

Este trabalho apresenta um procedimento para otimização de forma em problemas de elasticidade plana utilizando o método dos elementos finitos. O foco reside em reduzir ou eliminar a necessidade de remalhamento provocada pela excessiva distorção de malha quando a geometria inicial sofre grandes alterações. A abordagem apresentada utiliza uma parametrização de superfície NURBS, que é diferenciada analiticamente em relação aos pontos de controle para obter os campos de velocidade. Um ponto chave do desenvolvimento é a estratégia de realocação dos pontos de controle de domínio que resulta em distorções reduzidas da malha. A eficácia do procedimento para o cálculo do campo de velocidade baseado em NURBS é comparado com a eficácia de esquemas de suavização Laplaciana. O procedimento proposto é empregado em problemas minimização de massa de componentes em estado plano de tensões com restrições de tensão e de geometria, as quais são aplicadas em clusters lógicos. Ao contrário dos procedimentos de suavização Laplaciana, nos problemas estudados, o método desenvolvido transcorreu até a convergência sem necessidade de remalhamento.

Joinville, 2019

ANO  
2019

LUIZ GABRIEL SILVA DE OLIVEIRA | OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM ELASTICIDADE  
PLANA UTILIZANDO CAMPOS DE VELOCIDADE BASEADOS EM SUPERFÍCIES NURBS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM  
ELASTICIDADE PLANA UTILIZANDO  
CAMPOS DE VELOCIDADE  
BASEADOS EM SUPERFÍCIES  
NURBS**

LUIZ GABRIEL SILVA DE OLIVEIRA

JOINVILLE, 2019

**LUIZ GABRIEL SILVA DE OLIVEIRA**

**OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM ELASTICIDADE PLANA UTILIZANDO CAMPOS  
DE VELOCIDADE BASEADOS EM SUPERFÍCIES NURBS**

Dissertação do programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM, do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz-Rojas

**JOINVILLE-SC  
2019**

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da  
Biblioteca Setorial do CCT/UEDESC,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Oliveira, Luiz Gabriel  
OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM ELASTICIDADE PLANA  
UTILIZANDO CAMPOS DE VELOCIDADE BASEADOS EM  
SUPERFÍCIES NURBS / Luiz Gabriel Oliveira. -- 2019.  
116 p.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz-Rojas  
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2019.

1. Forma. 2. Otimização. 3. Malha. 4. Sensibilidade. I.  
Muñoz-Rojas, Pablo Andrés. II. Universidade do Estado de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

**Otimização de Forma em Elasticidade Plana Utilizando Campos de Velocidade  
Baseados em Superfícies Nurbs**

por

**Luiz Gabriel Silva de Oliveira**

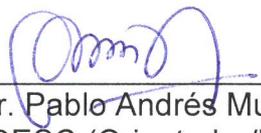
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

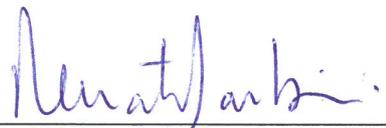
Área de concentração em “Modelagem e Simulação Numérica”  
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

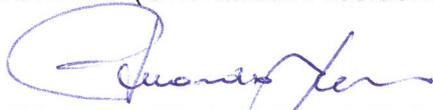
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz-Rojas  
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Renato Barbieri  
CCT/UDESC



Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello  
UFSC

VÍDEO CONFERÊNCIA

Prof. Dr. Marco Lucio Bittencourt  
UNICAMP

VÍDEO CONFERÊNCIA

Prof. Dr. Marcos Arndt  
UFPR

Joinville, SC, 26 de setembro de 2019.



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus familiares e amigos pelo incentivo e apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz-Rojas pela contribuição, efetividade e paciência.

Ao professor Klaus Schittkowski pelo fornecimento da sub-rotina Fortran NLPQLP.

A UDESC pela oportunidade.

Ao PROMOP e FAPESC pela contribuição para o programa e suporte à pesquisa.



## ABSTRACT

This work presents a procedure for shape optimization in plane elasticity problems solved using the finite element method. Shape optimization often leads to large modifications of the initial geometry causing excessive mesh distortions. Although practice shows that many times this issue can be handled by simple remeshing, preservation of mesh topology is important for a consistent shape optimization procedure and to avoid possible convergence difficulties. The procedure proposed in this dissertation aims at reducing, or ideally eliminating, the need of remeshing when the initial geometry suffers large modifications along optimization iterations. The strategy uses a NURBS surface parameterization that is differentiated with respect to boundary control points to obtain the velocity field. The location of domain control points of a NURBS surface can be coupled to boundary control points in such a way that reduced distortion of the finite element mesh is achieved, allowing to obtain greater contour modifications without the need of remeshing. The effectiveness of the NURBS-based velocity field procedure is compared to the effectiveness of Laplacian smoothing schemes through theoretical and practical criteria. In addition, velocity field calculation methods are compared by applying them to shape optimization problems that include stress and geometry constraints. These constraints are not introduced locally but grouped into logical clusters in order to enhance efficiency in larger scale problems. Promising results of the overall procedure are reported.

**Keywords:** Shape, Optimization, Mesh, Sensitivity.



## RESUMO

Este trabalho apresenta um procedimento para otimização de forma em problemas de elasticidade plana no contexto de solução pelo método dos elementos finitos. A otimização de forma frequentemente leva a grandes modificações da geometria inicial, causando distorções de malha excessivas. Apesar de evidências práticas mostrarem que muitas vezes este problema pode ser contornado aplicando remalhamentos simples, a preservação da topologia da malha é importante para um procedimento de otimização de forma consistente e para evitar possíveis dificuldades de convergência. O procedimento proposto nesta dissertação objetiva diminuir, ou idealmente eliminar, a necessidade de remalhamento quando a geometria inicial sofrer grandes modificações no curso das iterações de otimização. A estratégia utiliza uma parametrização de superfície NURBS, que é diferenciada em relação a pontos de controle do contorno para obter o campo de velocidades. A posição dos pontos de controle do domínio de uma NURBS pode ser acoplada à posição dos pontos de controle do contorno, de tal maneira que resulte uma distorção de malha reduzida de forma a alcançar uma distorção reduzida da malha de elementos finitos, permitindo obter modificações do contorno significativas sem necessidade de remalhar. A efetividade do procedimento proposto para campo de velocidades baseado em superfícies NURBS é comparada com a efetividade de esquemas de cálculo de campo de velocidades via suavização Laplaciana. Para tanto, são utilizados critérios teóricos e práticos, além da aplicação em problemas de otimização de forma incluindo restrições de tensão e geometria. Estas restrições não são introduzidas localmente, mas agrupadas em clusters lógicos, para melhorar a eficiência em problemas de maior escala. A aplicação conjunta das propostas apresentadas mostrou-se promissora.

**Palavras-chave:** Forma, Otimização, Malha, Sensibilidade.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de descontinuidade da função objetivo (deslocamento vertical de $u_F$ ) em um problema de otimização de forma utilizando abordagem de remalhamento. ....	19
Figura 2 - Exemplos de curvas Splines: a) Curva de Bézier, b) conjunto de curvas de Bézier na formação de uma B-Spline. ....	24
Figura 3 - B-Spline com vetor de knots $U = 0,0,0,0,1,1,1,1$ , b) Modificação da curva B-Spline em um intervalo $[u_i, u_i + p + 1)$ . ....	25
Figura 4 - Superfície B-Spline a partir de duas curvas, com pesos diferentes em cada caso. ...	27
Figura 5 - Superfície NURBS. a) Malha de pontos de controle com linhas de coordenadas paramétricas sobre a superfície original. b) Malha de pontos de controle e superfície na condição modificada com linhas de coordenadas paramétricas constantes. ....	28
Figura 6 - Problema geral de elasticidade 3D para formulação do método de elementos finitos .....	30
Figura 7 - Exemplo de elemento quadrilateral de 4 nós e o sistema de coordenadas do elemento. ....	32
Figura 8 - Elemento plano quadrilateral. a) bilinear de 4 nós. b) Quadrático de 8 nós ( <i>Serendipity</i> ). ....	33
Figura 9 - Otimização de forma 2D abordagem dos nós como variáveis da de projeto da forma. a) Forma inicial. b) Forma otimizada. ....	41
Figura 10 - Utilização de curvas de Bezier em comparação com polinômios na parametrização do contorno. ....	42
Figura 11 – Macroelemento e elemento de projeto. ....	42
Figura 12 - Malha de elementos finitos, disposição dos nós e centroides. ....	62
Figura 13 - Distribuição dos nós em uma malha não estruturada .....	63
Figura 14 - Exemplo do campo de velocidades NURBS. a) Malha original b) Campo de velocidade para uma modificação da variável de projeto. ....	66
Figura 15 - Propagação de movimento sobre os pontos de controle do domínio. ....	68

Figura 16 - Superfície B-Spline. a) Disposição dos pontos de controle sobre a superfície. b) Linhas paramétricas constantes nas direções de u e v sobre o sistema físico de coordenadas.	70
Figura 17 - Modificação de um ponto de controle e o efeito sobre o domínio. a) Posição dos pontos de controle do domínio para $\lambda = [0,3 \ 0,2]$ . b) Posição dos pontos de controle do domínio para $\lambda = [0,6 \ 0,2]$ . c) Comportamento da modificação do domínio da superfície para $\lambda = [0,3 \ 0,2]$ . d) Comportamento da modificação do domínio para $\lambda = [0,6 \ 0,2]$ .	71
Figura 18 – Problema exemplo de maximização da modificação do contorno. a) Discretização por elementos finitos. b) Rede de pontos de controle e indicação da variável de projeto. c) Máxima modificação do contorno e linhas paramétricas constantes no domínio.	73
Figura 19 - Superfície de singularidade da matriz jacobiana para toda a malha em função da máxima modificação da variável de projeto e dos parâmetros $\lambda_g$ e $\lambda_r$ .	73
Figura 20 - Disposição da modificação maximizada. a) Disposição dos pontos de controle do contorno e do domínio da forma modificada. b) Malha modificada.	74
Figura 21 - Problema de malha livre para teste visual da influência dos métodos campos de velocidades. a) Parametrização da superfície. b) Malha irregular.	75
Figura 22 - Exemplo de máxima modificação do contorno cujo campo de velocidade causa singularidade da matriz Jacobiana para uma malha irregular, utilizando os métodos baseados em NURBS, Laplaciana potência inversa e laplaciana pura. a) Variável a1. b) Variável a2. c) Variável a3. d) Variável a4.	75
Figura 23 - Configuração modificada aumentada, do campo de velocidades. a) Campo baseado e superfície NURBS b) Laplaciano potência inversa. c) Laplaciano puro.	77
Figura 24 – Histogramas da distorção da malha devida a forma modificada, para cada método: (a) Variável de projeto a1; (b) Variável de projeto a2; (c) Variável de projeto a3. d) Variável de projeto a4.	78
Figura 25 - Campo de velocidades iso-curvas: (a) Campo baseado em superfície NURBS com detalhe de ampliação na primeira variável de projeto; (b) Laplaciano potência inversa; (c) Laplaciano puro.	79
Figura 26 - Exemplo de influência reduzida para o campo de velocidade por NURBS $\lambda = 0$ , na variável de projeto a1.	81

Figura 27 - Comportamento dos campos de velocidade no domínio da malha. a) Influência em uma região levemente afastada do contorno superior para a perturbação no ponto a. b) Perturbação no ponto b. c) Perturbação no ponto c. d) Perturbação no ponto d. ....	81
Figura 28 - Problemas exemplos. a) Plano com furo central sujeito a estado biaxial de tensões. b) Filete sujeito a tração.....	83
Figura 29 - Disposição do Exemplo 1. a) Parametrização por NURBS. b) Discretização, Malha A. b) Discretização Malha B. ....	84
Figura 30 - Para a Malha A, máxima modificação do contorno. a) Variável a1 , b) Variável a2. c) Variável a3. c) Variável a4. ....	85
Figura 31 - Para a Malha B, máxima modificação do contorno. a) Variável a1 , b) Variável a2. c) Variável a3. c) Variável a4. ....	85
Figura 32 - Tensão equivalente de von Mises em MPa para o problema inicial nas malhas A e B. ....	85
Figura 33 - Campo de velocidade obtido por suavização laplaciana potência inversa e pela abordagem proposta aplicados sobre cada malha para o exemplo 1. a) Variável a1 , b) Variável a2. c) Variável a3. c) Variável a4. ....	86
Figura 34 - Convergência do problema de otimização do exemplo 1. a) Convergência da função objetivo. b) Convergência da restrição G1. ....	87
Figura 35 - Forma ótima do contorno e malha. a) Malha A. b) Malha B.....	88
Figura 36 - Histograma de comparação entre a malha inicial e da forma ótima para a abordagem proposta. a) Malha A. b) Malha B.....	89
Figura 37 - Campo de tensão equivalente de von-Mises em MPa. a) Forma ótima. b) Evolução da restrição de tensão máxima.....	89
Figura 38 - Convergência das variáveis de projeto. a) Variável a1 , b) Variável a2. c) Variável a3. c) Variável a4. ....	90
Figura 39 – Campo de tensão em MPa, na forma ótima comparado com o problema inicial. a) Forma ótima. b) Forma inicial.....	91

Figura 40 - a) Problema do filete sobre estado plano de tensão. b) Malha inicial estruturada e não estruturada e campo de tensão inicial em MPa. c) Convergência da função objetivo. ....	92
Figura 41 – Forma ótima exemplo 2 (filete). a) Forma ótima e malha para as duas abordagens. b) Campo de tensão equivalente de von Mises em MPa da forma ótima do filete. ....	92
Figura 42 – Convergência das restrições geométricas. a) Convergência da restrição G1. b) Convergência da restrição G2. ....	93
Figura 43 – a) Convergência da restrição de tensão referente ao cluster com maior nível de tensões. b) Ampliação da figura de convergência da restrição de tensão nas iterações finais.	93

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Ordem de integração recomendada para elementos planos quadriláterais.....	37
Tabela 2 - Diferentes esquemas de suavização Laplaciana.....	64
Tabela 3 - Parâmetros do campo de velocidade exemplo 1. ....	84
Tabela 4 - Valores numéricos da função objetivo adimensionalizada (normalizada com relação ao valor inicial) e restrições.....	87
Tabela 5 - Pontos e pesos para quadratura de Gauss-Legendre .....	105

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{a}$	Vetor de variáveis de projeto
$\mathbf{a}_l$	Vetor de limite inferior das variáveis de projeto
$\mathbf{a}_u$	Vetor de limite superior das variáveis de projeto
$a_z$	$z$ -ésima variável de projeto
$(\cdot)^e$	Grandeza associada ao $e$ -ésimo elemento
$\mathbf{f}^B$	Forças de corpo
$\mathbf{f}^{\hat{S}_f}$	Forças de superfície sobre uma superfície $\hat{S}_f$
$\mathcal{G}$	Função de tensão suavizada global L2
$g_j$	$j$ -ésima restrição
$h_{(\cdot),x}$	Derivada parcial da $(\cdot)$ -ésima função de interpolação com relação a $x$
$h_{(\cdot),y}$	Derivada parcial da $(\cdot)$ -ésima função de interpolação com relação a $y$
$h_{(\cdot),\eta}$	Derivada parcial da $(\cdot)$ -ésima função de interpolação com relação a $\eta$
$h_{(\cdot),\xi}$	Derivada parcial da $(\cdot)$ -ésima função de interpolação com relação a $\xi$
$h_i$	Função de interpolação do $i$ -ésimo nó de um elemento
$\mathbb{k}$	Denota a $\mathbb{k}$ -ésima derivada da superfície NURBS com relação a $u$
$\mathbf{k}_e$	Matriz de rigidez do $e$ -ésimo elemento
$k_{ij}$	Rigidez ente os nós $i$ e $j$ para suavização laplaciana
$\mathbb{l}$	Denota a $\mathbb{l}$ -ésima derivada da superfície NURBS com relação a $v$
$m$	Está associado com a quantidade de pontos de controle na direção de $v$ eq. 5
$m$	Está associado ao número de knots na direção $u$ eq. 3
$m_e$	Número de restrições de igualdade
$m_T$	Número total de restrições
$n$	Está relacionado com a quantidade de pontos de controle na direção de $u$
$\tilde{n}$	Número de pontos de integração por quadratura
$ne$	Número total de elementos
$ng$	Número de clusters
$ni$	Número total de nós de um elemento
$n\hat{s}$	Número total de superfícies
$p$	Potência par positiva
$p$	Grau da curva B-Spline ou NURBS na direção de $u$
$q$	Grau da curva B-Spline ou NURBS na direção de $v$

$rp$	Valor da potência da suavização laplaciana potência inversa
$t$	Espessura de um elemento
$u$	Direção paramétrica de uma curva ou superfície B-Spline ou NURBS
$\hat{u}$	Função de deslocamentos de um elemento na direção de $x$
$u_i$	Deslocamento do $i$ -ésimo nó na direção de $x$
$\mathbf{u}^e$	Vetor de deslocamentos nodais do $e$ -ésimo elemento
$\hat{\mathbf{u}}^e$	Vetor de funções de deslocamentos do $e$ -ésimo elemento
$v$	Direção paramétrica de uma curva ou superfície B-Spline ou NURBS
$\hat{v}$	Função de deslocamentos de um elemento na direção de $y$
$v_i$	Deslocamento do $i$ -ésimo nó na direção de $y$
$\mathbf{x}$	Vetor de Coordenadas nodais na direção $x$
$x_{,\eta}$	Derivada parcial da coordenada $x$ de um elemento com relação a $\eta$
$x_{,\xi}$	Derivada parcial da coordenada $x$ de um elemento com relação a $\xi$
$w_e$	Peso associado a um elemento para suavização laplaciana
$w_{ij}$	Peso associado ao ponto de controle $P_{ij}$
$w$	Denominador de uma função de superfície NURBS
$w_{,u} w_{,v}$	Derivada parcial do denominador da função de superfície NURBS com relação a $u$ e $v$ respectivamente
$\mathbf{y}$	Vetor de Coordenadas nodais na direção $y$
$y_{,\eta}$	Derivada parcial da coordenada $y$ de um elemento com relação a $\eta$
$y_{,\xi}$	Derivada parcial da coordenada $y$ de um elemento com relação a $\xi$
$A$	Área de um elemento
$\mathbf{A}$	Numerador da função de superfície NURBS
$\mathbf{B}^e$	Matriz que relaciona a deformação e deslocamento do $e$ -ésimo elemento
$C$	Função de uma curva B-Spline
$DP$	Parâmetro de distorção de malha
$E$	Módulo de Young
$\mathbf{E}$	Tensor constitutivo do material
$\mathbf{H}$	Matriz de funções de interpolação de elementos finitos
$J$	Matriz Jacobiana de um elemento
$ J $	Determinante da matriz jacobiana de um elemento
$ J ^*$	Valor mínimo do determinante da matriz jacobiana de um elemento
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez da estrutura
$L_{min}$	Mínima distância entre dois pontos de controle

$\mathbf{M}$	Matriz massa com massa específica unitária
$M_0$	Massa inicial da forma
$N_{(\cdot)}^{(\cdot)}$	$(\cdot)$ -ésima função de base B-Spline de grau $(\cdot)$
$N_{(\cdot)}^{(\cdot)(\cdot)}$	$(\cdot)$ -ésima derivada da $(\cdot)$ -ésima função de base B-Spline de grau $(\cdot)$
$N_i$	Número de nós que rodeiam o $i$ -ésimo nó
$N_e^i$	Número de elementos conectados ao $i$ -ésimo nó
$N_G$	Número de pontos de avaliação de uma coordenada geométrica
$N_c$	Número de pontos de avaliação em um cluster de tensão
$P_{(\cdot)}$	Posição do $(\cdot)$ -ésimo nó
$\hat{\mathbf{P}}$	Vetor de pseudo carga para computar a tensão suavizada global L2
$\hat{\mathbf{P}}$	Vetor contendo todos os pontos de controle de uma superfície
$\bar{P}_{ij}$	Ponto de controle do contorno
$P_{ij}$	Ponto de controle
$\mathbf{R}$	Vetor de forças externas concentradas nodais
$\mathbf{R}_B$	Vetor de forças de corpo
$\mathbf{R}_c$	Vetor de Forças concentradas
$R_{ij}$	Função de base racional de uma superfície NURBS associada a um ponto de controle $P_{ij}$
$\mathbb{R}^n$	Espaço $n$ -dimensional de números reais
$\mathbf{R}_S$	Vetor de forças de superfície
$\hat{S}_f$	Denota um subdomínio de uma superfície $\hat{S}$
$\hat{S}_u$	Denota um subdomínio de uma superfície $\hat{S}$
$S$	Função de superfície NURBS ou B-Spline
$U$	Componente de deslocamento na direção de $x$
$\mathbf{U}$	Vetor de deslocamentos nodais global
$\mathbb{U}$	Vetor de knots na direção de $u$
$\bar{\mathbf{U}}$	Vetor de deslocamentos virtuais nodais global
$\mathbf{U}^{\hat{S}_u}$	Deslocamentos em uma superfície $\hat{S}_u$
$V$	Componente de deslocamento na direção de $y$
$\mathcal{V}$	Domínio físico de um corpo sólido
$\mathbf{V}$	Vetor de campo de velocidades
$\mathbb{V}$	Vetor de knots na direção de $v$
$V_{kz}$	Campo de velocidade do $k$ -ésimo nó para a variável de projeto $a_z$

$W$	Componente de deslocamento na direção de $z$
$W_i$	$i$ -ésimo peso de integração numérica
$\gamma$	Matriz de acoplamentos entre pontos de controle
$\varepsilon$	Deformação
$\bar{\varepsilon}$	Deformação virtual
$\varepsilon^e$	Função de deformação do $e$ -ésimo elemento
$\epsilon$	Tolerância de convergência para recuperação paramétrica
$\eta$	Direção do sistema de coordenadas naturais de elementos finitos
$\eta_i$	Coordenada natural do $i$ -ésimo nó na direção $\eta$
$\lambda$	Vetor de parâmetros de controle de distorção
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\xi$	Direção do sistema de coordenadas naturais de elementos finitos
$\xi_i$	Coordenada natural do $i$ -ésimo nó na direção $\xi$
$\rho$	Massa específica do material
$\bar{\sigma}$	Vetor de tensões suavizadas global L2
$\bar{\sigma}_i$	Tensão suavizada global L2 do $i$ -ésimo nó
$(\sigma_k^{vM})_{,a_z}$	Sensibilidade da tensão suavizada global L2 equivalente de von Mises do $k$ -ésimo nó com relação a $z$ -ésima variável de projeto
$\sigma_{alw}$	Tensão admissível
$\sigma_k^{vM}$	Tensão suavizada global L2 equivalente de von Mises do $k$ -ésimo nó
$\bar{\sigma}_l$	Tensão suavizada por média nodal do $l$ -ésimo nó
$\sigma^e$	Tensor tensão do $e$ -ésimo elemento
$\tau_z$	Máxima modificação do contorno associada a $z$ -ésima variável de projeto
$\chi$	Representação genérica das coordenadas $(x, y, z)$ no sistema físico
$\chi_k$	Coordenada generalizada do $k$ -ésimo nó
$\chi_{kz}^{\tau_z}$	Máxima coordenada do $k$ -ésimo nó da malha para singularidade do Jacobiano
$\chi_k^0$	Coordenada do $k$ -ésimo nó da malha da forma inicial
$\chi_{min}$	Limite admissível de uma coordenada generalizada
$\psi$	Volume do material
$\Omega_e$	Domínio do elemento
$\Omega_G^g$	Conjunto (cluster) de coordenadas geométricas
$\Omega_c^s$	Conjunto (cluster) de tensões
$\mathcal{L}^p$	Norma $p$ modificada
$\epsilon$	Erro de tensão para computar suavização global L2



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO .....	20
1.2	OBJETIVO .....	21
<b>2</b>	<b>MODELAMENTO GEOMÉTRICO.....</b>	<b>23</b>
2.1	CURVAS B-Splines .....	23
2.2	CURVAS NURBS.....	26
2.3	SUPERFÍCIES NURBS .....	26
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE ESTRUTURAS.....</b>	<b>29</b>
3.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	29
<b>3.1.1</b>	<b>Equações de elementos finitos .....</b>	<b>31</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Elementos planos quadrilaterais .....</b>	<b>32</b>
3.2	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	35
<b>3.2.1</b>	<b>Integração por quadratura de Gauss-Legendre.....</b>	<b>35</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Integração por quadratura em elementos finitos .....</b>	<b>36</b>
3.3	MÉTODOS DE RECUPERAÇÃO DE TENSÃO .....	37
<b>3.3.1</b>	<b>Suavização por média nodal.....</b>	<b>38</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Suavização global L2.....</b>	<b>39</b>
3.4	QUALIDADE DE MALHA.....	40
<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DE FORMA .....</b>	<b>41</b>
4.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	45
4.2	PARAMETRIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR SUPERFÍCIES NURBS .....	45
4.3	FUNÇÕES DO PROBLEMA DISCRETIZADO E RESTRIÇÕES.....	47
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE .....</b>	<b>51</b>
5.1	SENSIBILIDADE DA FORMA .....	52
5.2	SENSIBILIDADE DA RIGIDEZ .....	53
5.3	SENSIBILIDADE DA MATRIZ DE DEFORMAÇÕES.....	54
5.4	SENSIBILIDADE DO JACOBIANO.....	55
5.5	SENSIBILIDADE DAS TENSÕES.....	56
<b>5.5.1</b>	<b>Sensibilidade das tensões suavizadas por média nodal simples .....</b>	<b>56</b>
<b>5.5.2</b>	<b>Sensibilidade da tensão suavizada global L2 .....</b>	<b>56</b>
5.6	CRITÉRIOS PARA O CAMPO DE VELOCIDADE.....	57
5.7	CAMPO DE VELOCIDADES.....	58

<b>5.7.1</b>	<b>Campo de velocidades obtidos por suavização Laplaciana.....</b>	<b>61</b>
<b>5.7.2</b>	<b>Campo de velocidades baseado em superfícies NURBS.....</b>	<b>64</b>
5.7.2.1	<i>Esquema desacoplado para o campo de velocidades baseado em NURBS.....</i>	65
5.7.2.2	<i>Esquema acoplado para o campo de velocidades baseado em NURBS.....</i>	66
5.7.2.3	<i>Matriz de acoplamento.....</i>	69
<b>5.7.3</b>	<b>Comparação entre campos de velocidades Laplaciana e NURBS.....</b>	<b>74</b>
<b>6</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM ELASTICIDADE PLANA.....</b>	<b>83</b>
6.1	EXEMPLO 1: OTIMIZAÇÃO DE UM PLANO COM FURO CENTRAL.....	84
6.2	EXEMPLO 2: OTIMIZAÇÃO DE FILETE.....	91
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>95</b>
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	96
<b>REFERÊNCIAS.....</b>		<b>97</b>
<b>APÊNDICE A – Pesos e pontos para integração por quadratura.....</b>		<b>105</b>
<b>APÊNDICE B – Derivadas das curvas e superfícies NURBS.....</b>		<b>107</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No campo de Engenharia Computacional, técnicas multidisciplinares de soluções de problemas são constantemente desenvolvidas com objetivo de estabelecer ferramentas de projeto para aplicações práticas. No segmento de Engenharia Mecânica, a integração entre técnicas de modelamento geométrico e análise estrutural suplementam projetistas para obter projetos eficazes. Entretanto, a competitividade induz a obter projetos melhorados e não apenas viáveis. Melhorar um projeto tem, portanto, relação com a otimização de um projeto. A otimização tem um conceito amplo, que pode abranger qualquer área de atuação com objetivo de encontrar o melhor resultado possível de um problema, utilizando alguma técnica. Muitas vezes, a otimização de um processo de projeto economiza dinheiro para uma empresa, simplesmente reduzindo o tempo de desenvolvimento (BELEGUNDU e CHANDRUPATLA, 2011). Wilde apud Haftka e Gürdal (1992) define o projeto ótimo como sendo “o melhor projeto viável de acordo com uma medida quantitativa de eficácia pré-selecionada”.

Em otimização estrutural, na mecânica dos sólidos, as técnicas ramificam-se em três segmentos (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009): a otimização dimensional, a otimização de forma e a otimização topológica. A principal característica do problema de otimização dimensional é que o domínio do projeto e das variáveis de estado é conhecido a priori e é fixo em todo o problema de otimização. Por outro lado, em um problema de otimização de forma, o objetivo é encontrar a forma otimizada desse domínio, ou seja, o problema é definido em um domínio que agora é a variável de projeto. A otimização topológica envolve a determinação de recursos como a quantidade, localização e forma dos furos e a conectividades do domínio (BENDSØE e SIGMUND, 2003). No contexto de elementos finitos, estes três segmentos se distinguem na solução do problema de otimização. Na otimização dimensional a geometria é parametrizada por variáveis de projeto tais como, espessura, área de uma seção transversal, ou orientações de um compósito laminado, sem modificar a malha do problema. A otimização de forma, tratada na proposta deste trabalho, geralmente é um campo mais complexo que a otimização dimensional. Nesse caso, a forma do contorno é parametrizada, com vistas a modificá-la para encontrar o projeto ótimo, entretanto a topologia da malha<sup>[1]</sup> do domínio não é modificada. Este método possui um campo de possibilidades para um projeto ótimo maior que em otimização dimensional. A otimização topológica, por fim, envolve determinar a

---

<sup>[1]</sup> Topologia da malha neste parágrafo entende-se como eliminar elementos correspondendo a introdução de furos no domínio. No contexto de otimização de forma a topologia da malha se refere a manter a conectividade, que em muitos trabalhos não é mantida, nos quais se realizam remalhamentos.

geometria a partir de um domínio de projeto, através de introdução de furos ou vazios. Este método é o que permite alcançar geometrias mais gerais que em otimização de forma. Entretanto deve-se notar que muitos problemas não admitem a introdução de furos no domínio, e, neste sentido, a otimização de forma continua sendo uma poderosa ferramenta de projeto em engenharia. A formulação tradicional do método dos elementos finitos tem sido utilizada como ferramenta de análise em problemas de otimização estrutural. Entretanto a formulação isogeométrica de elementos finitos também tem sido empregada, sendo o trabalho de Wall *et al.* (2008) um dos primeiros publicados a empregar esta técnica para otimização de forma (WANG *et al.*, 2018).

O objeto deste estudo consiste em propor um método de otimização baseado na parametrização da geometria do problema por superfícies NURBS (*non uniform rational B-Spline*), visando preservar a qualidade da malha durante a modificação da forma. Diferente do método dos elementos finitos isogeométricos, a abordagem por NURBS utilizada nesta proposta restringe-se à representação geométrica e parametrização do domínio antes de efetuar a discretização para a solução numérica. Neste trabalho, o problema matemático de otimização de forma é resolvido utilizando a Programação Sequencial Quadrática (SQP) e os resultados obtidos são comparados com outros métodos existentes.

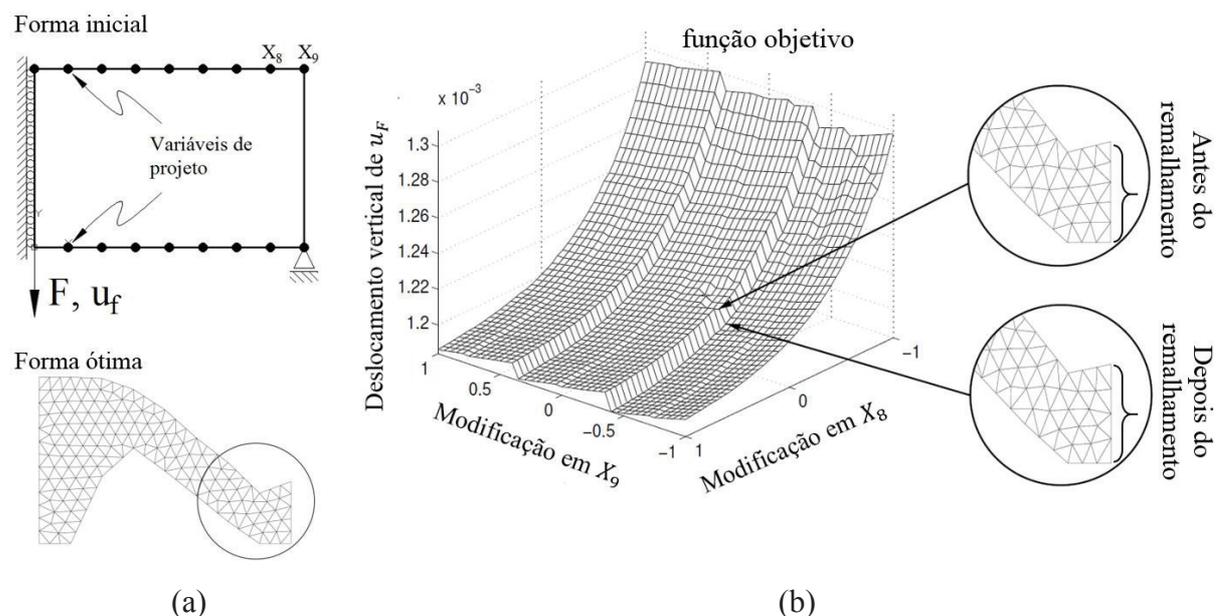
A representação e parametrização da geometria consiste em selecionar as variáveis de projeto que permitem modificar a forma do contorno de uma peça a ser otimizada. Várias abordagens foram desenvolvidas desde os anos 70 até os tempos atuais de forma que algumas dificuldades motivaram esforços de pesquisa para obter formulações cada vez mais robustas. As características destas dificuldades são explicadas no capítulo 4.

Na maioria dos problemas presentes na indústria, é preciso uma malha não estruturada para discretizar a geometria. Além do contorno, as posições dos nós da malha também precisam ser parametrizadas a partir das variáveis de projeto. A maneira como a malha se modifica a partir da modificação do contorno é chamado de campo de velocidades. O campo de velocidades é um caso particular de análise de sensibilidade, que é definida como a variação da resposta do problema com relação a modificação nas variáveis de projeto (ZIENKIEWICZ e CAMPBELL, 1973).

