UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A DIDÁTICA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA CONCEITUAR INTUITIVAMENTE A DERIVADA NO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO EQUAÇÕES DA RETA

GABRIEL FELIPE DA SILVA

JOINVILLE - SC
2019

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

GABRIEL FELIPE DA SILVA

A DIDÁTICA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA CONCEITUAR INTUITIVAMENTE A DERIVADA NO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO EQUAÇÕES DA RETA.

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) no Centro de Ciências Tecnológicas (CCT) como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

JOINVILLE - SC

2019

Silva, Gabriel Felipe da
A Didática da Resolução de Problemas para conceituar intuitivamente a derivada no Ensino Médio utilizando equações da reta / Gabriel Felipe da Silva. -- 2019.
159 p.

Orientadora: Elisandra Bar de Figueiredo
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2019.

1. Cálculo. 2. Geometria Analítica. 3. Resolução de Problemas. 4. Derivadas. 5. Ensino Médio. I. Figueiredo, Elisandra Bar de . II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

A Didática da Resolução de Problemas para conceituar intuitivamente a derivada no Ensino Médio utilizando equações da reta

por

Gabriel Felipe da Silva

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de concentração em “Ensino de Matemática”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)

Profa. Dra. Jane Mery Richter Voigt
UNIVILLE

Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC

Joinville,SC, 26 de junho de 2019.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, pois apesar de mim, Ele permanece fiel e tem me dado força e sabedoria para seguir a jornada.

À minha mãe, o maior exemplo de perseverança, força, amor e fé que eu poderia ser agraciado em ter. Sua esperança na vida e todo o cuidado que dispensou a mim desde meus primeiros passos são parte de algo que jamais poderei compensar, honrá-la e fazê-la sentir orgulho de seu filho é o que me motiva todos os dias.

Aos meus familiares pelo suporte e compreensão que sempre demonstraram.

Agradeço imensamente a minha orientadora, Dra. Elisandra, muito mais do que orientadora, foi um guia cujo entusiasmo e dedicação me inspiraram a tentar fazer o melhor possível. Espero um dia ser um profissional de seu nível de excelência e dedicação, que inspira seus alunos e orientandos.

À banca examinadora, os doutores Jane Mery Richter Voigt e Rogério de Aguiar. Sou grato pela contribuição nesse projeto com os conselhos e críticas construtivas e valiosas para a finalização desse trabalho. Obrigado por terem feito parte também de minha formação, na graduação e no mestrado respectivamente.

Aos meus colegas de classe, pois sem o suporte de todos, não conseguiríamos finalizar essa jornada.

Aos meus queridos alunos que fizeram parte dessa pesquisa, obrigado pela dedicação e participação que tornaram possível essa pesquisa.

À direção da E. E. M. Governador Celso Ramos, pela disponibilidade de espaço e estrutura para a aplicação do projeto de pesquisa.

À UDESC pela oferta do curso e por todo o aprendizado construído nesse período.

“Seria uma atitude ingênua esperar que as classes dominantes desenvolvessem uma forma de educação que proporcionasse às classes dominadas perceber as injustiças sociais de maneira crítica.”

PAULO FREIRE

RESUMO

A presente dissertação trata de uma abordagem do ensino de Cálculo para o Ensino Médio, no que se refere às ideias intuitivas que podem ser trabalhadas e relacionadas com o estudo da Geometria Analítica. Conforme apontam pesquisas, o ensino de Cálculo enfrenta problemas relacionados aos processos de ensino e aprendizagem dessa disciplina nos primeiros níveis da graduação, isso se reflete em um alto índice de reprovações e desistências dos cursos. Buscando uma solução, elaboramos uma sequência didática que aborda a ideia intuitiva de derivada, que pode ser aplicada ainda no Ensino Médio, pois conforme pesquisa, essa abordagem pode ajudar a solucionar a falta de base matemática dos alunos que iniciam suas graduações em Ciências Exatas, sendo esse um dos problemas que contribuem para o fracasso dos alunos em Cálculo, de acordo com professores e pesquisadores. Essa sequência didática é composta de situações problemas e exercícios que estimulam os alunos a pesquisar, formular hipóteses e investigar resultados, corroborando com a metodologia da Resolução de Problemas, norteadora de nossa pesquisa. A sequência foi aplicada com alunos do 3º ano do Ensino Médio e os dados coletados foram analisados de maneira qualitativa, valorizando o processo de resolução do problema desde a interpretação até o resultado final. A análise dos dados possibilitou sugestões de melhorias que podem ser aplicadas por pesquisadores e professores.

Palavras-chaves: Cálculo. Geometria Analítica. Resolução de Problemas. Derivadas. Ensino Médio.

ABSTRACT

This dissertation explores an approach to the Teaching of Calculus in High School, regarding the intuitive ideas which can be worked on and related to the study of Analytical Geometry. As researches indicate, the teaching of Calculus has problems related to its teaching and learning processes in the first levels of undergraduate programs, which reflects in a high number of failures and withdrawals during the courses. In an attempt to mitigate such problems, we elaborated a didactic sequence that addresses the intuitive idea of derivative, which can be applied as early as in High School because, according to researches, such approach can help mitigate the lack of a solid mathematical base of students who enter an Exact Science undergraduate program, as that is one of the problems that contribute to the failure of students in Calculus, as pointed out by teachers and researchers. The didactic sequence is composed of situational problems and exercises which stimulate students to research, formulate hypotheses and investigate results, corroborating the Problem Solving methodology, which guides our research. The sequence was applied to Senior High School students and the collected data were analyzed in a qualitative way, valuing the problem solving process from the interpretation to the final result. Data analysis provided suggestions for improvement that can be applied by researchers and teachers.

Keywords: Calculus. Analytical Geometry. Problem Solving. Derivatives. High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

(CDI 1) – Cálculo Diferencial e Integral I

(PNLD) – Programa Nacional do Livro Didático

(MUV) – Movimento Uniformemente Variado

(PNLEM) – Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio

(RP) – Resolução de Problemas

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A área do Cálculo Diferencial me despertou muito interesse desde quando comecei a estudá-la na graduação. Assim como a maioria dos estudantes de Licenciatura em Matemática, enfrentei algumas dificuldades com a disciplina, principalmente com a falta de base matemática para compreender os conceitos e aplicá-los nas resoluções dos problemas. Os alunos que ingressam na graduação em Matemática, tão logo concluem o Ensino Médio, provavelmente são alunos que estão mais acostumados a aplicar algoritmos prontos e repeti-los, do que propriamente compreender todo o contexto envolvido nos conteúdos, isso é um primeiro obstáculo que precisa ser vencido.

Durante as aulas de Cálculo na faculdade, entendi que aquela Matemática estática aprendida no Ensino Médio, ampliava-se para um campo muito mais abrangente, em que fenômenos naturais poderiam ser modelados e estudados, e sua aplicação era muito explorada na disciplina. Foi então que comecei a me interessar cada vez mais não só pelo Cálculo, mas por toda a componente curricular do curso, afinal, existiam elementos de Cálculo em todas as áreas.

Diversas pesquisas apontam para as dificuldades enfrentadas nos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial, pois geralmente essa disciplina apresenta altos índices de reprovação, porém, o motivo desse insucesso ainda é desconhecido. Pesquisadores como Rezende (2003), Lima (2014) e Alvarenga et al. (2016), apontam que podem ser diversas as razões para o baixo desempenho dos alunos que ingressam no Ensino Superior em Cálculo, esse problema pode estar relacionado, principalmente, à falta de base matemática dos alunos, como reclamam muitos professores da disciplina.

Alguns pesquisadores como Coimbra (2015), Pagani e Allevato (2014) e Ávila (1991), com os quais corroboramos, defendem a introdução de conceitos de Cálculo durante o Ensino Básico, pois suas ideias são modernas e aplicáveis as mais diversas áreas da Ciência, não com rigor e formalismo que o estudo da matéria no Ensino Superior deve exigir, mas que os conceitos sejam entendidos de forma intuitiva, sendo assim, os alunos estariam familiarizados com as ideias que envolvem a disciplina, podendo esse ser um fator que ajudaria a reduzir os índices de reprovação nas primeiras séries dos cursos de Ciências Exatas.

Em minha experiência docente trabalhando com turmas de Ensino Médio na rede pública, percebi que existe uma disparidade grande no nível de exigência no Ensino da

Matemática, àquele que os alunos encontrarão no Ensino Superior. São muitos os fatores que interferem nessa questão, não existem comparações entre os sistemas de Ensino Médio e Superior, afinal, os focos são totalmente diferentes. Na Educação Básica, a escola tem como papel principal buscar a formação humana integral de seus alunos, busca direcioná-los para as mais diversas formações, atendendo suas necessidades e anseios no que diz respeito à construção do conhecimento. Desse modo, o processo de ensino da Matemática precisa estar incluído dentro do processo de formação humana e integral, mas, sem precisar desvincular-se de seus conceitos e conteúdos mais avançados, servindo como base para os estudos do Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo.

Ainda sobre a abordagem do Cálculo no Ensino Básico, Ávila (2006) ressalta que o estudo formal de derivada é difícil para alunos do Ensino Médio, afinal, o mesmo é precedido por um estudo formal de limites, que exigem manipulações algébricas pouco familiares aos estudantes que iniciam um curso de Cálculo. Porém, uma abordagem mais intuitiva da ideia de derivada pode ser trabalhada no Ensino Médio, pois os próprios conteúdos da grade curricular são preceitos para esse estudo.

O propósito dessa pesquisa é propor uma sequência de atividades, que possibilite ao estudante do Ensino Médio compreender intuitivamente o conceito de derivada de uma função, utilizando para tal, a Geometria Analítica. Também apresentar aos professores e pesquisadores uma alternativa para a abordagem do Cálculo com suas turmas do Ensino Médio, em que os professores podem utilizar o conteúdo de Geometria Analítica previsto na matriz curricular. A ideia principal não é definir conceitos abrangentes relacionados ao Cálculo, mas sim, construir um ferramental matemático para que se consiga dar uma introdução a tais conceitos, para que os alunos que desejam seguir sua graduação na área das Ciências Exatas possam ter maior facilidade de compreensão das primeiras ideias que serão aprendidas e utilizadas no Cálculo. A preocupação em capacitar meus alunos não só a ingressar na faculdade, por meio de vestibulares ou ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), mas também em prepará-los para as possíveis disciplinas de Matemática em suas graduações, é um agente motivador dessa pesquisa. Nesse contexto, o objetivo geral da sequência proposta em nossa pesquisa é conceituar intuitivamente a derivada na etapa do Ensino Médio, por meio das equações da reta na Geometria Analítica, e apresenta os seguintes objetivos específicos:

- Revisar os conceitos de equação da reta e coeficiente angular de uma reta;

- Definir reta secante à uma curva e construir retas secantes a uma parábola cuja função é dada;
- Descrever como determinar a reta tangente à uma curva;
- Encontrar o coeficiente angular e a equação da reta tangente a uma parábola cuja função é dada, em um ponto determinado;
- Determinar algebricamente a expressão que permite calcular o coeficiente angular de uma reta tangente a uma parábola qualquer, em um ponto qualquer pertencente a essa parábola;
- Ampliar o conceito de coeficiente angular da reta tangente (derivada) para outros tipos de curvas;
- Aplicar o conceito de derivada para resolução de problemas de Física.

No decorrer dos capítulos dessa dissertação, discorreremos sobre os agentes motivadores de nossa pesquisa, o referencial teórico didático e matemático e os resultados obtidos com nossa pesquisa.

No capítulo 2, discorremos sobre os processos de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I (CDI 1) no Ensino Superior, relatando dificuldades enfrentadas por professores e alunos e apontadas por pesquisadores da área. Em seguida, trazemos a ideia da abordagem do ensino de Cálculo no decorrer do Ensino Médio, mostrando ideias de outros pesquisadores da área e discutindo como isso pode ser uma alternativa para reduzir os altos índices de reprovação em CDI 1. Apresentamos também uma análise de livros didáticos que fazem parte do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que foram selecionados pelas redes de ensino para serem trabalhados com os alunos e também de um livro mais antigo que não faz mais parte do programa, com o objetivo de mostrar as ideias de Cálculo que estão presentes nesses livros e que podem ser adaptadas para a abordagem das ideias intuitivas que permeiam o estudo do Cálculo.

No capítulo 3, apresentamos a didática da Resolução de Problemas (RP), norteador pedagógico de nossa pesquisa. Discorremos sobre alguns aspectos históricos e sua importância para a Educação Matemática, com definições e apontamentos feitos por pesquisadores brasileiros e estrangeiros. Falamos de seus fundamentos com Polya, em sua obra "*How to Solve It"*, datada de 1944, e sua organização das quatro fases para resolução de um problema. E por fim, abordamos a metodologia sugerida por Dante (1991), em sua obra "Didática da resolução de problemas de Matemática" em que o autor dá importantes sugestões de como o professor deve trabalhar a resolução de problemas em sala de aula, bem como detalha quais são seus objetivos em cada etapa (oito objetivos).

No capítulo 4, apresentamos o referencial teórico matemático que fundamenta a aplicação de nossa pesquisa. Discorremos sobre o sistema de coordenadas cartesianas, as equações da reta e as formas como ela pode ser escrita, posições relativas de retas no plano, o coeficiente angular da reta, a derivada de uma função em um ponto, a velocidade média escalar, velocidade e aceleração instantânea. Nesse capítulo, nosso intuito foi relacionar de maneira intuitiva e clara, a relação existente entre o coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva $\mathcal{C}: y = f(x)$ em um ponto pertencente à essa curva, com a derivada da função nesse ponto. Por fim, a relação que existe entre esse valor e seu emprego na Física, com aplicações no cálculo da velocidade e aceleração instantânea de uma partícula.

O capítulo 5 trata dos procedimentos metodológicos, relata o caráter qualitativo de nossa pesquisa e traz informações referentes à maneira como foi feita a análise de dados e o que a pesquisa procurou privilegiar em relação ao objetivo. Apresenta também informações sobre o procedimento metodológico para aplicação da pesquisa.

No capítulo 6 analisamos os dados referentes a aplicação da pesquisa. Apresentamos as soluções dos alunos para as atividades propostas na sequência didática, trazemos relatos de fatos relevantes que aconteceram durante a aplicação da pesquisa como, as interferências feitas pelo pesquisador, a participação efetiva dos alunos no desenvolvimento das soluções dos problemas, sugestões para professores e pesquisadores que tenham interesse na aplicação da sequência proposta e considerações sobre os objetivos alcançados, mediante a Didática da Resolução de Problemas proposta por Dante (1991).

Por fim, no capítulo 7, apresentamos algumas considerações finais sobre a pesquisa, o aprendizado que construímos e os resultados que obtivemos. Apresentamos sugestões pertinentes a uma possível otimização da sequência e perspectivas sobre o ensino de Cálculo no Ensino Médio e como isso pode ajudar a melhorar a qualidade dos processos de ensino e aprendizagem para as primeiras séries dos cursos de graduação em Ciências Exatas.

2. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: OS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Para contextualização da abordagem do ensino do Cálculo na Educação Básica, é necessário transcorrer sobre alguns aspectos que envolvem o ensino do Cálculo nos cursos de graduação em que essa disciplina está envolvida. Embora nossa pesquisa esteja diretamente ligada a abordagem da noção intuitiva de derivada para alunos do Ensino Médio, consideramos que pesquisar sobre o estado atual do ensino de Cálculo possa trazer dados e informações relevantes para a abordagem de nosso tema, principalmente no que se refere ao estudo dessa disciplina nos primeiros semestres dos cursos, haja vista que o tema derivadas faz parte do primeiro nível do Cálculo, em que alunos e professores encontram dificuldades para uma construção eficaz dos processos de ensino e aprendizagem.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI 1), é a parte do ensino de Cálculo que geralmente aborda os conteúdos: Função de uma variável real, limites, derivadas e integrais de funções de uma variável. Essa disciplina faz parte da matriz curricular de diversos cursos de graduação, como por exemplo as Engenharias, Matemática, Física e Ciências da Computação.

Nas próximas seções deste capítulo discutiremos as questões: Qual o panorama atual do ensino e aprendizagem de Cálculo no Ensino Superior? Quais os problemas e dificuldades com a disciplina por parte de professores e alunos? É possível uma abordagem do Cálculo no currículo de Matemática do Ensino Médio?

2.1 O ENSINO DE CÁLCULO NOS PRIMEIROS ANOS DO ENSINO SUPERIOR: UM PROBLEMA DE VIÉS HISTÓRICO

Os discentes ingressantes nos cursos de graduação enfrentam grande dificuldade de aprendizagem e assimilação dos conteúdos das disciplinas envolvidas com a Matemática, principalmente com a disciplina de CDI 1. Essa dificuldade implica geralmente em uma grande taxa de reprovação na disciplina e também uma elevada taxa de evasão já nos primeiros semestres dos cursos. Essa temática já é discutida em âmbito nacional e internacional, e tem sido motivo de preocupação de muitos pesquisadores (FIGUEIREDO et al, 2014).

Muitas pesquisas abordam o problema do processo de ensino e/ou aprendizagem de Cálculo em vários contextos, oferecendo assim elementos para uma análise das dificuldades que são detectadas. Algumas dessas pesquisas apontam que a apresentação formal dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que não apresentam espaço para discussões, tende oferecer aos alunos o produto do pensamento matemático, relegando assim o processo de se pensar matemática. Assim, não há foco na trajetória do pensamento matemático e em seu processo criativo, que considera o contexto do problema e as etapas que levam a conjectura de resolução, resultados e prova desses resultados (ZUCHI, 2005).

A falta de base matemática dos alunos ao ingressarem na universidade, é apontada por professores como um dos fatores que geram as dificuldades iniciais dos alunos em Cálculo (PAGANI E ALLEVATO 2014, *apud* ALVARENGA et al., 2016). Rezende (2003), em sua tese de doutorado, sugere que a origem desse problema está na forma como se inicia o ensino de Cálculo. Mas essa dificuldade decorre de onde? Do processo de aprendizagem? Da falta de noções básicas do aluno? Das dificuldades dos professores e suas metodologias? Ou ainda, da estrutura curricular do ensino de matemática que não dá suporte necessário para a disciplina?

De acordo com Lima (2014) existem algumas justificativas para esse fracasso no processo de ensino e/ou aprendizagem do Cálculo nos primeiros semestres dos cursos de graduação. Algumas delas seriam: a má formação durante a Educação Básica; o nível de abstração que a matéria exige; a metodologia adotada pelos professores responsáveis pela disciplina; a falta de habilidade dos alunos de compreender e construir conceitos e ainda, problemas existentes na estrutura de ensino.

No que diz respeito aos altos índices de reprovação na disciplina de CDI 1, Alvarenga et al. (2016), ressaltam que as dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação a falta de base matemática (principal dificuldade apontada pelos professores), é um problema de âmbito nacional e internacional e, que desse modo, não pode ser justificativa exclusiva para tais índices. Ressaltam também que há uma insatisfação geral com o curso de Cálculo em vários países do mundo na última década, mesmo diante do fato de que os alunos que iniciam os estudos em CDI 1 tenham aprendido a base matemática por meio de metodologias totalmente diferentes.

Em sua tese de doutorado, Rezende (2003) defende que os problemas com o ensino e aprendizagem de Cálculo são de natureza epistemológica, ou seja, transcendem a questão dos métodos e técnicas de ensino, inclusive, são anteriores ao seu tempo de realização. Concordamos com Rezende (2003) quando ressalta que a falta de base dos alunos não é um problema exclusivo da disciplina de Cálculo, ela também faz falta para o ensino de outras disciplinas presentes nos cursos de graduação e nem por isso, existe uma taxa de reprovação tão elevada.

Conforme Coimbra (2015), os alunos vêm mostrando um resultado insatisfatório na disciplina de Cálculo em seu primeiro nível no Ensino Superior e, a inclusão dos conceitos dessa disciplina ainda no Ensino Básico poderia não resolver totalmente o problema, mas auxiliar no aumento dos índices de aprovação, ciente é claro de que este não é o único fator a ser levado em conta.

Na próxima seção apresentaremos alguns pontos sobre a inserção do Cálculo no Ensino Médio.

2.2 O ENSINO DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe que no Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, se dê continuidade as aprendizagens do Ensino Fundamental, com foco na construção de uma visão integrada da Matemática com suas aplicações à realidade, sendo preciso levar em conta as vivências cotidianas dos alunos, suas condições socioeconômicas, o avanço da tecnologia e as exigências do mundo do trabalho. Essas considerações direcionam o ensino da Matemática a aproveitar todo o potencial dos estudantes e de promover ações que provoquem seus processos de abstração e reflexão, fortalecendo sua capacidade de criação, indução e dedução (BRASIL, 2018).

Segundo Ávila (1991) os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral são base para a ciência moderna desenvolvida nos últimos 300 anos, então é difícil desvincular o Cálculo de uma Matemática que está integrada as tecnologias e as aplicações à realidade. A BNCC não traz em seu programa os conteúdos específicos de Cálculo, mas muitos dos conceitos e conteúdos lá contidos podem ser adaptados para a abordagem intuitiva do Cálculo, como por exemplo, o estudo das funções, taxa de variação, limite e otimização.

Segundo Pagani e Allevato (2014), sobre a possibilidade de se trabalhar com o Cálculo no Ensino Médio:

> Apesar de o Cálculo ser uma disciplina ministrada em cursos da Educação Superior, o ensino de suas ideias, conceitos e elementos tem sido considerado bastante pertinente, nos dias de hoje, também no Ensino Médio. Isso decorre, especialmente, de dois aspectos: (1) de que esses conteúdos podem estar ao alcance de alunos desse nível de ensino, e (2) de que o Cálculo é uma disciplina de relevante importância no

> desenvolvimento da ciência e tecnologia, integrando, assim, as grades curriculares de vários cursos técnicos no Ensino Médio (2014, p. 2).

Concordamos com Ávila (1991) quando defende que é um erro a exclusão das ideias do Cálculo no Ensino Básico, pois é uma matéria que traz em si ideias modernas, compatíveis com as aplicações da matemática no mundo moderno. Sendo que o objetivo do Ensino Médio é preparar o jovem para se adequar a sociedade e para as novas possibilidades que lhe surgem pós período escolar, não se deve então ensinar matemática para formar apenas especialistas no assunto, mas sim, por que ela é uma parte significativa do desenvolvimento histórico do ser humano.

Nos dias atuais, a matriz curricular de Matemática no Ensino Médio não contempla o ensino do Cálculo. Isso acontece, pois ao final dos anos 50 e início dos anos 60 do século passado, aconteceu um movimento em defesa da modernização do ensino de matemática, denominado por esse motivo, de Matemática Moderna. Sua principal tônica foi uma ênfase excessiva no formalismo e no rigor das apresentações, o que custou ao currículo a retirada de alguns tópicos importantes da matemática, como a Geometria e o Cálculo (ÁVILA, 1991).

Com a consolidação do Cálculo com Leibniz (1646 – 1716) e Newton (1643 – 1727), suas ideias e seus conceitos são considerados indispensáveis para a construção do pensamento em diversas áreas, principalmente nas áreas de Ciências Exatas. Sendo assim, a abordagem do Cálculo no Ensino Médio está em consonância com o objetivo dessa fase escolar, de contribuir na formação humana integral dos alunos.

Segundo Ávila (1991, p. 2), sobre a inclusão de conceitos de Cálculo no Ensino Médio:

> Ademais, o Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder de alcance de seus métodos. É perfeitamente possível, em uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a de derivada de uma função.

Em nossa pesquisa, abordaremos a utilização da ideia intuitiva de derivada e sua aplicação, como um tópico de ensino para o nível Médio. Corroboramos com Ávila (2006), de que o fato de a derivada ser considerada difícil e inadequada para a fase do Ensino Médio, se dá pelo fato de muitas vezes ela ser precedida de um estudo cansativo de limites. Isso porque essa abordagem apresenta-se pouco intuitiva, caracterizada por um excesso de manipulação algébrica, sendo pouco significativa para os alunos desse nível (e por vezes até ao aluno do nível superior). O conceito de derivada, juntamente com o de integral, é um dos alicerces de todas as ciências exatas nos últimos trezentos anos.

Mas com o currículo de matemática do Ensino Médio estando tão alentado, cheio de conteúdos tratados com rigor e que oferecem pouco espaço na matriz curricular, como ainda inserir noções de Cálculo? Ávila (1991) defende que na verdade o currículo de ensino da matemática está mal estruturado. Faz-se então necessária uma adequação do programa. Segundo ele, as estruturas dos programas de ensino de matemática sofrem com a consequência de sucessivas reformas, que levaram os tópicos a serem apresentados sempre de forma isolada. Existem tópicos no ensino que não mais têm utilidade prática nos dias de hoje, mas que continuaram intocadas no currículo, deixando-os mal estruturados e inflados. Um exemplo disso, conceitos formais do estudo das funções, que vêm a ter aplicabilidade apenas em algumas situações específicas no Cálculo.

Algumas ideias intuitivas de Cálculo podem ser apresentadas em alguns conteúdos do Ensino Básico, desde que os problemas sejam escolhidos de maneira adequada, como por exemplo, problemas de proporcionalidade, áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos, e também nos estudos das funções, com problemas de máximos e mínimos e de comportamento do gráfico da função (intervalos de crescimento e decrescimento, por exemplo) (CARDOSO, 2018).

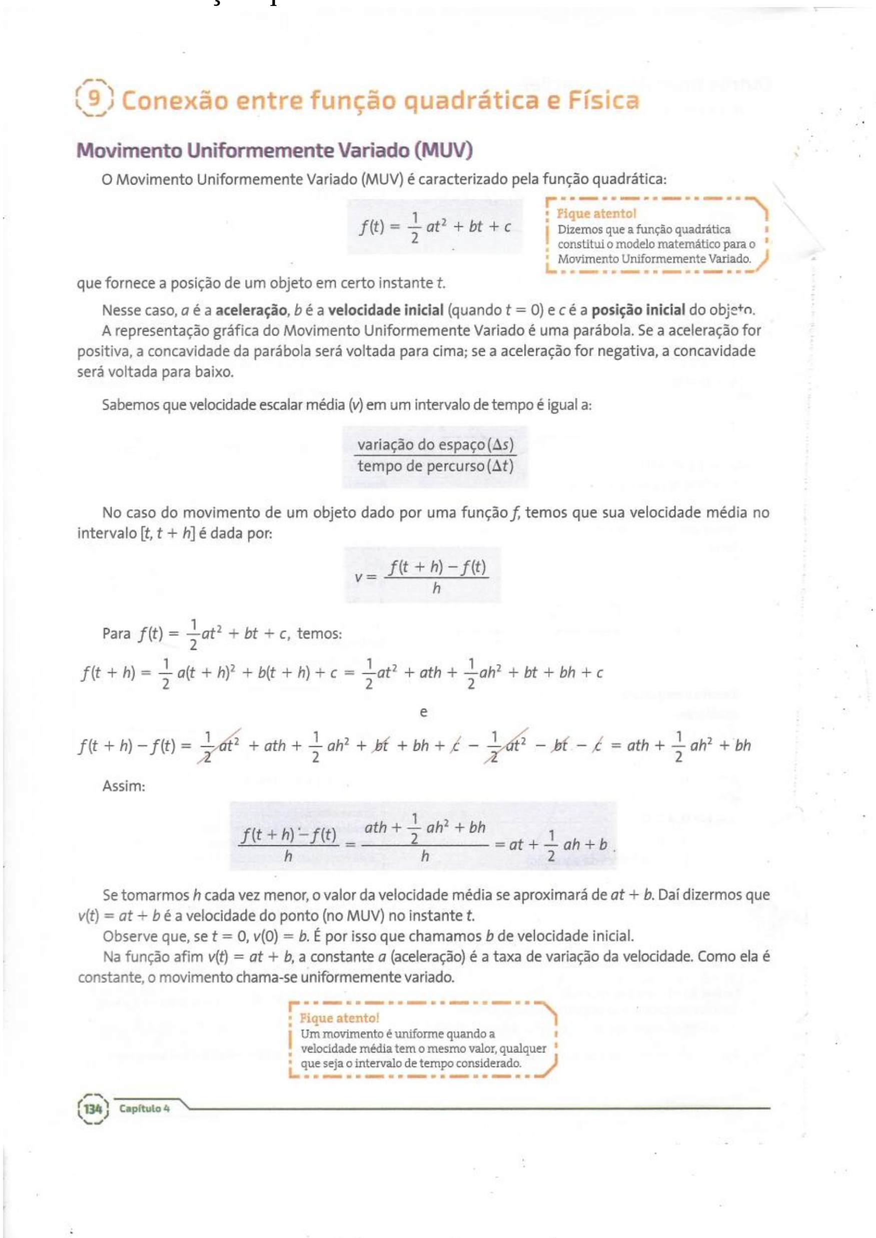
Na sequência apresentaremos alguns exemplos das ideias de Cálculo nos livros didáticos do Ensino Médio.

2.2.1 Ideias de Cálculo em livros didáticos do Ensino Médio

Nesta subseção abordaremos algumas ideias que fundamentam o Cálculo que se encontram em alguns livros didáticos do Ensino Médio. Para isso, efetuamos pesquisas nos livros “Matemática – Contexto e Aplicações” de Luiz Roberto Dante, publicado em 2016, e no livro “Matemática – Paiva” de Manoel Paiva, publicado em 2015. Ambos participaram da última escolha de livros conforme o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no ano de 2016, para os trabalhos do ano letivo de 2017 na cidade de Joinville/SC. Para efeito comparativo, pesquisamos também em um livro publicado no ano de 2005, “Matemática Completa” de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno, escolhido no PNLD no ano de 2005, utilizado no período letivo que se estendeu de 2009 a 2011 em algumas escolas estaduais.

“Matemática: Contexto & Aplicações” de Luiz Roberto Dante (2016) é uma coleção dividida em três volumes (um para cada série do Ensino Médio) que não traz em seus volumes conteúdos diretamente relacionado ao Cálculo, mas trabalha com algumas ideias em alguns de seus capítulos. Como por exemplo, no primeiro volume a determinação de valores de máximos e mínimos de uma função quadrática. Ainda no capítulo de função quadrática, o autor traz um tópico relacionando a função quadrática com a Física, por meio do Movimento Uniformemente Variado (MUV), em que ele aplica diretamente a ideia de calcular o limite da função, sem necessariamente utilizar o conceito de limite, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Conexão entre função quadrática e o MUV



9 Conexão entre função quadrática e Física

Movimento Uniformemente Variado (MUV)

O Movimento Uniformemente Variado (MUV) é caracterizado pela função quadrática:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$$

Fique atento! Dizemos que a função quadrática constitui o modelo matemático para o Movimento Uniformemente Variado.

que fornece a posição de um objeto em certo instante t.

Nesse caso, a é a **aceleração**, b é a **velocidade inicial** (quando $t = 0$) e c é a **posição inicial** do objeto.

A representação gráfica do Movimento Uniformemente Variado é uma parábola. Se a aceleração for positiva, a concavidade da parábola será voltada para cima; se a aceleração for negativa, a concavidade será voltada para baixo.

Sabemos que velocidade escalar média (v) em um intervalo de tempo é igual a:

$$\frac{\text{variação do espaço}(\Delta s)}{\text{tempo de percurso}(\Delta t)}$$

No caso do movimento de um objeto dado por uma função f, temos que sua velocidade média no intervalo $[t, t + h]$ é dada por:

$$v = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Para $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, temos:

$$f(t+h) = \frac{1}{2}a(t+h)^2 + b(t+h) + c = \frac{1}{2}at^2 + ath + \frac{1}{2}ah^2 + bt + bh + c$$

e

$$f(t+h) - f(t) = \cancel{\frac{1}{2}at^2} + ath + \frac{1}{2}ah^2 + \cancel{bt} + bh + \cancel{c} - \cancel{\frac{1}{2}at^2} - \cancel{bt} - \cancel{c} = ath + \frac{1}{2}ah^2 + bh$$

Assim:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{ath + \frac{1}{2}ah^2 + bh}{h} = at + \frac{1}{2}ah + b$$

Se tomarmos h cada vez menor, o valor da velocidade média se aproximará de $at + b$. Daí dizermos que $v(t) = at + b$ é a velocidade do ponto (no MUV) no instante t.

Observe que, se $t = 0$, $v(0) = b$. É por isso que chamamos b de velocidade inicial.

Na função afim $v(t) = at + b$, a constante a (aceleração) é a taxa de variação da velocidade. Como ela é constante, o movimento chama-se uniformemente variado.

Fique atento! Um movimento é uniforme quando a velocidade média tem o mesmo valor, qualquer que seja o intervalo de tempo considerado.

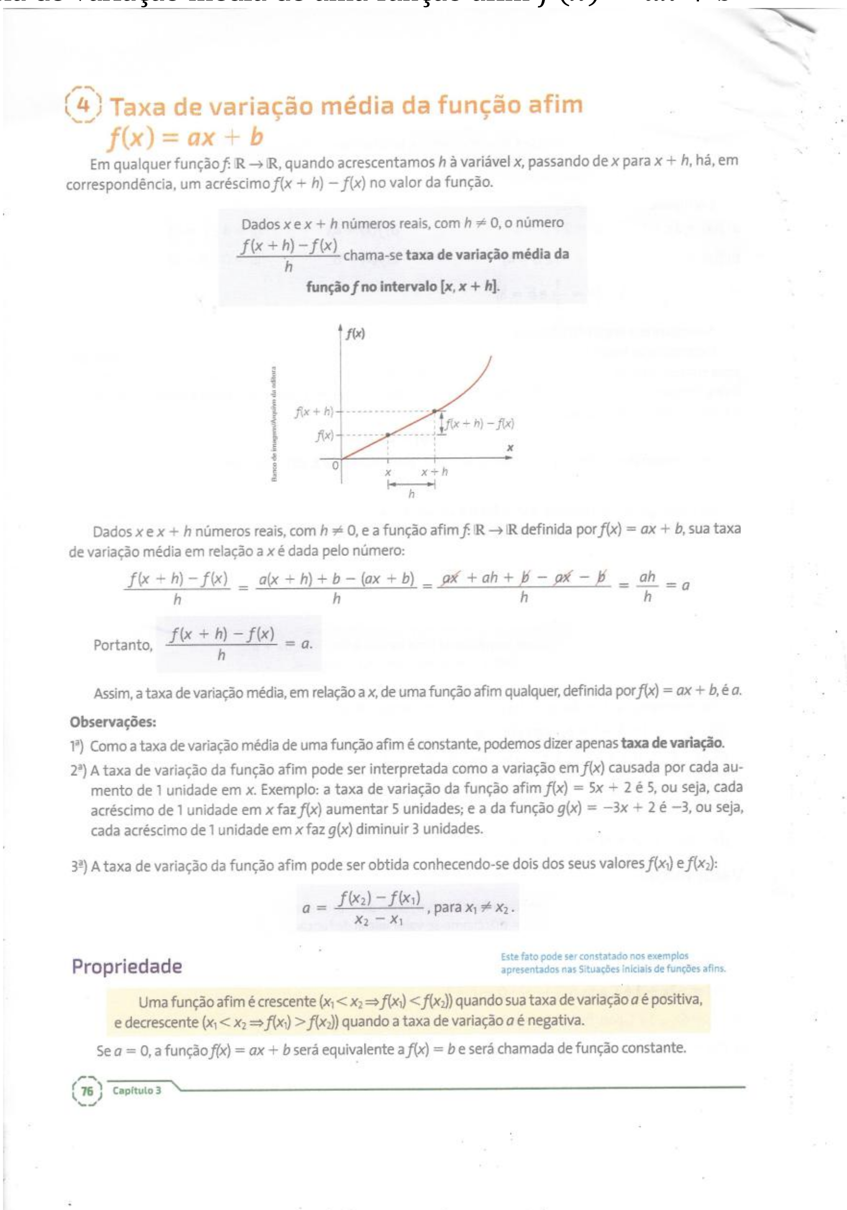
134 Capítulo 4

Fonte: Dante, 2016, p. 134.

Após esta explicação o autor traz uma lista de exercícios resolvidos aplicando o conceito utilizado, seguindo com uma lista composta de quatro exercícios para que os alunos resolvam. Podemos observar aqui que o autor não cita o limite da função, apenas observa que se tomarmos o valor da variável h cada vez menor (próximo de zero), pode-se concluir que a velocidade instantânea no instante t se dará pela expressão $v(t) = at + b$, em que a e b são os coeficientes da função quadrática inicial. Não menciona o fato de que a função $f'(t) = at + b$ é a derivada da função $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$.

No capítulo de função afim, o autor traz como tópico de estudo, a taxa de variação média desta função, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Taxa de variação média de uma função afim $f(x) = ax + b$



4 Taxa de variação média da função afim $f(x) = ax + b$

Em qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando acrescentamos h à variável x, passando de x para $x + h$, há, em correspondência, um acréscimo $f(x + h) - f(x)$ no valor da função.

Dados x e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, o número $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se **taxa de variação média da função f no intervalo $[x, x + h]$**.

Dados x e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, e a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, sua taxa de variação média em relação a x é dada pelo número:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Portanto, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a.$

Assim, a taxa de variação média, em relação a x, de uma função afim qualquer, definida por $f(x) = ax + b$, é a.

Observações:

1ª) Como a taxa de variação média de uma função afim é constante, podemos dizer apenas **taxa de variação**.

2ª) A taxa de variação da função afim pode ser interpretada como a variação em $f(x)$ causada por cada aumento de 1 unidade em x. Exemplo: a taxa de variação da função afim $f(x) = 5x + 2$ é 5, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz $f(x)$ aumentar 5 unidades; e a da função $g(x) = -3x + 2$ é -3, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz $g(x)$ diminuir 3 unidades.

3ª) A taxa de variação da função afim pode ser obtida conhecendo-se dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2.$$

Propriedade

Este fato pode ser constatado nos exemplos apresentados nas Situações iniciais de funções afins.

Uma função afim é crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) quando sua taxa de variação a é positiva, e decrescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) quando a taxa de variação a é negativa.

Se $a = 0$, a função $f(x) = ax + b$ será equivalente a $f(x) = b$ e será chamada de função constante.

76 Capítulo 3

Fonte: Dante, 2016, p. 76.

No decorrer dos volumes o autor traz mais algumas ideias intuitivas do Cálculo conforme os capítulos evoluem, como por exemplo, o limite da soma dos termos de uma PG infinita, cuja razão pertence ao intervalo $(-1, 1)$. A ideia de limite também é abordada, sem menção ao conceito formal, quando no capítulo de função exponencial, o autor apresenta o número irracional e e a função exponencial e^x.

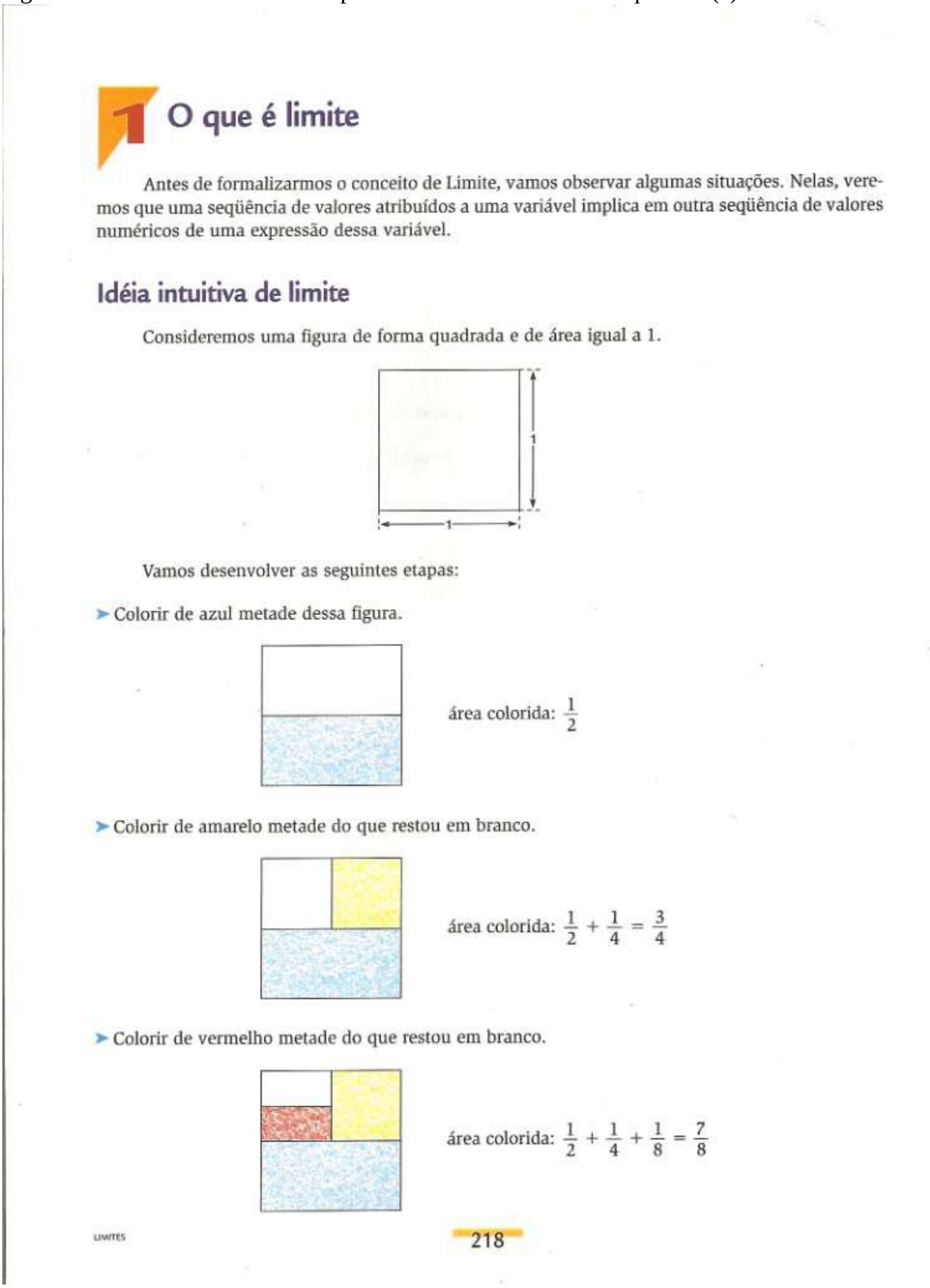
"Matemática Paiva" de Manoel Paiva (2015) também é uma coleção dividida em três volumes, uma para cada série do Ensino Médio, e também não traz nenhum capítulo que trata diretamente de estudos de Cálculo. O autor trabalha com algumas ideias intuitivas que são abordadas a medida em que os conteúdos vão se desenvolvendo dentro dos capítulos. O conceito de taxa de variação de uma função no primeiro volume da coleção, é abordado de modo mais geral, não somente para a função afim. A situação é exemplificada dando-se uma função qualquer, e calculando a variação da função $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ dentro do intervalo $[x_A, x_B]$. O autor utiliza essa ideia para determinar a condição de crescimento ou decrescimento da função dentro desse intervalo, sem fazer qualquer menção a definição de derivada da função.

