times 10^{-5}$.

(a)



(b)



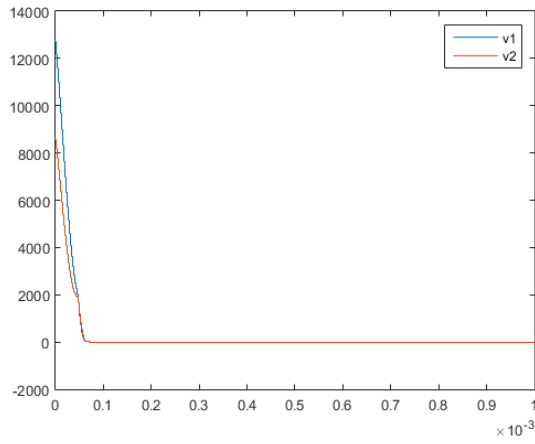
Fonte: produção do autor.

O decaimento e a positividade da função de Lyapunov são mostrados na Figura 7.2a. O detalhe da evolução das funções auxiliares pode ser visto na Figura 7.2b. Esta figura mostra que as condições impostas para o sistema foram atendidas e o valor máximo da função Lyapunov, ainda que extrapole o valor unitário, nunca cresce quando fora desta região.

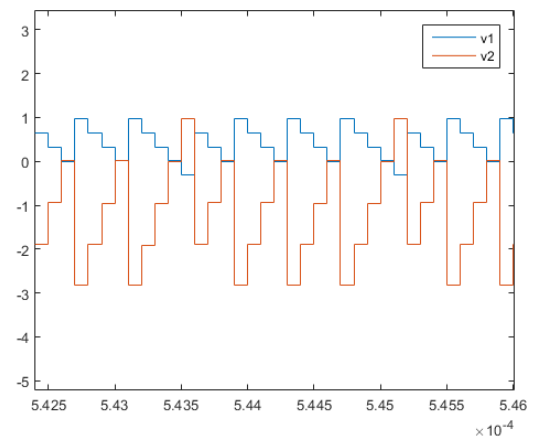
A trajetória do erro, a superfície de chaveamento e as áreas de atração impostas pela condição (6.31) são apresentados na Figura 7.3a. O detalhe da comutação sobre a superfície de chaveamento e dentro das regiões de atração é mostrado na Figura 7.3b.

Figura 7.2 – Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5 \times 10^{-5}$.

(a)



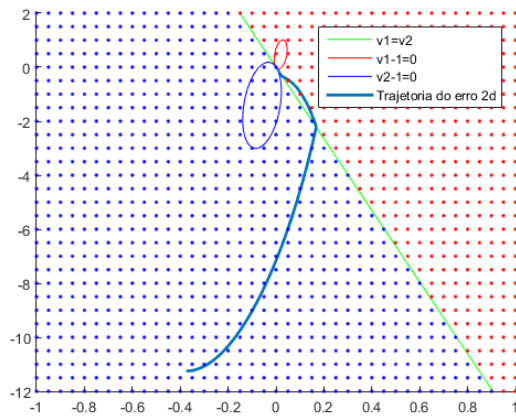
(b)



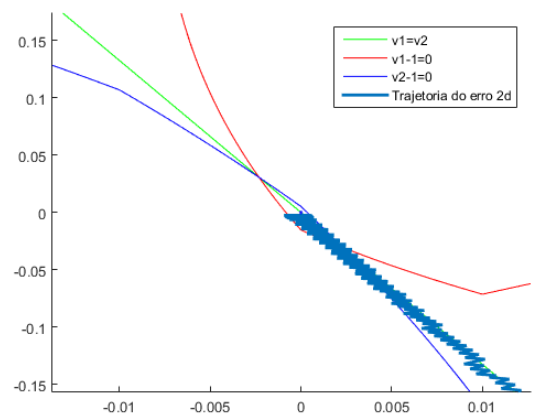
Fonte: produção do autor.

Figura 7.3 – Trajetória de erros para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,01$ e $\beta_1 = \beta_2 = 5 \times 10^{-5}$.

(a)



(b)



Fonte: produção do autor.

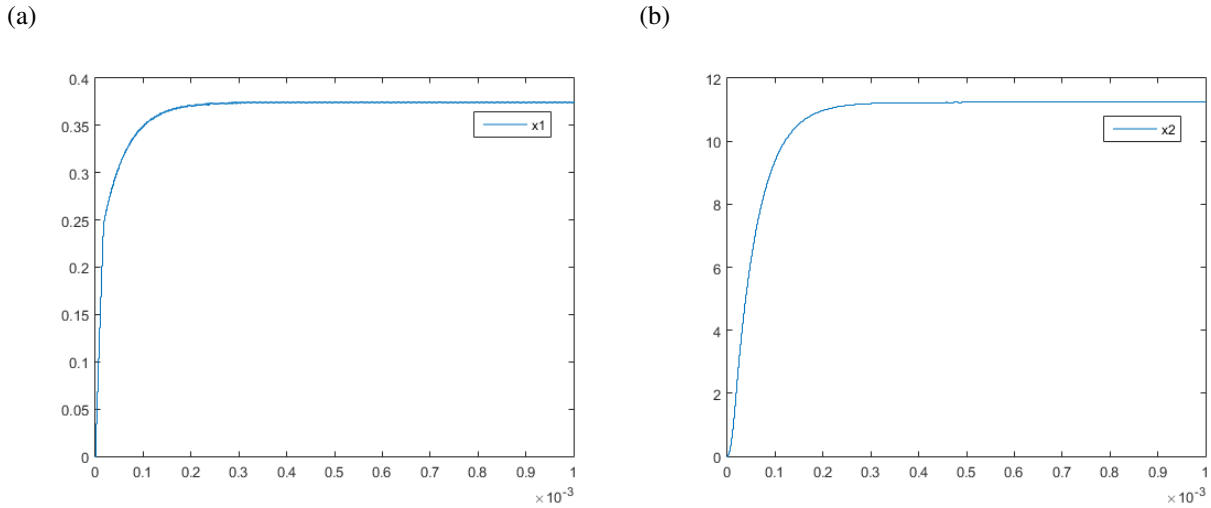
Utilizando um $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$ o sistema apresenta os seguintes resultados para as matrizes P e S :

$$P_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 3,1562 & -0,0561 \\ -0,0561 & 0,0063 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} -267,4033 \\ 3,6546 \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

$$P_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 3,1562 & -0,0561 \\ -0,0561 & 0,0063 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 802,2100 \\ -10,9638 \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

A corrente para este controle é mostrada na Figura 7.4a, a tensão é mostrada na Figura 7.4b. É possível ver nestas figuras que o crescimento de α_i e de β_i trouxe uma resposta mais amortecida se comparada com a situação anterior.