Uma das dificuldades presentes em problemas de otimização de forma surge da distorção da malha que ocorre no domínio quando o contorno é alterado. Este fato, em um dado limite de distorção leva a necessidade de remalhamento ao longo das iterações de otimização, causando inconsistência matemática, (SCHLEUPEN *et al.*, 2000; WILKE *et al.*, 2013) e possíveis dificuldades de convergência. Descontinuidades na função objetivo e o surgimento

de mínimos locais também podem ocorrer (WILKE, 2010). Um exemplo disso é mostrado na para um problema de minimização de deslocamento de uma viga sujeita a um carregamento concentrado como ilustrado na Figura 1a. Quando a variável de projeto  $X_9$  é modificada, surge a necessidade de refazer a malha de elementos finitos devido à modificação da forma, como ilustrado no detalhe à direita da Figura 1b. Portanto o efeito do remalhamento são as descontinuidades da função objetivo e o surgimento de mínimos locais (WILKE, 2010). Nesse contexto propõe-se uma abordagem para o cômputo do campo de velocidades a partir da parametrização do domínio por NURBS, visando, entre outras vantagens, preservar a qualidade da malha ao longo da otimização, que admite grandes modificações da forma sem necessidade de remalhamento. A parametrização por NURBS permite descrever geometrias além de curvas do contorno, superfícies planas, superfícies curvadas ou sólidos tridimensionais.

Figura 1 – Exemplo de descontinuidade da função objetivo (deslocamento vertical de  $u_F$ ) em um problema de otimização de forma utilizando abordagem de remalhamento.



Fonte: WILKE, 2010.

A estrutura da dissertação está dividida em sete capítulos resumidos abaixo:

- Capítulo 1 – INTRODUÇÃO: O contexto de otimização estrutural é introduzido como parte integrante de ferramentas indispensáveis em problemas de Engenharia Mecânica. O trabalho atual é contextualizado e os objetivos são apresentados.
- Capítulo 2 – MODELAMENTO GEOMÉTRICO: Apresenta as técnicas de modelamento geométrico usadas para descrever a forma da estrutura, introduzindo os conceitos de curvas e superfícies NURBS.

- Capítulo 3 – ANÁLISE DE ESTRUTURAS: Introduz o método dos elementos finitos como ferramenta de análise, abordando aspectos relevantes do método para problemas de otimização de forma.
- Capítulo 4 – OTIMIZAÇÃO DE FORMA: Contém uma breve revisão histórica de procedimentos de otimização de forma em análise estrutural, além de estabelecer matematicamente o problema de minimização estudado, incluindo função objetivo e restrições.
- Capítulo 5 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE: Faz o detalhamento das expressões de sensibilidade estrutural para problemas de otimização de forma. Neste capítulo o contexto de campo de velocidades é explorado, destacando a abordagem proposta neste trabalho e comparando com estratégias de suavização laplaciana.
- Capítulo 6 – OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM ELASTICIDADE PLANA: A aplicação do método proposto e do método Laplaciano são empregados simultaneamente em dois exemplos diferentes, a fim de comparações.
- Capítulo 7 – CONCLUSÃO: Finalmente argumenta-se sobre a abordagem proposta como um método viável de aplicação ampla em problemas de otimização de forma. Além disso são descritas algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Em problemas de otimização de forma, grandes modificações do contorno podem provocar excessiva distorção da malha e como consequência disso prejudicar a acurácia da análise de sensibilidade e obtenção da solução ótima (HOU e SHEEN, 1988; ZHANG e BELEGUNDU, 1992; CHOI e CHANG, 1994). Fazer uma nova malha de elementos finitos para a forma modificada poderia representar uma solução intuitiva para reduzir a excessiva distorção e melhorar a qualidade da análise de elementos finitos. Por outro lado, isso prejudica a convergência do problema de otimização (SCHLEUPEN *et al.*, 2000; CHOI e CHO, 2015) e pode resultar em mínimos locais (WILKE *et al.*, 2013).

## 1.2 OBJETIVO

A fim de estabelecer uma estratégia alternativa ao remalhamento em um problema de otimização de forma, na versão discretizada do problema, propõe-se um método em que a topologia de malha associada não deve ser modificada durante todo o processo de otimização. O objetivo deste trabalho é estabelecer um procedimento de parametrização da geometria que permita grandes modificações da forma, visando por um lado a robustez em relação a distorção da malha de elementos finitos, que é inevitável ao manter sua topologia à medida que a geometria vai se alterando. Por outro lado, deseja-se que a estratégia seja aplicável a problemas planos e de superfícies 3D. Esses objetivos são inerentes a requisitos teóricos e práticos que o campo de velocidades deve satisfazer, como descritos por Choi e Kim (2005).



## 2 MODELAMENTO GEOMÉTRICO

A geometria estrutural objetiva descrever as características do modelo geométrico da estrutura, etapa que precede uma análise de engenharia. O modelo geométrico deve conter as informações relevantes para a análise. Como exemplo para uma estrutura de barras, o modelo geométrico apenas deve conter a informação da posição espacial das extremidades além da área da seção de cada barra. Para uma estrutura de vigas, o modelo deve descrever a forma do eixo da viga além das propriedades geométricas e orientação da sua seção transversal. Em uma estrutura descrita por uma casca, o modelo geométrico deverá conter a forma do contorno, as curvaturas da superfície e espessura. Em um modelo mais geral a estrutura pode ser descrita por um corpo sólido. A geometria estrutural para uma análise de engenharia, pode ainda ser composta por uma modelagem mista de barras, vigas, cascas e sólidos.

No contexto de otimização de forma, o modelo geométrico é estabelecido para descrever uma estrutura inicial para ser otimizada. A sua forma geométrica é previamente definida em função de parâmetros que podem ser manipulados ao longo das iterações de otimização.

Neste trabalho a geometria é descrita por superfícies NURBS, que além de fornecerem subsídio para a descrição de formas geométricas gerais, irão suplementar o método de otimização proposto. Este capítulo introduz conceitos das curvas B-Splines, que fornecem a base para a compreensão da construção de curvas e superfícies NURBS. Ressalta-se que geometrias B-Splines são um caso particular de geometrias NURBS.

### 2.1 CURVAS B-Splines

Os procedimentos demonstrados aqui para descrever uma B-Spline seguem a metodologia descrita em Piegl e Tiller (1997). B-Splines são generalizações de polinômios de Bernstein e compartilham muitas de suas propriedades analíticas e geométricas (GOLDMAN, 2003). Uma curva B-Spline  $C(u)$  é definida pelo mapeamento de um segmento delimitado no espaço paramétrico unidimensional para o espaço euclidiano tridimensional (TILLER, 1983) e a expressão para descrevê-la é

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_i^p(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

onde  $N_i^p$  são as funções de base para a curva de ordem  $p + 1$  (grau  $p$ ) e  $P_i$  é o  $i$ -ésimo ponto de controle de um polígono de  $n + 1$  pontos controle. Para obter a  $i$ -ésima função de base  $N_i^p$ , considera-se um dado vetor  $\mathbb{U} = \{u_0, \dots, u_m\}$ , onde  $u_i \leq u_{i+1}$ , com  $i = 0, \dots, m - 1$ , e  $0 \leq u_i \leq 1$ , onde  $u_i$  é um knot, então para uma B-Spline de grau  $p$ ,  $N_i^p$  é obtida de forma recursiva por

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \tag{2}$$

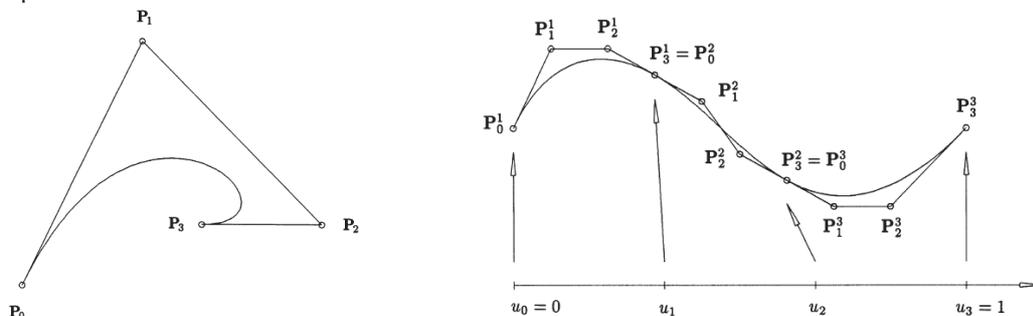
$$N_i^p = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u).$$

O grau  $p$ , o número de pontos de controle  $n + 1$  e o número de knots  $m + 1$  são relacionados por,

$$m = n + p + 1. \tag{3}$$

A construção de uma curva B-Spline pode ser descrita por um conjunto de curvas de Bézier que é formada por um conjunto de pontos de controle que definem o grau da curva. A Figura 2a mostra uma curva de Bézier formada por um polinômio cúbico. Deve-se notar que a tangente da curva em  $u = 0$  (ou  $u = 1$ ), coincide com o segmento  $\overline{P_0P_1}$  (ou  $\overline{P_2P_3}$ ). A Figura 2b mostra o esquema de montagem de uma B-Spline cúbica a partir de três curvas cúbicas de Bézier. Quando se deseja obter uma continuidade  $C^1$ , então os segmentos  $\overline{P_1^2P_3^1}$  e  $\overline{P_0^2P_1^2}$  que são unidos em  $u_1$  devem ser colineares, assim como os outros segmentos nas outras junções. Com isso os pontos de controle coincidentes tal como  $P_3^1 = P_0^2$  são descritos em função dos outros pontos de controle. Logo para descrever a curva na Figura 2b são necessários apenas oito pontos de controle.

Figura 2 - Exemplos de curvas Splines: a) Curva de Bézier, b) conjunto de curvas de Bézier na formação de uma B-Spline.



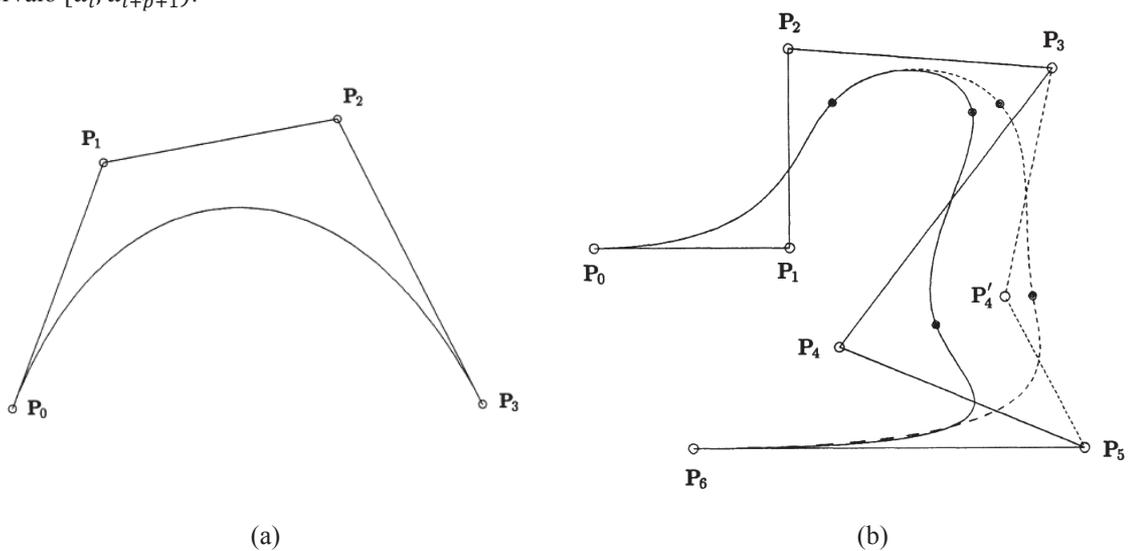
(a)

(b)

Uma das vantagens das curvas B-Splines é a possibilidade de estabelecer um segmento com um único polígono de controle para descrever o contorno de uma dada geometria, incluindo continuidade mínima  $C^0$ . Outra vantagem do ponto de vista de otimização de forma é que as curvas B-Splines permitem estabelecer um controle localizado da modificação da curva através do posicionamento dos knots. Em uma curva de Bézier a movimentação de um ponto de controle afeta grande parte da curva, um controle localizado da modificação em B-Splines, significa que o movimento de um ponto de controle pode modificar uma região maior ou menor, que dependerá da parametrização. Maiores detalhes das propriedades e continuidades das B-Splines estão detalhadamente descritos em Piegl e Tiller (1997).

A Figura 3a ilustra uma curva de Bézier de grau  $p = 3$  com vetor de knots  $\mathbb{U} = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$ , que é idêntica a uma B-Spline. Como exemplo, para descrever melhor um contorno, com um único segmento de curva de Bézier pode ser necessário aumentar a quantidade de pontos de controle que implica em aumentar o grau da curva de Bézier. Por outro lado, a Figura 3b ilustra uma B-Spline também de grau  $p = 3$ , com vetor de knots  $\mathbb{U} = \{0,0,0,0, 1/4, 1/2, 3/4, 1,1,1,1\}$ . Neste caso através da introdução de knots é possível manter o grau da curva com mais pontos de controle, que podem melhor descrever um contorno com um único segmento. Além disso a modificação da curva ocorre somente no intervalo  $[u_i, u_{i+p+1})$ . Neste caso, se o ponto de controle  $P_4$  for movimentado, então a curva será alterada somente no intervalo  $[1/4, 1)$ .

Figura 3 - B-Spline com vetor de knots  $\mathbb{U} = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$ , b) Modificação da curva B-Spline em um intervalo  $[u_i, u_{i+p+1})$ .



Fonte: PIEGL e TILLER, 1997.

## 2.2 CURVAS NURBS

As curvas NURBS desfrutam das mesmas propriedades das B-Splines, entretanto, algumas geometrias não podem ser descritas exatamente por um polinômio, tal como circunferências e elipses, que são descritas por funções racionais. Através da introdução de pesos em (1) uma nova expressão dá origem a segmentos de funções racionais podendo descrever exatamente a classe de curvas racionais. A expressão para uma curva NURBS tem a forma,

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_i^p(u) w_i} \quad (4)$$

onde os pesos  $w_i$  são atribuídos aos pontos de controle e  $0 < w_i \leq 1$ . Quando os pesos assumem a unidade, a expressão (4) retorna igual a (1), devido à propriedade de  $\sum_{i=0}^n N_i^p(u) = 1$ .

## 2.3 SUPERFÍCIES NURBS

As superfícies B-Splines surgem do produto tensorial entre duas curvas, neste caso dois parâmetros são necessários para descrever uma superfície. Esta superfície é formada por um conjunto bidirecional de pontos de controle, dois vetores de *knots*, e o produto de funções B-Splines. A expressão de uma superfície B-Spline tem a forma,

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) P_{ij} \quad (5)$$

onde agora têm-se os parâmetros  $u$  e  $v$  que descrevem qualquer ponto sobre a superfície. Note que agora  $\mathbf{P}$  é uma matriz de dimensão  $(n + 1) \times (m + 1)$ . A superfície  $S$  é descrita pelos parâmetros  $u$  e  $v$  no sistema de coordenadas de  $P_{ij}$ , ou seja, se  $\mathbf{P}$  representa as coordenadas  $z$  dos pontos de controle, então  $S$  irá descrever a coordenada  $z$  da superfície nas coordenadas paramétricas  $u$  e  $v$ . Do mesmo modo, como nas curvas, uma superfície NURBS é descrita por

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}. \quad (6)$$

Frequentemente a equação (6) é descrita em função da base racional (PIEGL e TILLER, 1997),

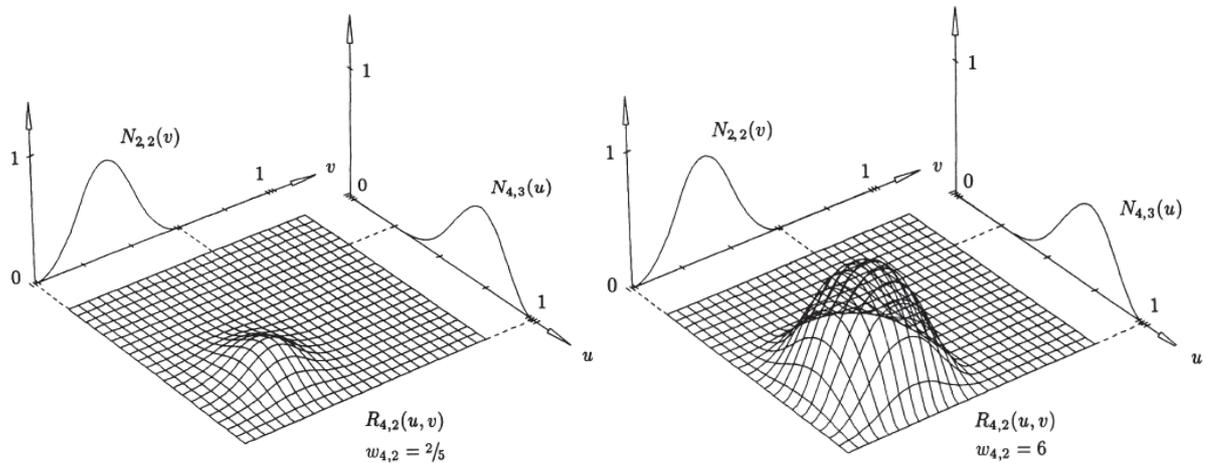
$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} P_{ij}, \quad (7)$$

onde

$$R_{ij} = \frac{N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}} \quad (8)$$

A Figura 4 ilustra um exemplo das funções de base de uma superfície gerada a partir de duas curvas com  $\mathbb{U} = \{0,0,0,0,1/4,1/2,3/4,1,1,1,1\}$ , e  $\mathbb{V} = \{0,0,0,1/5,2/5,3/5,3/5,4/5,1,1,1\}$ , onde na Figura 4a, um peso de  $w_{4,2} = 2/5$  é atribuído ao ponto de controle  $P_{4,2}$ , enquanto na Figura 4b são empregadas as mesmas curvas, mas com  $w_{4,2} = 6$  atribuído ao ponto de controle  $P_{4,2}$ .

Figura 4 – Funções de base B-Spline com pesos diferentes em cada caso.

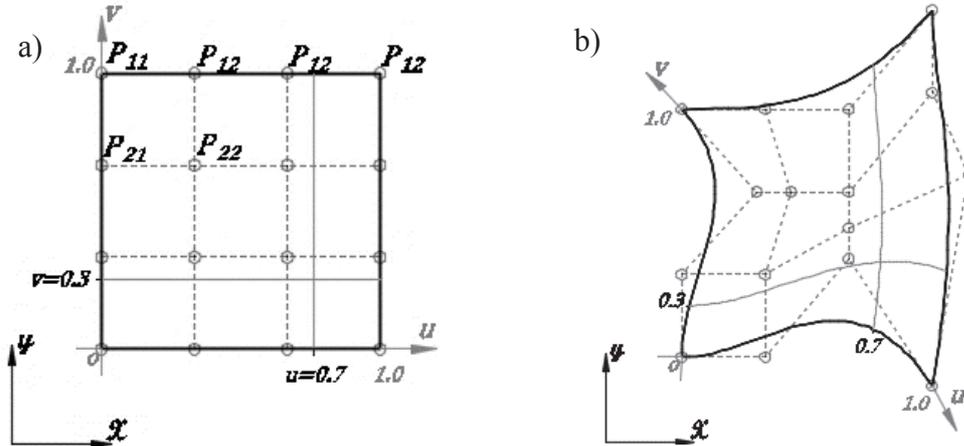


Fonte: PIEGL e TILLER, 1997.

A parametrização por superfícies NURBS, fornece várias características de interesse para a proposta neste trabalho. Destaca-se o comportamento do deslocamento de um ponto material de uma dada superfície devido ao deslocamento de seus pontos de controle. Como exemplo a Figura 5a ilustra uma superfície B-Spline plana com vetores de knots  $\mathbb{U} = \mathbb{V} = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$ , portanto de grau três, com uma malha de  $4 \times 4$  pontos de controle  $\mathbf{P}$ . A Figura 5a, mostra a superfície na condição original com as linhas de coordenadas paramétricas  $u = 0,7$  e  $v = 0,3$ , enquanto a Figura 5b ilustra a nova posição no sistema físico de coordenadas

das linhas com mesmas coordenadas paramétricas para as modificações nos pontos de controle  $P$ .

Figura 5 - Superfície NURBS. a) Malha de pontos de controle com linhas de coordenadas paramétricas sobre a superfície original. b) Malha de pontos de controle e superfície na condição modificada com linhas de coordenadas paramétricas constantes.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Para uma dada superfície, os parâmetros  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  definem a transformação  $S$  das coordenadas paramétricas para as coordenadas  $\chi \in \mathbb{R}^3$  que pertencem àquela superfície no sistema físico,  $S: (u, v) \rightarrow \chi$ , onde  $\chi$  representa genericamente as coordenadas  $(x, y, z)$ , em que,

$$\chi = S(u, v) \quad (9)$$

Para um problema discretizado por uma malha de elementos finitos, as coordenadas nodais  $\chi$  são conhecidas. A parametrização por superfície NURBS de cada nó  $k$  da malha de elementos finitos é dada por,

$$\chi_k = S(u_k, v_k), \quad (10)$$

portanto as coordenadas  $(u_k, v_k)$  são obtidas por,  $S^{-1}: \chi \rightarrow (u_k, v_k)$ , ou seja,

$$(u_k, v_k) = S^{-1}(\chi_k), \quad (11)$$

este procedimento é chamado de recuperação paramétrica e é descrito na seção 4.2 que trata a parametrização do domínio por superfícies NURBS.

O comportamento desta parametrização é como ilustrado na Figura 5. Por exemplo, considerando que a coordenada  $(u, v)$  da Figura 5a corresponda a coordenada paramétrica  $(u_k, v_k)$  de um dado nó  $k$ . Quando uma modificação nos pontos de controle de uma superfície é efetuado, a modificação da coordenada nodal  $\chi_k$  no sistema físico, será dada pelo movimento da sua correspondente coordenada paramétrica  $(u_k, v_k)$  no sistema físico como ilustrado na Figura 5b.

### 3 ANÁLISE DE ESTRUTURAS

Uma análise de engenharia consiste em idealizar o problema de maneira que, a partir deste, pode ser resolvido, estabelecer um modelo matemático, resolvê-lo e interpretá-lo matematicamente (BATHE, 2014). O modelo matemático é descrito por equações diferenciais que são relacionadas com as condições de equilíbrio e relações constitutivas, além de estarem acompanhadas das condições de contorno, definidas no domínio do problema. Em grande parte dos problemas a solução pode se tornar complicada, ou até mesmo inviável de se resolver utilizando modelos convencionais da mecânica dos sólidos, então a solução aproximada pode ser obtida, por exemplo, pelo método dos elementos finitos.

O objetivo deste texto não é introduzir as técnicas de formulação do método dos elementos finitos, mas sim, nortear o leitor sobre os conceitos básicos necessários para entendimento do método dos elementos finitos como ferramenta de análise, na aplicação em problemas de otimização de forma. Explicações completas podem ser encontradas em Cook, (1974) ou em Bathe (2014).

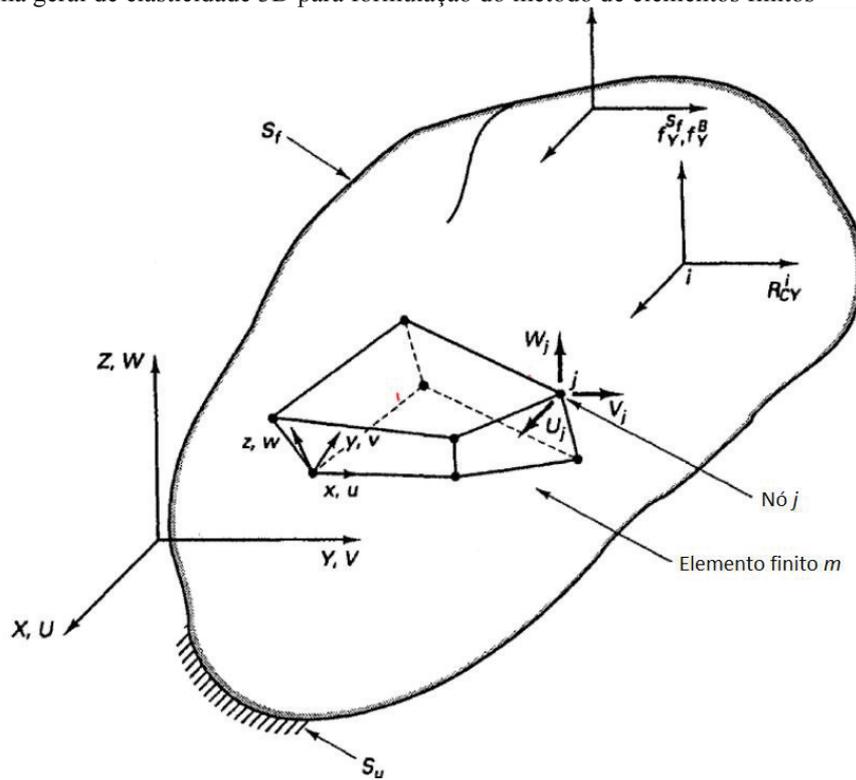
#### 3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os fundamentos para a formulação do método introduzidos neste capítulo são uma descrição sumária dos procedimentos descritos por Bathe (2014). Considera-se um problema geral linear elástico tridimensional em equilíbrio estático, como ilustrado na Figura 6 para estabelecer os procedimentos para a formulação de elementos finitos, baseada em deslocamentos, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais.

O corpo sólido está fixo por uma superfície  $\hat{S}_u$ , onde os deslocamentos são prescritos  $\mathbf{U}^{\hat{S}_u}$ . Além disso o corpo sólido está sujeito a forças de superfície  $\mathbf{f}^{\hat{S}_f}$  que atuam sobre a área da superfície  $\hat{S}_f$ , forças de corpo  $\mathbf{f}^B$  e forças concentradas  $\mathbf{R}_C^i$  no  $i$ -ésimo ponto. Os esforços e o campo de deslocamentos  $\mathbf{U}$  possuem as suas componentes definidas segundo o sistema de coordenadas  $x, y$  e  $z$ , como ilustrado na Figura 6,

$$\mathbf{f}^B = \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \\ f_z^B \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^{S_f} = \begin{bmatrix} f_x^{S_f} \\ f_y^{S_f} \\ f_z^{S_f} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_C^i = \begin{bmatrix} R_{Cx}^i \\ R_{Cy}^i \\ R_{Cz}^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Figura 6 - Problema geral de elasticidade 3D para formulação do método de elementos finitos



Fonte: BATHE, 2014.

Considera-se que o campo de deslocamentos  $\mathbf{U}$  é contínuo e é usado para calcular as deformações e tensões. Estabelece-se então, a equação de equilíbrio utilizando o princípio dos trabalhos virtuais,

$$\int_{\mathcal{V}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}^B d\mathcal{V} + \int_{\hat{S}_f} \bar{\mathbf{U}}^{\hat{S}_f T} \mathbf{f}^{\hat{S}_f} d\hat{S} + \sum_i \bar{\mathbf{U}}^i T \mathbf{R}_C^i \quad (13)$$

em que o lado esquerdo da equação representa o trabalho virtual interno e o lado direito representa o trabalho virtual externo. Adicionalmente,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são as deformações

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx}] \quad (14)$$

onde

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \quad (16)$$

obtidas dos deslocamentos  $\mathbf{U} = [U \ V \ W]$ , provocados pelos carregamentos externos  $\mathbf{f}^B$ ,  $\mathbf{f}^{\hat{S}f}$  e  $\mathbf{R}_c^i$ , e  $\mathbf{E}$  é a matriz constitutiva do material,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  são as deformações virtuais correspondentes aos deslocamentos virtuais  $\bar{\mathbf{U}}$ .

### 3.1.1 Equações de elementos finitos

Os deslocamentos no domínio de um elemento  $e$  são obtidos através da interpolação dos deslocamentos nodais utilizando a matriz de funções de interpolação  $\mathbf{H}$

$$\hat{\mathbf{u}}^e = \mathbf{H}\mathbf{u}^e \quad (17)$$

em que  $\mathbf{u}^e$  representa os deslocamentos nodais do elemento  $e$ . De maneira análoga, as deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  calculadas pelas equações (15) e (16), precisam das derivadas dos deslocamentos com relação aos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}^e$ . Neste caso, a matriz  $\mathbf{B}$  contém estas derivadas e as deformações são obtidas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e. \quad (18)$$

As deformações virtuais  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  resultantes dos deslocamentos virtuais  $\bar{\mathbf{u}}^e$  são obtidas de maneira análoga à equação (18). No problema da Figura 6, a estrutura é discretizada em  $ne$  elementos sólidos de 8 nós, que estão conectados pelos nós dos vértices. Ao aplicar a equação (14) na equação (13) para cada elemento, e fazendo o somatório aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais sobre cada elemento para o problema de elementos finitos,

$$\bar{\mathbf{U}}^T \left[ \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\mathcal{V} \right\}_e \right] \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}^T \left[ \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B d\mathcal{V} \right\}_e + \sum_{\hat{S}_q=1}^{n\hat{S}_q} \left\{ \int_{\hat{S}} \mathbf{H}^T \mathbf{f}^{\hat{S}} d\hat{S} \right\}_{\hat{S}_q} + \mathbf{R}_c \right] \quad (19)$$

em que  $\hat{S}_q$  representa a superfície do elemento que compõe a superfície  $\mathbf{S}$  do corpo sólido e  $n\hat{S}_q$  é o número total de superfícies que integralizam a superfície da estrutura.  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais (desconhecido) resultantes dos esforços e  $\mathbf{R}_c$  é o vetor de forças concentradas aplicadas sobre os nós da estrutura. A equação (22) resulta na forma simplificada em

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (20)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura, que é obtida pela montagem, representado pelo operador de montagem  $\Lambda$ ,

$$K = \bigwedge_{e=1}^{ne} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\mathcal{V} \right\}_e \quad (21)$$

$$K = \bigwedge_{e=1}^{ne} \{k_e\}$$

e  $\mathbf{R}$  o vetor de forças externas

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_C, \quad (22)$$

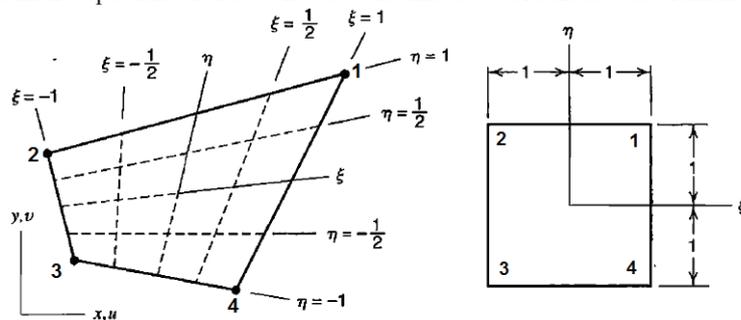
onde  $\mathbf{R}_B$ , representa as forças de corpo,  $\mathbf{R}_S$  representa as forças de superfície e  $\mathbf{R}_C$  representa as forças concentradas.

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da estrutura é, então, obtida através da rigidez  $k_e$  de cada elemento obtida por integração. De maneira análoga para o vetor de forças  $\mathbf{R}$ . O domínio de integração é definido no sistema de coordenadas do elemento chamado de coordenadas naturais.

### 3.1.2 Elementos planos quadrilaterais

A formulação do método dos elementos finitos é usualmente expressa em um sistema de coordenadas local, chamado de sistema de coordenadas naturais, em que a dimensão dos elementos em cada direção varia de -1 a 1, independente das suas coordenadas no sistema global. Para o elemento quadrilateral bidimensional as direções são descritas neste texto como  $\xi$  e  $\eta$ . A formulação isoparamétrica, permite descrever elementos uni, bi ou tridimensionais com disposição geométrica geral, com lados curvos e/ou ângulos entre arestas não perpendiculares como ilustrado na Figura 7. Além disso tem-se as vantagens para implementação computacional.

Figura 7 - Exemplo de elemento quadrilateral de 4 nós e o sistema de coordenadas do elemento.



Fonte: (Adaptado de Cook 1974)

O mapeamento de um ponto qualquer dentro do elemento em coordenadas naturais para o sistema global é feito através das funções de interpolação  $\mathbf{H}$  e das coordenadas nodais do elemento no sistema global,

$$x = \mathbf{H}(\xi, \eta) \mathbf{x}, \quad y = \mathbf{H}(\xi, \eta) \mathbf{y} \quad (23)$$

em que  $x$  e  $y$  representam as coordenadas no domínio do elemento no sistema global para uma dada coordenada natural  $(\xi, \eta)$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são os vetores de coordenadas nodais do elemento. Na forma de somatório o mapeamento é dado por,

$$x = \sum_{i=1}^{ni} h_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{ni} h_i(\xi, \eta) y_i, \quad (24)$$

em que  $h_i$  é a  $i$ -ésima função de interpolação do elemento e  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas nodais do  $i$ -ésimo nó do elemento com  $ni$  nós. Da mesma maneira os deslocamentos no domínio do elemento são interpolados entre os deslocamentos nodais

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{ni} h_i(\xi, \eta) u_i, \quad \hat{v} = \sum_{i=1}^{ni} h_i(\xi, \eta) v_i. \quad (25)$$

As funções de interpolação para o elemento plano quadrilateral linear da Figura 8a são dadas por

$$h_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta). \quad (26)$$

Para o elemento quadrilateral quadrático da família *serendipity* da Figura 8b, as funções de interpolação dos nós dos vértices são dadas por

$$h_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), \quad (27)$$

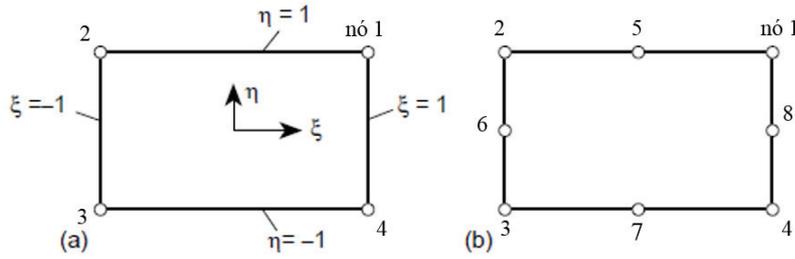
enquanto para os nós intermediários, são

$$h_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta), \quad \text{para } \xi_i = 0$$

$$h_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2), \quad \text{para } \eta_i = 0. \quad (28)$$

Elementos quadrilaterais com grau de interpolação maior, podem ser verificados em Zienkiewicz, *et al.* (2005).

