

Esse trabalho tem o intuito de ensinar aos alunos o Princípio de Cavalieri, uma ferramenta de fácil utilização e que, inclusive, serve como fundamento à determinação das fórmulas utilizadas. Para tal, o ensino do Princípio de Cavalieri é mediado por materiais concretos confeccionados com a utilização da tecnologia de impressão 3D, e pela exploração dinâmica dos sólidos por meio do software GeoGebra. Com esses elementos, foi possível elaborar uma sequência didática que foi aplicada a uma turma da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública do município de Joinville.

Orientador: Rogério de Aguiar

Coorientadora: Elisandra Bar de Figueiredo

Joinville, 2019

ANO
2019

LUIZ GUSTAVO CUNHA | CÁLCULO DE VOLUMES USANDO O PRINCÍPIO DE
CAVALIERI MEDIADO POR MATERIAIS CONCRETOS



UDESC

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CÁLCULO DE VOLUMES USANDO O
PRINCÍPIO DE CAVALIERI
MEDIADO POR MATERIAIS
CONCRETOS**

LUIZ GUSTAVO CUNHA

JOINVILLE, 2019

LUIZ GUSTAVO CUNHA

**CÁLCULO DE VOLUMES USANDO O PRINCÍPIO DE CAVALIERI MEDIADO
POR MATERIAIS CONCRETOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), no Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Rogério de Aguiar

Coorientadora: Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

Joinville - SC

2019

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UEDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Cunha, Luiz Gustavo

Cálculo de volumes usando o Princípio de Cavalieri mediado
por materiais concretos / Luiz Gustavo Cunha. -- 2019.

94 p.

Orientador: Rogério de Aguiar

Coorientadora: Elisandra Bar de Figueiredo

Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional,
Joinville, 2019.

1. Cálculo de volumes. 2. Princípio de Cavalieri. 3. Materiais
concretos. 4. Sequência didática. I. Aguiar, Rogério de. II.
Figueiredo, Elisandra Bar de. III. Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV.
Titulo.

**Cálculo de Volumes Usando o Princípio de Cavalieri Mediado por Materiais
Concretos**

por

Luiz Gustavo Cunha

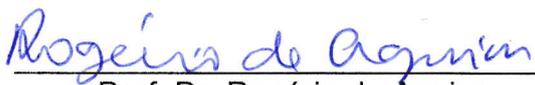
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM MATEMÁTICA

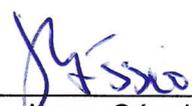
Área de concentração em "Ensino de Matemática"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

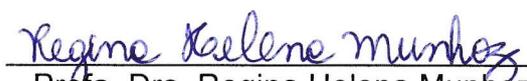
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga
UFSC/Blumenau



Profa. Dra. Regina Helena Munhoz
CCT/UDESC

Joinville, SC, 3 de julho de 2019.

Dedico esse trabalho à minha família, que tanto me apoiou e me ajudou a crescer, não apenas como esposo e pai, mas como ser humano.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por toda a força, proteção e sabedoria concedida.

À minha família, em especial à minha esposa Patricia, pelo apoio, tempo e paciência oferecidos durante essa caminhada.

Aos meus orientadores, professores Rogério e Elisandra, por toda a ajuda e companheirismo dedicados a mim no decorrer de todo o curso. Levarei comigo seus ensinamentos e lições, que me ajudaram a crescer profissionalmente.

Aos professores do PROFMAT – UDESC, que dedicaram seu tempo e conhecimento ao nosso aprendizado.

Aos colegas de turma, que compartilharam de momentos de alegria e de tristeza durante esses dois anos, em especial ao Jucemir, à Marciane e à Silvana, pelas constantes trocas de experiências durante as várias tardes de estudos.

À direção e aos alunos da EEB Prof^a. Antônia Alpaídes C. dos Santos, que desempenharam seu papel nesse trabalho.

A todos que de alguma maneira, direta ou indiretamente, ajudaram nesse trabalho.

RESUMO

Situações envolvendo o cálculo de volumes surgem naturalmente em diversos momentos no nosso cotidiano, porém, no ensino regular, o cálculo de volume de sólidos geométricos é transmitido de forma superficial. Em geral, quando ensinado, apenas aplicam-se as fórmulas correspondentes a cada sólido, de maneira mecânica e sem muita reflexão sobre o tema. Esse trabalho tem o intuito de dar suporte nesse aspecto, utilizando por base o Princípio de Cavalieri, uma ferramenta de fácil utilização e que, inclusive, serve como fundamento à determinação das fórmulas utilizadas. Para tal, o ensino do Princípio de Cavalieri é mediado por materiais concretos confeccionados com a utilização da tecnologia de impressão 3D, e pela exploração dinâmica dos sólidos por meio do software GeoGebra. Com esses elementos, foi possível elaborar uma sequência didática que foi aplicada a uma turma da terceira série do Ensino Médio de uma escola pública do município de Joinville. No decorrer do texto serão apresentados alguns aspectos relevantes ao tema, como dados históricos sobre o cálculo de volumes utilizando o Princípio de Cavalieri e a aplicação da teoria do Cálculo Diferencial e Integral para o cálculo de volumes de sólidos geométricos, através do referencial teórico que fundamentou a pesquisa. Essa sequência didática mostrou-se como uma boa proposta, pois contribuiu para um entendimento mais completo sobre o volume dos sólidos utilizados. Finalizamos com uma análise sobre a proposta executada, juntamente com as conclusões obtidas e possíveis aperfeiçoamentos.

Palavras-chave: Cálculo de volumes, Princípio de Cavalieri, Materiais Concretos, Sequência didática.

ABSTRACT

Situations involving volume calculation naturally arise at various times in our daily lives, however, in regular education, the calculation of volume of geometric solids is transmitted superficially. In general, when taught, only the formulas corresponding to each solid are applied mechanically and without much reflection on the subject. This work is intended to support this aspect, based on the Cavalieri's Principle, an easy-to-use tool that even serves as a foundation for the determination of the formulas used. For this, the teaching of the Cavalieri's Principle is mediated by manipulatives made using 3D printing technology, and by the dynamic exploration of solids through GeoGebra software. With these elements, it was possible to elaborate a didactic sequence that was applied to a class of the third grade of the High School of a public school of the municipality of Joinville. During the text some aspects relevant to the subject will be presented, such as historical data on the calculation of volumes using the Cavalieri's Principle and the application of the theory of the Differential and Integral Calculus for the calculation of volumes of geometric solids, through the theoretical reference that based the search. This didactic sequence proved to be a good proposal, since it contributed to a more complete understanding of the volume of solids used. We conclude with an analysis of the proposal, together with the conclusions obtained and possible improvements.

Keywords: Volume calculation, Cavalieri's Principle, Manipulative, Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ideia de plano segundo Cavalieri.....	23
Figura 2: Ideia de sólido segundo Cavalieri.....	24
Figura 3: Princípio de Cavalieri para áreas.....	24
Figura 4: Princípio de Cavalieri para volumes.....	25
Figura 5: Aproximação da área de uma figura plana por falta.....	27
Figura 6: Cilindro reto.....	28
Figura 7: Prisma heptagonal.....	28
Figura 8: Pirâmide de base octogonal.....	29
Figura 9: Cone.....	30
Figura 10: Esfera.....	30
Figura 11: Bloco retangular.....	31
Figura 12: Aproximação do volume de um cone por falta.....	32
Figura 13: Relação entre duas pirâmides de mesma altura e área de base.....	35
Figura 14: Partição de um prisma triangular em três tetraedros de mesmo volume.....	36
Figura 15: Seções na esfera e na anticlépsidra por um plano horizontal a uma altura h do centro de cada um desses sólidos.....	37
Figura 16: Prisma pentagonal e cilindro no GeoGebra 5.0.....	39
Figura 17: Figura construída com base nos Cubos de Sierpinski.....	41
Figura 18: Faixa de Möbius.....	41
Figura 19: Recortes da pesquisa realizada pela aluna A.....	50
Figura 20: Sólidos confeccionados em impressão 3D.....	51
Figura 21: Questão 1 da atividade 3.....	51
Figura 22: Medição do diâmetro do cilindro.....	52
Figura 23: Questão 1 da atividade 3 respondida pela equipe G4.....	52
Figura 24: Equipe G3 medindo o diâmetro do cone.....	53
Figura 25: Questões 2 e 3 da atividade 3.....	53
Figura 26: Equipe G2 preenchendo a questão 2 da atividade 3.....	54
Figura 27: Questões 2 e 3 da atividade 3 respondidas pela equipe G1.....	55
Figura 28: A esfera e a anticlépsidra seccionadas na mesma altura.....	56
Figura 29: Questões 1 a 5 da atividade 6.....	57
Figura 30: Questões 6 e 7 da atividade 6.....	57
Figura 31: Equipe G2 com os instrumentos de medição.....	58
Figura 32: Equipe G1 com os sólidos.....	58
Figura 33: Questões 1 a 5 da atividade 6 da equipe G3.....	59
Figura 34: Questões 6 e 7 da atividade 6 respondidas pela equipe G3.....	59
Figura 35: Vaso semelhante ao desenhado pelo aluno.....	60
Figura 36: Imagem da simulação apresentada no GeoGebra.....	61

Figura 37: Respostas dos alunos à questão 8.....	64
Figura 38: Respostas dos alunos à questão 9.....	65
Figura 39: Respostas dos alunos à questão 10.....	65
Figura 40: Respostas dos alunos à questão 11.....	66
Figura 41: Respostas dos alunos à questão 12.....	66
Figura 42: Respostas dos alunos à questão 13.....	67
Figura 43: Somas superiores e inferiores de uma função f	69
Figura 44: Representação de um ponto P em coordenadas cartesianas.....	71
Figura 45: Representação de um ponto P em coordenadas polares.....	71
Figura 46: Representação de um ponto P em coordenadas cilíndricas.....	72
Figura 47: Representação de um ponto P em coordenadas esféricas.....	73
Figura 48: Comparação entre os sistemas de coordenadas de um ponto.....	73
Figura 49: Tabela de conversão entre os sistemas.....	74
Figura 50: Representação de um paralelepípedo retangular sob o gráfico de f	75
Figura 51: Representação de um paralelepípedo retangular interior ao sólido.....	76
Figura 52: Relação entre o tamanho da aresta e o tamanho de cada fatia.....	79
Figura 53: Cone de vértice na origem do sistema.....	80

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	17
2 ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL E O CÁLCULO DE VOLUMES.....	22
2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL.....	22
2.2 CAVALIERI E SEU PRINCÍPIO.....	23
3 CONCEITOS NECESSÁRIOS E FERRAMENTAS UTILIZADAS.....	26
3.1 CONCEITO DE ÁREA.....	26
3.2 CONCEITO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.....	27
3.2.1 Paralelepípedo.....	27
3.2.2 Cilindro.....	27
3.2.3 Prisma.....	28
3.2.4 Pirâmide.....	29
3.2.5 Cone.....	29
3.2.6 Esfera.....	30
3.3 CONCEITO DE VOLUME.....	30
3.4 CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS PELO PRINCÍPIO DE CAVALIERI.....	33
3.4.1 Paralelepípedo.....	33
3.4.2 Cilindro.....	34
3.4.3 Prisma.....	34
3.4.4 Pirâmide.....	34
3.4.5 Cone.....	36
3.4.6 Esfera.....	36
3.5 SOFTWARE GEOGEBRA.....	38
3.6 MATERIAL CONCRETO.....	39
3.7 IMPRESSÃO 3D.....	40
4 METODOLOGIA.....	43
4.1 CARACTERIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO.....	43
4.2 SUJEITOS DA PESQUISA.....	44
4.3 SOBRE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS.....	45
4.4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	46
4.5 ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA.....	47
4.6 A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA.....	49
5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	62
6 PARA ALÉM DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI.....	68
6.1 O CÁLCULO INTEGRAL.....	68
6.2 COORDENADAS RETANGULARES, CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS.....	70
6.3 O CÁLCULO DE VOLUMES.....	74
6.4 VOLUME DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.....	76

6.4.1 Bloco retangular.....	77
6.4.2 Prisma.....	77
6.4.3 Cilindro.....	77
6.4.4 Pirâmide.....	78
6.4.5 Cone.....	79
6.4.6 Esfera.....	81
6.5 PRINCÍPIO DE CAVALIERI.....	81
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	83
REFERÊNCIAS.....	85
ANEXOS E APÊNDICES.....	88
ANEXO A – CARTA DE ANUÊNCIA.....	89
ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO.....	90
APÊNDICE A – FICHA DE PESQUISA.....	91
APÊNDICE B – ATIVIDADES DE MEDIÇÃO E COMPARAÇÃO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.....	92
APÊNDICE C – O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA ESFERA.....	93
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO.....	94

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Geometria Espacial é assegurado na grade curricular dos estudantes do Ensino Médio mas, no ensino público, é abordado apenas no final do período letivo, “se der tempo”, de modo que muitas vezes, por experiência do autor, nem é trabalhado. Viana (2005, p. 73) já havia nos relatado isso:

Nas escolas públicas estaduais, a geometria é trabalhada como um assunto da matemática e é, em muitos casos, deixada pelos professores para ser tratada ao final do período letivo. Como os alunos enfrentam muitas dificuldades com a aritmética e a álgebra, o conteúdo referente à geometria acaba não sendo trabalhado. Assim, não é raro encontrar alunos do Ensino Médio que nunca estudaram geometria [...]

O conteúdo de Geometria Espacial, em particular o cálculo de volumes, é visto de forma muito rápida, sem muitas reflexões e apenas com aplicações básicas, o que impede o aluno de desenvolver o conhecimento de como calcular o volume dos sólidos, recaindo apenas numa reprodução de uma série de fórmulas decoradas.

Baseado em estudos de Lima et. al (2010) e Morais (2013), pode-se afirmar que, apesar de existirem várias maneiras de se calcular as áreas (da base e laterais) e volume, a preferência dos professores por outros conteúdos os impede de trabalhar o conteúdo de geometria de maneira mais aprofundada, uma vez que os livros didáticos oferecidos aos alunos não trazem propostas diferenciadas, que fujam das aplicações diretas das fórmulas.

Há ferramentas como o Teorema de Pappus e o Princípio de Cavalieri que podem ser usados para o cálculo de volumes. Esses dois métodos não utilizam cálculos avançados, somente ideias diferentes, e com essas ideias e cálculos mais simples (que os alunos já conhecem), podem ser calculados os volumes de sólidos de maneira a utilizar a comparação entre sólidos e melhorar a compreensão de conceito de volume e o que ele representa.

Os estudos proporcionados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) dão um suporte nesse sentido. Através dos estudos conceituais de cada uma das disciplinas foi possível perceber o que se ensina nas escolas, e com base em um referencial teórico mais aprofundado, desenvolver uma metodologia específica para o ensino do cálculo de volume de sólidos geométricos de forma mais estruturada, buscando obter relações de comparação entre sólidos mais simples com outros mais complexos.

Diante das pesquisas realizadas e das dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação ao cálculo de volumes de sólidos geométricos apresenta-se o seguinte questionamento: Como ensinar o cálculo de volumes de sólidos geométricos utilizando concomitantemente

materiais concretos e recursos computacionais, de modo que os alunos da terceira série do Ensino Médio de uma escola estadual compreendam melhor esse conceito?

Na busca pela resposta a esse questionamento, o presente trabalho tem por objetivo principal explorar o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio com o uso de materiais concretos e do software de geometria dinâmica GeoGebra. Para tal, é necessário antes fazer um resgate histórico sobre Cavalieri, para que se compreenda os motivos que o levaram a idealizar o princípio que leva o seu nome. A seguir, efetuaremos uma explanação a respeito das teorias sobre a inserção de material concreto e tecnologias em sala de aula, que darão suporte a nossa pesquisa. Desse modo, criamos subsídios para elaborar e aplicar uma sequência didática para os alunos do Ensino Médio abordando o Princípio de Cavalieri. Com os dados obtidos nessa aplicação, analisaremos o que foi realizado, procurando por indícios que possibilitem aprimorar o ensino e a aprendizagem do cálculo de volumes de sólidos geométricos.

Esse trabalho se justifica pelo motivo do conhecimento do cálculo de volumes ser importante em dois sentidos. Primeiramente, é um assunto recorrente no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), momento em que é importante que o aluno saiba os conceitos relacionados a cada conteúdo, uma vez que todas as perguntas são contextualizadas. Outro motivo é a sua aplicação em diversas áreas do conhecimento, como a engenharia, logística, medicina etc. Como os estudos oferecidos no Ensino Médio devem, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2002b, p. 8), “...preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho”, o aluno deve estar apto a resolver problemas que envolvam o cálculo de volumes, e não apenas utilizar fórmulas sem nem mesmo entender o porquê. Nesse sentido, percebe-se que é necessário um outro olhar sobre esse tema, a fim de que o aluno possa aprimorá-lo e aperfeiçoá-lo no decorrer de sua formação.

Na intenção de fugir dessa “reprodução automática”, esse trabalho visa apresentar aos alunos o Princípio de Cavalieri, um método que revolucionou a maneira de se calcular o volume de sólidos geométricos, e que inclusive serviu como precursor da ferramenta mais completa até hoje utilizada para o cálculo de áreas e volumes: o Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Eves (2011, p. 426), apesar de não ficar bem claro alguns conceitos que Cavalieri queria expressar, é certo que “Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo”. Porém, apesar deste método ser eficiente e que

tenha sido amplamente utilizado no século XVII, possui algumas limitações, como serão apontadas no decorrer da presente pesquisa.

Com o intuito de aguçar a curiosidade e o interesse dos alunos, a proposta é utilizar duas ferramentas: o software GeoGebra, que é gratuito e pode ser baixado livremente, e a impressão 3D. O GeoGebra, apesar de ser um programa para a simulação geométrica e algébrica de diversas situações diferentes que abrangem a matemática, é um recurso pouco utilizado nas escolas, seja pelas dificuldades encontradas devido à falta de estrutura das escolas, que possuem laboratórios de informática, mas não dispõe de professores preparados para operá-los, ou pela falta de incentivo aos professores para que estes saibam manipulá-los.

O software GeoGebra pode auxiliar muito na visualização de diversos conceitos, motivo pelo qual deveria ser utilizado na maioria das introduções de novos conteúdos, uma vez que a visualização é útil para que uma figura¹ sólida qualquer seja compreendida e analisada de maneira mais clara.

Mas o que se entende por visualização? Para Gutiérrez (1996, p. 9), “visualização na matemática é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizado para resolver problemas ou provar propriedades.”

Segundo Flores; Wagner; Buratto (2012, p.35)

Adicionar visualização no contexto da educação matemática, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma maior abrangência da cobertura em assuntos matemáticos, permitindo que os estudantes não somente aprendam matemática, mas também se tornem capazes de construir sua própria matemática.

Assim, por meio da inserção da visualização em sala de aula com a utilização do software GeoGebra, os alunos poderão ser capazes de visualizar dinamicamente diversos sólidos geométricos e poderão explorar dinamicamente o Princípio de Cavalieri.

Quanto à impressão 3D, o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA), composto por professores do departamento de matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) – Joinville, adquiriu duas impressoras 3D com recursos da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC), que se encontram no laboratório Fábrica Matemática (Fab3D), e desse modo foi possível produzir materiais concretos para os alunos explorarem o Princípio de Cavalieri.

Através da manipulação desses materiais espera-se que os alunos aprimorem seus entendimentos e, assim, compreendam melhor o cálculo de volume de sólidos geométricos pelo

¹ Neste trabalho será usada a palavra “figura” para designar indistintamente uma região limitada do espaço ou do plano. O contexto indicará a qual objeto está sendo estudado.

Princípio de Cavalieri. Para tal, foi elaborada uma sequência didática (Apêndices A, B, C e D) na qual os alunos, em grupos, foram instigados a determinar o volume de diferentes sólidos através da medida das áreas das seções que os compõem, a fim de compará-las. Esse exemplo pode ser encontrado em diversos livros didáticos, mas somente visto superficialmente e de forma teórica, sem que o aluno compreenda a ideia ali embutida.

Para fundamentar essa pesquisa, foi realizada uma revisão de literatura com o tema Princípio de Cavalieri nos portais SCIELO, CAPES e PROFMAT. No levantamento de pesquisas relacionadas ao nosso tema foram utilizados os seguintes descritores: “sólidos”, “volume” e “Cavalieri”, sendo essas também as Palavras-Chave das pesquisas realizadas. No portal SCIELO foram encontradas 3111 referências a “sólidos”, 162 referências a “volume de sólidos” e 7 referências a “volume de sólidos” e “Cavalieri”. Foi interessante observar que a maioria das 162 pesquisas referentes a “volume de sólidos” dizem respeito a área da medicina, com a utilização do Princípio de Cavalieri para o cálculo do volume de órgãos, tecidos e tumores detectados em ressonâncias, uma aplicação difícil de imaginar. No portal CAPES foram encontradas 1629 referências a “volume de sólidos”, também apresentando vários artigos da área da medicina. Destas, 7 referências surgiram nas pesquisas por “volume de sólidos” e “Cavalieri”. No portal PROFMAT foram encontradas 45 pesquisas referentes à “volume”, dos quais 17 respondem à “volume” e “Cavalieri”. De todas as pesquisas realizadas, destaco os trabalhos de TOSE (2017), de PRIMO (2013) e de AMAZONAS (2013), que se parecem com o propósito dessa pesquisa, todos encontrados no portal PROFMAT.

A dissertação de Tose (2017) destaca o Princípio de Cavalieri no cálculo de volumes de sólidos geométricos através de sólidos confeccionados a partir da sua planificação, auxiliando os alunos a entenderem a sua formação tridimensional e focando não só no cálculo de seus volumes, mas de suas áreas laterais e totais. Sua conclusão diz que os alunos conseguiram visualizar melhor os sólidos, contribuindo para um melhor entendimento dos cálculos.

Primo (2013) apresentou a utilização de recursos digitais, entre eles o GeoGebra, nos seus planejamentos, mas não apresentou a aplicação do seu plano. Os planos apresentados partiram da utilização do GeoGebra como recurso visual para os alunos, sendo que este utilizou outros softwares para completar o entendimento sobre os sólidos.

Amazonas (2013) aborda assuntos similares a nossa proposta. Ela elabora uma sequência didática que visa o cálculo de volumes utilizando o Princípio de Cavalieri. Para tal, utiliza quatro aulas: uma para explicar o Princípio de Cavalieri, a segunda para comparar os volumes do cilindro e do prisma, uma terceira para comparar cone e pirâmide, e a quarta para calcular o volume da esfera, utilizando a comparação com a anticlépsidra. As diferenças são

que a turma em que ela aplicou o trabalho tinha apenas 15 alunos, e no meu trabalho eram 25, e eu também utilizei o recurso dinâmico do GeoGebra, para melhorar a visualização e manipulação dinâmica dos elementos que compõem os sólidos aplicados.

Ao ler esses trabalhos, algumas referências apareceram com mais frequência. Então procurei também utilizar esses trabalhos como base na minha pesquisa. São eles:

- A Dissertação de Moraes (2013), que realizou um grande estudo de análise com os livros didáticos disponíveis nas escolas, comparando a maneira como cada autor aborda o tema volumes e como utilizam o Princípio de Cavalieri;
- O Trabalho de Conclusão de Curso de Silva (2005), que trouxe à luz os PCN's e a Proposta Curricular estadual e sua aplicação ao ensino de volumes em Santa Catarina.
- A monografia de Januário (2008), que aborda a utilização de materiais manipuláveis no ensino de matemática, em especial da geometria, apresentando aspectos visuais que foram utilizados nessa pesquisa.