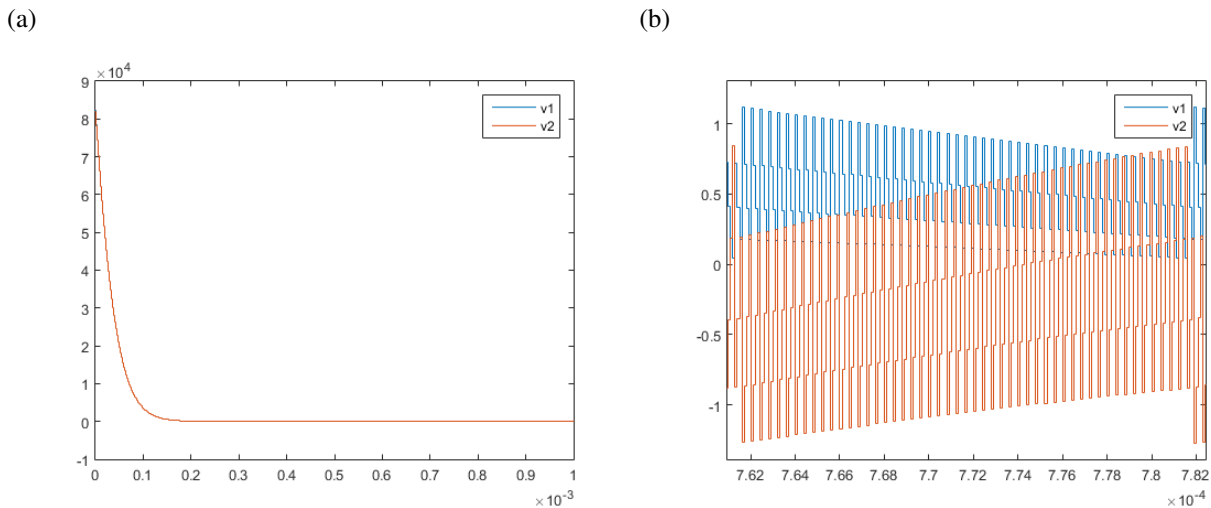
Figura 7.4 – Corrente (a) e tensão (b) do conversor para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$.



Fonte: produção do autor.

A resposta das funções auxiliares são mostradas na Figura 7.5a. Os detalhes das funções auxiliares apresentados na Figura 7.5b mostram que estas funções respeitam as condições impostas ainda que atinjam valores maiores que a condição anterior.

Figura 7.5 – Funções auxiliares ao longo do tempo para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$.

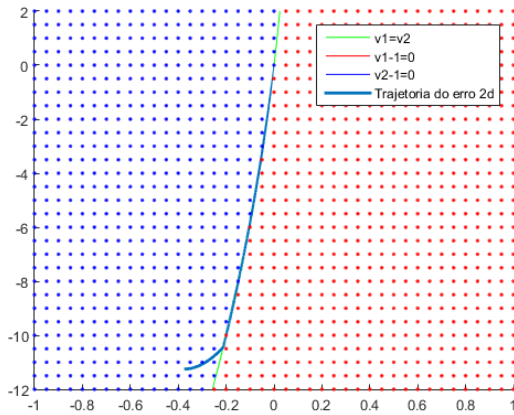


Fonte: produção do autor.

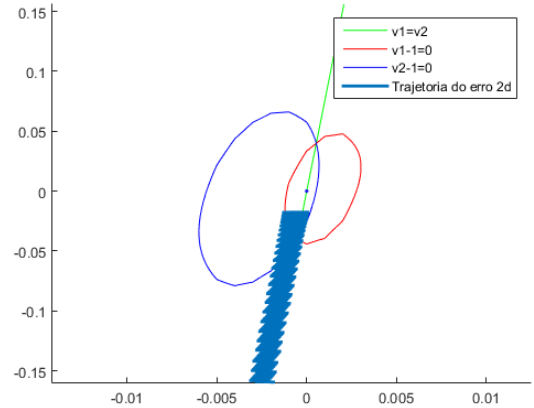
A trajetória de erros e a superfície de chaveamento são mostradas na Figura 7.6a. No detalhe desta trajetória, apresentado na Figura 7.6b, é possível ver o chaveamento na superfície de chaveamento e as regiões de atração.

Figura 7.6 – Trajetória de erros para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$.

(a)



(b)



Fonte: produção do autor.

7.2 EXEMPLO 2

O próximo exemplo é um conversor Buck-Boost modelado na Seção 3.5 com uma frequência de amostragem de $f = 1\text{MHz}$ e com os parâmetros descritos na tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Parâmetros para o conversor Buck-Boost.

Parâmetro	Valor	Unidade	Descrição
V_{in}	15	V	Tensão de entrada
L	3	mH	Indutância
C	47	μF	Capacitância
R	50	Ω	Resistência da carga
R_{in}	0	Ω	Resistência da carga

A tensão de saída desejada é de $V_c = -20\text{V}$ e nesses termos a condição de equilíbrio para o vetor θ será $\bar{\theta} = [0,5714 \quad 0,4286]'$.

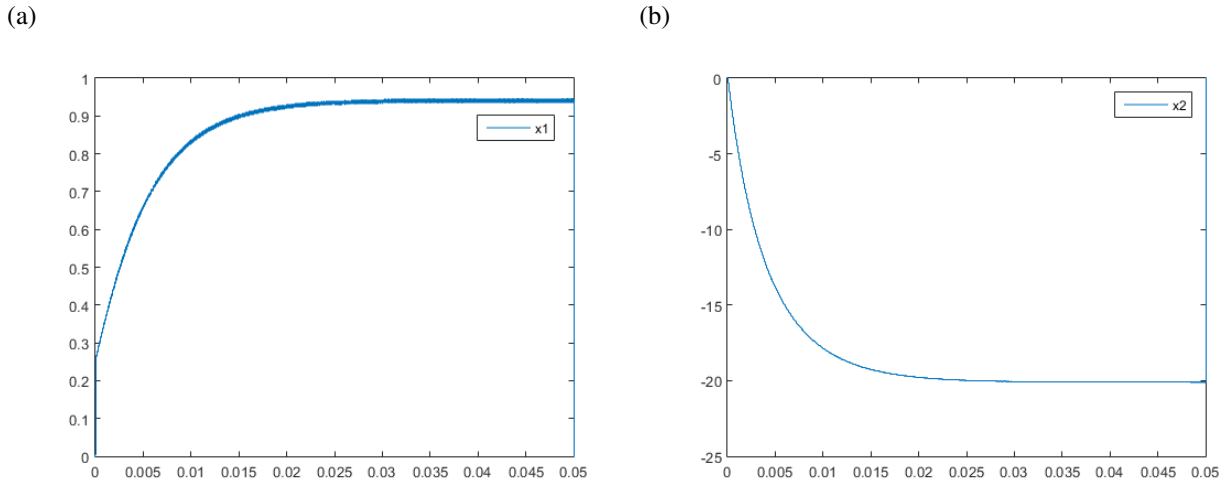
Com constantes $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 0,32$ e $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-6}$ os resultados para as matrizes P e S são