Figura 8 - Elemento plano quadrilateral. a) bilinear de 4 nós. b) Quadrático de 8 nós (*Serendipity*).



Fonte: (ZIENKIEWICZ, et al., 2005)

As deformações pelas equações (15) e (16), são calculadas através da equação (18), onde a matriz  $\mathbf{B}$  contém as derivadas das funções de interpolação com relação as coordenadas  $x$  e  $y$  do elemento,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h_{i,x} & 0 & h_{i+1,x} & 0 & \cdots & h_{ni,x} & 0 \\ 0 & h_{i,y} & 0 & h_{i+1,y} & \cdots & 0 & h_{ni,y} \\ h_{i,y} & h_{i,x} & h_{i+1,y} & h_{i+1,x} & \cdots & h_{ni,y} & h_{ni,x} \end{bmatrix} \quad (29)$$

em que  $h_{i,x} = \partial h_i / \partial x$  e assim por diante. Entretanto as funções de interpolação  $\mathbf{H}$  são funções das coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ , logo, para obter as derivadas ( $\mathbf{H}_{,x}$  e  $\mathbf{H}_{,y}$ ) com relação as coordenadas  $(x, y)$ , aplica-se a regra da cadeia, que na forma matricial assume a forma

$$\begin{Bmatrix} h_{i,\xi} \\ h_{i,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{i,x} \\ h_{i,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} h_{i,x} \\ h_{i,y} \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

onde  $h_{i,\xi}$  e  $h_{i,\eta}$  representam as derivadas parciais das funções de interpolação com relação às coordenadas naturais,  $[\mathbf{J}]$  é a matriz jacobiana, logo,

$$\begin{Bmatrix} h_{i,x} \\ h_{i,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} h_{i,\xi} \\ h_{i,\eta} \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

os elementos da matriz jacobiana,  $x_{,\xi}$ ,  $y_{,\xi}$ ,  $x_{,\eta}$  e  $y_{,\eta}$ , são obtidas por diferenciação da equação (24) com relação as coordenadas naturais,

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{ni} h_{i,\xi} \cdot x_i, & y_{,\xi} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{ni} h_{i,\xi} \cdot y_i \\ x_{,\eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{ni} h_{i,\eta} \cdot x_i, & y_{,\eta} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{ni} h_{i,\eta} \cdot y_i \end{aligned} \quad (32)$$

## 3.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integração numérica surge geralmente da necessidade de resolver a integral definida de uma função  $f$  que não possui uma antiderivada explícita, ou quando a antiderivada é difícil de ser obtida. Os métodos mais comuns são as regras de integração por quadratura de Newton-Cotes e quadratura de Gauss-Legendre. Este último é o método de integração utilizado neste trabalho, além de ser amplamente empregado em problemas de elementos finitos. Para exemplificar os métodos de integração demonstrados neste capítulo, considera-se uma função  $f$  de uma única variável, com isso a forma de quadratura é

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \tilde{f}(x) dx = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} W_i f(x_i) \quad (33)$$

onde  $\tilde{f}(x)_i$  representa a  $i$ -ésima função de interpolação de grau  $\tilde{n} - 1$  com antiderivada conhecida, definida no domínio de integração  $[a, b]$ . O coeficiente  $W$  representam o  $i$ -ésimo peso multiplicado pela avaliação da função em pontos específicos  $x_i$ .

### 3.2.1 Integração por quadratura de Gauss-Legendre

A integração por quadratura de Gauss-Legendre integra exatamente polinômios de grau  $2\tilde{n} - 1$  ou menor, em um domínio definido de  $[-1, 1]$ . A modificação do domínio de integração da função para o intervalo de  $[-1, 1]$  é descrita no final deste capítulo. A integral para uma função unidimensional  $F(\xi)$ , neste caso, é calculada por

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{\tilde{n}} W_i F(\xi_i), \quad (34)$$

neste método os pesos  $W_i$  e pontos de integração  $\xi_i$  são definidos de maneira a minimizar o erro associado. Com isso os pontos  $\xi_i$  resultam em posições simétricas em relação a  $\xi = 0$ , e não igualmente espaçados. Portanto em problemas lineares de elementos finitos, o método de Gauss-Legendre é amplamente utilizado por exigir um menor custo computacional para calcular a integral por quadratura, com acurácia otimizada. O procedimento para obter as coordenadas e pesos para integração numérica pode ser consultado no APENDICE A.

### 3.2.2 Integração por quadratura em elementos finitos

Neste capítulo serão abordados a integração por quadratura de Gauss-Legendre em elementos finitos que foram utilizados neste trabalho.

A integração por quadratura de funções bidimensionais ou tridimensionais podem ser efetuadas com diferentes pontos e pesos em cada direção. Para os problemas de elementos finitos isoparamétricos bidimensionais, a integral da matriz de rigidez da equação (21), para um elemento, usualmente é feita utilizando-se  $\tilde{n} \times \tilde{n}$  pontos, em que a aplicação por quadratura neste caso é expressa por

$$\iint_{-1}^1 \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} |J| t}{\mathbf{F}(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} W_i W_j \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j) \quad (35)$$

onde  $t$  é a espessura do elemento,  $|J|$  é o determinante da matriz jacobiana, que relaciona um diferencial de área no sistema de coordenadas do elemento  $(\xi, \eta)$  com o seu correspondente no sistema de coordenadas físico  $(x, y)$ .

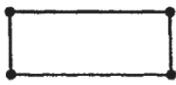
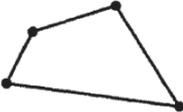
Para elementos retangulares ou em forma paralelogramos, a matriz de rigidez do elemento pode ser integrada por quadratura de maneira exata, mas para elementos distorcidos geometricamente, a função  $\mathbf{F}$  da equação (35), deixa de ser um polinômio, com isso torna-se inviável obter a integral exata.

Quanto maior a ordem  $n$  de integração por quadratura maior a acurácia da integral da função, entretanto, isso implica em maior custo computacional. Por outro lado, ao se utilizar poucos pontos de integração, o erro associado pode tornar os resultados inaceitáveis, ou até mesmo tornar o problema insolúvel. Em Zienkiewicz, *et al.* (2005) são ilustrados exemplos utilizando elementos planos quadrilaterais lineares e quadráticos onde a integração reduzida<sup>[2]</sup>, pode resultar em singularidades da rigidez da estrutura em um problema bem definido. A ordem de integração utilizada neste trabalho segue a recomendação dada em Bathe (2014), que está ilustrada na Tabela 1.

---

<sup>2</sup> Integração denominada completa é aquela que fornece a integral exata da matriz de rigidez para elementos não distorcidos (BATHE, 2014).

Tabela 1 - Ordem de integração recomendada para elementos planos quadrilaterais.

Elementos bidimensionais		Ordem de integração $n$
4 nós		$2 \times 2$
4 nós distorcidos		$2 \times 2$
8 nós		$3 \times 3$
8 nós distorcidos		$3 \times 3$

Fonte: Adaptado de Bathe, (2014).

### 3.3 MÉTODOS DE RECUPERAÇÃO DE TENSÃO

O cálculo de tensão em problemas de elementos finitos, é uma etapa da análise estrutural classificados como pós-processamento, em que, a partir da solução do sistema linear de elementos finitos  $\mathbf{KU} = \mathbf{R}$ , o computo das tensões é efetuado com base nos deslocamentos nodais. O campo de deslocamentos nodais é contínuo em todo o domínio do problema, mas em uma formulação baseada em deslocamentos os campos de tensões e deformações é descontínuo entre os elementos. As tensões são contínuas no domínio do elemento  $e$  são funções das coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$ , sendo calculadas por

$$\boldsymbol{\sigma}^e(\xi, \eta) = (\mathbf{EBu})^e \quad (36)$$

para problemas de estado plano de tensão, as componentes do tensor tensão, podem ser organizadas na forma reduzida,

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^e, \quad (37)$$

$\mathbf{E}$  é a matriz constitutiva do material,

$$\mathbf{E}^{ept} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^{epd} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

para estado plano de tensão, e para estado plano de deformação respectivamente e  $\mathbf{u}^e$  são os deslocamentos nodais do elemento, extraídos do vetor de deslocamentos global  $\mathbf{U}$  obtido da solução do sistema linear.

Embora a matriz  $\mathbf{B}$  possa ser avaliada em qualquer ponto do domínio do elemento, nem sempre a tensão irá resultar com a mesma acurácia. Os pontos que apresentam melhor acurácia para avaliação das tensões, são chamados pontos superconvergentes (BARLOW, 1976), ou também conhecidos como pontos de Barlow. As coordenadas dos pontos de Barlow coincidem com os pontos de um grau abaixo dos pontos utilizados para integração completa por quadratura de Gauss-Legendre.

Diversas técnicas para suavização das tensões descontínuas foram propostas nas últimas décadas, Cantin *et al.* (1978) apresentam um método iterativo para gerar um campo de tensões e deformações contínuas a partir da média nodal. Hinton e Campbell (1974) propõe as técnicas chamadas de suavização Global e Local utilizando mínimos quadrados. O método de recuperação superconvergente por *patch* (ZIENKIEWICZ e ZHU, 1992) é conhecido por fornecer os melhores resultados de tensão para malhas regulares e irregulares (ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005). Nos capítulos que seguem, serão abordados os métodos de suavização dos quais são demonstrados as sensibilidades analíticas para problemas de otimização de forma.

### 3.3.1 Suavização por média nodal

A maneira mais simples recuperar as tensões é avaliando o valor no nó do elemento e proceder a média com as tensões avaliadas a partir dos outros elementos adjacentes. Este método é denominado média nodal simples. Entretanto é o que fornece resultados ruins, principalmente para as tensões cisalhantes (WILDEMANN e MUÑOZ-ROJAS, 2005). A tensão nodal suavizada para  $ne$  elementos adjacentes, é dada por

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{ne} \mathbf{E} \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \quad (39)$$

onde  $\mathbf{B}_e$ , é a matriz  $\mathbf{B}$  do elemento  $e$ , avaliada na posição  $\xi$  e  $\eta$  correspondente ao nó  $i$ , e  $\mathbf{u}_e$  é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento  $e$ .

### 3.3.2 Suavização global L2

Este procedimento objetiva minimizar o erro entre as tensões não suavizadas no elemento e as tensões obtidas através de um ajuste, o erro é dado por

$$\mathbf{E}(\xi, \eta) = \sigma^e(\xi, \eta) - \mathcal{G}(\xi, \eta) \quad (40)$$

onde  $\sigma^e(\xi, \eta)$  são as tensões não suavizadas calculadas através dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}^e$

$$\sigma^e(\xi, \eta) = \mathbf{E}\mathbf{B}(\xi, \eta)\mathbf{u}. \quad (41)$$

e  $\mathcal{G}(\xi, \eta)$  é

$$\mathcal{G}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{ni} \bar{H}_i(\xi, \eta) \bar{\sigma}_i \quad (42)$$

onde  $\bar{H}_i$ , corresponde  $i$ -ésima função de interpolação de elementos finitos, que alternativamente pode ser de uma ordem abaixo das funções utilizadas para interpolar os deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ , e  $\bar{\sigma}_i$  é a  $i$ -ésima tensão suavizada desconhecida. A suavização global surge através do objetivo de determinar as tensões suavizadas  $\bar{\sigma}$  que minimizam o quadrado do erro  $\mathbf{E}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_i} \left[ \iint_{-1}^1 \mathbf{E}(\xi, \eta)^2 |J| d\xi d\eta \right] = 0. \quad (43)$$

que resulta em

$$\iint_{-1}^1 \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} |J| d\xi d\eta \bar{\sigma} = \iint_{-1}^1 \bar{\mathbf{H}}^T \sigma |J| d\xi d\eta \quad (44)$$

a integral do lado esquerdo representa a matriz massa  $\mathbf{M}$  com massa específica unitária, a integral o lado direito representa o vetor de pseudo carga  $\hat{\mathbf{P}}$ . A integral é resolvida no domínio do elemento e o sistema global é montado por superposição, resultando no sistema linear

$$\mathbf{M} \bar{\sigma} = \hat{\mathbf{P}}, \quad (45)$$

onde o sistema linear é resolvido para vetor de tensões suavizadas  $\bar{\sigma}$  desconhecidas.

À medida que o número de graus de liberdade do problema aumenta, o custo computacional para resolver a equação (45) também aumenta devido a inversão da matriz massa consistente. Alternativamente o uso de um processo iterativo utilizando a matriz massa diagonal pode apresentar maior eficiência computacional quando comparado com a abordagem direta (WILDEMANN e MUÑOZ-ROJAS, 2005).

### 3.4 QUALIDADE DE MALHA

Para assegurar a qualidade da análise de elementos finitos, um parâmetro de controle de distorção de elementos deve ser empregado para monitorar a qualidade da malha ao longo das iterações de otimização (BUGEDA e OÑATE, 1994), (ZHANG e BELEGUNDU, 1992). Os autores Salagame e Belegundu, (1994) fazem uma revisão das principais métricas de distorção para elementos bi e tridimensionais para quantificar a distorção do elemento.

Neste trabalho o parâmetro de distorção  $DP$  para elementos planos é utilizado como medida de distorção (NICOLAS e CITIPITIOGLU, 1977), (SALAGAME e BELEGUNDU, 1994) dado por

$$DP = \frac{4 \min |J|}{A} = \frac{4|J|^*}{A}, \quad (46)$$

onde  $J$  é a matriz jacobiana do elemento finito,  $|J|^*$  é o mínimo determinante da matriz jacobiana no elemento e  $A$  é a área do elemento. O parâmetro de distorção pode assumir  $0 \leq DP < 1$  para um elemento distorcido e não degenerado, assumindo que  $DP = 1,0$  para um elemento não distorcido. Uma das desvantagens dessa medida é que não é possível detectar a distorção na forma de um paralelogramo, outra desvantagem, é que independentemente da razão de aspecto de um elemento retangular  $DP = 1,0$ .

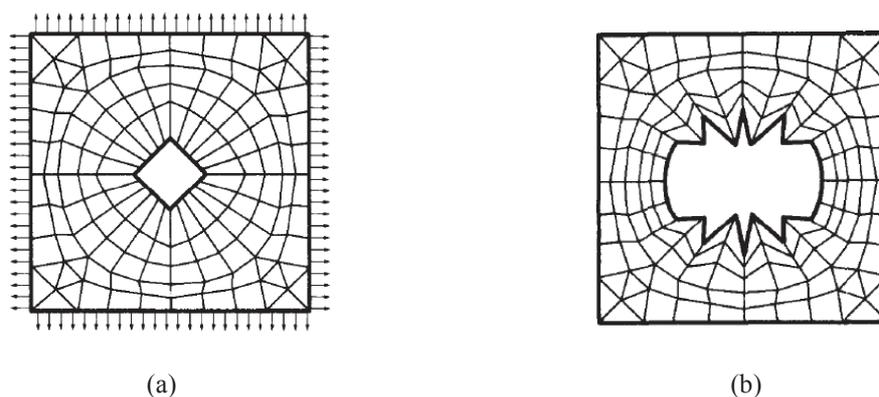
Neste trabalho o valor do mínimo do determinante da matriz jacobiana  $|J|^*$  é calculado para cada elemento em toda a malha a fim de evitar a degeneração, ou inversão de sinal do Jacobiano em qualquer parte do domínio do elemento. Para elementos quadrilaterais bi-lineares,  $|J|^*$  é calculado de maneira simples, pois  $|J|$  é uma função bi-linear, então o valor mínimo sempre estará em um dos vértices do elemento e isso pode ser verificado facilmente.

Para os elementos quadrilaterais de 8 nós determinar o mínimo exige um esforço maior do que no elemento de 4 nós, pois o valor mínimo de  $|J|$  pode estar em um dos vértices, em uma aresta, ou até mesmo no interior do elemento. Salagame e Belegundu (1994) descrevem os procedimentos para verificar a inversão de sinal ou a existência do valor zero de  $|J|$  no domínio do elemento para os elementos quadrilaterais de 4 e 8 nós. Frey *et al.* (1978) apresentam um estudo semelhante para os mesmos elementos, além de descrever um procedimento para a inversão do mapeamento. Field (1981) propõe um algoritmo mais flexível do que o procedimento descrito por Frey *et al.* (1978) para a inversão do mapeamento do elemento quadrilateral de 8 nós.

## 4 OTIMIZAÇÃO DE FORMA

Nos anos 70 surgiram os primeiros estudos de otimização de forma empregando o método dos elementos finitos para a análise estrutural (ZIENKIEWICZ e CAMPBELL, 1973). De maneira intuitiva, as variáveis de projeto eram tomadas como sendo as coordenadas nodais de uma malha de elementos finitos. Esta abordagem possui diversas limitações (BRAIBANT e FLEURY, 1984; DING, 1986), entre elas o grande número de variáveis de projeto e as independências entre os nós que resultava na dificuldade de lidar com os requisitos da geometria no contorno, levando a formas com continuidades impraticáveis, resultando em contornos não suaves. Um exemplo clássico de um projeto com esta abordagem é apresentado na Figura 9a, onde a forma ótima do contorno possui um aspecto de “serrilhado”.

Figura 9 - Otimização de forma 2D abordagem dos nós como variáveis da de projeto da forma. a) Forma inicial. b) Forma otimizada.

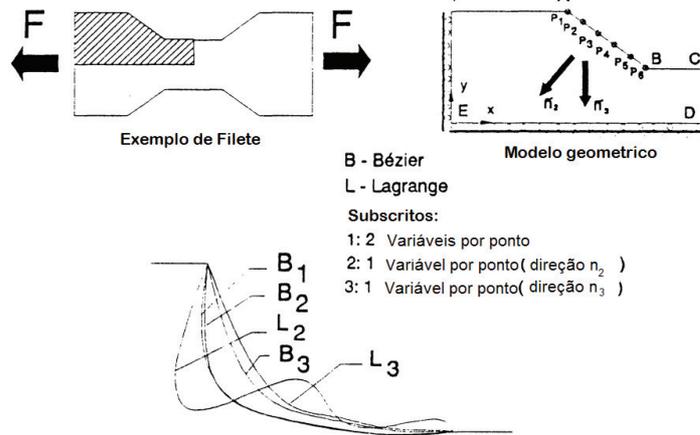


Fonte: BRAIBANT e FLEURY, 1984.

Com o passar dos anos, várias pesquisas foram desenvolvidas aplicando filtros a fim de resolver o problema de contorno serrilhado (LE *et al.*, 2011; BLETZINGER, 2014). Entretanto as dificuldades quanto ao grande número de variáveis de projeto ainda permanecem, embora técnicas para lidar com problemas com grande número de variáveis têm sido exploradas (CHEN *et al.*, 2018).

No início dos anos 80, surgiu a abordagem de parametrização do contorno por polinômios, permitindo descrever o contorno por alguns nós. Entretanto, esta abordagem provoca oscilações na forma do contorno (SEONG e CHOI, 1987; ZHANG *et al.*, 1995) tal como ilustrado na Figura 10. Além disso é mencionada pelo autor a dificuldade de manter o controle local da forma, pois a modificação de um único parâmetro afeta uma grande região do contorno.

Figura 10 - Utilização de curvas de Bezier em comparação com polinômios na parametrização do contorno.

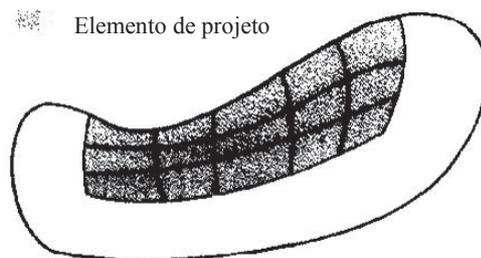


Fonte: ZHANG et al., 1995

Na sequência um novo método foi proposto, consistindo em descrever o contorno da forma através de curvas de Bézier e B-splines (BRAIBANT e FLEURY, 1984). Entre as vantagens podem ser citados a redução significativa de variáveis de projeto e a redução da não linearidade do problema de otimização, além de permitir um controle mais local da modificação do contorno.

Neste quadro, sobreveio o conceito de elementos de projeto (IMAM, 1982; HAFTKA e GRANDHI, 1986), no qual a malha é subdividida em macro elementos como ilustrado na Figura 11. O reposicionamento dos nós durante a otimização é parametrizado, obtido por interpolação dentro do macroelemento, que é circundado de curvas de Bezier e B-Splines.

Figura 11 – Macroelemento e elemento de projeto.



Fonte: BRAIBANT e FLEURY, 1984.

A utilização da parametrização da geometria utilizando segmentos e arcos de círculos também foi empregada, em que se faz necessário restrições de igualdade para satisfazer requisitos geométricos. Com isso variáveis de projeto se tornam dependentes, e restrições de igualdade não lineares, tornando impossível a aplicação de algoritmos de programação sequencial convexa (ZHANG et al., 1995).

A utilização de NURBS para parametrização do contorno também têm sido empregada (SILVA e BITTENCOURT, 2007), em que a utilização dos pontos de controle do contorno de

uma superfície são tomados como variáveis de projeto. A atualização da malha neste caso é feita através da solução de um problema auxiliar de elasticidade. Uma abordagem para atualizar a malha em problemas axissimétricos utilizando superfícies NURBS também foi proposta (LINN *et al.*, 2014). Neste caso os nós da malha são atualizados pelo movimento da superfície no domínio que resulta do movimento dos pontos de controle do contorno.

A abordagem proposta neste trabalho é semelhante à de Linn *et al.* (2014), diferindo em dois aspectos. O primeiro, na abordagem de Linn *et al.* os pontos de controle são atualizados no domínio por uma interpolação linear, enquanto nesta proposta essa atualização segue uma regra mais geral com comportamento não linear. O segundo aspecto reside em que na abordagem proposta neste trabalho, a atualização do domínio segue uma regra que leva em conta a máxima modificação do contorno que depende da qualidade da malha.

Os resultados obtidos por elementos finitos são grandemente afetados pela distorção da malha. A maneira como a malha é atualizada para grandes modificações do contorno durante a otimização de forma causam excessiva distorção em abordagens Lagrangeanas o que requer controle de distorção da malha durante a otimização (SALAGAME e BELEGUNDU, 1994). Além disso a qualidade da análise de sensibilidade bem como a convergência para a solução ótima também é afetada pela qualidade da malha, (HOU e SHEEN, 1988; CHOI e CHANG, 1994; SILVA e BITTENCOURT, 2007). O remalhamento efetuado durante as iterações de otimização, tem sido tomado como solução para assegurar a qualidade do resultado da análise por elementos finitos (BRAIBANT e MORELLE, 1990), (SALAGAME e BELEGUNDU, 1994). Entretanto o remalhamento não é consistente, (SCHLEUPEN *et al.*, 2000; WILKE *et al.*, 2013) e deve ser evitado (CHOI e KIM, 2005).

Como alternativa a utilização da descrição de movimento Lagrangeana em problemas de otimização de forma, a descrição Euleriana também tem sido empregada. Uma das principais vantagens deste método é que o campo de velocidades não precisa ser computado no domínio, apenas na interface (NAJAFIA, *et al.*, 2015). Entretanto a maneira como os elementos que cruzam o contorno da forma são abordados, pode resultar em tensões inaccuradas no contorno (GARCÍA-RUIZ e STEVEN, 1999). Utilizando esta abordagem, Wang e Zhang, (2013) propõem um método para correção da rigidez dos elementos que cruzam o contorno para computar a sensibilidade das tensões. Najafia, *et al.* (2015), apresentam uma abordagem de otimização de forma empregando malha fixa utilizando elementos finitos com interface enriquecida generalizada.

Ainda uma outra abordagem de otimização de forma baseada em análise de elementos finitos isogeométricos tem sido utilizada (WANG *et al.*, 2018). Na formulação isogeométrica

de elementos finitos proposta por HUGHES *et al.* (2005), o domínio do problema geométrico e as funções de base para formulação do método de análise são representados por funções NURBS. A principal característica citada pelo autor é que geometria é representada de maneira exata, não importa quão grosseira seja a malha. O refino da malha é obtido de maneira simples a partir da malha inicial.

A abordagem de otimização de forma utilizando a formulação isogeométrica tem sido desenvolvida, e tem mostrado algumas vantagens com relação à formulação tradicional de elementos finitos (WANG *et al.*, 2018). Em otimização de forma isogeométrica os pontos de controle do contorno são normalmente tomados como variáveis de projeto (HASSANI *et al.*, 2011), (WANG *et al.*, 2017). A utilização dos pesos associados aos pontos de controle como variáveis de projeto pode tornar a análise de sensibilidade mais complexa, embora isso possa dar maior flexibilidade a forma e aumentar o espaço de projeto (WALL *et al.*, 2008). Qian (2010) apresentou exemplos de otimização de forma isogeométrica em problemas de elasticidade plana, empregando sensibilidade analítica em que utilizou os pontos de controle e pesos como variáveis de projeto.

A abordagem proposta neste trabalho tem aspectos que estão relacionados com as características da abordagem de otimização de forma isogeométrica. A parametrização da geometria por superfícies NURBS proposta neste trabalho, é utilizada para obter a sensibilidade da forma em todo o domínio do problema. Os pontos de controle que não tem influência sobre a forma, normalmente denotados como pontos de controle do domínio, obedecem a uma regra de parametrização que objetiva manter a alta qualidade da discretização de elementos finitos, permitindo grandes modificações do contorno. Analogamente em otimização isogeométrica, grandes modificações do contorno necessitam de uma adequada atualização dos pontos de controle do domínio (WANG *et al.*, 2018). Nesse sentido, há uma certa semelhança com a abordagem proposta. A qualidade da parametrização de domínio afeta a qualidade da análise isogeométrica (CHOI e CHO, 2015), assim como, a qualidade da parametrização do domínio na abordagem proposta afeta a qualidade da malha, e por conseguinte a qualidade da análise de elementos finitos. Entretanto a diferença reside em que a boa qualidade da parametrização para otimização isogeométrica está associada ao Jacobiano da transformação entre o domínio paramétrico e o domínio físico. Na abordagem proposta, a boa qualidade da parametrização está associada ao seu efeito sobre o Jacobiano da malha de elementos finitos. Os detalhes da abordagem proposta quanto a maneira como a malha de elementos finitos é atualizada é descrita detalhadamente na seção 5.7.2.

#### 4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste trabalho o problema de otimização de forma consiste em encontrar a forma ótima do contorno de um componente mecânico, objetivando a redução de massa, sujeito a restrições não lineares,

$$\begin{aligned}
 \min W(\mathbf{a}) &= \rho \psi(\mathbf{a}) \\
 g_j(\mathbf{a}) &= 0, \quad j = 1, m_e \\
 g_j(\mathbf{a}) &\geq 0, \quad j = m_e + 1, m_T \\
 \mathbf{a}_l &\leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a}_u
 \end{aligned} \tag{47}$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material,  $\psi$  denota o volume,  $\mathbf{a}$  é o vetor das variáveis de projeto,  $g_j(\mathbf{a})$  é a  $j$ -ésima restrição,  $m_e$  é o número de restrições de igualdade,  $m_T$  é o número total de restrições e  $\mathbf{a}_l$  e  $\mathbf{a}_u$  são os limites inferior e superior das variáveis de projeto respectivamente. São utilizadas, neste trabalho, restrições de tensão e geométricas.

O primeiro passo para realizar a otimização de forma é proceder a parametrização da geometria e a discretização do problema para análise de elementos finitos.

Uma vez que o método de otimização é estabelecido, é necessário resolver os gradientes da função objetivo  $W(\mathbf{a})$  e das restrições  $g_j(\mathbf{a})$  com relação ao vetor de variáveis de projeto  $\mathbf{a}$ . O cálculo destes gradientes é conhecido como análise de sensibilidade. Ao longo deste trabalho a análise de sensibilidade é efetuada analiticamente.

#### 4.2 PARAMETRIZAÇÃO DO DOMÍNIO POR SUPERFÍCIES NURBS

A geometria do problema a ser otimizado pode ser representada por uma superfície NURBS, em que a coordenada no sistema físico de qualquer ponto sobre a superfície é obtida com uma função das coordenadas paramétricas  $u$  e  $v$  da superfície.

A partir da geração da malha de elementos finitos sobre a superfície NURBS têm-se as coordenadas  $\mathbb{R}^3$  no sistema cartesiano  $(x, y, z)$  dos nós. No entanto busca-se conhecer as coordenadas paramétricas  $(u, v)_k$  no  $\mathbb{R}^2$  do nó  $k$  pertencente à superfície que correspondam às suas coordenadas nodais  $(x, y, z)_k$ . Desta forma a seguinte equação deve ser satisfeita,

$$\mathbf{f}(u_k, v_k) = \mathbf{f}_k = \begin{Bmatrix} S(u_k, v_k)_x \\ S(u_k, v_k)_y \\ S(u_k, v_k)_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{48}$$

onde, de acordo com a equação (6),

$$S(u_k, v_k)_x = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u_k) N_j^q(v_k) w_{ij} P_{ij}^x}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u_k) N_j^q(v_k) w_{ij}} \quad (49)$$

e  $\mathbf{P}^x$  é a matriz de coordenadas  $x$  dos pontos de controle, da mesma forma para  $S(u_k, v_k)_y$  e  $S(u_k, v_k)_z$ . Buscando resolver (48) pelo método de Newton-Raphson, desenvolve-se aqui uma extensão da metodologia aplicada por Augusto (2012), para um problema bidimensional, ou Silva e Bittencourt (2007) para um problema unidimensional. Tomando-se a aproximação de  $f(u_k, v_k)$  de primeira ordem, por série de Taylor, para um dado ponto  $\{u_k^* \ v_k^*\}^T$  e denotando  $\mathbf{f}(u_k^*, v_k^*) = \mathbf{f}_k^*$ , obtém-se,

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k^* + \nabla \mathbf{f}_k^* \begin{bmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{bmatrix}_k = \mathbf{0}. \quad (50)$$

Para computar o gradiente presente na equação (50), é necessário computar a primeira derivada da superfície NURBS descrita na equação (49) com relação às coordenadas paramétricas  $u$  e  $v$ . Os passos para obter estas derivadas estão descritos no APÊNDICE B. As derivadas primeiras  $\partial S / \partial u$  e  $\partial S / \partial v$  são, então, expressadas por

$$\frac{\partial}{\partial u} S(u, v) = S_{,u} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (N_{i,u}^p(u) N_j^q(v) w_{ij} \{P_{ij} - [\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m R_{\hat{i}\hat{j}} P_{\hat{i}\hat{j}}]\})}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}} \quad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} S(u, v) = S_{,v} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (N_i^p(u) N_{j,v}^q(v) w_{ij} \{P_{ij} - [\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m R_{\hat{i}\hat{j}} P_{\hat{i}\hat{j}}]\})}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}$$

onde  $N_{i,u}^p$  e  $N_{j,v}^q$ , representam as derivadas parciais das funções de base na direção  $u$  e  $v$   $\partial[N_i^p(u)]/\partial u$  e  $\partial[N_j^q(v)]/\partial v$  respectivamente que são mostradas no APÊNDICE B, e  $R_{\hat{i}\hat{j}}$  é a base racional<sup>[3]</sup> mostrada na equação (8), dada por,

$$R_{\hat{i}\hat{j}} = \frac{N_{\hat{i}}^p(u) N_{\hat{j}}^q(v) w_{\hat{i}\hat{j}}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}. \quad (52)$$

Denotando-se  $S(u_k, v_k)$  por  $S^k$ , o gradiente da função  $\mathbf{f}_k$ , pode ser representado por,

$$\nabla \mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} S_{x,u}^k & S_{x,v}^k \\ S_{y,u}^k & S_{y,v}^k \\ S_{z,u}^k & S_{z,v}^k \end{bmatrix}. \quad (53)$$

<sup>3</sup> A notação  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  neste caso é utilizada para distingui-los dos índices  $i$  e  $j$  presentes na equação (51).

Pré multiplicando a equação (53) por  $(\nabla \mathbf{f}_k^*)^T$ , tem-se

$$(\nabla \mathbf{f}_k^*)^T \mathbf{f}_k^* + (\nabla \mathbf{f}_k^*)^T \nabla \mathbf{f}_k^* \begin{bmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{bmatrix}_k = \mathbf{0}. \quad (54)$$

Com isso, a equação (54) se reduz a um sistema de dimensão  $2 \times 2$  que, na forma recursiva retorna,

$$\begin{Bmatrix} u_k^{\ell+1} \\ v_k^{\ell+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_k^{\ell} \\ v_k^{\ell} \end{Bmatrix} - [(\nabla \mathbf{f}_k^{\ell})^T \nabla \mathbf{f}_k^{\ell}]^{-1} \cdot (\nabla \mathbf{f}_k^{\ell})^T \mathbf{f}_k^{\ell} \quad (55)$$

até que

$$\begin{bmatrix} u^{\ell+1} - u^{\ell} \\ v^{\ell+1} - v^{\ell} \end{bmatrix}_k \leq \epsilon. \quad (56)$$

De modo geral, para uma geometria complexa, é possível que a equação (55) não ofereça unicidade de solução, porém não satisfaria a equação (48). Neste caso para resolver o problema iterativo em (55) deve-se utilizar uma estratégia de busca no domínio de  $u$  e  $v$ , de modo que a condição em (48) seja satisfeita simultaneamente para se alcançar a convergência.