No segundo volume da coleção, o autor também aborda a ideia da soma dos termos de uma PG infinita, cuja razão q pertence ao intervalo $(-1, 1)$. Assim como na análise do livro de Dante (2016), identificamos que Paiva (2015) não utiliza qualquer definição formal de limite, apenas utiliza a ideia de que o número n de elementos da progressão cresce indefinidamente, ou seja, usa informalmente a noção de "tende ao infinito".

Procuramos escolher para esta análise também, a coleção "Matemática Completa" de José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno (2005), coleção esta que não faz mais parte do quadro que integra o Ensino Médio atual, mas foi proposta pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM) para o triênio 2009, 2010 e 2011 no Estado de Santa Catarina, e consideramos interessante a análise desse de um passado recente. É uma coleção dividida em três volumes, sendo uma para cada série do Ensino Médio. No terceiro volume da coleção, o autor traz nos dois últimos capítulos os conteúdos de limites de uma função e de derivada de uma função, conteúdos esses que pertencem a grade de CDI 1.

O capítulo de limites (penúltimo capítulo), é dividido em 8 tópicos ordenados pelo autor da seguinte forma: O que é limite; propriedades dos limites; função contínua; limite da função composta; limites infinitos e limites para x tendendo ao infinito; cálculo de limites quando o numerador e o denominador tendem a zero; limite da função exponencial; limite da função logarítmica. Aqui o autor aborda conceitos intuitivos de limite, por meio da ideia de limite de uma sequência e segue o desenvolvimento do capítulo com a definição formal de limite, seguidos de exemplos resolvidos de cálculos de limites, como mostram as Figuras 3, 4, 5 e 6.

Figura 3 - Ideia intuitiva de limite por meio do limite de uma sequência (a)



1 O que é limite

Antes de formalizarmos o conceito de Limite, vamos observar algumas situações. Nelas, veremos que uma seqüência de valores atribuídos a uma variável implica em outra seqüência de valores numéricos de uma expressão dessa variável.

Idéia intuitiva de limite

Consideremos uma figura de forma quadrada e de área igual a 1.

Vamos desenvolver as seguintes etapas:

- Colorir de azul metade dessa figura.

área colorida: $\frac{1}{2}$

- Colorir de amarelo metade do que restou em branco.

área colorida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- Colorir de vermelho metade do que restou em branco.

área colorida: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

LIMITES 218

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 218.

Figura 4 - Ideia intuitiva de limite por meio do limite de uma sequência (b)

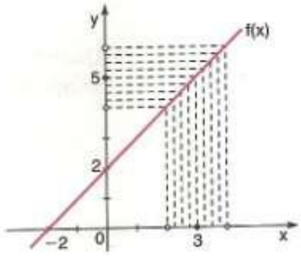
Continuando esse processo sucessiva e indefinidamente, a região colorida vai preenchendo quase todo o quadrado inicial, isto é, a área vai se aproximando de 1, ou seja, vai tendendo a 1.

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots$$

Dizemos então que o limite dessa soma é igual a 1.

Quando dizemos que a área da região colorida tende a 1, significa que ela se aproxima de 1, sem no entanto assumir esse valor.

Observe o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$.



Note que, à medida que os valores de x se aproximam de 3, por valores menores que 3 (pela esquerda) ou por valores maiores que 3 (pela direita), f(x) se aproxima de 5. A tabela a seguir indica os valores de f(x) para alguns valores de x:

x	2	2,3	2,9	2,99	...	3,01	3,4	3,9
f(x)	4	4,3	4,9	4,99	...	5,01	5,4	5,9

De acordo com o exposto, podemos dizer que:

- O limite de f(x) quando x tende a 3 pela esquerda é igual a 5, e indicamos por

$$\lim_{x \to 3_-} f(x) = 5$$

- O limite de f(x) quando x tende a 3 pela direita é igual a 5, e indicamos por

$$\lim_{x \to 3_+} f(x) = 5$$

Os limites à esquerda e à direita são chamados de limites laterais.

Em vez das duas indicações anteriores, podemos utilizar a seguinte representação única:

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ Lê-se: o limite de f(x) quando x tende a 3 é igual a 5.

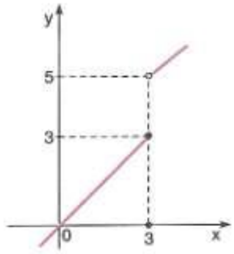
Observe que $f(3) = 5$.

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 219.

Figura 5- Definição de limite e exemplos resolvidos (a)

Considere o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leq 3 \\ x + 2, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$



Observe os limites laterais:

- Quando x se aproxima de 3 pela esquerda, f(x) se aproxima de 3, isto é:

$$\lim_{x \to 3_-} f(x) = 3$$

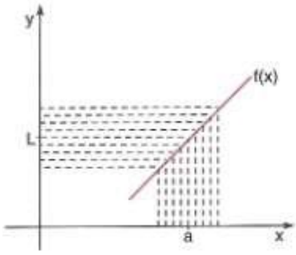
- Quando x se aproxima de 3 pela direita, f(x) se aproxima de 5, isto é:

$$\lim_{x \to 3_+} f(x) = 5$$

Como os *limites laterais* neste caso são diferentes, dizemos que não existe o limite de f(x) quando x tende a 3.

Definição de limite

Considere o gráfico da função f(x):



Dizemos que o limite da função f(x), quando x tende a a, é o número real L, se, e somente se, os números reais da imagem f(x) permanecerem próximos de L, para os infinitos valores de x próximos de a. Indica-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Podemos ainda calcular o limite quando existir f(x) em todos os pontos de um intervalo aberto que contenha a, e os limites laterais, tanto da direita como da esquerda, tiverem o mesmo valor L. Então:

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = \lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

LIMITES 220

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 220.

Figura 6- Definição de limite e exemplos resolvidos (b)

Exemplos

1 Dada a função f(x) definida por $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x > 2 \\ x^2 + 1 \text{ se } x \leq 2 \text{ e } x \neq -1 \end{cases}$

representá-la graficamente e verificar no gráfico os limites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

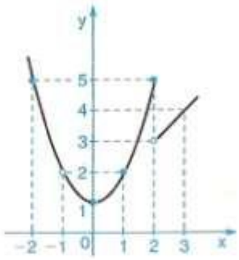
c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Construindo o gráfico da função f(x), temos:



a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

c) Embora a função não esteja definida para $x = -1$, podemos observar no gráfico que $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$. Então: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$.

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$

e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

f) $\nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Não existe limite da função quando *x* tende a 2, pois os limites laterais são diferentes.

2 Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2}$ e interpretar o resultado.

Quando *x* se aproxima de 1, o valor numérico de $(x^2 + x - 3)$ se aproxima de $(1^2 + 1 - 3)$, ou seja, de -1, e o valor numérico de $(x + 2)$ se aproxima de $(1 + 2)$, isto é, de 3. Logo, o valor numérico de $\dfrac{x^2 + x - 3}{x + 2}$ se aproxima de $-\dfrac{1}{3}$. Podemos, então, calcular o limite de um modo mais rápido, substituindo *x* por 1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 3}{x + 2} = \frac{1^2 + 1 - 3}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

3 Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 5x + 4)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{1 - 2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Substituindo *x* em cada expressão pelo valor do qual ele se aproxima, temos:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 5x + 4) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{1 - 2x} = \dfrac{1^3 - 1^2 + 1}{1 - 2(1)} = \dfrac{1 - 1 + 1}{1 - 2} = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{4 - 1}{\sqrt{4} - 1} = 3$

221 LIMITES

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 221.

A continuação do conteúdo se dá com sugestões de exercícios de repetição, sem muito rigor matemático. Predominam as representações algébricas dos conceitos e também algumas representações gráficas. As listas de exercícios são extensas e caracterizadas pela presença de alguns exercícios de provas de vestibulares da época, o que deixa a impressão de que o objetivo desta seção é treinar os alunos para o manuseio algébrico dos limites e pouco espaço para a compreensão dos conceitos.

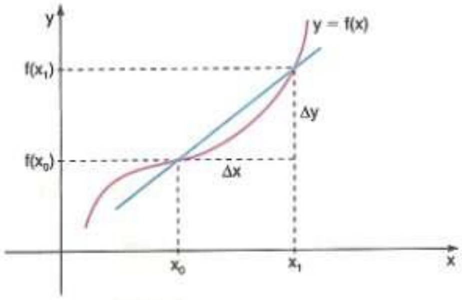
Seguindo para o capítulo de derivadas (último capítulo do livro), o autor o dividiu em 10 tópicos como seguem: Taxa de variação média; derivadas; derivadas fundamentais; derivada de uma soma ou de uma diferença de funções; velocidade escalar instantânea; aceleração escalar instantânea; derivada de um produto de funções; derivada de um quociente de funções; derivada da função composta ou regra da cadeia; estudo da variação de funções.

O autor inicia o capítulo retomando a ideia de taxa de variação média de uma função em um determinado intervalo pertencente ao domínio da função. Essa ideia foi explorada no capítulo de funções, no primeiro volume dessa coleção, porém agora o autor a define com um maior rigor matemático e aproveita para relacionar a taxa de variação com alguns conceitos de Matemática e de Física, como por exemplo, a velocidade escalar média, a aceleração escalar média, crescimento médio e preço médio. Na sequência, ele parte para a definição intuitiva e formal de derivada de uma função, como mostram as Figuras 7, 8, 9 e 10.

Figura 7– Taxa de variação de uma função (a)

1 Taxa de variação média

Consideremos o gráfico da função **y = f(x)**.



Denomina-se **taxa de variação média** da função y = f(x), no intervalo $[x_0, x_1]$ ao quociente:

$$T_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{com } x_1 > x_0$$

Chamando a variação de y de $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ e a variação de x de $\Delta x = x_1 - x_0$, temos:

$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

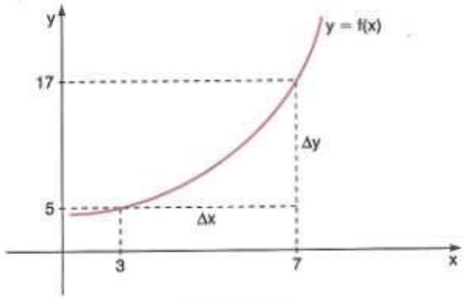
A taxa de variação média corresponde, então, à variação de y por unidade de x, em média, entre x_0 e x_1.

Observe que a taxa de variação média de uma função em um intervalo é o **coeficiente angular** do segmento cujos extremos são os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por exemplo, no gráfico a seguir a taxa de variação média da função y = f(x) entre $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$ é:

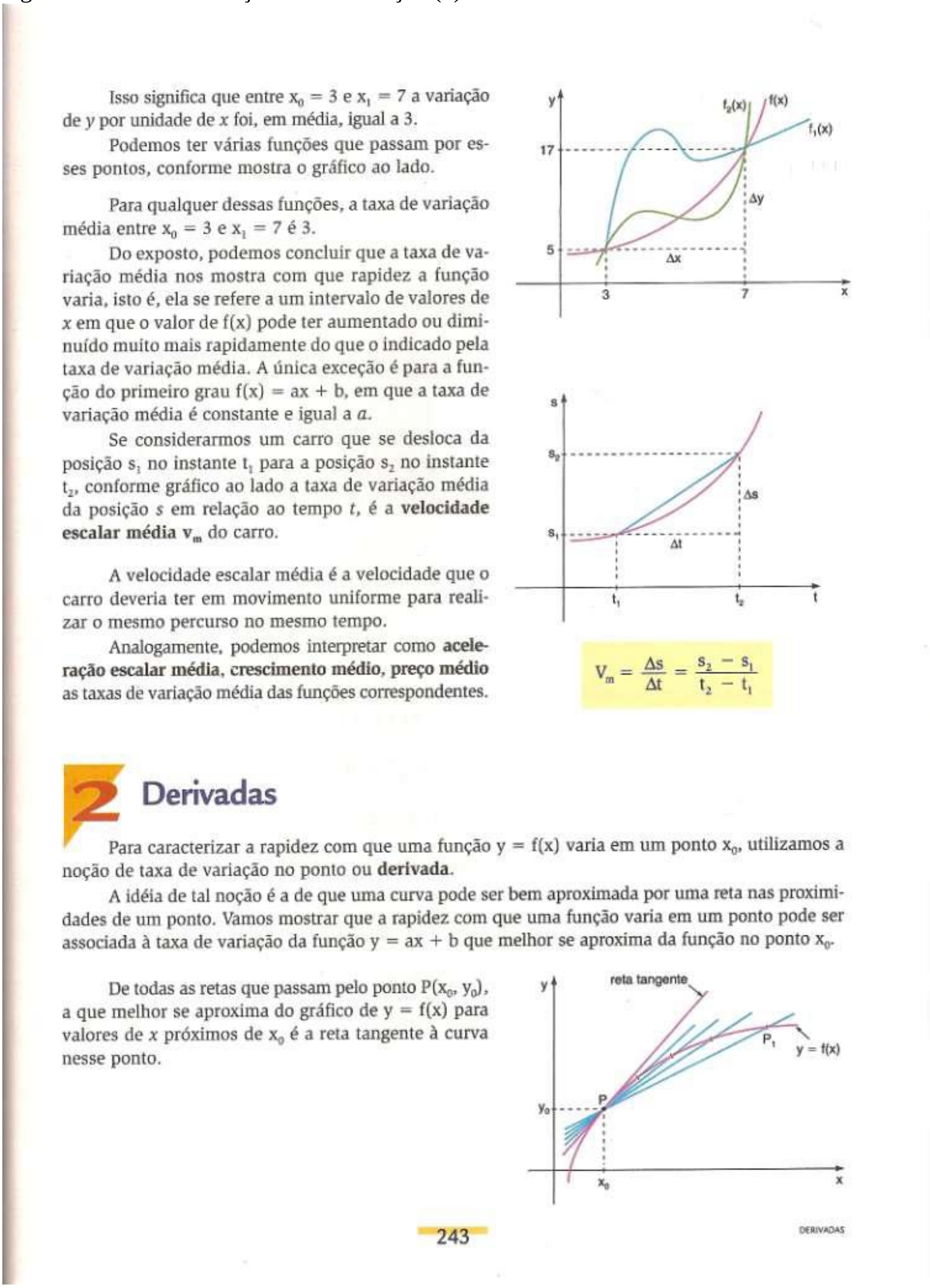
$$T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{17 - 5}{7 - 3} = \frac{12}{4} = 3$$



DERIVADAS 242

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 242.

Figura 8 – Taxa de variação de uma função (b)



Isso significa que entre $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$ a variação de y por unidade de x foi, em média, igual a 3.

Podemos ter várias funções que passam por esses pontos, conforme mostra o gráfico ao lado.

Para qualquer dessas funções, a taxa de variação média entre $x_0 = 3$ e $x_1 = 7$ é 3.

Do exposto, podemos concluir que a taxa de variação média nos mostra com que rapidez a função varia, isto é, ela se refere a um intervalo de valores de x em que o valor de f(x) pode ter aumentado ou diminuído muito mais rapidamente do que o indicado pela taxa de variação média. A única exceção é para a função do primeiro grau $f(x) = ax + b$, em que a taxa de variação média é constante e igual a a.

Se considerarmos um carro que se desloca da posição s_1 no instante t_1 para a posição s_2 no instante t_2, conforme gráfico ao lado a taxa de variação média da posição s em relação ao tempo t, é a **velocidade escalar média** $\mathbf{v_m}$ do carro.

A velocidade escalar média é a velocidade que o carro deveria ter em movimento uniforme para realizar o mesmo percurso no mesmo tempo.

Analogamente, podemos interpretar como **aceleração escalar média**, **crescimento médio**, **preço médio** as taxas de variação média das funções correspondentes.

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

2 Derivadas

Para caracterizar a rapidez com que uma função $y = f(x)$ varia em um ponto x_0, utilizamos a noção de taxa de variação no ponto ou **derivada**.

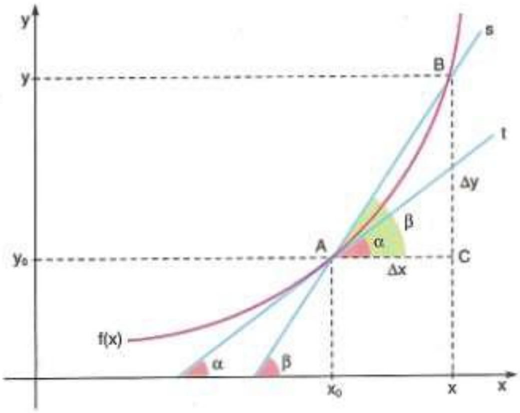
A idéia de tal noção é a de que uma curva pode ser bem aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto. Vamos mostrar que a rapidez com que uma função varia em um ponto pode ser associada à taxa de variação da função $y = ax + b$ que melhor se aproxima da função no ponto x_0.

De todas as retas que passam pelo ponto $P(x_0, y_0)$, a que melhor se aproxima do gráfico de $y = f(x)$ para valores de x próximos de x_0 é a reta tangente à curva nesse ponto.

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 243.

Figura 9 – Definição de derivada (a)

Para estudar a determinação da tangente a uma curva num de seus pontos, consideremos o gráfico da função $y = f(x)$ dado por uma curva que possui uma reta *t*, tangente a $f(x)$ no ponto (x_0, y_0).



Δx = incremento da variável *x*

Δy = incremento da função

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = razão incremental

Na figura, temos:

- *s* é uma reta secante à curva
- *t* é uma reta tangente à curva no ponto $A(x_0, y_0)$
- $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (considerando o triângulo ABC)

Note que, quando Δx tende a zero, o ponto *B* tenderá ao ponto *A* e a reta secante *s* tenderá à reta tangente *t*; como conseqüência, o ângulo β tenderá a α, e teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \text{tg}\,\alpha$$

Enquanto Δx tende a zero, a reta secante tende a uma posição limite, que é a reta tangente à curva no ponto *A* de abscissa x_0.

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente é o valor do limite dos coeficientes angulares das secantes quando Δx tende a zero.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

O valor desse limite denomina-se *derivada* da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 e indica-se $f'(x_0)$.

Seja a função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ e seja um ponto de abscissa x_0 desse intervalo.

Denomina-se *derivada* da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0, o limite, se existir e for finito, da razão $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero, ou seja:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

DERIVADAS 244

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 244.

Figura 10 – Definição de derivada (b)

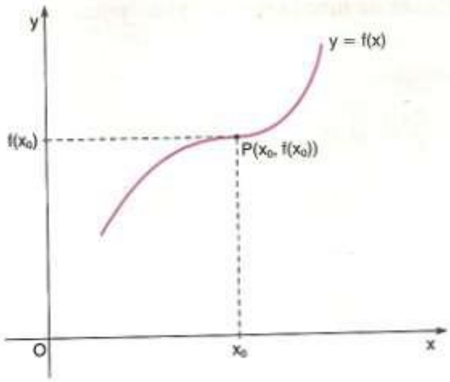
Fazendo $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$, podemos concluir que se Δx tende a zero equivale dizer que x tende a x_0.

Substituindo, obtemos outra expressão equivalente.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observações

- Para simplificar a linguagem, podemos dizer derivada da função no ponto x_0 em vez de derivada da função no ponto de abscissa x_0. Isto é, vamos empregar a palavra ponto em dois sentidos diferentes: em algumas ocasiões, vamos nos referir a um ponto do plano; e em outras, a um valor da variável independente x como sendo um ponto do eixo Ox.



Note que a cada valor de x_0 existe um único ponto do plano sobre o gráfico da função.

- A *derivada* da função *f*, definida em um intervalo real aberto, é a função indicada por f', tal que seu valor, em qualquer ponto *x* do domínio de *f*, é dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir e for finito.

- A interpretação geométrica da derivada de uma função f(x) é a de que, quando existe, $f'(x_0)$ fornece o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto x_0.

$$f'(x_0) = \text{tg}\,\alpha$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

245 DERIVADAS

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 245.

Esse capítulo do livro segue com diversos exemplos de cálculos de derivadas pela definição, utilizando manipulação algébrica e as listas de exercícios que seguem o mesmo padrão. Após isso o autor traz demonstrações de derivadas de algumas funções fundamentais e também de propriedades de derivadas, porém os exercícios seguem a linha anterior, apenas de aplicação dos conceitos demonstrados, com pouca aplicação prática. Em seguida ele aborda a relação da derivada com os conceitos de velocidade e aceleração escalar instantânea, reservando esse espaço a utilização da derivada para resolução de situações problemas. Nos tópicos de derivadas da função produto, da função quociente, e da “regra da cadeia”, o autor apresenta-as sem demonstrações, informando ao leitor que tais propriedades seriam admitidas sem demonstrações. Então o capítulo é finalizado com o estudo do comportamento das funções com base no valor de sua derivada (intervalos de crescimento e decrescimento e função constante cuja derivada é nula).

Diante dos exemplos expostos podemos então entender que o Cálculo já foi parte integrante do currículo do Ensino Médio, porém quando abordado de maneira mais formal, trabalhando diretamente os seus conceitos, esse tópico de ensino era relegado aos capítulos finais dos livros didáticos, o que pode ser devido a sua complexidade se abordado mediante conceitos formais de limites. Sendo assim, este era um tópico que a maioria dos professores não abordava pela falta de tempo (e talvez até preparo) para se trabalhar. Posso citar aqui a minha própria experiência escolar, cursei a terceira série no ano de 2005 (ano de publicação do livro analisado) e não acompanhei aulas ou quaisquer referências sobre tais conteúdos. Aliás, um aluno observador verifica por si só que em nenhuma série são abordados todos os conteúdos apresentados nos livros.

Conforme alerta Ávila (1991, p. 3), “... A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco”. O que os programas precisam é de uma reestruturação que não seja fundamentada em excesso de formalismo, na introdução de conceitos que não são solicitados no desenvolvimento da disciplina, gastando-se muito tempo e esforço para obtenção de poucos resultados práticos.

As ideias apresentadas em nossa análise mostram que alguns autores de livros didáticos atuais têm concordado com essa preocupação em relação aos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo, tanto que apresentam algumas ideias de limites e derivadas no desenvolvimento dos conteúdos. Podemos ainda levantar algumas questões como: Esse esforço que atualmente os autores têm empenhado é suficiente para contribuir com a melhora dos resultados dos alunos na disciplina de CDI 1 em suas graduações? É possível inserir ainda mais ideias de Cálculo no currículo do Ensino Médio, dada sua relevância para a ciência moderna e para a sociedade? Para essa segunda questão, cremos que a resposta seja sim, e esse é um dos agentes motivadores de toda a nossa pesquisa, pois nossa hipótese é de que a abordagem de conceitos de Cálculo, com aplicações mais práticas sem excessos de formalismos e rigor visando incluir o aluno como protagonista no processo de aprendizagem da Matemática no Ensino Médio pode auxiliar o aluno a superar as dificuldades iniciais com o Cálculo. Para isso, fundamentamos nossa pesquisa na Didática de Resolução de Problemas, cuja metodologia favorece nossa tese de pesquisa e será apresentada no próximo capítulo.

3. REFERENCIAL TEÓRICO DIDÁTICO - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Essa pesquisa tem como um dos pilares de fundamentação teórica a Didática da Resolução de Problemas. Apresentaremos aqui algumas definições para esta didática, seu desenvolvimento histórico e uma justificativa da escolha por adotar essa metodologia.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) os processos de ensino e aprendizagem de Matemática são essenciais para o desenvolvimento humano e social, contribuem para o desenvolvimento de uma visão de mundo, para a interpretação de diversas situações, para o desenvolvimento de capacidades que são exigidas no modelo atual de sociedade, seja no mercado de trabalho ou em qualquer área que exija do ser humano a capacidade de raciocínio lógico e criatividade.

A proposta do PCN é que cada escola ou professor proponha um planejamento que permita o desenvolvimento e a construção do conhecimento matemático. Ligados a isso, estão a escolha de temas e conteúdos, e a articulação destes, com a estratégia didática a ser utilizada. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica, segundo o PCN, que deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado (BRASIL, 1998).

A Resolução de Problemas passou a ser tratada como tema de interesse de alunos e professores, a partir da obra *"How to Solve It"* de George Polya, conhecido como o "pai" da Resolução de Problemas, datada de 1944, e traduzida para o português como "*A Arte de Resolver Problemas*". Polya tinha como intuito apresentar estratégias para que o aluno se tornasse um bom resolvedor de problemas (AZEVEDO; FIGUEIREDO; PALHARES, 2016).

Com o advento do movimento Matemática Moderna, nos anos 60 e 70, e sua ênfase excessiva no rigor e formalismo, a Didática de Resolução de Problemas acabou tendo pouca relevância, mas após esse período emergiu no campo da Educação Matemática, caracterizando o aluno como um ser ativo nos processos de ensino e aprendizagem e por privilegiar a construção do conhecimento. Isso se deu devido ao fracasso comprovado com o ensino da matemática nos moldes propostos pelo movimento Matemática Moderna (PAGANI, 2016).

De acordo com Onuchic (1999), sobre a importância da Didática de Resolução de Problemas nos dias atuais:

> Somente nas últimas décadas os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa e simultânea de vários níveis de atividade (1999, p. 203).

Ao se trabalhar com Resolução de Problemas, é necessário que se compreenda perfeitamente a definição de problema. Então nos perguntamos qual a definição adequada de problema? Segundo Lester (1982[1], apud DANTE, 2009, p. 12) "...problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve a solução". Essa definição é segundo Dante, consensual entre os educadores matemáticos. Um indivíduo se depara com uma situação problema quando tem um objetivo a ser alcançado, mas temporariamente não dispõe dos métodos para fazê-lo.

Ainda sobre uma definição de problema, segundo Palhares (1997):

> Um problema é constituído por um conjunto de informações sobre uma situação inicial e sobre a situação final que é requerida, ou sobre a transformação que é requerida; existe um obstáculo que impede uma classe de indivíduos de obter a transformação requerida sem recorrer a algum tipo de raciocínio para que obtenha a solução pelos seus próprios meios (ou uma solução, ou a certeza que não há solução); a classe de indivíduos para os quais existe um obstáculo terá que aplicar algum ou alguns dos procedimentos descritos atrás; finalmente não pode existir indicação precisa de qual o procedimento a utilizar (p. 167).

Dante (1991) ressalta que primeiramente o professor precisa saber distinguir exercício de problema. Exercício, como o próprio nome sugere, serve para exercitar, praticar um determinado processo ou algoritmo. Problema é a descrição de uma situação, na qual se deve encontrar algo desconhecido, sem ter previamente um algoritmo que garanta a resolução.

Fazendo um comparativo com as definições de problema supracitadas, podemos verificar que elas apontam para um consenso no que diz respeito ao fato de que um problema é uma situação desconhecida, na qual aquele que se propõe a resolvê-lo precisa adotar estratégias e formular um plano para a resolução, estando dotado de conhecimentos prévios que o auxiliarão a determinar uma solução até então desconhecida, sem a aplicação direta de algum método ou algoritmo.

---

[1] LESTER JR., F. You can teach problem solving, *Arithmetic Teacher*, 25(2), p. 16-20, 1977.

Para ser um bom problema, ele deve ser desafiador, real e interessante para o aluno, também considerando que deve ter um nível adequado de dificuldade, não consistir na aplicação evidente e direta de algoritmos e seu elemento desconhecido, ou aquilo que se busca encontrar com a resolução de tal problema, deve realmente ser desconhecido pelo aluno. (DANTE, 1991).

Mas afinal, o que é resolver um problema? Nada melhor do que recorrermos a George Polya, o "pai" da resolução de problemas para responder essa questão.

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.
>
> Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o 'animal que resolve problemas'; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos à simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim (POLYA, 1997).

Para resolver um problema, o aluno precisa, além de compreender o que foi proposto e ser capaz de emitir uma resposta ou resultado para tal, conseguir colocar à prova os procedimentos adotados, realizar testes de verificação e ainda compará-los com outros procedimentos possíveis, valorizando mais o processo de resolução do que unicamente a emissão de uma resposta correta. O aluno assim torna-se protagonista do processo de resolução, e não um mero reprodutor de conhecimentos transmitidos (DANTE, 2009).

Nossa pesquisa utilizará a Didática de Resolução de Problemas, proposta por Dante (2009), para conceituar intuitivamente a ideia de derivada, utilizando a Geometria Analítica. Nas próximas subseções, abordaremos o processo proposto por Polya, e seguiremos com a proposta de Dante, que foi escolhida para esse trabalho, detalhando seus métodos, princípios e objetivos.

3.1 AS QUATRO FASES PARA A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA SEGUNDO O MÉTODO DE POLYA

Nessa seção, utilizaremos como referência a obra "A arte de resolver problemas (POLYA, 2006), e discorreremos sobre a metodologia para a resolução de um problema e as quatro fases propostas pelo autor.

Em sua obra "*How to Solve It*", uma das preocupações de Polya (2006) foi responder à pergunta, como resolver um problema? A fim de organizar os métodos a serem aplicados conforme a sua proposta, Polya (2006) dividiu o processo de resolver um problema em quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Cada uma das fases tem sua relevância, por exemplo, o problema se tornará desagradável se o aluno se dispuser a fazer cálculos sem ter uma compreensão precisa do problema, todo seu esforço será inútil sem a elaboração de um bom plano de resolução. Verificar a eficiência do plano de resolução em cada passo auxilia no êxito final assim como cria espaço para outras perspectivas de resolução (POLYA, 2006). Resumiremos a seguir cada uma dessas fases:

Na primeira fase, compreensão do problema, o papel do professor é fundamental para despertar no aluno o interesse na resolução do problema, afinal, trabalhar para um fim indesejado não é prazeroso. Para isso, o professor precisa primeiramente escolher um bom problema para trabalhar, em um nível de dificuldade não muito difícil, tampouco muito fácil, e também é papel do professor auxiliar o aluno na compreensão do problema. Ainda é importante observar que o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido, afinal o aluno precisa identificar quais são as incógnitas, os dados e as condições propostas no problema, enquanto cabe ao professor estar atento a esses questionamentos por parte do aluno.

Ainda nesta fase, cabe ao estudante considerar com atenção e repetidamente, as partes principais do problema. Deve começar pelo enunciado do problema, por meio dele visualizar o problema como um todo, com a maior clareza possível. Caso necessário fazer figuras relacionadas ao problema, atribuir incógnitas e procurar utilizar uma notação adequada, pois assim será obrigado a considerar os elementos para os quais essas figuras e incógnitas são atribuídas. Também deve buscar fazer suposições como por exemplo, é possível atender a condição do problema?

Para uma melhor compreensão do problema Polya recomenda que o estudante precisa ter um entendimento completo do enunciado do problema de modo que mesmo que esse não lhe esteja à vista, ele não tema perder detalhes do que se pede. Para tal, se faz necessário um isolamento das partes principais do problema. Para os problemas de demonstração trata-se da hipótese e conclusão, enquanto que para os problemas de determinação, tratam-se dos dados e das incógnitas. Cada uma dessas partes precisa ser analisada uma a uma e posta em diversas combinações, de modo a relacionar seus detalhes com a totalidade do problema. Desse modo, ficarão mais claros quais serão os detalhes que terão uma função a desempenhar na resolução do problema.

A segunda fase para a resolução de um problema, estabelecimento de um plano, trata-se de um modo geral de identificar quais os cálculos, desenhos, incógnitas, que serão necessárias para a resolução do problema. É preciso atentar-se ao fato de que o caminho que leva a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano pode ser demorado. Elaborar um plano de resolução é o primeiro grande feito para alcançar o objetivo e nesse momento o professor também desempenha um papel fundamental para tal sucesso. Cabe ao professor propiciar aos seus alunos ideias luminosas (não diretas que garantem a resolução, mas sim ideias que os auxiliem a chegarem a suas próprias conclusões), para isso, o professor deve tomar por base a sua própria experiência, pois consegue reconhecer as dificuldades para a resolução de um problema quando dispõe de métodos eficazes ou até mesmo quando não dispõe de método algum. As boas ideias para resolução de um problema vêm geralmente de experimentações já vivenciadas pelo sujeito que se dispõe a resolvê-lo.

Durante o processo de estabelecimento de um plano, torna-se natural que o professor conduza os alunos a um problema correlato anteriormente resolvido, pois ideias similares podem ser aplicadas. Como muitos problemas de Matemática estarão de certa maneira relacionados com o problema em questão, a dificuldade está em encontrar aquele que realmente será útil, o que ressalta mais uma vez a importância de um direcionamento do professor. Para facilitar essa escolha, é recomendado considerar a incógnita, e pensar em um problema que tenha a mesma incógnita ou semelhante (por exemplo, um problema de função quadrática que visa determinar a área máxima de um terreno, naturalmente leva-se a pensar em problemas de cálculo de áreas de figuras geométricas).

O processo de busca de problemas correlatos se bem compreendido, contribuirá muitas vezes para a resolução de diversos problemas a serem trabalhados em sala de aula, porém esse método não garante eficácia em todos os casos. Quando esse método não ajuda para o estabelecimento de um plano, é preciso buscar algum outro ponto de contato apropriado. Polya (2006) então propõe uma variação ou modificação do problema, caso seja possível sua reformulação. Os meios específicos para isso são a generalização e particularização, o aluno deve utilizar da analogia, abandonando partes da condicionante que não podem ser examinadas de imediato. A variação do problema pode levar a um problema auxiliar adequado.

Professor e aluno devem estar atentos em relação a utilização de problemas auxiliares para que não haja um distanciamento do problema original a ponto de que se perca a compreensão e os planos preestabelecidos para sua resolução. Polya (2006) então sugere uma indagação para retomada do problema original: Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?

Para a elaboração de um plano de resolução, o sujeito que se dispõe a resolvê-lo deve aproveitar as ideias que surgem no processo, analisando-as e distinguindo quais são realmente proveitosas. Essa distinção só é possível de se fazer quando há compreensão total do problema. Deve-se fazer uma análise completa do problema por diversos pontos de vista buscando a relação disso com conhecimentos previamente adquiridos, analisando repetidamente os detalhes do problema, mais de uma vez sob perspectivas diferentes. Essa abordagem ajuda na percepção de uma ideia proveitosa, que pode indicar um caminho para a resolução do problema.

Nesse passo de elaboração de um plano para resolução, uma ideia é considerada proveitosa se ela lhe mostra todo o caminho para o sucesso em resolver o problema ou pelo menos parte dele, porém, o estudante não deve descartar as ideias incompletas, e sim deve analisá-las de maneira minuciosa (se ela parecer vantajosa), para verificar se ela pode levar a uma reconsideração do plano de resolução. Caso sim, deve procurar contatos com conhecimentos previamente adquiridos. Essas sucessivas análises de ideias e relações com os conhecimentos que o aluno já possui, vão formando o “caráter” da ideia que levará a resolução total do problema.

A terceira fase para resolução de um problema segundo o método de Polya (2006) é a execução do plano (elaborado na fase anterior). Essa etapa é mais fácil do que as anteriores, porém ela só é bem-sucedida se o estudante tem bom domínio dos conhecimentos anteriores e bons hábitos mentais de concentração no objetivo. Das quatro fases, essa é a que mais requer paciência.

Se o aluno concebeu e compreendeu os passos a serem seguidos em seu plano, esta torna-se uma etapa de relativa tranquilidade para o professor, porém este deve estar atento para verificar se o aluno está seguindo os passos corretamente. É necessário que o aluno fique convicto dos procedimentos que está adotando, e cabe ao professor ajudá-lo a "perceber" se o passo está correto, mas as vezes também incentivar o aluno a "demonstrar" se está procedendo de maneira correta.

A execução do plano deve começar sempre pela ideia proveitosa que melhor se adaptou as condições do problema. Em cada passo de resolução, o aluno deve realizar todos os cálculos e operações algébricas e geométricas detalhadamente, verificando a correção passo a passo. Caso o problema seja muito complexo, o estudante pode distinguir pequenos passos dos grandes passos, preferencialmente iniciando pelos grandes, deste modo, garantirá uma resolução sem dúvidas e uma apresentação clara.

A quarta fase para resolução de um problema é o retrospecto, que se trata de um exame e consideração dos processos que levaram o sujeito a resolução do problema. Polya (2006) destaca que mesmo os alunos muito bons costumam resolver o problema e simplesmente avançar para o próximo exercício ou assunto, o que consiste em um erro no processo, pois perdem uma parte instrutiva de todo o processo. Fazer o retrospecto ajuda os alunos a consolidarem o conhecimento adquirido com a resolução do problema e a aperfeiçoar a capacidade de resolução de outros problemas (o que está ligado à questão de encontrar ideias ou problemas correlatos). Cabe ao professor estimular no aluno a ideia de que nenhum problema está resolvido por completo, é sempre possível aperfeiçoar o processo de resolução e criar novos questionamentos sobre o que foi estudado.

Ao encontrar uma solução para o problema, é natural que o aluno pense que adotou todos os procedimentos de maneira correta, afinal ele cumpriu seu plano. Porém sempre é possível fazer verificações, principalmente se o problema proposto exigiu um procedimento longo e trabalhoso. É preciso também fazer a verificação do resultado. É natural que para nos convencermos da qualidade de um objeto, temos e desejo de vê-lo ou tocá-lo. Sendo assim, nos é natural também verificar se há possibilidades de encontrar a solução de um problema por caminhos e métodos diferentes.

O professor tem o dever de não passar aos alunos a impressão de que problemas de Matemática não possuem relação entre si. Sendo assim, esta fase oportuniza os educadores a relacionarem o problema em questão a outros problemas. Essa etapa também motiva os alunos a reconhecerem o esforço que empregaram na resolução, e os torna curiosos quanto aos outros métodos que poderiam ser empregados e de que maneira o que fora feito os auxiliará na resolução dos problemas que surgirão nas aulas vindouras. Cabe ao professor estimular e encorajar o aluno a encontrar outros casos em que se pode aplicar o resultado ou algum dos métodos empregados na resolução.

Para fazer o retrospecto o aluno deve considerar a resolução completa do problema, analisando cada passo empregado e todos os seus detalhes, tentando torná-los tão simples quanto forem possíveis. Deve procurar modificar as partes que forem vantajosas, tornando assim a resolução melhor do que era inicialmente, e analisar os métodos empregados sintetizando-os para uso em problemas futuros. Desse modo, o aluno pode descobrir resoluções melhores ou ainda fatos novos e interessantes, que auxiliarão na construção do conhecimento dos conceitos matemáticos trabalhados.

Durante a explicação de seu método Polya (2006) traz diversos exemplos de problemas e detalha maneiras pelas quais seu método pode ser empregado. Nota-se que durante o processo de resolução, a interação professor – conhecimento – aluno é constante e valorizada, e de que o aluno realmente se faz protagonista do processo, sendo ele o motivador das interações principalmente por meio de questionamentos, o qual o professor deve estar apto a auxiliá-lo. Ele ressalta que o papel do professor é o de incentivar o caráter investigativo do aluno, evitando dar-lhes informações que o levem a resolução direta do problema, isso colocaria todo o desenvolvimento a perder.

Esse método construído por Polya (2006) serve de base e motivação para muitas pesquisas na área da Didática da Resolução de Problemas, método adotado por Dante (1991) (que se baseia nas ideias de Polya), que é o principal norteador de nossa pesquisa. Na próxima seção falaremos dele.

3.2 A DIDÁTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO DANTE

Dante (1991) em sua obra intitulada Didática da Resolução de Problemas de Matemática, constatou a inexistência de materiais de consulta e pesquisa para professores, em relação a Resolução do Problemas (RP), embora esse fosse um dos campos da área de Educação Matemática dotados de muitos estudos por parte de educadores e matemáticos. Sua preocupação foi em disponibilizar um material para consulta e apoio nesta área, para que professores e graduandos em licenciatura tivessem um norteador de suas atividades dentro das perspectivas propostas pelos estudiosos do assunto.

As pesquisas em Educação Matemática apontavam a necessidade de enfatizar a compreensão e o envolvimento do aluno na aprendizagem por descoberta, despertando nele um espírito investigativo de autonomia e dotado de criatividade. Assim, educadores matemáticos têm desde os anos 1980, tratado com relevância as pesquisas em RP, chegando a considerá-la como o instrumento mais importante a ser considerado como prática metodológica para os primeiros anos do Ensino Fundamental (DANTE, 2009).

Essa valorização da pesquisa em RP, porém, não têm mudado o fato de que esse é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados em sala de aula, reflexo talvez de práticas pedagógicas mecanizadas, que favorecem o aprendizado de uso de algoritmos e de prática excessiva desses métodos de resolução. Mas dentro desse contexto escolar, sabe-se que são diversos os fatores que impedem ou desfavorecem uma prática pedagógica libertadora, que visa à construção dos conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento do raciocínio e pensamento crítico, favorecendo a criatividade dos alunos.

A proposta de Dante (2009), norteada por essas preocupações, objetiva contribuir para a melhoria da prática dos professores de Ensino Básico, minimizando as dificuldades dos alunos quanto a compreensão de contextos e aumentar a capacidade de resolver problemas de matemática, agregando aos alunos a capacidade de resolver problemas também de outras disciplinas, como aqueles que lhe são comuns no cotidiano, contribuindo para uma formação humana e integral do indivíduo para a sociedade.