$$P_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 3,4964 & -0,0762 \\ -0,0762 & 0,0768 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} -56,8167 \\ 2,8941 \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

$$P_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 3,5143 & -0,0787 \\ -0,0787 & 0,0767 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 75,7555 \\ -3,8588 \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

As evoluções de corrente e tensão ao longo do tempo são apresentadas nas Figuras 7.7a e 7.7b, respectivamente.

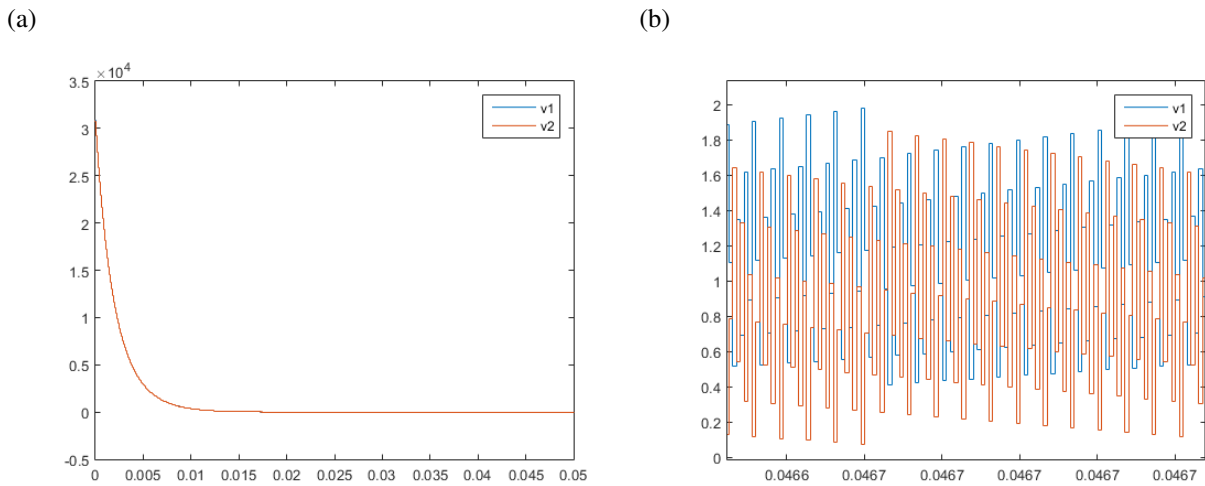
Figura 7.7 – Corrente (a) e tensão (b) do conversor para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,4$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$.



Fonte: produção do autor.

As funções auxiliares são mostradas na Figura 7.8a. Os detalhes das funções auxiliares, apresentados na Figura 7.8b, mostram que ao extrapolar o valor unitário da função de Lyapunov esta volta a decair.

Figura 7.8 – Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema Buck-Boost discretizado.

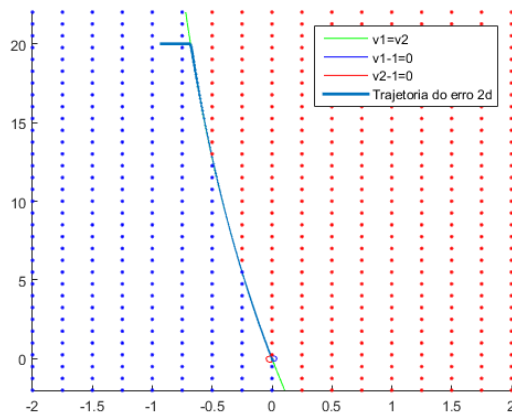


Fonte: produção do autor.

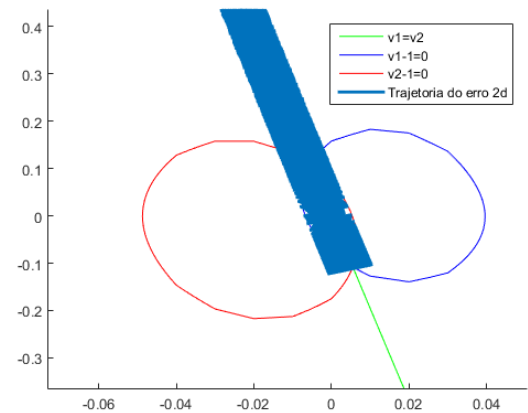
Como as funções auxiliares convergiram para o mesmo valor antes dos $60\mu s$ se torna difícil de distingui-las na Figura 7.8a. Essa rápida convergência pode ser observada também na trajetória de erros. A trajetória de erros, a superfície de chaveamento e as regiões de atração são mostradas na Figura 7.9a. Os detalhes dos erros e das regiões de atração podem ser vistos na Figura 7.9b.

Figura 7.9 – Trajetória de erros para o sistema Buck-Boost discretizado.

(a)



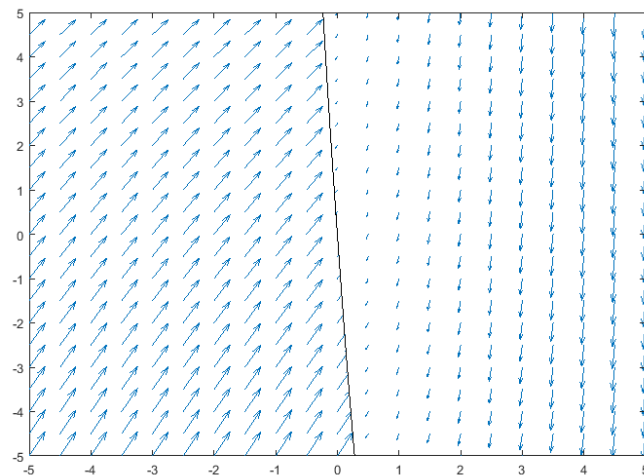
(b)



Fonte: produção do autor.