Cabe ressaltar que este procedimento é feito uma única vez considerando que a topologia da malha não é alterada ao longo do processo de otimização.

### 4.3 FUNÇÕES DO PROBLEMA DISCRETIZADO E RESTRIÇÕES

No contexto de elementos finitos, uma versão normalizada da função objetivo definida na equação (47)

$$W(\mathbf{a}) = \frac{1}{M_0} \rho \sum_{e=1}^{n_e} \int t |J|_e d\xi d\eta \quad (57)$$

onde  $M_0$  é a massa inicial,  $t$  é a espessura do elemento,  $|J|_e$  é o Jacobiano do enésimo elemento, e  $n_e$  é o número total de elementos.

As abordagens de restrições de tensão podem ser adotadas sobre um critério local, global ou em clusters (DUYSINX e SIGMUND, 1998; HOLMBERG *et al.*, 2013). A abordagem local consiste em restringir cada tensão em cada ponto de avaliação, entretanto, isso implica em um grande número de restrições, resultando em alto custo computacional (DUYSINX e SIGMUND, 1998). Por outro lado, a abordagem global, em que uma única restrição de tensão

é aplicada sobre o modelo, torna o problema mais eficiente, mas não controla adequadamente o comportamento das tensões locais (LE *et al.*, 2010). A norma  $\mathcal{L}^p$  na aplicação de um critério global de restrição de tensão têm sido utilizada com objetivo de aproximar o valor da tensão máxima no domínio, entretanto algumas dificuldades têm sido destacadas (DUYSINX e SIGMUND, 1998). Para  $p = 1$  as tensões são subestimadas, enquanto  $p > 1$  pode exceder o valor da tensão máxima. Os autores Duysinx e Sigmund (1998), citam a dificuldade de encontrar uma relação matemática que relacione quantitativamente o valor de  $p$  com a quantidade de pontos avaliados e o valor máximo das tensões. Assim, a norma  $\mathcal{L}^p$  modificada sobre um critério global de tensões tem sido aplicada por vários pesquisadores (LINS, 2009). Contudo, dificuldades para satisfazer rigorosamente a restrição de tensão tem sido relatadas.

Uma abordagem entre o critério global e local foi utilizada por Le *et al.* (2010), na qual a norma  $\mathcal{L}^p$  modificada é aplicada em regiões pré-selecionadas no domínio, também chamadas de clusters físicos. Holmberg *et al.* (2013) sugeriram o uso de clusters lógicos, isto é organizados pela magnitude das tensões e não por uma dada vizinhança espacial. Quando os clusters lógicos são organizados com valores na mesma ordem de grandeza, as restrições podem ser melhor satisfeitas embora Holmberg *et al.* (2013) também relatem que alguns poucos pontos de tensão excedem a tensão limite de projeto. Para que seja possível manter a mesma ordem de grandeza dos valores em um cluster durante a otimização, é necessário atualizar a cada iteração. No entanto, esta atualização modifica o problema de otimização podendo, teoricamente, provocar problemas de convergência.

Neste trabalho, é utilizada a abordagem proposta por Holmberg *et al.* (2013). Nesta estratégia, as tensões são ordenadas e agrupadas em  $n_c$  clusters lógicos, em que, para cada cluster define-se uma restrição  $g_c$

$$g_c = - \left[ \frac{1}{N_c} \sum_{k \in \Omega_c^s} \left( \frac{\sigma_k^{vM}}{\sigma_{alw}} \right)^p \right]^{1/p} + 1 \geq 0, \quad c = 1, n_c \quad (58)$$

onde  $N_c$  é o tamanho do  $c$ -ésimo conjunto  $\Omega^s$  de pontos de tensão clusterizados,  $\sigma_{alw}$  é a tensão admissível e  $\sigma_k^{vM}$  é a tensão de von Mises para o estado plano de tensão no  $k$ -ésimo nó,

$$\sigma_k^{vM} = \left\{ \frac{1}{2} [(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{11})^2 + 6(\bar{\sigma}_{23}^2 + \bar{\sigma}_{31}^2 + \bar{\sigma}_{12}^2)] \right\}_k^{1/2} \quad (59)$$

onde os componentes do tensor tensão  $\bar{\sigma}$  na equação são obtidas via suavização global L2, de acordo com a seção 3.3.2.

Neste trabalho propõe-se, ainda, uma abordagem análoga para as restrições geométricas, que é,

$$g_G = - \left[ \frac{1}{N_G} \sum_{k \in \Omega_G^g} \left( \frac{\chi_{min}}{\chi_k} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} + 1 \geq 0, \quad G = n_c + 1, m_T \quad (60)$$

onde  $g_G$  é a  $G$ -ésima restrição de coordenada e  $N_G$  é a dimensão do conjunto de coordenadas  $\Omega_G^g$ ,  $\chi_{min}$  é o valor da mínima coordenada admissível para o conjunto de pontos  $\Omega_G^g$ ,  $\chi_k$  é a coordenada nodal da posição paramétrica que pertence ao conjunto  $\Omega_G^g$  e  $m_T$  é o número total de restrições.

Os clusters podem ser atualizados ou mantidos constantes durante as iterações de otimização. Para  $n_c > 1$ , atualizar os clusters pode ser favorável para satisfação de restrições (HOLMBERG *et al.*, 2013), no entanto, isso não é rigorosamente consistente, pois altera o problema de otimização matemática e pode levar a dificuldades de convergência, embora essa dificuldade não tenha sido identificada neste trabalho.



## 5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A análise de sensibilidade refere-se às relações entre as variáveis de projeto e as respostas da estrutura que são determinadas pelas leis da mecânica (HAUG *et al.*, 1986). Em outras palavras, a análise de sensibilidade consiste na obtenção das derivadas, isto é, a taxa de variação de resposta da estrutura com uma perturbação infinitesimal na variável de projeto.

A análise de sensibilidade pode ser contínua, onde as derivadas são calculadas antes da discretização do problema ou discreta, onde as derivadas são calculadas após a discretização (CHOI e KIM, 2005). Neste trabalho a abordagem de sensibilidade discreta é utilizada.

Num problema linear o sistema de equações global que representa o equilíbrio é dado pela equação (20),

$$KU = R$$

e a sensibilidade da resposta estrutural com relação a uma variável de projeto  $a_z$ , pode ser decomposta pela regra da cadeia,

$$K \frac{\partial U}{\partial a_z} = \frac{\partial R}{\partial a_z} - \frac{\partial K}{\partial a_z} U. \quad (61)$$

Quando as derivadas no lado direito da equação (61) são obtidas analiticamente, então a sensibilidade de deslocamentos é classificada como analítica, se obtida por diferenciação numérica, então esta abordagem é denominada semi-analítica (CHOI e KIM, 2005). Alguns fatores podem afetar o cômputo das sensibilidades. Os principais fatores são o método de diferenciação, a qualidade da malha, o campo de velocidades, em que estes dois últimos podem estar implicitamente relacionados.

Em problemas de otimização de forma, o uso de sensibilidade semi-analítica dos deslocamentos pode ocasionar grandes erros devido à aproximação da derivada da rigidez da estrutura por diferenças finitas, principalmente na presença de rotações rígidas (BECKERS, 1991; BARTHELEMY e HAFTKA, 1990). Uma maneira de resolver isso seria abandonar o método de diferenças finitas e utilizar a sensibilidade analítica, que retornaria diretamente uma sensibilidade mais acurada (OLHOFF *et al.*, 1993).

A sensibilidade obtida por diferenças finitas está sujeita a erros de truncamento e de condicionamento, que dependem do método de diferenças finitas abordado, da magnitude da perturbação e da precisão da máquina (BARTHELEMY e HAFTKA, 1990). Neste trabalho adotou-se a abordagem analítica, a fim de dispensar a preocupação com erros desta natureza.

Haftka e Adelman (1989) fazem uma revisão dos principais métodos de análise de sensibilidade desenvolvidos até meados de 1989, onde também abordam a acurácia e custo computacional associados. Em Olhoff *et al.* (1993) um método para eliminação destes erros na abordagem semi-analítica foi proposto, fornecendo um método de diferenciação numérica “exata” (dentro de um limite de erro) que pode ser aplicado em problemas envolvendo elementos de barra, viga, planos, cascas e placas. Embora esta abordagem elimine rigorosamente o problema de acurácia (KEULEN *et al.*, 2005), pode se tornar dificultoso para estruturas mais complexas e de respostas não lineares (KELLIHER e CAMPBELL, 2013). A análise de sensibilidade utilizando variáveis complexas para perturbação da rigidez na abordagem semi-analítica também tem sido empregada (ANDERSON *et al.*, 2001; JIN *et al.*, 2010 apud KELLIHER e CAMPBELL, 2013). Esta abordagem pode requerer um custo computacional elevado devido à necessidade de declarar um grande número de variáveis complexas. Entretanto, é possível realizar todos os cálculos envolvendo variáveis complexas no nível do elemento, tornando o custo computacional baixo (HAVEROTH *et al.*, 2015). Kuci *et al.* (2017) mostrou através de exemplos de elasticidade 2d e 3d que a sensibilidade analítica pode ser expressa pelas derivadas de Lie, onde compara com a sensibilidade obtida por diferenciação numérica.

A qualidade da análise de sensibilidade em problemas de otimização de forma também é afetada pelas características do campo de velocidades empregado, em que a aplicação de uma abordagem inadequada pode resultar em uma análise de sensibilidade inacurada (CHOI e CHANG, 1994).

## 5.1 SENSIBILIDADE DA FORMA

A sensibilidade da função objetivo normalizada da equação (57) com relação as variáveis de projeto são obtidas através da derivada parcial

$$W_{,a_z} = \frac{1}{M_0} \rho \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} t \frac{\partial |J|_e}{\partial a_z} d\Omega_e \quad (62)$$

onde  $\partial |J| / \partial a_z$  é a sensibilidade do Jacobiano com relação as variáveis de projeto.

A sensibilidade das restrições nas equações (58) e (60) é

$$\frac{\partial g}{\partial a_z} = - \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \sum_{k \in \Omega^{[1]}} (A_k)^p \right]^{\frac{1}{p}-1} \left( \sum_{k \in \Omega^{[1]}} A_k^{p-1} B_k \right) \quad (63)$$

onde  $\Omega^{[1]}$  representa o conjunto referente a restrição, e

$$\frac{\partial g_c}{\partial a_z} \begin{cases} A_k = \frac{\sigma_k^{vM}}{\sigma_{alw}} \\ B_k = \frac{1}{\sigma_{alw}} \left[ \frac{\partial(\sigma_k^{vM})}{\partial a_z} \right] \\ \Omega^{[1]} = \Omega_c^s \end{cases}, \quad \frac{\partial g_G}{\partial a_z} \begin{cases} A_k = \frac{\chi_{min}}{\chi_k} \\ B_k = - \frac{\chi_{min}}{\chi_k^2} (V_{kz}) \\ \Omega^{[1]} = \Omega_G^g \end{cases} \cdot \quad (64)$$

O termo  $V_{kz}$  é a sensibilidade da  $k$ -ésima coordenada nodal,  $\partial\chi_k/\partial a_z$ , e é conhecida como campo de velocidades, sendo detalhada na seção 5.7. O termo  $\partial(\sigma_k^{vM})/\partial a_z$  para estado plano de tensões é obtido por diferenciação da equação (59), que produz

$$(\sigma_k^{vM})_{,a_z} = \frac{1}{2\sigma_k^{vM}} \left[ \frac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial a_z} (2\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}) + \frac{\partial\bar{\sigma}_{22}}{\partial a_z} (2\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11}) + 6 \frac{\partial\bar{\sigma}_{12}}{\partial a_z} \bar{\sigma}_{12} \right]_k, \quad (65)$$

em que  $\partial\bar{\sigma}/\partial a_z$  são as sensibilidades das componentes de tensão suavizadas, com relação às variáveis de projeto. Para estado plano de deformações o desenvolvimento é análogo.

## 5.2 SENSIBILIDADE DA RIGIDEZ

A matriz de rigidez da estrutura do problema de elementos finitos com formulação isoparamétrica, é obtida derivando a equação (21),

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{ne} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\mathcal{V} \right\}_e$$

onde,

$$d\mathcal{V} = |J| d\xi d\eta. \quad (66)$$

Quando a matriz constitutiva  $\mathbf{E}$  corresponde a um material elástico isotrópico, sendo função apenas do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson, a sensibilidade da rigidez  $\mathbf{K}$  com relação à variável de projeto  $a_z$  é desenvolvida como demonstrado em Olhoff *et al.* (1993),

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_z} = \bigwedge_{e=1}^{ne} \left\{ \int_{\mathcal{V}} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_z} \right)^T \mathbf{E} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{E} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_z} \right) \right] |\mathbf{J}| + \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \frac{\partial |\mathbf{J}|}{\partial a_z} \right\} d\xi d\eta \right\}_e. \quad (67)$$

Ainda como lembrado por Olhoff *et al.* (1993), se a integração for feita por quadratura de Gauss, então erros serão introduzidos, pois este método é capaz de integrar exatamente funções polinomiais, enquanto que para malhas não estruturadas a natureza do problema resulta em funções racionais. Entretanto, esta classe de erros não pertence à natureza do tipo de abordagem da diferenciação e sim do método de integração.

### 5.3 SENSIBILIDADE DA MATRIZ DE DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTO

Em problemas de elasticidade 2D a sensibilidade da matriz  $\mathbf{B}$  para o problema de elementos finitos com relação às variáveis de forma é (WANG *et al.* 1985).

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_z} = \frac{\partial}{\partial a_z} ([\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \dots \ \mathbf{B}_n]) \quad (68)$$

com  $\mathbf{B}_i$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} h_{i,x} & 0 \\ 0 & h_{i,y} \\ h_{i,y} & h_{i,x} \end{bmatrix} \quad (69)$$

onde  $h_{i,x}$  e  $h_{i,y}$  são as derivadas das funções de forma obtidas de acordo com a seção 3.1.2. Para resolver a equação (68), é necessário obter as derivadas dos termos da matriz  $\mathbf{B}$ , através da sensibilidade da equação (31), que resulta em,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_z} \begin{Bmatrix} h_{i,x} \\ h_{i,y} \end{Bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial a_z} \left( [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} h_{i,\xi} \\ h_{i,\eta} \end{Bmatrix} \right) = \left( -[\mathbf{J}]^{-1} \frac{\partial [\mathbf{J}]}{\partial a_z} \right) \left( [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} h_{i,\xi} \\ h_{i,\eta} \end{Bmatrix} \right) \\ &= -[\mathbf{J}]^{-1} \frac{\partial [\mathbf{J}]}{\partial a_z} \begin{Bmatrix} h_{i,x} \\ h_{i,y} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

Por fim para obter a derivada do operador Jacobiano  $\partial[\mathbf{J}]/\partial a_z$  na equação (70) é necessário derivar cada termo da matriz jacobiana dada pela equação (32), que resultam em,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_{,\xi}}{\partial a_z} &= \frac{\partial}{\partial a_z} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \sum_{i=1}^n h_{i,\xi} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial a_z} \\
\frac{\partial y_{,\xi}}{\partial a_z} &= \frac{\partial}{\partial a_z} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \sum_{i=1}^n h_{i,\xi} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial a_z} \\
\frac{\partial x_{,\eta}}{\partial a_z} &= \frac{\partial}{\partial a_z} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = \sum_{i=1}^n h_{i,\eta} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial a_z} \\
\frac{\partial y_{,\eta}}{\partial a_z} &= \frac{\partial}{\partial a_z} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \sum_{i=1}^n h_{i,\eta} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial a_z}.
\end{aligned} \tag{71}$$

Finalmente, a partir da equação (71) os termos

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_z}, \frac{\partial y_i}{\partial a_z} \tag{72}$$

representam a sensibilidade da coordenada do nó  $i$  do elemento com relação à variável de projeto  $a_z$ , logo podem ser substituídos pelo campo de velocidades  $V_{i,z}$  correspondente.

A sensibilidade analítica demonstrada aqui corresponde ao caso de elementos planos, em estado plano de tensões. Logo para problemas envolvendo elementos de casca, um desenvolvimento análogo deve ser utilizado.

#### 5.4 SENSIBILIDADE DO JACOBIANO

A matriz jacobiana que relaciona as derivadas no sistema de coordenadas locais com o sistema de coordenadas isoparamétricas, faz-se necessário obter a sensibilidade do seu determinante. Para um problema de elasticidade plana, da equação (30),

$$|J| = \begin{vmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{vmatrix} = x_{,\xi} y_{,\eta} - x_{,\eta} y_{,\xi} \tag{73}$$

e derivando com relação à variável de projeto  $a_z$ , resulta

$$\frac{\partial |J|}{\partial a_z} = \frac{\partial x_{,\xi}}{\partial a_z} y_{,\eta} + \frac{\partial y_{,\eta}}{\partial a_z} x_{,\xi} - \left( \frac{\partial x_{,\eta}}{\partial a_z} y_{,\xi} + \frac{\partial y_{,\xi}}{\partial a_z} x_{,\eta} \right) \tag{74}$$

onde os termos  $\partial x_{,\xi}/\partial a_z$ ,  $\partial y_{,\eta}/\partial a_z$ , ...,  $\partial y_{,\xi}/\partial a_z$ , estão demonstrados na equação (71).

## 5.5 SENSIBILIDADE DAS TENSÕES

Frequentemente, em problemas de otimização de estruturas e componentes mecânicos, as restrições estão associadas a limites de tensão. Em uma formulação de elementos finitos as tensões podem ser obtidas através da equação (36), isto é,

$$\boldsymbol{\sigma}^e(\xi, \eta) = (\mathbf{EB}\mathbf{u})^e$$

e a sensibilidade da tensão do elemento  $e$ , é obtida por,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^e}{\partial a_z} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_z} \mathbf{u}^e + \mathbf{EB} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial a_z} \quad (75)$$

onde  $\partial \mathbf{u}^e / \partial a_z$ , é extraído dos valores nodais correspondentes a partir da equação (61), e o termo  $\partial \mathbf{B} / \partial a_z$ , é obtido a partir da equação (68).

As tensões calculadas pela equação (36), fornecem um campo de tensões descontínuo entre os elementos  $e$ , por conseguinte, nos nós. Faz necessária, portanto, uma suavização de tensões a fim de obter um campo de tensões contínuo e a correspondente sensibilidade.

### 5.5.1 Sensibilidade das tensões suavizadas por média nodal simples

Do mesmo modo como é simples a suavização por média nodal, a sensibilidade da tensão é também obtida de maneira fácil, uma vez que se conheça a sensibilidade da matriz  $\mathbf{B}$  e dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ ,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_l}{\partial a_z} = \frac{1}{ne} \mathbf{E} \sum_{e=1}^{ne} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a_z} \mathbf{u}^e + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial a_z} \right) \quad (76)$$

### 5.5.2 Sensibilidade da tensão suavizada global L2

A expressão utilizada para calcular as tensões suavizadas é dada pela equação (45),

$$\mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{P}}.$$

Derivando a equação (45) com relação às variáveis de projeto, obtém-se,

$$\mathbf{M} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial a_z} = \frac{\partial \dot{\mathbf{P}}}{\partial a_z} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_z} \bar{\sigma} \quad (77)$$

onde o termo  $\partial \dot{\mathbf{P}} / \partial a_z$ , que é a sensibilidade da pseudo carga é obtido por

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{P}}}{\partial a_z} = \iint_{-1}^1 \mathbf{H}^T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial a_z} |J| + \frac{\partial |J|}{\partial a_z} \sigma \right) d\xi d\eta \quad (78)$$

e o termo  $\partial \mathbf{M} / \partial a_z$ , é a sensibilidade da massa com relação as variáveis de projeto,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_z} = \iint_{-1}^1 \mathbf{H}^T \mathbf{H} \frac{\partial |J|}{\partial a_z} d\xi d\eta. \quad (79)$$

Com isso, basta substituir a derivada do Jacobiano obtida na equação (74) para se obter a sensibilidade das tensões suavizadas.

## 5.6 CRITÉRIOS PARA O CAMPO DE VELOCIDADE

O campo de velocidade deve atender numerosos e rigorosos critérios teóricos e práticos (CHOI e KIM, 2005). Quanto aos requisitos teóricos, o campo de velocidade deve satisfazer a mesma regularidade do campo de deslocamentos e ter uma dependência linear com relação as variáveis de projeto. Um dos principais requisitos teóricos citados por Choi e Kim (2005) e Choi e Chang (1994) é que o campo de velocidades empregado deve manter a topologia da malha original. O critério de manter a topologia constante é também citado por Schleupen *et al.* (2000), caso contrário problemas como descontinuidades e mínimos locais podem surgir na função objetivo devido ao remalhamento (WILKE *et al.*, 2013). Outros requisitos práticos são que o método deve produzir uma malha de elementos finitos não distorcida, ser naturalmente associados as variáveis de projeto definidas em um modelo CAD e finalmente que seja geral e aplicável a uma ampla gama de problemas. Na abordagem proposta neste trabalho, o campo de velocidades obtido através da parametrização por NURBS objetiva atender todos estes requisitos. Nas seções mais adiante onde serão abordados sobre a formulação e comparações, estes requisitos são claramente demonstrados.

## 5.7 CAMPO DE VELOCIDADES

O campo de velocidades estabelece uma relação entre a alteração nas variáveis de projeto e a localização nodal de uma malha de elementos finitos (ZHANG e BELEGUNDU, 1992). Em outras palavras, representa a sensibilidade das coordenadas nodais com relação às variáveis de projeto, e é utilizado para computar as sensibilidades de outras grandezas associadas à forma.

O campo de velocidades no domínio pode ser calculado de várias formas. Alguns métodos encontrados na literatura são a abordagem geométrica (ZHANG e FLEURY, 1996), a abordagem física (BECKERS, 1991) e a abordagem natural (BELEGUNDU e RAJAN, 1988). Neste último, um subproblema de elasticidade é resolvido, em que, no lugar das variáveis de projeto, forças fictícias são aplicadas sobre a estrutura em um problema auxiliar de elasticidade, e o campo de deslocamentos é tomado como o campo de velocidade. Na abordagem física tal como proposto por Yao e Choi (1989) o campo de velocidades no contorno, obtido pela parametrização de curvas de Bézier, é tomado como deslocamento prescrito no contorno e, com isso, os deslocamentos desconhecidos no domínio são obtidos pela solução de um sistema linear e tomados como campo de velocidades no domínio. A abordagem dos deslocamentos prescritos no contorno também foi utilizada por Silva e Bittencourt (2007), onde a parametrização do contorno é feita por curvas NURBS. Neste caso os métodos *boundary layer* (SEONG e CHOI, 1987) e o método de deslocamentos fictícios impostos no contorno são comparados na solução de problemas de elasticidade plana e 3d. Entretanto os autores citam que o método *boundary layer* traz dificuldades com relação a grande distorção dos elementos do contorno e ressalta a necessidade de vários remalhamentos.

Na abordagem geométrica, a posição dos nós do domínio de uma malha regular definida em um elemento de projeto é parametrizada pelas variáveis de projeto que são os pontos de controle de uma curva de Bézier que descreve o contorno do elemento de projeto. Ao perturbar o contorno, a densidade da malha é mantida constante dentro do elemento de projeto (BRAIBANT e FLEURY, 1984). Estes e outros métodos são citados em um estudo sobre campo de velocidades feito por Choi e Chang (1994).

Para casos mais gerais de malhas não estruturadas, técnicas propostas por Duysinx *et al.* (1993), envolvem esquemas de suavização laplaciana, que em suma, dependem da qualidade da malha e do tamanho dos elementos. Os métodos propostos por Duysinx *et al.* (1993) foram tomados para comparação com o método aqui proposto.

O progresso do processo de otimização e da distorção da malha é sensível à qualidade do campo de velocidades empregado (ZHANG e BELEGUNDU, 1992). Para grandes modificações da forma, o método empregado para computar o campo de velocidades pode resultar em uma malha distorcida ao longo das iterações de otimização e, como consequência, levar a uma solução não ótima (HOU e SHEEN, 1988; CHOI e CHANG, 1994).

Embora um controle de distorção de malha seja recomendado para assegurar a qualidade da análise de elementos finitos (SALAGAME e BELEGUNDU, 1994), quando a malha se torna muito distorcida, um remalhamento pode ser inevitável. Entretanto em problemas de otimização baseado em gradiente isso resulta em um procedimento matematicamente inconsistente (SCHLEUPEN *et al.*, 2000). O termo gradiente é apenas inconsistente com a definição matemática estrita se o cálculo ocorreu exatamente no limiar de uma alteração na topologia de malha (WILKE *et al.*, 2013). Portanto a topologia da malha é preferencialmente mantida constante, (HSU e CHANG, 2007; CHOI e CHO, 2015). Neste contexto, ressalta-se a importância de um procedimento como o proposto neste trabalho, em que se busca a parametrização da malha de modo que permita uma grande modificação do contorno e a mínima distorção dos elementos. Sobre este aspecto a abordagem proposta neste trabalho está explicitamente relacionada com os requisitos de qualidade citados na seção 5.6, em que a topologia da malha deve ser mantida constante, (SCHLEUPEN *et al.*, 2000; CHOI e KIM, 2005), e resultar em uma malha pouco distorcida.

Ródenas *et al.* (2004) descrevem a magnitude do erro da sensibilidade devido à qualidade do campo de velocidade. Para isto, avaliam a sensibilidade do quadrado da norma de energia com relação a variável de projeto. Neste trabalho, considera-se que um campo de velocidade é “bom” se o erro citado for estável para uma sequência de malhas obtidas por refinamento *h*-adaptativo para um gerador de malhas de Delaunay. Em outras palavras, o autor estabelece um bom campo de velocidade aquele que é pouco sensível a um refino de malha, que caso contrário pode prejudicar a convergência no caso da necessidade de remalhamento. Na abordagem proposta, o conceito de um bom campo de velocidade difere de Ródenas *et al.* (2004) pois visa um objetivo diferente. Na abordagem aqui proposta, considera-se como melhor campo de velocidade aquele que permite grandes modificações do contorno com a topologia da malha constante e, portanto, consistente matematicamente e que resulta na menor distorção dos elementos.

No campo de velocidades baseado na parametrização de superfície NURBS aqui proposto, os nós do domínio são atualizados a partir da modificação da superfície, em uma abordagem Lagrangeana. A distorção da malha é governada pela maneira como o domínio da

superfície é modificado, em que isso é controlado, através do acoplamento dos pontos de controle do domínio da superfície NURBS com os pontos de controle do contorno. Isso é mostrado que não afeta a parametrização, mantendo, portanto, a consistência matemática, para o cálculo dos gradientes. Uma abordagem semelhante para o cálculo do campo de velocidades baseado em NURBS também foi proposta por Linn *et al.* (2014). Neste caso os pontos de controle do domínio são atualizados através de uma interpolação linear, com objetivo de atualizar a malha de elementos finitos. Entretanto nesse caso a atualização dos pontos de controle no domínio não leva em conta a qualidade da malha de elementos finitos.

Dependendo da parametrização da geometria, a posição dos pontos de controle do domínio em otimização de forma isogeométrica, ou a posição dos nós do domínio quando se utiliza abordagem por elementos finitos, pode não ter influência sobre a forma. Isso pode estar presente, em problemas tal como elasticidade plana ou quando o contorno da forma deve pertencer a uma superfície curvada como em Zhang *et al.* (2010) e Wang *et al.* (2016). Além disso, para problemas bidimensionais, em análise isogeométrica, a qualidade da parametrização do domínio é dada pela posição dos pontos de controle internos (XU *et al.*, 2011). A maneira como os pontos de controle do domínio é parametrizada, pode resultar em um mapeamento não bijetivo entre o domínio paramétrico e físico (CHOI e CHO, 2015). Analogamente enquanto se utiliza a formulação clássica de elementos finitos, isso significa a degeneração dos elementos.

Alguns métodos têm sido propostos para atualizar a parametrização de domínio durante as iterações otimização isogeométrica (MANH *et al.*, 2011), (CHOI e CHO, 2015), (WANG *et al.*, 2018), (WANG *et al.*, 2017). As abordagens propostas por Manh *et al.* (2011) consistem em dois métodos lineares para atualização da parametrização do domínio. Uma delas utiliza molas fictícias entre os pontos de controle, de modo que o deslocamento dos pontos de controle do contorno, irão provocar uma realocação dos pontos de controle do domínio. A segunda abordagem do autor utiliza a informação do ângulo da parametrização inicial entre duas arestas formadas por pontos de controle adjacentes. A atualização da posição dos pontos de controle do domínio a partir da modificação dos pontos de controle de contorno irão se aproximar da parametrização inicial, através da solução de um problema de mínimos quadrados. Por fim, para cada iteração do problema de otimização, um sistema linear é resolvido para a primeira ou segunda abordagem. Entretanto, embora os métodos propostos por Manh *et al.* (2011) tenham a vantagem do baixo custo computacional, este método não é considerado adequado para garantir alta qualidade da parametrização de domínio para a atualização dos pontos de controle (CHOI e CHO, 2015). Choi e Cho (2015) propuseram um método para atualizar os pontos de controle do domínio e manter a alta qualidade da malha na parametrização do domínio durante

o processo de otimização de forma. Neste caso o mapeamento bijetivo é alcançado através de um problema de minimização de um funcional de energia de Dirichlet com restrição do determinante Jacobiano no domínio positivo. Um método empregando interpolação linear para atualizar os pontos de controle do domínio a partir do movimento dos pontos de controle do contorno também foi estudado por Wang *et al.* (2017), em que o autor mostra que a dependência da parametrização de domínio em otimização isogeométrica é inconsistente para formulação contínua empregando *steepest-descent search direction*. Um outro método foi proposto por Wang *et al.* (2018), em que a otimização de forma isogeométrica é feita utilizando uma malha triangular de dois níveis. O primeiro nível de uma malha triangular grosseira, tem objetivo de manter a qualidade da parametrização e movimentar a malha através da solução de um problema auxiliar de elasticidade. Em um segundo nível, a mesma malha passa por um refinamento e aumento do grau das curvas. Como o mapeamento geométrico da malha refinada é o mesmo da malha grosseira, então a consistência da malha é garantida. A malha refinada melhora a acurácia da análise isogeométrica. Na abordagem proposta a bijeção do mapeamento é requerida apenas na etapa da parametrização da geometria, onde é necessário identificar a posição paramétrica das coordenadas nodais. Durante as iterações de otimização, o mapeamento poderá tornar-se injetivo, devido a auto intersecção da superfície. Isso contudo não significa prejuízo à qualidade da malha de elementos finitos, pois a parametrização de domínio por superfície NURBS é efetuada com objetivo de manter a qualidade da malha para grandes modificações do contorno. Na abordagem isogeométrica as restrições de ortogonalidade das curvas isoparamétricas e do determinante Jacobiano positivo (XU *et al.*, 2011; CHOI e CHO, 2015), são necessárias e devem ser garantida a cada iteração.

### 5.7.1 Campo de velocidades obtidos por suavização Laplaciana

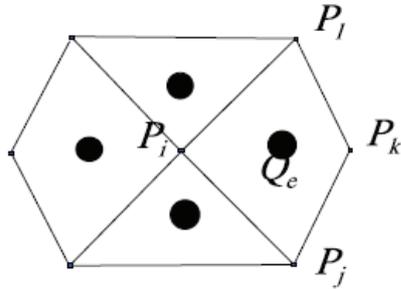
Suavização Laplaciana aplicada a malhas de elementos finitos consiste em posicionar os nós no centro geométrico de um polígono formado pelos nós vizinhos. No entanto as posições nodais suavizadas, podem ser relacionadas com o centroide  $Q_e$  dos elementos vizinhos, com fatores ponderados  $w_e$ , (DUYSINX *et al.*, 1993),

$$P_i = \frac{1}{\sum_{e=1}^{N_e^i} w_e} \sum_{e=1}^{N_e^i} w_e Q_e , \quad (80)$$

onde  $N_e^i$  é o número de elementos conectados ao nó  $i$ .

Quando  $w_e = 1$ , o esquema pode ser representado pela Figura 12, onde  $P_i$  representa a posição do nó  $i$ .

Figura 12 - Malha de elementos finitos, disposição dos nós e centroides.



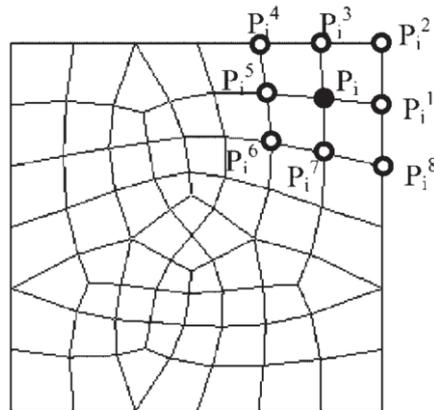
Fonte: DUYSINX et al., 1993.

No entanto, o esquema é modificado e, ao invés de pesos  $w_e$ , uma informação da malha  $k_{ij}$  é incluída,

$$P_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_i} k_{ij}} \sum_{j=1}^{N_i} k_{ij} P_i^j, \quad (81)$$

onde  $N_i$  é o número de nós adjacentes ao nó  $i$  como ilustrado na Figura 13 e  $k_{ij}$  é o termo de rigidez de uma mola introduzida entre quaisquer nós vizinhos que estejam conectados através de um elemento finito por uma aresta ou em sua diagonal.

Figura 13 - Distribuição dos nós em uma malha não estruturada



Fonte: MUÑOZ-ROJAS *et al.*, 2004.