Deste modo, o presente trabalho segue estruturado da seguinte forma: o capítulo 2 apresentará o modo como vem sendo tratado o ensino da geometria na atualidade e apresenta um pouco da história de Bonaventura Cavalieri e seu princípio. O capítulo 3 apresenta a fundamentação teórica necessária a aplicação da sequência didática e os meios utilizados, o GeoGebra e o material concreto produzido com a impressora 3D. Os capítulos 4 e 5 apresentam a sequência didática realizada, além dos desafios encontrados e resultados obtidos com ela. Já o capítulo 6 apresenta o modo mais formal e completo de se calcular volumes, conhecido como Cálculo Diferencial e Integral. Sob essa ótica, serão apresentadas as demonstrações de como proceder com cada um dos sólidos trabalhados, bem como demonstrar o próprio funcionamento do Princípio de Cavalieri. No capítulo final apresentam-se as considerações finais sobre a pesquisa realizada e perspectivas de trabalhos futuros.

2 ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL E O CÁLCULO DE VOLUMES

Neste capítulo serão mencionados o estado atual do ensino da Geometria Espacial, bem como uma base histórica fundamental a este trabalho, para possibilitar algumas reflexões sobre o ensino de Geometria Espacial aos alunos do Ensino Médio.

2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

De acordo com Silva (2005), que realizou uma análise criteriosa sobre o ensino de geometria espacial na Proposta Curricular de Santa Catarina – PC-SC (SANTA CATARINA, 1998) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 2002a e 2002b), o estudo de volumes dos sólidos geométricos deve ser realizado na segunda série do Ensino Médio, mas esta é apenas uma sugestão, de modo que o professor fica livre para inseri-lo em outro momento. Com isso, de modo geral ele é trabalhado na terceira série do Ensino Médio. Sabemos que o grande guia do professor em sala de aula é o livro didático que ele possui. E cabe aqui uma reflexão. Apesar de ser importante, muitos livros didáticos não demonstram o porquê de os sólidos possuírem tais fórmulas, deixando o aluno acreditar que esta é a única maneira de se efetuar o cálculo de volumes e que as fórmulas devem ser memorizadas. Poucos livros apresentam o motivo principal dessas fórmulas possuírem esse formato: a aplicação do Princípio de Cavalieri. Afirma Lima et. al. (2010, p. 86)

Nos livros didáticos brasileiros, este assunto é apresentado, em geral, de forma bastante insatisfatória. Muitos sequer dizem o que significa calcular um volume e vários outros chutam, sem dó nem piedade, todas as fórmulas. Alguns citam o Princípio de Cavalieri, mas não o utilizam corretamente, e outros nem isso fazem.

Morais realizou um estudo sobre sete coleções de livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD no ano de 2012 e constatou que, apesar de todas as sete coleções analisadas abordarem o Princípio de Cavalieri para o desenvolvimento das fórmulas encontradas, afirma que “[...] ainda há avanços necessários quanto à abordagem desse princípio, uma vez que algumas coleções não justificam, por exemplo, a igualdade entre as áreas das seções [...]” (MORAIS, 2013, p. 116)

Ao observar a atual Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), proposta já aprovada e que deverá entrar em vigor nos próximos anos, fica claro que, entre as habilidades exigidas dos alunos do Ensino Médio, está: “Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o Princípio de Cavalieri,

para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.” (BRASIL, 2018, p. 533). Portanto, o conhecimento do Princípio de Cavalieri deverá ser melhor trabalhado a partir dos próximos anos, mas isso apenas ocorrerá se essa atenção for dada nos cursos de licenciatura, momento em que os futuros professores são instruídos e desafiados ao domínio de tais ferramentas.

2.2 CAVALIERI E SEU PRINCÍPIO

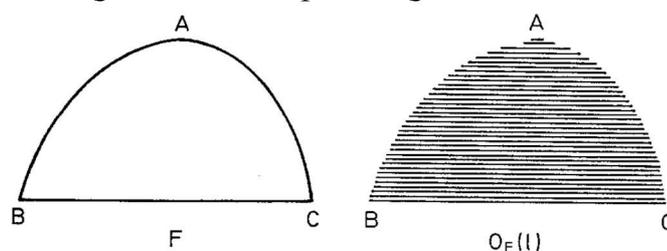
Segundo Eves (2011), Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598 e, aos 15 anos de idade tornou-se jesuado (ordem religiosa de Milão). Foi aluno de Galileu e, provavelmente por intermédio deste, atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647. Deixou uma obra vasta abrangendo matemática, óptica e astronomia. Foi um dos responsáveis pela introdução dos logaritmos de Napier na Europa, tornando-se com isso um matemático muito influente. A obra que se tornou seu legado foi o tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu *método dos indivisíveis*, cujas raízes remontam a Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.), mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler (1571 – 1630) de calcular áreas e volumes, como o volume de barris de vinho.

Seu método, segundo Howard Eves, se baseia na ideia de que

um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. (EVES, 2011, p. 425)

Assim, um plano poderia ser pensado como uma infinidade de cordas de diâmetro desprezível colocadas lado a lado, como apresentado na Figura 1.

Figura 1: Ideia de plano segundo Cavalieri

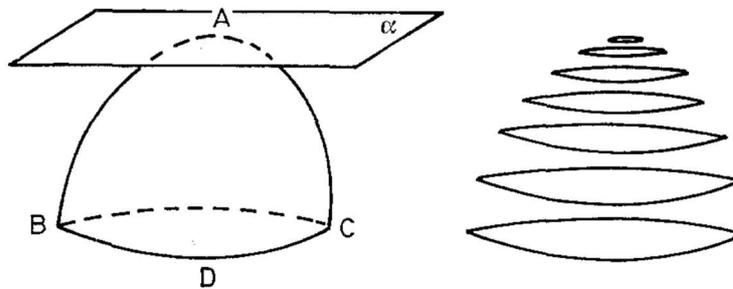


Fonte: ANDERSEN, 1984, p. 301.

De modo semelhante, um sólido poderia ser representado como uma infinidade de placas de espessura desprezível paralelas entre si, como representado na Figura 2. O leitor que

conhece o cálculo integral perceberá a familiaridade do método, pois é justamente essa ideia uma das precursoras de tal conceito.

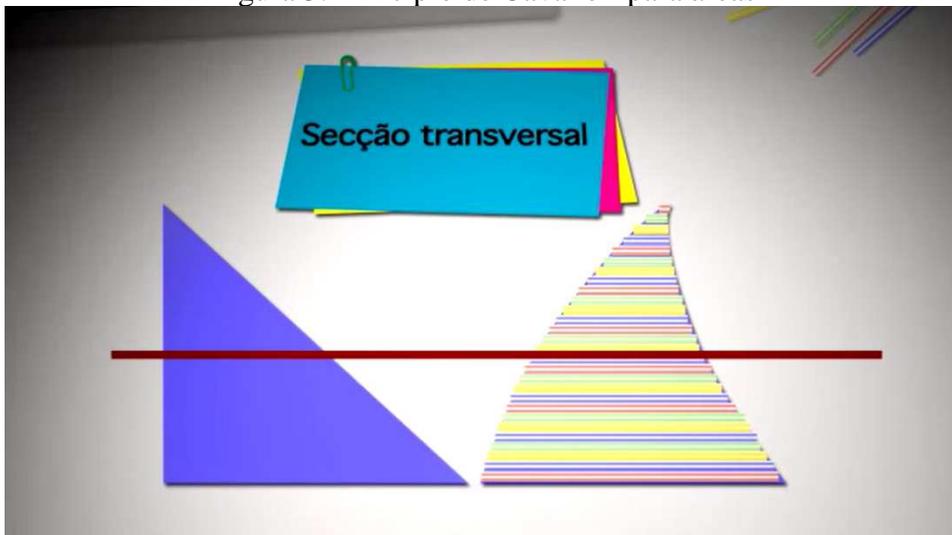
Figura 2: Ideia de sólido segundo Cavalieri



Fonte: ANDERSEN, 1984, p. 311.

Afirma Eves (2011, p. 426), que essas ideias deram origem aos chamados Princípios de Cavalieri: “Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante”, conforme Figura 3.

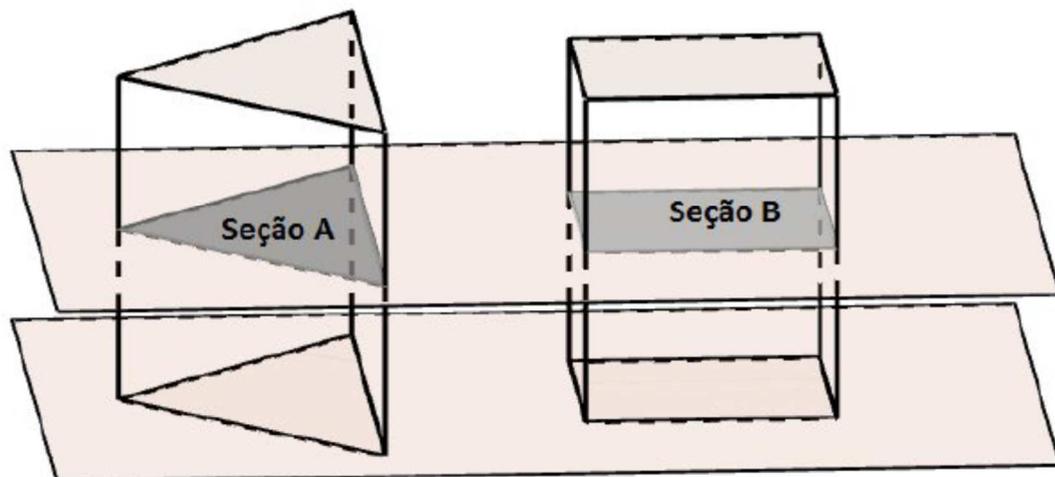
Figura 3: Princípio de Cavalieri para áreas



Fonte: YAKHNI, 2010. Tempo: 2'43”.

De modo semelhante, conforme Figura 4, “Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante”. (EVES, 2011, p.426)

Figura 4: Princípio de Cavalieri para volumes
Sólido A **Sólido B**



Fonte: PRIMO, 2013, p. 22.

Segundo Lima (2006, p. 85), “o Princípio de Cavalieri é um teorema, isto é, pode ser demonstrado.” Apesar disso, ele é comumente aceito como um axioma, pois sua demonstração requer conceitos avançados de Teoria da Medida, o que foge ao objetivo deste trabalho. No entanto, através do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, o Princípio de Cavalieri, apesar de intuitivo, pode ser provado com maior rigor. Lima (2006, p. 107) afirma ainda que “No fundo, o Princípio de Cavalieri é um resultado sobre integrais (corresponde a afirmar que uma integral múltipla pode ser calculada por meio de repetidas integrais simples)”. Essa demonstração será apresentada no capítulo 6 “Para Além do Princípio de Cavalieri”.

3 CONCEITOS NECESSÁRIOS E FERRAMENTAS UTILIZADAS

Este capítulo apresentará as ideias que fundamentaram toda a sequência didática e o modo como foi trabalhada. Apresentam-se os conceitos de área e volume, os sólidos utilizados nas atividades, bem como as formas de se chegar ao cálculo de seus volumes, através do Princípio de Cavalieri. Apresenta-se ainda os recursos didáticos utilizados durante as atividades: o software GeoGebra e o material concreto produzido na impressora 3D. Todos os conceitos geométricos utilizados aqui possuem como referência os livros “Medidas e Formas em Geometria”, de Elon Lages Lima (LIMA, 2006) e “Geometria”, de Antônio Caminha Muniz Neto (MUNIZ NETO, 2013).

3.1 CONCEITO DE ÁREA

Intuitivamente, a área de uma figura é a porção do plano ocupada por ela. Para medi-la, a comparamos com uma unidade de área. A área dessa figura seria então expressa pela quantidade de vezes que a unidade de área cabe dentro dessa figura. Para tal, associamos a unidade de área com um quadrado com lados medindo uma unidade de comprimento. Assim, um quadrado qualquer teria lados medindo a , sendo a um número real que representa a quantidade de quadrados unitários justapostos que foram utilizados, e esse quadrado teria como medida de área a^2 . Um retângulo de lados a e b contém ab quadrados de lado a , de modo que sua área possui medida ab .

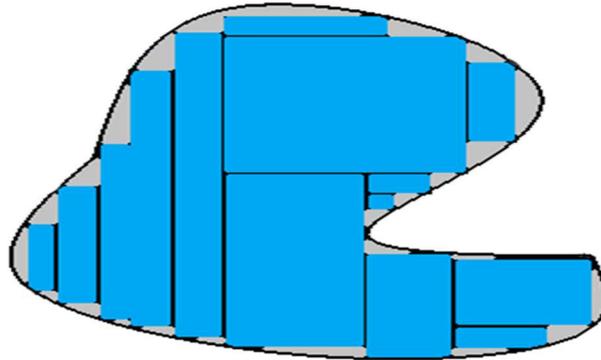
Desse modo pode-se medir a área dos polígonos utilizando a associação de cada polígono P a um número real não-negativo, através de três propriedades:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se P é um quadrado com lado unitário, então área de $P = 1$.
3. Se P pode ser decomposto com reunião de n polígonos P_1, \dots, P_n tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i .

Segue que se o polígono P está contido no polígono Q , então a área de P é menor do que a área de Q . Assim, teríamos uma aproximação da medida da área de Q por falta (Figura 5). Associemos esta medida de área de Q a um número real $a(Q)$. Com isso, podemos definir a área da figura Q como um número real cujas aproximações por falta são as áreas dos retângulos F contidos em Q . Assim tem-se

$$a(F) \leq a(Q).$$

Figura 5: Aproximação da área de uma figura plana por falta



Fonte: Produção do autor, 2019.

3.2 CONCEITO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Mostraremos aqui como é conceituado cada um dos sólidos que foram utilizados na sequência didática, a fim de compreender o modo como foi pensado o cálculo do seu volume.

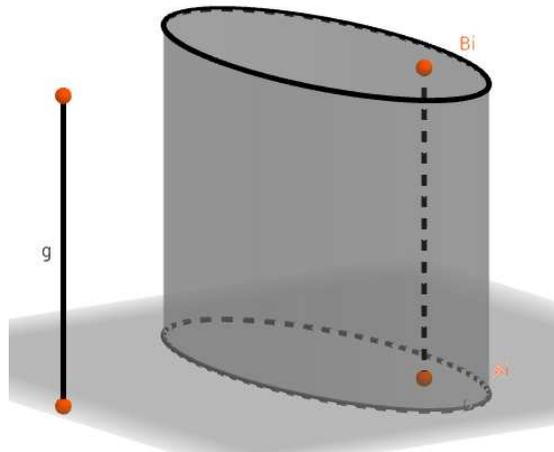
3.2.1 Paralelepípedo

Um paralelepípedo é um sólido limitado por seis paralelogramos: suas faces. Essas faces agrupam-se em três pares, e em cada par suas faces são paralelas, congruentes, e dizem-se opostas. Quando se toma uma das faces do paralelepípedo como base, a altura correspondente é a distância entre essa face e a sua oposta, ou seja, é o comprimento da perpendicular baixada de um ponto da face oposta sobre o plano da base. As arestas de um paralelepípedo são os lados dos paralelogramos que constituem suas faces, de modo que cada aresta é comum a duas faces. Um paralelepípedo com faces retangulares é um bloco retangular. Um caso particular de bloco retangular é o cubo, cujas faces são formadas por quadrados congruentes.

3.2.2 Cilindro

Seja um plano α e uma figura plana F contida em α , chamada a base do cilindro. O cilindro fica determinado pela figura F e por um segmento de reta $g = AB$, não paralelo ao plano α , chamado geratriz do cilindro. Por cada ponto A_i de F levantamos um segmento de reta $a_i = A_iB_i$, paralelo a g e do mesmo comprimento que g . A reunião desses segmentos é o cilindro C , de base F e geratriz g . As extremidades B_i dos segmentos a_i não pertencentes à base F constituem uma figura plana F' , contida num plano paralelo ao plano α , conforme Figura 6. A distância entre esses planos é chamada altura de C .

Figura 6: Cilindro reto



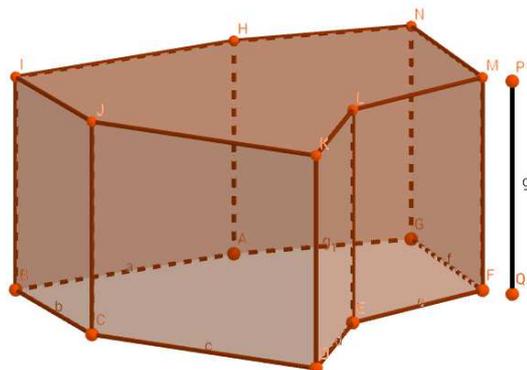
Fonte: Produção do autor, 2019.

Perceba que, com esse conceito, o cilindro pode possuir uma base de formato qualquer. Quando a geratriz g é perpendicular ao plano da base, dizemos que o cilindro é reto. Como nesse trabalho utilizaremos uma base circular, o cilindro será chamado de “cilindro circular reto”. Para evitar o excesso de denominações, daqui por diante o cilindro circular reto será chamado simplesmente de cilindro.

3.2.3 Prisma

Dada a definição de cilindro, um caso particular é quando essa base F é um polígono. Quando isso ocorre, o sólido C fica limitado por faces planas e chama-se um prisma. Logo, prisma é um cilindro cujas bases são polígonos (Figura 7). Desse modo, um paralelepípedo também é um caso particular de cilindro. Os prismas podem ser ainda denominados segundo a quantidade de arestas n que a base possui, recebendo o nome de prisma n -agonal.

Figura 7: Prisma heptagonal

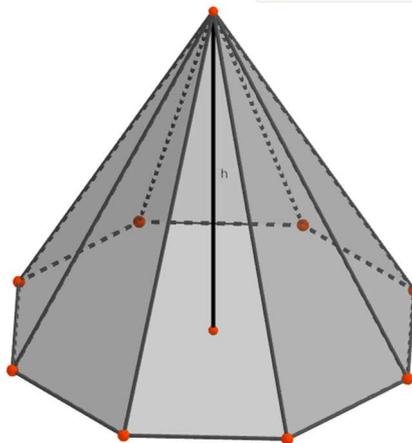


Fonte: Produção do autor, 2019.

3.2.4 Pirâmide

Uma pirâmide K , tendo como base um polígono F contido em um plano α e como vértice um ponto P situado fora do plano α , é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F , conforme Figura 8. O plano que contém F é considerado o plano horizontal, e a distância entre o ponto P e este plano é chamada altura h da pirâmide. Assim como os prismas, as pirâmides podem se diferenciar segundo a quantidade n de arestas que formam a sua base, sendo denominada pirâmide de base n -agonal.

Figura 8: Pirâmide de base octogonal



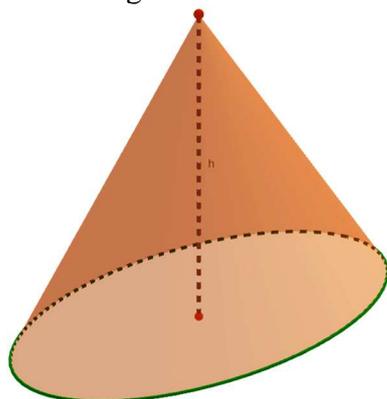
Fonte: Produção do autor, 2019.

3.2.5 Cone

Um cone L , tendo como base uma figura plana F , e como vértice um ponto P situado fora do plano que contém F , é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F , conforme a Figura 9. O plano que contém a base F do cone L será considerado horizontal. A distância do vértice P a este plano, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de P sobre o plano, chama-se altura h do cone.

Do mesmo modo que comparamos o cilindro ao prisma, a pirâmide também é um caso particular dos cones, caso em que a base é um polígono. Se essa base for uma figura plana qualquer, temos um cone. Nesse trabalho utilizamos apenas o cone cuja base é um círculo, denominado cone circular. Por excesso de informações, chamaremos o cone circular simplesmente por cone. Quando o pé do vértice P , baixado perpendicularmente à base desse cone, coincidir com o centro do círculo que forma sua base, temos um cone circular reto. Se isso não ocorrer, temos em cone circular oblíquo.

Figura 9: Cone

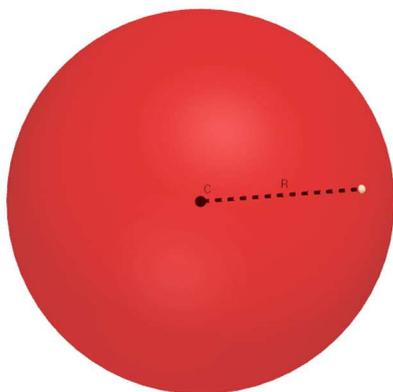


Fonte: Produção do autor, 2019.

3.2.6 Esfera

A esfera de centro num ponto C e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto C é menor do que ou igual a R . Em outras palavras, tal esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em C e comprimento igual a R , conforme Figura 10.

Figura 10: Esfera

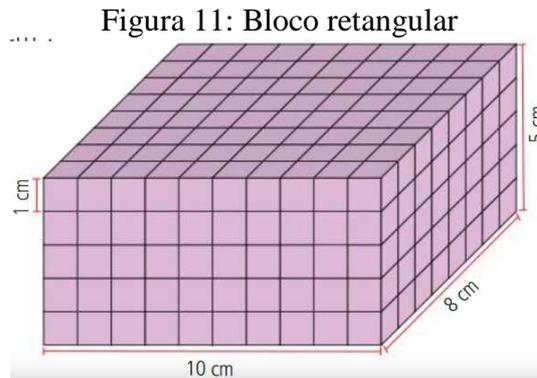


Fonte: Produção do autor, 2019.

3.3 CONCEITO DE VOLUME

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço ocupada por ele. De modo semelhante à área, para medir esse volume precisamos compará-la a uma unidade, em que costumeiramente é utilizado um cubo de arestas medindo uma unidade de comprimento, de modo que o seu volume mede uma unidade de volume. Esse cubo unitário torna-se a unidade de volume. A quantidade de cubos que couberem nesse sólido indica o seu volume, expresso por um número real positivo. Podemos ainda justapor os cubos unitários, de modo a formar um

bloco retangular, cujas medidas dos lados sejam a , b e c . Assim, o bloco conterá $a \times b \times c$ blocos unitários e, portanto, o volume desse bloco retangular B é $V(B) = abc$, um número natural. Na Figura 11, as medidas a , b e c medem, respectivamente, 10 cm, 8 cm e 5 cm, de modo que o volume do bloco retangular é de 400 cm^3 .



Fonte: Acervo do autor, 2019.

Se as medidas desse bloco forem números racionais, podemos dividir a aresta do cubo unitário medindo n em cubos menores, de aresta q . Assim, cada aresta desse cubo unitário é dividida em q partes iguais, com cada nova aresta medindo $1/q$. Desse modo, justapondo esses cubos formamos um cubo de volume $(1/q)^3$. Representando, assim, que cada aresta de um bloco retangular B possua medidas a/q , b/q e c/q , formamos um cubo de volume

$$\text{vol}(B) = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q} = \frac{abc}{q^3}$$

que é um número racional positivo.