Devido à crescente onda de globalização vividas nos dias de hoje, a escola atual precisa estar alinhada com as necessidades dessa nova sociedade, preparando o ser humano para acompanhar o seu ritmo de evolução. É papel do professor ajustar-se a contemporaneidade do ensino, ajustando sua prática pedagógica aos temas fundamentais relacionados a essa realidade vivenciada, pois assim, formar-se-á adequadamente os cidadãos para interação nesse modelo de sociedade. A matemática desempenha papel fundamental nesse desafio, pois é uma área de conhecimento voltada para o desenvolvimento do raciocínio lógico, e também ligada com o desenvolvimento de novas práticas e tecnologias. Disso vem a necessidade de explorar o ensino da matemática na formação de cidadãos críticos capazes de interagir com diversas situações desafiadoras, aumentando a capacidade do ser humano de lidar com problemas e serem capazes de entender, planejar e elaborar métodos de resolução.

Segundo Dante (2009) a Resolução de Problemas traz a possibilidade de desenvolver uma prática pedagógica que atenda às necessidades relacionadas aos objetivos do ensino de matemática, pois ela desenvolve e privilegia o poder de comunicação do aluno, oportunizando-os a explorar, organizar e expor seus pensamentos, estabelecendo relações entre ideias intuitivas e a linguagem universal e formal da matemática. Tendo esses aspectos em vista, Dante (2009) organizou os objetivos da RP em oito tópicos: fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio, ensinar o aluno a enfrentar situações novas, oportunizar o aluno a se envolver com aplicações da matemática, tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras, equipar o aluno com estratégias de resolução, dar uma boa base matemática as pessoas e, liberar a criatividade do aluno. Apresentaremos a seguir alguns detalhes desses objetivos da RP.

3.2.1 Os objetivos da Resolução de Problemas segundo Dante (2009).

O primeiro objetivo da RP conforme a organização feita por Dante (2009) é fazer o aluno pensar produtivamente. Entende-se por pensamento produtivo aquele que produz novas e diferentes soluções, distinguindo-se de um pensamento de reprodução, na qual utiliza-se apenas métodos e conceitos conhecidos. O pensamento produtivo privilegia a criatividade, procurando encontrar e utilizar novos métodos. Assim, a metodologia da RP busca apresentar aos alunos situações que os façam sentirem desafiados e motivados a resolvê-las. Por essa razão, a RP têm sido amplamente discutida por educadores matemáticos, já que essa é uma das principais metas quando se fala em ensino e aprendizagem de matemática.

Desenvolver o raciocínio do aluno é desenvolver nele a habilidade de elaborar raciocínios lógicos, de modo que os alunos consigam de modo eficaz utilizar os recursos que têm para que possam desenvolver métodos de resolução para variadas situações problemas. Por exemplo, problemas que identificam a habilidade do aluno em verificar a existência de padrões ou se eles são capazes de aplicar métodos de resolução mais simples do que os procedimentos que geralmente são adotados de maneira formal.

O terceiro objetivo da RP é ensinar o aluno a enfrentar situações novas, pois como a sociedade evolui de forma cada vez mais rápida, é necessário que os processos de ensino e aprendizagem estejam alinhados com essa velocidade de mudança da sociedade, o que não pode ser diferente no que diz respeito a matemática. Com o advento e com o aprimoramento constante das tecnologias, impedem que se faça uma previsão de quais habilidades serão exigidas das pessoas em um futuro próximo. Sendo assim, torna-se obsoleto o ensino de metodologias e procedimentos que se aplicam ao tempo atual, pois rapidamente as exigências da sociedade se transformam. Sendo assim, a RP ajuda os alunos a lidarem com situações novas independentemente de quais sejam, pois estimula no aluno o espírito de colaboração, a tomada de atitudes e iniciativas, a investigação e a formulação de hipóteses e teorias para resolver problemas (DANTE, 2009).

O quarto objetivo da metodologia da RP, conforme organizado por Dante (2009) é dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática. Segundo ele, as situações problemas são a única forma de apresentar aos alunos nos anos iniciais do Ensino Fundamental as aplicações da matemática. Os procedimentos metodológicos aplicados em sala de aula geralmente afastam os alunos das aplicações da disciplina na vida cotidiana das pessoas, e isso pode ser atribuído a excessiva preocupação com o treino de algoritmos e regras distantes das aplicações em situações reais. Oportunizar os alunos a experimentarem a matemática contextualizada em situações cotidianas favorece uma atitude positiva do aluno, que não o distancia ou o torna indiferente a matemática. Questionamentos do tipo “para que vou usar isso” são comuns à professores de todos os níveis de ensino da Educação Básica, pois o aluno não vê sentido em apenas saber executar um procedimento de cálculo ou resolução de algoritmos. A RP faz com que os alunos compreendam como, quando e por que utilizar esses procedimentos, não os distanciando de situações com as quais se deparam ou podem vir a enfrentar em seus cotidianos.

Como quinto objetivo da RP, Dante (2009) estabeleceu que ela deve tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras. Todo professor de matemática sabe que um de seus desafios em sala de aula será lidar com o fato de que a maioria dos alunos ali presentes, pelos mais diversos motivos, não tem o interesse necessário nas aulas de matemática para desenvolver um aprendizado satisfatório. Segundo Dante (2009), uma aula de matemática em que os alunos são orientados e incentivados pelo professor a serem ativos na aula, em busca da resolução de uma situação problema que os desafia, torna-se mais dinâmica e interessante. Afirma ainda que o real prazer em estudar matemática está no fato de o aluno sentir-se por si só capaz de resolver um problema, afinal, ele descobre que é capaz de por si só fazer coisas as quais não imaginava ser capaz.

Uma situação é comum a todas as pessoas no decorrer de suas vidas pessoais ou profissionais. Todos precisam resolver problemas, e para tal, precisa ter os “equipamentos” necessários para fazê-lo. A proposta da RP aponta exatamente para isso, equipar os alunos com estratégias para resolver problemas, sendo esse o sexto objetivo na organização proposta por Dante (2009). Cada problema exige uma estratégia diferente de resolução, e quanto mais problemas são resolvidos, com mais estratégias os alunos ficam equipados, pois a RP privilegia a análise e solução por diversas perspectivas.

A sociedade evolui a uma velocidade cada vez maior conforme passam-se os anos, e deste modo, aumenta cada vez mais a importância de termos pessoas com uma boa base matemática. Essa é o sétimo objetivo da RP, dar uma boa base matemática para as pessoas, pois todos precisam cada vez mais estarem capacitados a tomar decisões de maneira rápida e a definir estratégias cada vez mais eficazes para resolução de problemas cotidianos. O mundo globalizado de hoje exige a formação de cidadãos matematicamente alfabetizados, com um alto grau de conhecimentos gerais e sempre atualizados. Para isso, é necessário capacitar as crianças a serem cidadãos no futuro dotados de habilidades para resolver problemas domésticos, de economia, engenharia medicina e muitos outros. Desse modo, Dante (2009) defende que o currículo de Matemática proporcione aos alunos a formação necessária para formular e resolver problemas, desenvolvendo desde cedo essa capacidade.

O oitavo e último objetivo da metodologia de Resolução de Problemas, conforme Dante (2009), é liberar a criatividade do aluno, que também é um dos principais objetivos do ensino de matemática durante o Ensino Fundamental. A RP é uma das maneiras de estimular o pensamento criativo do aluno, haja vista que dentro dessa proposta, os problemas devem ser desafiadores e que exijam do aluno a capacidade de interpretação e elaboração de estratégias. Embora por si só isso não garante o desenvolvimento da criatividade no aluno, ele aumenta a probabilidade de ela se manifestar, e esse pensamento é reproduzido por vários pesquisadores como por exemplo Noller (1982)[2] e Renzulli (1982)[3] conforme destaca Dante (2009). Não há como ensinar uma criança a como pensar produtivamente para a resolução de um problema, porém a metodologia da RP oferece a oportunidade para que por si só, elas desenvolvam essa capacidade na busca da resolução de uma situação que lhe desafia e intriga. Trabalhar em grupos com o mesmo objetivo estimula a troca de ideias e a comunicação entre os diferentes métodos de pensamento e assim, os alunos vão se municiando de estratégias e pensamentos que podem ser empregadas em diversas situações problemas que desejam resolver.

Para alcançar os objetivos dentro da proposta da RP, Dante (2009) recomenda algumas mudanças durante os processos metodológicos, como propor problemas adequados, mudanças

[2] NOLLER, R. B. *Mentoring: a voice scarf – An experience in creative problem solving.* Buffalo, NY: Bearly Limited, 1982.
[3] RENZULLI, J. S. “What makes a problem real: stalking the illusive meaning of quantitative differences in gifted education”, *Gifted Child Quarterly*, 26, p. 147-156, 1982.

nos métodos de ensino em sala de aula, e destaca também o enfoque nos métodos de resolução de problemas propostos por Polya (destacados na seção anterior desse capítulo). Os métodos propostos por Polya (2006) e Dante (2009) assemelham-se principalmente nas características da atuação do professor em sala de aula, seu papel como incentivador e motivador da construção dos conceitos e estratégias, bem como no foco em fazer do aluno o protagonista dos processos de ensino e aprendizagem. Na próxima seção, abordaremos os métodos sugeridos por Dante (2009), destacando suas principais características, sendo esses os princípios norteadores das aplicações das atividades em nossa pesquisa.

3.2.2 Sugestões metodológicas de Dante para trabalhar a Resolução de Problemas.

Para o trabalho em sala de aula, Dante (2009) ressalta a importância da atuação do professor no andamento do processo que se dá desde o planejamento das aulas e das atividades, como também durante o processo de aprendizado, participando e mediando as diversas situações que podem ocorrer durante o desenvolvimento das atividades.

Um fato relevante para a aplicação da RP em sala de aula é que o professor precisa saber reconhecer o que é um bom problema para trabalhar, e saber a distinção que existe entre problema e exercício. Embora um seja diferente do outro, eles são complementares, de modo algum excluem a importância de se trabalhar com ambos, portanto, cabe também ao professor saber como equilibrar durante o ano letivo a quantidade de exercícios e de problemas que serão propostos.

Exercício é uma ferramenta para o aluno exercitar e/ou praticar a aplicação de algum algoritmo que lhe é conhecido, basta ao aluno ler o exercício e extrair as informações necessárias para a aplicação da resolução. Tem o intuito de melhorar a capacidade técnica de cálculo e raciocínio. A situação problema segundo Dante (2009, p. 48) “... é a descrição de uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução”. Ela exige daquele que se propõe a resolvê-lo capacidade de investigação, de levantamento de hipóteses, criatividade, além de conhecimentos de estratégias. O professor deve então planejar a sua metodologia distinguindo claramente esses dois conceitos, de modo que um venha a complementar o outro, favorecendo o melhor aprendizado do aluno.

Dentro da metodologia da RP, o professor também deve preocupar-se em propor exercícios que sejam adequados aos objetivos (citados na seção anterior), de modo que exija do aluno que ele demonstre conhecimento sobre aquele algoritmo utilizado e da solução apresentada. Dante (2009) sugere que exercícios de verdadeiro ou falso, por exemplo, possam ser substituídos por exercícios em que o aluno deva citar exemplos de elementos que satisfaçam as condições impostas no exercício. Quanto ao problema, para ser adequado, Dante (2009) sugere que ele precisa ter algumas características, que ele classifica como necessárias para se ter um "bom problema". O problema precisa ser desafiador para o aluno, ser real e de seu interesse, o elemento desconhecido do problema precisa ser realmente desconhecido, não consistir em uma aplicação evidente de uma ou mais operações e ter um nível adequado de dificuldade. O professor mais uma vez é o agente de maior importância nesse processo, afinal é ele o responsável por perceber e verificar se o problema que será proposto em sala atende a essas características.

Quanto à apresentação dos problemas em sala de aula, o professor precisa estar atento e preparado para contornar situações que dificultam o andamento dos processos de ensino e aprendizagem. Deve observar se o enunciado utiliza uma linguagem correta, porém correspondente ao nível de compreensão de seus alunos conforme a faixa etária, se as frases são bem colocadas, se os dados relevantes apresentam-se de modo claro e organizado, se não há problemas com o vocabulário matemático e se esse está no nível adequado para a turma, se o número de condições a serem satisfeitas no problema é adequado para aquela aula específica e, se as operações envolvidas estão de acordo com o nível da turma. Desse modo, é evidente que a metodologia da RP exige do professor uma reorganização de suas práticas pedagógicas.

Tendo em vista de que é necessária uma orientação para melhorar a prática pedagógica e didática dos professores, para adaptar sua metodologia de ensino de modo que atenda aos objetivos propostos na RP, Dante (2009) dá algumas sugestões aos professores de como proceder em sala de aula, sugestões essas que são norteadoras de nossa pesquisa. Primeiramente o professor precisa estar disposto a mudar o seu método de ensino, afinal, ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais complexa do que ensinar a aplicar algoritmos e equações, ou simplesmente fazer com que os alunos repitam métodos de resolução próprios do professor. Não se pode esquecer que uma das razões de se ensinar matemática desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, é incentivar a formação de cidadãos que saibam lidar com problemas que envolvam conceitos matemáticos. O professor deve atuar como um incentivador, incitando os alunos a buscarem por si só as ideias necessárias para desenvolver a resolução de um problema, e também como um moderador, atento aos momentos em que os alunos estão desviando dos objetivos e tomando caminhos que não os levarão a um resultado satisfatório, tomando o cuidado de não levá-los a solução, mas sim de guiar as ideias que poderão auxiliar a chegar ao resultado. Desse modo, os alunos tornam-se protagonistas dos processos de ensino e aprendizagem, e o professor desempenha o papel de manter os alunos pensando e produzindo boas ideias, ou seja, construindo conhecimento.

Dentro da proposta da RP o professor deve privilegiar o envolvimento dos alunos com a construção do conhecimento e com o objetivo proposto para as aulas, sendo assim, deve desenvolver estratégias para trabalhar com toda a classe. Dante (2009) sugere que o professor proponha aos alunos um problema desafiador e interessante, dando aos alunos o tempo necessário para a leitura e compreensão do enunciado, incite o debate entre os alunos fazendo-lhes perguntas visando esclarecer os dados e as condições do problema, afinal, compreender o texto é uma das maiores dificuldades dos alunos para resolver problemas, sendo essa uma questão interdisciplinar.

Em seguida os alunos precisam ter tempo suficiente para tentar encontrar a resolução do problema, para formularem suas hipóteses e testarem os métodos que acreditam serem corretos. Ao professor cabe incentivar os alunos a buscarem a solução, investigar se os métodos correspondem com o que é pedido no problema. Também deve estar atento a ajudar os alunos dirimindo suas dúvidas, pois é nessa fase que os alunos fazem mais questionamentos. As respostas do professor não devem ser diretas, pois o objetivo é fazer com que o aluno resolva o problema, mas sim, devem incitar o aluno a discutir as ideias com seus colegas, a repensar e revisar o enunciado. Desse modo, os alunos continuarão envolvidos com a resolução do problema, tornando-se mais independentes.

Durante o processo de desenvolvimento da solução do problema proposto, o professor deve circular em sala entre as carteiras, relembrando os dados do enunciado, dando dicas aos alunos (com cuidado para não dar respostas diretas), perguntando se os alunos já pensaram por um caminho ou outro para resolução.

Ao término das resoluções o professor precisa fazer com os alunos a verificação dos resultados, fazendo registros na lousa (se preferir pode chamar os próprios alunos para fazê-los), discutindo e analisando todas as diferentes soluções apresentadas, inclusive as erradas. Aqui professor e alunos se certificarão de que há diversas maneiras de resolver o mesmo problema. Dante (2009) sugere que o professor peça aos alunos que registrem em seus cadernos os diferentes métodos de resolução apresentados, pois tais métodos podem ser importantes para trazer ideias e estratégias para a resolução de outros problemas futuros.

O processo de resolução do problema não finda quando os alunos encontraram uma solução para ele, mas sim quando o aluno tem ciência do que fez, como fez e por que sua estratégia deu certo. Segundo Dante (2009), essa parte se dá na etapa de verificação, o retrospecto. Nessa etapa o professor deve instigar os alunos perguntando-lhes por que eles acreditam que resolveram o problema de maneira correta, por que adotaram o método que adotaram, e por fim, fazer a verificação com os alunos de qual é realmente a resposta correta para a pergunta do problema.

Uma estratégia viável que o professor pode adotar para fazer funcionar os métodos relatados anteriormente é dividir a sala em pequenos grupos, com um número adequado de alunos em cada grupo (Dante sugere de três a quatro alunos), de modo que a atuação do professor deve ser a mesma já relatada. Fazendo dessa maneira, haverá uma integração mais fácil entre os alunos, e ao professor compete auxiliar os alunos naquilo que for necessário, sem ensinar aquilo que os alunos podem descobrir por si próprios. A verificação do resultado pode ser apresentada por um representante de cada equipe e a discussão deve ser aberta entre as equipes sobre os diferentes métodos adotados. Dante (2009) sugere que a formação dos grupos não seja fixa, assim será privilegiado o debate entre diferentes ideias para cada aula.

É interessante também segundo Dante (2009), que o professor ensine algumas estratégias para os alunos, indicando-lhes que não existe uma única que possa levá-los ao resultado. Algumas estratégias possíveis são: tentativa e erro (desde que sejam de modo organizado), alertar o aluno sobre a possível existência de padrões que podem ser seguidos, resolver um problema mais simples, reduzindo os números e suas unidades (bem como exemplos numéricos em problemas que exigem modelação algébrica), e fazer o caminho inverso aos dados que são apresentados no problema.

A metodologia da RP implica ao professor mudanças pontuais em suas metodologias de ensino, que por vezes contradizem o que é senso comum entre professores sobre o modo correto de ensinar matemática. A RP abre diversas formas diferentes de pensar pedagogicamente que podem ser incorporadas ao cotidiano de sala de aula. Por exemplo, os alunos podem criar seus próprios enunciados para um problema, motivando-as a ler, compreender e resolver problemas que são seus ou de seus colegas de classe, bem como solicitar aos alunos que formulem um problema dando a eles a resposta desejada. Deve-se também oportunizar os alunos a terem acesso a materiais manipulativos (jogos, blocos, palitos, etc.), auxiliando-os a contextualizar um problema matemático. Ainda a respeito das mudanças nas metodologias, o professor não pode proteger o aluno de cometer erros, pois na percepção de um erro, o aluno pode construir uma compreensão melhor daquilo que deveria ser feito, sendo assim, não devemos privar os alunos de cometer erros, mas sim, incentivá-los a identificar e corrigir esses erros.

Por fim, o professor precisa entender que construir continuamente a ideia de que a Resolução de Problemas não é uma atividade isolada de seu planejamento, mas sim, que ela deve ser parte integrante do currículo, planejada para ser constantemente aplicada em sala. Ela não deve se constituir de experiências repetitivas, aplicando-se continuamente problemas similares que exigem as mesmas estratégias, ela precisa ser planejada de modo que se utilizem estratégias similares para resolução de diferentes problemas, mas também que se aplique diferentes estratégias para a resolução de um mesmo problema. Desse modo, estaremos auxiliando os alunos a tomarem ações mais eficazes em problemas futuros, afinal, o aluno terá em seu cotidiano a necessidade de resolver diversos problemas, então ele precisa estar preparado para enfrentar os diversos desafios que lhe exigirão esforço e dedicação, sendo compensados por reconhecerem o valor que existe na investigação e descoberta, pois o empenho e dedicação já lhes rendem um grande aprendizado.

4. REFERENCIAL TEÓRICO MATEMÁTICO

Neste capítulo vamos discorrer sobre algumas definições matemáticas que serviram como fundamentação teórica para essa pesquisa, exibindo alguns tópicos de Geometria Analítica e de Cálculo Diferencial. Apresentaremos definições, resultados pertinentes e suas respectivas demonstrações, estabelecendo relações entre os conceitos de ponto, reta, equação de uma reta e coeficiente angular ou inclinação, pois, esses tópicos foram explorados durante o desenvolvimento e aplicação da sequência didática utilizada nessa pesquisa. Utilizaremos os conceitos de Geometria Analítica para abordar a definição e alguns conceitos de derivadas, bem como a aplicação desse conteúdo na Física, como, por exemplo, no conceito de velocidade e aceleração instantânea.

As definições e demonstrações apresentadas neste capítulo são provenientes de consulta em livros de Matemática do Ensino Médio e em livros de Cálculo Diferencial e Integral I, conforme listados a seguir.

a) A Matemática do Ensino Médio – vol. 3 (LIMA et al., 2006).

b) Matemática, Contexto e Aplicações – vol. 3 (DANTE, 2016).

c) Matemática – Paiva, vol. 3 (PAIVA, 2010).

d) Geometria Analítica, coleção PROFMAT (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

e) Geometria, coleção PROFMAT (MUNIZ NETO, 2013).

f) Números e funções reais, coleção PROFMAT (LIMA, 2013).

g) Lições de Geometria Plana (CASTRUCCI, 1976).

h) Cálculo com Geometria Analítica (SWOKOWSKI, 1994).

i) Cálculo, volume 1 (STEWART, 2016).

j) Um Curso de Cálculo (GUIDORIZZI, 2013).

k) Cálculo A (FLEMMING; GONÇALVES, 2006).

l) Cálculo, volume 1 (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

m) Física I – Mecânica (YOUNG; FREEDMAN, 2008).

4.1 GEOMETRIA ANALÍTICA – ESTUDO DAS RETAS

Nessa seção abordaremos os conteúdos de Geometria Analítica que foram utilizados como fundamentação de nossa pesquisa, bem como seus conceitos primitivos que definem o que se aplica hoje durante o curso do Ensino Médio.

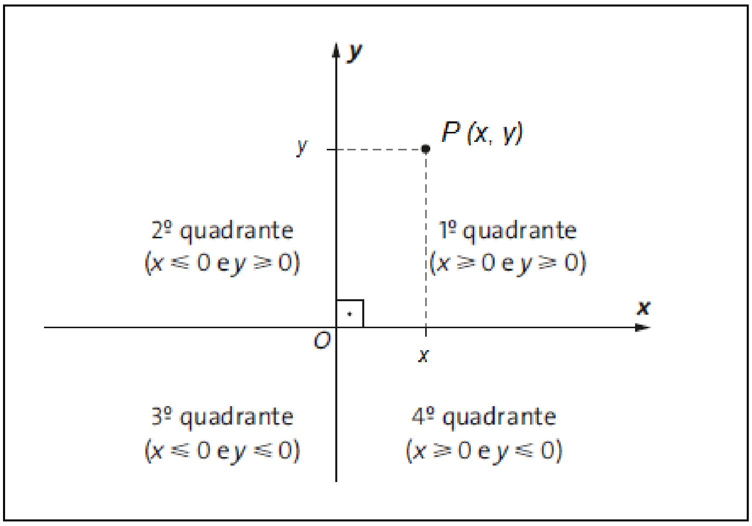
Definiremos o que é um sistema de coordenadas cartesianas, a ideia de ponto no plano, a definição de reta e sua construção no sistema de coordenadas, a definição de coeficiente angular da reta e posições relativas entre duas retas no plano.

4.1.1 Coordenadas no plano

Um *sistema de coordenadas* (cartesianas), no plano Π é um par de eixos perpendiculares de mesma origem O, denominados OX e OY (geralmente horizontal e vertical respectivamente), sendo OX denominado eixo das abscissas e OY eixo das ordenadas. Esse sistema de coordenadas divide o plano Π em quatro regiões congruentes denominadas quadrantes e será tratado aqui como sistema OXY.

Dado $P \in \Pi$, então P será relacionado com um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, em que x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX que passa por P e y é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OY que passa por P. Assim, x será a abscissa e y a ordenada do ponto P, ou seja, (x, y) é o par ordenado que corresponde ao ponto P. A Figura 11 ilustra um sistema OXY e um ponto pertencente a ele.

Figura 11 - Sistema de coordenadas OXY



Fonte: Dante, 2016, p. 52.

Os números reais x e y do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são as coordenadas cartesianas ponto P. O ponto O, origem do sistema de coordenadas, tem abscissa e ordenada ambas iguais a zero. Sendo assim, o par ordenado $(0, 0)$ corresponde ao ponto O. A utilização de coordenadas no plano tem como propósito atribuir um significado geométrico a fatos de natureza numérica, como por exemplo, o comportamento de uma função real. Também se propõe a ser um ferramental para a resolução de problemas de Geometria, sendo esse o principal objetivo da Geometria Analítica. Para se estabelecer os fatos iniciais da Geometria Analítica, usam-se os conceitos básicos da Geometria Euclidiana. A princípio o plano Π, cujos elementos são pontos, não possui o mesmo significado que o conjunto $\mathbb{R}^2$, cujos elementos são pares ordenados de números reais, mas, fixada uma correspondência $\Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$, identificando cada ponto P do plano com o par ordenado (x, y), dizemos que $P\ (x, y)$ é o ponto do plano cuja abscissa é x e a ordenada é y.

4.1.2 A reta

Vamos abordar o conceito de reta por meio de propriedades intuitivas, que são conhecidas por experiência. Antes vamos relembrar dos dois primeiros postulados de Euclides:

1º Por dois pontos do plano passa uma única reta;

2º Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em ambas as direções.

Os postulados de Euclides são base da construção da geometria que aprendemos e aplicamos nos estudos de Matemática. O conceito de reta não é definido, mas sim, é uma ideia ou propriedade intuitiva (postulado ou axioma) não demonstrada. Em toda reta há infinitos pontos (ou tantos quantos quisermos) e, dois pontos são suficientes para determinar uma reta.

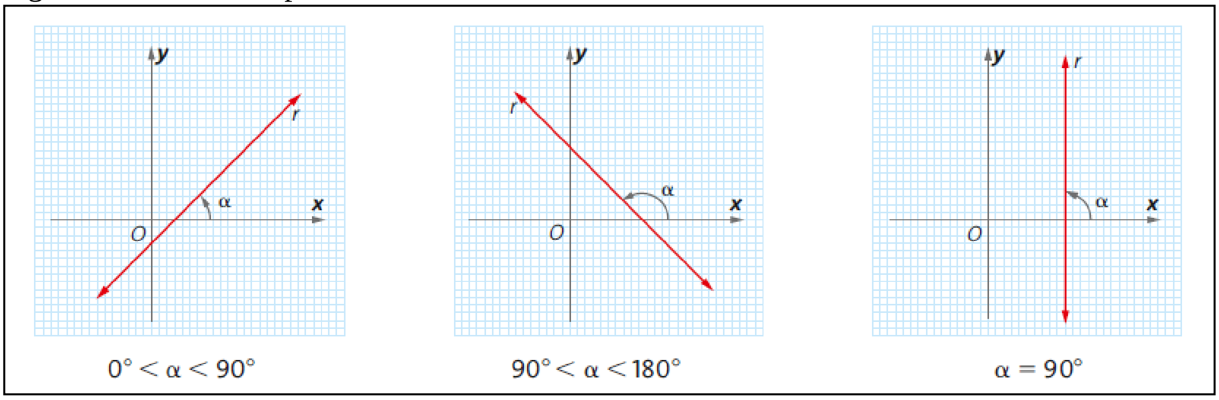
Desse modo, assumiremos que a reta é um conjunto de pontos. Como o plano contém todos os pontos, assumiremos também que há pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta. Dados um ponto P pertencente ao plano e uma reta r, apenas duas possibilidades se verificam: ou o ponto P pertence a reta r (está sobre ela), ou ele não pertence.

Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, de modo a relacionar a Geometria e a Álgebra. Sendo assim, é possível representar retas pertencentes ao *sistema OXY* por meio de equações, conhecendo-se um ponto que encontra-se sobre a reta, e um ponto genérico P de coordenadas (x, y) do plano. Há três tipos principais de equações que definem retas no sistema OXY, chamadas de “equação geral”, “equação reduzida” e “equação paramétrica”. Antes de obtermos expressões que definem equações de uma reta no sistema OXY, abordaremos o conceito de inclinação e coeficiente angular de uma reta, desse modo, não precisaremos recorrer a ideia de função para definir o que queremos.

4.1.3 A inclinação e coeficiente angular da reta

Seja r uma reta no plano Π que contém o sistema de coordenadas OXY, de modo que r intercepta o eixo OX em um ponto P, formando com esse eixo um ângulo de medida α, considerada do eixo OX para a reta r no sentido anti-horário. Essa medida α é denominada **inclinação da reta**. A Figura 12 mostra três situações que podemos ter, caso a reta r não seja paralela ao eixo OX.

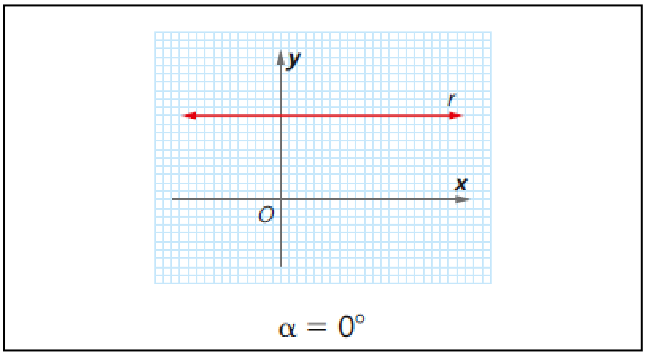
Figura 12 - Retas não paralelas ao eixo OX



Fonte: Dante, 2016, p. 100.

Se r é uma reta paralela ao eixo OX, então sua inclinação α será igual a zero, como mostra a Figura 13.

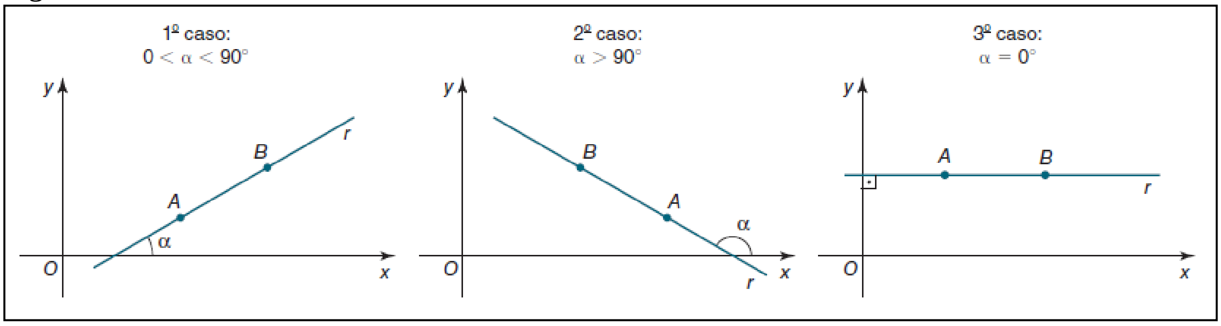
Figura 13 - Reta paralela ao eixo OX



Fonte: Dante, 2016, p. 100.

Consideremos então uma reta r de inclinação α em relação ao eixo OX, não perpendicular a esse eixo. Sejam A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) pontos distintos pertencentes a reta r. A Figura 14 mostra três casos possíveis para essa hipótese.

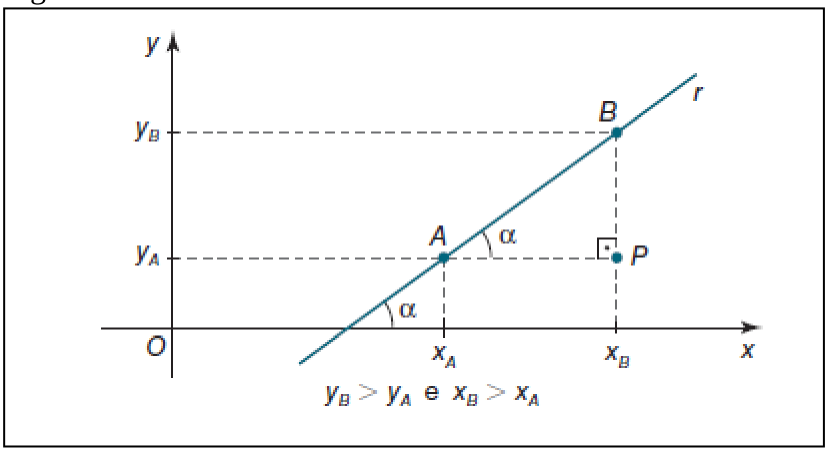
Figura 14 - Pontos distintos A e B sobre a reta r



Fonte: Paiva, 2010, p. 67.

Vamos supor sem perda de generalidade, os pontos indicados nas posições destacadas na Figura 14. No 1º caso, tracemos por A e B, retas paralelas aos eixos OX e OY respectivamente, obtendo assim o triângulo APB, como mostra a Figura 15. Note que, $med\left(B\hat{A}P\right) = \alpha$.

Figura 15 - Triângulo APB



Fonte: Paiva 2010, p. 67.

Do triângulo APB, temos:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan \propto$$

O número m, chamado de **coeficiente angular da reta r**, é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta.

Portanto m expressa a tangente trigonométrica do ângulo α.

$$m = \tan \propto$$

Para os casos mostrados na Figura 14, o coeficiente angular m será positivo no 1º caso, negativo no 2º caso e nulo no 3º caso, basta verificar que $\tan \propto > 0$ se $\propto$ pertence ao primeiro quadrante, $\tan \propto < 0$ se $\propto$ pertence ao segundo quadrante e $\tan \propto = 0$ se $\propto = 0°$.

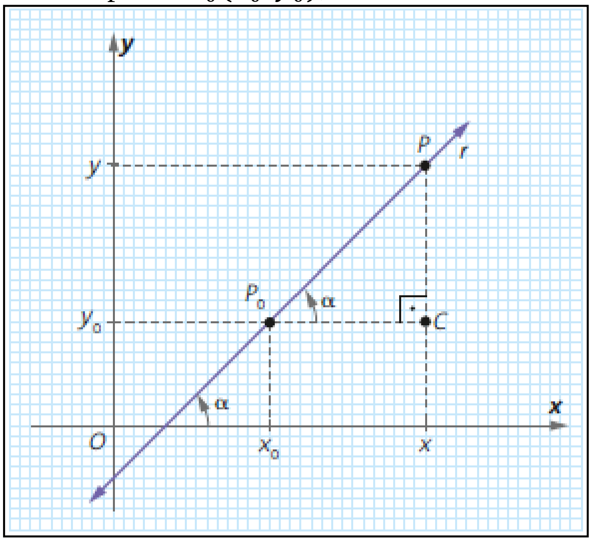
4.1.4 As equações da reta

Escolhido o sistema de coordenadas OXY no plano, as curvas nesse plano podem ser representadas por equações. A equação de uma curva é uma igualdade que envolve as variáveis x e y, que é satisfeita se, e somente se, o ponto $P\ (x, y)$ pertence à curva. Abordaremos aqui três tipos de equação que se satisfeitas, expressam o conjunto de pontos que formam uma reta.

4.1.4.1 A equação fundamental da reta

Antes de abordarmos as três representações diferentes que se podem utilizar para determinar uma reta, estabeleceremos uma relação baseada no axioma Euclidiano de que dois pontos são suficientes para a determinação de uma reta. Seja $P_0\ (x_0, y_0)$ um ponto conhecido da reta r e seja ainda m o seu coeficiente angular. Considerando um ponto $P\ (x, y)$ um ponto genérico que pertence a reta r, utilizaremos a ideia do coeficiente angular para determinar uma equação de variáveis x e y, a partir do ponto P_0, que será chamada de **equação fundamental da reta.** A Figura 16 ilustra essa situação.

Figura 16 - Reta r contendo um ponto $P_0(x_0, y_0)$, de coordenadas conhecidas



Fonte: Dante, 2016, p. 103.

$$\tan \propto = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

Portanto, se r é uma reta não vertical que passa por $P_0\ (x_0, y_0)$, e tem coeficiente angular m, então, $y - y_0 = m(x - x_0)$ é uma equação da reta r, denominada **equação fundamental da reta**. Para efeito de nosso estudo, a equação fundamental será o ponto de partida para obtenção da equação da reta em qualquer um dos três tipos.

4.1.4.2 A equação reduzida da reta $y = mx + n$.

Como comentado anteriormente, a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, caracteriza a equação de uma reta, conhecidas as coordenadas x_0 e y_0 de um ponto pertencente a reta. Consideremos agora o ponto particular $N\ (0, n)$, que representa a intersecção da reta r com o eixo OY do sistema de coordenadas. Desse modo, pela equação fundamental da reta temos:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - n = m(x - 0)$$

$$y = mx + n$$

A equação $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que o número real m é o coeficiente angular da reta e o número real n é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo OY. O número n é denominado **coeficiente linear da reta**.

Esse modelo de equação da reta é particularmente importante, pois ele nos define o valor do coeficiente angular de uma reta r, por meio de sua equação, sem a necessidade de conhecer a inclinação da reta ou dois pontos que pertencem a ela. Ela também expressa claramente as ordenadas dos pontos que pertencem a reta em função dos valores de suas abscissas.

4.1.4.3 A equação segmentária da reta $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Consideremos agora uma reta r e dois pontos $A\ (p, 0)$ e $B\ (0, q)$ que são os pontos de intersecção da reta r com os eixos OX e OY do sistema de coordenadas OXY, respectivamente. Como conhecemos dois pontos pertencentes a reta, podemos calcular seu coeficiente angular por meio da razão trigonométrica tangente, ou seja,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{q - 0}{0 - p} \Rightarrow m = -\frac{q}{p}$$

Agora, tomando como referência o ponto B (o mesmo se verifica para o ponto A, pois ambos pertencem à r), o coeficiente angular encontrado e, a equação fundamental da reta, vem que:

$$y - y_B = m(x - x_B)$$

$$y - q = -\frac{q}{p}(x - 0)$$

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

$$\frac{q}{p}x + y = q$$

Dividindo ambos os membros por q, temos,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

A equação $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, é denominada **equação segmentária da reta**, que não passa pela origem do sistema OXY e intersecta os eixos coordenados nos pontos $(p, 0)$ e $(0, q)$. Esse modelo de equação é particularmente importante quando queremos encontrar o ponto de intersecção da reta r com os eixos OX e OY, desde que esses pontos não sejam a origem. Ele pode ser aplicado em situações em que se deseja verificar, por exemplo, o comportamento de uma função afim quando o valor da função é nulo.

4.1.4.4 A equação geral da reta $ax + by = c$

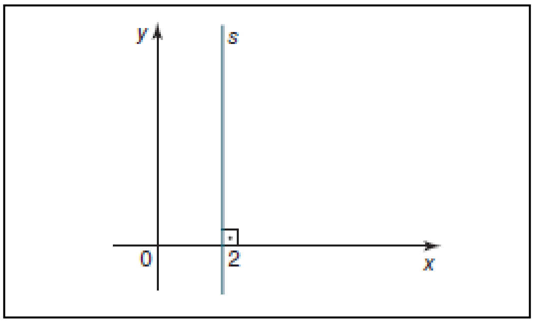
A equação $ax + by = c$ chamada de **equação geral da reta,** ou **equação cartesiana da reta,** é a equação obtida por meio de um ponto $A\,(x_o, y_0)$ pertencente a reta, e as coordenadas de um vetor $\vec{u} = (a, b) \neq \vec{0}$, de modo que $\vec{u}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{AB}$, para quaisquer pontos A e B pertencentes à r, sendo $c = ax_0 + by_0$.

Não nos prolongaremos nessa demonstração utilizando vetores, por não fazer parte de nosso objeto de estudo, desse modo, para a obtenção da equação da reta em sua forma geral, basta observar que ela pode ser obtida por meio da equação fundamental, com algumas manipulações algébricas. Toda reta do plano possui uma equação do tipo $ax + by = c$ com a e b não simultaneamente nulos.

4.1.4.5 Retas verticais

Conforme definimos anteriormente, o coeficiente angular de uma reta r no plano OXY, representa a tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo OX. Uma reta vertical (ou seja, perpendicular a OX), não possui valor para essa tangente, pois, não existe $\tan 90°$. Desse modo, a equação dessa reta não pode ser obtida por meio da equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, porém, supondo que o ponto $P(x_0, y_0)$ pertence a ela, podemos observar que essa reta será formada por todos os pontos do plano que tem abscissa igual a x_0, o que permite representá-la pela equação $x = x_0$. A Figura 17 exemplifica uma reta vertical de equação $x = 2$.

Figura 17 - Reta de equação $x = 2$



Fonte: Paiva, 2010, p. 76.

4.1.5 Retas paralelas e perpendiculares

Duas retas r_1 e r_2 no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra), conforme segue:

Sejam $r_1: ax + by = c$ e $r_2: a'x + b'y = c'$

i) **Coincidentes:** dizemos que essas retas são coincidentes quando todos os pontos de r_1 são pontos de r_2 também, ou seja, as retas são iguais.

ii) **Paralelas:** as retas são paralelas quando não se intersectam, ou seja, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$. Escrevemos $r_1 \parallel r_2$.

iii) **Concorrentes:** quando as retas se intersectam em um ponto, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$.

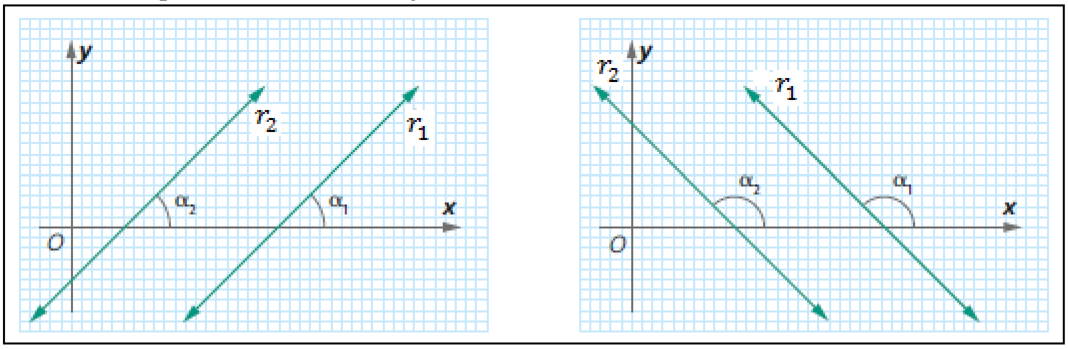
Podemos definir o caso de paralelismo entre retas por meio de seu coeficiente angular.

Sejam $\propto_1$ e $\propto_2$ as inclinações das retas r_1 e r_2 respectivamente, temos:

$$\propto_1 = \propto_2 \Leftrightarrow \tan \propto_1 = \tan \propto_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Se as inclinações das retas são iguais, segue que elas são paralelas, como ilustra a Figura 18.