Da equação (81) obtém-se um sistema de equações lineares, organizados pelos nós do contorno denotados pelo sub-índice  $b$  e pelos nós do domínio denotados por  $d$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{db} \\ \mathbf{K}_{bd} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_d \\ \mathbf{P}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_b \end{Bmatrix} \quad (82)$$

onde  $\mathbf{K}_{dd}$  é a matriz que relaciona a rigidez dos nós do domínio sobre os nós do domínio,  $\mathbf{K}_{db}$ , a rigidez dos nós do domínio sobre os nós do contorno,  $\mathbf{R}_b$  representa o acoplamento entre os nós do contorno e os nós do domínio, e portanto, não é de interesse. Os vetores  $\mathbf{P}_d$  e  $\mathbf{P}_b$  denotam a posição dos nós a serem determinadas no domínio e as posições dos nós conhecidas no contorno, respectivamente, logo, apenas a primeira equação do sistema (82) é de interesse. Devido a linearidade do sistema, tem-se,

$$\mathbf{K}_{dd}\mathbf{V}_d + \mathbf{K}_{db}\mathbf{V}_b = \mathbf{0}, \quad (83)$$

onde  $\mathbf{V}_d$  e  $\mathbf{V}_b$ , representam os valores do campo de velocidade no domínio e no contorno, respectivamente. Como quer se conhecer o campo de velocidades no domínio  $\mathbf{V}_d$ , resulta

$$\mathbf{V}_d = -[\mathbf{K}_{dd}]^{-1}\mathbf{K}_{db}\mathbf{V}_b. \quad (84)$$

onde o campo de velocidades no contorno  $\mathbf{V}_b$  é obtido de maneira analítica a partir da parametrização do contorno. Os métodos de suavização Laplaciana se diferenciam pelo tipo de rigidez atribuído ao elemento  $k_{ij}$  na equação (81), como descrito na Tabela 2.

Tabela 2 - Diferentes esquemas de suavização Laplaciana.

Laplaciana Pura	$k_{ij} = 1.$	Para $i$ e $j$ conectados
	$k_{ij} = 0$	Para $i$ e $j$ desconectados
Laplaciana Isoparamétrica	$k_{ij} = 1$	Para $i$ e $j$ conectados
	$k_{ij} = -0,5$	Para $i$ e $j$ desconectados
Laplaciana Potência inversa	$k_{ij} = 1/L^{rp}$	$L =$ Distância entre os nós $i$ e $j$

Fonte: (MUÑOZ-ROJAS *et al.*, 2004)

O método Laplaciana potência inversa pode ser mais adequado para malhas que possuem regiões com refinamento, fazendo com que elementos maiores possam se modificar mais do que elementos menores através do valor da potência  $rp$  (DUYSINX *et al.*, 1993).

### 5.7.2 Campo de velocidades baseado em superfícies NURBS

Este trabalho propõe o cálculo do campo de velocidades utilizando uma superfície NURBS como apresentado no capítulo 2. Este campo é analítico e contínuo sobre todo o domínio, podendo-se determinar seu valor para as coordenadas nodais de uma malha de elementos finitos correspondentes às posições parametrizadas na superfície. Este método tem mostrado ter os requisitos necessários para classificar um bom campo de velocidades. Estes requisitos estão sumarizados na seção 5.6 (HAUG *et al.*, 1986; CHOI e CHANG, 1994).

Nesta abordagem o campo de velocidades é dependente da geometria e independente da malha, e, portanto, da qualidade da malha. Além disso, a abordagem aqui aplicada em problemas de elasticidade plana, é também aplicável em problemas de superfícies curvas sem necessidade de adaptação.

Para uma malha de elementos finitos, o campo de velocidades analítico no domínio é obtido através da sensibilidade das coordenadas de um dado nó  $k$  sobre a superfície NURBS, com relação às variáveis de projeto,

$$V_{kz} = \chi_{k,z} = \frac{\partial S(u_k, v_k)}{\partial a_z} \quad (85)$$

onde  $V_{kz}$  é o campo de velocidade associado à variável de projeto  $a_z$  (a coordenada de um determinado ponto de controle do contorno),  $\chi_k$  indica genericamente as coordenadas nodais  $x_k, y_k$  e  $z_k$  e a vírgula seguida do índice  $z$  em  $(\chi_{k,z})$  indica a derivada parcial da coordenada nodal com relação a variável de projeto  $a_z$ , tal como  $(\partial \chi_k / \partial a_z)$ . As coordenadas paramétricas  $u$  e  $v$  do nó  $k$ , são previamente conhecidas da recuperação paramétrica pela equação (55).

Observe que a superfície NURBS é uma função de todo o conjunto de pontos de controle e que as coordenadas paramétricas  $u$  e  $v$  de todos os nós da malha são mantidas constantes durante uma otimização. Então campo de velocidade associado à variável de projeto  $a_z$  é dado por,

$$V_{kz} = \frac{\partial \chi_k}{\partial a_z} = \frac{\partial S(u_k, v_k)}{\partial a_z} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[ N_i^p(u_k) N_j^q(v_k) w_{ij} \frac{\partial(P_{ij})}{\partial a_z} \right]}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u_k) N_j^q(v_k) w_{ij}}, \quad (86)$$

onde  $u_k$  e  $v_k$  são as coordenadas paramétricas do nó  $k$  da malha,  $m + 1$  e  $n + 1$  são os números de pontos de controle nas direções paramétricas  $u$  e  $v$  respectivamente,  $p$  e  $q$  são os graus das curvas NURBS nas direções paramétricas de  $u$  e  $v$  respectivamente. O termo  $\partial(P_{ij})/\partial a_z$  é a sensibilidade do ponto de controle  $P_{ij}$  com relação à variável de projeto  $a_z$ .

### 5.7.2.1 Esquema desacoplado para o campo de velocidades baseado em NURBS

No método proposto aqui, o esquema desacoplado de campo de velocidade é obtido quando a variável de projeto  $a_z$  é um ponto de controle do contorno  $\bar{P}_{ij}$ , e não há influência da sua posição sobre nenhum outro ponto de controle. Neste caso, a derivada presente na equação (86) é dada por

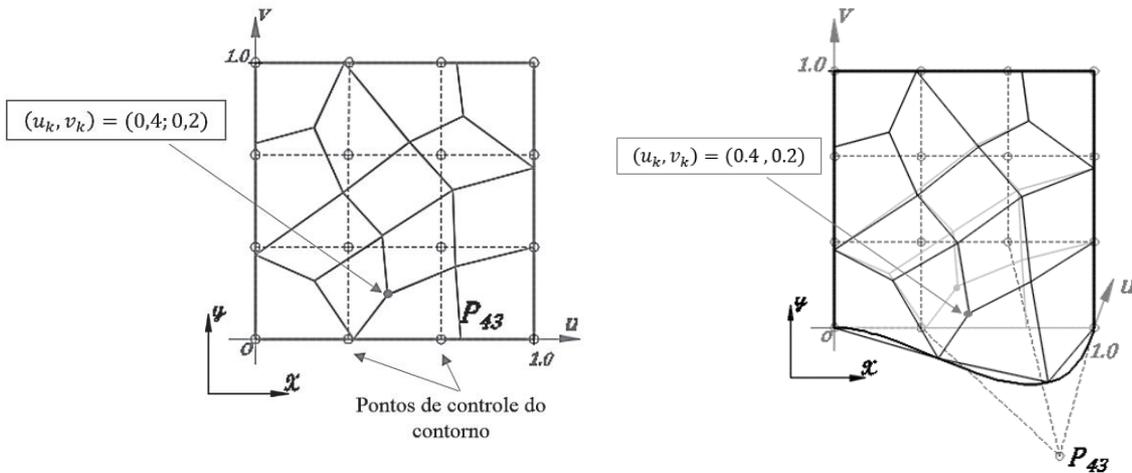
$$\frac{d(P_{ij})}{da_z} = 1, \quad \text{para } P_{ij} = \bar{P}_{ij} \quad (87)$$

e,

$$\frac{d(P_{ij})}{da_z} = 0, \quad \text{para } P_{ij} \neq \bar{P}_{ij}. \quad (88)$$

A Figura 14a ilustra um exemplo de uma rede de pontos de controle com uma malha não uniforme sobre uma superfície NURBS, onde destaca-se a posição parametrizada de um nó sobre a superfície. A Figura 14b mostra o efeito da modificação da variável de projeto sobre a coordenada  $(x, y)$  do nó com coordenada paramétrica  $(u_k, v_k)$ , enquanto todos os outros pontos de controle permanecem na posição original.

Figura 14 - Exemplo do campo de velocidades NURBS. a) Malha original b) Campo de velocidade para uma modificação da variável de projeto



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Destaca-se que o campo de velocidades pode ser obtido em qualquer lugar da superfície, seja no contorno ou domínio. Para o resultado em um nó de uma malha de elementos finitos, basta conhecer sua coordenada paramétrica  $u$  e  $v$ , e substituir na equação (86).

#### 5.7.2.2 Esquema acoplado para o campo de velocidades baseado em NURBS

Uma outra abordagem proposta neste trabalho é considerar um acoplamento de movimento, em que as posições dos pontos de controle do domínio, são dependentes daqueles pontos de controle do contorno definidos como variáveis de projeto. Essas posições são afetadas pela discretização empregada, em que a influência da qualidade da discretização se dá por uma matriz  $\gamma$ , que será abordada na seção 5.7.2.3. Neste momento, basta considerar que,

$$\frac{dP_{ij}^d}{da_z} = F(\gamma) \neq 0 \quad (89)$$

onde o índice  $d$  faz referência a um ponto de controle do domínio.  $F$  é uma função de influência do movimento que depende da matriz  $\gamma$ . Cada elemento  $\gamma_{ij}$  representa<sup>[4]</sup> a influência de um ponto de controle do contorno  $\hat{P}_j$  sobre um ponto de controle  $\hat{P}_i$ . Quando

<sup>[4]</sup> A notação  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  representam a posição dos pontos de controle em um vetor organizado a partir de uma matriz de pontos de controle. Como estas posições são organizadas, é explicado em seguida.

$\hat{P}_j$  é um ponto de controle do domínio, então o elemento  $\gamma_{lj}$  da matriz  $\boldsymbol{\gamma}$  é nulo, pois os pontos do domínio não exercem influência sobre os demais. Ressalta-se que quando  $F = 0$ , o esquema desacoplado do campo de velocidade é recuperado e nenhuma informação da qualidade da malha é atribuída ao campo de velocidades.

Para descrever esta abordagem, consideramos uma parametrização de geometria na qual todos os pontos de controle do contorno são tomados como variáveis de projeto. Para maior clareza considera-se a matriz dos pontos de controle  $\mathbf{P}$  contendo os pontos  $P_{ij}$  organizados em um vetor  $\hat{\mathbf{P}}$  com componentes  $\hat{P}_l$  onde  $l = i(m + 1) + 1 + j$ , com  $i \in [0, n]$  e  $j \in [0, m]$ . Para uma dada variável de projeto  $a_z$  a sensibilidade do  $l$ -ésimo ponto de controle é dada por,

$$\sum_{c=1}^Q \gamma_{lc} \cdot \alpha_c = \frac{d\hat{P}_l}{da_z} \quad (90)$$

$$Q = (m + 1) \cdot (n + 1)$$

onde  $\boldsymbol{\gamma}$  é a matriz que contém fatores de influência, em que cada componente  $\gamma_{lc}$  é a influência de um ponto de controle  $\hat{P}_c$  sobre um ponto de controle  $\hat{P}_l$  e o vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  pode ser calculado a partir das informações conhecidas no contorno. O lado direito da equação (90) representa a sensibilidade dos pontos de controle com relação à variável de projeto, então é estabelecido que,

$$\frac{d\hat{P}_l}{da_z} = \begin{cases} 1, & \text{se } \hat{P}_l = a_z \\ 0, & \text{se } \hat{P}_l \in \mathbf{P}^b \\ dP_{ij}^d/da_z, & \text{se } \hat{P}_l \in \mathbf{P}^d \end{cases} \quad (91)$$

onde  $\mathbf{P}^b$  e  $\mathbf{P}^d$  representam os conjuntos de pontos de controles do contorno e do domínio respectivamente, e  $dP_{ij}^d/da_z$  são as variáveis desconhecidas. A equação (90), resulta um sistema linear de ordem  $Q$ , que pode ser agrupado da forma

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{bb} & \boldsymbol{\gamma}_{bd} \\ \boldsymbol{\gamma}_{db} & \boldsymbol{\gamma}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_b \\ \boldsymbol{\alpha}_d \end{Bmatrix} = \frac{d}{da_z} \left( \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{P}}^b \\ \hat{\mathbf{P}}^d \end{Bmatrix} \right) \quad (92)$$

onde  $\boldsymbol{\gamma}_{bb}$  são a influência dos pontos do contorno sobre os pontos do contorno,  $\boldsymbol{\gamma}_{db}$  são a influência dos pontos do contorno sobre os pontos do domínio e  $d\hat{\mathbf{P}}^b/da_z$  são as sensibilidades conhecidas no contorno e deseja-se conhecer a matriz  $d\hat{\mathbf{P}}^d/da_z$  e os coeficientes  $\boldsymbol{\alpha}_b$ . As matrizes  $\boldsymbol{\gamma}_{dd}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{bd}$  representam influência dos pontos do domínio sobre o domínio e dos pontos

do domínio sobre o contorno, respectivamente, portanto são nulos. Logo o vetor  $\alpha_d$  é arbitrário e não é de interesse. Com isso, organiza-se o sistema linear para calcular os coeficientes  $\alpha_b$  a partir dos dados conhecidos no contorno,

$$[\gamma_{bb}] \{\alpha_b\} = \frac{d\hat{P}^b}{da_z}, \quad (93)$$

que resolvido para  $\alpha_b$ , permite a determinação das derivadas da equação (89) para todos os pontos de controle do domínio,

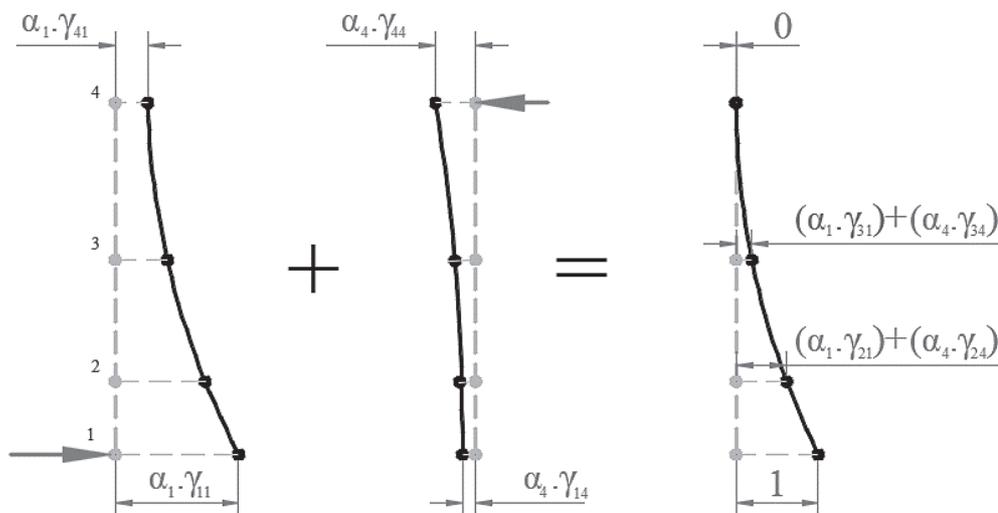
$$\frac{d\hat{P}^d}{da_z} = [\gamma_{db}] \{\alpha_b\}. \quad (94)$$

De posse das sensibilidades calculadas na equação (94), estas são substituídas na equação (86), para calcular o campo de velocidades sobre o domínio da malha de elementos finitos.

### Exemplo:

Para ilustrar a ideia dos fatores de influência nos pontos de controle do domínio considere o problema unidimensional ilustrado na Figura 15 para um conjunto de quatro pontos de controle. Neste exemplo, os pontos 1 e 4 pertencem ao contorno, assume-se que o ponto de controle 1 é a variável de projeto  $a_1$  a ser perturbada e deseja-se calcular a sensibilidade sobre os pontos de controle 2 e 3.

Figura 15 - Propagação de movimento sobre os pontos de controle do domínio



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Aplicando a equação (90) e as condições da equação (91) sobre os pontos de controle, calcula-se,

$$\sum_{c=1}^4 \gamma_{lc} \cdot \alpha_c = \frac{d\hat{P}_l}{da_z} \quad (95)$$

que resulta no sistema,

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \frac{d}{da_1} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ dP_2/da_1 \\ dP_3/da_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (96)$$

onde os termos da segunda e terceira coluna são nulos, pois relacionam os pontos do domínio com os demais. Fazendo o agrupamento como mostrado na equação (92) e a simplificação do sistema como na equação (93), temos o sistema linear reduzido,

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{14} \\ \gamma_{41} & \gamma_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (97)$$

que quando resolvido para os valores de  $\alpha$ , permite calcular a sensibilidade sobre os pontos de controle 2 e 3 devido a perturbação em  $a_1$  (ou seja,  $P_1$ ),

$$\begin{Bmatrix} \frac{dP_2}{da_1} \\ \frac{dP_3}{da_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{21} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}. \quad (98)$$

Neste exemplo demonstrou-se, o efeito de acoplamento sobre os pontos controle para um problema unidimensional. Este conceito é aplicado da mesma maneira para uma rede de pontos de controle em um domínio bidimensional.

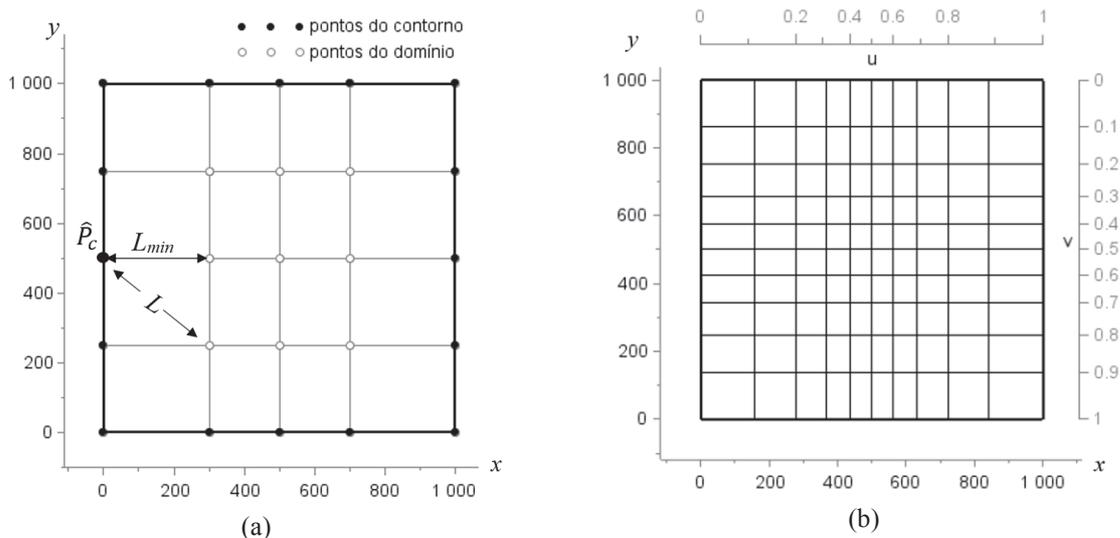
### 5.7.2.3 Matriz de acoplamento

A matriz de acoplamento  $\gamma$  representa a influência das variáveis de projeto sobre os pontos de controle do domínio influência esta que depende da qualidade da malha. A matriz  $\gamma$  pode ser estabelecida balanceando dois parâmetros reunidos no vetor  $\lambda = (\lambda_g, \lambda_r)$  cujos valores são determinados com objetivo de minimizar a distorção da malha quando as variáveis de projeto são movimentadas. Os coeficientes  $\gamma_{lc}$  da matriz presente na equação (90) significam a influência do ponto de controle  $\hat{P}_c$  sobre um ponto de controle  $\hat{P}_l$  e são calculados por

$$\gamma_{lc} = \lambda^{L/L_{min}}, \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_g, & \text{se } \hat{P}_c = a_z \\ \lambda_r, & \text{se } \hat{P}_l \neq a_z \end{cases} \quad (99)$$

onde  $L_{min}$  é a menor distância entre o ponto de controle  $\vec{P}_c$  e os demais pontos e  $L$  é a distância do ponto de controle  $\hat{P}_c$  até o ponto de controle  $\hat{P}_l$ . As distâncias  $L$  e  $L_{min}$  são propriedades do problema inicial, isto se deve à necessidade de satisfazer os requisitos teóricos descritos na seção 5.6. A fim de ilustrar e exemplificar os efeitos da matriz  $\gamma$ , considera-se ao longo desta seção, a superfície B-Spline da Figura 16 formada por curvas cúbicas nas direções paramétricas de  $u$  e  $v$ , com vetor de *knots*  $\mathbf{U} = \mathbf{V} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ . A Figura 16a ilustra a disposição dos pontos de controle no domínio físico onde, para um dado ponto  $\hat{P}_c$ , apresentam-se as distâncias  $L$  e  $L_{min}$  associadas aos pontos de controle adjacentes. Na Figura 16b pode-se verificar a disposição das linhas paramétricas nas direções de  $u$  e  $v$  como ilustrado nos eixos dispostos na parte superior e lateral direita.

Figura 16 - Superfície B-Spline. a) Disposição dos pontos de controle sobre a superfície. b) Linhas paramétricas constantes nas direções de  $u$  e  $v$  sobre o sistema físico de coordenadas.



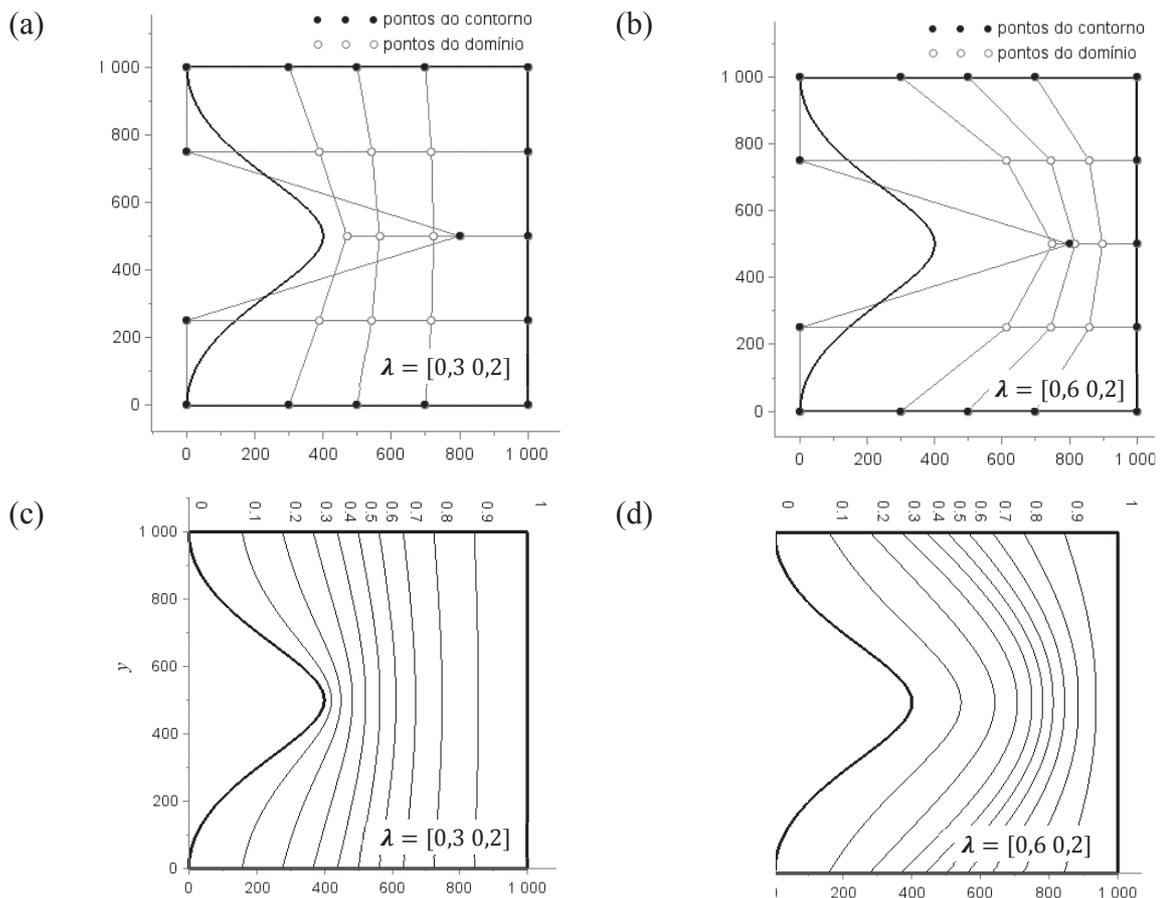
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Os parâmetros  $\lambda$  são calculados de modo que o movimento do domínio da superfície NURBS permita a máxima modificação do contorno limitada pelo nível de distorção da malha. Entretanto o contorno não sofre influência dos parâmetros  $\lambda$ , afetando apenas a maneira como o domínio da superfície se modifica. A Figura 17 ilustra o efeito sobre a superfície para um deslocamento no ponto de controle do contorno para dois vetores de  $\lambda$  diferentes. Na Figura 17a e na Figura 17b os contornos obtidos para a mesma modificação do ponto de controle do contorno são iguais, para  $\lambda$  diferentes. Entretanto a posição dos pontos de controle do domínio assume valores diferentes. Este efeito sobre o domínio da superfície pode ser verificado na Figura 17c e Figura 17d através do fluxo das linha de coordenadas paramétricas. Através deste

exemplo, destaca-se que para determinados valores de  $\lambda$ , o campo de velocidade pode ser determinado de modo a obter uma maior modificação do domínio em uma região ou outra.

O cálculo destes parâmetros deve levar em conta a capacidade da malha de se modificar, ao longo das iterações de otimização. O objetivo neste caso é determinar um valor ótimo de  $\lambda$  que permita a máxima modificação do contorno sem invalidar a qualidade da malha de elementos finitos. Neste trabalho o limite de distorção da malha é dado por um valor positivo do mínimo determinante da matriz jacobiana  $|J|^*$  avaliado em cada elemento.

Figura 17 - Modificação de um ponto de controle e o efeito sobre o domínio. a) Posição dos pontos de controle do domínio para  $\lambda = [0,3 \ 0,2]$ . b) Posição dos pontos de controle do domínio para  $\lambda = [0,6 \ 0,2]$ . c) Comportamento da modificação do domínio da superfície para  $\lambda = [0,3 \ 0,2]$ . d) Comportamento da modificação do domínio para  $\lambda = [0,6 \ 0,2]$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A máxima modificação do contorno associada a varável de projeto  $a_z$  é quantificada por  $\tau_z$  e a coordenada nodal da malha modificada é dada por,

$$\chi_{kz}^{\tau_z} = \chi_k^0 + \tau_z V(\lambda)_{kz} \quad (100)$$

onde  $\chi_k^0$  é a  $k$ -ésima coordenada nodal para a malha do problema inicial e  $V_{kz}$  é o campo de velocidades nodal, cujos valores no domínio dependem de  $\lambda$ . Com isso o mínimo Jacobiano da malha modificada pela variável de projeto  $a_z$  em uma quantidade  $\tau_z$ , é denotado por  $|J|^{*\tau_z}$ . Deste modo deseja-se computar a máxima modificação  $\tau_z$  sujeito a restrição de não degeneração dos elementos, ou seja,

$$\begin{aligned} \max (\tau_z) \\ |J|^{*\tau_z} > 0 \\ 0 \leq (\lambda_g, \lambda_r) < 1. \end{aligned} \quad (101)$$

Pode ser verificado que  $|J|^{*\tau_z}$  para elementos isoparamétricos lineares, tem uma dependência linear com  $\tau_z$ . Para elementos não lineares isso nem sempre é verdade, uma vez que a coordenada  $(\xi, \eta)^*$  nem sempre corresponde a um vértice do elemento.

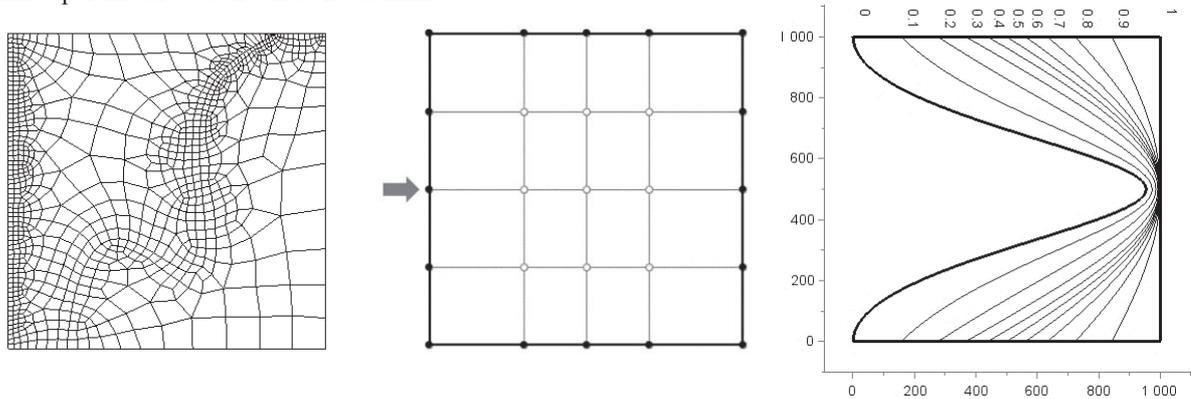
Neste trabalho o método *Grid search* (RAO, 2009) foi utilizado para resolver este problema de maximização e demonstrou ser eficaz para calcular os parâmetros  $\lambda$  que permitem a máxima modificação  $\tau_z$  do contorno.

Importante ressaltar que a abordagem acoplada não afeta o campo de velocidades no contorno. Por outro lado, os valores de  $\lambda$  determinam a maneira como o domínio contínuo da superfície NURBS se modifica com objetivo de manter a qualidade da malha ao longo das iterações de otimização devido a modificações na variável de projeto. Além disso, trata-se de uma atualização dos pontos de controle do domínio sem alterar a parametrização, e consequentemente mantendo a consistência matemática. Por outro lado, isto contrasta com alguns métodos de atualização dos pontos de controle do domínio para manter a alta qualidade de parametrização em problemas de otimização isogeométrica. Neste caso os métodos aplicados, embora melhorem a acurácia da análise isogeométrica, não são consistentes (WANG *et al.*, 2017).

Para exemplificar a solução do problema estabelecido na equação (100), toma-se a geometria modelada por uma superfície B-Spline ilustrada na Figura 16, onde uma malha irregular utilizando elementos planos quadrilaterais de 8 nós é gerada sobre a geometria e é ilustrada na Figura 18a. Fazendo-se a parametrização do problema como descrito na seção 4.2, busca-se determinar a máxima modificação  $\tau^*$  da geometria para a variável de projeto, como ilustrado na Figura 18b, tal que o  $|J|^{*\tau} > 0$  em toda a malha.

A solução da equação (100) fornece  $\lambda^* = [\lambda_g \ \lambda_r] = [0,618 \ 0,4040]$  e  $\tau^* = 1910$  que resulta na forma do contorno ilustrada na Figura 18c, onde as linhas de coordenadas paramétricas constantes são dispostas no domínio da peça.

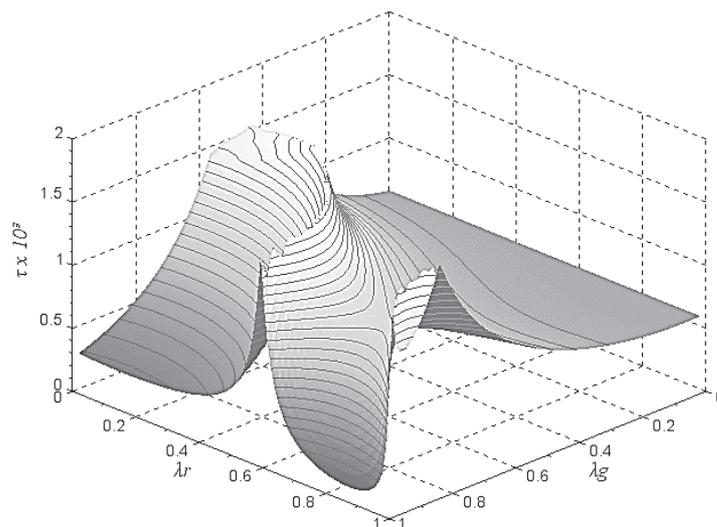
Figura 18 – Problema exemplo de maximização da modificação do contorno. a) Discretização por elementos finitos. b) Rede de pontos de controle e indicação da variável de projeto. c) Máxima modificação do contorno e linhas paramétricas constantes no domínio.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O comportamento da variável  $\tau_z$  com relação as variáveis  $\lambda$  para este exemplo possui máximos locais como mostrado na Figura 19, em que qualquer ponto  $(\tau, \lambda_g, \lambda_r)$  sobre a superfície resulta  $|J|^* = 0$  e  $|J|^* > 0$  para qualquer outro ponto abaixo da superfície.