E se as medidas desse bloco retangular não forem racionais? Consideremos, então, um bloco retangular P cujas dimensões são os números reais a , b e c . Sejam ainda as sequências de números racionais $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ e $(c_n)_{n \geq 1}$, com $a_n < a$, $b_n < b$ e $c_n < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ com a_n , b_n e c_n tendendo para a , b e c , respectivamente, quando n tende ao infinito. Tomemos um bloco retangular P_n de dimensões a_n , b_n e c_n . O item anterior indica que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $V(P) \geq V(P_n) = a_n b_n c_n$. De fato, a relação anterior é válida para todo n natural, e quando $n \rightarrow \infty$ temos que $a_n b_n c_n \rightarrow abc$. Dessa forma, fazendo $n \rightarrow \infty$ em $V(P) \geq V(P_n) = a_n b_n c_n$ vem que $V(P) \geq abc$. Analogamente, tomando as sequências $(a'_n)_{n \geq 1}$, $(b'_n)_{n \geq 1}$ e $(c'_n)_{n \geq 1}$ de números racionais de modo que $a'_n > a$, $b'_n > b$ e $c'_n > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ com a'_n , b'_n e c'_n tendendo a a , b e c , respectivamente, para $n \rightarrow \infty$, podemos demonstrar de forma análoga que $V(P) \leq abc$. Assim, quando n tende ao infinito, temos que $abc \leq V(P) \leq abc$, ou seja, $V(P) = abc$.

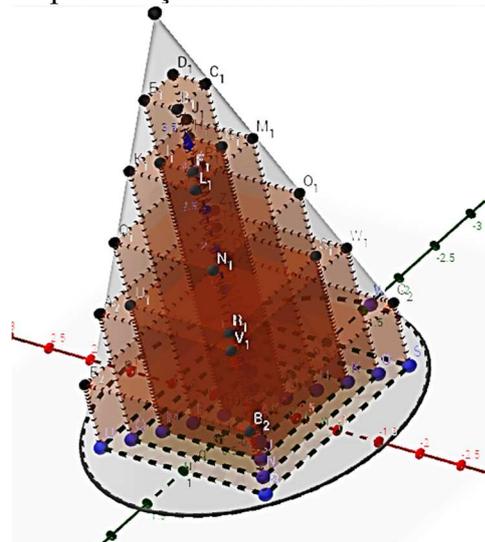
Para que possamos definir a ideia de volume utilizemos a definição de que poliedro retangular é todo sólido que pode ser formado pela reunião de um número finito de blocos retangulares justapostos. Para medir seu volume basta somar os volumes de cada bloco retangular que o constitui. Dado um sólido S , para cada poliedro retangular P contido em S , sabemos calcular $\text{vol}(P)$. O número $V = \text{vol}(S)$ deve satisfazer a condição

$$\text{vol}(P) \leq V \text{ para todo poliedro retangular } P \text{ contido em } S.$$

Assim, os números $\text{vol}(P)$ fornecem o volume de S por falta, conforme Figura 12. Aumentando o número de blocos retangulares P nos aproximamos cada vez mais do volume de S . Isso significa que não apenas se tem $\text{vol}(S) \geq \text{vol}(P)$ para todo poliedro retangular P contido em S como também, dado qualquer número real r tal que $r < \text{vol}(S)$, é possível achar um poliedro retangular T , contido em S , com

$$r < \text{vol}(T) \leq \text{vol}(S).$$

Figura 12: Aproximação do volume de um cone por falta



Fonte: Produção do autor, 2019.

Seja ainda um poliedro retangular Q que contém o sólido S . Podemos calcular seu volume, de modo que

$$V \leq \text{vol}(Q) \text{ para todo poliedro retangular } Q \text{ contendo } S.$$

Esse será o volume de S por excesso. Quanto menores forem os poliedros retangulares que contêm S , melhor sua aproximação com $\text{vol}(S)$.

Com isso, podemos dizer que o volume de S é tal que

$$\text{vol}(P) \leq V \leq \text{vol}(Q)$$

de modo que V é o único número real positivo que satisfaz essa condição.

3.4 CÁLCULO DE VOLUME DOS SÓLIDOS PELO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Agora será demonstrado como obter o volume dos sólidos utilizados na sequência didática, utilizando como base o Princípio de Cavalieri. Esse princípio reduz muito o trabalho para se calcular o volume dos sólidos que citaremos, e tantos outros não citados. Para tal, escolhamos um plano, que chamaremos plano horizontal. Todos os planos paralelos a ele serão também chamados planos horizontais.

Sejam ainda A e B dois sólidos de mesma altura e apoiados num mesmo plano horizontal. Cada plano horizontal Π determina, nos sólidos A e B, seções planas que serão indicadas por $\Pi \cap A$ e $\Pi \cap B$. Elas são as interseções do plano Π com os dois sólidos dados. Se para todos os planos horizontais Π , a figura plana $\Pi \cap A$ tem a mesma área que a figura plana $\Pi \cap B$, o Princípio de Cavalieri assegura que os sólidos A e B possuem o mesmo volume.

3.4.1 Paralelepípedo

O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura. Para chegar a tal conclusão, basta observar que o volume de um bloco retangular B é o produto de suas dimensões. Segundo o conceito de volume, em cada uma das dimensões haverá um número n de cubos justapostos. Podemos simplificar essa afirmação se repararmos que duas dessas dimensões formam a área da base (a) desse bloco, enquanto a distância entre essa base e sua oposta é dada como a altura (h). Assim, seu volume torna-se

$$\text{vol (B)} = a \cdot h.$$

Tomando um paralelepípedo com uma das faces como base, e tomando essa face com as mesmas dimensões que o bloco retangular citado, podemos afirmar que suas bases (e suas respectivas seções formadas pelos planos horizontais paralelos a essa base) possuem a mesma área. Ainda, se sua altura h for a mesma do bloco retangular, pelo Princípio de Cavalieri podemos dizer que seus volumes são iguais.

Como todo paralelepípedo pode ser comparado a um bloco retangular, pode-se generalizar que o volume de um paralelepípedo P dado é o produto da área a da base pela sua altura h , ou seja,

$$\text{vol (P)} = \text{vol (B)} = a \cdot h.$$

3.4.2 Cilindro

O volume do cilindro é igual ao produto da área da base pela altura. Para demonstrar esse fato, basta que seja construído, no mesmo plano da figura plana F (que é a base do cilindro), um retângulo cuja área a seja igual à área de F , e tendo esse retângulo como base, construir um bloco retangular B cuja a altura h seja igual à do cilindro C , determinado pela figura F e por um segmento de reta $g = AB$, não paralelo ao plano α , chamado geratriz do cilindro. Por cada ponto A_i de F levantamos um segmento de reta $a_i = A_iB_i$, paralelo a g e do mesmo comprimento que g . A reunião desses segmentos é o cilindro C , de base F e geratriz g . As extremidades B_i dos segmentos a_i não pertencentes à base F constituem uma figura plana F' , contida num plano paralelo ao plano α . Desse modo, qualquer que seja o plano horizontal que intercepte o cilindro em uma figura H' e o bloco retangular em R' , na mesma altura, as áreas de H' e do retângulo R' serão congruentes. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que

$$\text{vol}(C) = \text{vol}(B) = a \cdot h.$$

3.4.3 Prisma

Como o prisma é um caso particular de cilindro, este com uma base poligonal, segue que o volume do prisma como o produto da área da sua base pela sua altura.

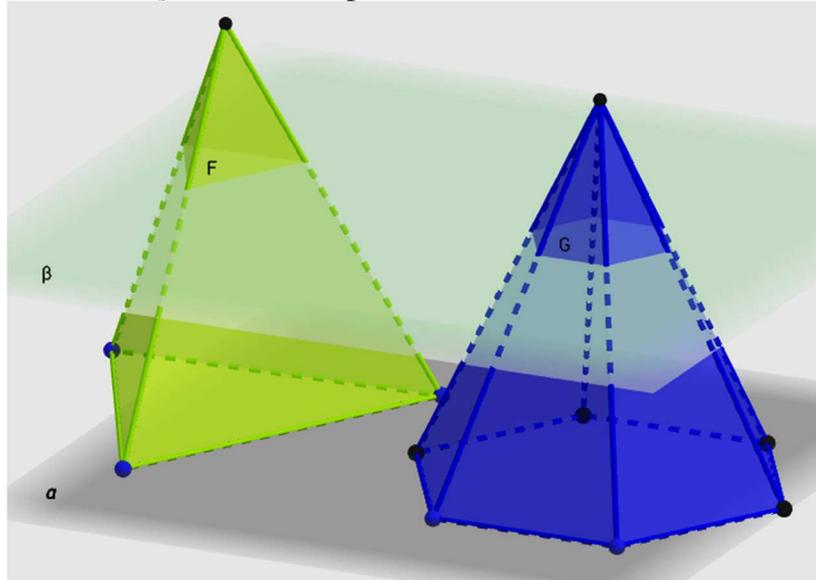
3.4.4 Pirâmide

Antes de mencionar como se calcula seu volume, é interessante nos atentarmos a um importante resultado: duas pirâmides de mesma altura e bases com áreas iguais têm o mesmo volume (Figura 13). Esse resultado também se justifica pelo Princípio de Cavalieri, pois dadas duas pirâmides K e L com a mesma altura h e bases F_0 e G_0 com a mesma área, contidas em um mesmo plano horizontal β_0 , e considerando os seus vértices em um mesmo semiplano, suas seções definidas por planos horizontais possuem áreas congruentes, o que implica que seus volumes sejam iguais. Vale ressaltar que está sendo utilizado aqui um Lema que, segundo Lima (2006, p. 89), diz:

Seja K um cone de Vértice P , altura h_0 e base F_0 situada no plano horizontal β_0 . Seja β outro plano horizontal, entre P e β_0 . Indiquemos como F a seção $\beta \cap K$ e com h a distância de entre P e β , isto é, a altura do cone de base F e vértice P . Tem-se a relação

$$\frac{\text{área}(F_0)}{\text{área}(F)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2$$

Figura 13: Relação entre duas pirâmides de mesma altura e área de base



Fonte: Produção do autor, 2019.

Especificando o caso das pirâmides citadas, as seções $F = \beta \cap K$ e $G = \beta \cap L$ são iguais pois, segundo o Lema acima,

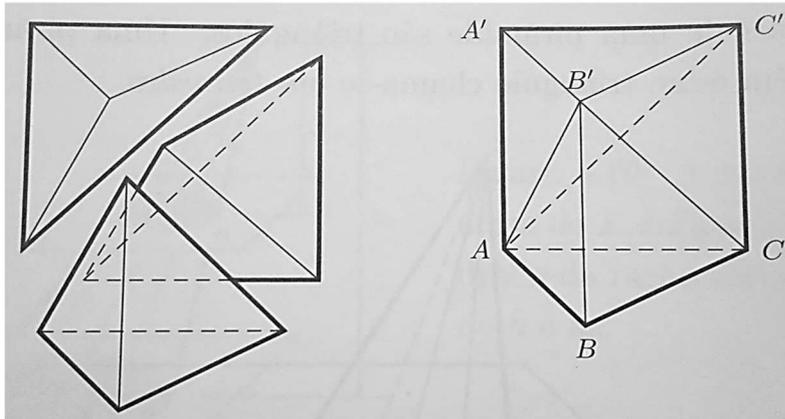
$$\frac{\text{área}(F)}{\text{área}(F_0)} = \frac{\text{área}(G)}{\text{área}(G_0)} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^2,$$

em que h é a distância do vértice P ao plano β .

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da altura pela área da base. Para demonstrar esse fato usaremos um tetraedro, ou seja, uma pirâmide que possui faces laterais e base congruentes, cujo a base é o triângulo ABC e cujo vértice B' é tal que o segmento $B'B$ é perpendicular ao plano ABC e têm comprimento h , conforme a Figura 14. Levantemos AA' e CC' , perpendiculares ao plano ABC , de comprimentos iguais a BB' . Obtemos, com isso, um prisma reto de bases triangulares ABC e $A'B'C'$. Como o volume desse prisma é o produto da área da base pela altura, basta mostrar que ele pode ser decomposto em três pirâmides, cada uma delas com volume igual ao da pirâmide $ABCB'$.

As três pirâmides possuem o mesmo volume que a pirâmide $ABCB'$, pois a pirâmide $A'B'C'A$ possui base congruente à $ABCB'$ e possui a mesma altura, uma vez que BB' possui mesmo comprimento de AA' . Já a pirâmide $ACC'B'$, cuja base ACC' é congruente à base $AA'C'$ da segunda pirâmide e cuja altura, a partir do vértice B' , é igual à altura da segunda pirâmide ($AA'C'B'$) a partir do mesmo vértice B' .

Figura 14: Partição de um prisma triangular em três tetraedros de mesmo volume



Fonte: LIMA, 2006, p. 92.

Dessa forma, podemos concluir que o volume de um tetraedro é um terço do volume de prisma de base triangular. Através do Princípio de Cavalieri podemos ampliar para as pirâmides de qualquer base poligonal, e para isso basta que a área da base poligonal seja igual a área do triângulo ABC citado. Logo, o volume de uma pirâmide de base poligonal F é igual a um terço do produto da altura deste pela área da base.

3.4.5 Cone

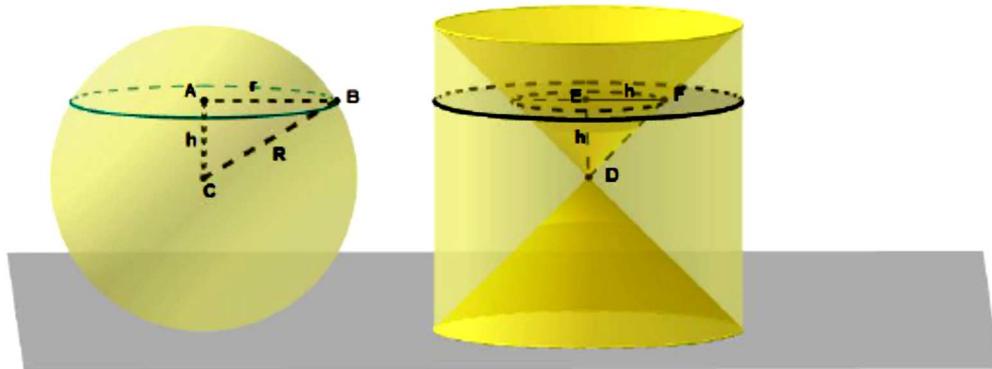
Em virtude do que foi exposto na seção 3.4.4, o volume de um cone dado é igual ao de uma pirâmide cuja base é um triângulo ABC que têm área igual à da base do cone e cujo vértice B' é tal que o segmento B'B é perpendicular ao plano ABC e tem comprimento igual à altura do cone. Como o volume de tal pirâmide já foi demonstrado, então nos resta concluir que o volume de um cone de altura h, cuja base é um círculo de raio R, é igual a $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Utilizando o Princípio de Cavalieri, ao compararmos a área do círculo que forma a base do cone com o polígono que serve de base para uma pirâmide que esteja no mesmo plano horizontal ocupado pelo círculo, no mesmo semiplano determinado por esse plano horizontal, temos que, se a área de cada seção paralela à base da pirâmide for igual a área de cada seção paralela à base do cone, então seus volumes serão iguais.

3.4.6 Esfera

O volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$. Para demonstrar esse fato, consideremos uma anticlépsidra, um sólido geométrico formado a partir de um cilindro

equilátero (altura = diâmetro da base = $2 \times$ (raio da base)), do qual subtraímos dois cones opostos pelos vértices (como uma ampulheta) cujas bases coincidam com as bases do cilindro e cuja altura seja igual ao raio da base. Desse modo, a anticlépsidra é limitada exteriormente pela superfície lateral do cilindro e, interiormente, pelos dois cones, conforme a Figura 15.

Figura 15: Seções na esfera e na anticlépsidra por um plano horizontal a uma altura h do centro de cada um desses sólidos



Fonte: PRIMO, 2013, p. 40.

Como a esfera S determina, na interseção com um plano horizontal, um círculo de raio r e, pelo Teorema de Pitágoras, $R^2 = r^2 + h^2$, temos que $r^2 = R^2 - h^2$, ou seja, a área desse círculo é $A = \pi(R^2 - h^2)$. Já a anticlépsidra T determina na interseção com esse mesmo plano uma coroa circular que possui distância h do centro do cilindro, cuja área é dada por $A = \pi R^2 - \pi h^2$ uma vez que, por construção, a altura do cone seja igual ao seu raio. O cilindro equilátero possui altura igual ao diâmetro. Então o cone, que possui metade da altura desse cilindro, possui altura igual ao diâmetro. Então o cone, que possui metade da altura desse cilindro, possui a metade do seu diâmetro, ou seja, possui medida igual ao raio do cilindro, formando o triângulo isósceles representado na Figura 15.

Assim, é possível de se perceber que ambos os sólidos formam, em seus planos horizontais, áreas de medida $A = \pi(R^2 - h^2)$, e sendo essas seções de mesma área em cada plano horizontal, pelo Princípio de Cavalieri, ambos possuem o mesmo volume, que pode ser determinado pela diferença entre o volume do cilindro ($\pi R^2 h = 2\pi R^3$, pois a altura h do cilindro é igual a medida do diâmetro $2R$ da esfera, ou seja $h = 2R$) e o volume dos dois cones que limitam internamente a anticlépsidra [$2 \cdot (\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3)$], já que a altura h dos cones é igual a medida do raio da esfera, ou seja, $h = R$. Encontrando assim

$$\text{Vol (S)} = \text{Vol (T)} = 2\pi R^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3.5 SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica recomendado para todos os níveis de ensino. Ele reúne elementos de geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade e estatística em um pacote fácil de se usar. Atualmente possui uma comunidade de milhões de usuários ao redor de todo o mundo, que vem compartilhando ideias e aplicações diversas em seu site (<http://www.geogebra.org>), tornando-se uma opção entre as ferramentas de apoio para o ensino e aprendizagem de ciência, tecnologia, engenharia e matemática.

Algumas características importantes:

- Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;
- Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
- Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários ao redor do mundo;
- Software gratuito e de código aberto.

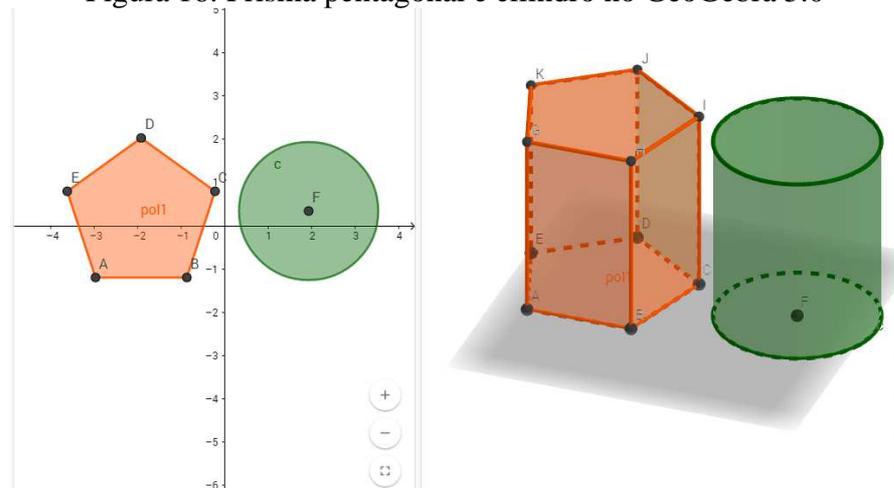
Através do GeoGebra, professores e alunos têm a oportunidade de explorar, conjecturar e investigar tais conteúdos de maneira simples e atrativa, possibilitando a construção do conhecimento.

Por ser dinâmico, o software permite que o usuário desenhe construções variadas, possuindo todos os dados de construção, e com a liberdade de manipular esses dados ou de alterar seus elementos de construção, obtendo uma visão clara do que ocorre ao se alterar os valores de uma função, por exemplo, de modo que esta seja compreendida e melhor analisada pelo usuário. Apesar de, em muitos casos, não seja possível provar uma determinada solução, a manipulação dos dados permite ao usuário conjecturar, abrindo caminho para a formalização e possível generalização de uma determinada situação.

A partir da atualização do GeoGebra 5.0 (Figura 16) ainda é possível trabalhar com uma janela de visualização em 3D, o que auxilia mais o estudo dos sólidos geométricos e amplia as possibilidades de ensino.

Há ainda a disponibilização do software através de aplicativo para tablet ou smartphone, sendo que pode ser considerado leve (aproximadamente 50 MB de memória), o que o torna uma ótima opção para o trabalho em sala de aula, uma vez que muitos dos alunos possuem esses aparelhos.

Figura 16: Prisma pentagonal e cilindro no GeoGebra 5.0



Fonte: Produção do autor, 2019.

3.6 MATERIAL CONCRETO

Materiais concretos ou manipuláveis vem sendo utilizados a muito tempo por professores de matemática para auxiliar o ensino e a aprendizagem de matemática de maneira mais lúdica, mais visual e, conseqüentemente, menos abstrata. Por experiência própria, posso dizer que a transição entre o ensino da aritmética, que possui variadas aplicações em nosso cotidiano, e o ensino da álgebra, mais abstrata, que ocorre por volta do sétimo ano do Ensino Fundamental, é turbulenta. Falta, talvez, habilidades necessárias aos alunos de abstraírem, de imaginarem situações diversas para que possam entender melhor e realmente compreenderem os conceitos algébricos. De maneira mais geral, pode-se dizer que

Não é recente a preocupação de professores para que as aulas de Matemática se tornem encontros que propiciem uma aprendizagem significativa ao aluno. Por outro lado, sempre se buscou metodologias para facilitar seu ensino e, conseqüentemente, sua aprendizagem. Ao longo da história da educação, destacam-se professores, pesquisadores e pensadores que se dedicaram ao estudo de instrumentos para auxiliar no estudo dessa ciência. Prova disso são os diversos jogos e materiais manipuláveis existentes. (JANUÁRIO, 2008, p. 34)

Ainda segundo Januário (2008, p.32), podemos chamar de materiais concretos “quaisquer objetos manipuláveis utilizados em uma situação didática para auxiliarem o ensino (professor) e a aprendizagem (aluno), por meio de experiências, desempenhando o papel de mediadores na construção e/ou reconstrução de significados matemáticos.”

Tais materiais podem ser utilizados em situações diversas, como introdução a um novo conteúdo, para fundamentar ideias ou mesmo para treinar habilidades. Para Miorim e Fiorentini (1990), esses recursos entram em cena quando os alunos não entendem a Matemática que o

professor ensina ou quando o docente encontra dificuldades ao trabalhar um determinado conteúdo que o impeça de alcançar seus objetivos. Para os autores, nesses casos, os materiais manipuláveis são concebidos como a solução dos problemas, já que o aluno “não consegue efetivamente ter acesso a esse saber de fundamental importância.” (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p.1)

Segundo Lorenzato (2006), o material didático manipulável é um instrumento importante, pois proporciona um maior envolvimento dos alunos na sala de aula, desenvolvendo assim várias competências no que se refere a capacidade de abstrair, generalizar, projetar e transcender, sendo que o professor torna-se o orientador dos processos de ensino e aprendizagem e passa a direcionar a formalização do conhecimento e a realização de tarefas.

Mas é importante que não utilizemos simplesmente um material pela ludicidade, uma vez que o principal objetivo da aula é o ensino da matemática. E mais, os materiais concretos, por si só, não ensinam matemática. Para isso é preciso que o professor-mediador se disponha a utilizar suas práticas, estude os materiais que quer aplicar e se pergunte se esse material vai alcançar o objetivo proposto por ele. Isso dará mais segurança a ele e aos alunos, permitindo que os alunos aproveitem melhor as aulas.