É possível ver que existe um erro quando este sistema se encontra em regime, algo também presente nos outros exemplos apresentados nesta seção. Como comentado anteriormente a combinação convexa não existe de fato para um sistema discreto e, portanto, não há momento onde as dinâmicas de cada modo se anulem. Com um tempo fixo de chaveamento o sistema pode permanecer submetido as dinâmicas de um modo quando, de acordo com a superfície de chaveamento, já deveria ter comutado. O plano de fases apresentado na Figura 7.10 mostra a dinâmica para cada um destes subsistemas. Através desta figura é possível observar que o sistema pode entrar em regime numa área próxima onde os períodos em cada um dos modos tragam a convergência para o sistema chaveado.

Figura 7.10 – Plano de fases para o conversor Buck-Boost contendo a superfície de chaveamento.



Fonte: produção do autor.

Assim pode-se dizer que os sistemas chaveados discretos orbitam em torno de seus pontos de equilíbrio ao invés de realmente os alcançarem e lá permanecerem.

7.3 EXEMPLO 3

Considere o sistema chaveado utilizado como exemplo em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017) com dois modos descrito pelas seguintes matrizes dinâmicas

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

Este sistema é amostrado com uma frequência $f = 1\text{Hz}$ e tem como ponto de equilíbrio $x_{eq} = [3,2545 \quad -0,0048 \quad -0,4645]'$ que deverá ser alcançado quando o vetor θ assumir os valores $\bar{\theta} = [0,4 \quad 0,6]'$.

Para valores constantes de $\alpha_1 = 0,95$, $\alpha_2 = 0,85$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1 \times 10^{-3}$ o resultado obtido será

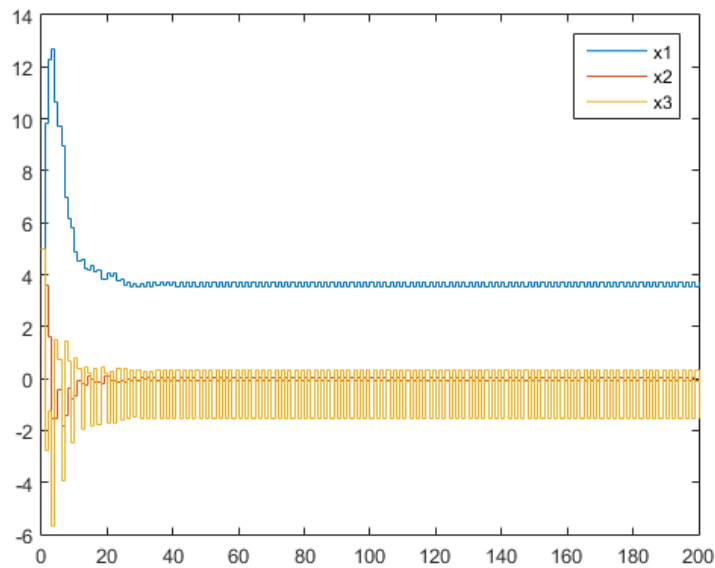
$$P_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1,0841 & 0,4617 & 0,2376 \\ 0,4617 & -0,9919 & 0,8750 \\ 0,2376 & 0,8750 & 0,3811 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0,1809 \\ 0,8776 \\ 0,1860 \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

$$P_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,8089 & -0,0219 & 0,1657 \\ -0,0219 & 6,7382 & 0,0324 \\ 0,1657 & 0,0324 & 0,4683 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} -0,1206 \\ -0,5850 \\ -0,1240 \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

A resposta das variáveis de estado com o controle realizado pela lei desenvolvida é apresentada na Figura 7.11.

A Figura 7.12a mostra a evolução das funções auxiliares, seu decaimento e sua positividade. Os detalhes dessas funções auxiliares mostra ambas abaixo do valor unitário. Esses detalhes podem ser vistos na Figura 7.12b.

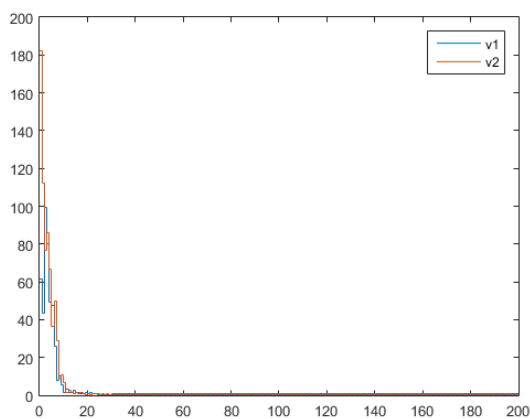
Figura 7.11 – Variáveis de estado ao longo do tempo para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).



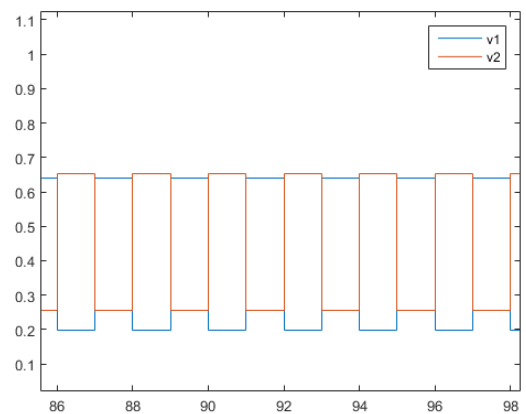
Fonte: produção do autor.

Figura 7.12 – Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).

(a)



(b)

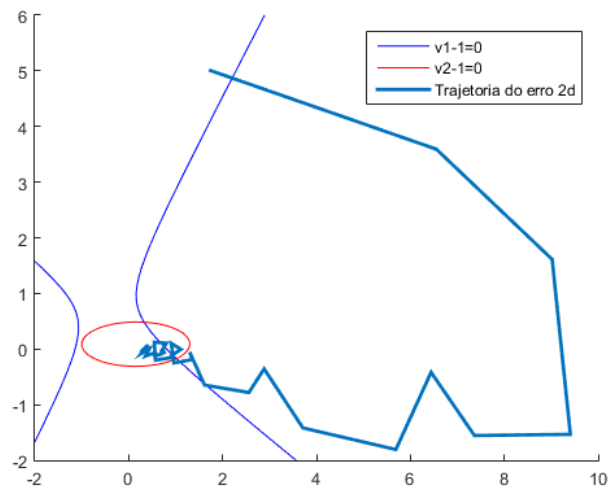


Fonte: produção do autor.