Figura 19 - Superfície de singularidade da matriz jacobiana para toda a malha em função da máxima modificação da variável de projeto e dos parâmetros  $\lambda_g$  e  $\lambda_r$

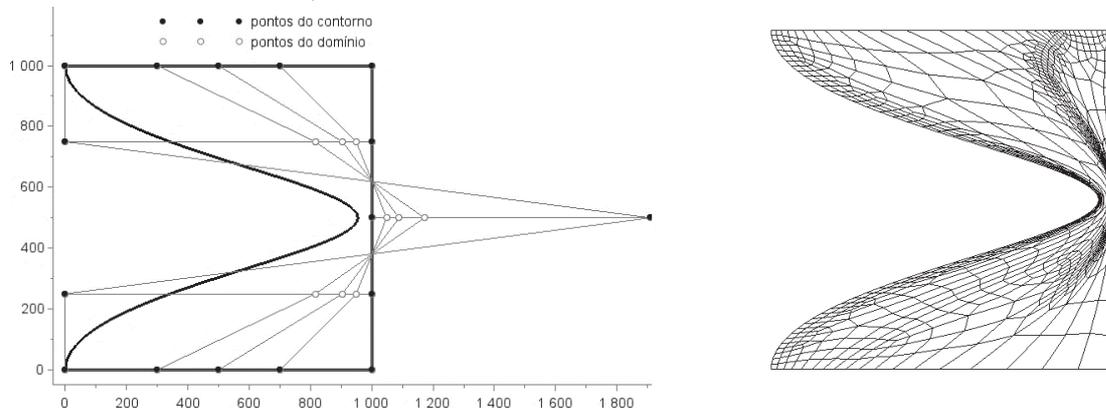


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A Figura 20a ilustra as posições dos pontos de controle do domínio modificados e a Figura 20b a malha modificada para a melhor parametrização. A malha da Figura 20b, embora com aparência bastante distorcida, satisfaz as restrições impostas no problema (100). Para

valores do  $|J|^{*}$  muito próximos de zero, pode ocorrer inacurácia na análise de sensibilidade e da análise por elementos finitos. Entretanto, a malha da Figura 20b representa um caso extremo da modificação da forma associado ao limite da variável de projeto.

Figura 20 - Disposição da modificação maximizada. a) Disposição dos pontos de controle do contorno e do domínio da forma modificada. b) Malha modificada.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Os procedimentos seguidos neste exemplo são gerais e, portanto, aplicáveis a qualquer problema de elasticidade plana. Na próxima seção, este mesmo exemplo é estendido para outros pontos de controle como variáveis de projeto. Os campos de velocidade obtidos para cada variável de projeto são comparados com os métodos de suavização laplaciana, com relação a máxima modificação da forma e distorção da malha.

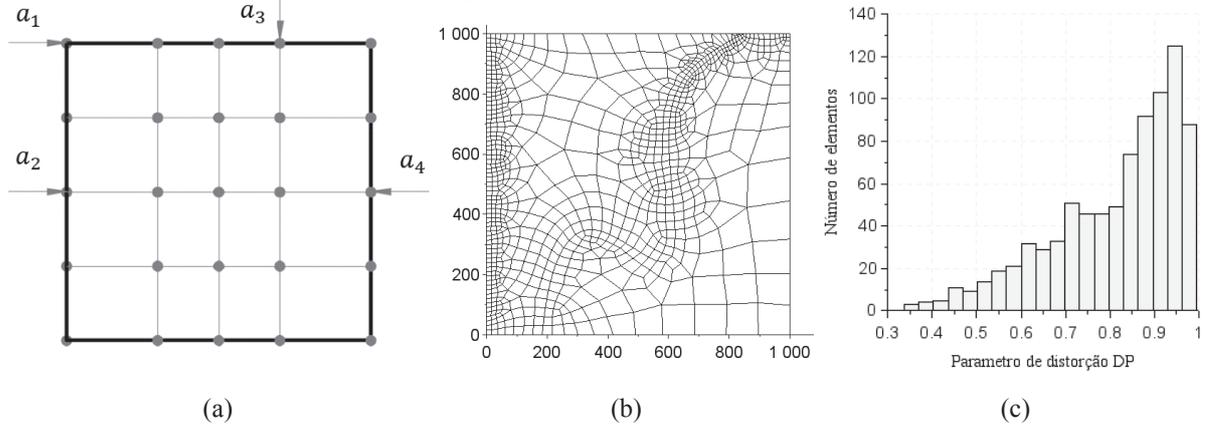
### 5.7.3 Comparação entre campos de velocidades Laplaciana e NURBS

Nesta seção, é apresentado graficamente o comportamento do campo de velocidade obtido através da parametrização por superfície NURBS, objetivando comparar visualmente com o método de suavização Laplaciana. Os métodos Laplaciano puro e potência inversa serão contrastados com o método baseado em superfície.

Uma malha irregular com elementos quadrilaterais de 8 nós foi gerada propositalmente a fim de contrastar a diferença entre um método que leva em conta a qualidade da malha, com outro método que é função apenas da geometria e da sua parametrização. A Figura 16 da seção anterior ilustra a mesma superfície B-Spline utilizada nesta seção para fazer as comparações com discretização mostrada na Figura 21b. Quatro variáveis de projeto são escolhidas dispostas como na Figura 21a com objetivo de comparar as diferentes características da malha naquelas regiões. A parametrização dos contornos para aplicação do método Laplaciano, possui exatamente a mesma parametrização da superfície B-Spline no contorno, ou seja, no contorno

$u = 1$  ( $e u = 0$ ) e quando  $v = 1$  ( $e v = 0$ ). Com isso o campo de velocidade no contorno é idêntico para todos os métodos aqui comparados.

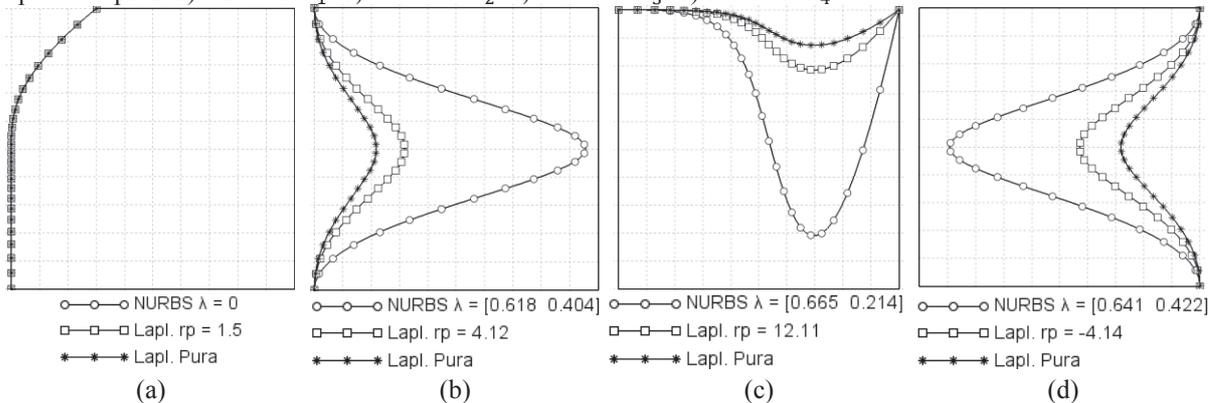
Figura 21 - Problema de malha livre para teste visual da influência dos métodos campos de velocidades. a) Parametrização da superfície. b) Malha irregular.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O campo de velocidades proposto utilizando o esquema acoplado é calculado para cada variável de projeto, como descrito na seção 5.7.2. Nos campos de velocidade calculados pelo método de suavização laplaciana potência inversa, as potências que fornecem a máxima modificação do contorno para cada variável de projeto foram utilizadas. As potências  $rp$  foram calculadas através de um subproblema de maximização análogo ao descrito na equação (101). A técnica de suavização pelo método Laplaciano puro também é comparado. A Figura 22 ilustra a modificação do contorno, para cada um dos três métodos, que causa a singularidade da matriz jacobiana, ou seja, para cada contorno, o campo de velocidade resulta  $|J|^* = 0$ .

Figura 22 - Exemplo de máxima modificação do contorno cujo campo de velocidade causa singularidade da matriz Jacobiana para uma malha irregular, utilizando os métodos baseados em NURBS, Laplaciana potência inversa e laplaciana pura. a) Variável  $a_1$ . b) Variável  $a_2$ . c) Variável  $a_3$ . d) Variável  $a_4$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

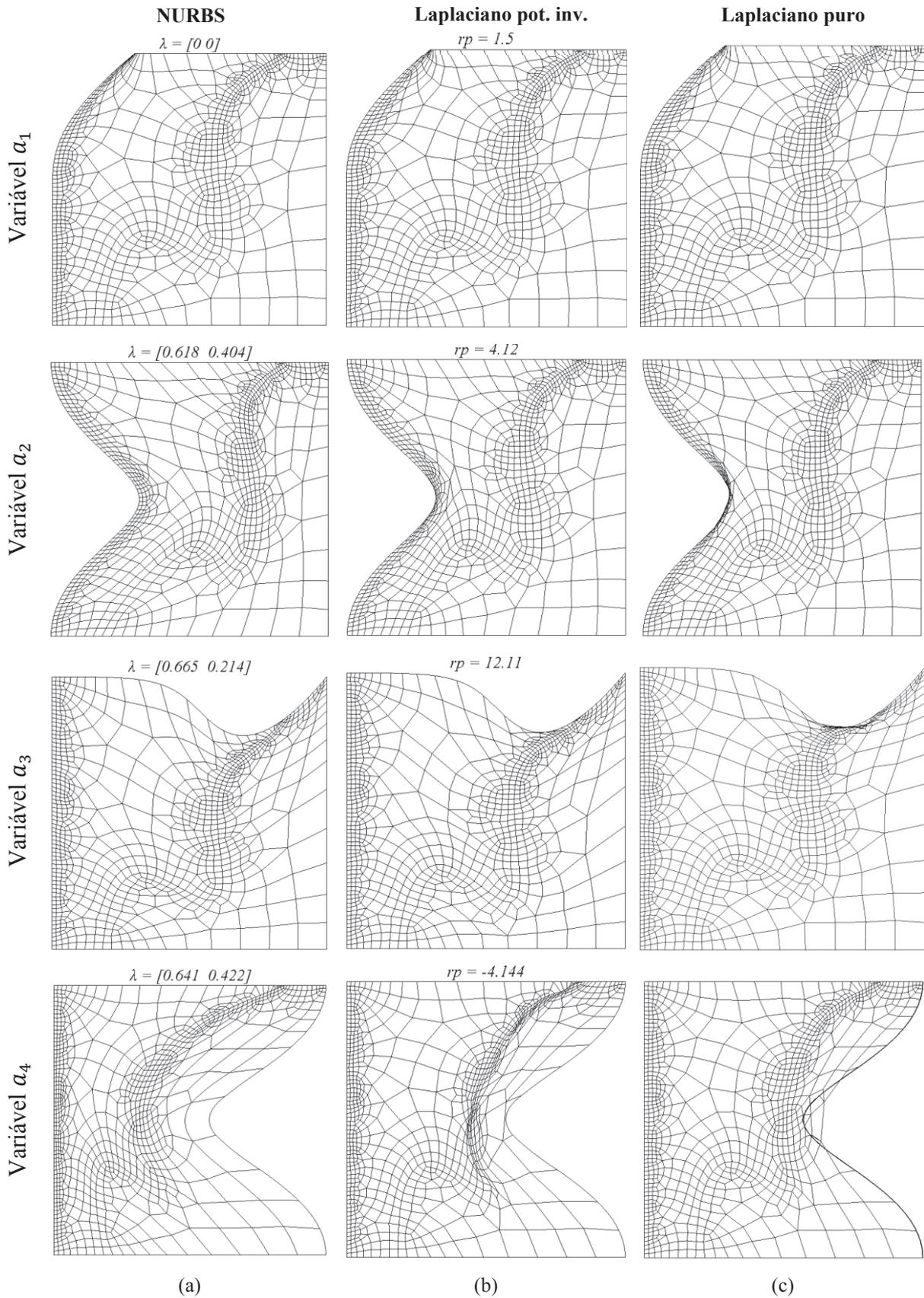
Através da Figura 22a, verifica-se que o limite de modificação do contorno é o mesmo para os três métodos. Isso se deve porque os elementos mais afetados são degenerados pelo

movimento dos nós do contorno, em que todos os métodos possuem o mesmo campo de velocidades, logo independente da abordagem de domínio todos possuem a mesma limitação.

Na Figura 23 a mesma modificação do contorno é imposta para cada método na comparação da distorção da malha, ou seja, para cada variável de projeto cada método possui o mesmo contorno. Neste caso pode-se verificar o efeito de cada método sobre a modificação da malha no domínio, em que para o método Laplaciano puro na Figura 23c resulta  $|J|^* < 0$ , para Laplaciano potência inversa na Figura 23b,  $|J|^* = 0$  e para o método proposto,  $|J|^* > 0$ . Na Figura 23a o campo de velocidade proposto resulta em malhas com aparências menos distorcidas do que os outros métodos, entretanto isto pode ser quantificado como descrito no próximo parágrafo. Na Figura 23b e Figura 23c pode ser notada a vantagem que o método Laplaciano potência inversa tem sobre Laplaciano puro em uma malha com regiões de refinamento. Isso se deve à característica do método Laplaciano potência inversa, em que o campo de velocidade pode fornecer uma maior modificação da malha em regiões com elementos maiores como descrito por Duysinx *et al.* (1993). Quando elementos quadráticos são utilizados o movimento dos nós intermediários pertencentes ao domínio são atualizados pelo deslocamento do ponto material da superfície NURBS referente aquele nó e com isso acaba curvando a aresta dos elementos no domínio. Esta característica, pode ser notada na Figura 23a para a variável de projeto  $a_4$ .

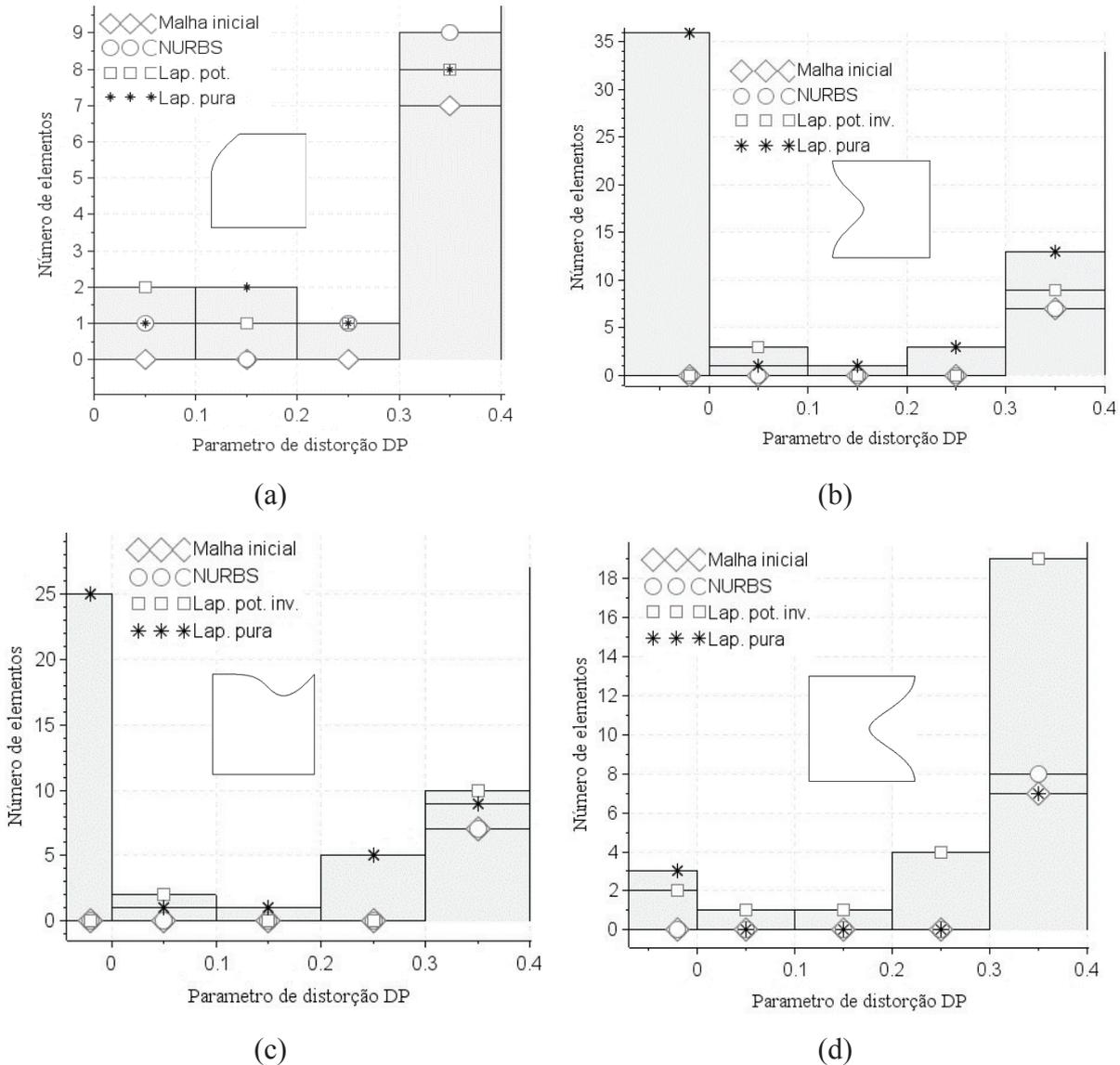
A fim de avaliar a qualidade das malhas da Figura 23, no domínio o parâmetro de distorção  $DP$  abordado na seção 3.4 é utilizado como medida de distorção. Na Figura 24 são ilustrados os histogramas da qualidade da malha, os quais são organizados de modo que, para cada variável de projeto, os histogramas de cada método estão sobrepostos juntamente com o histograma da malha inicial. Como o objetivo é comparar a baixa qualidade em alguns elementos, então apenas são mostradas as regiões dos histogramas no entorno de  $DP = 0$ . Para simplificar a comparação, toma-se um valor arbitrário de  $DP = 0,3$  como referência de mínima distorção admissível. Na Figura 24a, para a variável de projeto  $a_1$ , todos os métodos possuem um ou dois elementos abaixo de um valor mínimo, devido à dependência do campo de velocidades apenas no contorno. Da Figura 24b até a Figura 24d, para as variáveis de projeto  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  o campo de velocidade proposto resulta que, os elementos mais distorcidos possuem a mesma faixa de distorção da malha inicial, ou seja, mantêm a qualidade da malha para este caso. Por outro lado, o método de suavização laplaciana potência inversa possui elementos bastante distorcidos com  $DP < 0,3$ . O método de suavização laplaciana pura, resulta em vários elementos com jacobiano negativo.

Figura 23 - Configuração modificada aumentada, do campo de velocidades. a) Campo baseado e superfície NURBS b) Laplaciano potência inversa. c) Laplaciano puro.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

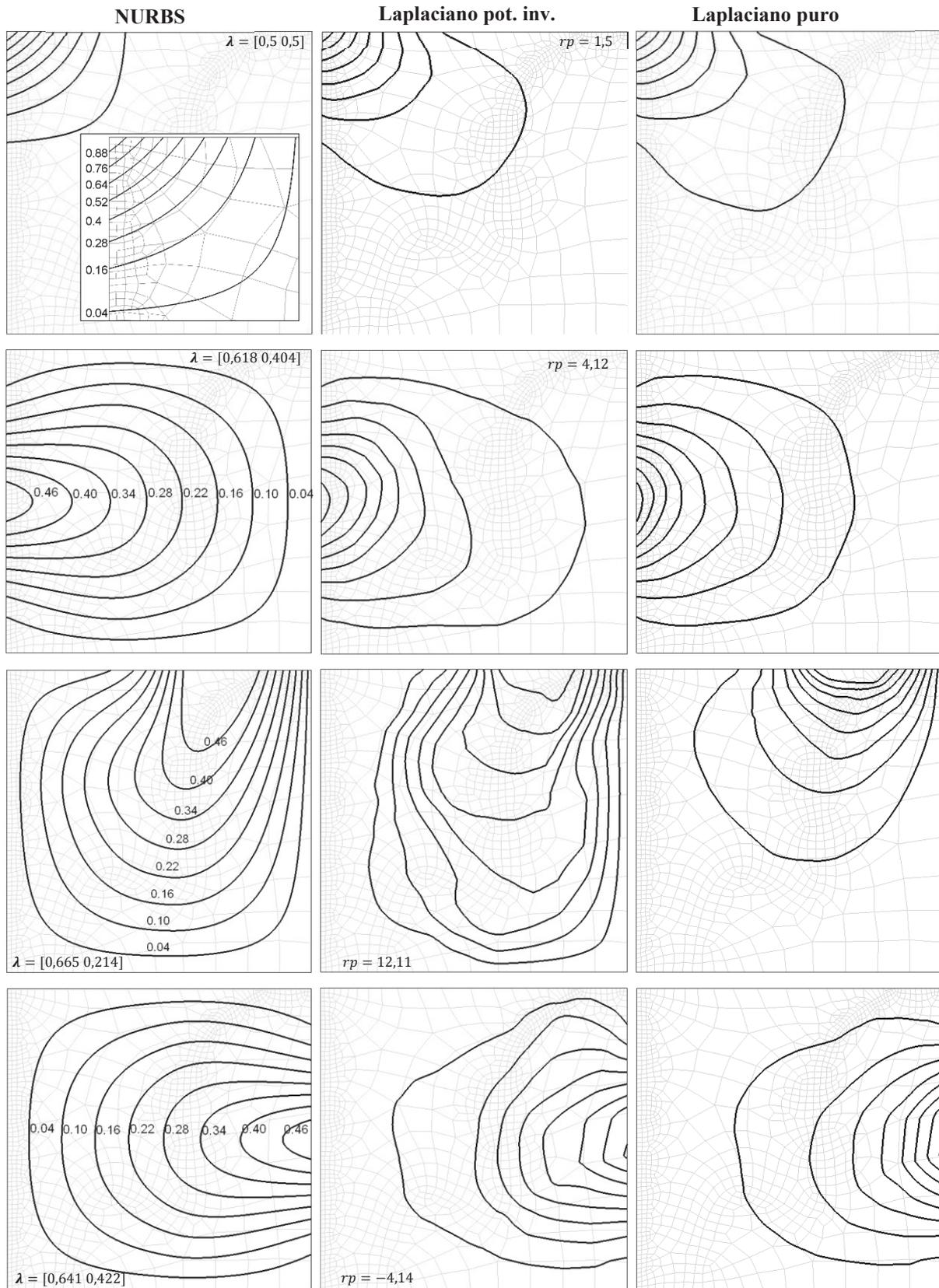
Figura 24 – Histogramas da distorção da malha devida a forma modificada, para cada método: (a) Variável de projeto  $a_1$ ; (b) Variável de projeto  $a_2$ ; (c) Variável de projeto  $a_3$ . d) Variável de projeto  $a_4$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Visualizar o campo de velocidades através de curvas de nível permite ter outras percepções. Na Figura 25 é possível notar a região de influência em cada abordagem, onde oito níveis são mostrados igualmente para cada método. A Figura 25a mostra as curvas de nível para o método acoplado baseado em NURBS e contém os valores de cada nível, esses mesmos níveis são repetidos igualmente para os outros métodos. Entretanto diferentes níveis são utilizados para diferentes variáveis de projeto. Na Figura 25a a sensibilidade baseada em superfície afeta boa parte da malha. Da mesma forma que as curvas NURBS as superfícies NURBS também têm grande flexibilidade no controle da região de abrangência, através da introdução de knots ou seus reposicionamentos, ou modificação dos pesos, entretanto isso altera a parametrização.

Figura 25 - Campo de velocidades iso-curvas: (a) Campo baseado em superfície NURBS com detalhe de ampliação na primeira variável de projeto; (b) Laplaciano potência inversa; (c) Laplaciano puro.



(a)

(b)

(c)

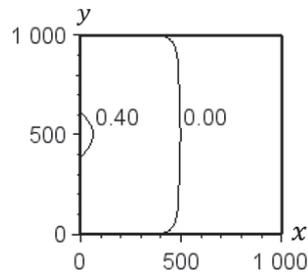
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Para não alterar a parametrização, a região de abrangência pode ser controlada, através da estratégia de determinação dos parâmetros  $\lambda$  como descrito na seção 5.7.2. Uma região de menor abrangência pode ser alcançada através do esquema desacoplado do campo de velocidades baseado em NURBS, em que  $\lambda = \mathbf{0}$ , porém isso irá limitar grandes modificações da forma, a redução desta influência sobre o domínio é exemplificada na Figura 26 e na Figura 27. Por outro lado, a região com campo de velocidades nulo poder ser vantajoso do ponto de vista de custo computacional para fazer a análise de sensibilidade. No exemplo da Figura 25a, o esquema acoplado do campo de velocidade com uma maior abrangência é alcançado automaticamente devido a estratégia descrita na seção 5.7.2.3. Na Figura 25b é possível perceber a influência da malha no campo de velocidade para a variável de projeto  $a_3$  (ver Figura 21a) para o método de suavização laplaciana potência inversa, onde a não uniformidade da malha resulta um campo não uniforme. Na Figura 25c para Laplaciano puro, o método fica restrito a uma menor região de influência sobre quando comparado com os outros métodos. Isso limita o método a grandes modificações no contorno e, conseqüentemente resulta, em uma maior distorção da malha como já avaliado nos histogramas da Figura 24.

A Figura 27 objetiva mostrar o campo de velocidade em uma direção indicada, na qual pode ser percebida a intensidade do campo que adentra o domínio. Nesta figura, além dos três métodos, também é mostrada a capacidade da abordagem proposta de reduzir a intensidade do campo de velocidade sobre o domínio quando  $\lambda = \mathbf{0}$ , sem que a parametrização seja afetada. Devido às propriedades das NURBS, quando se perturba o ponto de controle do contorno  $P_{ij} = P_{20}$  (variável de projeto  $a_2$  ilustrada na Figura 21a), resulta que a superfície cúbica ( $p = 3$ ) apenas será alterada até a coordenada paramétrica  $u_{i+p+1=4} = u_4 = 0,5$  (dado o vetor de knots  $\mathbb{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ ). No entanto, para uma coordenada paramétrica  $(u, v) = [0,5 \ v]$ , a coordenada do sistema físico pode ser calculada através da equação (7) por  $S(u, v)_x = S(0,5 \ v)_x = [500 \ y]$ , onde o subscrito  $x$  indica o uso das coordenadas na direção  $x$  dos pontos de controle. Portanto para o caso de  $\lambda = \mathbf{0}$  na variável de projeto  $a_2$ , o campo de velocidades é nulo no domínio para  $x > 500$ , e para  $0 \leq y \leq 1000$  como exemplificado na Figura 26. Isto também pode ser percebido na Figura 27, em todos os casos, para  $\lambda = \mathbf{0}$ .

Na Figura 27a é ilustrada a semelhança dos campos para todos os métodos, como já reparado nas avaliações anteriores. Entre a Figura 27b e Figura 27d nota-se que os campos obtidos através de superfície NURBS são quase simétricos, sendo que para  $\lambda = \mathbf{0}$  o campo é exatamente simétrico, devido à parametrização simétrica.

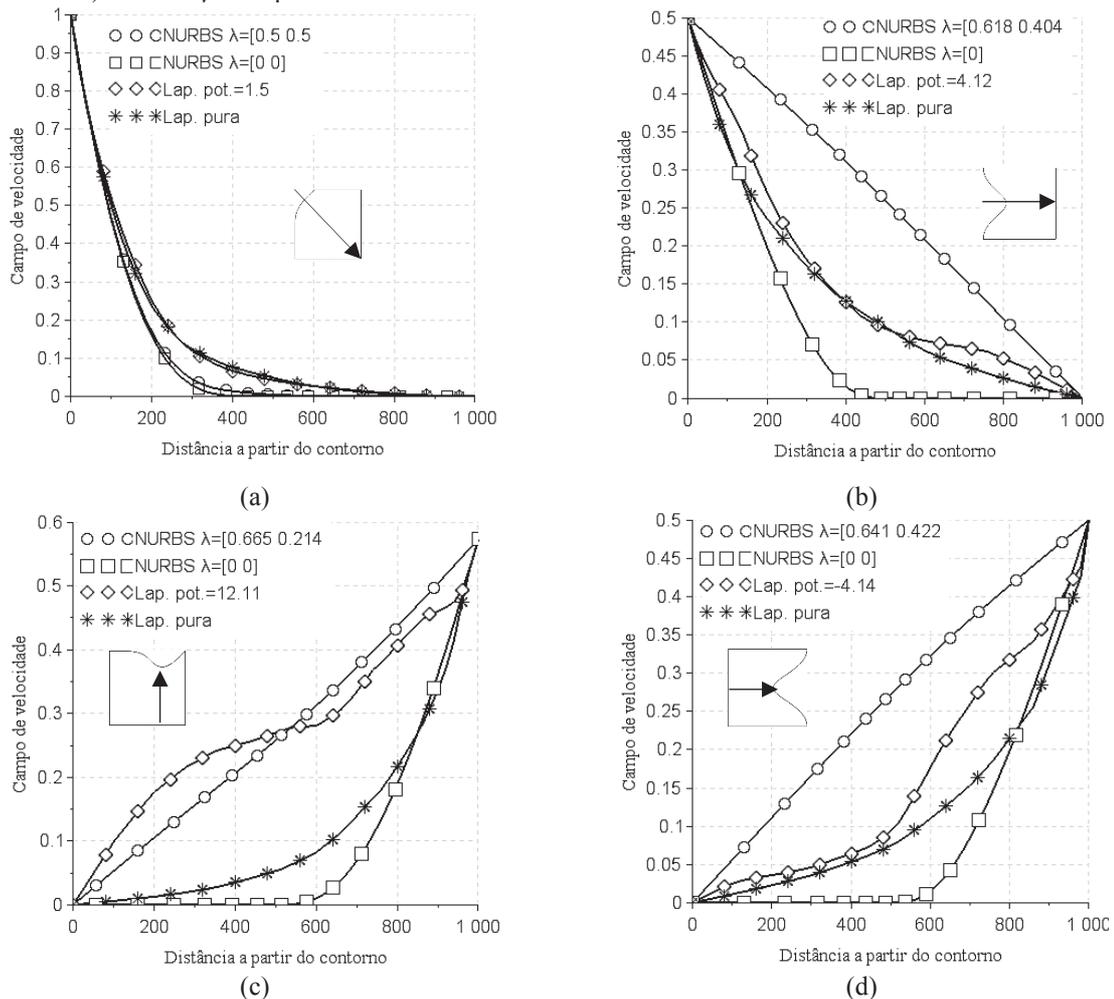
Figura 26 - Exemplo de influência reduzida para o campo de velocidade por NURBS  $\lambda = 0$ , na variável de projeto  $a_1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Da mesma maneira, os campos obtidos por Laplaciano puro, são quase simétricos devido ao fato de não levarem em consideração o tamanho dos elementos. Em contraste os campos obtidos por Laplaciano potência inversa, possuem maiores variações, devido à não uniformidade da malha, como também é observado na e Figura 27c.

Figura 27 - Comportamento dos campos de velocidade no domínio da malha. a) Influência em uma região levemente afastada do contorno superior para a perturbação no ponto a. b) Perturbação no ponto b. c) Perturbação no ponto c. d) Perturbação no ponto d.



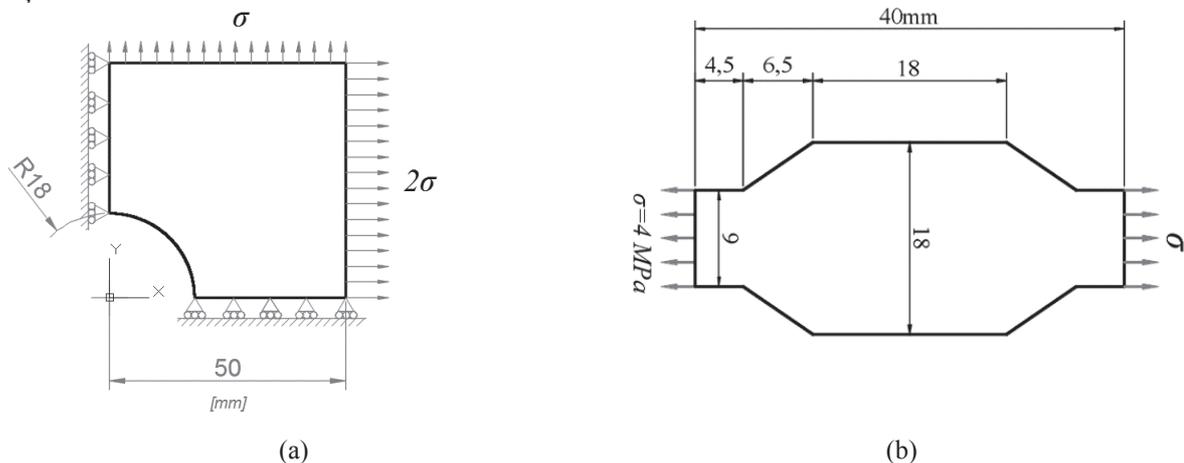
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.



## 6 OTIMIZAÇÃO DE FORMA EM ELASTICIDADE PLANA

Nesta seção, são apresentados dois exemplos de otimização de forma em um problema de elasticidade 2D, como definido na equação (47), ambos sob estado plano de tensão. O objetivo é minimizar o peso em ambos os exemplos. O primeiro problema é a otimização de uma chapa plana com furo central, como disposta na Figura 28a, sujeita a restrições de tensão, usando a norma-P modificada, assim como proposto na seção 4.1. O segundo exemplo é a otimização do contorno de um filete modelado como ilustrado na Figura 28b, sujeito a restrições de tensão e restrições geométricas utilizando a norma-P modificada, em uma abordagem análoga à empregada para restringir tensões.