3.7 IMPRESSÃO 3D

Dada a importância da utilização do material concreto nas aulas de matemática, falemos um pouco sobre a impressão 3D, que foi o meio inovador para estimular o interesse dos alunos pelo conteúdo proposto. Segundo Aguiar (2016, p. 37),

a tecnologia chamada hoje de impressão 3D é a técnica de construir sólidos tridimensionais, camada por camada, umas sobre as outras, até formar o objeto. Essa técnica também é chamada de manufatura aditiva, pois a matéria-prima vai sendo adicionada gradualmente até concluir a construção de um objeto.

Conforme Aguiar (2016), a primeira patente de impressora 3D criada data de 1984, por Charles Hull, que a criou com base na solidificação de fotopolímeros utilizando radiação ultravioleta, processo utilizado por uma pequena empresa de revestimentos de mesa na qual trabalhava. Sua ideia foi controlá-la computacionalmente para construir objetos sólidos a partir de um modelo tridimensional digital.

Nos últimos anos, graças a evolução da tecnologia, as impressoras 3D estão muito mais acessíveis, custando pouco e com material também de custo mais baixo, o que vêm ao encontro da realidade de pequenas empresas, universidades e até mesmo escolas, que enxergam cada vez

mais esse aparato com bons olhos. Ela pode elaborar protótipos e ferramentas em diversas áreas, como ciências, na construção de modelos de células, de órgãos e tecidos, na história, na construção de aparatos e utensílios antigos, na química, na construção de estruturas moleculares, e na matemática, na construção de materiais concretos.

O aproveitamento da tecnologia de impressão 3D no aprendizado da matemática também é reportado por Knill e Slavkovsky (2013). Segundo os autores, a visualização de provas e conceitos é importante para a comunicação da matemática, não sendo somente ilustrativa, educacional ou heurística, pois também tem um valor prático. Além da visualização de objetos confeccionados, eles ainda citam a construção de modelos em softwares que utilizam expressões algébricas. Nesse caso, os gráficos gerados pelas expressões poderiam ser transformados em modelos, de modo a facilitar a sua visualização, e melhor, podem manipular as expressões para entender suas variações e analisar a influência dos parâmetros no comportamento do gráfico.

Outra vantagem da utilização da impressão 3D, segundo os autores, é que a visualização também ajuda a mostrar a beleza da matemática, como representada nas Figuras 17 e 18, e promovê-la para as pessoas, a fim de inspirar a criação de novas ideias, formulando teoremas e axiomas através da observação e análise dos mesmos, ou mesmo o auxílio na computação.

Figura 17: Figura construída com base nos Cubos de Sierpinski

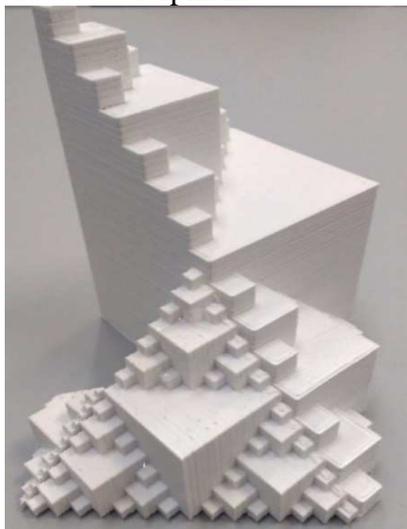


Figura 18: Faixa de Möbius



Fonte: Acervo da Fab3D (UDESC), 2019.

Nesse trabalho, utilizamos a manipulação dos sólidos geométricos, que poderiam ser feitos com materiais mais simples, como papel e papelão, tomando como ponto de partida a planificação desses sólidos. Optamos pela utilização de materiais construídos em impressão 3D

para que houvesse mais interesse por parte dos alunos, uma vez que esta tecnologia vem ganhando cada vez mais visibilidade entre eles, mesmo que apenas para a fabricação de objetos de decoração, estatuetas, réplicas de carros, maquetes, entre outros.

Mesmo tendo recebido apenas os sólidos já prontos para manipulação, foi possível perceber o interesse dos alunos pelo modo como foram confeccionados os modelos utilizados, e que isso os incentivou a realizarem as tarefas propostas na sequência didática elaborada, assunto esse que será explanado no próximo capítulo.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentadas a caracterização da instituição e dos sujeitos participantes da pesquisa, bem como um pequeno estudo sobre sequências didáticas e a sequência didática utilizada durante a fase de experimentação.

A metodologia de pesquisa deste projeto é classificada como qualitativa e interpretativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Essa metodologia se adéqua a obtenção de dados em experimentações em sala de aula. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa e interpretativa possui cinco características: a) a fonte direta de dados é o ambiente natural, os dados são coletados pelo próprio pesquisador por meio de observações em sala de aula. Isto se deve ao fato de que as relações e interações que ocorrem em sala de aula são fenômenos observáveis passíveis de análise; b) a investigação qualitativa é descritiva, pois “os dados não são quantificáveis e são coletados na forma de palavras, imagens, transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, registros oficiais.” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48); c) O interesse do pesquisador é pelo que acontece em sala de aula, pelas decisões que são tomadas, ou seja, os “investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49); d) Não existem hipóteses pré-concebidas, as hipóteses são construídas após a observação usando-se do método de indução e; e) o principal objetivo da pesquisa qualitativa é a observação, a descrição e a compreensão do fenômeno, sendo que o “significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 50). A pesquisa qualitativa tem como objetivo principal interpretar o fenômeno que se observa e, embora não seja quantificável, alguns aspectos quantitativos são aceitáveis por fazer parte da dinâmica de sala de aula.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO

A Escola de Educação Básica Professora Antônia Alpaídes Cardoso dos Santos, localizada no bairro Nova Brasília, em Joinville, Santa Catarina, foi fundada em 1º de março de 1965. A escolha do nome se dá como homenagem a Professora Antônia Alpaídes Cardoso dos Santos pela sua contribuição e dedicação durante 30 anos ao Magistério Estadual e a formação de centenas de alunos nessa comunidade. Atualmente a escola atende cerca de 1200 alunos, no Ensino Fundamental, nos turnos matutino e vespertino, e no Ensino Médio, nos turnos matutino, vespertino e noturno.

A escola possui 20 salas de aula, sendo uma delas destinada à educação especial, pois tornou-se, nos últimos anos, uma escola modelo no que se refere ao trabalho de inclusão de alunos especiais, que são em número de 51 alunos atualmente, em níveis de ensino variados. A escola conta ainda com uma quadra coberta, uma biblioteca, uma sala informatizada, rampas de acesso à cadeirantes e banheiros adaptados.

A escolha dessa escola se deu pelo motivo do autor desse trabalho lecionar nela há cinco anos, o que facilitou a aplicação do projeto tanto no convívio constante com os alunos e coordenação pedagógica, quanto no conhecimento de metodologias adaptadas aos alunos dessa comunidade. Foi confeccionada uma carta de anuência à escola com o pedido de autorização da escola para a realização da pesquisa nessa instituição, que foi prontamente aceita pelo professor João Maria Neves, o assessor da escola, que estava ocupando o cargo de diretor temporariamente.

4.2 SUJEITOS DA PESQUISA

O projeto foi aplicado com alunos da terceira série do período noturno, turma em que o autor lecionava, em virtude do conteúdo proposto, o cálculo de volumes, estar sendo trabalhado na época da realização da pesquisa. Das três terceiras séries noturnas, o projeto foi aplicado com apenas uma, por ser uma turma mais organizada e interessada em novas tecnologias. Concomitantemente, foi lecionado o conteúdo “de maneira tradicional” com as outras duas turmas, através de aulas dialogadas e aplicação de exercícios do livro e de avaliações externas, como o ENEM, vestibulares e outros.

Os educandos do noturno, em sua maioria, trabalham durante o dia, exercendo as mais variadas ocupações tais como: auxiliar de comércio no próprio bairro, participantes do programa Jovem Aprendiz, ou são estagiários contratados em convênio entre empresas e Secretaria da Educação. Foram 24 alunos, na faixa dos 17 aos 19 anos, dos quais 22 foram aprovados ao final do ano letivo, concluindo sua formação básica.

Todos os alunos participantes maiores de idade assinaram um termo de consentimento, enquanto os menores de idade foram devidamente autorizados pelos pais ou responsáveis, de maneira que foram utilizados materiais de áudio e imagens das atividades dos alunos durante a aplicação da sequência didática em sala de aula.

4.3 SOBRE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Para a realização desse projeto foi planejada e aplicada uma sequência didática para o ensino do cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri mediado pelo GeoGebra e por materiais concretos fabricados em impressão 3D.

Mas, afinal, o que se entende por sequência didática? Segundo Zabala (1998, p. 18), sequências didáticas são “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.”

Desse modo, a escolha por uma sequência didática foi natural a esse projeto, pois

As sequências de atividades de ensino/aprendizagem, ou sequências didáticas, são uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, pois, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, principalmente, pelo sentido que adquirem quanto a uma sequência orientada para a realização de determinados objetivos educativos. As sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir. (ZABALA, 1998, p. 20)

Assim, uma sequência didática nos permitiu encaminhar uma série de atividades de modo que o aluno, com pouca ou nenhuma intervenção do professor, adquirisse o conhecimento de como calcular o volume de alguns sólidos determinados, e como expandir essas ideias, utilizando o Princípio de Cavalieri, para se determinar o volume de outros sólidos. A análise das produções dos alunos será feita posteriormente. Mas em relação a produção da sequência didática, as perguntas que podem ser feitas acerca das sequências didáticas são referentes às atividades propostas. Segundo Zabala (1998, p. 63-64), devemos nos perguntar se a sequência didática proposta possui atividades:

a) que nos permitam determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem? b) cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os meninos e as meninas? c) que possamos inferir que são adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno? d) que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com a ajuda necessária; portanto, que permitam criar zonas de desenvolvimento proximal e intervir? e) que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno, necessária para que estabeleça relações entre os novos conteúdos e os conhecimentos prévios? f) que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos? g) que estimulem a autoestima e o autoconceito em relação às aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena? h) que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens?

No próximo item será apresentada a sequência didática proposta.

4.4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para a realização das atividades em sala de aula foi elaborada uma sequência didática cujo objetivo é explorar o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes de sólidos geométricos com o uso de materiais concretos e a intervenção de objetos de aprendizagem. Segue a sequência didática (Quadro 1) que foi elaborada:

Quadro 1: Sequência Didática

1° atividade
Atividade: Resgate histórico sobre Cavalieri. (Apêndice A)
Descrição da atividade: Requisitar aos alunos que entreguem, uma semana antes da aplicação do projeto, uma pesquisa histórica sobre Cavalieri. Suas descobertas, implicações no momento histórico e seu legado, para que os alunos se ambientem e percebam sua importância.
2° atividade
Atividade: Discutindo sobre Cavalieri
Descrição da atividade: Com as pesquisas previamente observadas, levantar uma discussão em grupo, em sala de aula, sobre tudo o que foi pesquisado sobre Cavalieri. Será enfatizado o momento histórico, sua descoberta e como isso contribuiu com o modo de calcular o volume de sólidos geométricos.
3° atividade
Atividade: Medir e comparar as áreas de sólidos manipuláveis (Apêndice B)
Descrição da atividade: Apresentar inicialmente a impressão 3D, como ela funciona e as possibilidades de aplicação. Separar os alunos em 4 grupos e distribuir um conjunto que possui 4 sólidos manipuláveis impressos: <ul style="list-style-type: none"> • Um cilindro de raio R e altura H; • Um paralelepípedo de bases medindo R e πR e altura H; • Um cone de raio R e altura H, seccionado paralelamente à base em uma altura h e; • Uma pirâmide de base quadrada com arestas da base medindo $R\sqrt{\pi}$ e de altura H, seccionado paralelamente à base na mesma altura h que o cone. <p>As medidas dos sólidos em cada um dos conjuntos diferem entre si, de modo que cada conjunto será único. O objetivo é que os alunos meçam e calculem as áreas das bases do cilindro e do paralelepípedo e comparem-nas, percebendo que possuem a mesma medida. O mesmo será feito com as áreas das seções do cone e da pirâmide. Para tal, os alunos contarão com um questionário que servirá como guia de estudos.</p>
4° atividade
Atividade: Comparação de áreas utilizando o GeoGebra
Descrição da atividade: apresentar, com material impresso, a trissecção de um prisma, para se mostrar que o volume da pirâmide é igual a $1/3$ do volume de um prisma de mesma base. Depois será utilizado o aplicativo GeoGebra para mostrar a igualdade entre as áreas das seções de sólidos diferentes. (Serão utilizados sólidos já prontos do site GeoGebra)

5º atividade
Atividade: Introduzir o princípio de Cavalieri.
Descrição da atividade: Apresentar o princípio de Cavalieri com o empilhamento de moedas e de papéis. Relatar as facilidades e as dificuldades para a utilização do método, explicando o motivo pelo qual esse princípio não é utilizado em qualquer caso. Relembrar como funciona o cálculo de volumes e relacionar as áreas anteriormente vistas com os volumes dos sólidos formados.
6º atividade
Atividade: Cálculo do volume da esfera utilizando o princípio de Cavalieri e anticlépsidra. (Apêndice C)
Descrição da atividade: Propor aos alunos que calculem o volume da esfera, utilizando a relação com a anticlépsidra. Será feita a aplicação com a manipulação dos sólidos impressos, em que cada equipe receberá uma esfera e uma anticlépsidra seccionada em alturas diferentes. Assim, os alunos deverão concluir que a área de cada seção da anticlépsidra é análoga a da esfera, criando a relação entre elas.
7º atividade
Atividade: Apresentar no GeoGebra mostrando a igualdade de áreas entre seção esfera e seção anticlépsidra.
Descrição da atividade: Aqui será apresentado, para a conclusão do trabalho, o arquivo programado por BENK (2016) ² , mostrando que em diâmetros e alturas de seções diferentes as áreas das seções possuem medidas iguais. Após isso, será discutida a fórmula encontrada para o volume da esfera como sendo a diferença entre os volumes do cilindro e de dois cones de alturas iguais a da metade do cilindro e mesma base.

Fonte: Produção do autor, 2018.

A seguir, será feita a avaliação da sequência didática segundo os critérios levantados por Zabala (1998), conforme citação mencionada.

4.5 AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

A sequência didática pode ser assim avaliada:

- a) Conhecimentos prévios: a sequência não prevê o resgate dos conhecimentos prévios, de modo que a revisão sobre o cálculo de área de figuras planas e cálculo de volume de prismas, pirâmides e corpos redondos deve ser efetuado antes da aplicação da sequência.
- b) Significância e funcionalidade dos novos conteúdos: a sequência traz ideias diferenciadas das normalmente abordadas, mostrando que o cálculo de volumes pode ser feito de outra maneira, dados os requisitos básicos. Novas ideias trazem novos significados, o que amplia o entendimento sobre o cálculo de volumes.

² Esse programa foi apresentado no artigo referenciado “BENK, 2016”. Está disponível também em: <<https://www.geogebra.org/m/TbUDpCCt>>. Acesso em: 02 jul 2018.

- c) Nível de desenvolvimento: a participação dos alunos durante a sequência permite, desde que o professor esteja alerta, reconhecer as dificuldades de compreensão que se apresentam. Portanto, é possível adequar as explicações aos diferentes graus de assimilação.
- d) Zona de desenvolvimento proximal: a atividade 3, do Apêndice B, e as atividades 6 e 7, do Apêndice C, são essenciais para que se possa averiguar o que pensam os alunos, que dúvidas eles apresentam e que interpretações fazem a partir do que lhes foi apresentado. Segundo Zabala (1998, p.71), “Esta série de informações pode ser suficiente para orientar o tipo de exemplos que é preciso dar, ou argumentos que é preciso colocar para que a construção do conhecimento seja realizada.”
- e) Conflito cognitivo e atividade mental: a sequência parte para o caráter conceitual, em que é preciso saber o que é necessário ser medido e como fazê-lo, seguindo para o caráter procedimental, na qual o aluno precisa conhecer as ferramentas necessárias para que possa medir as figuras. O conflito cognitivo surge na conclusão das atividades, momento em que os alunos são instigados a manifestarem suas opiniões, a fim de que lhes seja mais fácil entender as conclusões e o processo de generalização. Desse modo, o professor possui certo controle sobre o processo de aprendizagem.
- f) Atitude favorável: a função de comparar as medidas encontradas (atividade 2 dos apêndices B e C) foi feita para cumprir essa função. O fato de chegar a uma situação conflitante após o entendimento inicial ajuda no sentido de estimular a curiosidade, pois o aluno cria a expectativa de que as áreas das seções sejam iguais ao compará-las.
- g) Autoestima e autoconceito: o aluno tem a oportunidade de construir o conhecimento por si só, assumindo o protagonismo da aquisição de conhecimento. As intervenções que o professor faz apenas o assegura de que as áreas são semelhantes, e que por isso os volumes dos sólidos também são. Isso valoriza o que o aluno produz, possibilitando uma melhora em sua autoestima.
- h) Aprender a aprender: a sequência ajuda a promover certas habilidades de construção pessoal de conceitos, às quais é preciso acrescentar as técnicas de estudo e de memorização. Essas são estratégias que possibilitam novas aprendizagens, passando a ideia de que um mesmo problema possibilita diferentes abordagens.

Depois de avaliada seguindo os critérios levantados por Zabala, apresentaremos agora como ocorreu a aplicação da sequência didática sugerida.

4.6 A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA

A aplicação da sequência didática se deu em sete aulas de quarenta minutos cada, entre os dias 12 de novembro e 10 de dezembro de 2018, como segue na Quadro 2.

Quadro 2 - Cronograma das atividades realizadas

Dias	Atividades realizadas
12/ nov	Foi proposta a atividade 1 (Apêndice A), que foi entregue pelos alunos no dia 20 de novembro.
26 / nov	(Duas aulas seguidas) Foram executadas as atividades 2 e 3 (Apêndice B).
27 / nov	Foi executada a atividade 4 da sequência didática.
03 / dez	(Duas aulas seguidas) Foram executadas as atividades 5 e 6 (Apêndice C).
04 / dez	Foi executada a atividade 7 da sequência didática.
10 / dez	Foi entregue o questionário (Apêndice D) para avaliação do projeto.

Fonte: Produção do autor, 2019.

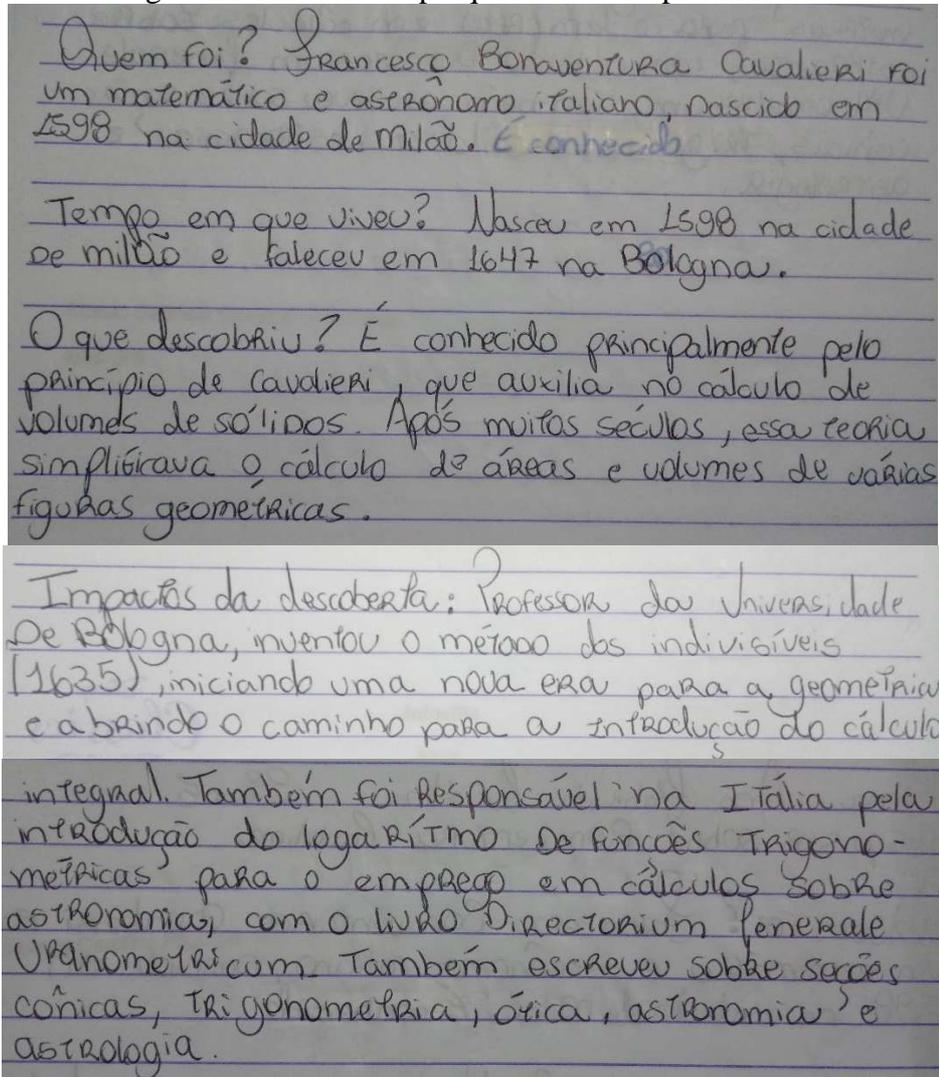
É bom salientar que a aplicação da sequência didática se deu logo após a aplicação dos conteúdos “áreas de figuras planas” e “volumes de pirâmides, prismas, cilindros e cones”, prevista na ementa da instituição. Já o conteúdo “volume da esfera” não foi trabalhado, justamente para que fosse uma surpresa a maneira de se determinar o volume desse sólido. Dessa forma, foi aplicada uma revisão dos conteúdos, momento em que foram avaliados os conhecimentos prévios dos alunos participantes.

No dia 12 de novembro de 2018, foi aplicada a primeira atividade da sequência: um resgate histórico sobre Bonaventura Cavalieri, pesquisa individual em que deveriam ser citados o momento histórico, as descobertas e contribuições desse matemático na história e se as suas descobertas obtiveram aceitação naquela época. Essa pesquisa serviu para que os alunos tivessem o primeiro contato com Cavalieri e, se houvesse interesse individual, o modo proposto por ele para o cálculo do volume de sólidos geométricos. A data prevista para a entrega foi dia 20 de novembro de 2018, uma semana antes do início da aplicação da sequência didática, para que se pudesse analisar o que os alunos haviam pesquisado e completar as lacunas de suas pesquisas.

No dia 26 de novembro de 2018, aula seguinte a que foi entregue a atividade 1, deu-se início efetivamente a sequência, em que a atividade 2 propunha uma discussão sobre os fatos históricos pesquisados pelos alunos e os devidos complementos de informações. A maioria dos alunos apenas citou fatos históricos sobre a vida de Bonaventura Cavalieri, sem citar sua influência na matemática da época. Os alunos que o citaram trouxeram, além da sua contribuição para a introdução dos logaritmos na Itália, trouxeram também as ideias do Princípio de Cavalieri, conforme a pesquisa da aluna A, representada na Figura 19. Durante a

discussão, uma aluna da classe citou o princípio, mas dizendo que não o tinha entendido muito bem. Como o intuito não era explica-lo naquele momento, foi dito que mais tarde isso seria explicado, o que a deixou aparentemente curiosa.

Figura 19: Recortes da pesquisa realizada pela aluna A



Fonte: Acervo do autor, 2018.