Uma representação em um dos planos da trajetória de erros e as regiões de atração são mostrados na Figura 7.13. Uma dessas áreas de atração é formada por uma hipérbole quando representada nesse plano e deverá ser vista como um hiperboloide elíptico de uma folha se visualizado em uma projeção tridimensional. Isso ocorre devido a um dos autovalores da matriz

P_1 ser negativo, algo perfeitamente possível tendo em vista que a condição imposta para a existência de solução é somente $\bar{P} > 0$.

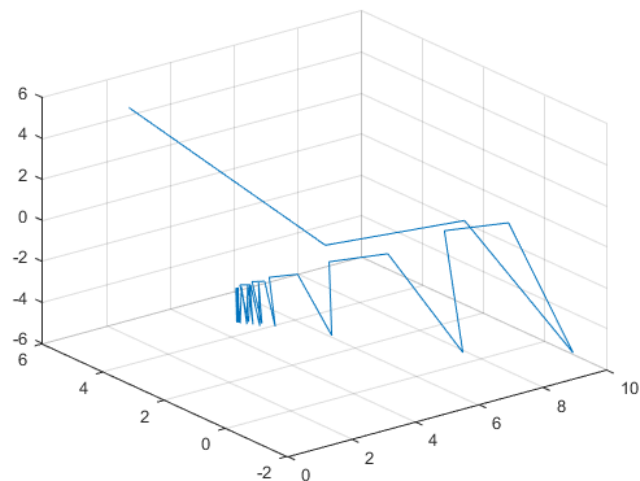
Figura 7.13 – Trajetória de erros para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).



Fonte: produção do autor.

A trajetória tridimensional dos erros se torna mais adequada para um sistema com três variáveis de estado. Essa trajetória é apresentada na Figura 7.14.

Figura 7.14 – Detalhe da trajetória de erros para o sistema proposto em (EGIDIO; DAIHA; DEAECTO, 2017).



Fonte: produção do autor.

7.4 EXEMPLO 4

Considere o exemplo apresentado em (TROFINO et al., 2011) e utilizado na Seção 4.1.1 com um $\delta = -1$ e uma frequência de chaveamento $f = 50\text{Hz}$.

Deseja-se um controle que leve o sistema até o ponto de equilíbrio x_{eq} nulo. Este equilíbrio acontece quando o vetor θ assume o valor $\bar{\theta} = [0,3333 \ 0,3333 \ 0,3333]'$.

Resolvendo as desigualdades para este sistema chaveado com as constantes com os valores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,05$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1 \times 10^{-4}$ o resultado para as matrizes P e S será

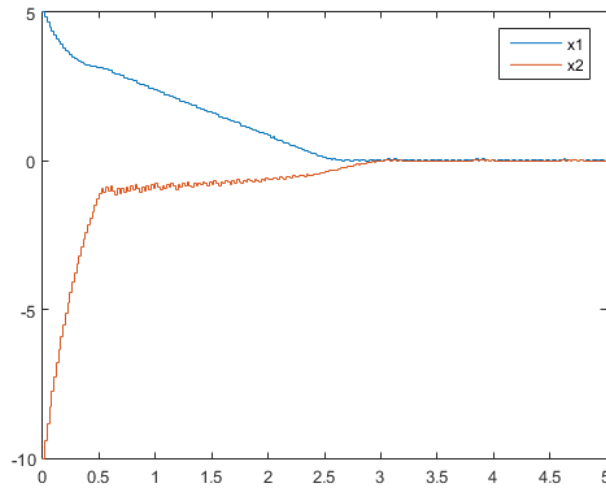
$$P_1 = \begin{bmatrix} 27,5414 & 2,0716 \\ 2,0716 & 22,7820 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} -8,0656 \\ 10,1134 \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 18,8537 & -23,1464 \\ -23,1464 & 97,9996 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} -10,3385 \\ -3,2822 \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 35,3058 & 26,3151 \\ 26,3151 & 70,5167 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 18,4041 \\ -6,8312 \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

A evolução das variáveis de estados é apresentada na Figura 7.15.

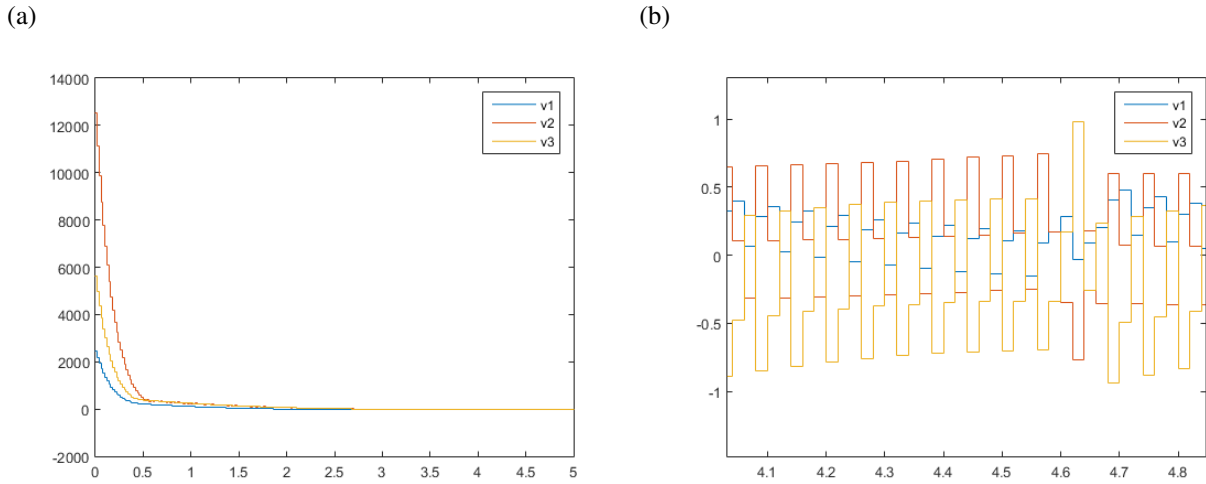
Figura 7.15 – Variáveis de estado ao longo do tempo para o sistema proposto em (TROFINO et al., 2011).



Fonte: produção do autor.

As funções auxiliares têm seu valor decaindo ao longo do tempo como é mostrado na Figura 7.16a. Os detalhes das funções auxiliares representados na Figura 7.16b mostram estas obedecendo os critérios impostos durante o equacionamento das desigualdades.