Figura 18 - Retas paralelas de inclinação $\propto_1$ e $\propto_2$



Fonte: Dante, 2016, p.107.

Sendo assim temos a seguinte definição: duas retas r_1 e r_2 são **paralelas** se, e somente se, têm o mesmo coeficiente angular ou se não existem seus coeficientes angulares, e ainda, seus coeficientes lineares são diferentes.

As retas r_1 e r_2 serão **paralelas e coincidentes**, caso tenham coeficientes angulares e coeficientes lineares iguais.

Dadas duas retas $r_1: mx + n$ e $r_2: m'x + n'$, a intersecção dessas retas é o ponto $P\ (x, y)$ cujas coordenadas são solução do sistema,

$$\begin{cases} -mx + y = n \\ -m'x + y = n' \end{cases}.$$

As retas r_1 e r_2 são paralelas quando não existe um ponto $P\ (x, y)$ comum a ambas, ou seja, quando o sistema acima não possui solução. Podemos encontrar um sistema equivalente a esse subtraindo a primeira equação da segunda, assim obtemos,

$$\begin{cases} -mx + y = n \\ (m - m')x = n' - n' \end{cases}$$

que não terá solução se, e somente se, $m = m'$ e $n \neq n'$.

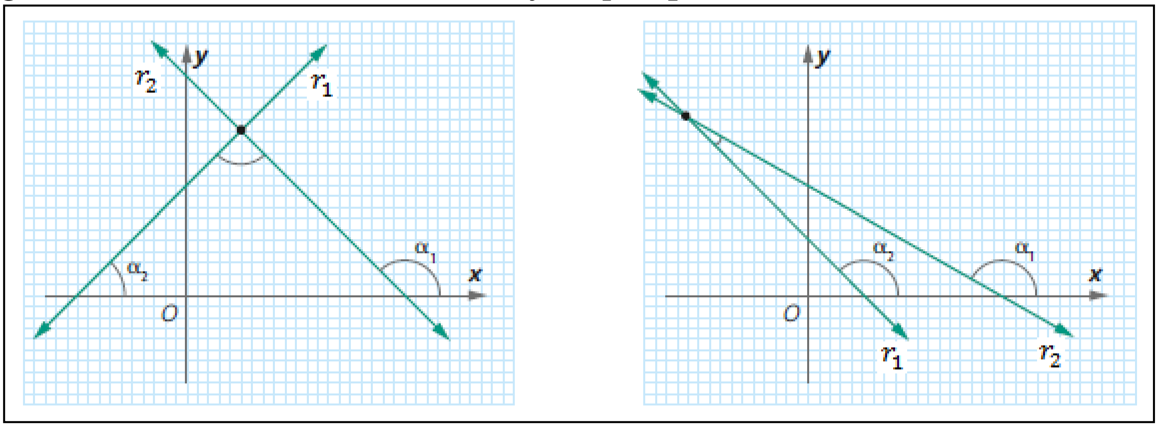
Portanto, as retas $r_1: mx + n$ e $r_2: m'x + n'$ são paralelas se, e somente se, possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja $m = m'$ e coeficientes lineares n e n' diferentes. Serão ainda paralelas coincidentes, caso os coeficientes lineares n e n' sejam iguais, pois o sistema apresentará infinitos pares (x, y) como solução, ou seja, todos os pontos $P\ (x, y)$ das retas serão coincidentes.

Duas retas do mesmo plano serão **concorrentes** quando não forem paralelas, ou seja, dadas as retas r_1 e r_2 do plano, de modo análogo ao caso anterior, temos:

$$\propto_1 \neq \propto_2 \Leftrightarrow \tan \propto_1 \neq \tan \propto_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2, \text{ com } 0° \leq \propto_1, \propto_2 \leq 180° \text{ e } \propto_1, \propto_2 \neq 90°$$

Assim, define-se que duas retas distintas e não verticais são concorrentes se, e somente se, seus coeficientes angulares são diferentes. A Figura 19 exemplifica dois casos.

Figura 19 - Retas concorrentes com inclinação $\propto_1$ e $\propto_2$

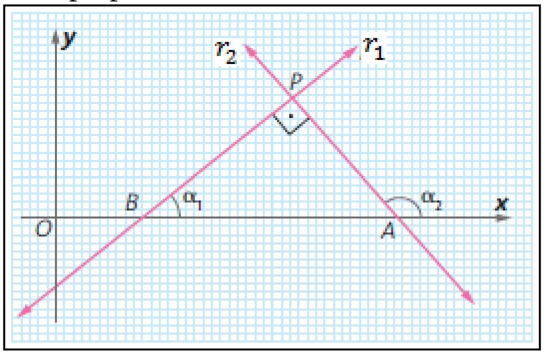


Fonte: Dante, 2016, p. 107.

O ponto de intersecção entre as retas é o ponto $P(x_0, y_0)$, de modo que x_0 e y_0 são os valores que satisfazem simultaneamente as equações de r_1 e r_2 e P é único.

Vamos considerar o caso de duas retas concorrentes perpendiculares, conforme mostra a Figura 20, que usaremos como exemplo sem perda de generalidade para outros casos.

Figura 20 - Retas concorrentes perpendiculares



Fonte: Dante, 2016, p.109.

Pela geometria plana, no triângulo APB, temos:

$$\propto_1 + 90° + B\hat{A}P = 180° \Rightarrow \propto_1 + 90° = 180° - B\hat{A}P$$

Porém,

$$\alpha_2 = 180° - B\hat{A}P$$

Donde vem,

$$\alpha_2 = \propto_1 + 90°$$

Sendo assim, temos:

$$\tan \propto_2 = \tan(\propto_1 + 90°) = \frac{\text{sen}(\propto_1 + 90°)}{\cos(\propto_1 + 90°)} = \frac{\text{sen} \propto_1 \cdot \cos 90° + \text{sen}\, 90° \cdot \cos \propto_1}{\cos \propto_1 \cdot \cos 90° - \text{sen} \propto_1 \cdot \text{sen}\, 90°}$$

Como $\text{sen}\, 90° = 1$ e $\cos 90° = 0$, vem que,

$$\tan \propto_2 = \frac{0 + \cos \propto_1}{0 - \text{sen} \propto_1} = -\frac{\cos \propto_1}{\text{sen} \propto_1} = -\frac{1}{\tan \propto_1}$$

Sendo $m_1 = \tan \propto_1$ e $m_2 = \tan \propto_2$ os coeficientes angulares das retas r_1 e r_2 respectivamente, temos que r_1 e r_2 são **perpendiculares** se, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

$$r_2 \perp r_1 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Reciprocamente pode-se provar que, dadas uma reta r_1 de coeficiente angular m_1 e uma reta r_2 de coeficiente angular m_2, se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, então as retas são perpendiculares.

Os conceitos de Geometria Analítica abordados nesta seção foram utilizados na aplicação de nossa pesquisa e serviram de pré-requisito para as construções que serão detalhadas na próxima seção.

4.2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL – RETAS SECANTES, RETAS TANGENTES E DERIVADAS

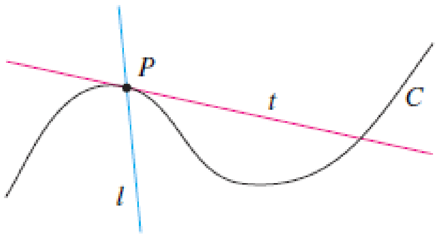
Nesta seção utilizaremos os conteúdos apresentados na seção anterior para construir os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI 1), que segundo defendemos nessa pesquisa, podem ser trabalhados durante o Ensino Médio.

Abordaremos aqui a maneira de determinar uma reta tangente a uma curva por meio da aproximação de retas secantes, a relação que existe entre o coeficiente angular da reta tangente e a derivada, formalizaremos o conceito de derivada por meio de limites e abordaremos algumas aplicações da derivada na Física, trazendo a ideia de velocidade e aceleração instantânea.

4.2.1 O problema da tangente

Considere uma curva de equação $y = f(x)$, como determinar a equação de uma reta tangente, t, à curva no ponto $P\ (x_0, y_0)$ pertencente a essa curva? A palavra tangente vem do latim *tangens*, que significa "tocando". Desse modo, define-se tangente à uma curva como a reta que toca a curva. Sendo assim, a tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. Mas é difícil tornarmos essa ideia precisa, pois, conforme Stewart (2016), diferente do que ocorre com a definição dada por Euclides "a reta tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez", para alguns tipos de curvas essa definição é inadequada, como ilustra a Figura 21.

Figura 21 - Exemplos de retas tangentes a uma curva

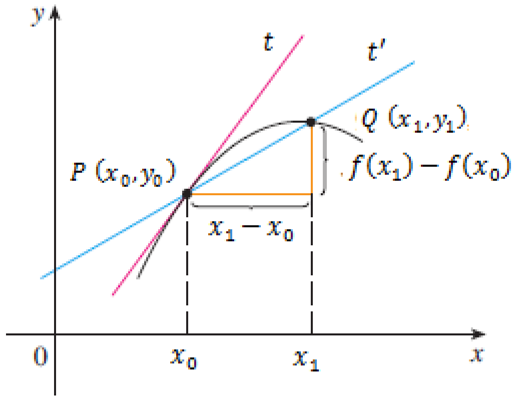


Fonte: Stewart, 2016, p. 66.

Na Figura 21, podemos perceber que as retas l e t obedecem a ideia de que passam por um ponto P pertencente à curva, porém a reta t a intercepta em um outro ponto e a reta l não apresenta as características do que temos como ideia de uma tangente. No decorrer dessa seção, abordaremos um pouco melhor essa definição de reta tangente.

Para determinar a equação da reta tangente a uma curva pela equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, precisamos conhecer a inclinação dessa reta, além do ponto de tangência, porém, ao menos que o ângulo de inclinação nos seja dado, não há como sabermos o coeficiente angular sem conhecermos dois pontos pertencentes a reta t. Tomemos então um ponto $Q\ (x_1, y_1)$, que se encontra sobre a curva $y = f(x)$ (ou seja, $y_1 = f(x_1)$) e consideremos a reta t' que passa por P e Q. A reta t' é chamada de **secante** à curva $y = f(x)$. A Figura 22 nos mostra exemplos das retas t e t'.

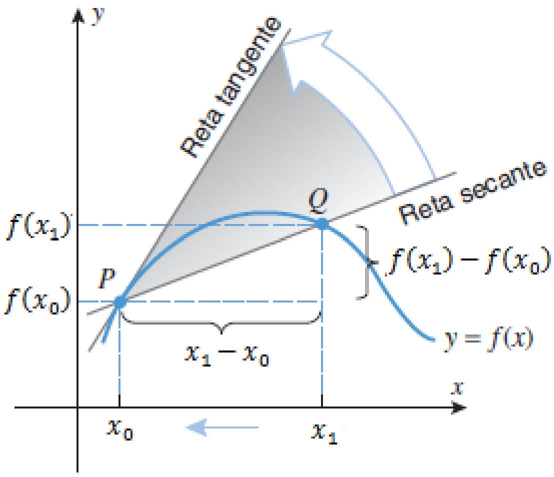
Figura 22 - Reta tangente t e reta secante t'



Fonte: Stewart, 2016, p. XXXI.

Se o ponto Q está próximo de P, é natural intuirmos que o coeficiente angular m_{PQ} da reta secante seja uma aproximação do coeficiente angular m da reta t procurada. Além disso, é natural também que conforme o ponto Q encontra-se cada vez mais próximo de P (ou "tende" a ser coincidente com P), a aproximação dos coeficientes angulares fique cada vez melhor. Desse modo, podemos contornar o problema da reta tangente determinando uma aproximação para o coeficiente angular m, tomando sobre a curva um ponto Q muito próximo de P e calculando o coeficiente angular m_{PQ}. Mas $Q \neq P$, sendo assim, devemos tomar Q tanto a direita quanto a esquerda de P. Se para os dois casos, o coeficiente angular m_{PQ} aproxima-se do mesmo valor, temos então como intuir qual o coeficiente angular m da reta tangente t. A Figura 23 nos dá uma ideia da aproximação de Q para P pela direita.

Figura 23 - Aproximação de Q e P pela direita



Fonte: Anton, 2014, p. 132.

Considere por exemplo o caso de determinarmos a equação de uma reta tangente a curva $y = x^2$, no ponto $P\,(1, 1)$. Utilizando a ideia supracitada, vamos determinar o coeficiente angular de retas secantes a essa curva, passando por P, e por um ponto Q pertencente à curva, fazendo com que esse ponto Q se aproxime cada vez mais do ponto P, tanto pela esquerda, quanto pela direita. A Tabela 1 apresenta os valores desses coeficientes angulares, de acordo com os valores das abscissas de Q.

Tabela 1 - Coeficientes angulares de retas secantes à curva $y = x^2$

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
0,999	1,999
0,99	1,99
0,9	1,9
0,5	1,5
0	1

Fonte: Produção do autor, 2019.

Podemos observar na Tabela 1 que quanto mais o valor da abscissa de Q se aproxima de 1, ou seja, quanto mais próximos estão os pontos P e Q, mais o coeficiente angular da reta secante que passa por P e Q aproxima-se do valor 2. Como isso acontece pelos dois lados do ponto, podemos intuitivamente concluir que o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto P será $m = 2$. Sendo assim, aplicando a equação fundamental da reta, encontramos facilmente a equação da reta solicitada, como segue:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$

Generalizando o resultado obtido nesse exemplo, podemos determinar a posição de uma reta tangente a uma parábola em um ponto dado, pelo seguinte teorema: "*Se a parábola é o gráfico da função* $y = ax^2 + bx + c$, *sua tangente no ponto* $P\,(x_0, y_0)$, *onde* $y_0 = ax_0^2 +$

$bx_0 + c$, é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a $2ax_0 + b$" (LIMA, 2013, p. XXX).

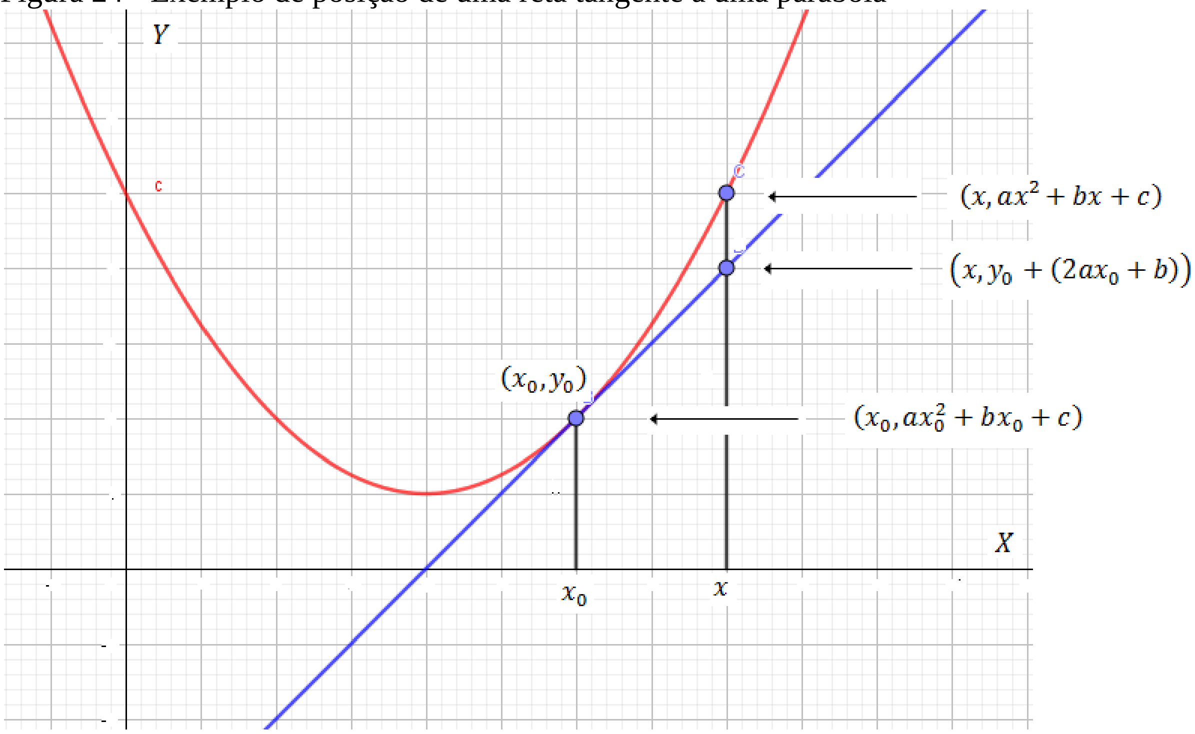
Vamos provar esse teorema mostrando que todos os pontos dessa parábola que têm abscissa diferente de x_0, não pertencem a reta tangente mencionada e se encontram no mesmo semi plano determinado por essa reta.

Suponha sem perda de generalidade que $a > 0$. Vamos mostrar que para todo $x \neq x_0$, o ponto $P\,(x, y)$ da parábola, com $y = ax^2 + bx + c$ situa-se acima do ponto $\big(x, y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)\big)$ de mesma abscissa x, situado sobre a reta. Isto é, queremos provar que, supondo $a > 0$,

$$x \neq x_0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c > ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

A Figura 24 ilustra um exemplo dessa situação.

Figura 24 - Exemplo de posição de uma reta tangente a uma parábola



Fonte: Produção do autor, 2019.

Para provar isto, basta notar que,

$$x \neq x_0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)] = a(x - x_0)^2 > 0$$

Isto mostra que a reta de inclinação $2ax_0 + b$, que passa por $P\,(x_0, y_0)$, com $y_0 = f(x_0)$ tem somente P como ponto comum com a parábola, e que todos os pontos dessa parábola estão acima dessa reta. Logo, esta reta é tangente a parábola no ponto P. Quando $a > 0$, a parábola se situa acima de qualquer de suas tangentes (Figura 19), e quando $a < 0$, então a parábola se situa abaixo de todas as suas tangentes.

Cabe observar que toda reta paralela ao eixo de uma parábola tem somente um ponto em comum com essa parábola, porém ela não é tangente, pois existem pontos da parábola em ambos os semi planos determinados por esses tipos de retas.

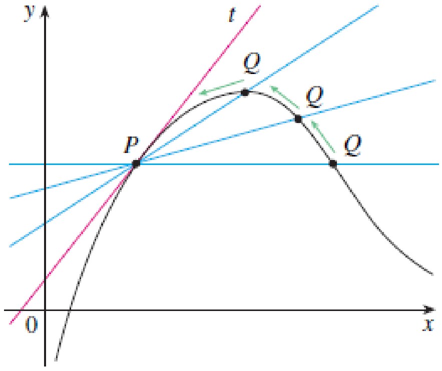
4.2.2 O coeficiente angular da reta tangente a uma curva

Vamos reformular a ideia da seção anterior com maior rigor e precisão, em termos de uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tomemos a curva $\mathcal{C}$ que é o gráfico da função $y = f(x)$. Deseja-se determinar o coeficiente angular da reta tangente a $\mathcal{C}$ em um ponto $P\ (a, f(a))$. Para isso, vamos considerar as retas secantes a $\mathcal{C}$ que passam pelo ponto P e por um ponto genérico $Q\ (x, f(x))$ pertencente a curva, sendo $x \neq a$. O coeficiente angular da reta secante será dado por:

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Se a função f for contínua em a, podemos fazer com que o ponto Q percorra a curva de modo que x esteja muito próximo de a, o tanto quanto desejarmos. Dizemos nesse caso que estamos fazendo x tender a a. Se o coeficiente angular $m_{\overleftrightarrow{PQ}}$ da reta secante à curva se aproximar de um valor m conforme x se aproxima de a, então definimos a reta *tangente* t, como sendo a reta que passa por P e tem o coeficiente angular m. Isso implica dizer que a reta tangente t é a posição limite da reta tangente $\overleftrightarrow{PQ}$, quando é possível fazer Q tender a P. A Figura 25 nos ilustra esse fato.

Figura 25 - Aproximação da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ à tangente t



Fonte: Stewart, 2016, p. 122.

Isso motiva a seguinte definição: a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P\ (a, f(a))$ sendo a função f contínua em $x = a$, é a reta que passa por P e tem coeficiente angular

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Em alguns casos é conveniente usar uma forma alternativa para determinar o coeficiente angular m da reta tangente, passando da variável x para a variável h, tomando $x = a + h$ em que h é um incremento sobre o valor de x, e queremos que esse incremento seja tão próximo de zero quanto se queira. Desse modo, o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ será determinado por:

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Sendo assim, quando x tende para a, o valor de h tende a zero, o que implica que o coeficiente angular da reta t, tangente a curva $y = f(x)$ será dado por:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Não abordaremos em nosso estudo as definições formais de limite e condições de existência, embora esses conceitos estejam ligados as definições citadas, essa formalização não fez parte de nossa pesquisa com os alunos, desse modo, assumiremos como conhecidas essas definições pelos leitores e por professores. Com os alunos participantes de nossa pesquisa, abordaremos uma ideia intuitiva de limite, na manipulação algébrica do coeficiente angular da reta secante para simplificar a indeterminação e após isso, considerar o incremento $h = 0$. Os livros citados como referência no início desse capítulo servem como sugestões de leitura para aprofundamento nesse assunto.

4.2.3 A taxa de variação e a derivada de uma função

Suponha que em certa situação uma quantidade y depende de uma outra quantidade x (por exemplo, a distância percorrida dependendo do tempo ou preço de certo produto dependendo da quantidade comprada desse produto). Sendo assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Suponha que x varie de um valor x_1 para um valor x_2 (chamado de incremento de x), e denotado por Δx, ou seja,

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e isso implica que a variação em y, a qual denotamos por Δy, será:

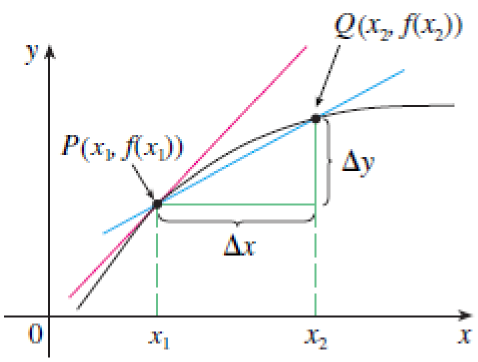
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente dessas diferenças,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

é denominado **taxa de variação média de y em relação a x**, no intervalo $[x_1, x_2]$ e geometricamente, pode ser interpretado como o coeficiente angular da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ que passa pelos pontos $P\big(x_1,\ f(x_1)\big)$ e $Q\big(x_2,\ f(x_2)\big)$, como mostra a Figura 26.

Figura 26 - Taxa de variação média



Fonte: Stewart, 2016, p. 125.

Consideremos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores, fazendo com que x_2 esteja tão próximo quanto se queira de x_1, fazendo com que Δx tenda a zero. O limite dessas taxas médias de variação é chamado de **taxa de variação instantânea de y em relação a x,** em $x = x_1$, a qual é geometricamente interpretada como o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P\ \big(x_1, f(x_1)\big)$. Desse modo, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Reconhecemos esse limite como o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$, no ponto $P\big(x_1, f(x_1)\big)$.

Limites como esse surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em qualquer ramo das ciências ou engenharia (como velocidade de um objeto por exemplo), e como esse limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notações específicas e é chamado de **derivada da função.**

<u>Definição:</u> A derivada de uma função $\boldsymbol{f}$ em um número $\boldsymbol{a}$, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Tomando $x = a + h$, então $h = x - a$ tende a zero, e assim podemos convenientemente escrever,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

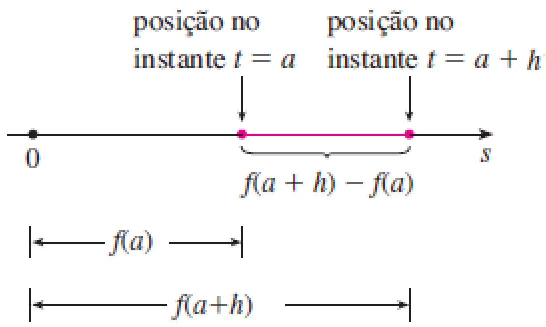
De modo geral, podemos definir a derivada de uma função $y = f(x)$, em um dado ponto $P\big(a, f(a)\big)$ como o coeficiente angular da reta tangente a essa curva, no ponto P.

4.2.4 Velocidades (média e instantânea)

Nesta seção abordaremos os conceitos de derivadas para descrever tipos de movimentos que acontecem em situações físicas.

Recordemos que se um ponto P se move ao longo de uma reta r de acordo com a equação $s = f(t)$, sendo s o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t, seu movimento é retilíneo. A função f que descreve o movimento é chamada de **função de posição** do objeto. Se r é uma reta ordenada, no intervalo de tempo $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição será $f(a + h) - f(a)$. A Figura 27 ilustra esse fato.

Figura 27 - Variação da posição de um objeto sobre uma reta r



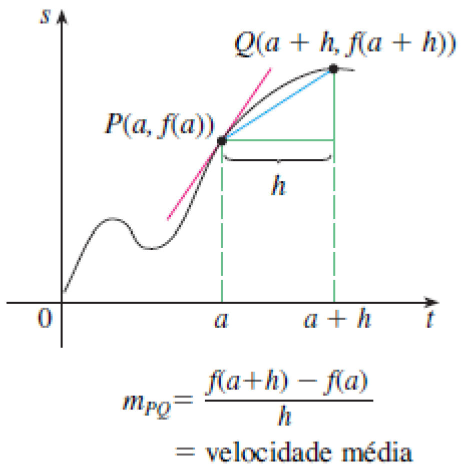
Fonte: Stewart, 2016, p. 123.

A velocidade média nesse intervalo é dada por:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Agora, observe a Figura 28, e verifique que esse mesmo fato acontece com a reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ mostrada na figura.

Figura 28 - Variação da posição de um objeto sobre a reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$



Fonte: Stewart, 2016, p. 123.

Vamos supor que a velocidade média, como apresentado na Figura 23, seja calculada em intervalos cada vez menores, de modo que façamos h tender a zero. Assim, podemos definir que a **velocidade instantânea** $v(a)$, no instante $t = a$ é o limite dessas velocidades médias, ou seja,

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Assim, podemos dizer que a velocidade instantânea em $t = a$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva $s = f(t)$ no ponto $P\left(a, f(a)\right)$.

Em particular, se $s = f(t)$ for a função de posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento s em relação ao tempo t, isto é, $f'(a)$ é a **velocidade da partícula no instante $t = a$**. A **velocidade escalar** da partícula é o valor absoluto da velocidade, ou seja, $|f'(a)|$.

4.2.5 Aceleração (média e instantânea)

Assim como a velocidade indica uma taxa de variação da posição com o tempo, a **aceleração** descreve uma taxa de variação da velocidade com o tempo. No movimento retilíneo, a aceleração pode referir-se tanto ao aumento quanto à redução da velocidade. Vamos considerar novamente o movimento de uma partícula sobre uma reta r. Suponha que em um dado instante t a partícula esteja em um ponto P_1 e tenha uma velocidade instantânea v_1, e que em outro instante $t + h$, a partícula esteja em um ponto P_2 e possua uma velocidade instantânea v_2. De modo análogo ao da velocidade, a aceleração média no intervalo de tempo de t até $t + h$ é dada por:

$$a_m = \frac{v(t+h) - v(t)}{h}.$$

Podemos observar que ela mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo h. Sendo assim, de modo análogo ao que verificamos com a velocidade, podemos obter a aceleração da partícula no instante t, tomando sua aceleração em intervalos de tempo h cada vez menores, fazendo assim com que h tenda a zero. Portanto, a aceleração instantânea da partícula em um instante t é

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$

se o limite existir. Logo, sendo $v = v(t)$, a aceleração instantânea de uma partícula é o coeficiente angular da reta tangente à curva $v = v(t)$, no instante t, ou seja, a aceleração é a **derivada** da velocidade.

Em particular, se $v = v(t)$ for a função que determina a velocidade de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então $v'(a)$ será a taxa de variação da velocidade v em relação ao tempo t, isto é, $v'(a)$ é a **aceleração da partícula no instante $t = a$**.

4.2.6 Uma aplicação à Física estudada no Ensino Médio

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações dos conceitos de derivada para aplicação no Movimento Uniformemente Variado (MUV), que são estudados nas séries iniciais do Ensino Médio. Essas ideias não foram aplicadas em nossa pesquisa, porém trata-se de uma sugestão de extensão da sequência didática para professores interessados no aprofundamento do conteúdo por parte de seus alunos.

A aceleração escalar média de um móvel é a variação média da velocidade escalar instantânea desse móvel em um determinado intervalo de tempo t. Sabendo que a aceleração no MUV permanece constante, podemos calcular a variação do espaço de um móvel no decorrer do tempo, por meio da **função horária dos espaços** em um MUV, que é,

$$S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

em que,

- S é a posição final do móvel;
- S_0 é a posição inicial do móvel;
- V_0 é a velocidade no instante t;
- a é a aceleração escalar;
- t é o instante de tempo;

Na seção anterior, verificamos que a velocidade escalar média de uma partícula é dada pela variação do espaço (posição final e posição inicial da partícula) em um determinado intervalo de tempo. Consideremos a curva $S(t)$ e um ponto $P\left(t_0, S(t_0)\right)$ pertencente a essa curva. O coeficiente angular da reta tangente a essa curva no ponto P, determina a velocidade instantânea da partícula no instante t_0. Consideremos ainda um ponto $Q\left(t_0 + h,\ S(t_0 + h)\right)$, também pertencente à curva. Se tomarmos o incremento h cada vez mais próximo de zero, a reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ tenderá a reta tangente procurada, desse modo temos:

$$S'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t)}{h}.$$

Sabendo que na função horária dos espaços, os valores S_0 e V_0 são constantes, substituindo no limite acima, temos:

$$S^{'}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{S_0 + V_0(t+h) + \frac{a(t_0+h)^2}{2} - \left[S_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}\right]}{h}$$

$$S^{'}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{S_0 + V_0 t_0 + V_0 h + \frac{at_0^2 + 2at_0 h + ah^2}{2} - S_0 - V_0 t_0 - \frac{at_0^2}{2}}{h}$$

$$S^{'}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{V_0 h + \frac{at_0^2 + 2at_0 h + ah^2 - at_0^2}{2}}{h}$$

$$S^{'}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{2V_0 h + 2at_0 h + ah^2}{2h}$$

$$S^{'}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2V_0 + 2at_0 + ah)}{2h}$$

$$S^{'}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{2V_0 + 2at_0 + ah}{2}$$

$$S^{'}(t) = \frac{2V_0 + 2at_0}{2}$$

$$S^{'}(t) = V_0 + at_0$$

que nos dá a velocidade escalar instantânea no instante de tempo $t = t_0$.

Os professores e alunos do Ensino Médio conhecem o algoritmo obtido acima, denotando $S^{'}(t)$ como $V(t)$, nós temos a **função horária da velocidade escalar instantânea**, que também é estudada nos primeiros anos da disciplina de Física, geralmente, antes mesmo da função horária dos espaços.

$$V(t) = V_0 + at.$$

Desse modo, os professores podem abordar a velocidade escalar como a variação do espaço em função do intervalo de tempo, em que a demonstração supracitada fica como sugestão de abordagem do conteúdo para os professores.

A **aceleração escalar** também pode ser abordada por meio da ideia da variação da velocidade em função do espaço de tempo (essa ideia foi mostrada na subseção anterior), a partir da função horária da velocidade escalar instantânea, de modo análogo a demonstração anterior. Sabendo que a velocidade inicial V_0 é uma constante, e tomando a curva que representa a função $V(t)$, o coeficiente angular da reta tangente a essa curva em um ponto $P\left(t_0,\ V(t_0)\right)$, representa a aceleração escalar, que nesse caso será constante, como segue:

$$V'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{V_0 + a(t_0 + h) - [V_0 + at_0]}{h}$$

$$V'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{V_0 + at_0 + ah - V_0 - at_0}{h}$$

$$V'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h}$$

$$V'(t) = a.$$

Portanto, o professor e os alunos podem juntos discutir e concluir que a aceleração escalar trata-se da variação da velocidade em função do tempo, obtendo um resultado algébrico para isso.

A ideia, definição e conceitos que envolvem limites não fazem parte do currículo de matemática nos primeiros anos do Ensino Médio, porém, essa abordagem pode ser trabalhada normalmente, desde que o professor trabalhe a manipulação algébrica com seus alunos, de modo que deixe de existir a indeterminação. O propósito é trabalhar intuitivamente com os alunos a ideia de derivação, para isso, após o aluno conseguir sair da indeterminação, o professor pode retomar o conceito de que o incremento h precisa estar muito próximo de zero, sugerindo então que seu valor seja zero, encontrando assim as expressões desejadas. Maiores detalhes dessa abordagem podem ser conferidas no capítulo 6, que mostram os resultados da aplicação de nossa pesquisa, na qual trabalhamos por meio dessa mesma ideia.

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentaremos a sequência elaborada, no projeto de pesquisa na disciplina eletiva MA 24 – Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, para construção da ideia intuitiva de derivada, utilizando tópicos de Geometria Analítica, mais precisamente, o conceito de equação da reta e coeficiente angular. A pesquisa foi aplicada com uma turma de alunos da terceira série do Ensino Médio da escola Governador Celso Ramos, na qual atuo como professor efetivo desde 2012. Para a aplicação da atividade, foram selecionados 12 alunos de turmas diferentes que demonstravam interesse nas áreas afins de Ciências Exatas, todos eram alunos regulares da escola, e frequentavam turmas nas quais eu lecionava. As atividades foram aplicadas na própria escola, no contra turno nos meses de outubro e novembro de 2018.

A pesquisa desenvolvida nesse projeto privilegiou mais os aspectos qualitativos sobre os quantitativos, sendo assim, classificada como qualitativa. Essa abordagem de pesquisa oferece ao respondente manifestar suas opiniões e demonstrar livremente seu prévio conhecimento acerca do assunto, assim como privilegia o pesquisador a fazer perguntas que focam a compreensão de como os indivíduos experimentaram os processos de ensino e aprendizagem durante a pesquisa (MOREIRA; MASSONI, 2011). Também a observação e levantamento de dados ressaltam os aspectos qualitativos por meio da análise das questões abertas que privilegiam o emprego dos conhecimentos prévios dos alunos.

Durante a aplicação do projeto, o processo de desenvolvimento das atividades cumpriu a função principal. A análise dos resultados avaliou a compreensão das questões de pesquisa desde a interpretação, passando pelos métodos utilizados pelos respondentes para a resolução dos problemas e a eficácia dos métodos empregados.

Adotamos como principal norteador e procedimento metodológico da pesquisa e das aulas, a Didática da Resolução de Problemas (RP). Os problemas utilizados nesta pesquisa foram elaborados pelo próprio pesquisador, adaptados da tese de doutorado de Eliane Bihuna de Azevedo (AZEVEDO, 2019), e do livro Cálculo – Volume 1 de James Stewart, (STEWART, 2016). Foram necessários três encontros presenciais, para o desenvolvimento e discussão das cinco atividades propostas, que foram resolvidas em grupos, com intermediação do professor.

Quanto ao procedimento para levantamento e coleta de dados, essa pesquisa propôs uma sequência didática de questões abertas que exigiam conhecimento prévio de alguns conceitos de Geometria Analítica (o que justifica a escolha dos alunos para a aplicação da pesquisa). Corroboramos com Zabala (2007) que sequência didática é um conjunto de atividades que são ordenadas de modo a atender as necessidades dos alunos para que esses alcancem os objetivos de aprendizagem. As atividades são ordenadas e estruturadas com início e fim conhecidos por alunos e professores, para que se cumpram os objetivos estipulados no planejamento.

A sequência didática proposta nessa pesquisa é composta de cinco atividades que exigem interpretação e análise, caráter investigativo por parte dos alunos, com o objetivo de se definir intuitivamente a ideia de derivada de uma função, algumas padronizações algébricas e duas aplicações na Física.

A análise de dados se deu por meio da observação dos procedimentos e ideias adotadas pelos alunos para a resolução de cada atividade, investigando sob quais aspectos o objetivo de cada atividade foi atingido. Para tal foram recolhidas as resoluções realizadas pelas equipes e registradas em forma de relato as percepções do professor logo após a aplicação. Na apresentação e análise final dos dados, buscamos mostrar com clareza se a sequência proposta na pesquisa pode ser utilizada e/ou adaptada por outros profissionais da área de Matemática, de modo que o ensino de Cálculo possa ser introduzido já no Ensino Médio, por meio da noção intuitiva da derivada.

Como a metodologia da Didática da Resolução de Problemas (DANTE, 2009) foi adotada como principal norteador de nossa pesquisa, procuramos durante a análise dos resultados e no relato dos acontecimentos durante a aplicação da pesquisa, relacionar os fatos aos objetivos e propostas abordadas nessa metodologia. Analisamos com teor crítico se as abordagens e métodos empregados pelo pesquisador e pelos alunos estavam de acordo com a proposta.

5.1 CONTEXTO DA APLICAÇÃO

Para a aplicação do projeto, a diretora da escola assinou um termo de autorização de pesquisa (Anexo 1), autorizando o pesquisador a utilizar as dependências da escola, concordando com a divulgação e apresentação dos resultados em banca de Dissertação e publicações em eventos e revistas da área de ensino. Os pais dos alunos menores de idade assinaram um termo de consentimento (Anexo 2), de que seus filhos estariam participando da pesquisa junto ao pesquisador, autorizando o uso dos dados das resoluções das atividades e da transcrição de áudios e imagens realizadas na pesquisa para produção da Dissertação e divulgação em eventos ou revistas da área de ensino, preservando a identidade de seus filhos, sem causar qualquer tipo de constrangimento ao aluno participante. Na Figura 29 podemos ver a sala com alguns dos participantes desta pesquisa.

Figura 29 - Alunos participantes da pesquisa

Fonte: Arquivo do Autor, 2018.

A sequência foi aplicada em três encontros (seis horas/aula), os alunos trabalharam em grupos de no máximo quatro pessoas, em que resolveram as atividades em sala. Também foi proporcionada aos alunos uma atividade de pesquisa durante o primeiro encontro, em que puderam utilizar livros e a internet, disponibilizados pela escola, além de uma pesquisa que efetuaram após o primeiro encontro sobre conceitos que utilizariam nos desenvolvimentos das atividades posteriores. O pesquisador criou um grupo em um aplicativo de mensagens, para que durante a semana os alunos trocassem ideias e disponibilizassem resultados de pesquisas referentes as atividades propostas, porém esse foi pouco utilizado.

Ao término de cada atividade, as soluções foram discutidas em grupo, e as devidas correções feitas pelo pesquisador e pelas equipes. O software *GeoGebra* foi utilizado como recurso didático/visual em algumas situações durante a pesquisa, tanto para fazer correções de alguns erros dos alunos, como também para fixar conceitos e explorar ideias que foram aplicadas nas resoluções.

Ao final de cada atividade, o pesquisador recolhia os formulários com as soluções dos alunos, e entregava para as equipes o formulário com as questões seguintes. Enquanto os alunos resolviam as questões, o pesquisador passava entre as carteiras atento as discussões das equipes, fazendo interferências quando eram necessárias. Tais interferências geralmente se davam com questionamentos sobre o caminho e as escolhas que os alunos estavam tomando para a solução dos problemas, com o objetivo de estimular a criatividade e o raciocínio lógico dos alunos, bem como a experimentação de hipóteses e comprovação de resultados.

Os três encontros seguiram o mesmo padrão de aplicação, com interação constante entre as equipes, interna e externamente, e com o pesquisador, fazendo as interferências necessárias. Os resultados esperados eram explorados utilizando o recurso visual, para que os alunos pudessem ter uma melhor compreensão dos resultados obtidos. Na próxima seção, mostraremos detalhadamente as atividades e análises dos resultados a partir do que foi desenvolvido na aplicação do projeto.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Nesta seção apresentaremos as atividades que compuseram a sequência didática, destacando seus objetivos, descreveremos como foi a aplicação e faremos a análise dos dados baseados nas resoluções das atividades que foram entregues pelos alunos no final de cada encontro e nas percepções do professor-pesquisador, destacando a metodologia da Didática de Resolução de Problemas.

6.1 ATIVIDADE 1: PRÉ-REQUISITO

O desenvolvimento da primeira atividade se deu em uma sala de aula disponibilizada pela direção da escola. A aplicação foi feita com a presença do pesquisador e dos alunos, não sendo necessária a supervisão de outros professores, pois todos os alunos presentes eram alunos regulares do pesquisador. Para a resolução da atividade 1, os oito alunos presentes foram divididos em três equipes (uma equipe composta por dois alunos e outras duas com três), sorteadas pelo professor, que aqui serão identificadas para efeitos desta análise com a nomenclatura E1, E2 e E3.

A primeira atividade da sequência didática tinha como objetivo verificar se os alunos dominavam o conceito de reta e coeficiente angular de uma reta, se eram capazes de aplicar tais conceitos na resolução de problemas e na determinação da equação de uma reta. Também tinha o intuito de definir e construir retas secantes a uma curva, por meio de pesquisa em livros e/ou internet.

Para cada aluno foi entregue uma folha com o questionário da Atividade 1 (Apêndice A), conforme resumido no Quadro 1.