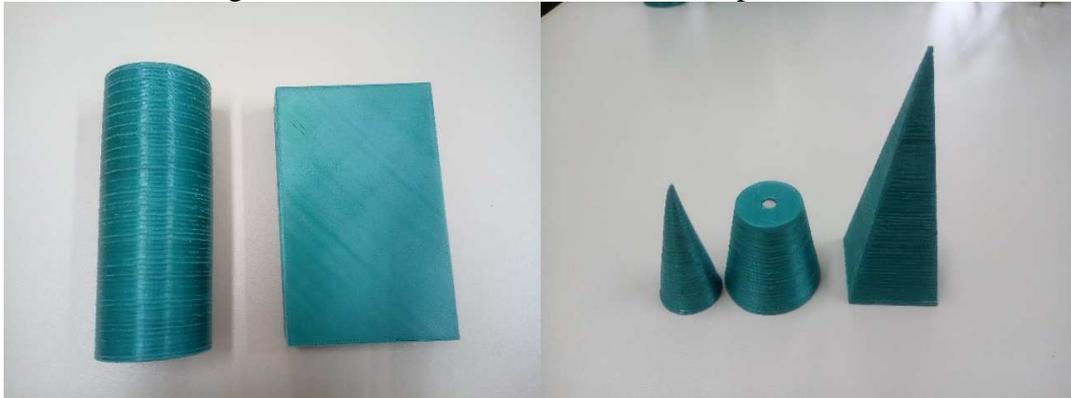
Praticamente ao fim dessa aula iniciei a atividade 3, momento em que os 23 alunos presentes no dia foram separados em quatro grupos, representados por G1, G2, G3 e G4. Foram então distribuídos kits de materiais concretos confeccionados na impressão 3D (Figura 20), para que eles tivessem seu primeiro contato com o material. Surgiram várias perguntas sobre o modo como foram confeccionados, momento no qual expliquei como funciona a impressora 3D.

Cada kit possuía quatro sólidos impressos:

- Um cilindro de raio R e altura H ;
- Um paralelepípedo de bases medindo R e πR e altura H ;

- Um cone de raio R e altura H , seccionado paralelamente à base em uma altura h e;
- Uma pirâmide de base quadrada com arestas da base medindo $R\sqrt{\pi}$ e de altura H , seccionada paralelamente à base na mesma altura h que o cone.

Figura 20: Sólidos confeccionados em impressão 3D



Fonte: Acervo do autor, 2018.

As medidas dos sólidos em cada um dos conjuntos diferiam entre si, de modo que cada conjunto era único. O objetivo inicial era que os alunos medissem e calculassem as áreas das bases do cilindro e do paralelepípedo e, comparando-as, percebessem que possuíam aproximadamente a mesma medida de área. Essa atividade contava com um questionário (Figura 21) que serviu como guia de estudos.

Figura 21: Questão 1 da atividade 3

1 – Trabalhando com o cilindro e o paralelepípedo. (Compare os sólidos de forma que ambos possuam a mesma altura).

- Meçam os elementos necessários para calcular a área da base do cilindro e do paralelepípedo. Preencha os valores obtidos no Quadro 1?
- Calcule a área dessas bases e preencha o Quadro 1. O que vocês concluem sobre essas áreas?

Quadro 1 – As medidas do cilindro e do paralelepípedo

	Cilindro		Paralelepípedo
Medidas	_____	Medidas	_____
Área da base	_____	Área da base	_____

Conclusão: _____

- Qual o volume desses sólidos?

Fonte: Produção do autor, 2018.

Cada uma das equipes começou a medir os itens necessários ao cálculo do volume dos sólidos (Figura 22a), momento em que foram percebidas algumas situações inesperadas. Três

das equipes (G1, G3 e G4), ao retirarem as medidas do paralelepípedo, confundiram as alturas encontradas no prisma com as alturas encontradas na base do prisma, de modo que ao calcularem a área da base, utilizavam a altura do prisma, e não a largura da base. Houve uma intervenção e o problema foi resolvido. A equipe G2 o fez sem problema algum.

Para que se tornasse mais prático a medida do raio dos corpos redondos, foi acrescentado a cada kit um instrumento para marcar o centro de artefatos redondos (Figura 22b) que permite traçar o diâmetro do corpo redondo, facilitando a determinação de sua medida.

Figura 22: Medição do diâmetro do cilindro



a) Equipe G2 medindo o diâmetro



b) Equipe G1 utilizando o instrumento para marcar o centro do cilindro

Fonte: Acervo do autor, 2018.

Ao analisar as soluções encontradas na questão 1 da atividade 3, percebi que as quatro equipes concluíram corretamente a comparação entre o cilindro e o paralelepípedo, mesmo que tenham encontrada valores aproximados do volume desses sólidos durante as suas medições. Seguem as soluções encontradas pela equipe G4.

Figura 23: Questão 1 da atividade 3 respondida pela equipe G4

Quadro 1 – As medidas do cilindro e do paralelepípedo

Cilindro		Paralelepípedo	
Medidas	Altura: 10cm Raio: 4cm	Medidas	Altura: 4cm (menor) lado: 12,6cm Altura: 10cm
Área da base	50,24cm	Área da base	50,4cm

Conclusão: Concluímos que as áreas são quase iguais, o cilindro com 50,24cm e o paralelepípedo com 50,4

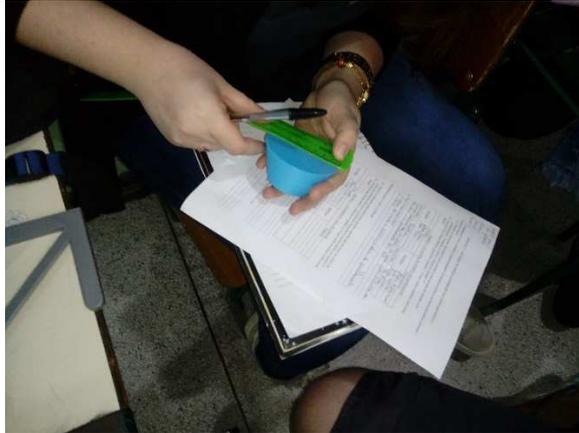
c) Qual o volume desses sólidos?

O volume do cilindro é 502,4cm, o volume do paralelepípedo é 504cm

Fonte: Acervo do autor, 2018.

Após medirem e efetuarem os cálculos referentes ao cilindro e ao paralelepípedo, os alunos começaram a analisar o cone e a pirâmide de base quadrada (Figura 24) para completar as informações solicitadas nas questões 2 e 3 da atividade 3 (Figura 25).

Figura 24: Equipe G3 medindo o diâmetro do cone



Fonte: Acervo do autor, 2018.

Figura 25: Questões 2 e 3 da atividade 3

2 – Trabalhando com o cone e a pirâmide.

- a) Meçam os elementos necessários para calcular a área da base do cone, do tronco de cone, da pirâmide e do tronco de pirâmide. Preencha os valores obtidos no Quadro 2.
- b) Calcule a área dessas bases e preencha no Quadro 2. O que vocês concluem sobre essas áreas?

Quadro 2 – As medidas do cone e da pirâmide

Cone		Pirâmide	
Medidas	_____	Medidas	_____
	_____		_____
	_____		_____
Área da base menor		Área da base menor	
Área da base maior		Área da base maior	

Conclusão: _____

- c) Qual o volume desses sólidos?

3 – O que vocês podem concluir com a comparação entre os volumes do cilindro e do paralelepípedo? E com a comparação entre o cone e a pirâmide?

Fonte: Produção do autor, 2018.

Durante essa parte da atividade surgiram algumas questões interessantes. Duas das equipes tentaram responder ao questionário apenas com valores inteiros, ou seja, com as medidas em centímetros, mesmo percebendo que as medidas tinham variação em milímetros.

As respostas que essas equipes tiveram inicialmente ficaram fora do esperado, já que na primeira atividade eles encontraram medidas semelhantes. Estando prestes a anotar essas conclusões no questionário, dois integrantes desses grupos começaram a interagir e concluíram que deveriam utilizar os milímetros nas medições. Feitos os ajustes, concluíram que as medidas do cone e da pirâmide também eram parecidas.

Outra questão foi a comparação entre as áreas das seções do cone e da pirâmide (Figura 26). Uma das equipes achava que essas medidas eram completamente diferentes, pois compararam a área da base do cone com a área da seção da pirâmide. Percebendo, sem intervenção, o erro, corrigiram-no e concluíram a atividade.

Figura 26: Equipe G2 preenchendo a questão 2 da atividade 3



Fonte: Acervo do autor, 2018.

Ao final da atividade, das quatro equipes, três (G2, G3 e G4) concluíram que a comparação entre as medidas de volume entre paralelepípedo e cilindro e entre cone e pirâmide eram, segundo eles, “parecidos” ou “semelhantes”, mas não iguais.

Já a equipe G1 concluiu que as medidas do paralelepípedo e do cilindro eram parecidas, mas as medidas do cone e da pirâmide não eram. Ao analisar sua solução (Figura 27) foi constatado que essa equipe calculou o perímetro das bases do cilindro e da pirâmide, fugindo assim da solução procurada.

Ao recolher o material, alguns alunos perguntaram se realmente estavam certos, e se as medidas de volume eram iguais ou apenas parecidas. Foi esclarecido que, apenas com régua era difícil de se ter certeza, mas que eram iguais, por terem sido modelados e impressas dessa maneira. Disse ainda que as consequências dessa igualdade seriam apresentadas na aula seguinte, o que deixou alguns animados e outros meio céticos quanto à atividade realizada.

Figura 27: Questões 2 e 3 da atividade 3 respondidas pela equipe G1

Quadro 2 – As medidas do cone e da pirâmide

Cone		Pirâmide	
Medidas	$r = 3,5$ $h = 12,25$ $L = 2,5$ $B = 4,0$	Medidas	$Ab = 3,5$ $Ab = 14$ $b = 2$ $B = 3,5$
Área da base menor	$1,1 = 1,25$	Área da base menor	$8,25$
Área da base maior	$Q = 4,56$	Área da base maior	$14,56$
Conclusão: <u>Medidas sobre volumes não são importantes.</u>			
c) Qual o volume desses sólidos? <u>Como:</u>			
3 – O que vocês podem concluir com a comparação entre os volumes do cilindro e do paralelepípedo? E com a comparação entre o cone e a pirâmide? <u>O cilindro e paralelepípedos não possuem já o cone e a pirâmide não.</u>			

Fonte: Acervo do autor, 2018.

Na aula seguinte foi iniciada a atividade 4, na qual foram apresentados aos alunos dois materiais. Inicialmente, um prisma de base triangular trissecionado em três pirâmides, de modo que os alunos perceberam que a soma dos volumes das três pirâmides coincide com o volume desse prisma. Com isso, concluíram que o volume da pirâmide é um terço do volume de um prisma de mesma base e altura.

Logo após, utilizando o GeoGebra, foram apresentados alguns sólidos que possuem a mesma área de base e mesma altura, entre eles os já apresentados nas Figuras 13 e 16, de forma que seus volumes fossem iguais. Ao manipular alguns pontos desses sólidos, foi possível perceber que essa igualdade se verificava apenas quando os sólidos mantinham bases de mesma área e altura de mesma medida. Como essas medidas possuíam duas casas decimais de precisão, os alunos se convenceram de que as medidas encontradas por eles no trabalho obedeciam a essa mesma “regra”, o que foi bem satisfatório.

A aula foi concluída com a fala de que na próxima atividade lhes seria apresentado o motivo de isso acontecer, que essa “regra” já tinha sido percebida há muito tempo atrás e que foi idealizada por Bonaventura Cavalieri (“Aquele que a gente pesquisou? Não encontrei isso!”, disse um dos alunos). Isso os deixou aparentemente motivados para a continuidade do projeto, que se deu apenas na semana seguinte.

Assim, no dia 3 de dezembro de 2018, foram executadas as atividades 5 e 6 previstas. Para tal, foi trazido para sala de aula uma resma de papéis e iniciei uma discussão sobre o

volume produzido por aquela resma. Após isso, ao empilhar de maneira diferente a resma, desalinhada ou inclinada, os alunos concluíram corretamente que seus volumes se mantêm, comentando:

- *Lógico, a quantidade de papel é a mesma!!* (aluno P, informação verbal)
- *Sim, não foi tirada nenhuma folha, então o volume é o mesmo.* (aluna M, informação verbal)

Após essas conclusões, foi apresentado o vídeo “3, 2, 1 Mistério” (YAKHNI, 2010), produzido em parceria com a Unicamp – SP. Esse vídeo introduz de maneira simples as ideias fundamentais do método e uma aplicação ao volume do cone, da esfera e do cilindro. Depois de assistir ao vídeo, alguns alunos questionaram o motivo pelo qual esse princípio não é utilizado sempre, “porque é mais fácil do que decorar um monte de fórmulas”, disse um dos alunos. Expliquei que a maioria das fórmulas utilizadas tem por base esse princípio, mas que esse método apresenta problemas, pois nem sempre é possível encontrar um sólido semelhante para que essa comparação de áreas seja feita, em especial os corpos redondos. E para que esse problema fosse sanado, foi desenvolvido mais tarde um método mais eficaz, o cálculo integral, mas que esse utiliza ferramentas mais avançadas, vistas apenas no Ensino Superior.

Com isso comecei a atividade 6, em que distribuí os materiais para que fosse realizado o cálculo do volume de uma esfera, partindo da comparação com o volume da anticlépsidra, conforme a Figura 28.

Figura 28: A esfera e a anticlépsidra seccionadas na mesma altura



Fonte: Acervo do autor, 2018.

Junto com o material concreto foi distribuído um questionário (Figuras 29 e 30) que serviria como guia para a atividade prevista, na qual consistia em medir tanto a esfera quanto a anticlépsidra, seccionadas na mesma altura, a fim de comparar os seus volumes conforme o princípio de Cavalieri. Essa demonstração pode ser encontrada em diversos livros didáticos,

mas os alunos não têm contato “físico” com os objetos de demonstração, ficando esta muito superficial, na maioria das vezes.

Figura 29: Questões 1 a 5 da atividade 6

- 1 - Meçam os elementos necessários para calcular a área da seção da esfera e da anticlépsidra. Preencha os valores obtidos no Quadro 3.
 2 - Qual é o raio da anticlépsidra? E o raio da esfera? Preencha no Quadro 3.
 3 - Calcule a área dessas seções e preencha o Quadro 3. O que vocês concluem sobre essas áreas?

Quadro 3 – As medidas da anticlépsidra e da esfera

Anticlépsidra		Esfera	
Medidas	_____	Medidas	_____
	_____		_____
Raio da seção	_____	Raio da seção	_____
Área da seção	_____	Área da seção	_____

Conclusão: _____

4 - Qual é o volume da anticlépsidra?

5 - Qual é o volume da esfera?

Fonte: Produção do autor, 2018.

Figura 30: Questões 6 e 7 da atividade 6

6 - O que vocês podem concluir sobre a comparação entre os volumes desses sólidos? É possível generalizar essa comparação?

7 - É possível determinar o volume de uma esfera sem calcular o volume da anticlépsidra? Como poderia ser feito?

Fonte: Produção do autor, 2018.

É interessante perceber que, segundo a sequência, o aluno é instigado sobre as medidas dos raios da anticlépsidra e da esfera. Ao medir a área das seções, ele se depara com uma situação diferente dos casos anteriores, pois deve comparar a área de um círculo, na esfera, com a área formada por uma coroa circular, na anticlépsidra.

Sem que isso fosse mencionado, os alunos começaram a medir os elementos de ambos os sólidos e analisarem suas descobertas (Figuras 31 e 32), mas agora com o conhecimento do Princípio de Cavalieri, ou seja, já esperando pela igualdade entre as áreas das seções.

Figura 31: Equipe G2 com os instrumentos de medição



Fonte: Acervo do autor, 2018.

Figura 32: Equipe G1 com os sólidos



Fonte: Acervo do autor, 2018.

Durante essa atividade, os alunos começaram a apresentar dificuldades na comparação das seções, pois não conseguiam medir a área da coroa circular na anticlépsidra. Foi realizada uma intervenção nesse ponto, lembrando-os que era a diferença entre as áreas de dois círculos, um externo e outro interno. Assim eles conseguiram calcular a área sem mais dificuldades, como expressado pela equipe G3 na Figura 33. É interessante mencionar que, com o material concreto fornecido, os alunos puderam medir a área de apenas uma seção horizontal de cada sólido, sendo o suficiente “para eles” a prova de que o Princípio de Cavalieri funcionou. Porém, o Princípio de Cavalieri exige que qualquer seção de ambos os sólidos que foram seccionados na mesma altura tenha áreas iguais. Para os sólidos medidos foi mostrado posteriormente, com o auxílio do software GeoGebra que isso realmente acontece. Além disso, existe a demonstração formal, como apresentamos na Seção 6.5 de que isso de fato seja verdadeiro, mas essa não foi apresentada aos alunos.

Já as questões 6 e 7 da atividade 6 (Figura 30) se referem a tentativa de generalizar a utilização do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volume de diferentes sólidos, como os alunos gostariam que fosse possível, “sem a utilização de fórmulas”. Novamente, a equipe G3 apresentou a resposta mais interessante, como segue na Figura 34. Eles perceberam que seus

volumes seriam iguais, apesar de suas formas serem diferentes. Contudo, não conseguiram generalizar a comparação a outros casos. Já em relação a determinação do volume da esfera de outra maneira, só conseguiram pensar nas fórmulas tradicionais para a sua descoberta, assim como as demais equipes.

Figura 33: Questões 1 a 5 da atividade 6 da equipe G3

Quadro 3 – As medidas da anticlépsidra e da esfera

Anticlépsidra		Esfera	
Medidas	$r = 4$ $\hat{r} = 3,14$	Medidas	$r = 4$ $\hat{r} = 3,14$
Raio da seção	$r = 4$	Raio da seção	$r = 4$
Área da seção	50,24 cm	Área da seção	50,24

Conclusão: O Princípio de Cavalieri funciona, e as medidas são iguais

4 - Qual é o volume da anticlépsidra?
267,96

5 - Qual é o volume da esfera?
267,96

Fonte: Acervo do autor, 2018.

Figura 34: Questões 6 e 7 da atividade 6 respondidas pela equipe G3

6 - O que vocês podem concluir sobre a comparação entre os volumes desses sólidos? É possível generalizar essa comparação?

Eles tem as mesmas medidas consequentemente o mesmo volume. Não pois se bem todos os sólidos tiveram as mesmas medidas eles não se encaixaram no Princípio de Cavalieri.

7 - É possível determinar o volume de uma esfera sem calcular o volume da anticlépsidra? Como poderia ser feito?

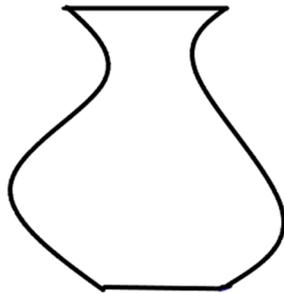
Sim, pois ela tem suas próprias medidas, e com sua própria fórmula pode-se medir seu volume.

Fonte: Acervo do autor, 2018.

Durante a aplicação da atividade não foi possível discutir essas questões, de modo essas conclusões foram observadas após o recolhimento das atividades. Mas no dia seguinte essa discussão tomou corpo e foi bem interessante. Alguns dos alunos perguntaram o modo como

generalizariam o Princípio de Cavalieri, ou seja, se ele poderia ser utilizado sempre, de modo que não fosse necessário decorar as fórmulas de volume. Novamente foi esclarecido que isso só se torna possível se encontrarmos um sólido compatível, ou seja, que possui mesma área em cada uma das seções horizontais que formam esse sólido. Nesse momento, um dos alunos questionou: “E de outra forma poderíamos calcular o volume de um vaso ‘assim’, por exemplo?”, e desenhou no quadro um vaso semelhante ao da Figura 35.

Figura 35: Vaso semelhante ao desenhado pelo aluno

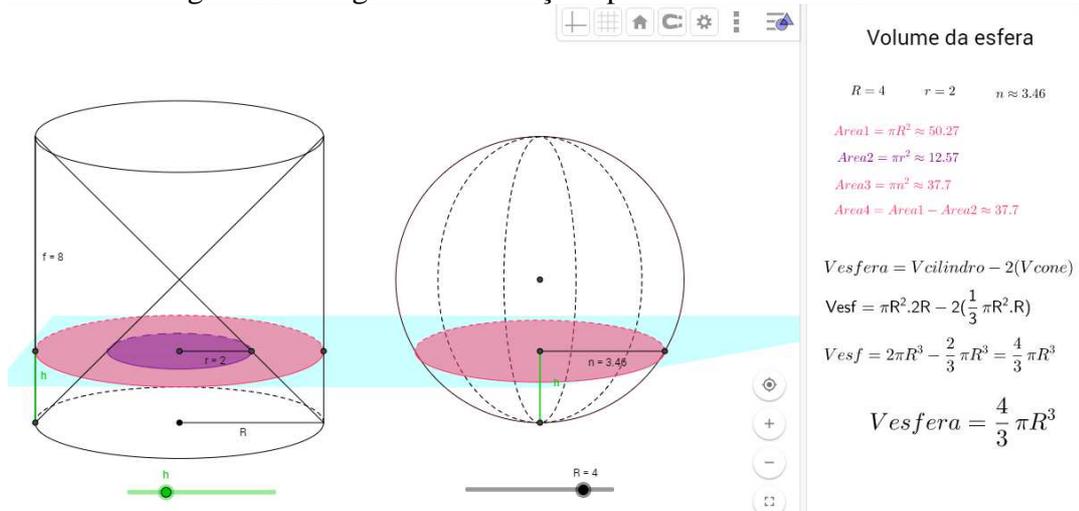


Fonte: Acervo do autor, 2018.

Algumas ideias surgiram entre os próprios alunos, como a ideia de mergulhar o sólido em um tanque com água até o topo e verificar o quanto de água escoou para fora do tanque, ideia essa desenvolvida por Arquimedes. O interessante é que eles perceberam sozinhos que o Princípio de Cavalieri seria um recurso “muito difícil” de ser aplicado, pela dificuldade de encontrar um sólido mais simples cuja seção transversal tivesse a mesma área que a seção do vaso para todas as alturas possíveis.

Após essa discussão, foi apresentado a eles um arquivo (Figura 36), no GeoGebra, desenvolvido por Benk et. al. (2016) e exposto no Colóquio Luso-brasileiro de Educação (COLBEDUCA), que representa a comparação entre as áreas das seções horizontais de uma esfera e de uma anticlépsidra, de modo a mostrar que várias são as seções de mesma área, e não apenas aquela que eles mediram. Foi aproveitado o momento para reforçar esse entendimento: que nada podemos afirmar com apenas uma comparação entre áreas de seções, como aconteceu com as soluções que eles trouxeram. O correto é analisar “todas” as seções horizontais, e assim ter certeza de que os sólidos permitem essa comparação.

Figura 36: Imagem da simulação apresentada no GeoGebra



Fonte: BENK ET. AL., 2016, p 10.

Com isso foi possível concluir a aplicação do projeto proposto. Na semana seguinte, os alunos foram convidados a responder a um questionário (Apêndice D), com o intuito de verificar a satisfação deles em relação ao projeto desenvolvido e aos materiais utilizados. Esse questionário possuía questões referentes a idade, tempo de estudo, sobre o quanto conheciam do software GeoGebra e da impressão 3D e o que eles alegam ter aprendido com o desenvolvimento desse projeto. Os dados fornecidos durante a aplicação desse projeto serão discutidos no próximo capítulo, bem como a minha percepção quanto a essa aplicação.