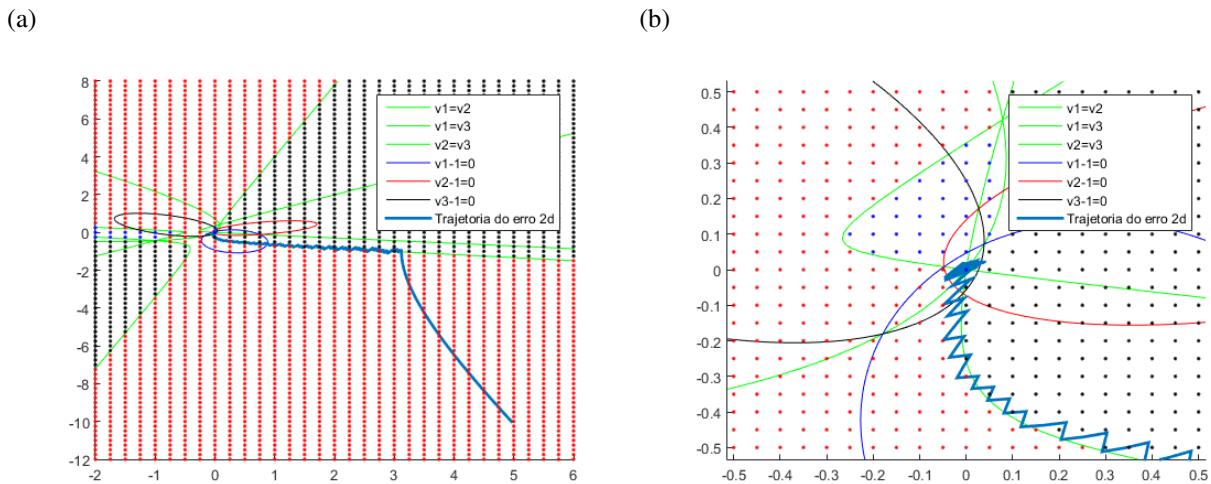
Figura 7.16 – Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema proposto em (TROFINO et al., 2011).



Fonte: produção do autor.

A trajetória de erros, a superfície de chaveamento e as áreas de atração podem ser vistas na Figura 7.17a. O detalhe das trajetória de erros chaveando sobre a superfície de chaveamento e dentro das áreas de atração é mostrado na Figura 7.17b.

Figura 7.17 – Trajetória de erros para o sistema proposto em (TROFINO et al., 2011).



Fonte: produção do autor.

7.5 EXEMPLO 5

Para a próxima simulação será utilizado o exemplo apresentado em (HETEL; FRIDMAN, 2013) e utilizado na Seção 5.1.2 com uma frequência de amostragem $f = 3125\text{Hz}$.

O ponto de equilíbrio x_{eq} desejado é nulo. Este ponto de equilíbrio é encontrado quando o vetor θ assume o valor $\bar{\theta} = [0,15 \ 0,20 \ 0,30 \ 0,35]'$.

Resolvendo este problema com os valores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,5$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 7 \times 10^{-6}$ o resultado para as matrizes P e S será

$$P_1 = \begin{bmatrix} 283,9912 & -30,3148 & 10,8709 \\ -30,3148 & 379,9727 & 17,1186 \\ 10,8709 & 17,1186 & 245,5032 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} -0,2626 \\ 1,0087 \\ -0,1249 \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

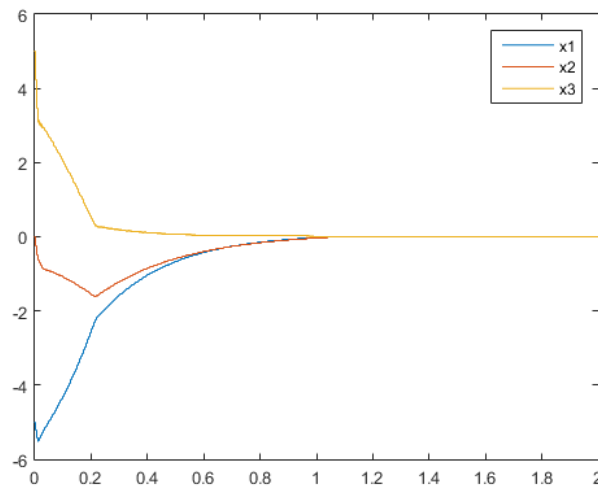
$$P_2 = \begin{bmatrix} 287,4441 & -27,9679 & 14,1015 \\ -27,9679 & 381,4284 & 14,5371 \\ 14,1015 & 14,5371 & 241,4952 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} -0,7771 \\ 0,5808 \\ 0,1442 \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 284,6826 & -28,6351 & 11,1055 \\ -28,6351 & 386,4905 & 10,0636 \\ 11,1055 & 10,0636 & 238,4219 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0,3674 \\ -0,3237 \\ 0,1535 \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 291,4786 & -29,3567 & 18,1178 \\ -29,3567 & 381,8987 & 20,8210 \\ 18,1178 & 20,8210 & 248,8266 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 0,2417 \\ -0,4867 \\ -0,1605 \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

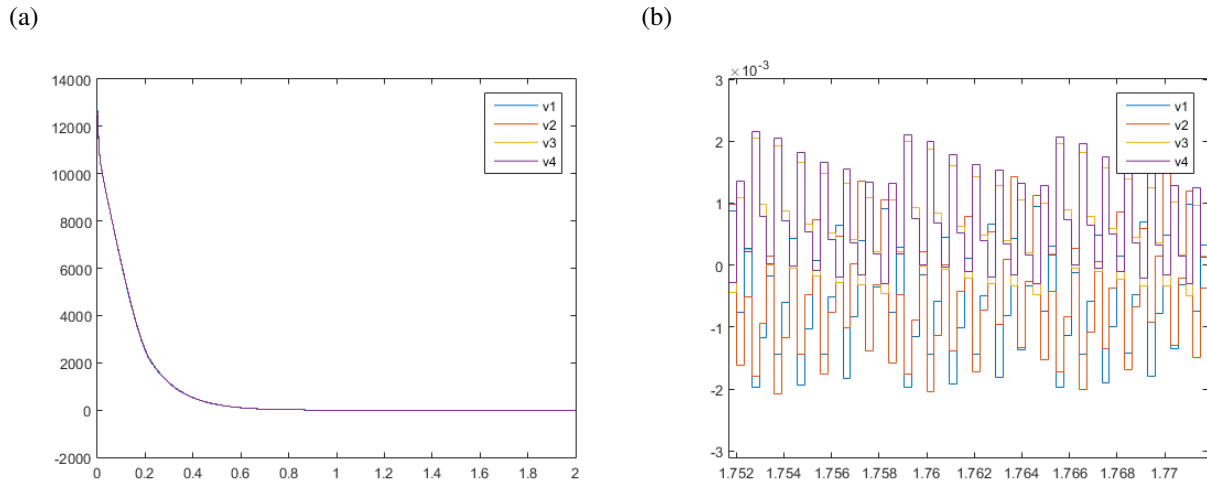
A evolução das variáveis de estado mediante o controle com os valores encontrados para as matrizes P e S é apresentado na Figura 7.18.