Quadro 1 - Resumo da Atividade 1 da sequência desenvolvida na pesquisa

1. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e:

(a) Tem inclinação -3;

(b) É paralela ao eixo x;

(c) É paralela ao eixo y;

(d) É paralela à reta $2x - 4y = 3$;

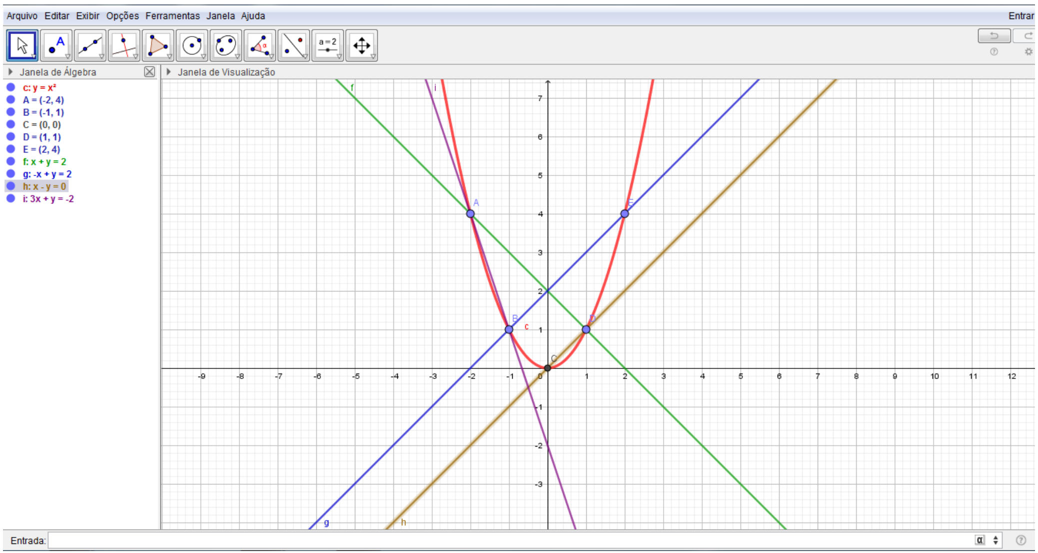
2. Encontrar a inclinação e a intersecção com os eixos, de uma reta que passa por dois pontos dados;
3. Pesquisar e definir retas secantes;
4. Esboçar retas secantes a parábola da função $f(x) = x^2$, que passem pelo ponto $P\ (2, 4)$.

Fonte: Produção do autor, 2018.

6.1.1. Desenvolvimento da Atividade 1.

A primeira atividade teve seu desenvolvimento iniciado no primeiro encontro, em que os grupos discutiram a solução de cada tópico, utilizando seus prévios conhecimentos adquiridos em sala nas aulas regulares, pois o conteúdo faz parte da componente curricular do terceiro ano do Ensino Médio e foi trabalhado. A sala da aplicação da atividade foi previamente organizada pelo pesquisador, a direção da escola disponibilizou um projetor, pois seria necessário para a ilustração das figuras e também para a discussão das resoluções. O software *GeoGebra* foi utilizado para apresentar os gráficos das funções e os comportamentos das retas secantes, item 4 dessa primeira atividade, conforme a Figura 30.

Figura 30 - Gráfico da função $f(x) = x^2$ com algumas retas secantes apresentado no software GeoGebra



Fonte: Produção do autor, 2018.

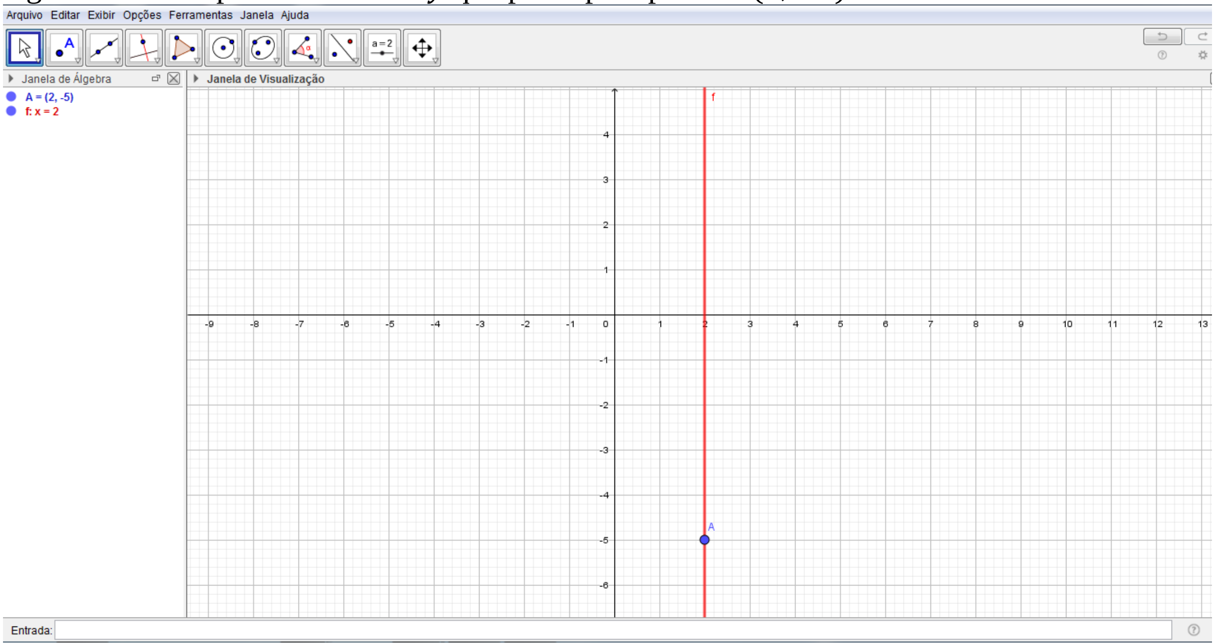
Os alunos começaram a discussão dos primeiros tópicos da Atividade 1, utilizando os conhecimentos que desenvolveram durante as aulas regulares do período letivo. Devido ao fato de os alunos selecionados para participação da aplicação desta pesquisa já demonstrarem familiarização com os conceitos básicos de equação da reta e coeficiente angular, os itens 1(a) e 1(d) da primeira questão da Atividade 1, foram rapidamente desenvolvidos sem que surgissem dúvidas relativas a resolução. Neste momento, conforme a metodologia da RP proposta por Dante, os alunos utilizaram seus conhecimentos prévios para discutir e formular as resoluções dos problemas, enquanto o professor monitorou as ações dos alunos, verificando se eles utilizariam conceitos corretos para a resolução do problema, instigando-os a encontrarem por si próprios as soluções. Os alunos adotaram o mesmo método de resolução, utilizando a equação fundamental da reta $y - y_0 = m\ (x - x_0)$ em que (x_0, y_0) é um ponto conhecido da reta e m o seu coeficiente angular. Para os itens 1(b) e 1(c), em que se desejava encontrar a equação de uma reta paralela aos eixos coordenados (eixo x em (b) e eixo y em (c)), os alunos tiveram as suas primeiras dúvidas em que o pesquisador teve que fazer a primeira interferência.

No caso do item (b), os alunos constataram o fato de que não havia um segundo ponto para que se efetuasse o cálculo do coeficiente angular da reta, inviabilizando o uso da equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, pois não seria possível o cálculo do coeficiente angular m por meio do algoritmo $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, que é utilizado quando conhecidos dois pontos pertencentes à reta. Assim, o pesquisador sugeriu aos alunos que recorressem a um outro modo de determinação do coeficiente angular, ou seja, a sua interpretação geométrica, em que o coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo que essa reta forma com o eixo x. Novamente as equipes entraram em um impasse. No item (b), a questão foi: como determinar a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x, se esta reta é paralela a x? No item (c), a reta é perpendicular ao eixo x, sendo assim o ângulo entre a reta e o eixo é de 90°, que implica na não existência da tangente do ângulo.

A equipe E1 tomou a iniciativa para resolução do item (b), utilizando o coeficiente angular $m = 0$. O pesquisador questionou a equipe como chegaram a essa conclusão e solicitou que eles explicassem aos demais alunos. Eles relembraram os colegas sobre o ciclo trigonométrico e a posição do arco de 0°. Substituindo na equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, o valor $m = 0$, as equipes prontamente chegaram a equação $y = -5$. Conforme Dante (2009) orienta, no trabalho com a RP, a verificação do resultado pode ser apresentada por um representante de cada equipe, e deve-se abrir um momento de discussão entre as equipes para que discutam os diferentes métodos adotados para resolução do problema. Embora este momento não tenha acontecido de fato em uma etapa de verificação de resultados, a análise conjunta entre as equipes pode ajudar os alunos a encontrarem uma solução correta para o problema.

O impasse persistiu ainda para a resolução do item (c). Novamente o pesquisador precisou interferir, sugerindo aos alunos que fizessem um esboço da reta procurada. Aproveitando o recurso visual, a reta foi construída no software *GeoGebra*, conforme a Figura 31.

Figura 31 - Reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto $A(2,-5)$



Fonte: Produção do autor, 2018.

Após essa construção, o pesquisador questionou os alunos: qual o valor de x em qualquer ponto sobre essa reta? Após um curto período de discussão, os alunos concordaram que o valor da abscissa x permanecia constante, ou seja, $x = 2$. Diante deste fato, obtivemos assim a equação da reta desejada.

Quanto ao item 2 da Atividade 1 (Quadro 2), os alunos não apresentaram dificuldades para a resolução, pois questões parecidas com essas foram trabalhadas durante as aulas regulares. Conforme definido por Dante (2009), essa atividade trata-se de um exercício e não um problema, pois ela serviu para exercitar conceitos já conhecidos pelos alunos, porém, para nossa pesquisa, tornou-se relevante a revisão e a prática desses conceitos.

Quadro 2 - Enunciado da questão 2 da Atividade 1

2. Sejam $A\ (-7, 4)$ e $B\ (5, -12)$ pontos do plano: (a) Encontre a inclinação da reta que contém A e B; (b) Encontre uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as intersecções com os eixos?

Fonte: Produção do autor, 2018.

Para a resolução da questão 3 dessa atividade, os alunos utilizaram computadores, com internet e a biblioteca, para pesquisar a definição de reta secante. Essa pesquisa foi rápida e as definições foram discutidas logo na sequência para o desenvolvimento da questão 4. As definições encontradas estão no Quadro 3.

Quadro 3 - Definições de reta secante conforme pesquisa dos alunos

- E1: Uma reta que intersecta dois pontos de uma curva.
- E2: é uma reta que corta uma curva, ou seja, que possui dois pontos comuns com essa curva.
- E3: É uma reta que corta outra reta ou uma curva.

Fonte: Dados de pesquisa, 2018.

Após a leitura dessas definições, o pesquisador discutiu com os alunos essas definições e formalizou com eles que a definição mais adequada de reta secante, para essa atividade foi a encontrada por E1, que corrobora com a definição dada por Stewart (2016, p. XXXI) “A reta que intersecta dois pontos de uma curva é denominada reta secante.” Nesse caso, os alunos resolveram um problema, conforme a definição de Dante, pois utilizaram a tecnologia e referências em livros para encontrar as definições pedidas.

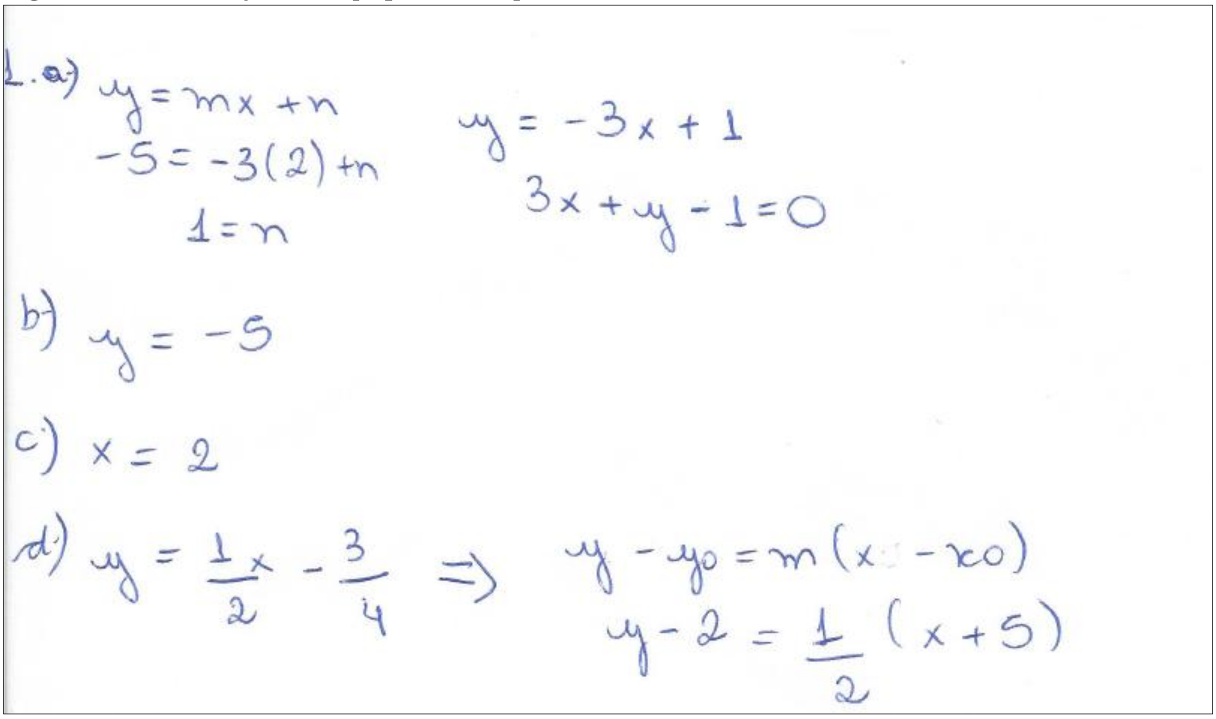
A questão 4 da Atividade 1, que efetivamente dá início ao que essa pesquisa deseja, pedia aos alunos que considerassem a parábola $f(x) = x^2$ (Figura 30), e o ponto $P\ (2, 4)$, pertencente à essa parábola, e que conforme a definição, construíssem três retas secantes à essa parábola, passando pelo ponto P. Para tal, os alunos receberam uma folha impressa com o gráfico da função na qual poderiam rascunhar as retas. Após os alunos rascunharem as retas no gráfico dado, o pesquisador apresentou os rascunhos de cada equipe para as demais, questionando-os se os rascunhos apresentados satisfazem o enunciado da questão e quais deles satisfazem. Essa apresentação foi feita pelo próprio pesquisador, pois os alunos ficaram receosos de apresentar seus resultados para os demais, e também para melhor proveito do tempo de aula/pesquisa.

6.1.2 Análise das resoluções da Atividade 1

Nesta seção faremos a análise das resoluções apresentadas pelas equipes E1, E2 e E3, e faremos algumas considerações sobre o aparente efeito da aplicação da sequência no entendimento e construção da ideia intuitiva de derivada, e de que modo uma aplicação como essa pode ter efeitos sobre os conteúdos trabalhados no Ensino Médio.

Todas as equipes demonstraram familiaridade em trabalhar com os conceitos básicos de Geometria Analítica e mostraram habilidade no manuseio dos algoritmos da equação fundamental da reta e dos cálculos de coeficiente angular que tratavam dos conceitos que formam um pré-requisito para o desenvolvimento da pesquisa. Porém, cometeram alguns equívocos na resolução da questão 1 da Atividade 1. A equipe E1, como podemos observar na Figura 32, conseguiu resolver de maneira correta os itens (a), (b) e (c), no item (d) encontrou o coeficiente angular correto, mas substituiu os valores de x_0 e y_0 invertidos, ou seja, usou o ponto $(-5,2)$ quando o indicado foi $(2,-5)$. Esse equívoco não foi discutido durante a aplicação do projeto, pois foi percebido somente durante a análise dos protocolos. Ressaltamos então a importância da verificação das resoluções durante o processo de retrospecto seja feito com base nas resoluções apresentadas pelos alunos, pois esse erro pode ter passado despercebido por eles, ou talvez se sentiram intimidados e preferiram não aponta-lo durante a discussão na aula.

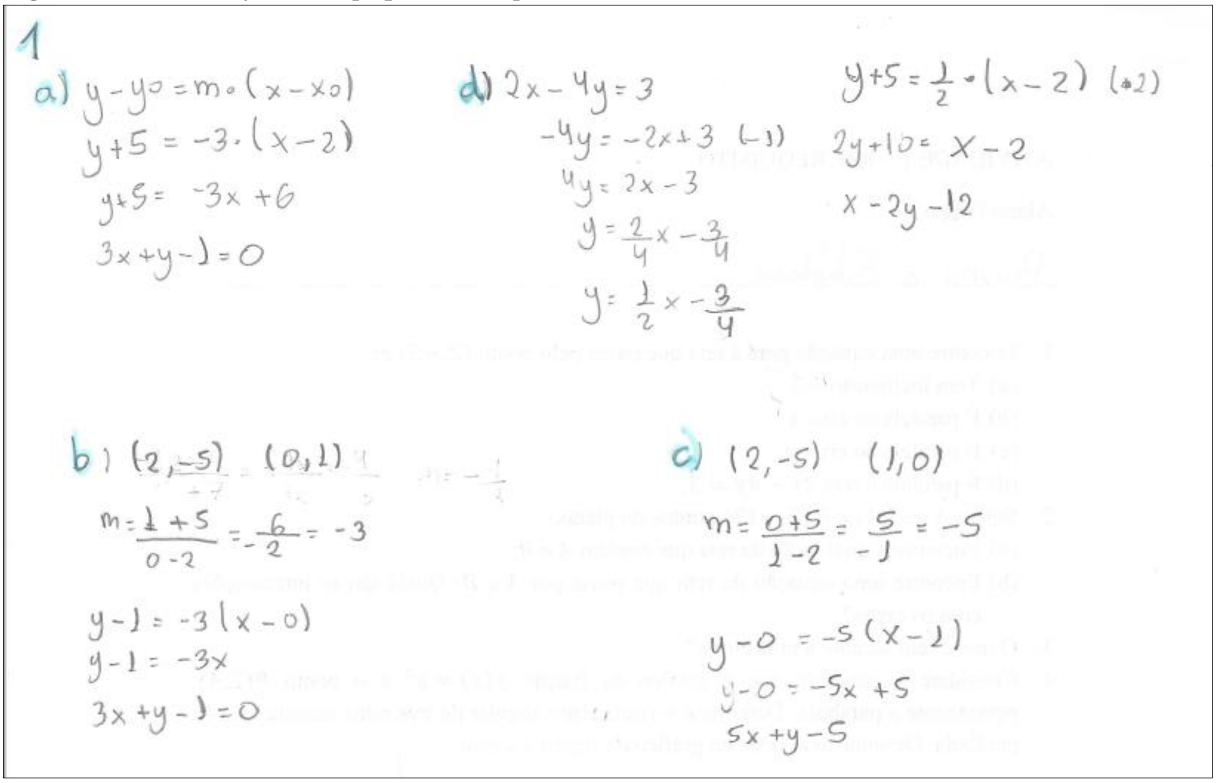
Figura 32 - Resolução da equipe E1 da questão 1da Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe E2 resolveu os itens (a) e (d) corretamente, com um pequeno erro na última expressão da reta desejada no item (d) faltando igualar a zero (Figura 33). Porém não obteve sucesso em determinar a equação das retas paralelas aos eixos coordenados, itens (b) e (c) da primeira questão. Pela análise da resolução apresentada, aparentemente eles não conseguiram encontrar uma maneira de determinar a equação da reta sem conhecer dois pontos pertencentes a ela. Utilizaram o ponto $(0, 1)$ pertencente ao eixo y para encontrar a equação da reta paralela ao eixo x e de modo semelhante, o que aparentemente parece ser um raciocínio análogo, utilizaram o ponto $(1, 0)$, pertencente ao eixo x, para determinar a equação da reta paralela ao eixo y. Esse procedimento está incorreto, porém, conforme relatado na apresentação do desenvolvimento das sequências, a solução dessas questões foi discutida em sala mesmo durante o desenvolvimento da resolução, acreditamos que os alunos entregaram a questão sem corrigi-la, por distração, ou não terem entendido nesse momento que lhes era oportunizada a correção da atividade, talvez por esperarem uma avaliação formal do resultado (certo ou errado, validação com notas, etc.).

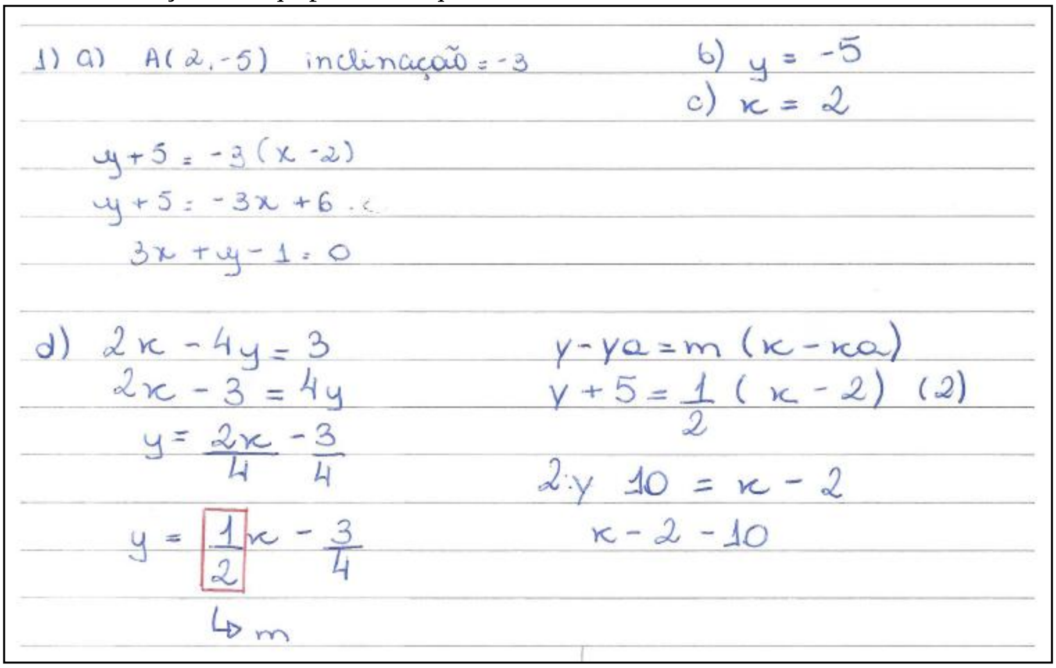
Figura 33 - Resolução da equipe E2 da questão 1 da Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A resolução de E3 estava correta, apenas no item (d) eles deixam algumas informações incompletas ao manipular a expressão algébrica da reta, por exemplo: esqueceram o sinal de soma antes do número 10 e na última manipulação subtraíram o número 10 de ambos os lados, mas esqueceram da igualdade com $2y$ (Figura 34).

Figura 34 - Resolução da equipe E3 da questão 1 da Atividade 1


1) a) A(2,-5) inclinação = -3

b) $y = -5$

c) $x = 2$

$y+5 = -3(x-2)$

$y+5 = -3x+6$

$3x+y-1=0$

d) $2x-4y=3$

$2x-3=4y$

$y = \frac{2x}{4} - \frac{3}{4}$

$y = \boxed{\frac{1}{2}}x - \frac{3}{4}$

$\to m$

$y-ya = m(x-xa)$

$y+5 = \frac{1}{2}(x-2)\ (2)$

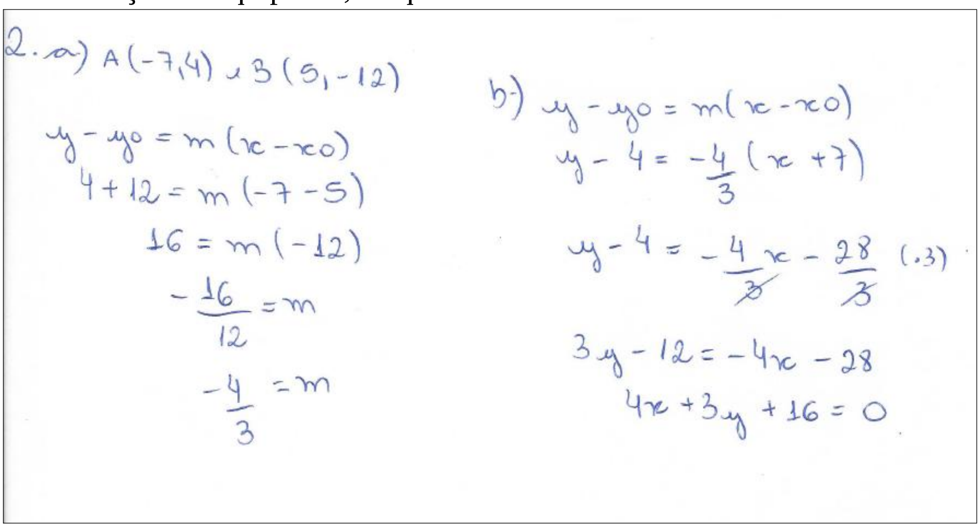
$2 \cdot y\ 10 = x-2$

$x-2-10$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Para a questão 2 da Atividade 1, as equipes desenvolveram os cálculos sem dificuldades, porém as equipes E1 e E3, esqueceram de informar os pontos de intersecção com os eixos. É interessante destacar que E1 e E3 utilizaram maneiras diferentes de obter o coeficiente angular da reta (item (a)). A equipe E1 substituiu as coordenadas dos dois pontos na equação da reta e com isso determinou o coeficiente angular (Figura 35), já E3 usou a expressão clássica para calcular o coeficiente angular conhecidos dois pontos (Figura 36).

Figura 35 - Resolução da equipe E1, da questão 2 da Atividade 1


2. a) A(-7,4) e B(5,-12)

$y-yo = m(x-xo)$

$4+12 = m(-7-5)$

$16 = m(-12)$

$-\frac{16}{12} = m$

$-\frac{4}{3} = m$

b) $y-yo = m(x-xo)$

$y-4 = -\frac{4}{3}(x+7)$

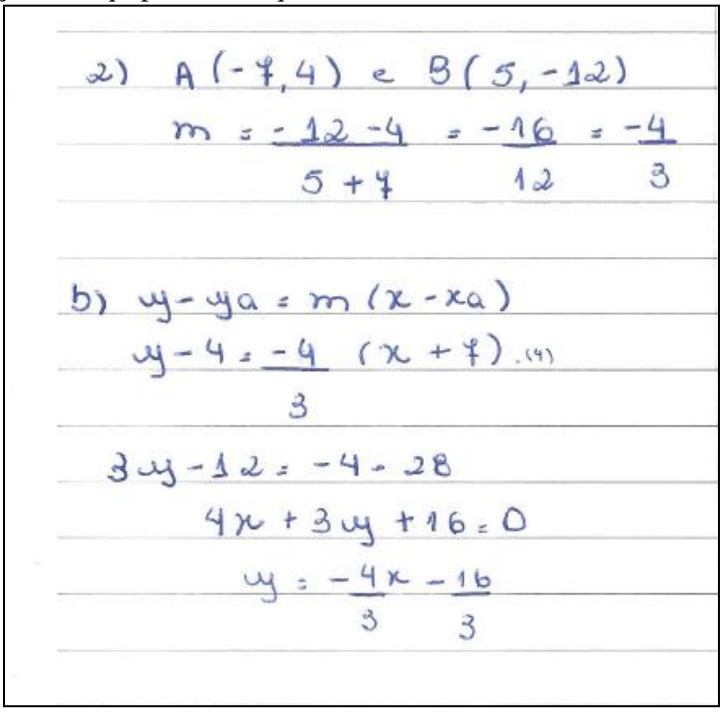
$y-4 = -\frac{4}{\cancel{3}}x - \frac{28}{\cancel{3}}\ (.3)$

$3y-12 = -4x-28$

$4x+3y+16=0$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

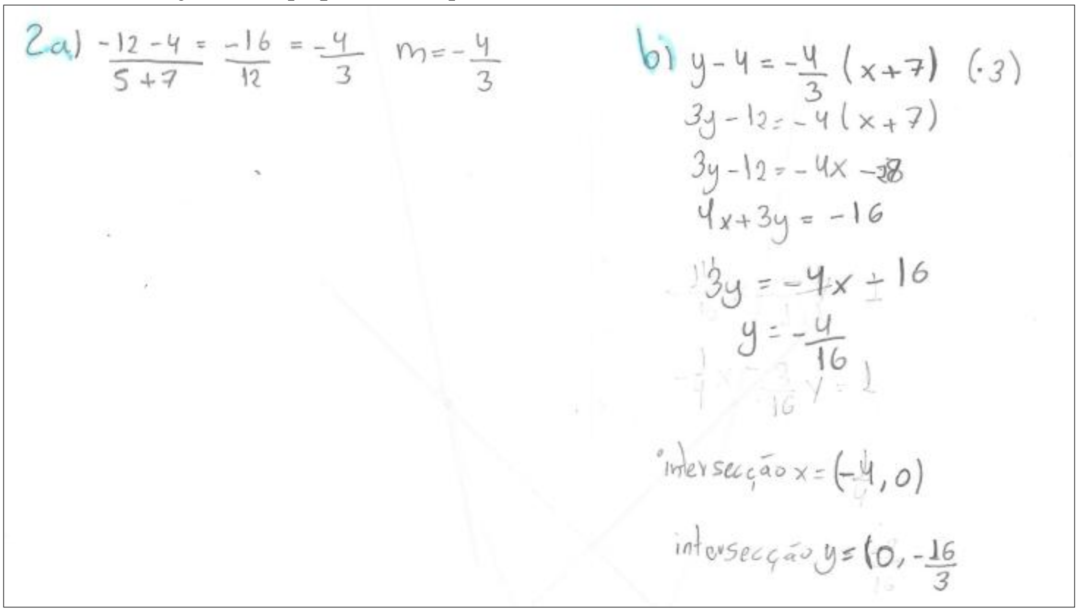
Figura 36 - Resolução da equipe E3, da questão 2 da Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe E2 determinou as interseções com os eixos, logrando êxito total na resolução, cumprindo com todos os itens solicitados, como pode ser observado na Figura 37. Porém, aparece a expressão $y = -\frac{4}{16}$, que não foi possível interpretar, pois no momento da discussão e correção das questões, essa expressão passou despercebida pelo pesquisador, sendo percebida somente no momento da análise dos protocolos entregues.

Figura 37 - Resolução da equipe E2 da questão 2 da Atividade 1

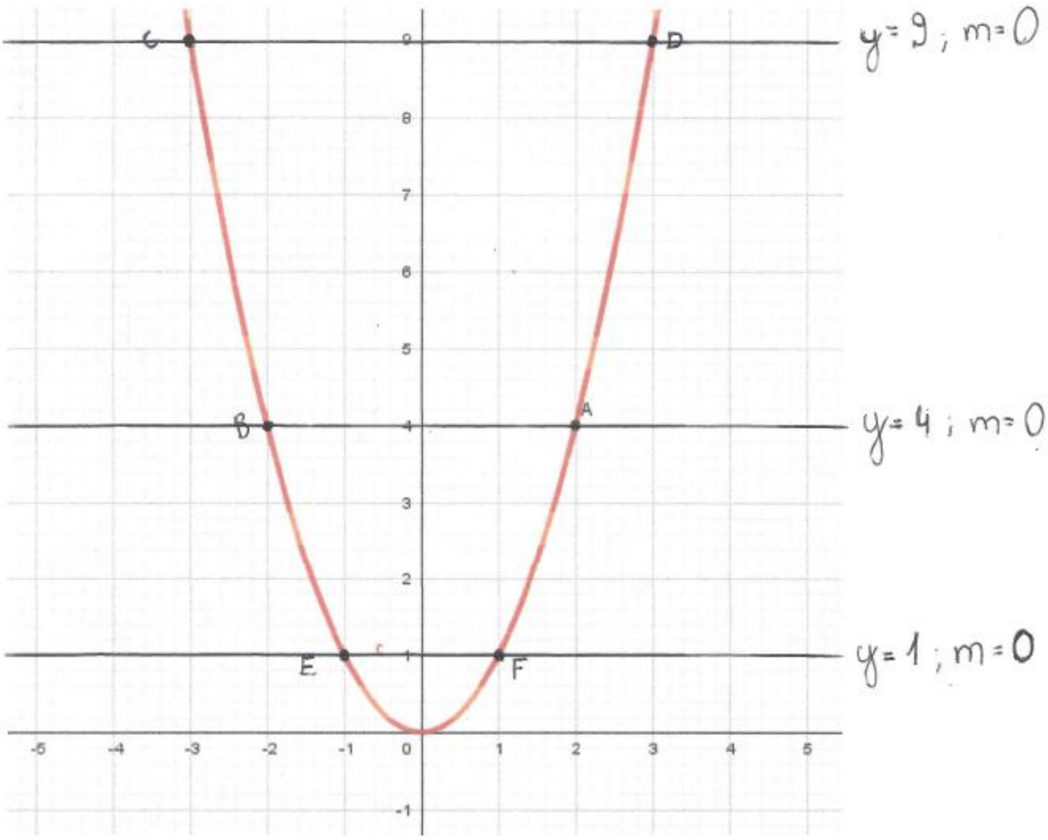


Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Na questão 3 dessa atividade os alunos pesquisaram a definição de reta secante e para a pesquisa, as três equipes utilizaram a internet e biblioteca (Quadro 3). Todas estão corretas, porém a que melhor se adapta ao contexto desejado do trabalho foi a encontrada pela equipe E1.

Na questão 4 os alunos deveriam desenhar três retas secantes a parábola da função $y = x^2$, passando pelo ponto $P(2, 4)$. Os alunos da equipe E1 demonstram que tiveram entendimento da definição de reta secante à uma curva, bem como da equação de uma reta paralela ao eixo x, pois desenharam três retas que intersectam a parábola em dois pontos, destacando além disso a equação dessas retas e seu coeficiente angular (Figura 38), a ressalva fica em relação ao fato de a equipe ter considerado o ponto $P\ (2, 4)$ somente em uma das retas secantes, o que não satisfaz o enunciado da questão e não é suficiente para introduzir a ideia de aproximação de retas secantes para obter uma reta tangente, que era o objetivo da Atividade 2.

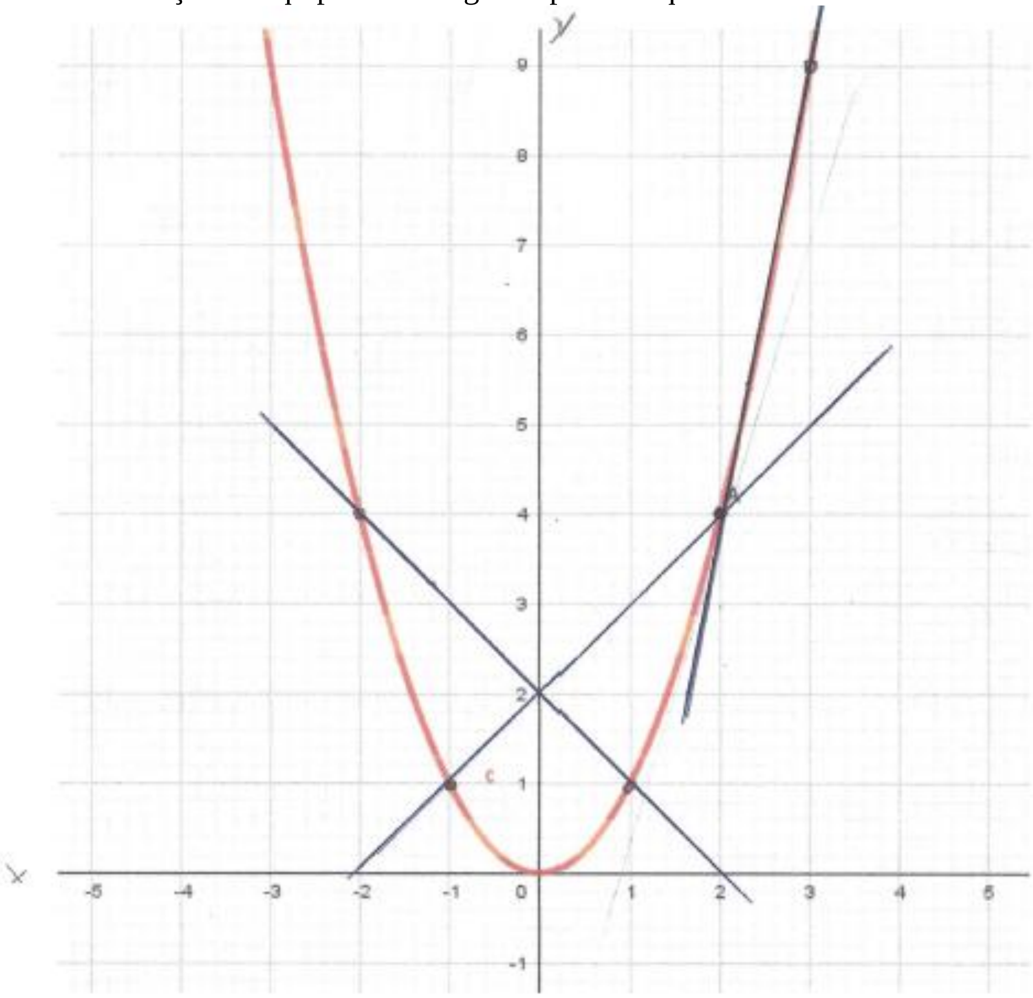
Figura 38 - Resolução da equipe E1da questão 4 da Atividade 1



Fonte: Dados de pesquisa, 2018.

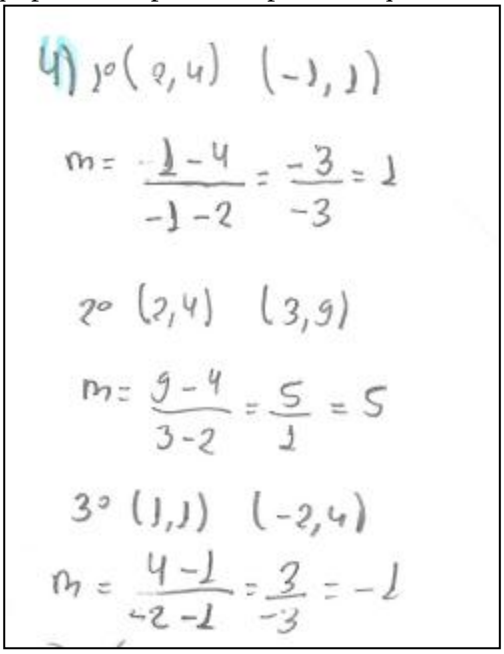
Os alunos da equipe E2 demonstraram não ter dificuldades em determinar e escolher pontos pertencentes à parábola, e também em calcular os coeficientes angulares das retas passando por dois pontos pertencentes a essa parábola. Também mostraram ter entendido a definição de reta secante, pois a construção feita por eles satisfaz a definição discutida na questão 3. Essa equipe considerou duas retas secantes contendo o ponto $P\ (2, 4)$, logrando êxito parcial no que a questão propunha que era iniciar a ideia de aproximação de retas secantes para obtenção de uma reta tangente. Consideraram uma reta passando pelos pontos $(-2, 4)$ e $(1, 1)$, que nesse caso não satisfaz a condição imposta no enunciado. A resolução de E2 está nas Figuras 39 e 40.

Figura 39 - Resolução da equipe E2 da segunda parte da questão 4 da Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

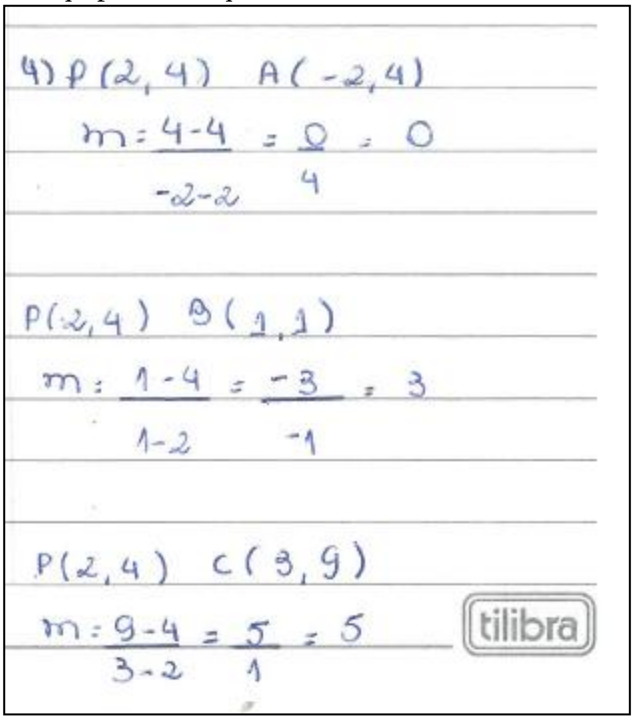
Figura 40 - Resolução da equipe E2 da primeira parte da questão 4 da Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Para a resolução da questão 4 dessa atividade, a equipe E3 mostrou entendimento referente a definição de reta secante a uma curva, considerou corretamente três pontos pertencentes a parábola, e calculou corretamente os coeficientes angulares das retas que passam por esses pontos e pelo ponto $P\ (2, 4)$, conforme mostra a Figura 41.

Figura 41 - Resolução da equipe E3 da questão 4 da Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Embora a equipe tenha feito os cálculos corretamente e encontrado os coeficientes angulares da reta, não foi feito a representação geométrica dessas retas tangentes na parábola apresentada na questão, porém acreditamos que isso tenha se dado por distração dos alunos componentes da equipe ou por esquecimento.

Quanto ao proposto na Atividade 1 desta pesquisa, que tinha por objetivo revisar e reforçar os conceitos básicos de Geometria Analítica que foram aprendidos em sala de aula durante as aulas regulares, que servem como pré-requisito para a continuidade da pesquisa, os alunos demonstraram êxito na resolução dos problemas propostos. Conforme os objetivos da metodologia da RP, os alunos utilizaram de seus conhecimentos prévios para resolver problemas já conhecidos e aplicaram esses conhecimentos em alguns problemas novos, usando da investigação para definir conceitos até então desconhecidos, estando assim aptos a utilizar seus conhecimentos e os conceitos pesquisados para resolver os problemas propostos. Dentro do que propõe Dante (2009), essa Atividade 1 pode ser entendida mais como um exercício do que como uma situação problema, sendo que as questões 1(a), 1(d) e 2, são as que mais reforçam essa ideia. As questões trabalhadas na Atividade 1 serviram mais como fixação e prática de conteúdos já conhecidos, porém, todos os conceitos trabalhados nessa atividade foram importantes para o desenvolvimento e entendimento das situações problemas apresentadas nas atividades seguintes.

6.2 ATIVIDADE 2: ENCONTRAR UMA RETA TANGENTE À UMA CURVA DADA

A Atividade 2 desta pesquisa se deu no mesmo espaço disponibilizado pela direção da escola, com a presença do pesquisador e de 10 alunos, sendo 8 que estavam presentes na aplicação da Atividade 1 e 2 que não puderam no primeiro dia, mas que estavam inteirados do assunto, (foi criado um grupo em um aplicativo de mensagens para as discussões semanais). O pesquisador manteve as três equipes do encontro anterior e inseriu os dois novos alunos nas equipes E1 e E3, respeitando a afinidade dos alunos.