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Antes de apresentarmos os dados obtidos na aplicação da sequência didática, serão apresentados os objetivos principais das atividades realizadas, a fim de podermos melhor discutir os resultados.

As atividades 1 e 2 visavam o resgate histórico sobre Cavalieri, para que os alunos começassem a se ambientar com o período, percebendo a “preciosidade” de tudo o que Cavalieri construiu. Esse objetivo foi alcançado, de modo que os alunos perceberam a importância desse princípio e o quão útil ele pode ser, de modo que os alunos tentaram utilizá-lo unicamente, esquecendo assim as fórmulas. Nesse ponto foram expostas as suas limitações, e assim os alunos compreenderam que esse método é eficiente em vários casos, mas não em todos, percebendo que se trata de mais uma ferramenta que pode ser utilizada.

A atividade 3 tinha por objetivo ajudar os alunos a identificarem a utilização do Princípio de Cavalieri, mesmo sem a formalização do método. A devida comparação entre as áreas das suas bases e seu posterior cálculo de volume os levavam as mesmas conclusões obtidas por Cavalieri. Na comparação entre o cilindro e o paralelepípedo todos obtiveram êxito. Já na comparação entre a pirâmide de base quadrada e o cone, uma das quatro equipes não atingiu o objetivo esperado, pois calculou o perímetro da base do cone ao invés da sua área. Pode-se concluir aqui que os membros dessa equipe não compreenderam por completo a noção de volume, ao passo que as outras equipes entenderam o suficiente para comparar os volumes corretamente.

As atividades 4 e 5 tinham por objetivo a formalização das informações intuídas pelos alunos na atividade 3, confirmando assim suas suspeitas acerca dos volumes dos sólidos por eles calculados. A posterior apresentação do Princípio de Cavalieri foi “esclarecedora”, pois confirmou definitivamente aos que ainda tinham suas dúvidas sobre a atividade 3, pois essa foi realizada com apenas uma seção paralela às bases dos sólidos. Com o GeoGebra, eles visualizaram mais seções, aproximadamente dez em cada sólido, o que os deixou mais seguros quanto à igualdade entre as medidas do volume dos sólidos.

Já a atividade 6 foi a mais importante desse trabalho, pois tinha por objetivo que eles concluíssem sozinhos a maneira de se calcular o volume da esfera, único dos sólidos não trabalhado antes da aplicação desse trabalho, de modo que os alunos não conheciam a fórmula para o cálculo do seu volume. Essa comparação foi realizada através da comparação com a anticlépsidra, um sólido desconhecido por eles até então, mas que foi devidamente apresentado antes da aplicação da atividade. Desse modo, o desafio foi grande, e duas das equipes não

concluíram corretamente o cálculo do volume desses sólidos. Uma delas calculou corretamente o volume do cilindro, mas se equivocou no volume dos cones, obtendo um valor abaixo do volume da anticlépsidra e, conseqüentemente, obtiveram um valor baixo para o volume da esfera. A outra equipe não calculou o volume dos sólidos, colocando valores aleatórios nas soluções, aparentemente sem motivo algum. Essa equipe não apresentou corretamente suas ideias, me levando a crer que não possuíam motivação para executarem esse desafio. Apesar disso, assim como as outras equipes, eles colocaram que os volumes dos dois sólidos eram iguais, apresentando que a ideia da comparação através do Princípio de Cavalieri foi compreendida.

Quanto à questão 6 dessa atividade, o objetivo era que os alunos pensassem em maneiras de generalizar essa comparação, momento em que chegariam às fórmulas convencionais, mas nenhuma das equipes tentou essa generalização, seja por falta de tempo ou de habilidades para que o fizessem. A questão 7 perguntou sobre outras formas de se calcular o volume da esfera, sem a utilização da anticlépsidra. As quatro equipes responderam que seria por meio das fórmulas, o que seria melhor entendido com a generalização anterior, pois a fórmula atual deriva exatamente do volume da anticlépsidra. Somente após a finalização da sequência didática que a fórmula para o cálculo de volume da esfera foi apresentada, e assim eles puderam comprovar que as medidas de volume encontradas por eles durante a aplicação da sequência estavam certas ou não, momento em que foi visível a satisfação dos alunos que conseguiram concluir corretamente a atividade proposta.

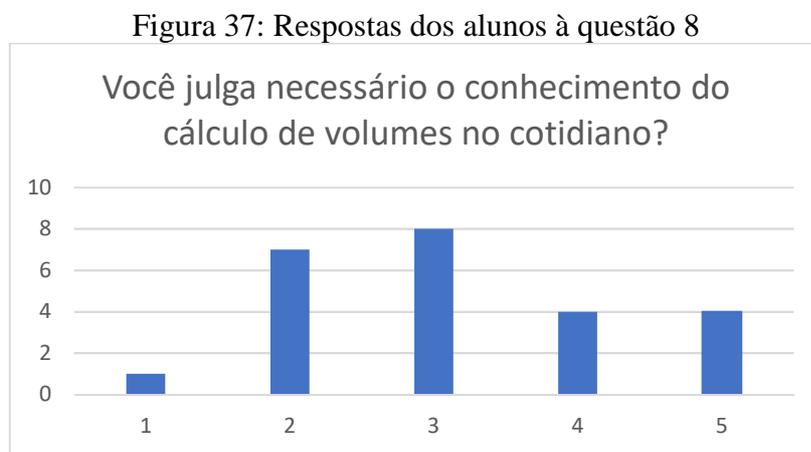
Ao final da aplicação das atividades foi aplicado um questionário de satisfação (Apêndice D) cujo objetivo foi obter a percepção dos alunos sobre as atividades desenvolvidas em sala de aula. A análise das respostas dos alunos revelou que:

- Em relação às suas vidas profissionais, dezesseis trabalhavam em período integral, sete em período parcial e um não trabalhava durante a aplicação da sequência;
- Em relação ao seu tempo semanal de estudos, dezenove disseram que estudavam entre 1 e 3 horas semanais, dois disseram estudar entre 4 e 7 horas semanais e três disseram estudar mais de 7 horas semanais. É interessante lembrar que essa aplicação ocorreu no final do ano, momento em que os alunos prestam vestibulares e o ENEM;
- Em relação ao conhecimento dos cálculos de área e volume apresentados nas atividades, dois disseram já conhecer e dominar os cálculos de áreas e volumes, onze disseram já os conhecerem, mas que não o dominavam, e onze disseram que não conheciam os cálculos de área e de volume apresentados na atividade;

- Em relação ao software GeoGebra, quatro dos alunos afirmaram que já o conheciam antes da aplicação da sequência, enquanto os outros vinte disseram que não o conheciam;
- Já em relação à impressão 3D, vinte e um disseram que já conheciam, enquanto três disseram que não conheciam. Acredito que muitos deles se referiam a objetos confeccionados em impressão 3D, e não a sua produção em si, que é complexa e exige conhecimentos matemáticos mais elaborados.

As questões 8 a 13 desse questionário pediam para que os alunos apresentassem, em uma escala de 1 a 5, sendo 1 pouco e 5 muito, o que eles pensavam sobre o cálculo de volumes e o quanto acreditavam ter compreendido do conhecimento oferecido durante a aplicação da sequência didática. Os dados referentes a essas questões serão apresentados em forma de gráficos, para facilitar a nossa interpretação.

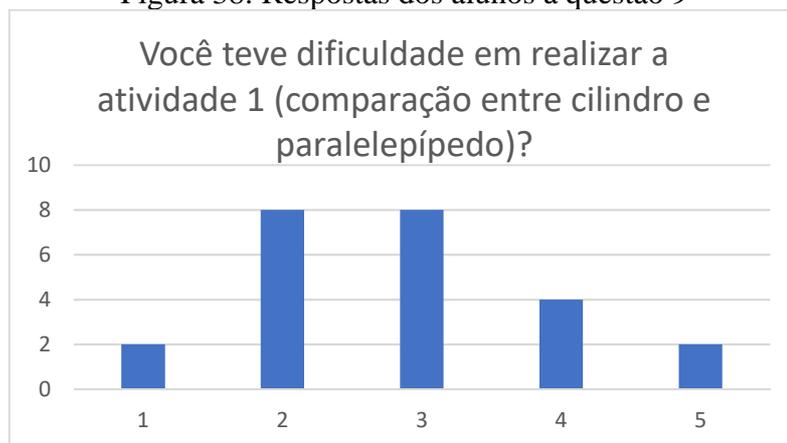
Na questão 8 (Figura 37), é interessante perceber que muitos dos alunos já trabalham, em áreas diversas, em profissões que dependem ou não desse conhecimento. Assim, a maioria dos alunos respondeu que julga necessário conhecer o cálculo de volumes no seu cotidiano, mesmo que não o percebam ou não o utilizem em seu dia-a-dia.



Fonte: Produção do autor, 2019.

A questão 9 (Figura 38) se refere ao cálculo dos volumes do cilindro e do paralelepípedo e sua posterior comparação. Durante as atividades, as quatro equipes calcularam corretamente o volume de tais objetos, e isso se reflete nesse gráfico, onde poucos afirmam que tiveram dificuldades nessa atividade.

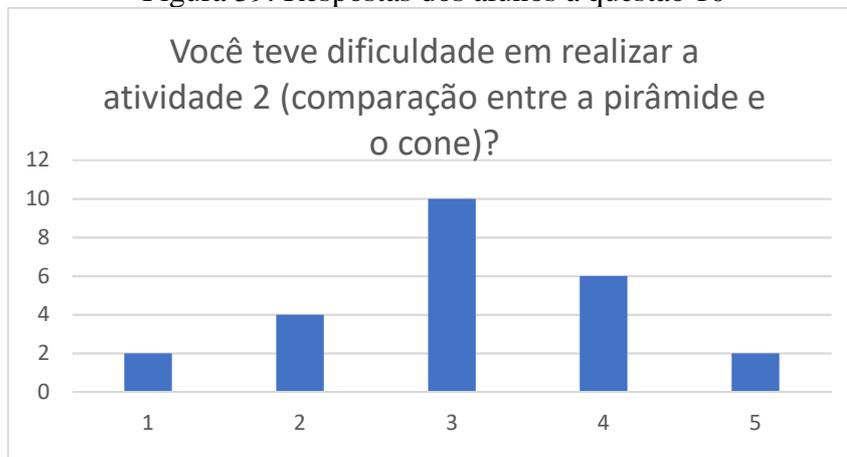
Figura 38: Respostas dos alunos à questão 9



Fonte: Produção do autor, 2019.

A questão 10 (Figura 39) apresentou um maior desafio, pois os alunos possuem um pouco mais de dificuldade nessas fórmulas, momento em que se deparam com os termos geratriz e altura da pirâmide. Esses termos são confundidos e, em muitas ocasiões, invertidos. Mesmo a altura da pirâmide é confundida com a altura da face lateral da pirâmide. Assim, é natural que houvessem mais dificuldades aqui do que na atividade anterior, como mostrado.

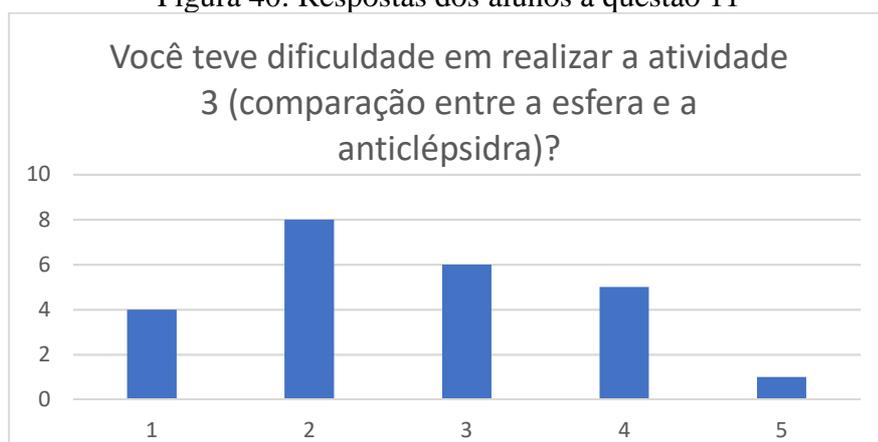
Figura 39: Respostas dos alunos à questão 10



Fonte: Produção do autor, 2019.

A questão 11 (Figura 40), assim como esperado, apresentava uma série de desafios. Primeiramente, a comparação entre a área do círculo (na esfera) e a área da coroa circular (na anticlépsidra). Depois, o cálculo de volume da anticlépsidra, para que fosse possível a comparação com o volume da esfera. Desse modo, era esperada uma maior dificuldade nessa questão. Mesmo assim, os alunos encararam o desafio e, na percepção da maioria deles, não apresentaram dificuldades além do comum, respondendo positivamente.

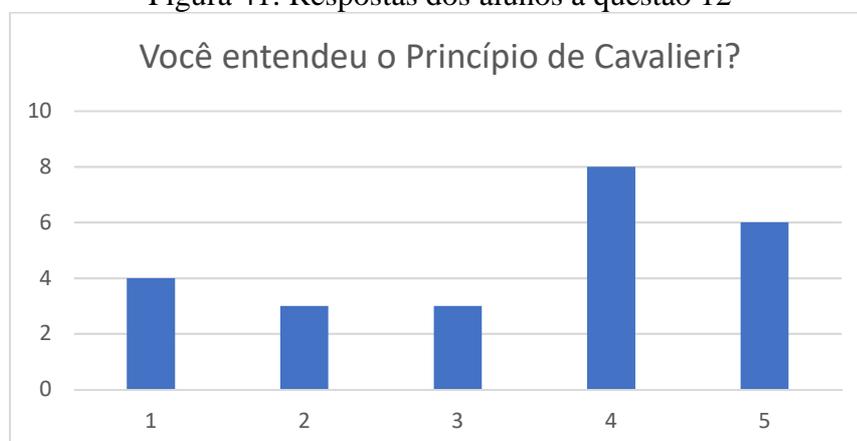
Figura 40: Respostas dos alunos à questão 11



Fonte: Produção do autor, 2019.

Apesar de todas as dificuldades encontradas, foi possível perceber, durante toda a aplicação do trabalho, que os alunos entenderam a ideia geral do que Cavalieri queria transmitir. O Princípio de Cavalieri teve uma boa aceitação entre os alunos, e alguns deles queriam usar esse método para todos os casos, apesar de suas limitações. Isso se reflete na percepção dos próprios alunos quanto a sua aplicabilidade, conforme a Figura 41.

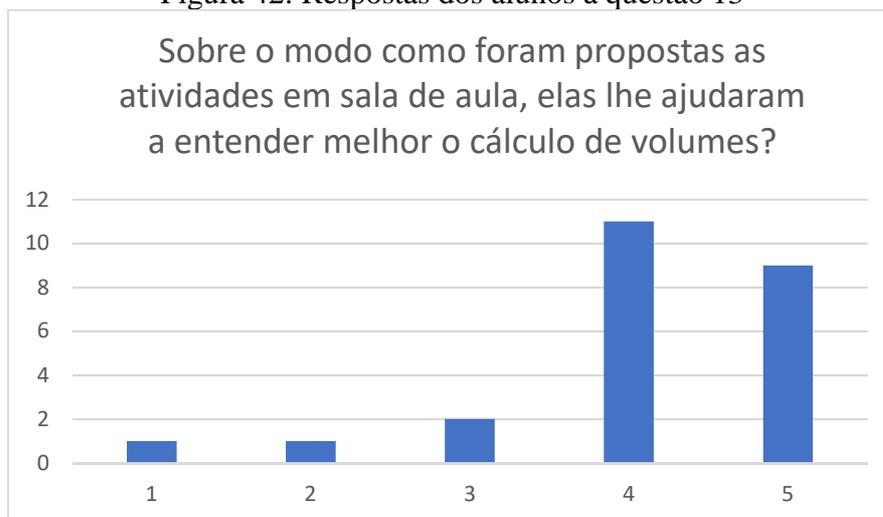
Figura 41: Respostas dos alunos à questão 12



Fonte: Produção do autor, 2019.

Referente a aceitação sobre a sequência didática, a maioria dos alunos avaliou como positiva, uma vez que são situações que fogem do conteúdo básico, os levando a outros entendimentos. Aqui, repenso as minhas atitudes em sala de aula, imaginando como seria proveitoso se houvessem mais aulas desse tipo, envolventes e desafiadoras. Acredito também que o tempo extra que os alunos tiveram nesse conteúdo os ajudou a entender mais profundamente do que se trata o volume, de forma que ele pôde ser melhor compreendido. Isso incidiu na avaliação que os alunos fizeram sobre a sequência didática proposta, conforme Figura 42.

Figura 42: Respostas dos alunos à questão 13



Fonte: Produção do autor, 2019.

Quanto a questão 14, sobre as opiniões dos alunos sobre o trabalho e possíveis sugestões, algumas delas me fizeram reavaliar o meu método de ensino dessa disciplina com os alunos e, também, aperfeiçoar a sequência didática proposta de forma que pudesse atingir ainda mais àqueles alunos que se apresentaram interessados pelo conteúdo.

Uma das sugestões foi, por exemplo, que os alunos trouxessem de casa os sólidos, representados por embalagens, e que construíssem um sólido com mesma altura e mesma área para as seções. Isso faria com que os alunos pensassem na melhor maneira de executar essa tarefa, abrindo várias possibilidades de comparação. Mas traria desvantagens, devido às limitações que o princípio impõe, de algumas embalagens serem “sofisticadas demais” para o seu uso, ou mesmo simples demais para se pensar, em outros casos.

6 PARA ALÉM DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Nesse capítulo serão apresentadas formas alternativas de se calcular o volume dos sólidos que foram utilizados durante a realização das atividades em sala de aula. Uma ferramenta altamente eficiente é o Cálculo Diferencial e Integral que, por meio do uso de integrais definidas, efetua-se o cálculo de volume de diversos sólidos. Embora o Princípio de Cavalieri possa ser utilizado para o cálculo de volumes de qualquer sólido, ele apresenta uma limitação: a comparação entre sólidos.

Para que o Princípio de Cavalieri seja aplicado, precisamos de um outro sólido, que possua as mesmas medidas de área para cada seção horizontal e possua a mesma altura que o sólido do qual desejamos calcular o volume. Há inúmeros sólidos existentes, mas encontrar um que possua tais características não é um trabalho fácil, principalmente no que se refere a corpos redondos. Portanto, embora o Princípio de Cavalieri seja uma boa ferramenta, “Seu ponto fraco é que não se aplica ao cálculo de áreas de superfícies curvas. Esta deficiência, entretanto, é amplamente compensada por suas vantagens.” (LIMA, 2006, p.107)

Assim, o Cálculo Diferencial e Integral que surgiu pouco tempo depois do Princípio de Cavalieri, definido e apresentado por Newton e Leibniz, e posteriormente aperfeiçoado por tantos outros, como Cauchy, superou essas limitações e, assim, tornou-se possível o cálculo de volume de diversos sólidos muito mais complexos, sem que fosse necessário a comparação entre sólidos. Tanto é que o próprio Princípio de Cavalieri pode ser demonstrado utilizando-se a integral, como será apresentado mais adiante neste capítulo. Apresentaremos, agora, como utilizar essa “poderosa” ferramenta. Os conceitos aqui utilizados são constantes das obras de Muniz Neto (2015) e Anton (2000).

6.1 O CÁLCULO INTEGRAL

Para que seja possível utilizar o Cálculo Integral, precisamos antes entender como ele funciona. Basicamente, a integral definida é um limite. Semelhante à ideia proposta por Cavalieri, um sólido qualquer pode ser dividido em n fatias, tendo cada uma delas uma certa espessura. Quanto maior o número de fatias, menor será a espessura de cada uma delas e, conseqüentemente, mais próximo da medida de volume desse sólido estaremos. Desse modo, se tivermos infinitas fatias teremos o valor exato do volume desse sólido. Essa é a ideia geral. Mas para que possamos definir esse cálculo, precisamos reunir antes alguns conceitos.

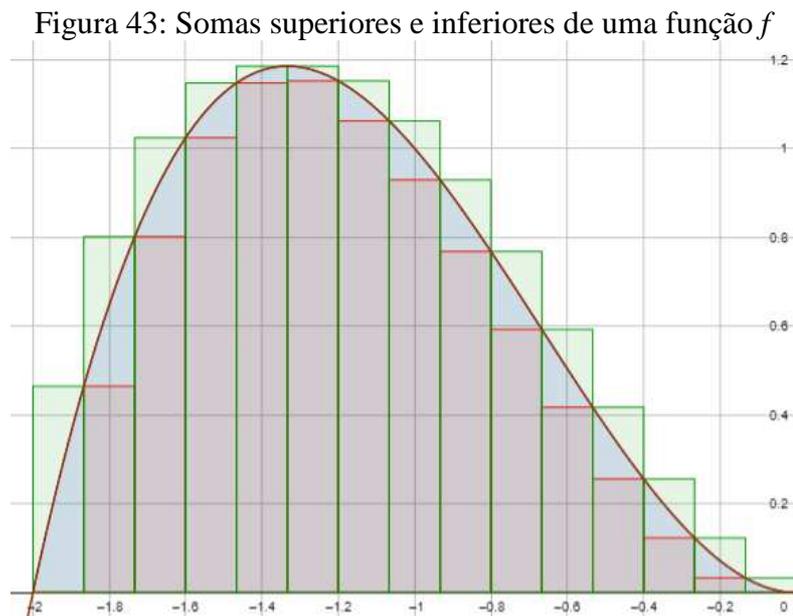
Inicialmente, dado um intervalo $[a, b]$, uma partição de $[a, b]$ é a escolha de um subconjunto finito $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ de pontos ordenados de $[a, b]$, tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$. Ao acrescentar mais pontos à partição P vamos obter uma nova partição Q tal que $P \subset Q$, nesse caso dizemos que Q refina P . Dada uma função limitada e contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição P (como citada), para todo $i = 1, 2, \dots, k$, o mínimo m_i e o máximo M_i de f em cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$ são definidos por

$$m_i = \min\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \text{ e } M_i = \max\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Esses números podem ser interpretados como sendo a altura de retângulos R_i e T_i de base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e alturas m_i e M_i respectivamente.³

Assim, se somarmos a área de todos os retângulos R_i ou T_i teremos uma aproximação, respectivamente, por falta ou por sobra da medida da área sob o gráfico de f , chamadas de soma inferior e soma superior de f em relação a partição P , definidas respectivamente por

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^k m_i \Delta x_i \text{ e } S(f; P) = \sum_{i=1}^k M_i \Delta x_i$$



Fonte: NICOLODI⁴, 2016.

Desse modo, podemos dizer que uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e contínua é integrável quando o limite da soma inferior for igual ao limite da soma superior quando Δ_i tende a zero para qualquer partição P , ou seja,

³ Apresentamos, aqui, a utilização de máximos e mínimos para calcular a área dos retângulos encontrados. O conceito mais preciso utiliza a ideia de *supremos* e *ínfimos*, sendo que o supremo é a menor das cotas superiores e ínfimo é a maior das cotas inferiores. Como esse trabalho é aplicado apenas em sólidos simples, suas funções são contínuas, o que permitem essa simplificação nos conceitos. Para mais detalhes consulte Muniz Neto (2015).

⁴ Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ceTBKs3A>>. Acesso em: 28 maio 2019.

$$c = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} s(f; P) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} S(f; P)$$

Nesse caso, dizemos que a integral de Riemann da função f existe, e denotamos c por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

É interessante ressaltar que, segundo Muniz Neto (2015, p. 220),

a notação acima, devida a Leibniz, tem sua razão de ser: o símbolo \int lembra um *S estilizado*, e está presente para recordar que o cálculo do valor da integral envolve um processo de aproximação por somas; os números a e b recordam o domínio da função f que está sendo integrada; dx recorda que as somas que aproximam o valor da integral envolvem diferenças $x_i - x_{i-1}$ de elementos de uma partição P de $[a, b]$, diferenças estas que, classicamente, eram denotadas por Δx_i . (Destaques do autor).