Figura 28 - Problemas exemplos. a) Plano com furo central sujeito a estado biaxial de tensões. b) Filete sujeito a tração.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

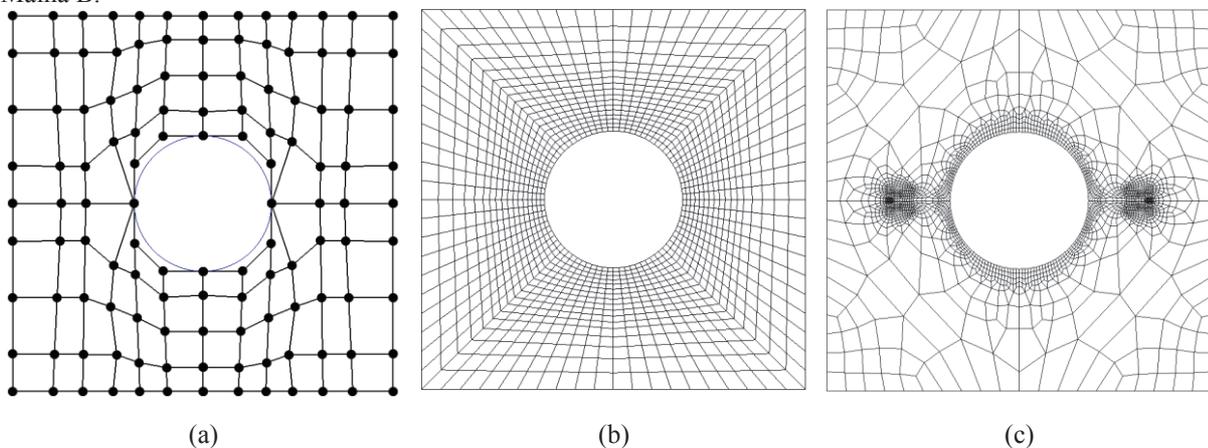
Cada exemplo é resolvido utilizando-se o método proposto e o campo de velocidade e Laplaciano potência Inversa, destacando-se que, por construção, no contorno os campos de velocidade são iguais para as duas abordagens. Compara-se a influência do uso de duas malhas diferentes, uma estruturada (malha A) e outra não estruturada (malha B). O problema de otimização é resolvido utilizando SQP com *non-monotone line search* (YU-HONG e SCHITTKOWSKI, 2008). No primeiro exemplo a influência da malha afeta de maneira clara os resultados da forma ótima para as diferentes abordagens de campo de velocidades. No segundo exemplo não há diferenças significativas da forma original para a forma ótima, havendo pouca distorção da malha, ambos os métodos são eficientes.

Os problemas são parametrizados por uma superfície NURBS definida por splines cúbicas nos contornos. Adota-se elementos quadrilaterais de 8 nós baseados em deslocamento e as tensões nodais são obtidas via suavização global L2 com valores avaliados nos pontos de Gauss seguindo uma regra  $2 \times 2$ .

## 6.1 EXEMPLO 1: OTIMIZAÇÃO DE UM PLANO COM FURO CENTRAL

Neste exemplo a geometria do furo deve ser otimizada para minimizar o peso, sujeita a uma tensão máxima permitida de 200 MPa. As duas malhas de elementos finitos empregadas no estudo estão representadas na Figura 29b e Figura 29c, ambas com a mesma parametrização geométrica mostrada na Figura 29a. Na malha não estruturada ilustrada na Figura 29c, uma região altamente refinada foi gerada arbitrariamente para impor variações no tamanho dos elementos naquela região.

Figura 29 - Disposição do Exemplo 1. a) Parametrização por NURBS. b) Discretização, Malha A. c) Discretização Malha B.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Os pontos de controle localizados no contorno do furo são atribuídos como variáveis de projeto. Para cada variável de projeto os parâmetros que fornecem a menor distorção da malha foram calculados como descrito na seção 5.7.2.2. Para a abordagem por suavização laplaciana, o parâmetro  $rp$  que permite a maior modificação do contorno por cada variável de projeto também foi calculado. Esses parâmetros estão descritos na Tabela 3.

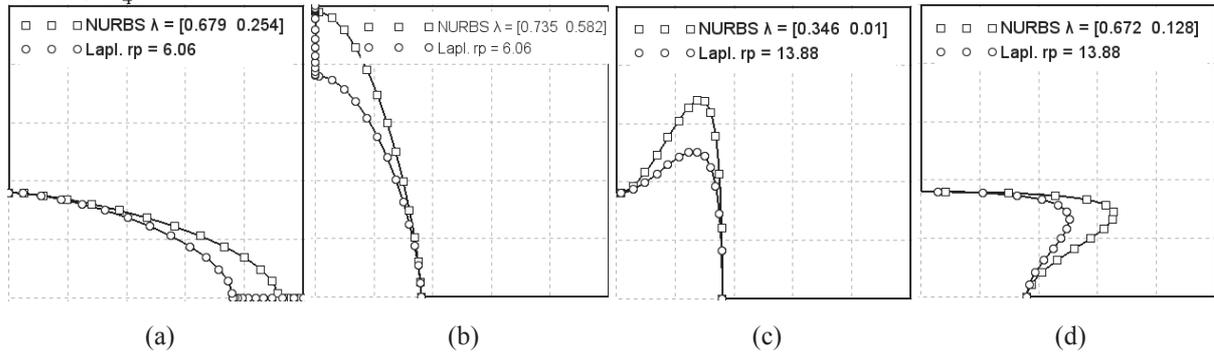
Tabela 3 - Parâmetros do campo de velocidade exemplo 1.

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
<b>Malha A</b>	Laplac.	$rp$	6,06	6,06	13,88	13,88
	NURBS	$\lambda$	[0,679 0,254]	[0,735 0,582]	[0,346 0,01]	[0,672 0,128]
<b>Malha B</b>	Laplac.	$rp$	9,25	4,21	34,18	42,09
	NURBS	$\lambda$	[0,696 0,269]	[0,699 0,476]	[0,325 0,01]	[0,650 0,230]

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

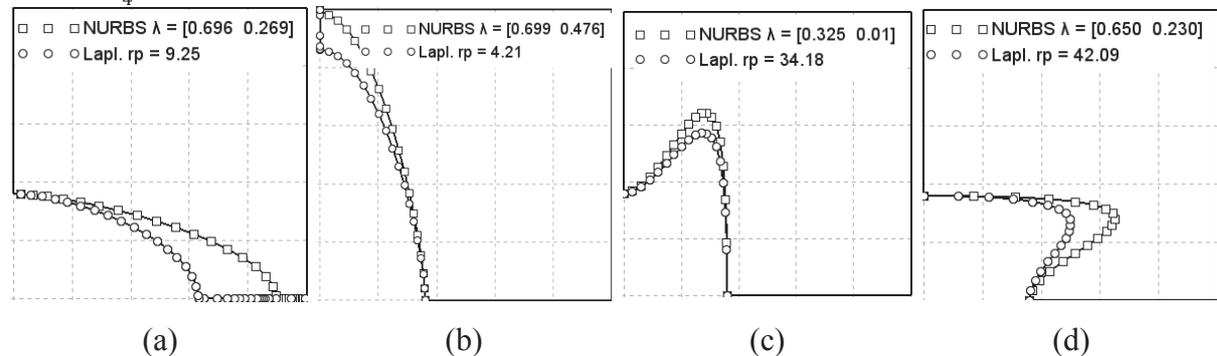
A máxima modificação do contorno para cada variável de projeto é mostrada na Figura 30 para a Malha A e na Figura 31 para a malha B.

Figura 30 - Para a Malha A, máxima modificação do contorno. a) Variável  $a_1$ , b) Variável  $a_2$ . c) Variável  $a_3$ . c) Variável  $a_4$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

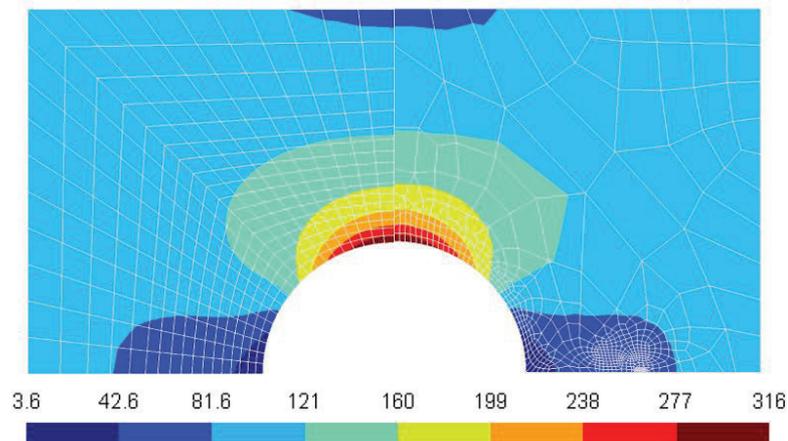
Figura 31 - Para a Malha B, máxima modificação do contorno. a) Variável  $a_1$ , b) Variável  $a_2$ . c) Variável  $a_3$ . c) Variável  $a_4$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

As restrições de tensão são impostas como proposto por Holmberg *et al.* (2013) e descrito na seção 4.3. Utiliza-se a norma  $P$  modificada com  $P = 20$  e cinco clusters de tensão. As tensões iniciais suavizadas de von Mises são exibidas para as duas malhas na Figura 32, onde observa-se que a restrição de tensão está sendo violada e é necessária uma modificação de forma para obter um projeto aceitável, mesmo que nenhuma redução de massa seja alcançada.

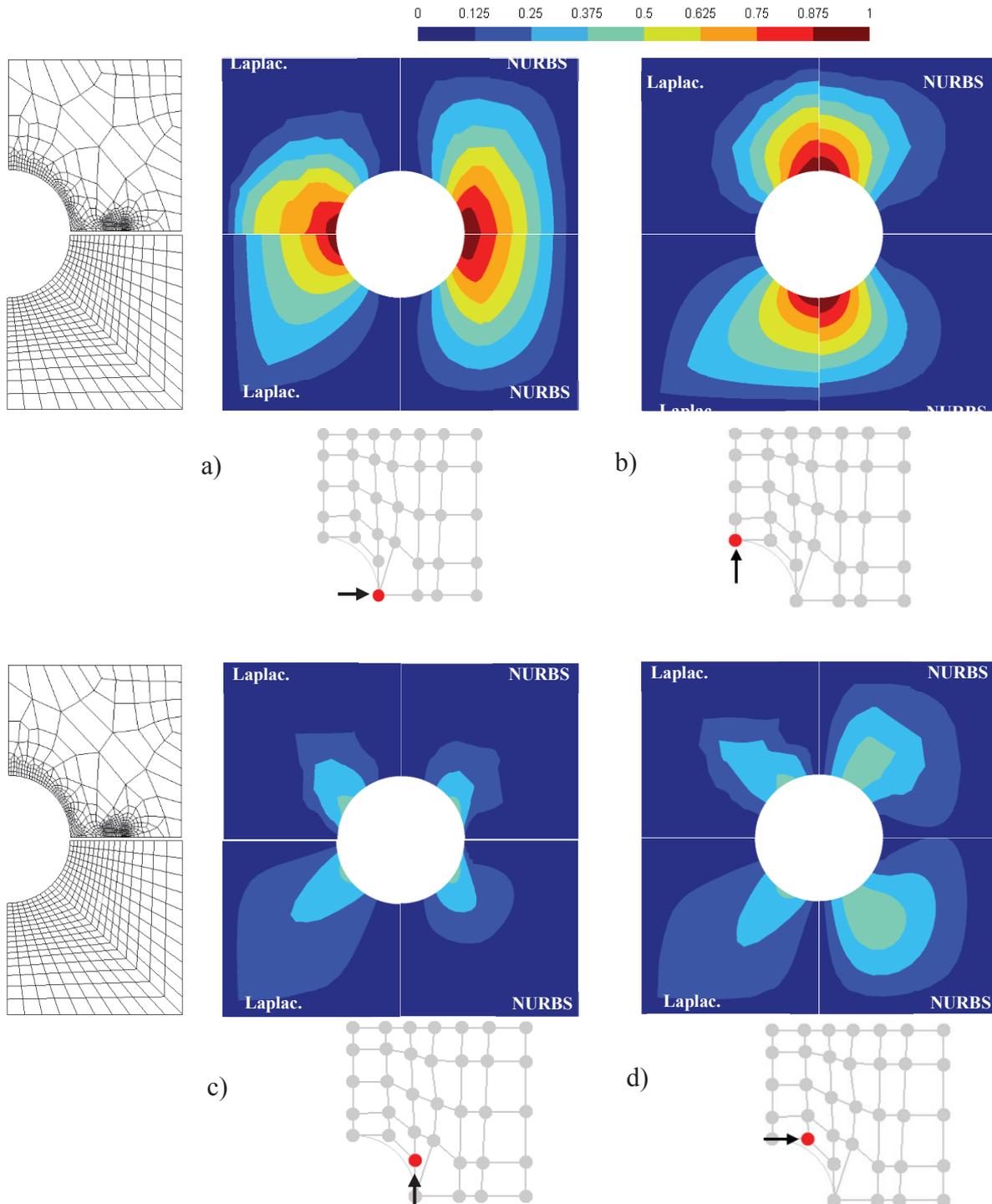
Figura 32 - Tensão equivalente de von Mises em MPa para o problema inicial nas malhas A e B.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

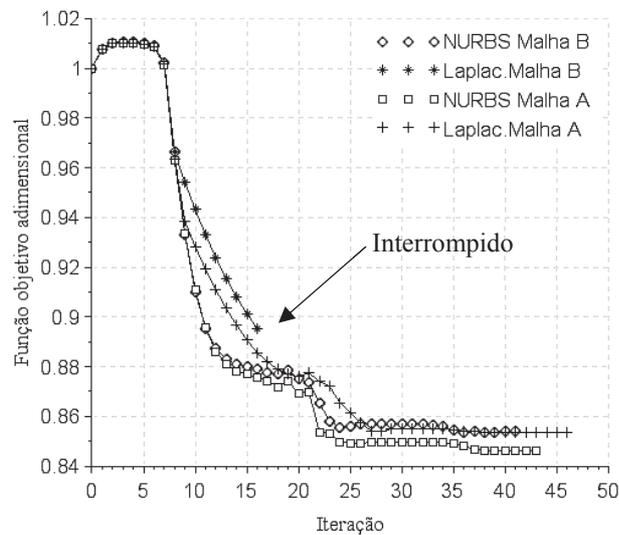
O campo de velocidade é ilustrado na Figura 33, no qual são contrastadas diferentes características entre o método proposto e abordagem por suavização laplaciana potência inversa. O método Laplaciano potência inversa assume campos diferentes devido à influência da malha como observado na seção 5.7.3. O procedimento baseado em NURBS também é afetado pela malha, mas muito menos.

Figura 33 - Campo de velocidade obtido por suavização laplaciana potência inversa e pela abordagem proposta aplicados sobre cada malha para o exemplo 1. a) Variável  $a_1$ , b) Variável  $a_2$ . c) Variável  $a_3$ . c) Variável  $a_4$ .



A Figura 34 mostra a evolução da função objetivo ao longo de iterações externas do SQP. Para a malha não estruturada, o método baseado em superfície levou a uma melhor forma ideal do que o outro método. Além disso, o método Laplaciano potência inversa mostra uma grande influência da topologia da malha no resultado da otimização. Foi alcançada uma redução de massa de aproximadamente 15% (ver Tabela 4) com ambas as abordagens, exceto com a abordagem laplaciana potência inversa aplicada à malha não estruturada (malha B), que teve a otimização interrompida devido à distorção excessiva da malha.

Figura 34 - Convergência do problema de otimização do exemplo 1. a) Convergência da função objetivo. b) Convergência da restrição G1.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

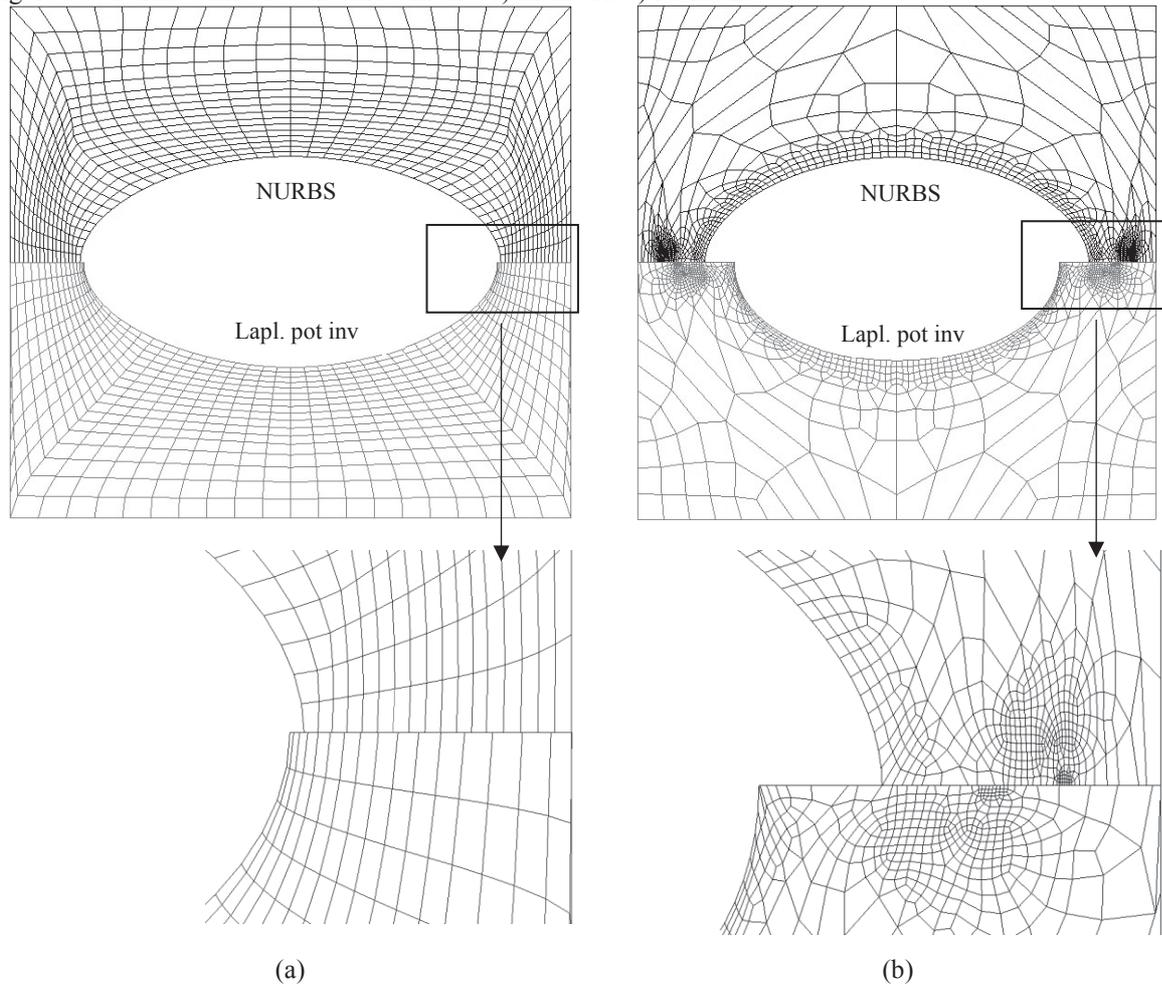
Tabela 4 - Valores numéricos da função objetivo adimensionalizada (normalizada com relação ao valor inicial) e restrições.

	Malha A		Malha B	
	NURBS	Laplac. pot.	NURBS	Laplac. pot.*
<b>Função objetivo</b>	0,8461	0,8533	0,8535	0,8954
<b>Restrições de</b>	0	0	0	-0,0067
<b>tensão</b>	0,1611	0,1299	0,1139	0,1805
<b><math>g \geq 0</math></b>	0,2531	0,2370	0,2259	0,4361
	0,3613	0,3364	0,2419	0,4185
	0,4831	0,4714	0,2736	0,4587

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Na Figura 35, a forma ótima e a distorção da malha podem ser visualizadas. Observa-se a diferença entre as formas ótimas para a malha estruturada na Figura 35a e para a malha não estruturada na Figura 35b. Nessa figura, uma ampliação da região onde a malha é mais afetada mostra que abordagem por suavização laplaciana potência inversa resulta em elementos distorcidos nos contornos interno e externo da forma na região ampliada.

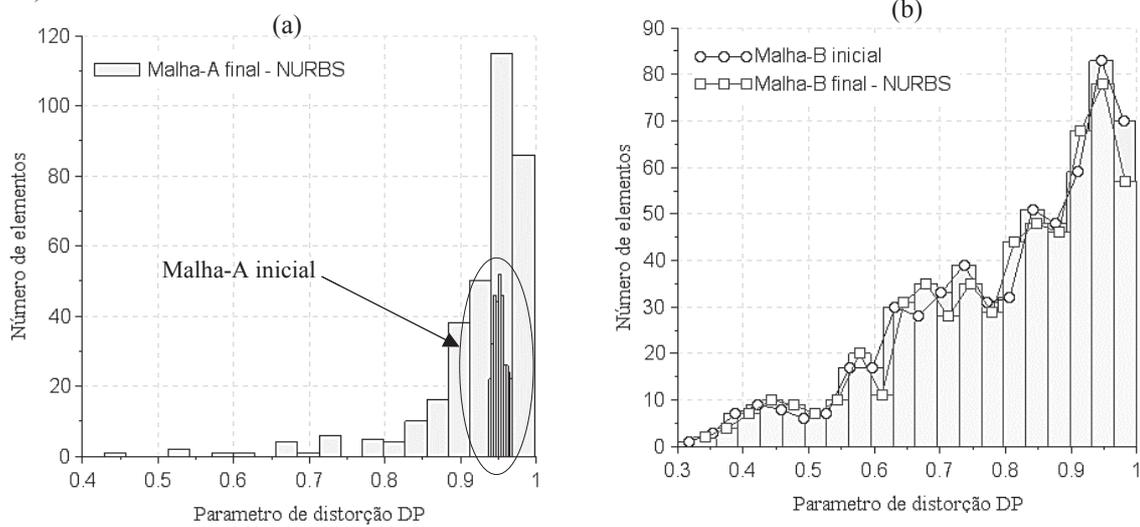
Figura 35 - Forma ótima do contorno e malha. a) Malha A. b) Malha B.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O método proposto apresenta elementos pouco distorcidos para ambas as malhas, isso pode ser quantificado utilizando o parâmetro de distorção  $DP$  apresentado na seção 3.4 como medida de distorção. No histograma da Figura 36a, a distorção da malha é comparada com a malha inicial, notando-se que, na malha final, os elementos mais distorcidos assumem  $DP > 0,4$ . Na Figura 36b o método proposto consegue manter a qualidade da malha inicial, resultando em uma malha pouco distorcida.

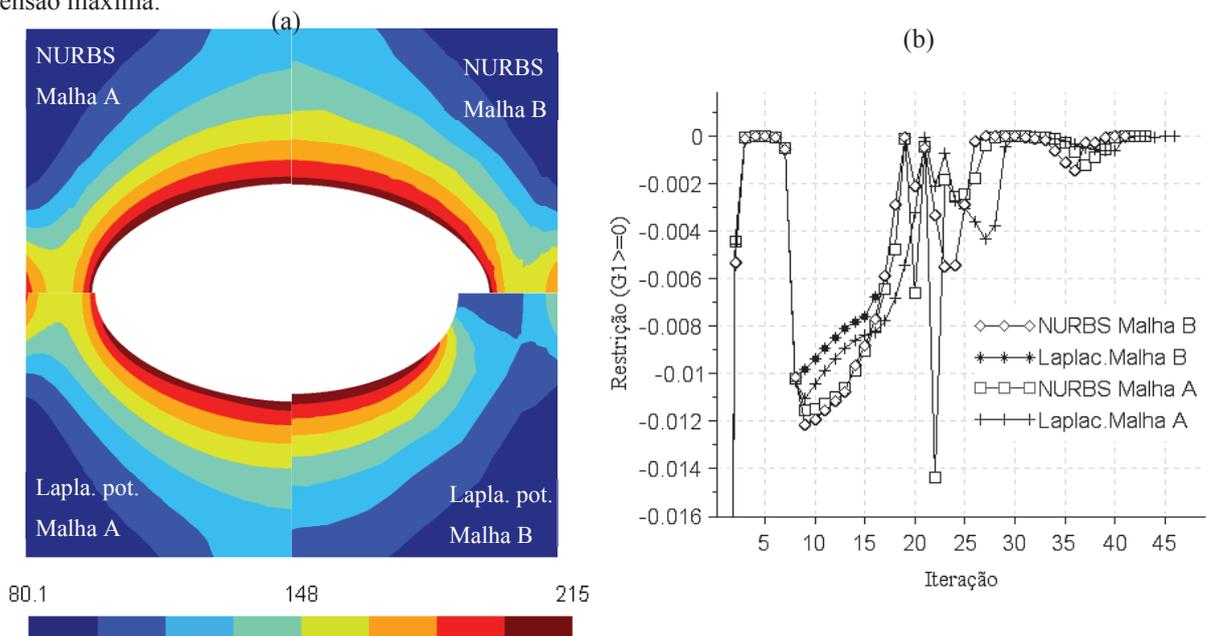
Figura 36 - Histograma de comparação entre a malha inicial e da forma ótima para a abordagem proposta. a) Malha A. b) Malha B



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A Figura 37a mostra que, em todos os casos, os campos de tensão de von Mises suavizados excedem ligeiramente a tensão máxima permitida de 200MPa. Isso significa que, embora as restrições de tensão sejam bem tratadas usando o procedimento de Holmberg, os cinco grupos de tensão classificados por nível de tensão não são suficientes para impor rigorosamente as restrições de tensão. Como mostrado na Tabela 4, apenas a primeira restrição termina ativa. A Figura 37b ilustra a convergência da primeira restrição que corresponde ao cluster que contém as tensões mais altas para todas as malhas e abordagens.

Figura 37 - Campo de tensão equivalente de von-Mises em MPa. a) Forma ótima. b) Evolução da restrição de tensão máxima.

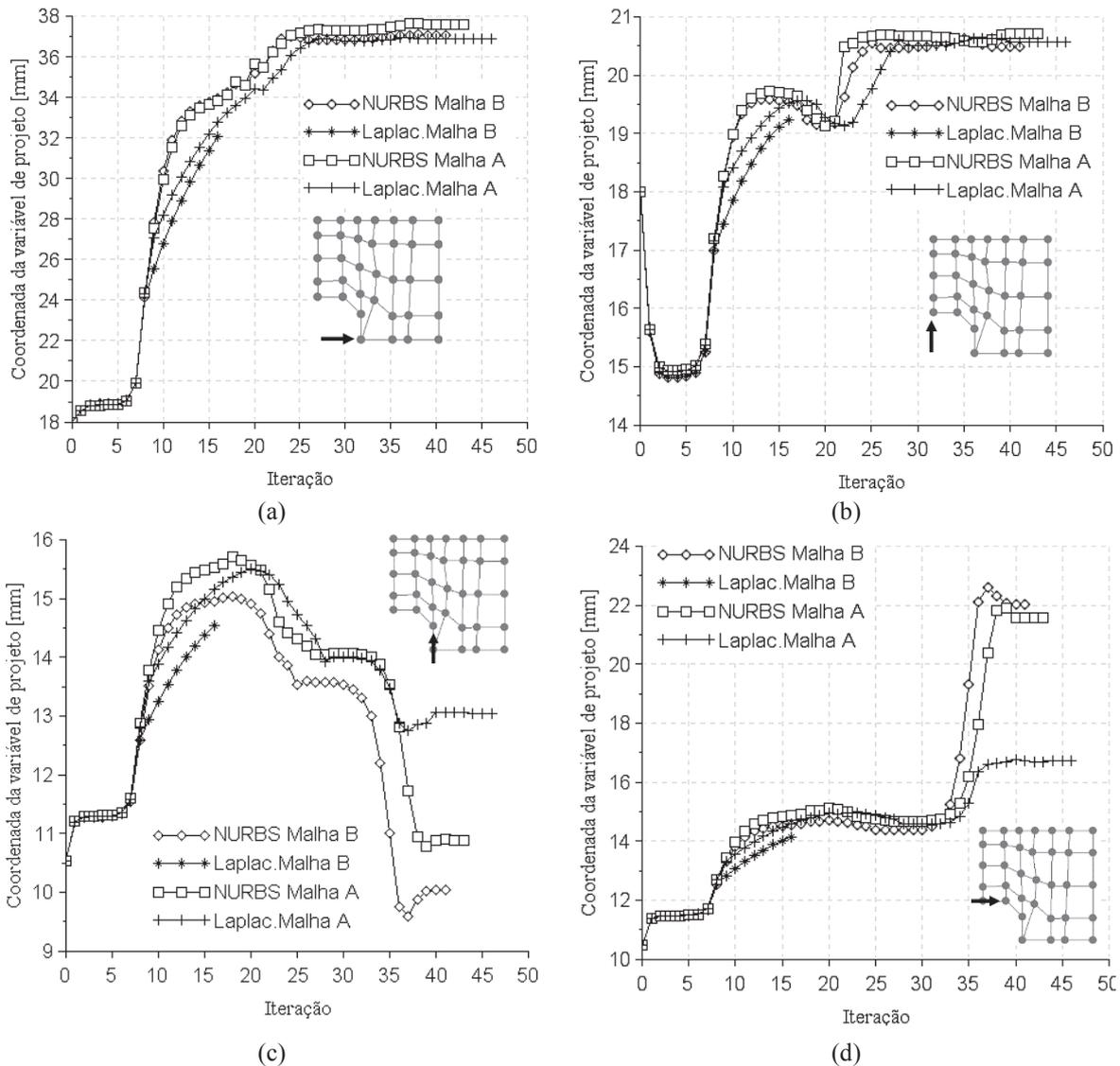


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Uma redução de aproximadamente 30% da tensão máxima inicial foi alcançada por ambos os métodos. A Figura 39 mostra o campo de tensão na forma ótima comparado com o problema inicial.

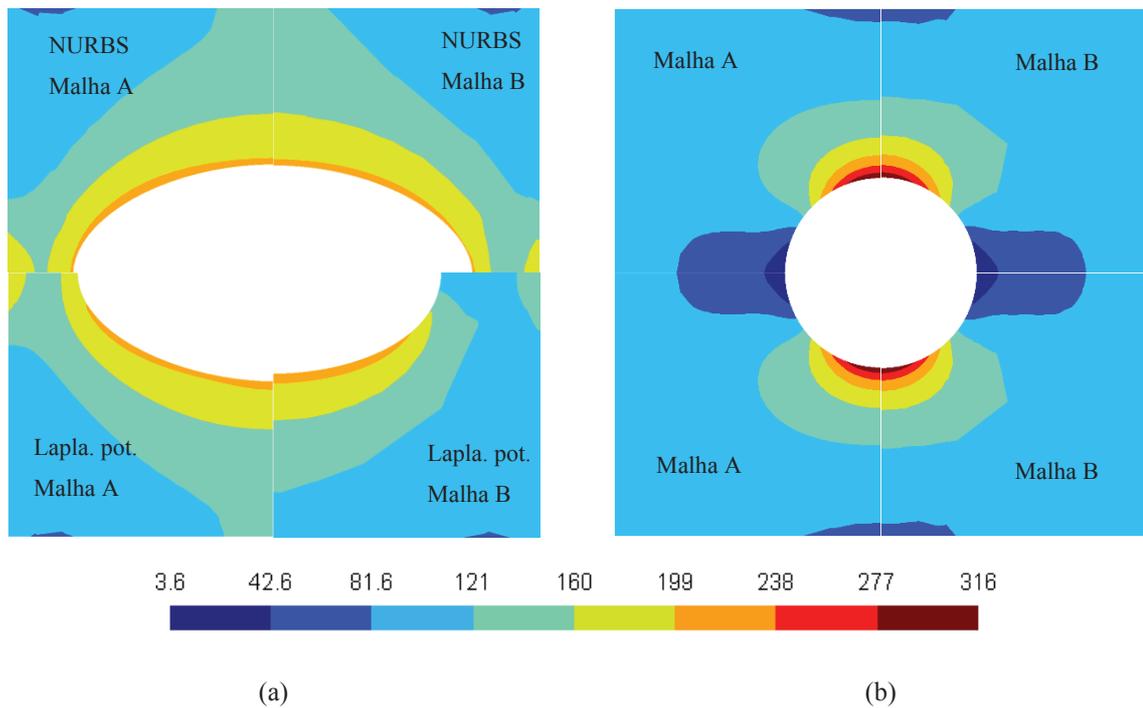
A convergência das variáveis de projeto é mostrada na Figura 38, onde a variável de projeto  $a_1$  converge para valores semelhantes para todos os dois métodos e malhas, exceto laplaciana potência inversa. Da mesma maneira para a variável  $a_2$ .

Figura 38 - Convergência das variáveis de projeto. a) Variável  $a_1$ , b) Variável  $a_2$ . c) Variável  $a_3$ . c) Variável  $a_4$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 39 – Campo de tensão em MPa, na forma ótima comparado com o problema inicial. a) Forma ótima. b) Forma inicial.



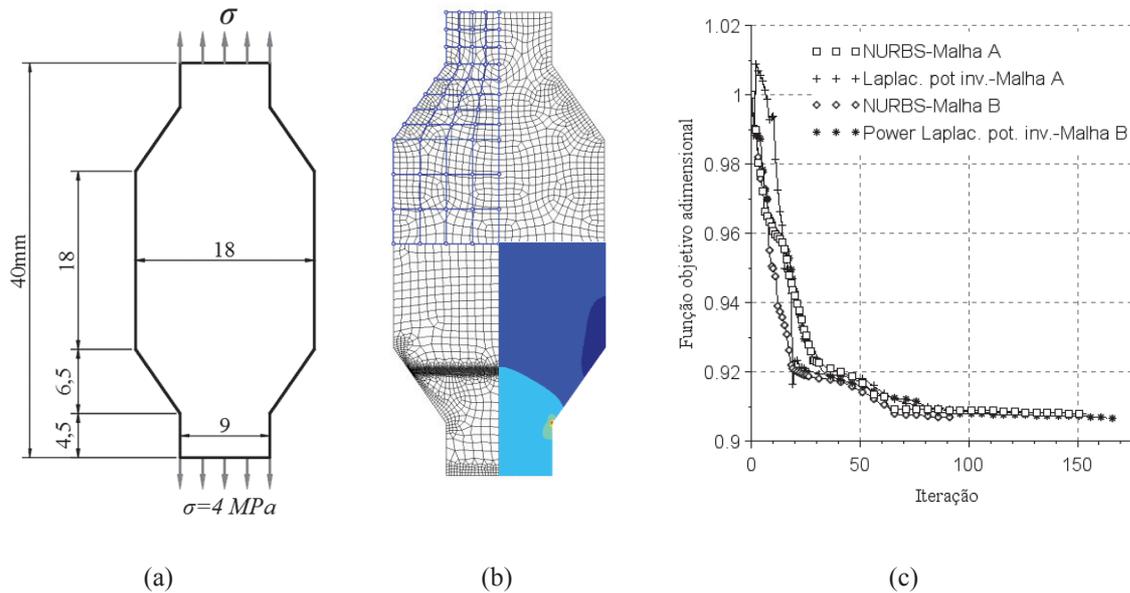
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

## 6.2 EXEMPLO 2: OTIMIZAÇÃO DE FILETE

O problema do filete sob tensão, como mostrado na Figura 40a, deve ser otimizado para minimizar o peso, sujeito a tensão máxima de 5,0 MPa. As discretizações de elementos finitos e a parametrização são mostradas na Figura 40b. Os pontos de controle do contorno inclinado do filete são designados como variáveis de projeto neste exemplo. Utilizando o método proposto e o esquema Laplaciano potência inversa para malha regular (malha A) e para malha irregular (malha B). Da mesma maneira que no exemplo anterior, uma região mais refinada na malha B é gerada propositalmente. O mesmo método de otimização do exemplo anterior foi utilizado para avaliar o problema. Portanto, usa-se a norma P modificada com  $P = 40$  e quatro clusters de tensão. Para obter uma forma realista, duas restrições geométricas como proposto na seção 4.3 foram adicionadas nas coordenadas nodais do contorno do filete. Nesse caso as restrições foram modeladas como na equação (60), utilizando um cluster de coordenadas geométricas para cada restrição geométrica.