A Atividade 2 da sequência didática tinha como objetivo encontrar a equação da reta tangente a uma parábola de equação $y = x^2$ e o coeficiente angular dessa reta por meio de aproximações de retas secantes à essa parábola. Para isso, os alunos utilizariam os conceitos revisados na Atividade 1 da sequência, bem como as definições pesquisadas e construídas durante a aplicação no primeiro encontro. No final do primeiro encontro foi solicitado aos alunos, que pesquisassem a definição de uma reta tangente e como determinar uma reta tangente a uma curva, pois tais conceitos seriam utilizados na aplicação da atividade no segundo encontro.

Para iniciar a atividade, foi entregue a cada um dos alunos uma folha com o questionário da Atividade 2 (Apêndice B), conforme resumido no Quadro 4.

Quadro 4 - Resumo da Atividade 2

1. Definir reta tangente;
2. Descrever como determinar uma reta tangente;
3. Encontrar o coeficiente angular e a equação da reta tangente em um ponto da curva $y = x^2$;

Fonte: produção do autor, 2018.

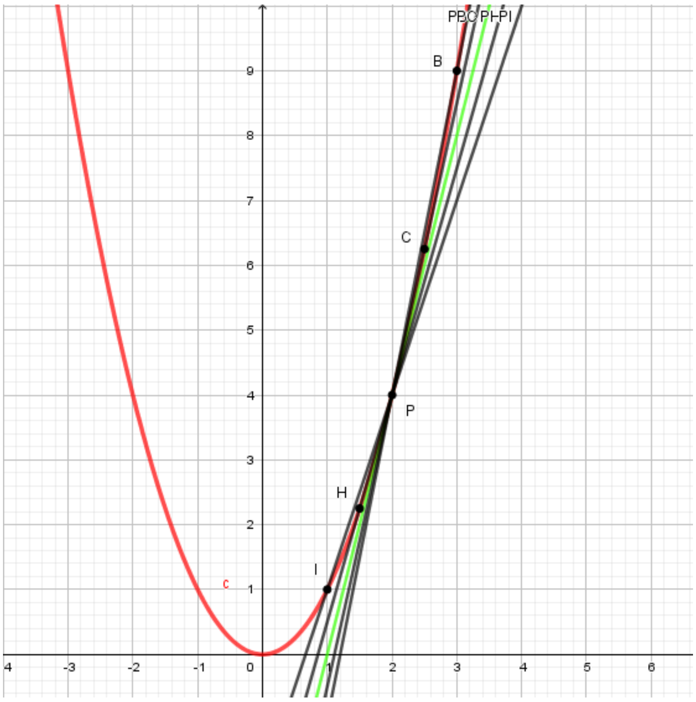
6.2.1 Desenvolvimento da Atividade 2

Como as questões 1 e 2 da Atividade 2 os alunos tinham pesquisado em casa, o segundo encontro começou com as equipes discutindo em grupo e registrando no protocolo a definição de reta tangente e também como determinar uma reta tangente. Na sequência foi feita uma discussão desses pontos entre as equipes e o professor. A definição para reta tangente foi praticamente idêntica em todas as equipes: “a reta que tem apenas um ponto em comum com a curva (ou que encosta em um único ponto)”. Quanto ao método para determinar a equação da reta tangente, os alunos trouxeram conceitos até então desconhecidos para eles. A equipe E1 descreveu utilizando um exemplo gráfico e também o quociente de Newton, para o cálculo do coeficiente angular. Já a equipe E2 tentou explicar o método de determinação, descrevendo como calcular o coeficiente angular utilizando dois pontos como referência, enquanto a equipe E3 recorreu a uma definição de derivada previamente pesquisada: “A derivada da função é justamente a inclinação da reta tangente naquela posição”. O professor fez um fechamento dessas questões confirmando que todas as respostas estavam corretas e desafiou as equipes a utilizarem essas informações para resolverem a questão 3, sem indicar qual seria a melhor saída para eles.

Porém os alunos não conseguiram encontrar uma maneira de determinar a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$. Apesar da pesquisa que eles haviam realizado eles não conseguiram aplicar essas informações na questão 3. Então, o pesquisador utilizou o software *GeoGebra* como recurso, para discutir e mostrar para os alunos, a possibilidade de determinar uma reta tangente, por meio de aproximações de retas secantes, em um ponto fixo dado. Esse recurso foi utilizado para que os alunos compreendessem o que era pedido na questão 3 da

Atividade 2, que tinha por objetivo calcular o coeficiente angular da reta tangente à parábola $y = x^2$, no ponto $P\ (2, 4)$. Assim, foram marcados alguns pontos pertencentes a parábola, determinadas as retas secantes à parábola, passando pelo ponto P e por esses pontos, como ilustra a Figura 42.

Figura 42 - Determinação da reta tangente a parábola $y = x^2$ por meio de aproximações de retas secantes



Fonte: Produção do autor, 2018.

Na Figura 42, a reta na cor verde é a reta tangente que queremos determinar, enquanto as retas na cor preta, são retas secantes, construídas utilizando dois pontos pertencentes a parábola, o ponto $P\ (2, 4)$ e um segundo ponto.

Essa discussão foi feita de modo detalhado, aproximando a reta tangente utilizando inicialmente pontos à esquerda do ponto P e depois pontos à direita. Assim, os alunos puderam visualizar por meio do recurso gráfico, o fato de que as retas secantes vão se aproximando cada vez mais da reta tangente, conforme vamos utilizando pontos cada vez mais próximos do ponto P. Com base na metodologia da RP, a interferência do professor nesse momento da atividade ressalta a importância do acompanhamento das ideias que os alunos estão utilizando para a resolução de um problema, e que o professor precisa estar atento ao fato de os alunos estarem enfrentando dificuldades para atender as condições impostas pelo problema, mostrando-lhes possíveis caminhos e novas ideias para a interpretação do que se pede (DANTE, 2009). O recurso tecnológico/visual foi importante para abordar o tema de uma maneira diferente dos resultados encontrados nas pesquisas dos alunos.

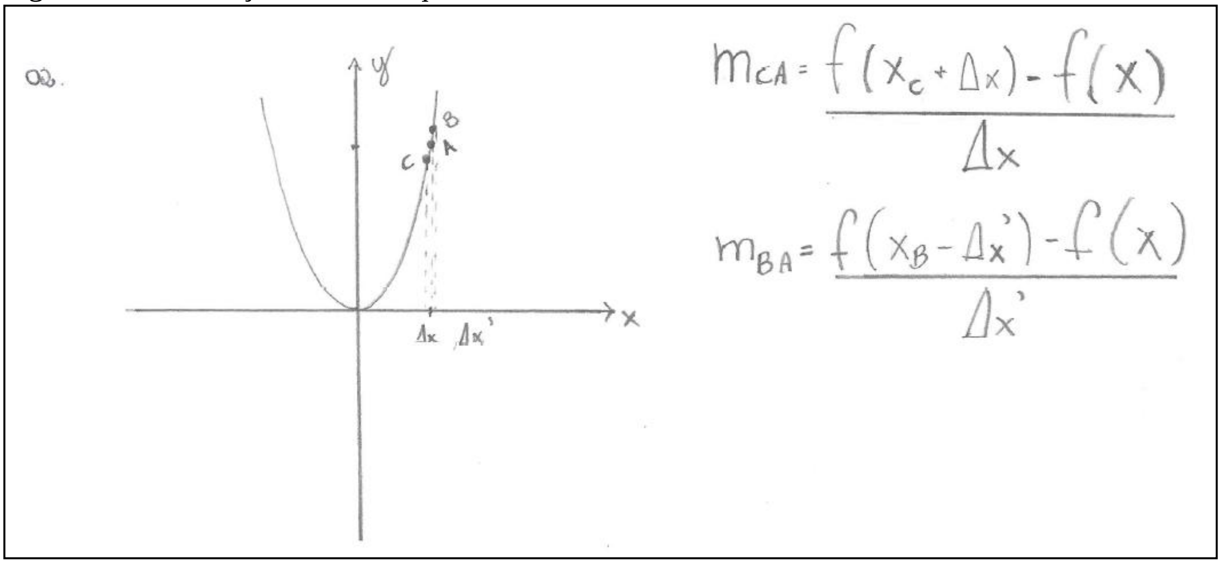
Como o próprio software mostra aos seus usuários a equação das retas criadas, a questão 3 dessa atividade foi trabalhada em sala utilizando somente o recurso visual e a discussão das ideias, e os conceitos construídos durante esse processo foram aplicados para a resolução da Atividade 3, aplicada também no segundo encontro.

6.2.2 Análise das resoluções da Atividade 2

Nesta seção faremos uma análise das respostas apresentadas pelas equipes E1, E2 e E3 para as questões 1 e 2 da Atividade 2, fazendo ponderações sobre a maneira como as equipes tentaram compilar essas respostas com base em suas pesquisas. Conforme já mencionado a questão 3 foi resolvida em sala de aula utilizando o software *GeoGebra* como recurso.

A equipe E1 utilizou os conceitos pesquisados no decorrer da semana (intervalo entre o primeiro e segundo encontro) para tentar de alguma maneira expor uma explicação para a solução da questão 2. Eles utilizaram o gráfico da função $y = x^2$, destacando três pontos A, B e C, próximos um do outro, utilizando o quociente de Newton para calcular os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ (Figura 43). A resposta mostrada pela equipe não evidencia se houve ou não entendimento da ideia (acreditamos que somente com a pesquisa não), pois apresenta um erro na notação do quociente de Newton, em que nesse caso a notação correta seria $\frac{f(x_A+\Delta x)-f(x_A)}{\Delta x}$.

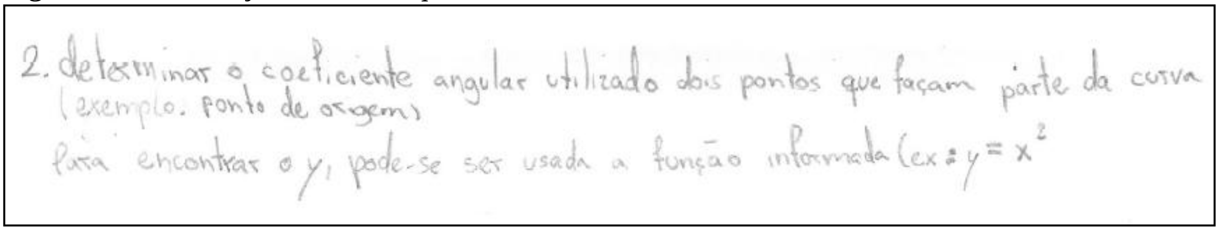
Figura 43 - Resolução de E1 da questão 2 da Atividade 2



Fonte: Dados de pesquisa, 2018.

A equipe E2 também utilizou os conceitos pesquisados durante a semana para tentar descrever uma solução para a questão 2, porém, tentaram expor com as próprias palavras um possível método para a determinação da reta tangente, conforme ilustra a Figura 44.

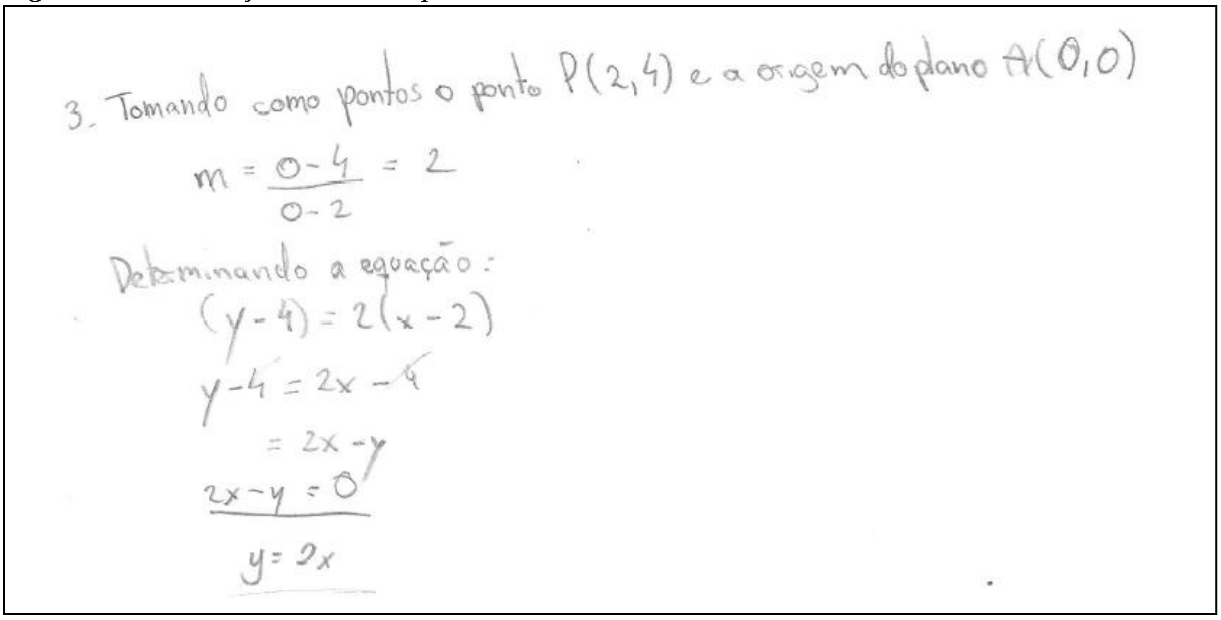
Figura 44 - Resolução de E2 da questão 2 da Atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A descrição feita pela equipe E2 sugere que eles utilizaram de seus conhecimentos prévios sobre coeficiente angular da reta, utilizando dois pontos da curva. Sugere também que não houve somente com a pesquisa um entendimento da ideia de aproximações da reta tangente por retas secantes, pois afirmam que o coeficiente angular pode ser conhecido por meio de dois pontos da curva. Outro fato interessante foi que, assim como E1, a equipe citou a função $y = x^2$, pois a mesma não fazia parte do enunciado dessa questão da atividade, somente da questão 3 que pedia uma reta tangente a essa curva em específico. Essa equipe usou a ideia que descreveram na questão 2 para resolver a 3 (Figura 45) antes de ser feita a discussão com o professor e os alunos de maneira conjunta. Destacando que durante a discussão, essa equipe não comentou a resolução que tinham feito.

Figura 45 - Resolução de E2 da questão 3 da Atividade 2

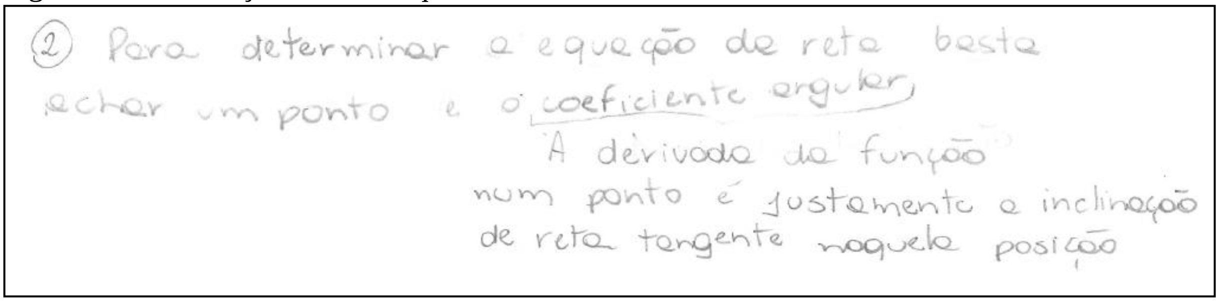


Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Podemos notar que a ideia utilizada pela equipe para determinar a equação da reta tangente a função $y = x^2$ no ponto $P\ (2,4)$ não obteve sucesso, pois o processo não serviu para calcular o coeficiente angular da reta tangente. A equação da reta encontrada pela equipe é uma reta secante ao gráfico da função $y = x^2$, passando pelo ponto P e por $(0,0)$.

A equipe E3 conforme já mencionado recorreu a uma definição de derivada para descrever o processo de determinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado (Figura 46), porém não justificou de alguma outra maneira a solução desse item, demonstrando que somente a pesquisa não lhes deu o suporte necessário para determinar uma solução para o problema. Nesse momento o pesquisador preferiu não aprofundar a questão da definição de derivada, nem questionar os alunos se houveram mais pesquisas sobre derivada, com o intuito de não atrapalhar o desenvolvimento intuitivo com o formalismo que envolve o conteúdo.

Figura 46 - Resolução de E3 da questão 2 da Atividade 2


② Para determinar a equação da reta basta achar um ponto e o coeficiente angular,
A derivada da função num ponto é justamente a inclinação da reta tangente naquela posição

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Quanto ao proposto na Atividade 2 dessa pesquisa, que tinha como objetivo determinar a equação de uma reta tangente a função $y = x^2$ no ponto $P\ (2,4)$, as equipes não demonstraram ter obtido êxito pelo método que pesquisaram durante a semana e discussão em sala. Os conceitos pesquisados pelos alunos e trazidos para discussão mostraram-se dotados de formalismo excessivo e de difícil compreensão para alunos do Ensino Médio. Atendendo às proposições da metodologia da RP, o professor/pesquisador teve que interferir no processo de resolução dos alunos, utilizando de recursos tecnológicos e visuais para apurar intuitivamente a noção de reta tangente, fazendo a aproximação de retas secantes, o que inicialmente esperava-se que os alunos encontrassem em sua pesquisa. O professor, aproveitando os conhecimentos prévios dos alunos que foram explorados na Atividade 1 da sequência, resgatou a ideia de determinar coeficientes angulares a partir de dois pontos da reta e explorou o fato da reta tangente ser aproximada por retas secantes. Com essa explanação surgiram constatações do tipo “para determinar o coeficiente angular da tangente basta então pegar pontos muito próximos do ponto dado” por parte dos alunos ao visualizarem por meio do *GeoGebra* a aproximação das retas secantes a reta tangente procurada. Para aproveitamento maior do tempo de aula, o professor solicitou aos alunos que utilizassem as ideias então construídas após a utilização do *GeoGebra* para resolver os problemas propostos na Atividade 3, que descreveremos a seguir.

6.3 ATIVIDADE 3: COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE A QUALQUER PARÁBOLA DO TIPO $Y = AX^2 + BX + C$

A Atividade 3 dessa pesquisa se deu em seguida a finalização da Atividade 2, no mesmo encontro (segundo) e tinha como objetivo reforçar o conceito de reta tangente utilizado na Atividade 2 e verificar as relações que existem entre os casos apresentados, de modo a generalizar uma expressão para o coeficiente angular e para a equação da reta tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$ em um ponto dado qualquer. Para atingir esse objetivo, os alunos utilizariam os conceitos debatidos e construídos durante a resolução da questão 3 da Atividade 2, ou seja, tomando retas secantes tendo como referência pontos muito próximos do ponto ao qual se deseja tangenciar a parábola.

Ao dar início a atividade, o pesquisador entregou a cada um dos alunos, uma folha com as questões da Atividade 3 (Apêndice C), conforme resumido no Quadro 5.

Quadro 5 - Resumo da Atividade 3 da sequência desenvolvida na pesquisa

1. Determinar coeficiente angular e equação da reta tangente a parábola $y = 2x^2 + 3x + 1$, no ponto de abscissa 1;
2. Generalizar a equação e o coeficiente obtidos no item 1 para um ponto qualquer da mesma parábola;
3. Determinar a equação da reta tangente e seu coeficiente angular, em qualquer ponto de uma parábola $y = ax^2 + bx + c$;

Fonte: Produção do autor, 2018.

6.3.1 Desenvolvimento da Atividade 3

Para a resolução da primeira questão da Atividade 3, os alunos das equipes E1 e E2 utilizaram a ideia construída na última questão da atividade anterior, em que para determinar a reta tangente a parábola, tomam-se aproximações de retas secantes passando pelo ponto desejado. Entretanto, a equipe E3 utilizou o conceito de derivada que era de conhecimento de um dos integrantes da equipe que já havia estudado alguns conceitos de Cálculo por interesse próprio. Neste caso, a equipe discutiu entre si essa solução, sendo que o aluno supracitado explicava a seus companheiros o processo de resolução que propôs, e o pesquisador preferiu não interferir nessa discussão, deixando para que ao término desta solução, debatesse a ideia utilizada com essa equipe, afinal, fazer generalizações como essa era um dos objetivos dessa pesquisa. As três equipes tiveram sucesso na resolução da questão. Essa ideia abordada por E3 foi discutida ao final da resolução da questão 2 dessa atividade, pois ela fornecia melhores dados comparativos para analisar o método utilizado pela equipe, e fazer a generalização do modo que foi apresentado era objetivo da questão 2.

Para dar início a resolução da questão 2, o pesquisador retomou com os alunos a ideia das aproximações das retas secantes a parábola, utilizando o *GeoGebra*. Na visão do pesquisador, essa revisão da ideia foi necessária para que os alunos visualizassem melhor a interpretação geométrica das secantes que se aproximam da reta tangente, desvinculando a ideia de que a resolução se dá apenas por meios algébricos, como foi o caso da solução apontada por E3 na questão 1. Tomando um ponto $Q\,(x_0, y_0)$ e um ponto $Q'\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$, de modo que esse valor de h fosse próximo de zero, podemos obter uma reta secante muito próxima da reta tangente desejada. Essa ideia foi discutida utilizando como exemplo o gráfico mostrado na Figura 42. Escolhemos esse gráfico para que os alunos visualizassem a interpretação geométrica de um problema parecido e, depois tentassem aplicá-lo ao gráfico da função pedida nessa questão. Sendo assim, para calcular o coeficiente angular da reta tangente desejada, definimos em conjunto que seriam tomados como referência dois pontos Q e Q' supracitados, aplicando o algoritmo $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}$. A mudança de notação (de y para $f(x)$) foi para facilitar a abordagem do complemento h no cálculo do coeficiente angular. No software *GeoGebra* não é possível utilizar um ponto genérico, apenas um ponto específico pertencente ao gráfico, porém o pesquisador enfatizou para os alunos a relação valeria para quaisquer pontos da forma de Q e Q'.

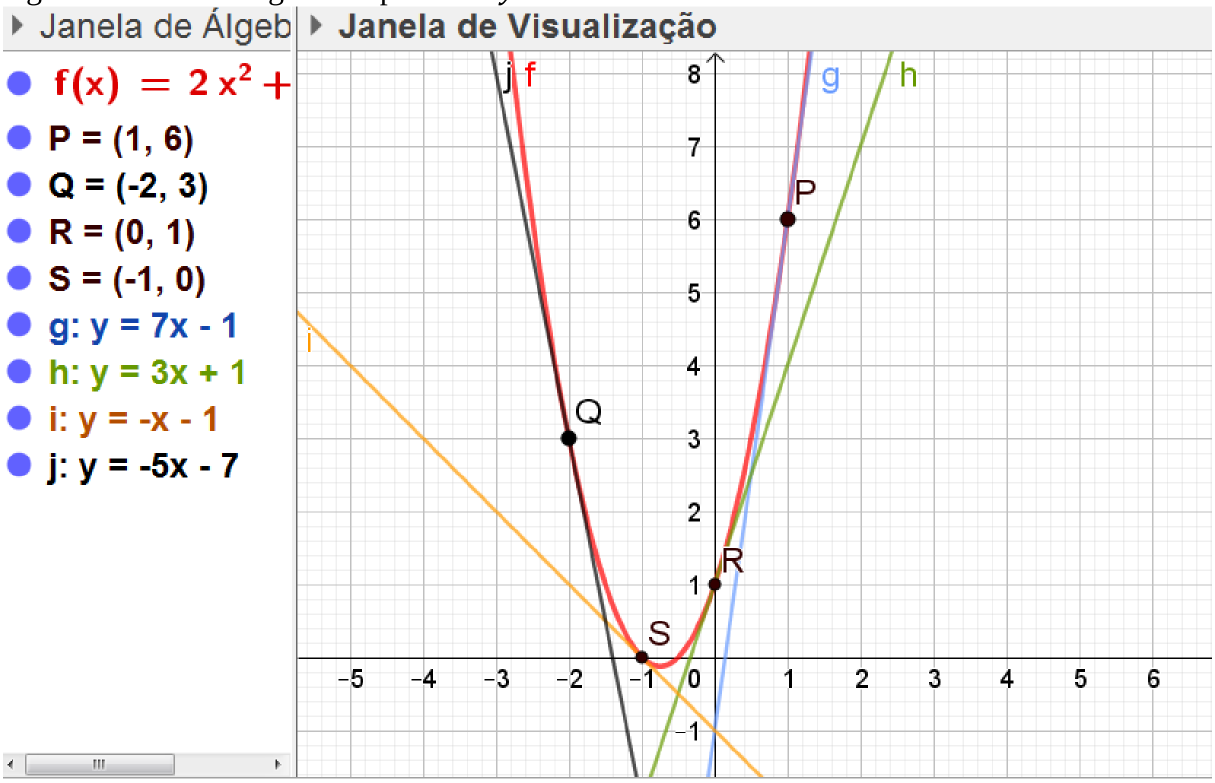
As equipes desenvolveram algebricamente esta razão, encontrando o valor $m = 2h + 4x_0 + 3$ (mais detalhes desses desenvolvimentos serão mostrados na seção de análise dos resultados). Nesse momento os alunos chegaram a um impasse, pois não sabiam o que fazer com o termo $2h$ que apareceu na expressão. Aqui poderia ter sido retomada a questão 1, em que o valor de x_0 estava definido, ficando essa ideia como sugestão para futuras aplicações e adaptações da sequência. Para ajudar os alunos, o pesquisador abriu mais um espaço para debate, em que fez a seguinte pergunta as equipes: qual deve ser o valor do incremento h para que tenhamos uma reta secante cada vez mais próxima da reta tangente? Prontamente os alunos responderam que tal valor deveria ser muito próximo de zero. Então o pesquisador levantou outro questionamento: e se tomarmos esse complemento h igual a zero? Após um breve momento, um dos alunos da equipe E3 respondeu. “Teremos a reta tangente?” (ainda em tom de dúvida). Confirmada a resposta do aluno, foi sugerido aos alunos que escrevessem que a intenção era tomar $h = 0$, e logo, substituindo h por zero, eles chegaram ao valor do coeficiente angular $m = 4x_0 + 3$.

O procedimento de informar ao final da solução que a intenção é tomar $h = 0$ se dá pelo fato de que não foi construída a ideia de derivada da função por meio da definição utilizando limites, pois nosso objetivo era trabalhar a derivada de forma intuitiva.

Para resolver a terceira questão desta atividade, os alunos utilizaram a mesma ideia abordada na questão anterior, primeiro eles determinaram as funções $f(x_0 + h) = a(x_0 + h)^2 + bx_0 + c$ e $f(x_0) = a{x_0}^2 + bx_0 + c$, substituindo-as em $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}$. Desenvolveram a expressão algebricamente, em que vale observar que nessa questão, o desenvolvimento se deu de modo muito mais rápido, principalmente devido a prática que adquiriram na questão anterior desta atividade, sendo que praticamente não foram necessárias intervenções do pesquisador para dirimir dúvidas referentes ao desenvolvimento algébrico. Os alunos encontraram então o coeficiente angular $m = 2ax_0 + ah + b$, tomaram o complemento h com valor nulo, e determinaram a derivada da função $m = 2ax_0 + b$.

Para finalizar a Atividade 3 e o segundo encontro, o pesquisador utilizou novamente o software *GeoGebra*, para mostrar e discutir com os alunos a ideia de derivada no ponto (sem definir ou utilizar o termo derivada), como coeficiente angular da reta tangente, tomando o gráfico da função $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ e construindo retas tangente a essa parábola em diferentes pontos pertencentes à mesma, conforme ilustra a Figura 47. Assim, os alunos puderam visualizar as diferentes equações dessas retas tangentes e verificar que o coeficiente angular da reta em função do valor da abscissa do ponto de tangência era dado pela função $m = 4x_0 + 3$.

Figura 47 - Retas tangentes à parábola $y = 2x^2 + 3x + 1$



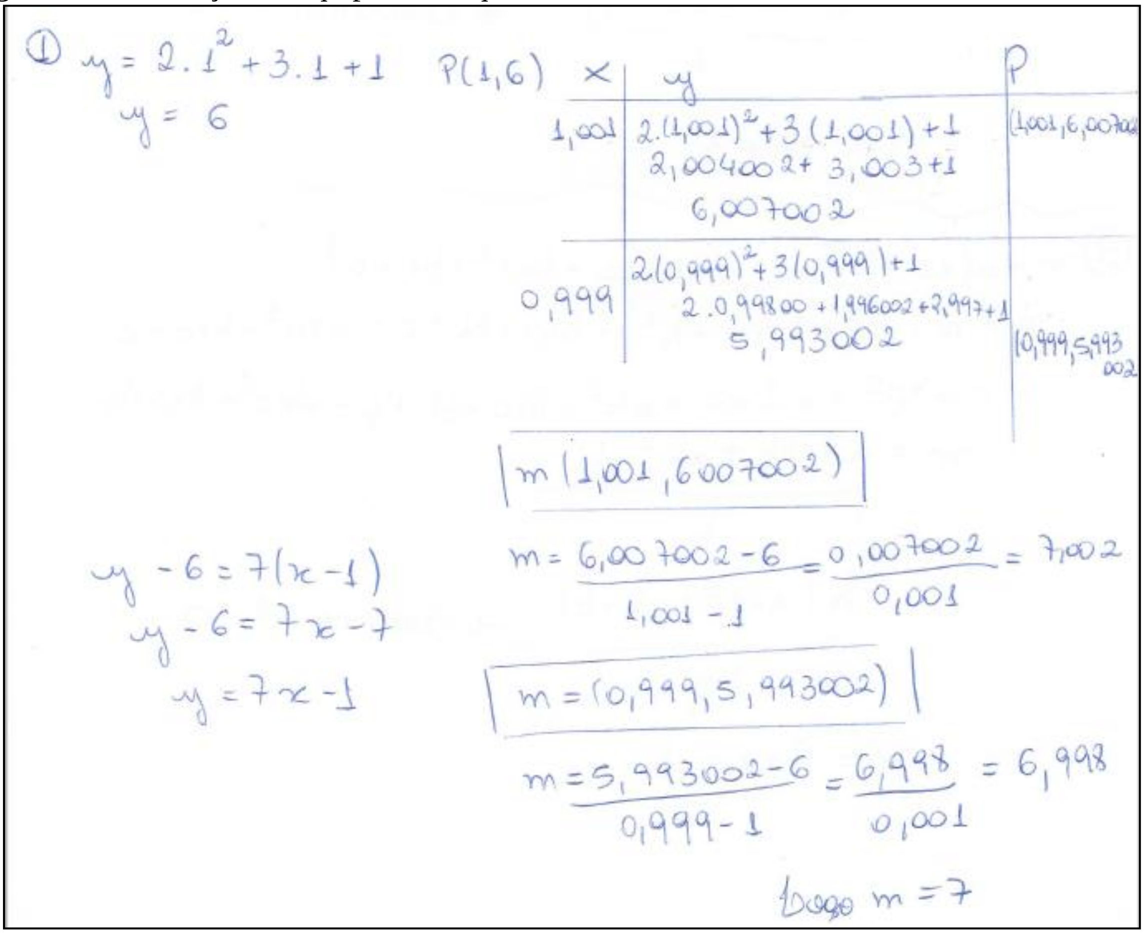
Fonte: Produção do autor, 2018.

6.3.2 Análise das resoluções da Atividade 3

Nesta seção apresentaremos a análise das respostas dadas pelas equipes E1, E2 e E3 para as três questões da Atividade 3, fazendo ponderações sobre a compreensão dos alunos sobre cada ponto e como eles evoluíram até esse ponto da pesquisa. Também alguns comentários sobre a escolha dos métodos utilizados e a autonomia dos alunos para a resolução dos problemas.

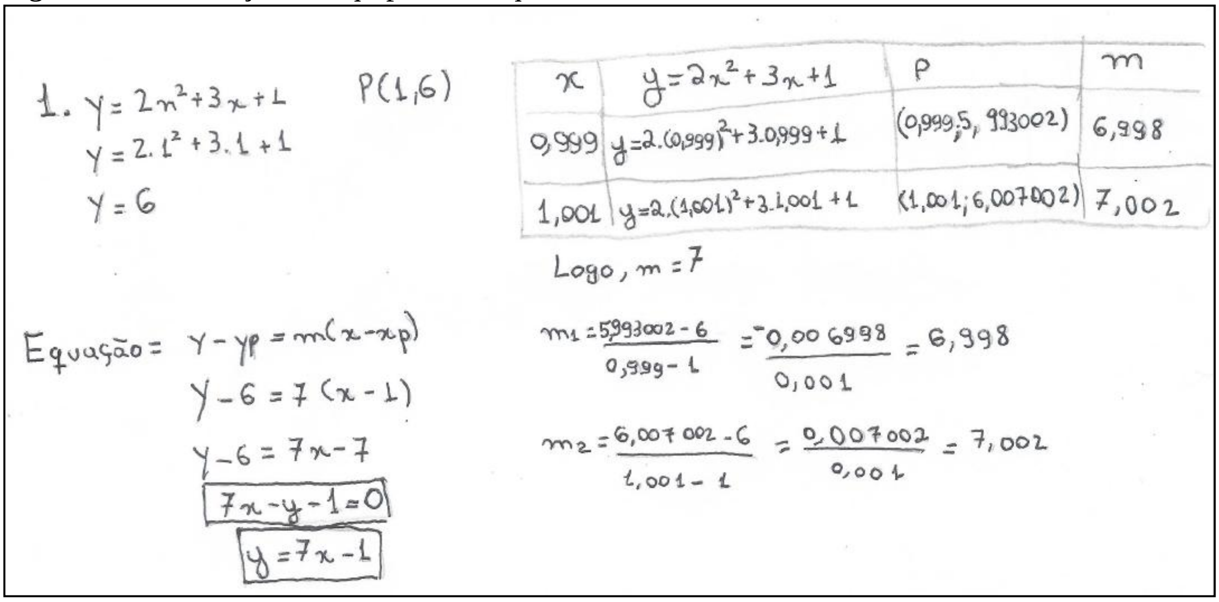
As equipes E1 e E2 inicialmente localizaram o ponto $P\,(1, 6)$, que é o ponto de abscissa 1 que pertence a parábola $y = 2x^2 + 3x + 1$. Na sequência, dotados dos conceitos desenvolvidos ao final da Atividade 2, essas equipes utilizaram como estratégia para encontrar o coeficiente angular da reta tangente a ideia de calcular o coeficiente angular de retas secantes tomando por base dois pontos muito próximos do ponto de abscissa 1, com aproximação de três casas decimais, sendo um deles com abscissa menor do que 1 e outro com abscissa maior do que 1. A saber, eles escolheram os pontos $P'(0{,}999; 5{,}993002)$ e $P''(1{,}001;\ 6{,}007002)$ pertencentes a parábola, e utilizaram o algoritmo $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, para calcular o coeficiente das retas secantes $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{PP''}$, sendo $m_1 = 6{,}998$ e $m_2 = 7{,}001$ os coeficientes angulares respectivamente. Sendo assim, essas equipes mostraram ter compreendido o processo de aproximação de retas secantes para determinação da reta tangente, e localizaram pontos suficientemente próximos a P para estimar o coeficiente angular da reta tangente, pois concluíram por meio dessas aproximações que $m = 7$ é o coeficiente angular da reta desejada. Por fim, aplicaram corretamente a equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$ para encontrar a equação da reta tangente procurada. As Figuras 48 e 49 ilustram as resoluções das equipes E1 e E2, respectivamente.

Figura 48 - Resolução da equipe E1 da questão 1 da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

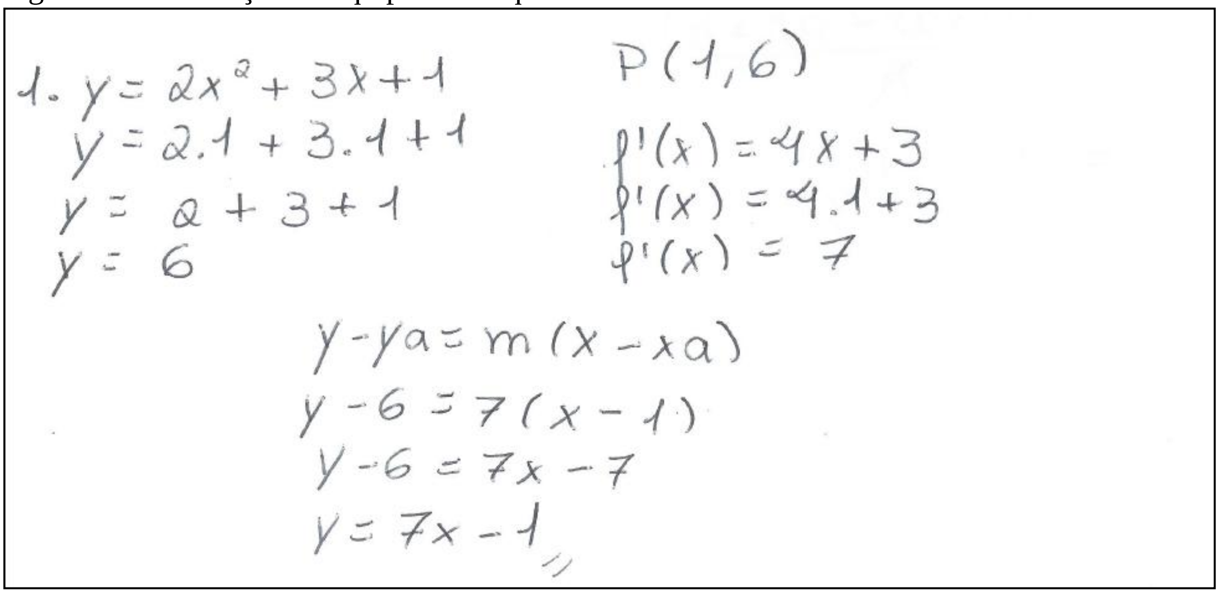
Figura 49 - Resolução da equipe E2 da questão 1 da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe E3 que contava com um integrante que já havia estudado previamente conceitos de Cálculo, também inicialmente localizou o ponto $P\ (1, 6)$ pertencente à parábola e solicitado no enunciado, porém, para determinar o coeficiente angular, recorreu a derivada da função $y = 2x^2 + 3x + 1$, que é $y^{'} = 4x + 3$. Substituindo x por 1 na função y' (derivada) a equipe E3 encontrou o coeficiente angular $m = 7$ (Figura 50).

Figura 50 - Resolução da equipe E3 da questão 1 Atividade 3

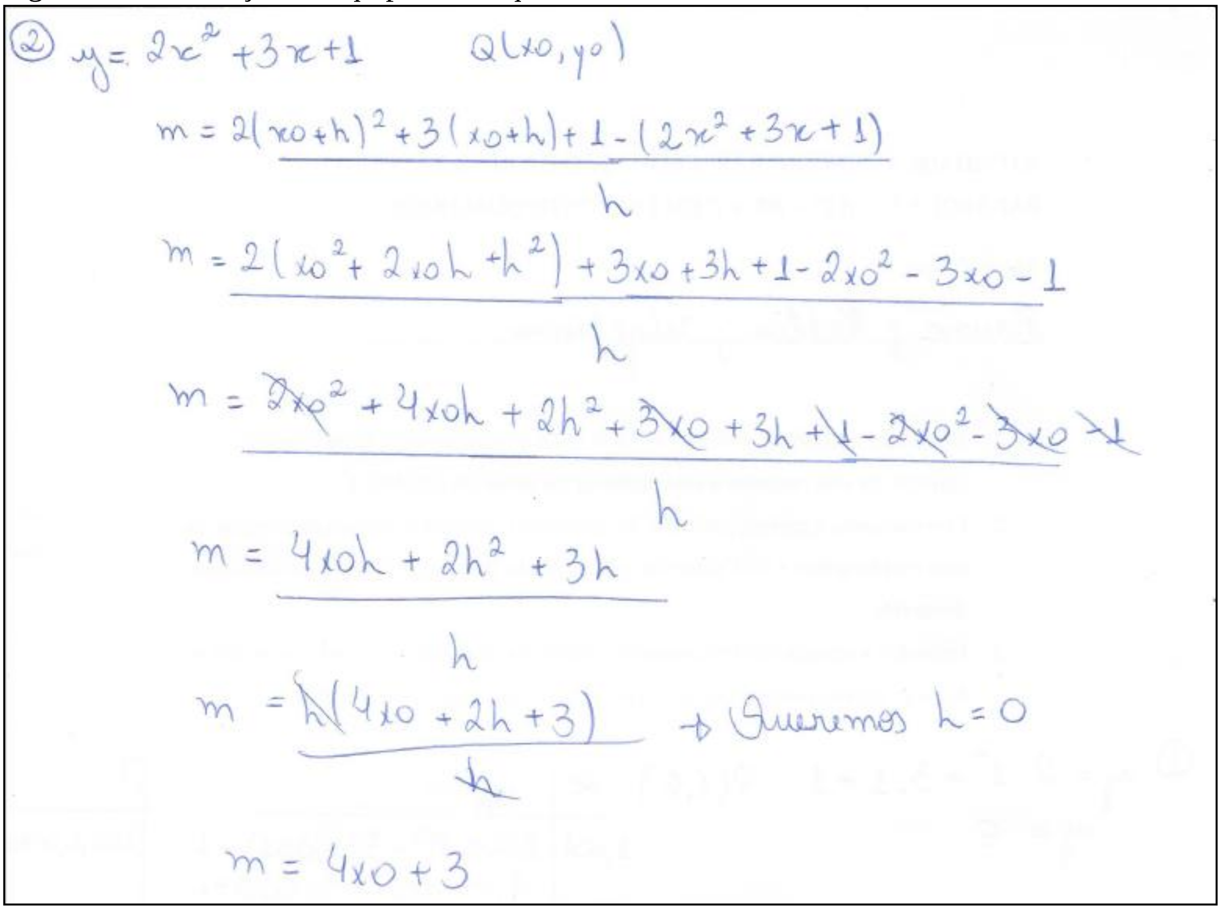


Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A resolução apresentada pela equipe E3 encaixa-se na metodologia RP, visto que o aluno por si próprio buscou informações e conhecimentos, motivados pelo tema das aulas desse projeto de pesquisa. As ideias utilizadas foram discutidas entre os membros da equipe enquanto resolviam essa questão e o professor acompanhou o debate das ideias para verificar se os alunos estavam compreendendo o plano de resolução proposto. O plano de resolução adotado pela equipe foi eficaz, e levou os alunos a solução correta da atividade.