Figura 7.18 – Variáveis de estado ao longo do tempo para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).



Na Figura 7.19a é possível visualizar as funções auxiliares ao longo do tempo. Os detalhes das funções auxiliares quando o sistema chaveado se encontra em equilíbrio são mostrados na Figura 7.19b.

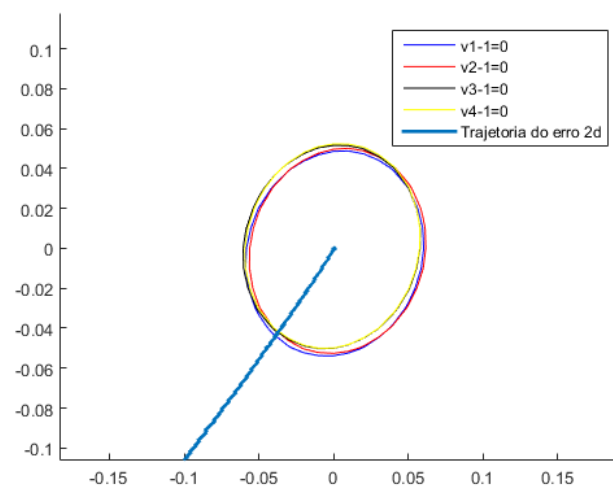
Figura 7.19 – Funções auxiliares ao longo do tempo para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).



Fonte: produção do autor.

O detalhe da representação em um plano para a trajetória de erro e para as áreas de atração são apresentados na Figura 7.20. Nela é possível ver que estas áreas são muito próximas, pelo menos neste plano, algo que pode ser notado ao observar a similaridade entre as matrizes P .

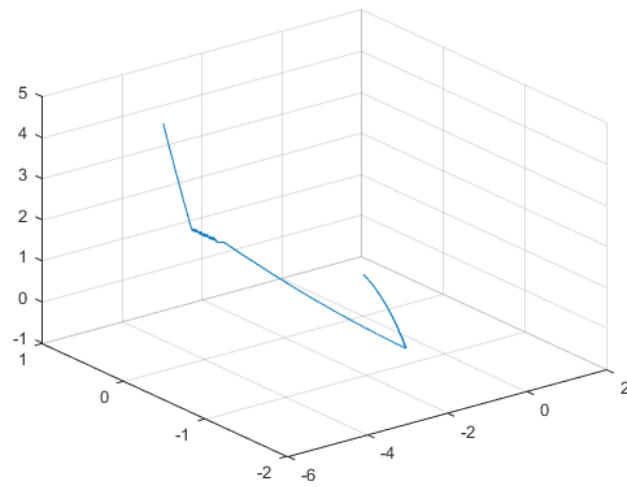
Figura 7.20 – Trajetória de erros para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).



Fonte: produção do autor.

A trajetória tridimensional do erro pode ser vista na Figura 7.21.

Figura 7.21 – Detalhe da trajetória de erros para o sistema proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).



Fonte: produção do autor.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi abordado o controle de sistemas chaveados afins a tempo discreto e proposta uma nova técnica para esta finalidade. Para que isso fosse possível inicialmente foram abordados conceitos básicos utilizados durante o trabalho e as técnicas para descrição de sistemas chaveados nos Capítulos 2 e 3 respectivamente.

No Capítulo 4 foram descritas técnicas já documentadas que buscam resolver o problema do controle de sistemas chaveados com uma frequência de comutação limitada para distinguir os resultados que estes obtiveram para a técnica resultante deste trabalho.

No Capítulo 5 foi feita uma revisão da técnica contínua para o controle de sistemas chaveados afins baseada na função ‘max’. Parte dos conceitos utilizados no desenvolvimento da técnica de controle a tempo discreto foram baseados nesta técnica.

Posteriormente, no Capítulo 6, foi apresentado um novo método para o projeto de controle de sistemas chaveados afins comutados a tempo discreto baseado na função ‘max’. Essa técnica abrange ainda a descrição de uma área de atração Λ que possui o ponto de equilíbrio x_{eq} no seu interior para o qual o sistema converge ao longo do tempo. Quando satisfeita a condição dos erros se encontrarem dentro desta região de atração a restrição de decrescimento da função Lyapunov é então relaxada. Essa área de atração é útil para descrever o equilíbrio do sistema chaveado afim comutado a tempo discreto que não possua o ponto de equilíbrio descrito exclusivamente por um modo. Isso ocorre pois a limitação de frequência implica que entre duas amostras pode haver o aumento do valor da função Lyapunov, dificultando que este se equilibre perfeitamente com erro nulo.

No Capítulo 7 a técnica foi submetida a diversas simulações numéricas e se mostrou bem sucedida para realizar o controle da maior parte dos sistemas chaveados apesar de, em alguns casos, apresentar um conservadorismo maior do que desejado. Nestes casos este conservadorismo significou a falha na tentativa de encontrar uma solução mesmo com uma varredura nas variáveis de ajuste α_i e β_i , algo que não acontece quando utilizada a versão contínua da técnica. Sendo esta uma primeira tentativa de descrever o controle de sistemas chaveados a tempo discreto baseado na função ‘max’ a melhoria deste ponto pode ser o foco de trabalhos futuros.

Assim, alguns tópicos que podem dar sequência a este trabalho são:

- Estudo de maneiras alternativas para a descrição da área de atração e das desigualdades que minimizem o conservadorismo para o caso discreto.
- Implementação do controle de sistemas chaveados a tempo discreto com o uso da medição parcial de estados.

- Estudo da adição de filtros *washout* para diminuir a sensibilidade à perturbações para possibilitar, por exemplo, alterações de cargas em conversores de potência.
- Implementação prática da técnica de controle desenvolvida para comparação com os resultados obtidos através de simulação.