A integral de Riemann fornece a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo Ox e pelas retas $y = a$ e $y = b$, caso a função f seja contínua e positiva no intervalo $[a, b]$ (ou seja, $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$). Caso a função f não seja positiva no intervalo $[a, b]$, então a integral não representa uma área. Para maiores detalhes, consultar Anton (2000). Para calcular o volume de sólidos a ideia intuitiva é similar. Usaremos a aproximação por volumes de sólidos elementares (blocos elementares), de modo que a soma de infinitos sólidos elementares, quando convergir, será o volume do sólido, e esse limite será uma integral dupla ou tripla, discutidas adiante. Antes, porém, é necessário que possamos localizar precisamente um ponto no espaço tridimensional.

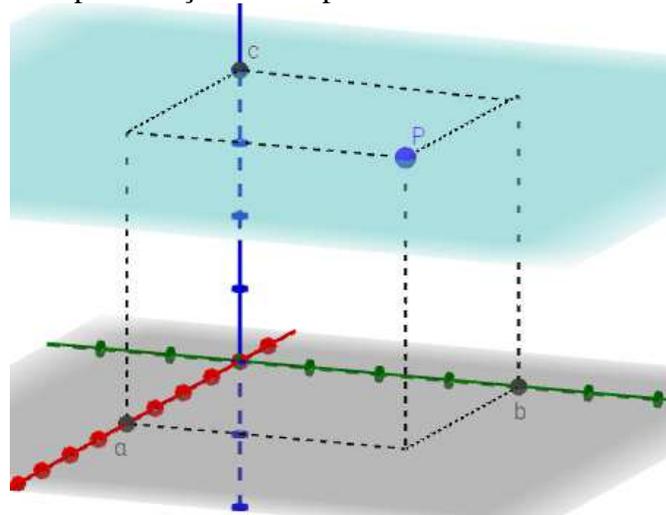
6.2 COORDENADAS RETANGULARES, CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Antes de falarmos sobre integrais duplas e triplas, é interessante termos algumas noções sobre a localização de um ponto no espaço tridimensional. Para localizar um ponto no espaço tridimensional são necessárias três coordenadas, que podem ser apresentadas de três diferentes formas (na verdade existem diversas formas, mas apresentaremos aqui as três formas mais utilizadas em aplicações práticas).

Sejam três retas x , y e z no espaço, perpendiculares duas a duas e que se interceptam em um ponto O , e sejam os planos xOy , xOz e yOz os planos definidos pelas retas x e y , x e z , y e z , respectivamente. As retas x , y e z serão chamadas de eixos e os três eixos formam um sistema de coordenadas retangulares ou sistemas de coordenadas ortogonais. Dado um ponto P no espaço, seja α paralelo a yOz que contém o ponto P , esse plano interceptará o eixo x no ponto a . Seja β um plano paralelo ao plano xOz que contém o ponto P , esse plano interceptará o eixo y no ponto b . Seja γ um plano paralelo ao plano yOx que contém o ponto P , esse plano

interceptará o eixo z no ponto c . Note que para cada ponto P os planos α , β e γ são únicos, portanto para cada ponto P os pontos a , b e c determinados pelos planos α , β e γ são únicos. Diremos que os pontos a , b e c são as coordenadas cartesianas do ponto P . Logo, um ponto P pode ser localizado no espaço por meio de suas coordenadas cartesianas a , b e c nos eixos x , y e z , respectivamente, e usaremos a notação $P(a, b, c)$ para indicar as coordenadas cartesianas do ponto P (Figura 44).

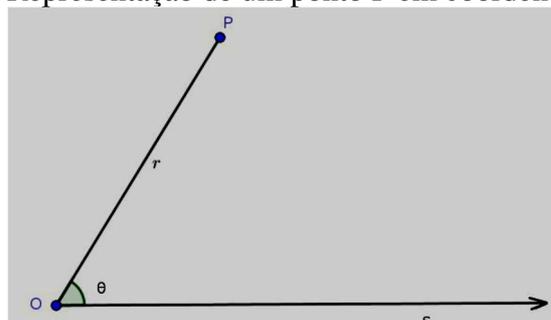
Figura 44: Representação de um ponto P em coordenadas cartesianas



Fonte: Produção do autor, 2019.

Pensando de modo diferente considere, no plano α , uma semirreta s de origem O . Dado um ponto P do plano, seja OP o segmento definido pelos pontos O e P , e seja $r = \overline{OP}$ a medida do segmento OP . Seja θ o ângulo entre as semirretas s e OP , medido no sentido antihorário a partir da semirreta. De acordo com a construção anterior, todo ponto no plano pode ser localizado por meio dos valores de r e θ . Esses valores serão chamados de coordenadas polares do ponto P no plano α e o ângulo θ será chamado de ângulo polar. Indicaremos por $P(r, \theta)$ as coordenadas polares do ponto P (Figura 45).

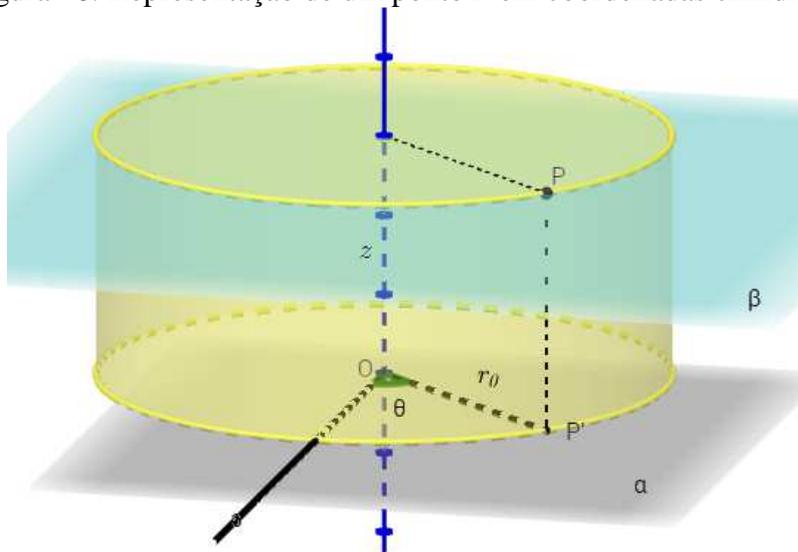
Figura 45: Representação de um ponto P em coordenadas polares



Fonte: Acervo do autor, 2019.

Seja α um plano polar no espaço e seja z a reta perpendicular à α pelo ponto O . Dado um ponto P no espaço, seja P' a projeção do ponto P no plano α e sejam r e θ as coordenadas polares do ponto P' . Seja β o plano paralelo a α pelo ponto P . O plano β interceptará o eixo z no ponto z . Assim, o ponto P pode ser localizado no espaço por meio dos valores de r , θ e z . Estes valores são chamados de coordenadas cilíndricas do ponto P . Usaremos a notação $P(r, \theta, z)$ para indicar as coordenadas cilíndricas do ponto P (Figura 46). Se fixarmos $r = r_0$, todos os pontos $P(r_0, \theta, z)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, com $z \in \mathbb{R}$, estarão sobre a superfície de um cilindro circular reto de centro O e raio r_0 .

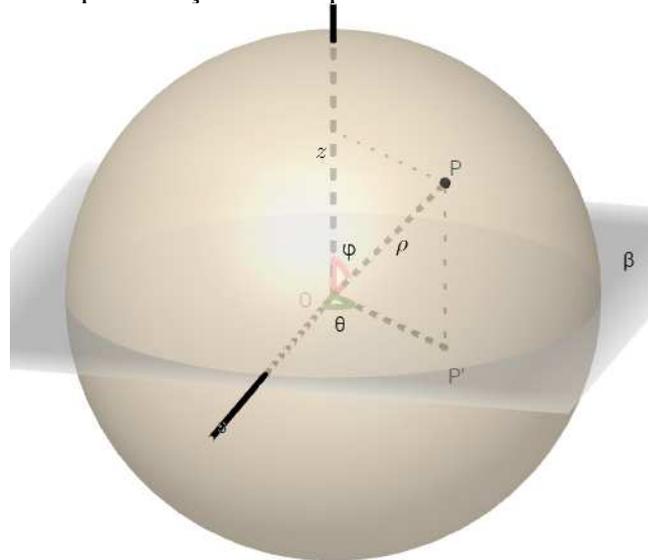
Figura 46: Representação de um ponto P em coordenadas cilíndricas



Fonte: Produção do autor, 2019.

Outra representação muito utilizada pode ser pensada assim. Seja α um plano polar no espaço e seja z a reta perpendicular à α que passa pelo ponto O . Dado um ponto P no espaço, seja ρ a medida do segmento OP , θ o ângulo polar da projeção ortogonal P' de P e ϕ o ângulo que o segmento OP faz com o eixo z . Deste modo, um ponto P no espaço pode ser localizado por meio das três coordenadas ρ , θ e ϕ , chamadas de coordenadas esféricas de P . Denotaremos $P(\rho, \theta, \phi)$ as coordenadas esféricas do ponto P . Note que a coordenada θ , assim como em coordenadas cilíndricas, representa o ângulo entre a projeção de P e o eixo polar, de modo que este pode variar entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e; a coordenada ϕ representa o ângulo formado entre o raio ρ e eixo z positivo, de modo que esse varia entre $0 \leq \phi \leq \pi$, como indicado na Figura 47.

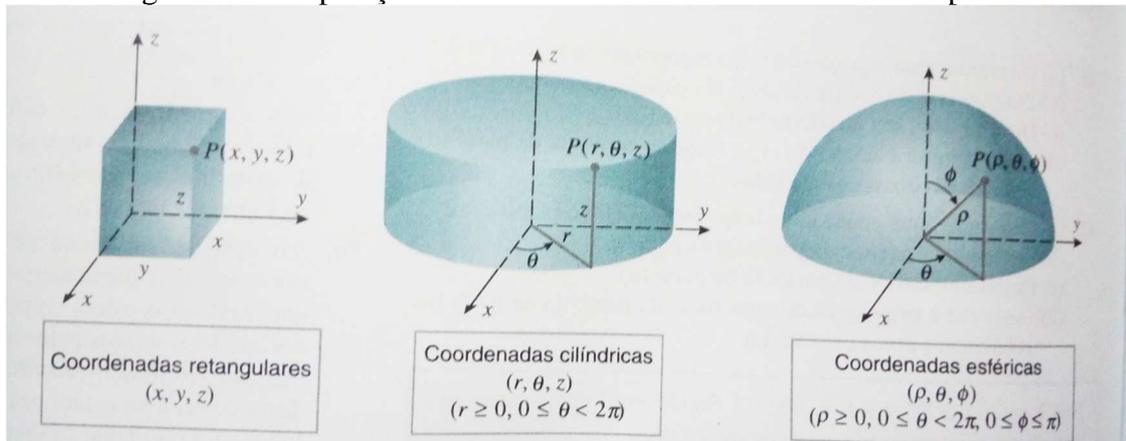
Figura 47: Representação de um ponto P em coordenadas esféricas



Fonte: Acervo do autor, 2019.

Na Figura 48 é possível comparar os três sistemas de coordenadas citados.

Figura 48: Comparação entre os sistemas de coordenadas de um ponto



Fonte: ANTON, 2000, p. 242.

Mas qual seria a vantagem em uma eventual conversão de coordenadas (Figura 49) e de que forma ela pode ser realizada? Segundo Anton (2000, p. 244),

As superfícies de revolução em torno do eixo z de um sistema de coordenadas retangulares têm, geralmente, equações mais simples nas coordenadas cilíndricas do que nas coordenadas retangulares, e as equações de superfícies com simetria em torno da origem são geralmente mais simples nas coordenadas esféricas do que nas coordenadas retangulares.

Figura 49: Tabela de conversão entre os sistemas

CONVERSÃO		FÓRMULAS	RESTRICÇÕES
Cilíndricas para retangulares	$(r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z)$	$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$	
Retangulares para cilíndricas	$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = y/x, \quad z = z$	
Esféricas para cilíndricas	$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (r, \theta, z)$	$r = \rho \sin \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi$	$r \geq 0, \rho \geq 0$ $0 \leq \theta < 2\pi$ $0 \leq \phi \leq \pi$
Cilíndricas para esféricas	$(r, \theta, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi)$	$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \operatorname{tg} \phi = r/z$	
Esféricas para retangulares	$(\rho, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$	$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$	
Retangulares para esféricas	$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \theta, \phi)$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = y/x, \quad \cos \phi = z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	

Fonte: ANTON, 2000, p. 243.

Veremos no momento de calcular o volume de alguns sólidos que a escolha apropriada de um sistema de coordenadas pode facilitar o cálculo das integrais duplas e triplas.

6.3 O CÁLCULO DE VOLUMES

Segundo Anton (2000, p. 400), “a integral definida de uma função de uma variável originou-se do problema de determinação de áreas sob curvas. As integrais das funções de duas variáveis originam-se do problema de determinação de volumes sob superfícies.” As integrais das funções de duas variáveis são mais comumente chamadas de integrais duplas, enquanto as integrais de funções de três variáveis são chamadas de integrais triplas. As integrais triplas são utilizadas de modo geral quando o sólido representado possui medidas variando livremente nas três dimensões.

O processo para calcular o volume de sólidos utilizando integrais duplas é similar ao processo usado para determinar áreas, exceto que, neste caso, os elementos de aproximação são paralelepípedos retangulares ao invés de retângulos.

Inicialmente, dado um intervalo $[a, b] \in x$, e um intervalo $[c, d] \in y$, uma partição é a escolha de subconjuntos finitos $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ de pontos ordenados de $[a, b]$ e $[c, d]$ tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ e $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$.

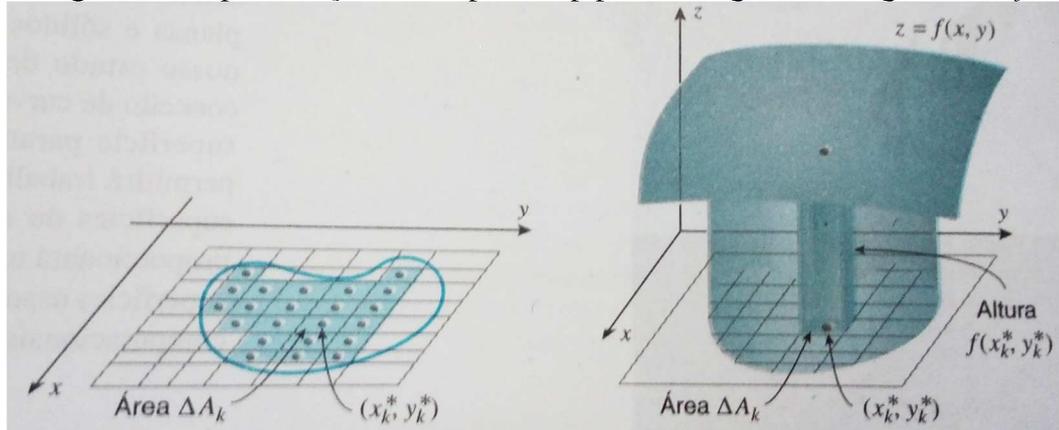
Dada uma função de duas variáveis contínua e limitada $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ e as partições P_1 e P_2 (como citadas), para todo $i = 1, 2, \dots, n$, e $j = 1, 2, \dots, m$, que $h_{(i,j)}$ é o mínimo e $H_{(i,j)}$ é o máximo de f em cada subintervalo $[(x_{i-1}, y_{j-1}), (x_i, y_j)]$, e são definidos por

$$h_{(i,j)} = \min\{f(x, y); x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} < y < y_j\} \text{ e}$$

$$H_{(i,j)} = \max\{f(x, y); x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ e } y_{j-1} < y < y_j\}.$$

Esses números podem ser interpretados como sendo a altura de paralelepípedos retangulares S_i e U_i tendo por base os retângulos que possuem medidas $\Delta(x_i, y_i) = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})$, denotados por ΔA_k , e alturas $h_{(i,j)}$ e $H_{(i,j)}$, respectivamente, conforme Figura 50.

Figura 50: Representação de um paralelepípedo retangular sob o gráfico de f



Fonte: ANTON, 2000, p. 400.

Assim, se somarmos o volume de todos os paralelepípedos retangulares S_i ou U_i teremos uma aproximação, respectivamente, por falta ou por sobra da medida do volume sob o gráfico de f , chamadas de soma inferior e soma superior de f em relação a partição P , definidas respectivamente por

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{(i,j)} \cdot \Delta A_k \quad \text{e} \quad S(f; P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H_{(i,j)} \cdot \Delta A_k$$

Desse modo, podemos dizer que uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua e limitada, é integrável quando o limite da soma inferior for igual ao limite da soma superior quando Δ_i tende a zero para qualquer partição P_n , ou seja,

$$c = \lim_{\Delta A_k \rightarrow 0} s(f; P_n) = \lim_{\Delta A_k \rightarrow 0} S(f; P_n)$$

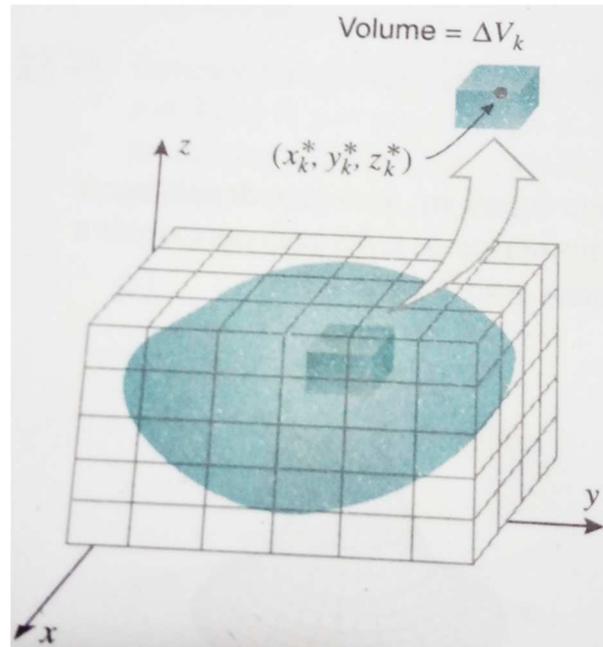
de modo que a integral dupla de Riemann existe e

$$V = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_n, y_m) \Delta A_k = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dA.$$

Já para definir a integral tripla de $f(x, y, z)$ em uma região $G \subset \mathbb{R}^3$, utilizamos pequenos paralelepípedos retangulares e escolhemos dentro deles um ponto arbitrário (x_k, y_k, z_k) , conforme a Figura 51. Denominamos o volume de cada k -ésimo paralelepípedo retangular de ΔV_k , formando o produto $f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$ para cada paralelepípedo, depois somamos os produtos de todos os paralelepípedos para obter uma soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

Figura 51: Representação de um paralelepípedo retangular interior ao sólido



Fonte: ANTON, 2000, p. 434.

Finalmente, repetimos esse processo com cada vez mais subdivisões, de tal maneira que as três dimensões (comprimento, largura e espessura) de cada paralelepípedo tendam a zero e n tenda para o infinito. Assim, o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \iiint_G f(x, y, z) dV$$

é chamado de integral tripla de $f(x, y, z)$ no sólido G .

Utilizando as ideias até aqui discutidas e o Teorema de Fubini⁵, que garante que o valor das integrais múltiplas é igual ao valor das integrais iteradas, teremos condições de calcular os volumes dos sólidos trabalhados durante a aplicação da sequência didática, como será apresentado a seguir.

6.4 VOLUME DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Agora será apresentado um modo de se calcular o volume de sólidos geométricos utilizando integrais duplas e triplas.

⁵ Segundo esse teorema, temos que, se $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ for integrável e contínua nesses intervalos, então

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Para mais detalhes, consulte Anton (2000).

6.4.1 Bloco retangular

Dado um bloco retangular B de medidas a , b e c , apoiado sobre o plano xOy , de modo que um dos vértices desse bloco esteja sobre a origem do sistema. Desse modo, podemos calcular seu volume conforme a medida dos valores obtidos pelo deslocamento dos pontos no espaço tridimensional, variando segundo os eixos ordenados x , y e z , de modo que $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$ e $z \in [0, c]$. Assim, aplicando a definição de volume por integração com os limites dados, obtemos:

$$V(B) = \int_0^c \int_0^b \int_0^a dx dy dz = \int_0^c \int_0^b [x]_0^a dy dz = \int_0^c \int_0^b a dy dz = \int_0^c [a \cdot (y)]_0^b dz$$

$$V(B) = \int_0^c ab dz = ab \cdot [z]_0^c = abc.$$

Assim, o volume de um bloco retangular B , ou generalizando, de qualquer paralelepípedo, é igual a $V(B) = abc$.

6.4.2 Prisma

Para se calcular o volume de um prisma P qualquer utilizaremos a integral dupla. Desse modo, o prisma é delimitado por uma região poligonal B e altura $f(x, y)$. Apoiando essa região B sobre o plano xOy , de modo que um dos vértices desse prisma esteja sobre a origem e, aplicando a ideia da integral dupla, podemos calcular o volume de um prisma P através da integração

$$V(P) = \iint_B f(x, y) dx dy$$

No prisma, a altura é constante e igual a h , para todos os pontos da região poligonal B , portanto $f(x, y) = h$. Assim temos $V(P) = \iint_B h dx dy = h \cdot \iint_B dx dy$.

Mas $\iint_B dx dy = A_B$, em que A_B é a área da região poligonal B . Assim temos:

$$V(P) = A_B \cdot h$$

que é o volume de um prisma P de base poligonal, sendo esse um polígono n -agonal.

6.4.3 Cilindro

Para se calcular o volume de um cilindro C podemos utilizar as coordenadas cilíndricas. Para tal, lembremos que um círculo, em coordenadas retangulares, possui equação $C: x^2 + y^2 = R^2$. Em coordenadas cilíndricas essa equação é reduzida a forma $C: R^2$, sendo R a

medida do raio desse círculo. E mais: devemos converter dA para $rdrd\theta$, pois a região equivalente aos retângulos das coordenadas retangulares nas coordenadas cilíndricas possui medidas $r \cdot d\theta$ e dr , uma vez que $d\theta$, apenas, representa uma medida de ângulo. Devemos ainda lembrar que θ pode variar entre $0 < \theta < 2\pi$. Desse modo, utilizando a cota z variando entre os planos $z = 0$ e $z = h$, e a cota r variando entre $r = 0$ e $r = R$, temos:

$$V(C) = \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\theta dr dz = \int_0^h \int_0^R r \cdot \left[\theta \Big|_0^{2\pi} \right] dr dz = \int_0^h \int_0^R 2\pi \cdot r \, dr dz$$

$$V(C) = \int_0^h \left[2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R \right) \right] dz = \int_0^h \pi R^2 \, dz = \pi R^2 \cdot [z]_0^h = \pi R^2 h.$$

Assim, o volume de um cilindro C de raio R pode ser calculado por $V(C) = \pi R^2 h$.

6.4.4 Pirâmide

Vamos calcular aqui o volume da pirâmide a seguir pelo método do fatiamento. Esse método é um aperfeiçoamento direto do Princípio de Cavalieri, e consiste em “fatiar” um sólido, sabendo que o volume do sólido é a soma dos volumes de cada uma das fatias. O volume de cada fatia é, aproximadamente, o produto entre a sua espessura e a área formada nas seções “fatiadas”.