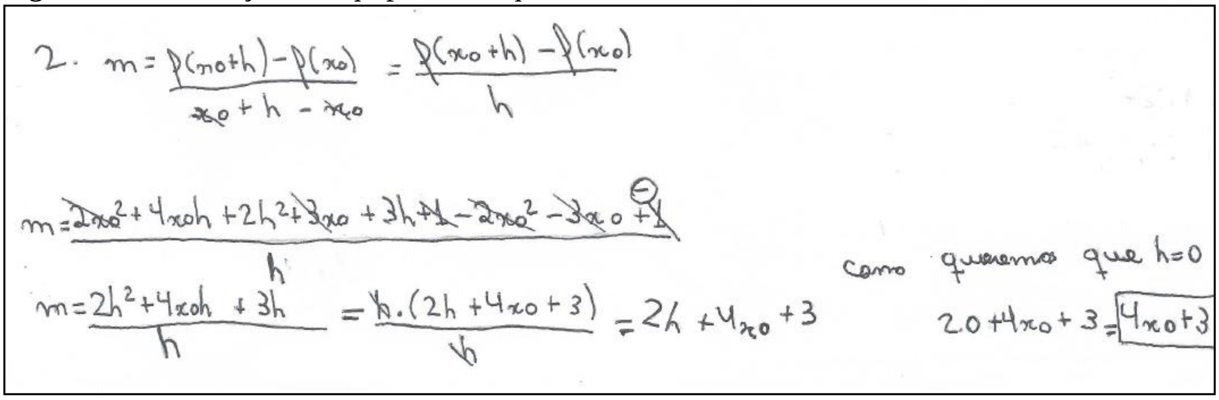
Para resolver a questão 2, as três equipes utilizaram o mesmo plano para a solução que foi discutido juntamente com o professor. As equipes demonstraram facilidade para manusear a função quadrática dada ao substituí-la no quociente de Newton, obtendo êxito na generalização da reta tangente a parábola $y = 2x^2 + 3x + 1$ em qualquer ponto. O destaque fica ao fato de que a equação $m = 4x_0 + 3$ encontrada nessa solução, foi a equação obtida pela equipe E3 na resolução da questão 1. Desse modo pode-se observar que a ideia de E3 para a questão 2 já estava trabalhando com uma generalização. As resoluções das equipes estão nas Figuras 51, 52 e 53.

Figura 51 - Resolução da equipe E1 da questão 2 da Atividade 3



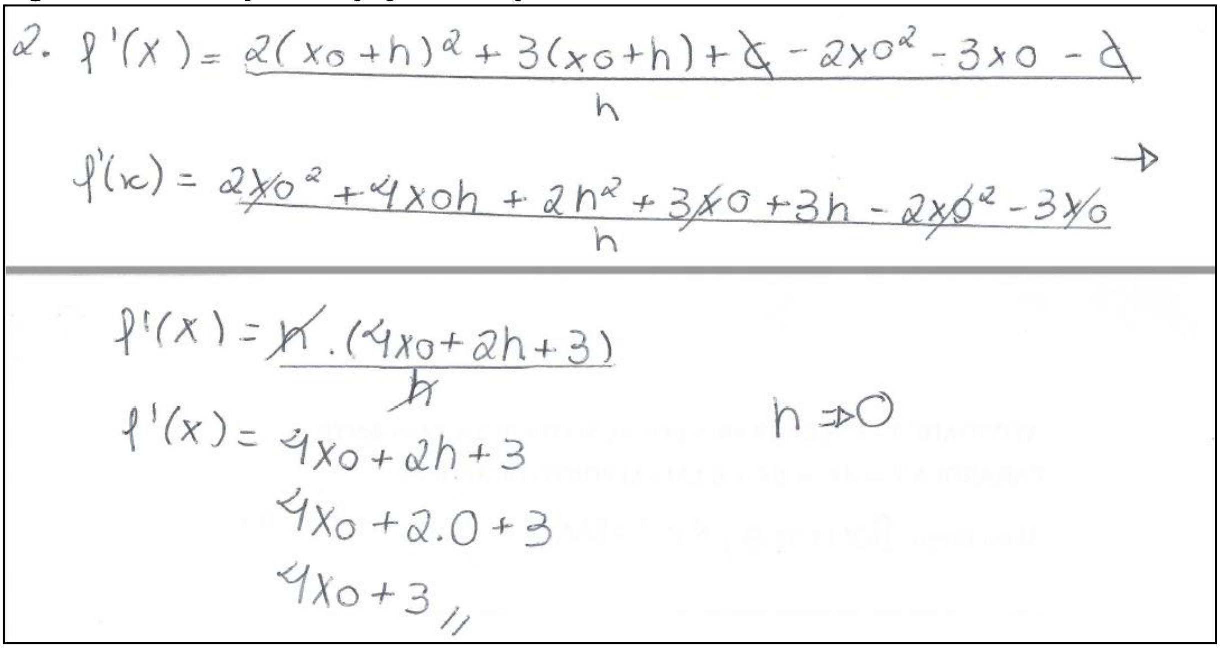
Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 52 - Resolução da equipe E2 da questão 2 da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 53 - Resolução da equipe E3 da questão 2 da Atividade 3

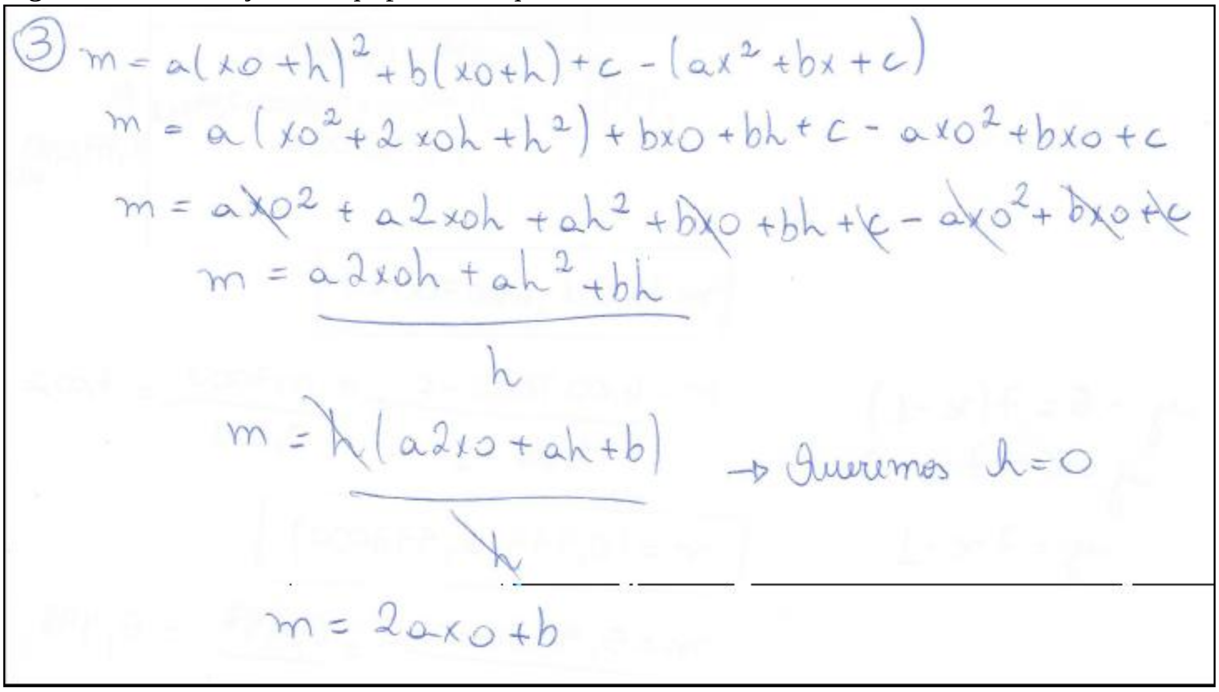


Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Podemos observar que na solução apresentada por E3, existe um equívoco de notação, pois eles denotam como $f^{'}(x)$ o quociente de Newton, mas na verdade a notação $f^{'}(x)$ deve ser utilizada somente após tomar o valor de $h = 0$, sendo que deveria ser notado como $f'(x_0)$.

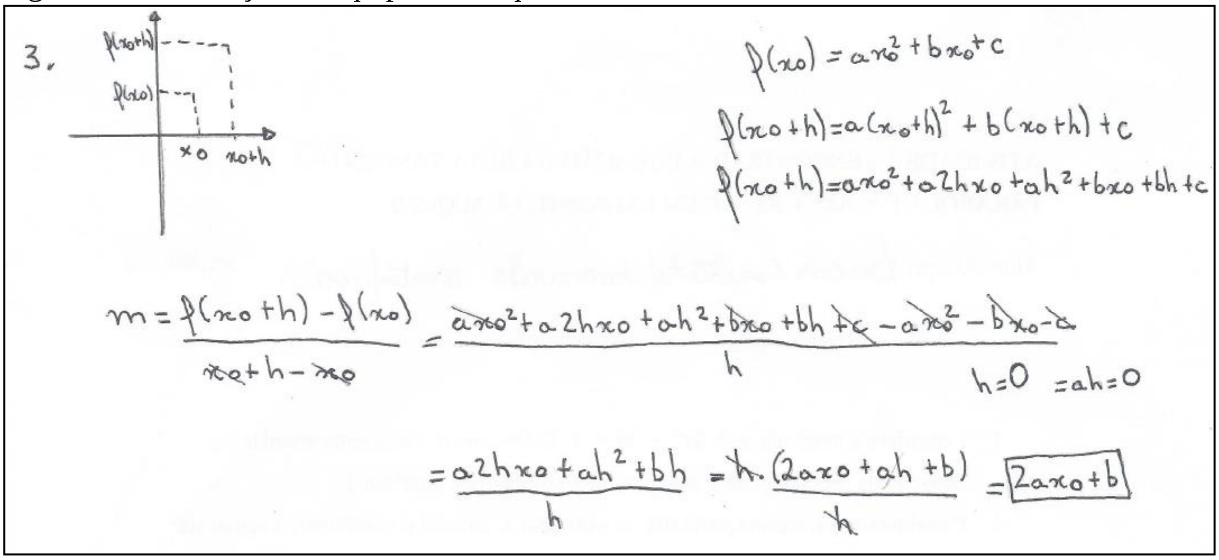
Na terceira questão da Atividade 3, que tinha por objetivo determinar a equação tangente à uma parábola qualquer num ponto qualquer, os alunos adotaram a mesma ideia utilizada na questão 2, substituindo a função genérica $f(x) = ax^2 + bx + c$ no quociente de Newton. Com base no que desenvolveram na questão anterior, os alunos não tiveram dificuldades para manipular algebricamente o quociente e, como desejava-se um incremento cada vez menor, conforme a reta tangente fosse aproximada pelas as retas secantes, determinaram que o valor do incremento h deveria ser tomado igual a zero. Concluindo assim que $m = 2ax_0 + b$, que é a generalização do coeficiente angular da reta tangente a parábola $y = ax^2 + bx + c$ em um ponto de abscissa x_0. Os detalhes das resoluções podem ser observados nas Figuras 54, 55 e 56.

Figura 54 - Resolução da equipe E1 da questão 3 da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 55 - Resolução da equipe E2 da questão 3 da Atividade 3



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 56 - Resolução da equipe E3 da questão 3 da Atividade 3

3. $f'(x) = \dfrac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h}$

$$= \frac{\cancel{ax^2} + 2axh + ah^2 + \cancel{bx} + bh - \cancel{ax^2} - bx}{h}$$

$$= \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} \qquad h \to 0$$

$$= \frac{\cancel{h}(2ax + ah + b)}{\cancel{h}}$$

$$= 2ax + b \;//$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Na resolução de E3 podemos novamente observar o equívoco na notação utilizada pela equipe, conforme comentado na questão 2.

Para essa atividade podem ser destacados alguns objetivos e processos que fazem parte da metodologia da RP. Primeiramente, os alunos utilizaram os conhecimentos adquiridos durante o desenvolvimento da Atividade 2, para resolver as questões propostas na Atividade 3, ampliando os conceitos construídos e aplicando-os em problemas de maior complexidade. Destaca-se também o fato das equipes terem utilizado estratégias diferentes para a resolução da primeira questão, na qual nota-se o espírito investigativo de um dos alunos que pesquisou por conta própria, métodos para a resolução de problemas cujo tema fazia parte de nossa pesquisa. As interferências pontuais do professor ao que se referem ao desenvolvimento das soluções, na qual as equipes tiveram liberdade para discutirem entre si os processos de resolução, revela o caráter protagonista dos alunos no desenvolvimento dessa atividade, bem como o debate de ideias que levou os alunos a construção da ideia do incremento h para os valores da abscissa e para atribuir valor zero a esse incremento, para assim obter inclinação da reta tangente num ponto, corroboram com a metodologia da RP, que ressalta a importância de incentivar a discussão entre os alunos, a investigação e a troca de ideias entre professor e alunos. Nesse ponto da pesquisa, a evolução dos alunos quanto a compreensão das proposições de cada atividade e das ideias apresentadas era notória, os alunos apresentavam-se mais seguros de suas ideias e com um caráter investigativo mais apurado.

6.4 ATIVIDADE 4: EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE À UMA CURVA NÃO PARABÓLICA EM UM PONTO QUALQUER

A quarta atividade desta pesquisa se deu no terceiro encontro com as turmas, com espaço e estrutura disponibilizados pela escola conforme os encontros anteriores, contando com a presença de nove alunos, que estavam presentes no segundo encontro. Novamente, o pesquisador dividiu os alunos em três equipes, como esse era o último encontro dessa pesquisa, deu a liberdade de os alunos escolherem suas equipes. A exemplo do que fora feito anteriormente, as equipes serão identificadas como E1, E2 e E3, preservando as identidades dos alunos.

A quarta atividade desta sequência tinha como objetivo utilizar os conceitos desenvolvidos nas atividades anteriores para determinar a equação de uma reta tangente à uma curva, em funções que não fossem quadráticas (definição intuitiva de derivada), inicialmente em um determinado ponto pertencente a essa curva, conhecendo-se o valor de sua abscissa, e na sequência, generalizando para um ponto qualquer. Para isso, os alunos deveriam utilizar os mesmos conceitos construídos durante as Atividades 2 e 3, o coeficiente angular de retas secantes como é estudado em Geometria Analítica.

Para iniciar a atividade, o pesquisador entregou para cada um dos alunos presentes, uma folha com o questionário da Atividade 4 (Apêndice D), conforme resumido no Quadro 6.

Quadro 6 - Resumo da Atividade 4 da sequência desenvolvida na pesquisa

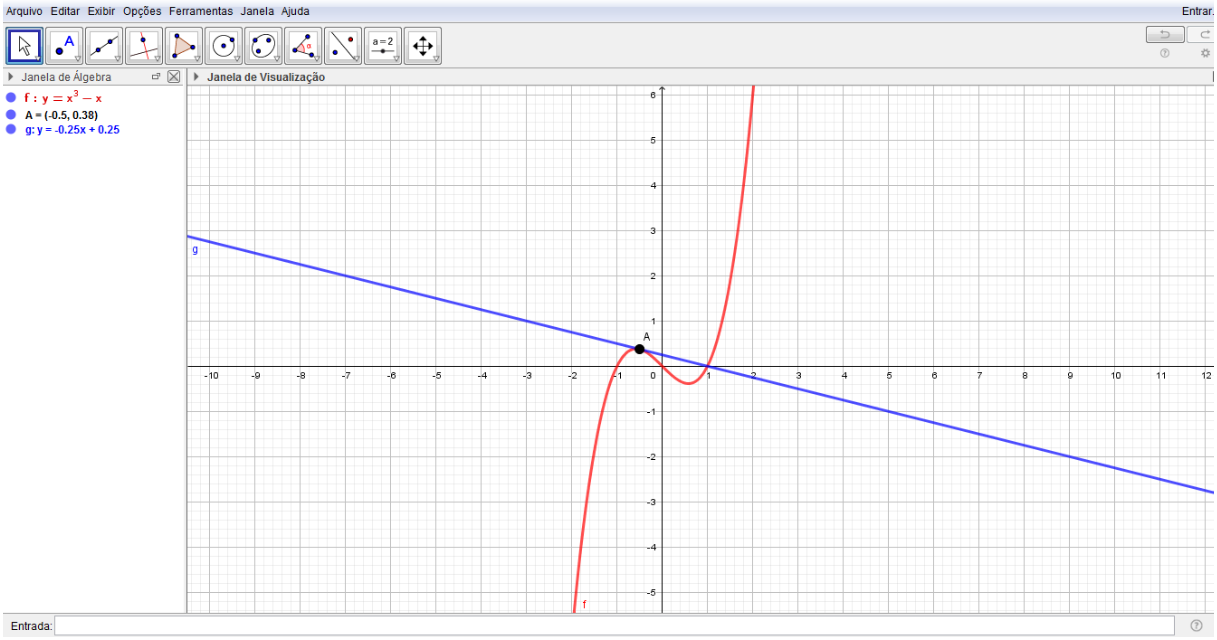
1. Calcular o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^3 - x$, no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{2}$;
2. Generalizar o coeficiente angular da reta tangente em um ponto qualquer da curva considerada no item 1;
3. Determinar a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$;
4. Generalizar o coeficiente angular da reta tangente à um ponto qualquer da curva considerada no item 3;

Fonte: Produção do autor, 2018.

6.4.1 Desenvolvimento da Atividade 4

Para resolver a primeira questão da Atividade 4, as três equipes utilizaram os métodos desenvolvidos nas Atividades 2 e 3, embora tomando alguns caminhos diferentes, eles utilizaram os caminhos de resolução que aparentemente mais se familiarizaram, alguns tomando aproximações de retas secantes, e outros aplicando o algoritmo $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}$ num ponto arbitrário. Para a formalização, o pesquisador utilizou o software GeoGebra, conforme ilustra a Figura 57.

Figura 57 - Reta tangente à curva $y = x^3 - x$ no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{2}$



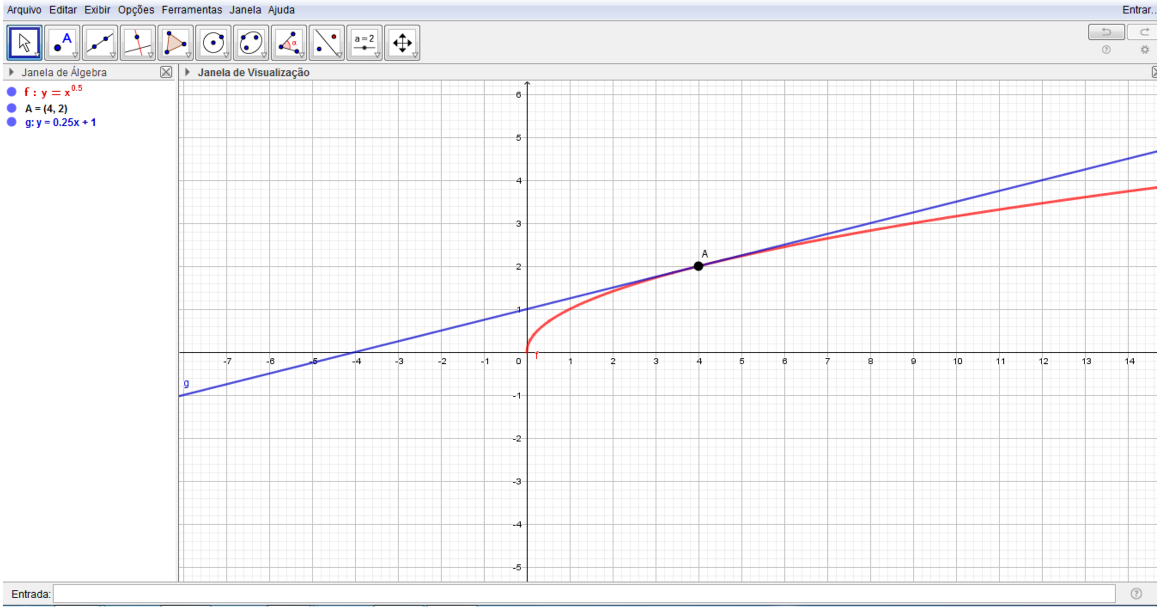
Fonte: Produção do autor, 2018.

Para resolver a questão 2 dessa atividade, o pesquisador questionou aos alunos qual método eles poderiam utilizar, tomando por base os conceitos desenvolvidos nas atividades anteriores. As equipes prontamente concordaram que deveriam utilizar a ideia de generalização adotada na questão 3 da Atividade 3, porém ao iniciarem o desenvolvimento, as equipes E1 e E2 tiveram um pouco de dificuldade para desenvolver o cubo da soma na função $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 - (x_0 + h)$. Sendo assim, o pesquisador teve que fazer uma breve interferência, relembrando aos alunos que o desenvolvimento do produto notável $(a + b)^3$ pode ser feito utilizando a propriedade distributiva. Após essa interferência, os alunos não encontraram dificuldades em desenvolver o "cubo da soma" chegando ao resultado $m = 3{x_0}^2 - 1$. A equipe E3, que já havia utilizado praticamente o mesmo método na resolução do primeiro item da atividade, apenas o repetiu para completar a tarefa.

Quanto a solução da questão 3 dessa atividade, as três equipes utilizaram o método de aproximação de retas secantes para encontrar o coeficiente angular da reta tangente. Acreditamos que a equipe E3 o tenha adotado para essa questão, pois o desenvolvimento pelo quociente de Newton se torna mais complicado para a função $f(x) = \sqrt{x}$, ou ainda por talvez acreditarem que o método das secantes seria o método correto, já que no primeiro item somente essa equipe adotou um procedimento diferente.

Os resultados foram verificados pelo pesquisador juntamente aos alunos, utilizando mais uma vez o software *GeoGebra*, como recurso visual, conforme mostra a Figura 58.

Figura 58 - Reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$



Fonte: Produção do autor, 2018.

Para a solução da questão 4, as equipes já demonstraram maior autonomia e confiança para resolvê-lo, pois já sabiam que deveriam utilizar o quociente $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}$, para generalizar o coeficiente angular em um ponto qualquer pertencente a função dada no item 3. Então, ao iniciarem a resolução da questão, encontraram dificuldades para desenvolver algebricamente o quociente, pois não sabiam o que fazer com as raízes existentes, sendo que neste caso temos $f(x_0 + h) = \sqrt{x_0 + h}$ e $f(x_0) = \sqrt{x_0}$. Então, o pesquisador fez uma intervenção com as equipes com o seguinte questionamento: “de que modo vocês estão habituados a fazer o cancelamento de raízes que se encontram nos denominadores de frações?” Prontamente os alunos responderam que faziam o processo de racionalização. Importante ressaltar que os alunos desconheciam o fato de que eles podem fazer racionalização de raízes que se encontram nos numeradores, pois o processo é pouco aplicado nos conteúdos trabalhados no Ensino Médio. Então, os alunos adotaram o processo de racionalização, de modo que conseguiram simplificar as raízes nos numeradores, e ao final, utilizaram a ideia construída nas atividades anteriores, em tomar o complemento h com valor nulo. Deste modo os alunos conseguiram generalizar o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$, encontrando a expressão $m = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, sendo x_0 a abscissa do ponto de tangência. Todas as equipes adotaram o mesmo procedimento e obtiveram o mesmo resultado.

6.4.2 Análise das resoluções da Atividade 4

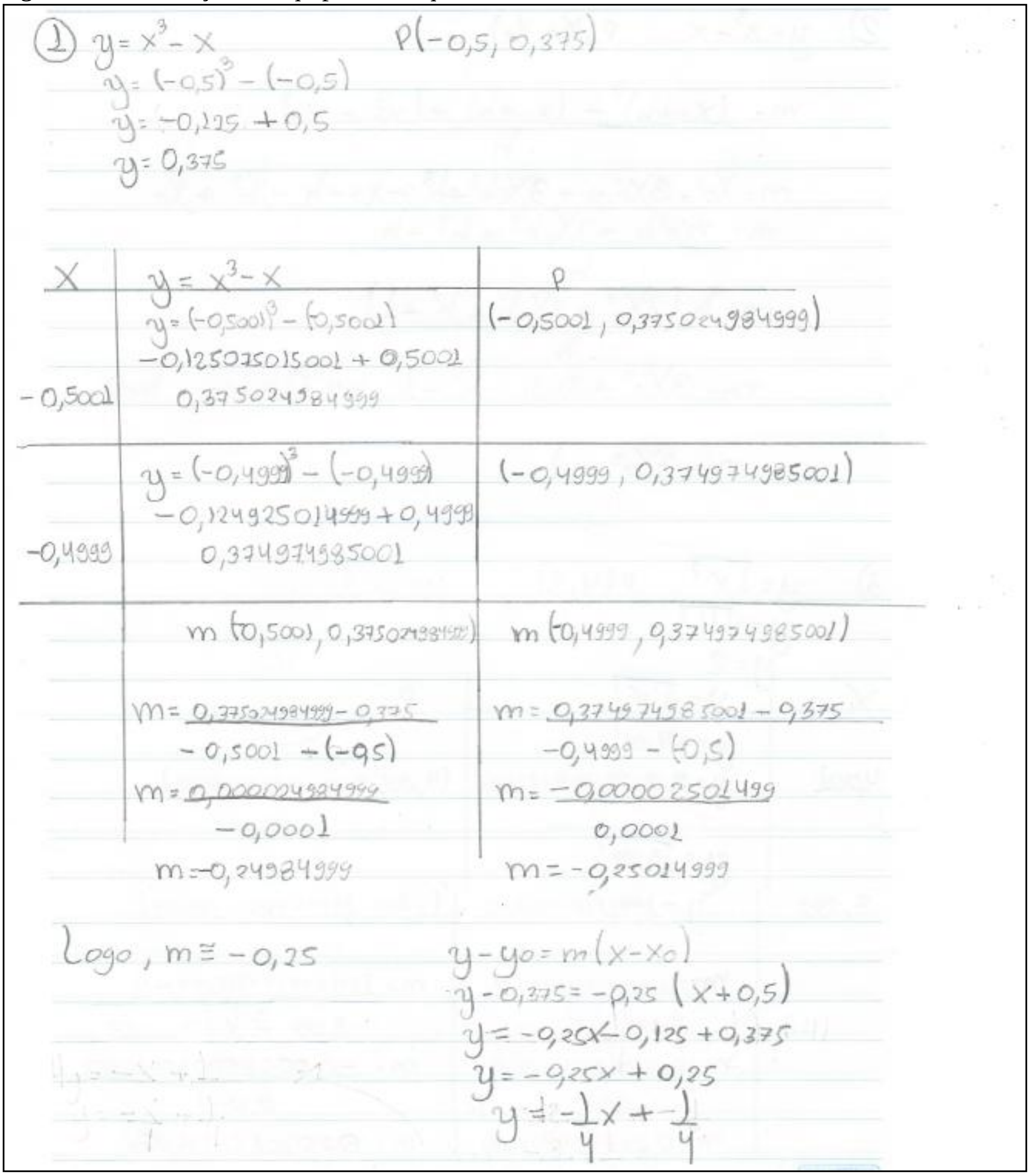
De modo similar ao feito nas atividades anteriores, apresentaremos as resoluções das equipes E1, E2 e E3 para as quatro questões da Atividade 4, fazendo ponderações sobre o sucesso ou não na resolução dos problemas, analisando seu desempenho quanto aos métodos escolhidos para a solução de cada questão.

Para as resoluções pedidas nessa atividade, o professor não indicou aos alunos qual método eles deveriam utilizar para encontrar os coeficientes angulares e equações das retas que os problemas exigiam, pois os alunos já utilizaram esses métodos na Atividade 3, inclusive estando nesse momento da pesquisa aptos a procurarem por diferentes caminhos para resolver os problemas.

A primeira questão consistia em determinar o coeficiente angular e a equação da reta tangente a curva $y = x^3 - x$ no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{2}$, as equipes E1 e E2 optaram pelo método de aproximações de retas secantes.

A equipe E1 inicialmente determinou o ponto de tangência $P\,(-0{,}5; 0{,}375)$, que pertence à curva $y = x^3 - x$. Então, com o auxílio da calculadora, localizou mais dois pontos $P'(-0{,}5001; 0{,}37502498499)$ e $P''(-0{,}4999;\ 0{,}374974985001)$, próximos do ponto de tangência P, e calculou os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{PP''}$ secantes à curva $y = x^3 - x$. Encontraram respectivamente os coeficientes $m_1 = -0{,}24984099$ e $m_2 = -0{,}25014999$. Com esses dados e com as ideias construídas nas resoluções da Atividade 2 desta sequência, a equipe concluiu que o coeficiente angular da reta tangente no ponto P tem coeficiente angular $m = -0{,}25$. Por fim, a equipe aplicou a equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$ e determinou a equação $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, que é a equação da reta tangente procurada.

Figura 59 - Resolução da equipe E1 da questão 1 da Atividade 4



① $y = x^3 - x$ $\quad P(-0{,}5;\ 0{,}375)$

$y = (-0{,}5)^3 - (-0{,}5)$

$y = -0{,}125 + 0{,}5$

$y = 0{,}375$

X	$y = x^3 - x$	P
$-0{,}5001$	$y = (-0{,}5001)^3 - (0{,}5001)$ $-0{,}125075015001 + 0{,}5001$ $0{,}375024984999$	$(-0{,}5001;\ 0{,}375024984999)$
$-0{,}4999$	$y = (-0{,}4999)^3 - (-0{,}4999)$ $-0{,}124925014999 + 0{,}4999$ $0{,}374974985001$	$(-0{,}4999;\ 0{,}374974985001)$
	$m\ (0{,}5001;\ 0{,}375024984999)$ $m = \dfrac{0{,}375024984999 - 0{,}375}{-0{,}5001 - (-0{,}5)}$ $m = \dfrac{0{,}000024984999}{-0{,}0001}$	$m\ (0{,}4999;\ 0{,}374974985001)$ $m = \dfrac{0{,}374974985001 - 0{,}375}{-0{,}4999 - (0{,}5)}$ $m = \dfrac{-0{,}000025014999}{0{,}0001}$

$m = -0{,}24984999$ $\qquad m = -0{,}25014999$

Logo, $m \cong -0{,}25$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0{,}375 = -0{,}25\ (x + 0{,}5)$

$y = -0{,}25x - 0{,}125 + 0{,}375$

$y = -0{,}25x + 0{,}25$

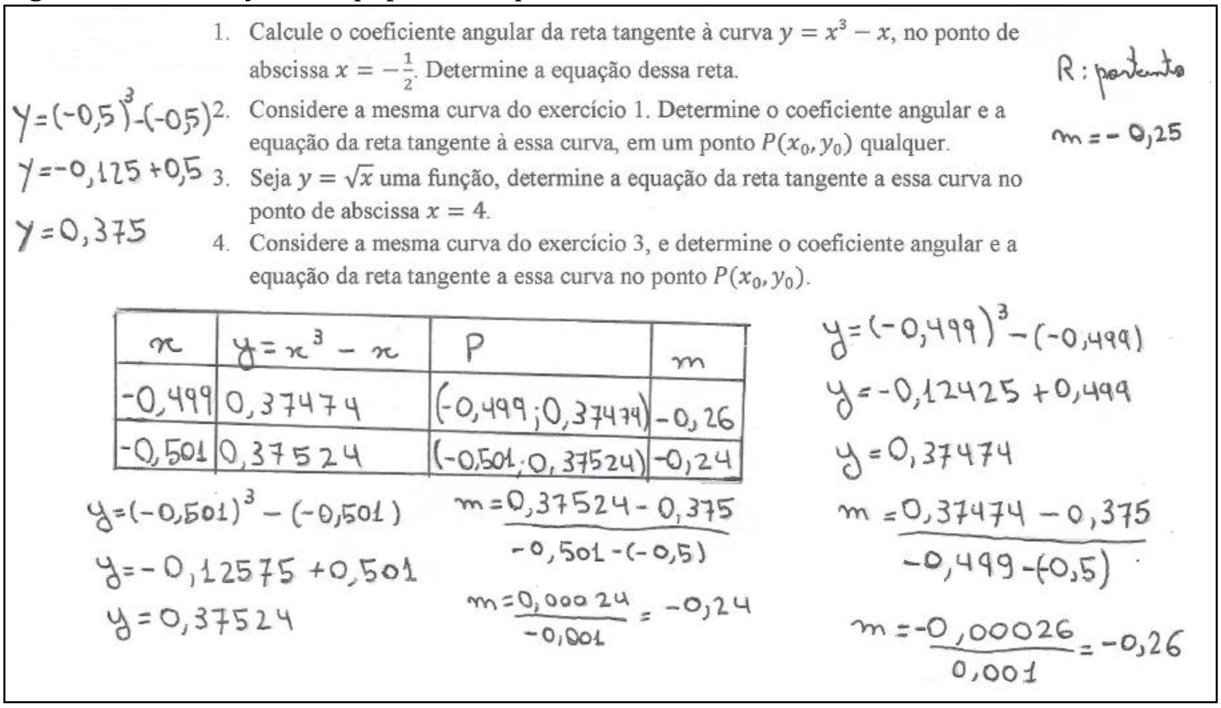
$y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe E2 iniciou a resolução determinando as coordenadas do ponto de tangência $P\ (-0{,}5; 0{,}375)$ e com o auxílo da calculadora, encontrou os pontos $P^{'}(-0{,}499; 0{,}37474)$ e $P^{''}(-0{,}501;\ 0{,}37524)$, pontos próximos a P, e calculou o coeficiente angular das retas secantes à curva $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{PP''}$ de modo semelhante ao processo abordado pela equipe E1, porém com uma precisão decimal menor. Encontraram os coeficientes angulares $m_1 = -0{,}26$ e $m_2 = -0{,}24$ (Figura 60). Assim, concluíram com base nos experimentos desenvolvidos nas

Atividades 2 e 3, que o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto P era $m = -0{,}25$. A equipe E2 não finalizou esse item da atividade, pois não determinou a equação da reta tangente, o que cremos ter sido por distração.

Figura 60 - Resolução da equipe E2 da questão 1 da Atividade 4



1. Calcule o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^3 - x$, no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{2}$. Determine a equação dessa reta.
2. Considere a mesma curva do exercício 1. Determine o coeficiente angular e a equação da reta tangente à essa curva, em um ponto $P(x_0, y_0)$ qualquer.
3. Seja $y = \sqrt{x}$ uma função, determine a equação da reta tangente a essa curva no ponto de abscissa $x = 4$.
4. Considere a mesma curva do exercício 3, e determine o coeficiente angular e a equação da reta tangente a essa curva no ponto $P(x_0, y_0)$.

$y = (-0{,}5)^3 - (-0{,}5)$
$y = -0{,}125 + 0{,}5$
$y = 0{,}375$

R: portanto $m = -0{,}25$

x	$y = x^3 - x$	P	m
-0,499	0,37474	(-0,499;0,37474)	-0,26
-0,501	0,37524	(-0,501;0,37524)	-0,24

$y = (-0{,}501)^3 - (-0{,}501)$
$y = -0{,}12575 + 0{,}501$
$y = 0{,}37524$

$m = \frac{0{,}37524 - 0{,}375}{-0{,}501 - (-0{,}5)}$
$m = \frac{0{,}00024}{-0{,}001} = -0{,}24$

$y = (-0{,}499)^3 - (-0{,}499)$
$y = -0{,}12425 + 0{,}499$
$y = 0{,}37474$

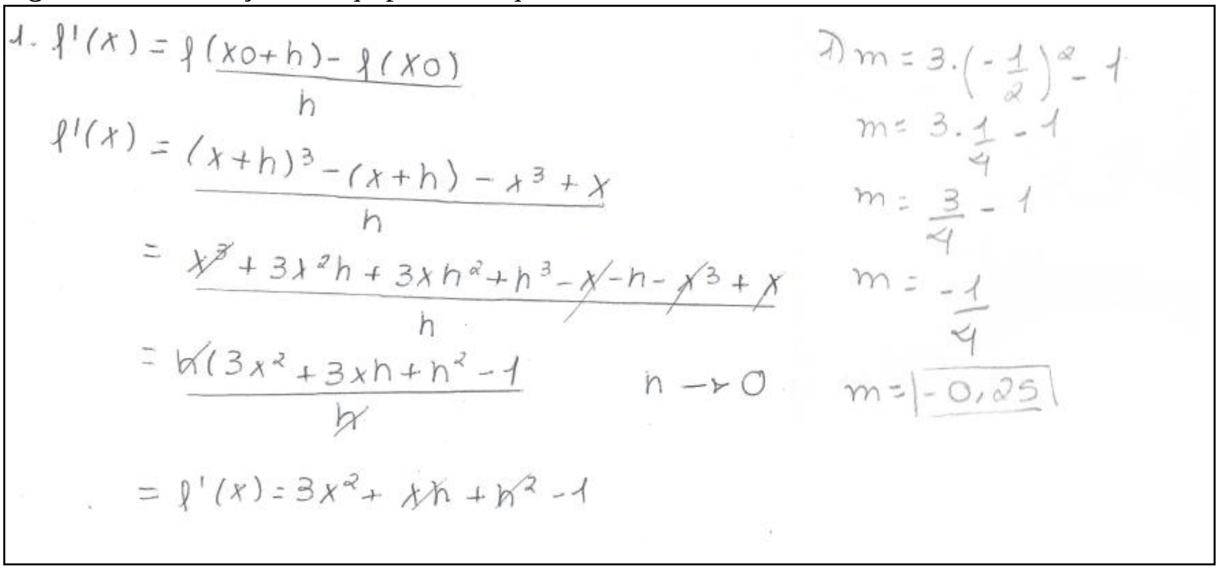
$m = \frac{0{,}37474 - 0{,}375}{-0{,}499 - (-0{,}5)}$
$m = \frac{-0{,}00026}{0{,}001} = -0{,}26$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

As equipes obtiveram êxito para determinar o coeficiente angular da reta tangente, seguindo os passos propostos nas resoluções anteriores, diferenciando-se pela precisão decimal para representar os resultados. Esse modelo de resolução é viável somente se os alunos estão em posse de calculadoras, o que era o caso em nossa pesquisa.

Já a equipe E3 utilizou uma proposta de resolução diferente das demais equipes para determinar o coeficiente angular da reta tangente. A equipe não se preocupou em determinar o ponto de tangência, tampouco trabalhou com retas secantes definidas (a partir de pontos próximos ao ponto de tangência dado). Eles determinaram o coeficiente angular da reta tangente para um ponto qualquer da curva, utilizando o conceito desenvolvido durante a questão 3 da Atividade 3, ou seja, utilizando o coeficiente $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}$. Assim, encontraram a função $f(x+h) = (x+h)^3 - (x+h)$, e a substituíram junto com a função $f(x) = x^3 - x$ no algoritmo supracitado. Desenvolvendo a expressão, tomando um incremento h tão próximo de zero o quanto se queira, encontraram a função $m = 3x^2 - 1$. Desse modo obtiveram uma expressão que determina o coeficiente angular da reta tangente a uma curva em qualquer ponto pertencente a ela. Então, substituíram o valor $x = -\frac{1}{2}$ nessa função, encontrando assim o coeficiente angular $m = -\frac{1}{4}$. Apesar de utilizarem o método mais formal de determinar o coeficiente angular da reta, a equipe E3 também não determinou a equação da reta que tangencia a curva no ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$, talvez por não achar necessário fazê-lo por causa do método que adotaram (Figura 61). Para evitar que os alunos confundissem conceitos (por exemplo, acreditar que a função $m = 3x^2 - 1$) pudesse ser a equação da reta tangente, o pesquisador fez uma intervenção utilizando o software *GeoGebra* mostrando aos alunos que a solução correta para a equação da reta foi apresentada pela equipe E1 (Figura 57).

Figura 61 - Resolução da equipe E3 da questão 1 da Atividade 4



1. $f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$f'(x) = \frac{(x+h)^3 - (x+h) - x^3 + x}{h}$

$= \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x} - h - \cancel{x^3} + \cancel{x}}{h}$

$= \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2 - 1}{\cancel{h}}$ $\quad h \to 0$

$= f'(x) = 3x^2 + \cancel{x}h + \cancel{h^2} - 1$

2) $m = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1$

$m = 3.\frac{1}{4} - 1$

$m = \frac{3}{4} - 1$

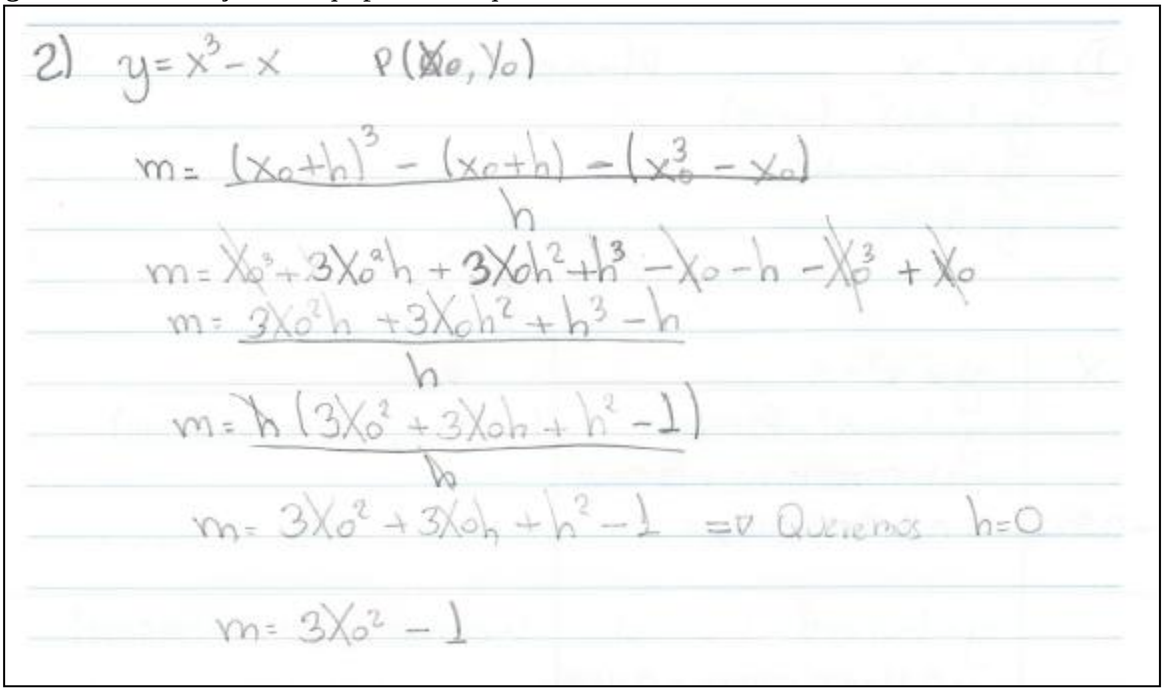
$m = -\frac{1}{4}$

$m = \boxed{-0,25}$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Para resolver o item 2 dessa atividade, as equipes não demonstraram dificuldades, pois estavam dotados dos conceitos e da prática aplicada na atividade anterior. As três equipes utilizaram o mesmo método de resolução, com a ressalva de que a equipe E3 teve que somente repetir o desenvolvimento que utilizaram no item 1. As Figuras 62, 63 e 64 mostram essas resoluções.