Restam ainda vários outros temas dentro de sistemas chaveados e a aplicação deles, obrigatoriamente, os submeterá às limitações de frequência de chaveamento. Resulta desta observação a importância de mais estudos como este que abordem as técnicas discretas para o controle destes sistemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer-Controlled Systems: Theory and Design**. [S.l.: s.n.], 1997.

BENMESSAOUDA, O.; BENZAOUIA, A.; TADEO, F. Stabilization of Uncertain State Constrained Discrete-time Switched Systems. **18th IFAC World Congress**, 2011. v. 44, n. 1, p. 5736–5740, 2011.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. [S.l.: s.n.], 1994.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. **Perspectives in robust control. Lecture Notes in Control and Information Sciences**, 2001. v. 268, n. 0, p. 241–257, 2001.

DEAECTO, G. S.; EGIDIO, L. N. Practical stability of discrete-time switched affine systems. **2016 European Control Conference, ECC 2016**, 2017. v. 0, p. 2048–2053, 2017.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Stability Analysis and Control Design of Discrete-Time Switched Affine Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2017. v. 62, n. 8, p. 4058–4065, 2017. ISSN 00189286.

DUAN, C.; WU, F. Analysis and control of switched linear systems via modified Lyapunov – Metzler inequalities. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, 2012. v. 24, n. 2, p. 276–294, 2012.

EGIDIO, L. N.; DAIHA, H. R.; DEAECTO, G. S. Projeto e Implementação Prática de uma Regra de Comutação Para o Controle de Velocidade de um Motor CC Via Conversor Buck-Boost. **SBAI 2017**, 2017. 2017.

FADALI, M. S.; VISIOLI, A. **Digital control engineering: analysis and design**. [S.l.: s.n.], 2013. 582 p. ISBN 9780123943910.

FILIPPOV, A. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides**. [S.l.: s.n.], 1988.

GARCIA, F.; DEAECTO, G.; POMILIO, J.; GEROMEL, J. Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. **IET Control Theory & Applications**, 2010. v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010. ISSN 1751-8644.

GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A.; DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Analysis and control of DC-DC converters based on Lyapunov Stability Theory. **2009 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, ECCE 2009**, 2009. p. 2920–2927, 2009.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, 2006. v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006. ISSN 03630129.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of discrete time switched systems. **International Journal of Control**, 2006. v. 79, n. 7, p. 719–728, 2006. ISSN 00207179.

HAUROIGNE, P.; RIEDINGER, P.; IUNG, C. Switched affine systems using sampled-data controllers: Robust and guaranteed stabilization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2011. v. 56, n. 12, p. 2929–2935, 2011. ISSN 00189286.

HETEL, L.; FRIDMAN, E. Sampled - Data control of switched affine systems: A continuous-time approach. **IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)**, 2012. IFAC, v. 7, n. PART 1, p. 582–587, 2012. ISSN 14746670.

HETEL, L.; FRIDMAN, E. Robust sampled-data control of switched affine systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2013. v. 58, n. 11, p. 2922–2928, 2013. ISSN 00189286.

KALMAN, R. E.; BERTRAM, J. E. Control system analysis and design via the “second method” of lyapunov: II discrete-time systems. **Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME**, 1960. v. 82, n. 2, p. 394–400, 1960. ISSN 1528901X.

KUNDU, A.; DAAFOUZ, J.; HEEMELS, W. P. Stabilization of discrete-time switched linear systems: Lyapunov-Metzler inequalities versus S-procedure characterizations. **IFAC-PapersOnLine**, 2017. v. 50, n. 1, p. 3412–3417, 2017. ISSN 24058963.

LIBERZON, D. **Switching in Systems and Control**. [S.l.: s.n.], 2003. 515 p.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. **Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design**, 2004. p. 284–289, 2004.

MAINARDI JUNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; OLIVEIRA, D. R.; YOSHIMURA, V. L. Controle de Sistemas Lineares Chaveados Utilizando Realimentação Estática da Saída e Funções de Lyapunov-Metzler. **SBAI 2013**, 2013. 2013.

MAINARDI JUNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; DE SOUZA RIBEIRO, J. M.; CARNIATO, A. A. Projeto de Controladores Para Sistemas Chaveados Afins com Aplicação em um Conversor CC-CC Buck. **SBAI 2015**, 2015. 2015.

MAXWELL, J. C. On Governors. 1868. 1868.

SANTOS, G. C.; DEAECTO, G. S. Controle Hinf de Sistemas Afins com Comutação a Tempo Contínuo. **Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática**, 2014. p. 1652–1659, 2014. Disponível em: <http://mtc-m21b.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m21b/2014/06.17.14.28/doc/alarcon{_}geracao.pdf>.

SCHARLAU, C. C. **Controle de Sistemas Chaveados e Aplicações**. 200 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.

SCHARLAU, C. C.; DE OLIVEIRA, M. C.; TROFINO, A.; DEZUO, T. J. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. **Systems and Control Letters**, 2014. Elsevier B.V., v. 68, n. 1, p. 1–8, 2014. ISSN 01676911. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.02.007>>.

SLOTINE, J.-J.; LI, W. **Applied NoLinear Control**. [S.l.: s.n.], 1991. 461 p. ISBN 0-13-040890-5.

SUN, Z.; GE, S. S. **Switched Linear Systems: Control and Design**. [S.l.: s.n.], 2005.

TROFINO, A.; ASSMANN, D.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. **Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control**, 2009. p. 6365–6370, 2009. ISSN 01912216.

TROFINO, A.; ASSMANN, D.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. Switching Rule Design for Switched Dynamic Systems With Affine Vector Fields. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2009. v. 54, n. 9, 2009.

TROFINO, A.; REGINATTO, R.; DE OLIVEIRA, J.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. A reference tracking strategy for affine switched systems. **2009 IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA 2009**, 2009. p. 1744–1750, 2009.

TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; DEZUO, T. J.; DE OLIVEIRA, M. C. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. **Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control**, 2011. p. 1183–1188, 2011. ISSN 01912216.

TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; DEZUO, T. J.; DE OLIVEIRA, M. C. Switching rule design for affine switched systems with Hinf performance. **Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control**, 2012. p. 1923–1928, 2012. ISSN 01912216.

ZHANG, L.; ZHU, Y.; SHI, P.; LU, Q. **Time-Dependent Switched Discrete-Time Linear Systems: Control and Filtering**. [s.n.], 2016. ISBN 978-3-319-28849-9. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-28850-5>>.