Sendo $A(x)$ uma função que calcule a área da seção na altura x , e Δx a espessura da seção, temos que o volume de uma seção é dada por $V_i = A(x)\Delta x$. Assim, o volume do sólido todo será a soma dos volumes das n seções, de modo que

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n A(x)\Delta x$$

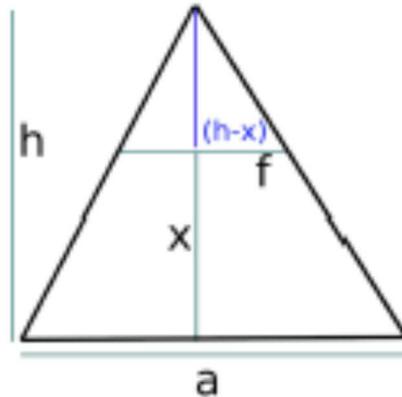
Considerando que, no gráfico, a primeira seção comece em a e a última termine em b e fazendo o número de fatias crescer indeterminadamente ($n \rightarrow \infty$), a espessura de cada seção tende a zero ($\Delta x \rightarrow 0$) e

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x)\Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Para tal, utilizaremos uma pirâmide de base quadrada cuja aresta da base mede a . A fórmula da área do quadrado é a^2 . O tamanho das arestas laterais do triângulo formado diminui de forma linear, conforme a Figura 52. Esse triângulo é uma seção da pirâmide, perpendicular à base e passando pelo vértice, h é a altura da pirâmide e x é a altura subindo da base até o vértice. Para $x = 0$, a aresta da base é a e sua área é a^2 . Para $x = h$ temos o vértice, ou seja, a

área é igual a zero. Precisamos da relação entre a posição da fatia e sua aresta. Sendo f a aresta da fatia em uma certa altura, temos por semelhança de triângulos que $\frac{h}{a} = \frac{h-x}{f}$.

Figura 52: Relação entre o tamanho da aresta e o tamanho de cada fatia



Fonte: Produção do autor, 2019.

Assim, $f = \frac{a(h-x)}{h}$ e a área da fatia que está na altura x será $A(x) = \left[\frac{a(h-x)}{h}\right]^2$.

Desse modo, aplicando a integração temos

$$V(K) = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \left[\frac{a(h-x)}{h}\right]^2 dx = \int_0^h \left[\frac{a^2}{h^2} (x-h)^2\right] dx$$

$$V(K) = \int_0^h \frac{a^2}{h^2} (x^2 - 2hx + h^2) dx = \frac{a^2}{h^2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - 2h\frac{x^2}{2} + h^2x\right) \Big|_0^h$$

$$V(K) = \frac{a^2}{h^2} \cdot \left(\frac{h^3}{3} - 2h\frac{h^2}{2} + h^2h\right) = \frac{a^2}{h^2} \cdot h^3 \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) = \frac{a^2h}{3}.$$

Como a área da base da pirâmide A_b é a área de um quadrado, temos que a área dessa base é $A_b = a^2$. Assim, o volume dessa pirâmide é dado por

$$V = \frac{1}{3} A_b h,$$

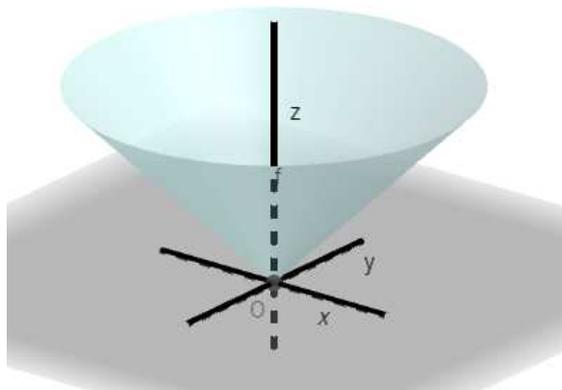
que é a fórmula tradicional para o cálculo do volume de uma pirâmide. Se quisermos aplicar o mesmo conceito para uma pirâmide de base pentagonal, hexagonal ou n -agonal, veremos que todas recaem à mesma fórmula para o volume da de base quadrangular.

6.4.5 Cone

Para calcular o volume de um cone B qualquer iremos recorrer às coordenadas cilíndricas. O cone, assim como o cilindro (Item 6.4.3) possui base circular de raio R , cuja

equação é dada por $C: r = R$ em coordenadas cilíndricas. É preciso lembrar que um cone que possua vértice na origem do sistema estará limitado superiormente por um plano paralelo ao plano xOy , no qual $z = h$, e inferiormente pela superfície cônica de equação $z = \frac{h}{R} \cdot r$, que é a equação da superfície cônica em coordenadas cilíndricas (Figura 53).

Figura 53: Cone de vértice na origem do sistema



Fonte: Produção do autor, 2019.

A relação $z = \frac{h}{R} \cdot r$ deriva da equação do cone em coordenadas retangulares

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Tendo em vista que o cone é circular, então $a = b = R$. Temos ainda que $c = h$. Logo temos

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0$$

de modo que R é o raio da base do cone e h é sua altura. Se isolarmos z nessa equação teremos

$$z = h \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2}}$$

e fazendo $r^2 = x^2 + y^2$ temos a relação dada, em que z se encontra em função de r , e h e R são constantes. Assim, utilizando os limites de integração $0 < \theta < 2\pi$, $0 < R < r$ e $\frac{h}{R} \cdot r < z < h$, temos

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h}{R}r}^h r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot \left([z] \Big|_{\frac{h}{R}r}^h \right) dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cdot \left(h - \frac{h}{R}r \right) dr \, d\theta$$

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(rh - \frac{h}{R}r^2 \right) dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{hr^2}{2} - \frac{h}{R} \cdot \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{hR^2}{2} - \frac{hR^3}{3R} \right) d\theta$$

$$V(B) = \left[\frac{hR^2\theta}{2} - \frac{hR^3\theta}{3R} \right] \Big|_0^{2\pi} = \left[\frac{2\pi R^2 h}{2} - \frac{2\pi R^2 h}{3} \right] = \frac{6\pi R^2 h}{6} - \frac{4\pi R^2 h}{6} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Essa fórmula pode ser generalizada para qualquer cone, independente da sua base, desde que sejam definidos corretamente os limites de integração.

6.4.6 Esfera

Para calcular o volume de uma esfera E utilizaremos coordenadas esféricas. E para isso devemos lembrar como converter as coordenadas retangulares em coordenadas esféricas. Para tal, utilizamos

$$V = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} dx dy dz = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta$$

Os termos ρ^2 e $\operatorname{sen} \phi$ surgem pois temos as medidas $\rho d\phi$ e $\rho \operatorname{sen} \phi d\theta$, uma vez que $d\phi$ e $d\theta$ configuram medidas de ângulos. Agora, precisamos definir os limites de integração de uma esfera de raio r e centro na origem em coordenadas esféricas, que são $0 < \rho < r$, $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < \phi < \pi$. Logo, temos

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi \cdot \left(\left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r \right) d\phi d\theta \\ V(E) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^3}{3} \cdot \operatorname{sen} \phi \, d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \cdot \left([-\cos \phi]_0^\pi \right) d\theta \\ V(E) &= \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \cdot [-\cos \pi - (-\cos 0)] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3} \cdot (1 + 1) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2r^3}{3} d\theta \\ V(E) &= \frac{2r^3}{3} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{2r^3}{3} \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

6.5 PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Como citado na Seção 2.2, Cavalieri entendia um sólido como sendo uma infinidade de placas de espessura desprezíveis paralelas entre si (EVES, 2011, p.425). Esse pensamento é o mesmo utilizado na integração segundo o “método de fatiamento”, citado na Seção 6.4.4. Assim, calculando uma integral, conseguimos obter o volume de um sólido qualquer.

Sejam, então, dois sólidos S_1 e S_2 de mesma altura, limitados pelos planos paralelos $z = a$ e $z = b$, e para cada z com $a \leq z \leq b$. Sejam $A_1(z)$ e $A_2(z)$ as áreas das seções de S_1 e S_2 , respectivamente, na altura Z . Se $A_1(z) = A_2(z)$ para z com $a \leq z \leq b$, então:

$$V(S_1) = \int_a^b A_1(z) dz = \int_a^b A_2(z) dz = V(S_2).$$

Portanto, os dois sólidos S_1 e S_2 tem o mesmo volume. Que é precisamente o Princípio de Cavalieri.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pergunta que nos motivou a realização dessa investigação foi: Como ensinar o cálculo de volumes de sólidos geométricos utilizando concomitantemente materiais concretos e recursos computacionais, de modo que os alunos da terceira série de uma escola estadual compreendam melhor o conceito de volume?

Ao longo de todo o desenvolvimento desse trabalho, foi possível observar que o Princípio de Cavalieri é uma ferramenta muito útil, pois nos permite calcular o volume de sólidos geométricos que podem ser complexos, sendo necessário para isso a comparação com um outro sólido de mais fácil medição, mas que possua a mesma altura e mesma área para cada seção paralela a sua base. Quando esse sólido é encontrado, o cálculo do seu volume, que poderia ser complicadíssimo, pode vir a ser muito simplificado, utilizando cálculos mais fáceis de se executar, se mostrando uma boa alternativa para a aplicação em níveis de Ensino Básico de aprendizagem.

A utilização de materiais concretos vem a ser uma estratégia de ensino interessante, trazendo para a sala de aula aspectos de visualização geométrica que ajuda os alunos a compreenderem melhor várias situações que possam ser impostas a eles. A utilização do software GeoGebra nas aulas também auxilia nesse sentido, pois ajuda na visualização dinâmica dos sólidos, possibilitando aos alunos a manipulação dos objetos, a alteração de seus parâmetros a fim de testar outros comportamentos existentes, além de auxiliar na visualização bidimensional e tridimensional do sólido, facilitando seu entendimento.

Quanto à sequência didática proposta, ela serviu a sua finalidade, que era explorar o Princípio de Cavalieri a fim de calcular o volume de sólidos geométricos sem recorrer unicamente às fórmulas. Apesar das fórmulas encontradas serem justificadas por esse princípio, sua aplicação em sala de aula é pouco explorada. Com a sequência didática aplicada, os alunos puderam vivenciar outra maneira de se efetuar esses cálculos, desde que os sólidos possuam as características requisitadas.

Portanto, da maneira como a sequência foi proposta, o objetivo de que os alunos entendessem o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de sólidos geométricos foi satisfatório, de modo que podemos afirmar que esse método pode ser uma alternativa no ensino de cálculo de volumes no Ensino Médio, como prevê a BNCC (BRASIL, 2018).

Diante de tudo o que foi realizado, podemos finalmente responder a nossa questão norteadora: uma forma de ensinar o cálculo de volumes de sólidos geométricos utilizando concomitantemente materiais concretos e recursos computacionais, de modo que os alunos da

terceira série de uma escola estadual compreendam melhor o conceito de volume é por meio da utilização do Princípio de Cavalieri mediado por sólidos geométricos, para uma melhor visualização dos elementos dos sólidos, e pelo software GeoGebra, que permite a visualização dinâmica da igualdade de áreas em cortes transversais de dois sólidos.

No decorrer desse trabalho, várias ideias de melhoria e ampliação surgiram. Uma delas foi a utilização de sólidos menos convencionais para se calcular o volume. Um exemplo são os anéis de guardanapo, que possuem curiosas propriedades. Esses sólidos não foram apresentados nesse texto pelo motivo de não conseguirmos adequar os cálculos necessários ao nível da terceira série do Ensino Médio no qual foi desenvolvida a sequência didática. Uma alternativa seria selecionar alguns alunos ao invés de trabalharmos com todos, de modo a calcular o volume desse sólido utilizando o Princípio de Cavalieri. Poderíamos também ampliar as ideias dos sólidos trabalhados para explorar também o cálculo das áreas laterais e totais desses sólidos. Com isso, talvez os alunos não confundissem os cálculos aplicados e melhorassem seu entendimento. Desse modo, tornam-se sugestões para trabalhos futuros.

Com isso, concluímos que esse trabalho serviu tanto para o melhor desenvolvimento dos alunos ao estudarem os volumes dos sólidos, quanto para o meu próprio desenvolvimento como professor, o que me permitiu reavaliar a maneira como leciono, buscando um melhoramento contínuo das minhas práticas como professor.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, Leonardo De Conti Dias. **Um processo para utilizar a tecnologia de impressão 3D na construção de instrumentos didáticos para o ensino de ciências**. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2016.
- AMAZONAS, Andrea Maria Mano. **O Princípio de Cavalieri e aplicações com o uso de material manipulável**. 2013. 42 páginas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.
- ANDERSEN, Kirsti. Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 31, p. 291-367, 1984. Disponível em: <<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~jroquet/Andersen.pdf>>. Acesso em: 14 jun 2019.
- ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**, tradução Cyro de C. Patarra e Márcia Tamanaha. vol. 2. 6º ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- BENK, Polyana; SILVA, Sérgio Marconi da; FIGUEIREDO, Elisandra Bär de; SIPLE, Ivanete Zuchi. O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. **II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação**, v. 1, p. 685-696, 2016.
- BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Coleção Ciências da Educação. Traduzido por Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 jun 2019.
- _____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 2002a.
- _____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 2002b.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução Higyno H. Domingues, Campinas: UNICAMP, 2011.
- FLORES, Cláudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATTO, Ivone Catarina Freitas. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**. v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.
- GUTIÉRREZ, Angel. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In Puig, L; Gutiérrez, A. (eds.), **Proceedings of the 20th International Conference of the P. M. E.**, 1, 3-19. Valencia: University of Valencia. 1996. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/267420316_Visualization_in_3-Dimensional_Geometry_In_Search_of_a_Framework>. Acesso em: 25 mar 2019.

JANUARIO, G. **Materiais manipuláveis: mediadores na (re)construção de significados matemáticos**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Centro de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão, Universidade Guarulhos, Guarulhos, 2008. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Januario\(1\).pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Januario(1).pdf)>. Acesso em: 05 mar 2019.

KNILL, Oliver; SLAVKOVSKY, Elizabeth. **ILLUSTRATING MATHEMATICS USING 3D PRINTERS**. 2013. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1306.5599>>. Acesso em: 16 jun 2019.

LIMA, Elon L. **Medida e Forma em Geometria** – 4. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associadas, 2006. (Coleção formação de professores).

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. **3, 2, 1 MISTÉRIO: Princípio de Cavalieri**. Conteúdo: Sueli Irene Rodrigues Costa. Roteiro: Roberto Limberger. Guia: Sueli Irene Rodrigues Costa e Claudina Izepe Rodrigues. Revisor: Miriam Sampieri Santinho e Rosa Maria Machado. Criação e coordenação geral: Sarah Yakhni. Direção: Pedro Siaretta. Campinas: UNICAMP, 2012. Online (10 min.), son., color. Disponível em: <<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040>>. Acesso em: 11 jun 2019.

MIORIM, Maria A.; FIORENTINI, Dario. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de Matemática. **Boletim da SBEM-SP**. São Paulo: SBEM/SP, ano 4, n. 7, p. 5-10, 1990. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Fiorentini_Miorin.pdf>. Acesso em: 15 jun 2019.

MORAIS, Leonardo B. **O que se espera que os alunos saibam sobre a grandeza volume ao concluírem a Educação Básica: uma análise em exames de avaliação**. 2013. 134 páginas. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio C. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

_____. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NICOLODI, Vagner. **Somas Riemann – Inferior/ Superior/ Média**. 2016. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/ceTBKs3A>>. Acesso em: 28 maio 2019.

PRIMO, Marcio E. **O Princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades**. 2013. 79 páginas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular de Santa Catarina: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio: Disciplinas Curriculares**. Florianópolis, COGEN, 1998.

SILVA, Madeline O. **O volume dos sólidos:** estudo de livros didáticos e de uma atividade aplicada a alunos do curso de licenciatura em matemática. 109 páginas. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

TOSE, Marina de Toledo. **Volume:** o Princípio de Cavalieri no ensino médio. 71 páginas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2017.

VIANA, Odaléa A. **O componente espacial na habilidade matemática de alunos do Ensino Médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria.** 299 páginas. Tese (Doutorado em Educação na área de Educação Matemática) - Universidade estadual de Campinas, Campinas, 2005.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ANEXOS E APÊNDICES

ANEXO A – CARTA DE ANUÊNCIA

**DECLARAÇÃO DA INSTITUIÇÃO PARTICIPANTE
CARTA DE ANUÊNCIA**

Autorizamos o pesquisador responsável Luiz Gustavo Cunha, mestrando do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), orientado pelo professor Dr. Rogério de Aguiar e Co orientado pela Dra. Elizandra Bar de Figueiredo, a realizar uma aplicação para sua Dissertação de Mestrado nas dependências da EEB Prof. Antônia Alpaídes C. dos Santos, intitulada “Volumes: uma abordagem explorando o Princípio de Cavalieri com tecnologias”, sendo esta a instituição coparticipante, motivo ao qual está sendo direcionada a carta de anuência.

Como mencionado anteriormente, a pesquisa será realizada nas dependências da escola, onde o pesquisador trabalha como docente do Ensino Fundamental e Médio atualmente.

Concordamos que os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados por escritos e oralmente em banca de Dissertação, em exposição oral, congressos e revistas científicas.

Joinville, 20 de 11 de 2018.

Atenciosamente,



João Maria Neves
Assessor de Escola
319.092-7-02
Diretor Geral

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO

O(A) seu(sua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: *Cálculo de Volumes usando o Princípio de Cavalieri mediado por Materiais Concretos*, do acadêmico *Luiz Gustavo Cunha* (também atual professor), tendo como objetivo analisar as soluções apresentadas nas atividades de Cálculo de volumes de sólidos geométricos aplicadas nas aulas de Matemática, sob concordância da direção da EEB Professora Antônia A. C. dos Santos.

O(A) seu(sua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula. A identidade do(da) seu(sua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar os desafios encontrados nas estratégias de resolução de problemas das atividades de Cálculo de volumes de sólidos geométricos, podendo substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão o estudante de mestrado Luiz Gustavo Cunha, e os professores orientadores Rogério de Aguiar e Elisandra Bar de Figueiredo.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados de do(a) seu(sua) filho(a)/dependente, como as resoluções das atividades, imagens das atividades sendo realizadas e da transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. A privacidade do(da) seu(sua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(A) senhor(a) poderá solicitar o não uso das imagens, das transcrições dos áudios e resoluções das atividades do(da) seu(sua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestrando Luiz Gustavo Cunha
 Telefone: (47) 991462857
 Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
 Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
 Bairro Zona Industrial Norte –
 Joinville - SC

Professor Orientador Rogério de Aguiar
 Telefone: (47) 40097836
 Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
 Campus Universitário Prof. Avelino
 Marcante, Bairro Zona Industrial Norte –
 Joinville – SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome do aluno: _____

Nome do responsável por extenso: _____

Assinatura _____ Local: _____ Data: ____/____/____ .

APÊNDICE B – ATIVIDADES DE MEDIÇÃO E COMPARAÇÃO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

1 – Trabalhando com o cilindro e o paralelepípedo. (Compare os sólidos de forma que ambos possuam a mesma altura).

- a) Meçam os elementos necessários para calcular a área da base do cilindro e do paralelepípedo. Preencha os valores obtidos no Quadro 1?
- b) Calcule a área dessas bases e preencha o Quadro 1. O que vocês concluem sobre essas áreas?

Quadro 1 – As medidas do cilindro e do paralelepípedo

Cilindro		Paralelepípedo	
Medidas	_____ _____ _____	Medidas	_____ _____ _____
Área da base		Área da base	

Conclusão: _____

- c) Qual o volume desses sólidos?

2 – Trabalhando com o cone e a pirâmide.

- a) Meçam os elementos necessários para calcular a área da base do cone, do tronco de cone, da pirâmide e do tronco de pirâmide. Preencha os valores obtidos no Quadro 2.
- b) Calcule a área dessas bases e preencha no Quadro 2. O que vocês concluem sobre essas áreas?

Quadro 2 – As medidas do cone e da pirâmide

Cone		Pirâmide	
Medidas	_____ _____ _____ _____	Medidas	_____ _____ _____ _____
Área da base menor		Área da base menor	
Área da base maior		Área da base maior	

Conclusão: _____

- c) Qual o volume desses sólidos?

3 – O que vocês podem concluir com a comparação entre os volumes do cilindro e do paralelepípedo? E com a comparação entre o cone e a pirâmide?

APÊNDICE C – O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA ESFERA

1 - Meçam os elementos necessários para calcular a área da seção da esfera e da anticlépsidra. Preencha os valores obtidos no Quadro 3.

2 - Qual é o raio da anticlépsidra? E o raio da esfera? Preencha no Quadro 3.

3 - Calcule a área dessas seções e preencha o Quadro 3. O que vocês concluem sobre essas áreas?

Quadro 3 – As medidas da anticlépsidra e da esfera

Anticlépsidra		Esfera	
Medidas	_____	Medidas	_____
Raios da seção	_____	Raio da seção	_____
Área da seção	_____	Área da seção	_____

Conclusão: _____

4 - Qual é o volume da anticlépsidra?

5 - Qual é o volume da esfera?

6 - O que vocês podem concluir sobre a comparação entre os volumes desses sólidos? É possível generalizar essa comparação?

7 - É possível determinar o volume de uma esfera sem calcular o volume da anticlépsidra? Como poderia ser feito?

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO

Este questionário é parte integrante da pesquisa em andamento de título “Volumes: uma abordagem explorando o Princípio de Cavalieri com tecnologias”. Solicita-se a contribuição do estudante, para que sejam respondidas as questões abaixo relacionadas:

1. Idade: _____

2. Sexo: () Masculino () Feminino

3. Atualmente, está trabalhando?

() Sim, em tempo integral () Sim, em tempo parcial () Não

4. Quanto tempo se dedica aos estudos, semanalmente?

() 1 a 3hs () 4 a 7hs () mais do que 7hs

5. Quanto aos cálculos de áreas e volumes apresentados na atividade:

() Já os conhecia e dominava () Já os conhecia, mas não os dominava () Não os conhecia

6. Em relação ao *software* matemático GeoGebra:

() Já o conhecia () Não o conhecia

7. Em relação à impressão 3D:

() Já conhecia () Não conhecia

As questões a seguir estão numa escala de 1 a 5. Desta forma, solicita-se a opinião dos seguintes assuntos:

8. Você julga necessário o conhecimento do cálculo de volumes no cotidiano?

Pouco	1	2	3	4	5	Muito
-------	---	---	---	---	---	-------

9. Você teve dificuldade em realizar a atividade 1:

Pouco	1	2	3	4	5	Muito
-------	---	---	---	---	---	-------

10. Você teve dificuldade em realizar a atividade 2:

Pouco	1	2	3	4	5	Muito
-------	---	---	---	---	---	-------

11. Você teve dificuldade em realizar a atividade 3:

Pouco	1	2	3	4	5	Muito
-------	---	---	---	---	---	-------

12. Você entendeu o Princípio de Cavalieri?

Pouco	1	2	3	4	5	Muito
-------	---	---	---	---	---	-------

13. Sobre o modo como foram propostas as atividades em sala de aula, elas lhe ajudaram a entender melhor o cálculo de volumes:

Pouco	1	2	3	4		5	Muito
-------	---	---	---	---	--	---	-------

14. Essas atividades poderiam ser realizadas de modo diferente? Dê a sua opinião.