A forma ótima é obtida com diferenças insignificantes entre abordagens neste exemplo, como mostra a Figura 41, em que a forma ideal é a mesma para todas as malhas e abordagens.

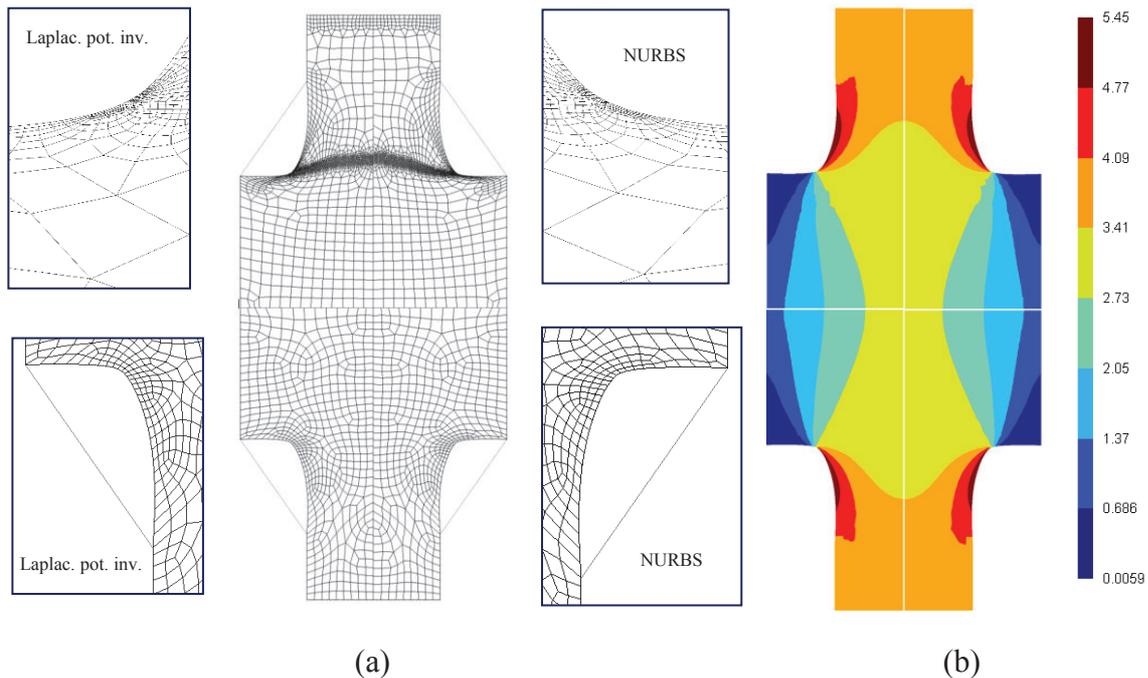
Figura 40 - a) Problema do filete sobre estado plano de tensão. b) Malha inicial estruturada e não estruturada e campo de tensão inicial em MPa. c) Convergência da função objetivo.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

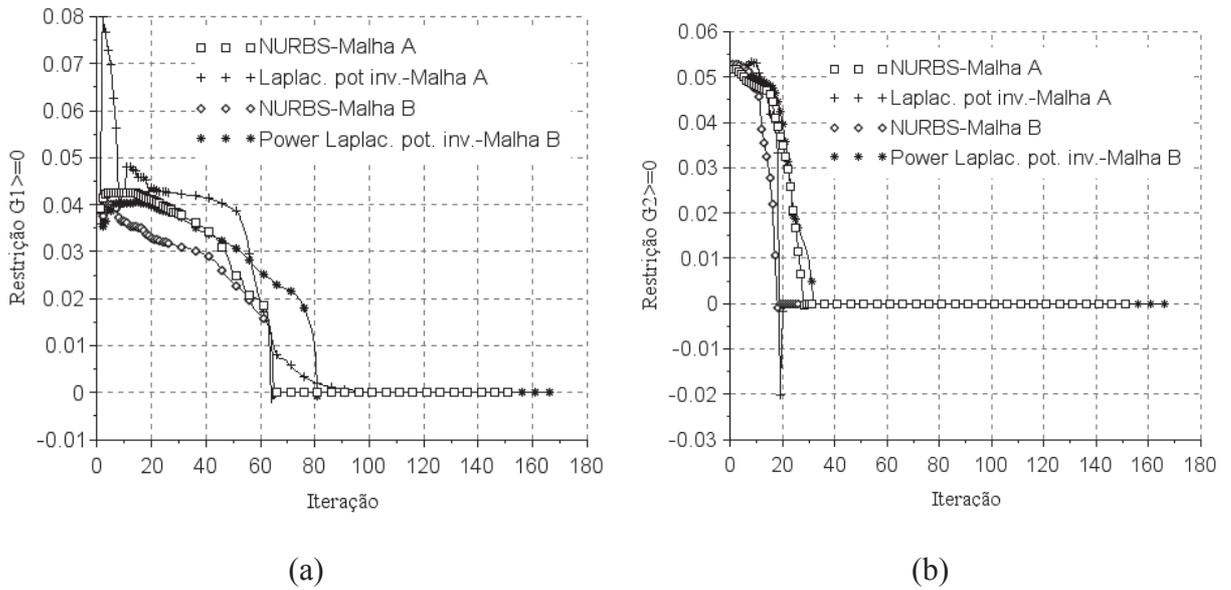
Neste exemplo, três restrições terminam ativas: duas restrições geométricas; e uma restrição de tensão. A Figura 42a mostra a convergência das restrições geométricas para ambas as abordagens e discretizações. Na Figura 43a mostra-se que a convergência das restrições de tensão ocorre de forma rápida no início mas nas iterações finais apresenta maior dificuldade de convergência (Figura 43b).

Figura 41 – Forma ótima exemplo 2 (filete). a) Forma ótima e malha para as duas abordagens. b) Campo de tensão equivalente de von Mises em MPa da forma ótima do filete.



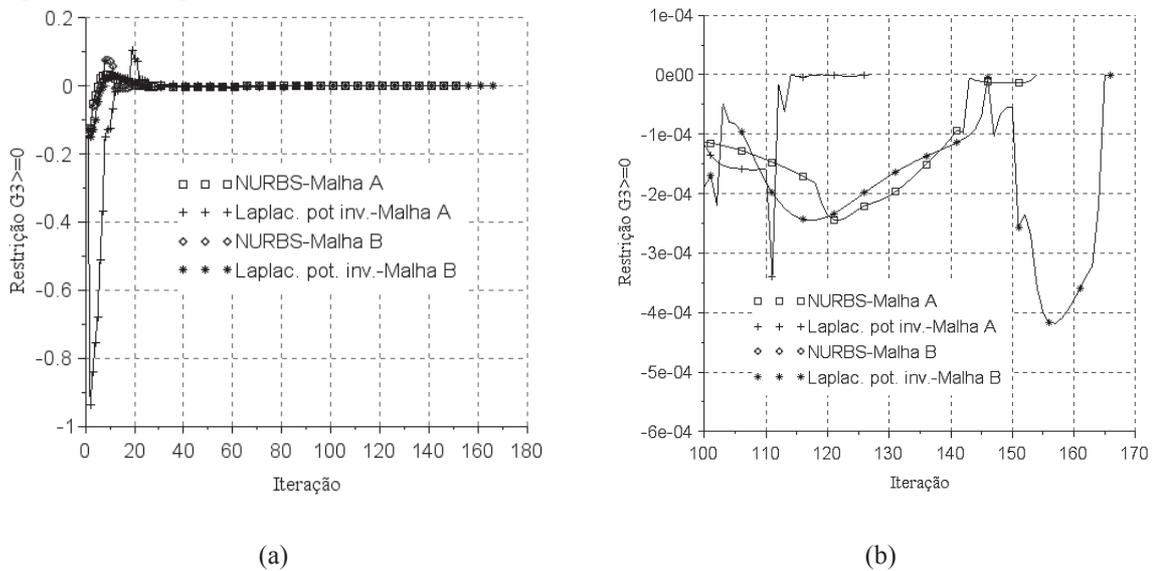
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 42 – Convergência das restrições geométricas. a) Convergência da restrição G1. b) Convergência da restrição G2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 43 – a) Convergência da restrição de tensão referente ao cluster com maior nível de tensões. b) Ampliação da figura de convergência da restrição de tensão nas iterações finais.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.



## 7 CONCLUSÃO

O cálculo de campo de velocidades computado por abordagens laplacianas está bem estabelecido para problemas de otimização de forma discretizados usando elementos finitos. Não obstante, essas estratégias são fortemente afetadas por malhas com regiões de refino e distorções de elementos. Portanto, uma malha adequada para a discretização de um problema de elementos finitos visando um erro baixo, pode nem sempre ser favorável para o cálculo de um campo de velocidade Laplaciano. Neste trabalho, foi apresentado um procedimento para avaliar campos de velocidade 2D baseados em superfícies NURBS, adotando pontos de controle do contorno como variáveis de projeto. Uma contribuição chave e original do método desenvolvido é que os pontos de controle de domínio podem ser afetados pelas variáveis de projeto (ou não) por meio de parâmetros que fornecem a menor distorção da malha. Portanto, destaca-se a vantagem da abordagem proposta, que permite controlar a qualidade do campo de velocidade. Além disso, esse campo de velocidade pode se tornar independente da topologia da malha para o caso desacoplado.

Dois exemplos de otimização 2D em estado plano de tensão são usados para mostrar o potencial do método proposto, que mostrou resultados aprimorados no primeiro exemplo em relação aos campos de velocidade Laplaciano, incluindo um valor mais baixo para a função objetivo do peso e uma menor distorção da malha em todo o domínio e contorno. No segundo exemplo, uma pequena modificação do contorno (quando comparado com o exemplo anterior) é suficiente para alcançar a forma ótima. Nesse caso ambos os métodos apresentaram bons resultados, com a forma ótima e a disposição da malha com diferenças imperceptíveis. A abordagem de restrição geométrica proposta também se mostrou efetiva. Entretanto, a aplicação das abordagens propostas deve ser melhor explorada para problemas mais gerais de otimização de forma que envolvam grandes modificações do contorno.

O procedimento de Holmberg deve ser melhor explorado a fim de estabelecer uma melhor relação entre a norma  $P$  o número de pontos avaliados e o número de clusters que devem ser adotados para impor satisfatoriamente as restrições de tensão ou geométricas. Além disso, a técnica de atualização dos clusters ao longo das iterações de otimização e organização por níveis, também se mostrou uma estratégia preferível neste trabalho como pontuado por Holmberg *et al.* (2013). Embora essa estratégia possa ajudar a satisfazer adequadamente as restrições de tensão, o problema de otimização matemática sendo resolvido é alterado toda vez que os clusters são reorganizados, o que é inconsistente. Teoricamente, isso pode trazer

dificuldades de convergência análogas à alteração da topologia da malha. Trabalhos futuros poderão avaliar esse aspecto com mais profundidade.

Finalmente, vale ressaltar que, como a abordagem proposta é desenvolvida inteiramente em um domínio paramétrico, espera-se que a generalidade do método permita uma extensão para aplicações na otimização de forma de cascas curvadas arbitrariamente.

## 7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas recomendações de continuidade deste trabalho podem contribuir para obter resultados melhorados, e expandir a aplicação da abordagem proposta para problemas mais gerais.

- Aplicar a abordagem proposta em otimização de contornos de cascas curvadas em uma estratégia de parametrização da forma da superfície. Nesse caso a forma da superfície é mantida constante e apenas os contornos são modificados. O movimento dos pontos de controle do contorno, assim como os pontos de controle do domínio (no caso acoplado), devem manter a forma da superfície em problemas tal como proposto por Wang *et al.* (2016).
- Fazer a extensão da abordagem proposta para problemas de otimização de forma de cascas configuradas arbitrariamente. Deve-se notar que o método acoplado do campo de velocidade baseado em NURBS, objetiva manter a qualidade da malha. O acoplamento não deve ter influência sobre a forma de uma superfície 3D.
- Estender a aplicação da abordagem proposta para problemas de otimização de forma em sólidos 3D. A estratégia de acoplamento nesse caso não necessita de adaptações, mas a parametrização, precisa ser estendida para o caso de sólidos NURBS.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, W. T.; NEWMAN, J. C.; WHITFIELD, D. L.; NIELSEN, E. J. Sensitivity analysis of Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables. **AIAA**, v. 39, p. 59-63, 2001.

AUGUSTO, R. A. **Arquitetura Orientada por Objetos para o MEF de Alta Ordem com Aplicações em Mecânica Estrutural - Tese de Doutorado**. Campinas: [s.n.], 2012.

BARLOW, J. Optimal Stress locations in Finite element models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Derby, v. 10, p. 243-251, 1976.

BARTHELEMY, B.; HAFTKA, R. T. Accuracy Analysis of the Semi-Analytical Method for Shape Sensitivity Calculation\*. **Mechanics of Structures and Machines**, v. 18, p. 407-432, 1990.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Watertown: [s.n.], 2014.

BECKERS, P. Recent Developments in Shape Sensitivity: The Physical Approach. **Engineering Optimization**, v. 18, p. 67-78, 1991.

BELEGUNDU, A. D.; CHANDRUPATLA, T. R. **Optimization Concepts and Applications in Engineering**. 2ª. ed. New York: Cambridge University Press, 2011.

BELEGUNDU, A. D.; RAJAN, S. D. A Shape Optimization Approach Based On Natural Design Variables And Shape Functions. **Computer Methods in Applied Mechanics And Engineering**, v. 66, p. 87-106, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications**. [S.l.]: Springer, 2003.

BLETZINGER, K.-U. A consistent frame for sensitivity filtering and the vertex. **Struct Multidisc Optim**, v. 49, p. 873–895, 2014.

BRAIBANT, V.; FLEURY, C. Shape optimal design using B-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, p. 247-267, 1984.

BRAIBANT, V.; MORELLE, P. Shape optimal design and free mesh generation. **Structural Optimization**, v. 2, p. 223-231, 1990.

BUGEDA, G.; OÑATE, E. A methodology for adaptive mesh refinement in optimum shape design problems. **Computing Systems in Engineering**, v. 5, p. 91-102, 1994.

CANTIN, G.; LOUBIGNAC, G.; TOUZOT, G. An Iterative Algorithm to Build Continuous Stress and Displacement Solutions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Monterey, v. 12, p. 1493-1506, 1978.

CHEN, L.; GEISER, A.; WUCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. A modified search direction method with weakly imposed Karush-Kuhn-Tucker conditions for gradient-based constrained optimization for very large problems (Abstract). **6th European Conference on Computational Mechanics (ECCM 6)**, 2018.

CHOI, K. K.; CHANG, K. H. A study of design velocity field computation for shape optimal design. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 15, n. 15, p. 317-341, 1994.

CHOI, K. K.; KIM, N. H. **Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1: Linear Systems**. New York: Springer, 2005.

CHOI, M.-J.; CHO, S. A mesh regularization scheme to update internal control points for isogeometric shape design optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 285, p. 694-713, 2015.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. Waterloo: Springer, v. 153, 2009.

COOK, R. D. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1974.

DING, Y. Shape optimization of structures: A Literature Survey. **Computers and Structures**, v. 24, p. 985-1004, 1986.

DUYSINX, P.; FLEURY, C.; ZHANG, W. H. Sensitivity Analysis with Unstructured Free Mesh Generators in 2-D Shape Optimization. **Aerospace Laboratory, LTAS, Universidade de Liège, Bélgica**, v. Repor AO-31, 1993.

DUYSINX, P.; SIGMUND, O. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution. **7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium on multidisciplinary design optimization**, 1998. 1501–1509.

FIELD, D. A. An Algorithm for Determining Invertible Quadratic Isoparametric Finite Element Transformations. **Mathematics of computation**, v. 37, p. 347-360, 1981.

FREY, A. E.; HALL, C. A.; PORSCHING, T. A. Some Results on the Global Inversion of Bilinear and Quadratic Isoparametric Finite Element Transformations. **Mathematics of Computation**, v. 32, p. 725-749, 1978.

GARCÍA-RUÍZ, M. J.; STEVEN, G. P. Fixed grid finite elements in elasticity problem. **Engineering Computations**, v. 16, p. 145-164, 1999.

GOLDMAN, R. **Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling**. 1<sup>a</sup>. ed. Berkeley: Morgan Kaufmann, 2003.

HAFTKA, R. T.; ADELMAN, H. M. Recent developments in structural sensitivity analysis. **Structural Optimization**, v. 1, p. 137-151, 1989.

HAFTKA, R. T.; GRANDHI, R. V. Structural Shape Optimization-A Survey. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 57, p. 91-106, 1986.

HAFTKA, R. T.; GURDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. 3<sup>a</sup>. ed. Dordrecht: Kluwer, 1992.

HASSANI, B.; TAVAKKOLI, S. M.; MOGHADAM, N. Z. Application of isogeometric analysis in structural shape optimization. **Scientia Iranica**, v. 18, p. 846-852, 2011.

HAUG, E. J.; CHOI, K. K.; KOMKOV, V. **Design Sensitivity Analysis of Structural**. Orlando: Academic Press, Inc, 1986.

HAVEROTH, G. A.; STAHLSCHMIDT, J.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Application of the Complex Variable Semi-analytical Method for Improved Displacement Sensitivity Evaluation in Geometrically Nonlinear Truss Problems. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, p. 980-1005, 2015.

HINTON, E.; CAMPBELL, J. S. Local and Global Smoothing Finite Element Functions Using a Least Squares Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Swansea, v. 8, p. 461-480, 1974.

HOLMBERG, E.; TORSTENFELT, B.; KLARBRING, A. Stress constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 33-47, 2013.

HOU, J. W.; SHEEN, J. S. On the design velocity field in the domain and boundary methods for shape optimization. **Structural Dynamics and Materials Conference.**, v. 29, 1988.

HSU, S.-Y.; CHANG, C.-L. Mesh deformation based on fully stressed design: the method and 2-D examples. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 72, p. 606-629, 2007.

HUGHES, T. J.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135-4195, 2005.

IMAM, M. H. Three-Dimensional Shape Optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, p. 661-673, 1982.

JIN, W.; DENNIS, B. H.; WANG, B. P. Improved sensitivity analysis using a complex variable semi-analytical method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 433-439, 2010.

KELLIHER, D.; CAMPBELL, J. S. Shape design sensitivities improvement using convected unstructured meshes. **Engineering Optimization**, v. 14, p. 175-191, 2013.

KEULEN, F. V.; HAFTKA, R. T.; KIM, N. H. Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1: Linear systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 3213-3243, 2005.

KUCI, E.; HENROTTE, F.; DUYSINX, P.; GEUZAIN, C. Design sensitivity analysis for shape optimization based on the Lie derivative. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 317, p. 702-722, 2017.

LE, C.; BRUNS, T.; TORTORELLI, . A gradient-based, parameter-free approach to shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 985-996, 2011.

LE, C.; NORATO, J.; BRUNS, T.; HA, C.; TORTORELLI, D. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 605–620, 2010.

LINN, R. V.; ESPATH, L. F.; AWRUCH, A. M. Optimal shape of axisymmetric solids using NURBS and automatic differentiation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, p. 1385-1402, 2014.

LINS, S. D. O. **Otimização de forma aplicando B-splines sob critério integral de tensões**. Dissertação (Dissertação em Engenharia Mecânica) – UFRN. Natal. 2009.

MANH, N. D.; EVGRAFOV, A.; ROULUN, A. Isogeometric shape optimization of vibrating membranes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 1343-1353, 2011.

MUÑOZ-ROJAS, P.; FONSECA, J. S.; CREUS, G. J. A modified finite difference sensitivity analysis method allowing remeshing in large strain path-dependent problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, p. 1049-1071, 2004.

NAJAFIA, A. R.; SAFDARI, M.; TORTORELLI, D. A.; GEUBELLE, P. H. A gradient-based shape optimization scheme using an interface-enriched generalized FEM. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 296, p. 1-17, 2015.

NICOLAS, V. T.; CITIPITIOGLU, E. A general isoparametric finite element program SDRC SUPERB. **Computers & Structures**, v. 7, p. 303-313, 1977.

OLHOFF, N.; RASMUSSEN, J.; LUND, E. A Method of "Exact" Numerical Differentiation for Error Elimination in Finite-Element-Based Semi-Analytical Shape Sensitivity Analyses. **Mechanics of Structures and Machines**, v. 21, p. 1-66, 1993.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**. 2<sup>a</sup>. ed. Tampa: Springer, 1997.

QIAN, X. Full analytical sensitivities in NURBS based isogeometric shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, p. 2059-2071, 2010.

RAO, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. 4<sup>a</sup>. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2009.

RÓDENAS, J. J.; FUENMAYOR, F. J.; TARANC, J. E. A numerical methodology to assess the quality of the design velocity field computation methods in shape sensitivity analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 1725-1747, 2004.

SALAGAME, R. R.; BELEGUNDU, A. D. Distortion, degeneracy and rezoning in finite elements- A survey. **Sādhanā**, v. 19, p. 311-335, 1994.

SCHLEUPEN, A.; MAUTE, K.; RAMM, E. Adaptive FE-procedures in shape optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, p. 282-303, 2000.

SEONG, H.-G.; CHOI, K.. Boundary-Layer Approach to Shape Design Sensitivity Analysis. **Mechanics of Structures and Machines: An International Journal**, v. 15, p. 241-263, 1987.

SILVA, C. A.; BITTENCOURT, M. L. Velocity fields using NURBS with distortion control for structural shape optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 147-159, 2007.

TILLER, W. Rational B-Splines for Curve and Surface Representation. **IEEE Computer Graphics and Applications**, v. 3, p. 61-69, 1983.

WALL, W. A.; FRENZEL, M. A.; CHRISTIAN, C. Isogeometric structural shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 2976-2988, 2008.

WANG, C.; XIA, S.; WANG, X.; QIAN, X. Isogeometric shape optimization on triangulations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 331, p. 585-622, 2018.

WANG, D.; ZHANG, W. A general material perturbation method using fixed mesh for stress sensitivity analysis and structural shape optimization. **Computers and Structures**, v. 129, p. 40-53, 2013.

WANG, D.; ZHANG, W.; ZHU, J. A moving bounds strategy for the parameterization of geometric design variables in the simultaneous shape optimization of curved shell structures and openings. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 120, p. 80-91, 2016.

WANG, Y.; WANG, Z.; XIA, Z.; POH, L.. Structural Design Optimization Using Isogeometric Analysis: A Comprehensive Review. **Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 117, p. 455-507, 2018.

WANG, Z.-P.; ABDALLA, M.; TURTELTaub, S. Normalization approaches for the descent search direction in isogeometric shape optimization. **Computer-Aided Design**, v. 82, p. 68-78, 2017.

WILDEMANN, F.; MUÑOZ-ROJAS, P. Stress Recovery Techniques Applied to Plane Elasticity and Solids of Revolution. **In Proceedings of the XXVI CILAMCE-Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari, ES, Brazil.**, 2005.

WILKE, D. N. **Approaches to accommodate remeshing in shape optimization**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade de Pretoria. Pretória. 2010.

WILKE, D. N.; KOK, S.; GROENWOLD, A. A. Relaxed error control in shape optimization that utilizes remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 94, p. 273-289, 2013.

XU, G.; MOURRAIN, B.; DUVIGNEAU, R.; GALLIGO, A. Parameterization of computational domain in isogeometric analysis: methods and comparison. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 2021-2031, 2011.

YAO, T.-M.; CHOI, K. K. 3-D Shape optimal design and automatic finite element regriding. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p. 369-384, 1989.

YU-HONG, D.; SCHITTKOWSKI, K. A Sequential Quadratic Programming Algorithm with Non-Monotone Line Search. **Pacific Journal of Optimization**, IV, 2008. 335-351.

ZHANG, S.; BELEGUNDU, A. D. A systematic approach for generating velocity fields in shape optimization. **Structural Optimization**, v. 5, p. 84-94, 1992.

ZHANG, S.; BELEGUNDU, A. D. Mesh Distortion Control in Shape Optimization. **AIAA Journal**, v. 31, p. 1360-1362, 1992.

ZHANG, W. H.; FLEURY, C. Structural Shape Optimization and Convex Programming Methods. **IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems. Solid Mechanics and its Applications**, v. 43, p. 357-364, 1996.

ZHANG, W.; WANG, D.; YANG, J. A parametric mapping method for curve shape optimization on 3D panel structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, p. 485-504, 2010.

ZHANG, W.-H.; BECKERS, P.; FLEURY, C. A Unified parametric design approach to structural shape optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, p. 2283-2292, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CAMPBELL, J. S. Shape Optimization and sequential Linear Programming. In: \_\_\_\_\_ **Optimum Srrucrural Design**. Nova York: (Ed. Gallagher R. H. and Zienkiewicz O. C.).John Wiley, 1973.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** , Swansea, v. 101, p. 207-224, 1992.

## APÊNDICE A – Pesos e pontos para integração por quadratura

Os pesos e os pontos de integração podem ser definidos de duas maneiras. Uma maneira é obtida através de

$$\int_{-1}^1 p(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} W_i p(\xi_i), \quad (102)$$

onde  $p(\xi)$  é um polinômio de grau  $2n - 1$

$$p(\xi) = a_{(2\tilde{n}-1)} \xi^{(2\tilde{n}-1)} + a_{(2\tilde{n}-2)} \xi^{(2\tilde{n}-2)} + \dots + a_0 \xi^0. \quad (103)$$

Com isso a equação (102), fornece um sistema não linear de ordem  $2n$ , que a solução resultará nos  $n$  pesos  $W$  correspondentes aos  $\tilde{n}$  pontos  $\xi$ .

Outra maneira mais simples de calcular os pontos de integração é através da família de polinômios ortogonais de Legendre, em que as  $\tilde{n}$  raízes do polinômio  $P_{\tilde{n}}(x)$  coincide com os pontos de integração,

$$P_{\tilde{n}}(\xi) = \frac{1}{2^{\tilde{n}} \tilde{n}!} \frac{d^{\tilde{n}}}{d\xi^{\tilde{n}}} [(\xi^2 - 1)^{\tilde{n}}], \quad (104)$$

e os pesos  $W$  podem ser calculados por,

$$W_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2) \left[ \frac{d P_{\tilde{n}}(\xi_i)}{d\xi} \right]} \quad (105)$$

ou por

$$W_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\tilde{n}} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_j - \xi_i} d\xi \quad (106)$$

em que os índices  $i$  e  $j$  representam a  $i$ -ésima e  $j$ -ésima raízes  $\xi$  do polinômio de Legendre de grau  $\tilde{n}$ . A Tabela 5 mostra os pesos e pontos para  $\tilde{n} = 1, 2$  e  $3$ .

Tabela 5 - Pontos e pesos para quadratura de Gauss-Legendre

$\tilde{n}$	1	2		3		
$\xi$	0	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3/5}$	0	$\sqrt{3/5}$
$W$	2	1	1	5/9	8/9	5/9

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.



## APÊNDICE B – Derivadas das curvas e superfícies NURBS

Neste apêndice, apresenta-se a obtenção das derivadas primeiras a partir da expressão geral da derivada da superfície NURBS. Pois apenas as derivadas primeiras são necessárias para a parametrização da malha de elementos finitos.

Dada a expressão da superfície NURBS na equação (6), reescreve-se,

$$S(u, v) = \mathbf{S} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}} = \frac{\mathbf{A}(u, v)}{w(u, v)}, \quad (107)$$

que, alternativamente pode expressada de forma compacta em função da base racional,

$$S(u, v) = \mathbf{S} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} P_{ij} \quad (108)$$

onde  $R_{ij}$  é

$$R_{ij} = \frac{N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}. \quad (109)$$

A  $k$ -ésima e  $l$ -ésima derivada da superfície  $\mathbf{S}$  com relação as coordenadas paramétricas podem ser representadas por,

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial^{k,u} \partial^{l,v}} S(u, v) = \mathbf{S}^{(k,l)}, \quad (110)$$

em que a expressão geral para  $\mathbf{S}^{(k,l)}$  é dada por (PIEGL e TILLER, 1997),

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(k,l)} = \frac{1}{w} & \left( \mathbf{A}^{(k,l)} - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i,0)} \mathbf{S}^{(k-i,l)} - \sum_{j=1}^l \binom{l}{j} w^{(0,j)} \mathbf{S}^{(k,l-j)} \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \sum_{j=1}^l \binom{l}{j} w^{(i,j)} \mathbf{S}^{(k-i,l-j)} \right) \end{aligned} \quad (111)$$

onde  $\mathbf{A}^{(k,l)}$ , é a  $k$ -ésima e  $l$ -ésima derivada de  $\mathbf{A}$  (em que  $\mathbf{A}$  é o numerador na equação (107)), e é dada por,

$$\mathbf{A}^{(k,l)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^{p-k}(u) N_j^{q-l}(v) w_{ij} P_{ij}, \quad (112)$$

e  $N_i^{p^{\mathbb{k}}}(u)$  e  $N_j^{q^{\mathbb{l}}}(v)$ , são a  $\mathbb{k}$ -ésima e  $\mathbb{l}$ -ésima derivadas das funções de base nas direções de  $u$  e  $v$  respectivamente. Esta derivada é mostrada apenas para a direção  $u$ , sendo um desenvolvimento análogo para a direção  $v$ ,

$$\frac{\partial^{\mathbb{k}} N_i^p(u)}{\partial u} = N_i^{p^{\mathbb{k}}}(u) = p \left( \frac{N_i^{p-1^{\mathbb{k}-1}}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1}^{p-1^{\mathbb{k}-1}}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right), \quad (113)$$

e finalmente  $w^{(i,j)}$  na equação (110), representam a  $i$ -ésima e  $j$ -ésima derivada de  $w$  (em que  $w$  é o denominador na equação (107)), que de maneira semelhante a equação (112), é descrita por,

$$w^{(i,j)} = \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_i^{p^{\hat{i}}}(u) N_j^{q^{\hat{j}}}(v) w_{ij}. \quad (114)$$

De posse das equações da  $\mathbb{k}$ -ésima e  $\mathbb{l}$ -ésima derivada da superfície NURBS, deseja-se obter as derivadas primeiras na direção  $u$ , em que  $\mathbb{k} = 1, \mathbb{l} = 0$ , e  $v$  em que  $\mathbb{k} = 0, \mathbb{l} = 1$ . Isso pode ser denotado por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} S(u, v) &= S_{,u} = \mathbf{S}^{(1,0)} \\ \frac{\partial}{\partial v} S(u, v) &= S_{,v} = \mathbf{S}^{(0,1)} \end{aligned} \quad (115)$$

quando,  $\mathbb{k} = 1$  e  $\mathbb{l} = 0$  na equação (110), o terceiro e o quarto termo do lado direito são nulos, então a primeira derivada na direção  $u$  resulta em,

$$\mathbf{S}^{(1,0)} = S_{,u} = \frac{1}{w} (\mathbf{A}_{,u} - w_{,u} \mathbf{S}), \quad (116)$$

desenvolvimento análogo para  $\mathbb{k} = 0$  e  $\mathbb{l} = 1$ , neste caso, o segundo e o quarto termo do lado direito da equação (110) são nulos, então para direção  $v$ , obtém-se

$$\mathbf{S}^{(0,1)} = S_{,v} = \frac{1}{w} (\mathbf{A}_{,v} - w_{,v} \mathbf{S}). \quad (117)$$

Resolvendo  $\mathbf{A}_{,u} = \mathbf{A}^{(1,0)}$  na equação (112),  $w_{,u} = w^{(1,0)}$  na equação (114), e substituindo  $\mathbf{S}$  na forma compacta,  $\mathbf{A}_{,u}$  e  $w$  na equação (116), obtém-se

$$S_{,u} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,u}^p(u) N_j^q(v) w_{ij} P_{ij} - [\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,u}^p(u) N_j^q(v) w_{ij}] [\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} P_{ij}]}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}, \quad (118)$$

rearranjando os termos do numerador, obtém-se, finalmente,

$$S_{,u} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,u}^p(u) N_j^q(v) w_{ij} \{P_{ij} - [\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} P_{ij}]\}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}, \quad (119)$$

o desenvolvimento análogo é feito para  $S_{,v}$ , resultando em,

$$S_{,v} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_{j,v}^q(v) w_{ij} \{P_{ij} - [\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} P_{ij}]\}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(u) N_j^q(v) w_{ij}}. \quad (120)$$