Figura 62 - Resolução da equipe E1 da questão 2 da Atividade 4


2) $y = x^3 - x$ $\quad P(x_0, y_0)$

$$m = \frac{(x_0+h)^3 - (x_0+h) - (x_0^3 - x_0)}{h}$$

$$m = \cancel{x_0^3} + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - \cancel{x_0} - h - \cancel{x_0^3} + \cancel{x_0}$$

$$m = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - h}{h}$$

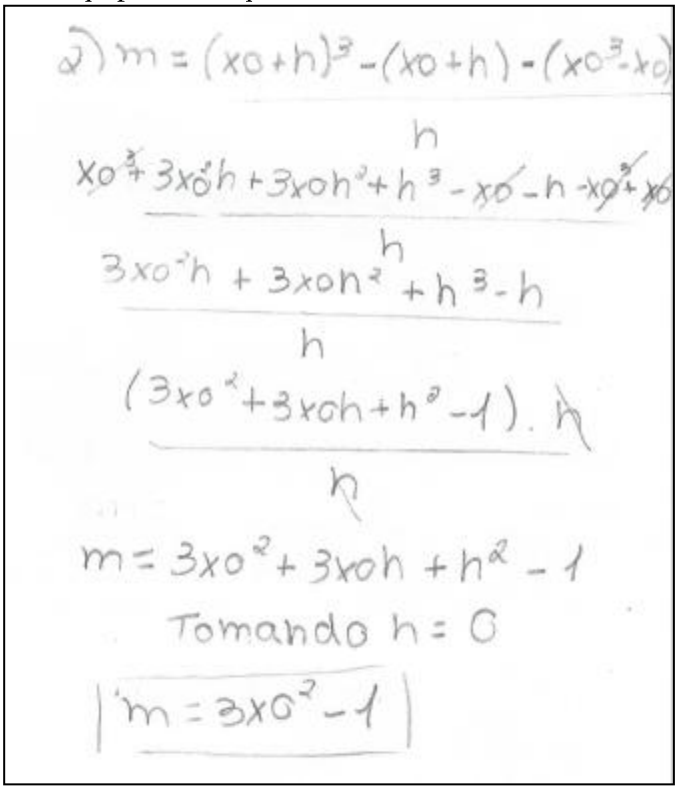
$$m = \frac{\cancel{h}(3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1)}{\cancel{h}}$$

$$m = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1 \Rightarrow \text{Queremos } h = 0$$

$$m = 3x_0^2 - 1$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 63 - Resolução da equipe E3 da questão 2 da Atividade 4


2) $$m = \frac{(x_0+h)^3 - (x_0+h) - (x_0^3 - x_0)}{h}$$

$$\frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - \cancel{x_0} - h - \cancel{x_0^3} + \cancel{x_0}}{h}$$

$$\frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - h}{h}$$

$$\frac{(3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1) \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$m = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1$$

Tomando $h = 0$

$$\boxed{m = 3x_0^2 - 1}$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 64 - Resolução da equipe E2 da questão 2 da Atividade 4

$$2.\ m = \frac{(x_0+h)^3 - (x_0+h) - (x_0^3 - x_0)}{h} \rightarrow m = \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - \cancel{x_0} - h - \cancel{x_0^3} + \cancel{x_0}}{h}$$

$$m = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - h}{h} \rightarrow m = \frac{(3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1)\cancel{h}}{\cancel{h}} \rightarrow 3x_0^2 + 3x_0h + h^2 - 1$$

tomando $h = 0$

$$\boxed{m = 3x_0^2 - 1}$$

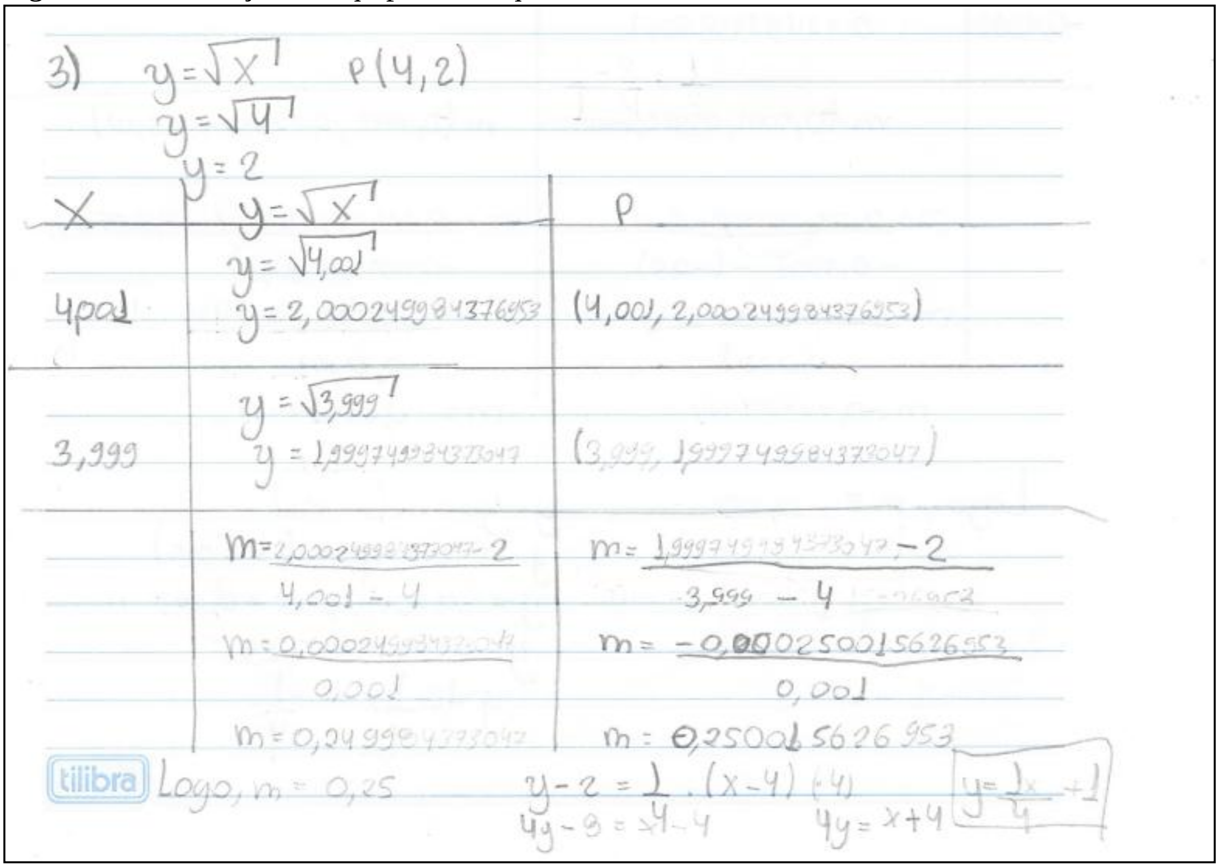
Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

As três equipes obtiveram êxito na obtenção da generalização do coeficiente angular de uma reta tangente a curva $y = x^3 - x$, num ponto de abscissa x_0 qualquer. Como era esperado a essa altura da pesquisa, os alunos não encontrariam dificuldades em manusear algebricamente o quociente de Newton, determinando assim o coeficiente angular da reta tangente (que é a derivada da função) no ponto x_0.

A terceira questão dessa atividade conforme a metodologia da RP apresenta um caráter de exercício e não de situação problema, pois aos alunos caberia fazer uma aplicação dos mesmos conceitos aplicados nos dois itens anteriores, porém agora para outro tipo de função, a curva $y = \sqrt{x}$. Desta vez, as três equipes utilizaram o método de aproximação de retas secantes, para encontrar o coeficiente angular da reta tangente.

A equipe E1 primeiramente encontrou o ponto $P(4,2)$ pertencente à curva $y = \sqrt{x}$, e após isso, com o auxílio da calculadora encontrou os pontos $P^{'}(4{,}001; 2{,}000249984373047)$ e $P^{''}(3{,}999;\ 1{,}999749984373047)$ e por fim, calculou os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{PP'}$ e $\overleftrightarrow{PP''}$, que são respectivamente $m_1 = 0{,}249984373047$ e $m_2 = 0{,}250015626953$. Com os conceitos desenvolvidos até essa etapa da pesquisa, a equipe concluiu que o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto P é $m = 0{,}25$. Efetuado o cálculo do coeficiente angular, a equipe aplicou a equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, e determinou a equação da reta tangente, ou seja, $y = \frac{1}{4}x + 1$ (Figura 65).

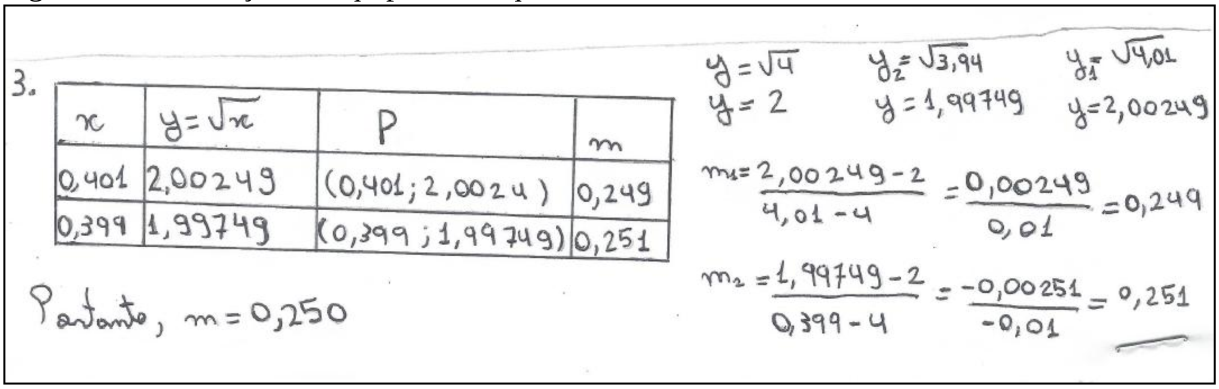
Figura 65 - Resolução da equipe E1 da questão 3 da Atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

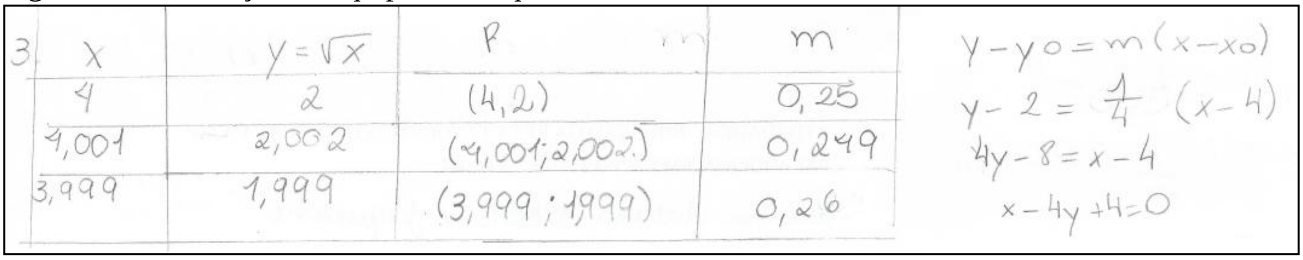
As equipes E2 e E3 aplicaram um procedimento totalmente análogo ao da equipe E1, apenas utilizando uma precisão decimal menor. A equipe E2 não determinou a equação da reta tangente, e a equipe E3 aplicou a equação fundamental e escreveu a equação da reta tangente em sua forma geral, ou seja $x - 4y + 4 = 0$ (Figuras 66 e 67).

Figura 66 - Resolução da equipe E2 da questão 3 da Atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 67 - Resolução da equipe E3 da questão 3 da Atividade 4



3 x	$y=\sqrt{x}$	P	m
4	2	(4,2)	0,25
4,001	2,002	(4,001;2,002)	0,249
3,999	1,999	(3,999 ; 1,999)	0,26

$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-2=\frac{1}{4}(x-4)$

$4y-8=x-4$

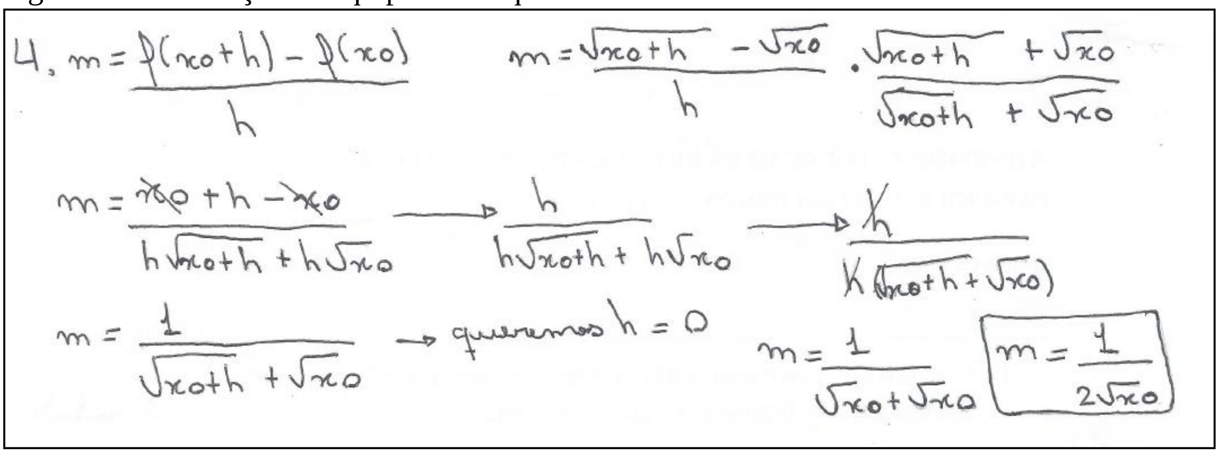
$x-4y+4=0$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

As ressalvas referentes as soluções apresentadas são de que somente as equipes E1 e E3 resolveram a questão na íntegra, pois determinaram a equação da reta tangente a curva no ponto dado, sendo que a E1 apresentou a equação na forma reduzida e E3 na forma geral. A equipe E2 apresentou erros na notação dos valores de x para calcular os coeficientes angulares das retas secantes, escreveram 0,401 e 0,399, quando deveria ser 4,01 e 3,99 respectivamente.

Para resolver a questão 4 dessa atividade, as três equipes calcularam de maneira correta o coeficiente angular da reta tangente a curva $y=\sqrt{x}$ em um ponto de abscissa x_0 qualquer. Conforme já relatado, durante o desenvolvimento algébrico da questão, os alunos demonstraram dificuldades por causa das raízes presentes no numerador e no denominador da fração, dúvida rapidamente sanada após a interferência do professor. Essa questão também apresenta mais características de exercício do que propriamente de situação problema, uma vez que os alunos estavam habituados com a determinação do coeficiente angular por meio do quociente de Newton. As Figuras 68, 69 e 70 apresentam essas soluções.

Figura 68 - Resolução da equipe E2 da questão 4 da Atividade 4



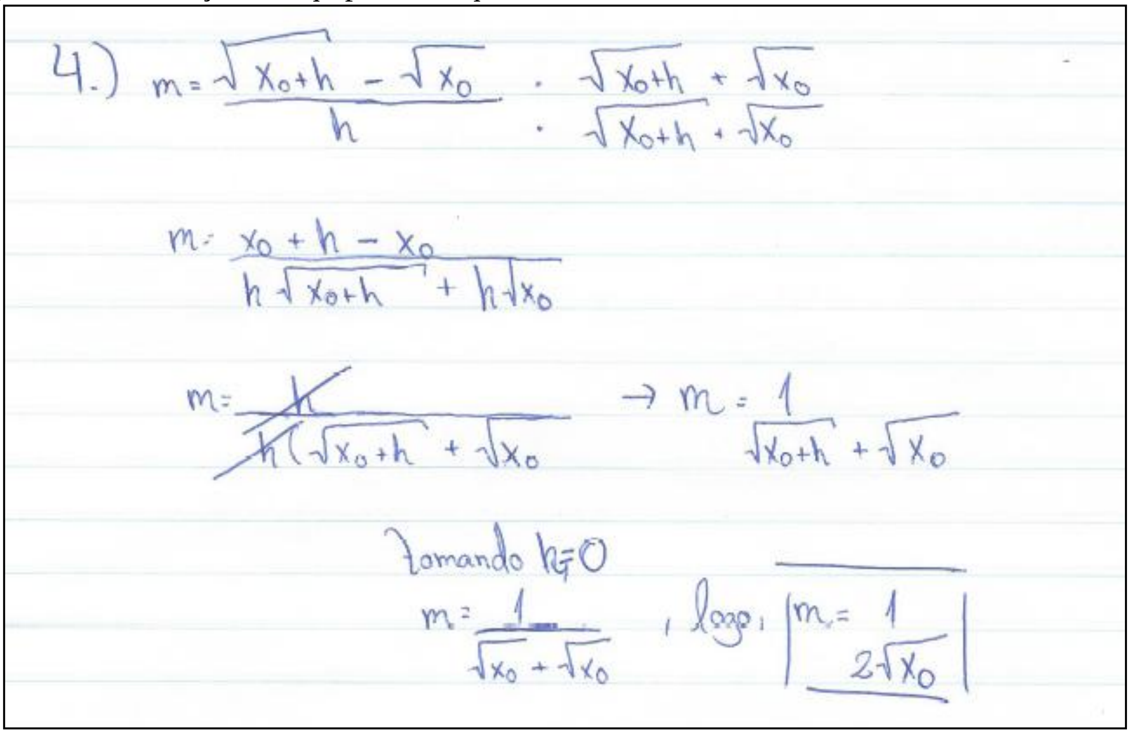
4. $m=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\quad m=\dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\cdot\dfrac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$

$m=\dfrac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{h\sqrt{x_0+h}+h\sqrt{x_0}} \longrightarrow \dfrac{h}{h\sqrt{x_0+h}+h\sqrt{x_0}} \longrightarrow \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$

$m=\dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$ $\rightarrow$ queremos $h=0$ $\quad m=\dfrac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}$ $\quad \boxed{m=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}}$

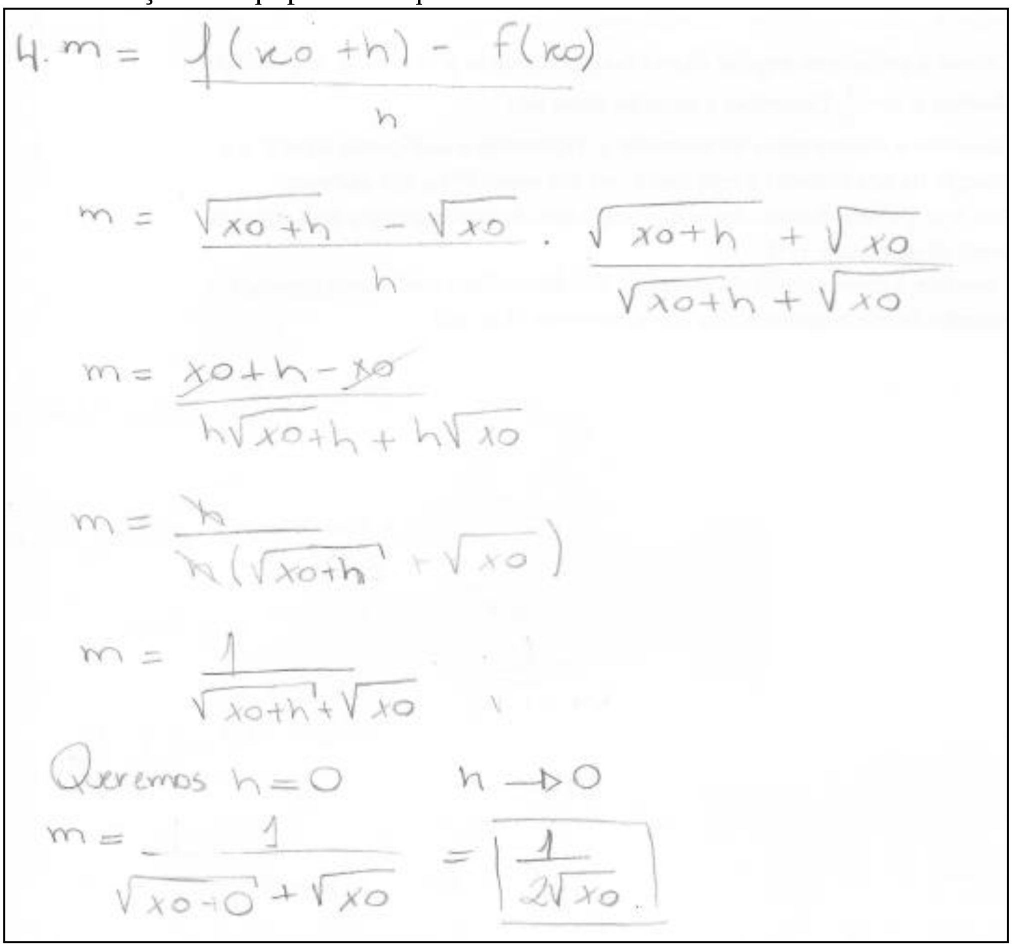
Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 69 - Resolução da equipe E1 da questão 4 da Atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 70 - Resolução da equipe E3 da questão 4 da Atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Durante a aplicação dessa atividade, alguns aspectos da metodologia da RP podem ser destacados, como por exemplo, a liberdade que os alunos tiveram em determinar por si próprios qual o método que desejavam utilizar para resolver os problemas, o que gerou, por exemplo, soluções diferentes para a questão 1. Outro aspecto que se destaca aqui é o fato de que nas interferências feitas pelo professor, os alunos não receberam respostas prontas para as suas perguntas, mas sim, o professor utilizou de outros exemplos para que eles concluíssem por si próprios como prosseguir com o desenvolvimento da resolução, como por exemplo, quando os alunos tiveram dúvidas na racionalização do numerador. A fase de verificação da resolução também esteve presente quando o pesquisador utilizou o *GeoGebra* para verificar a equação da reta tangente na questão 1, de modo a dirimir uma eventual dúvida que poderia surgir pelo o que foi apresentado pela equipe E3 (a derivada da função nesse caso não representava a equação da reta tangente).

Podemos concluir com essa atividade que os alunos apropriaram-se da ideia de determinação de reta tangente por meio de aproximação de retas secantes, e da utilização do incremento h para determinar de modo generalizado o coeficiente angular de uma reta tangente a uma curva em um ponto qualquer pertencente a essa curva. Construíram os conceitos de maneira autônoma, com intervenções pontuais do professor/pesquisador, discutiram as soluções e planos de resolução e puderam verificar seus resultados com auxílio do professor e com recursos visuais. Tiveram também a oportunidade de praticar o desenvolvimento algébrico dos conceitos estudados, por meio de exercícios relacionados ao tema e a pesquisa. Conforme destaca a RP, os alunos foram protagonistas do processo de aprendizagem, construindo o conhecimento e desenvolvendo sua criatividade e autonomia, adquiriam confiança a cada etapa da pesquisa. Estando dotados dos conceitos e conhecimentos desenvolvidos até essa fase da pesquisa, foi proposta aos alunos a Atividade 5, última dessa pesquisa, que trata-se de uma aplicação da derivada no campo da Física, atendendo a prerrogativa da RP, de que o aluno possa resolver problemas práticos com os conceitos estudados.

6.5 ATIVIDADE 5: APLICAÇÕES DA DERIVADA NA FÍSICA

A quinta e última atividade dessa pesquisa se deu também no terceiro encontro no mesmo espaço e com a mesma estrutura disponibilizada pela escola. Para a realização desta atividade, os alunos foram divididos em duas equipes, devido ao fato de um dos alunos presentes ter que se ausentar mais cedo da aula devido a compromissos particulares. Os alunos tiveram liberdade para se reorganizarem dentro das duas equipes, que aqui serão identificadas como E1 e E2.

Essa atividade tinha como objetivo aplicar o conceito de derivada, sem formalizações, conforme os processos adotados nas atividades anteriores, para a resolução de problemas de Física (mais especificamente, os relacionados à velocidade). As questões que a compõe são os problemas adaptados da tese de doutorado de Eliane Bihuna de Azevedo (2019), e do livro Cálculo – Volume 1 de James Stewart, (STEWART, 2016). As situações problemas utilizadas nesse momento da pesquisa privilegiam a abordagem do cálculo da derivada por meio de aproximações do quociente de Newton, sem ter o apelo da reta secante, mas trabalhando com a velocidade média. Assim os alunos iriam aplicar os conceitos análogos aos desenvolvidos nas atividades anteriores para determinar as soluções dos problemas aqui propostos. Para iniciar a atividade o pesquisador entregou para cada um dos alunos presentes uma folha com as duas questões da Atividade 5 (Apêndice E).

6.5.1 Desenvolvimento da Atividade 5

Para resolver a primeira questão da Atividade 5, os alunos deveriam inicialmente preencher a tabela do enunciado na questão, conforme mostra a Figura 71.

Figura 71 - Enunciado da primeira questão da Atividade 5

1. Considere que o instante inicial $t_0 = 3s$ e que o tempo final $t_f = t_0 + \Delta t$ são os valores fornecidos na Tabela 3. Determine a velocidade média para os intervalos de tempo cada vez menores, conforme indicados na Tabela 3.

Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

t_f	Δt	ΔS	v_m
4		5	
3.5		2.25	
3.1		0.41	
3.05		0.2025	
3.02		0.0804	
3.01		0.0401	

A seguir, responda:

(a) O que você pôde observar com relação aos valores Δt?

(b) Qual o valor que você acredita que seja a velocidade no instante $t = 3s$? Por quê?

(c) Se quisermos calcular a velocidade do corpo em um determinado instante de tempo t qualquer como você acha que poderíamos fazer?

Fonte: Azevedo, 2019.

A segunda questão tinha características comuns com a primeira e consistia em calcular algumas velocidades médias em determinados intervalos de tempo, e por fim, utilizar os dados obtidos com essas velocidades médias para estimar a velocidade instantânea do móvel em um instante dado, porém nesse item, o enunciado relacionava por meio da função $y = 10t - 1{,}86t^2$ a altura do móvel em função do tempo (Figura 72). As duas equipes calcularam as velocidades médias nos intervalos dados sem apresentar dificuldades, apenas com algumas diferenças no que compete a aproximação decimal utilizada.

Figura 72 - Enunciado da segunda questão da Atividade 5

2. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1{,}86t^2$.
   (a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:
      (i) $[1{,}2]$
      (ii) $[1;1{,}5]$
      (iii) $[1;1{,}1]$
      (iv) $[1;1{,}01]$
      (v) $[1;1{,}001]$
   (b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

Fonte: Stewart, 2016.

Para finalizar essa atividade e consequentemente a aplicação dessa pesquisa, o pesquisador abriu um novo espaço de debate com as equipes, comentando que de fato a velocidade instantânea de uma partícula em um determinado instante é o que chamamos de derivada da função naquele instante/ponto, sendo essa derivada o coeficiente angular da reta tangente à curva que representa o espaço em função do tempo, que foi basicamente o tema desenvolvido durante toda a pesquisa.

6.5.2 Análise das resoluções da Atividade 5

Nesta seção apresentaremos as resoluções das equipes E1 e E2 para os problemas propostos na Atividade 5, verificando se os alunos atingiram os objetivos de cada questão e se obtiveram sucesso em aplicar o método desenvolvido na pesquisa para resolver problemas de Física relacionados a velocidade instantânea de um móvel.

Na primeira questão dessa atividade os alunos deveriam preencher uma tabela, determinando valores da velocidade média de um móvel em intervalos de tempo cada vez mais próximos de zero. Em seguida, eles deveriam analisar os dados na tabela preenchida e responder um questionário referente a esses dados. A equipe E1 preencheu a tabela com base nos dados fornecidos calculando os valores de Δt e v_m. Ao responder o item (a) do questionário, mostraram ter observado que a variação do tempo aproximava-se cada vez mais de zero, e que esse efeito fazia com que a velocidade média ficasse cada vez mais próxima de 4 (resposta do item (b)), porém não deixaram claro que essa seria a velocidade instantânea do móvel no instante $t = 3\ s$, o que nos leva a crer que não houve compreensão total do que foi proposto no problema. No item (c), a equipe não emitiu uma resposta que se esperava para satisfazer o objetivo desse problema, pois a resposta "Utilizando o conteúdo estudado nas atividades anteriores, as derivadas" não explica qual a velocidade instantânea no instante pedido, tampouco como obter essa velocidade por aproximação de valores da velocidade média. Esperava-se que a equipe analisasse os resultados encontrados na tabela e concluísse sobre a tendência para a velocidade instantânea. A resolução da equipe está na Figura 73.

Figura 73 - Resolução da equipe E1 da questão 1 da Atividade 5

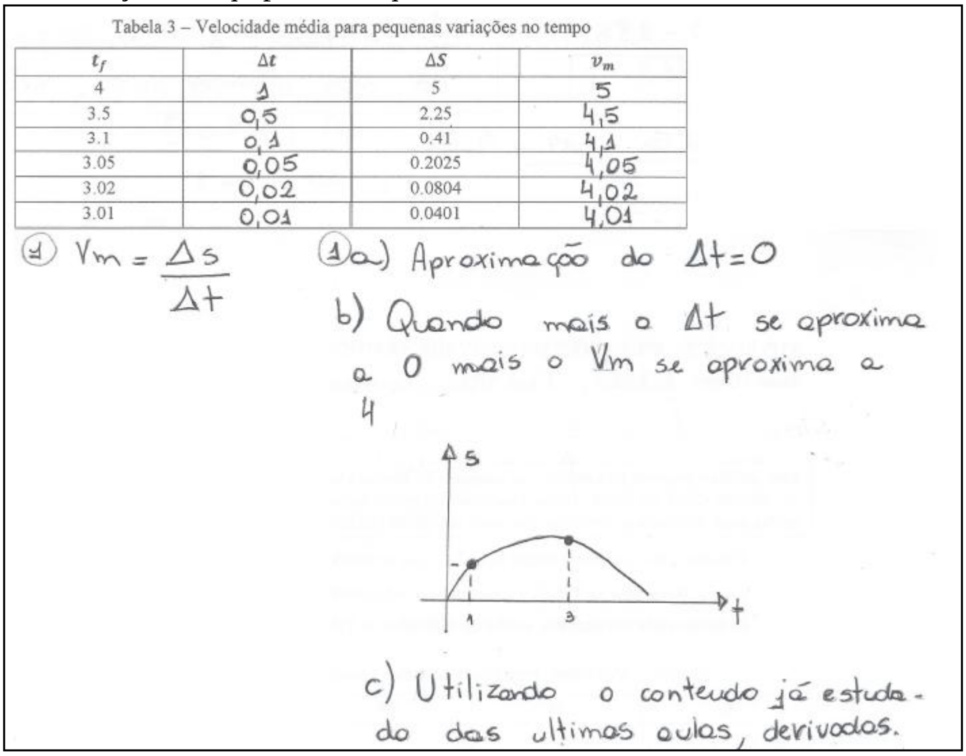


Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

t_f	Δt	ΔS	v_m
4	1	5	5
3.5	0,5	2.25	4,5
3.1	0,1	0.41	4,1
3.05	0,05	0.2025	4,05
3.02	0,02	0.0804	4,02
3.01	0,01	0.0401	4,01

1) $Vm = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

1a) Aproximação do $\Delta t = 0$

b) Quando mais o Δt se aproxima a 0 mais o Vm se aproxima a 4

c) Utilizando o conteudo já estuda-do das ultimas aulas, derivadas.

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe E2 também preencheu corretamente os dados da tabela sem demonstrar dificuldades (Figura 74). Responderam os itens (a) e (b) do questionário demonstrando segurança em sua afirmação, mostrando entendimento em relação a tendência dos valores de Δt e v_m para zero e 4, respectivamente. No item (c) a equipe E2 demonstrou que teve um melhor entendimento da proposta dessa atividade, respondendo que "é só ir aproximando de um Δt mais próximo de zero", ou seja, apresentaram uma resposta satisfatória para o que propunha o problema.

Figura 74 - Resolução da equipe E2 da questão 1 da Atividade 5

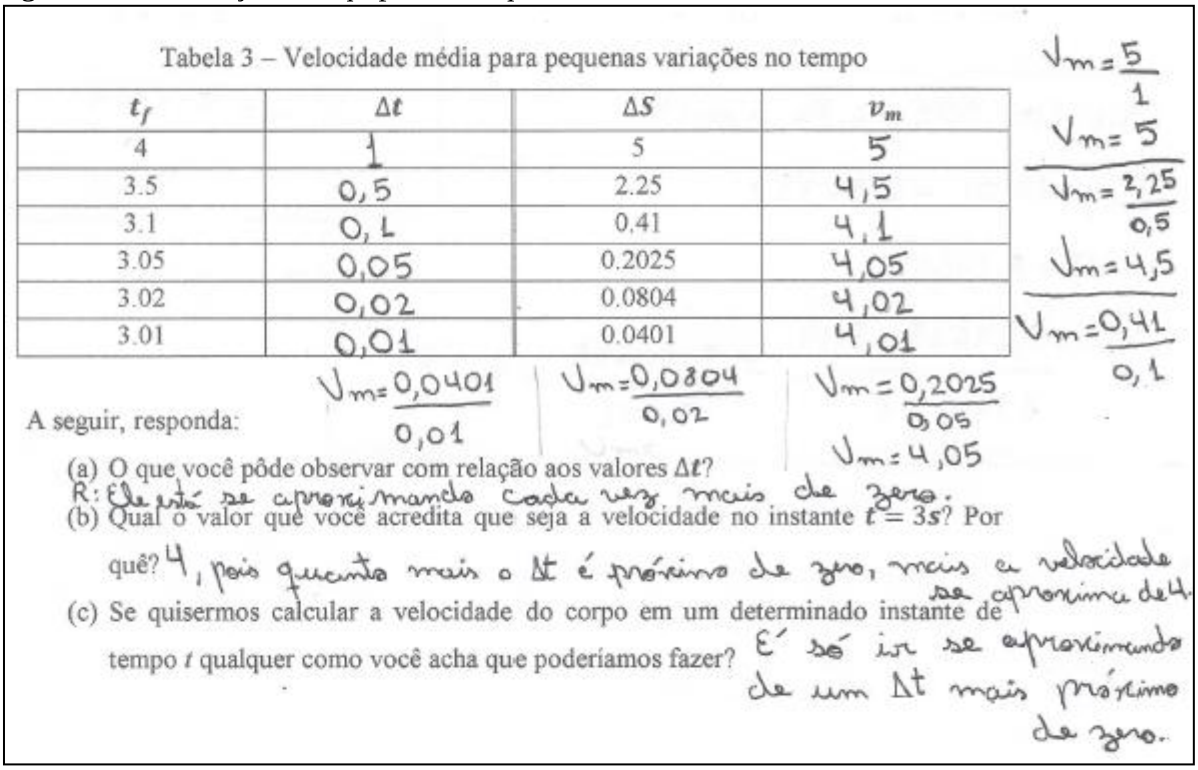


Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

t_f	Δt	ΔS	v_m
4	1	5	5
3.5	0,5	2.25	4,5
3.1	0,1	0.41	4,1
3.05	0,05	0.2025	4,05
3.02	0,02	0.0804	4,02
3.01	0,01	0.0401	4,01

$V_m = \frac{5}{1}$

$V_m = 5$

$V_m = \frac{2,25}{0,5}$

$V_m = 4,5$

$V_m = \frac{0,41}{0,1}$

$V_m = \frac{0,0401}{0,01}$

$V_m = \frac{0,0804}{0,02}$

$V_m = \frac{0,2025}{0,05}$

$V_m = 4,05$

A seguir, responda:

(a) O que você pôde observar com relação aos valores Δt?
R: Ele está se aproximando cada vez mais de zero.

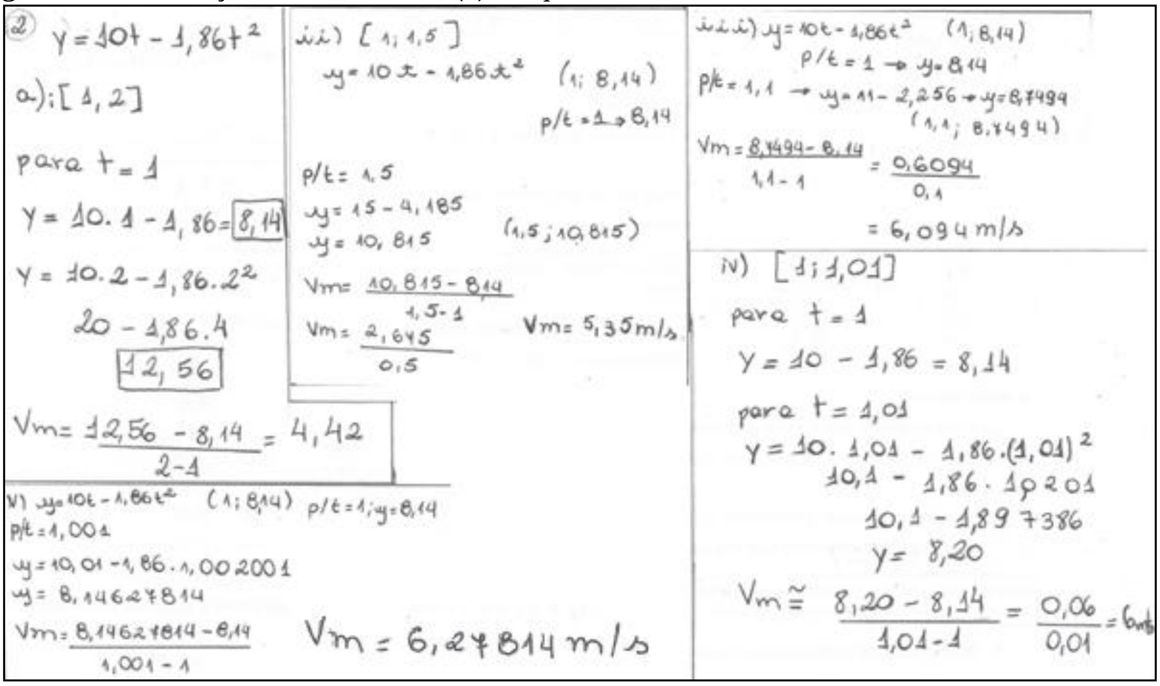
(b) Qual o valor que você acredita que seja a velocidade no instante $t = 3s$? Por quê? 4, pois quanto mais o Δt é próximo de zero, mais a velocidade se aproxima de 4.

(c) Se quisermos calcular a velocidade do corpo em um determinado instante de tempo t qualquer como você acha que poderíamos fazer? É só ir se aproximando de um Δt mais próximo de zero.

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Para responder o item (a) da questão 2 as duas equipes utilizaram a mesma estratégia: calcularam os valores das posições da partícula nos extremos dos intervalos dados, e calculando o coeficiente entre as variações de espaço pelo tempo calcularam as velocidades médias, como pode ser observado nas Figuras 75 e 76.

Figura 75 - Resolução de E1 do item (a) da questão 2 da Atividade 5



② $y = 10t - 1{,}86t^2$

a):[1, 2]

para t = 1

$y = 10.1 - 1{,}86 = \boxed{8{,}14}$

$y = 10.2 - 1{,}86.2^2$

$20 - 1{,}86.4$

$\boxed{12{,}56}$

$Vm = \frac{12{,}56 - 8{,}14}{2-1} = 4{,}42$

ii) [1; 1,5]

$y = 10t - 1{,}86t^2$ (1; 8,14)

p/t = 1 → 8,14

p/t = 1,5

$y = 15 - 4{,}185$

$y = 10{,}815$ (1,5; 10,815)

$Vm = \frac{10{,}815 - 8{,}14}{1{,}5 - 1}$

$Vm = \frac{2{,}675}{0{,}5}$ Vm = 5,35 m/s

iii) $y = 10t - 1{,}86t^2$ (1; 8,14)

p/t = 1 → y = 8,14

p/t = 1,1 → y = 11 − 2,256 → y = 8,7494

(1,1; 8,7494)

$Vm = \frac{8{,}7494 - 8{,}14}{1{,}1-1} = \frac{0{,}6094}{0{,}1}$

= 6,094 m/s

iv) [1; 1,01]

para t = 1

y = 10 − 1,86 = 8,14

para t = 1,01

$y = 10.1{,}01 - 1{,}86.(1{,}01)^2$

10,1 − 1,86 . 1,0201

10,1 − 1,897386

y = 8,20

$Vm \cong \frac{8{,}20 - 8{,}14}{1{,}01-1} = \frac{0{,}06}{0{,}01} = 6m/s$

v) $y = 10t - 1{,}86t^2$ (1; 8,14) p/t = 1; y = 8,14

p/t = 1,001

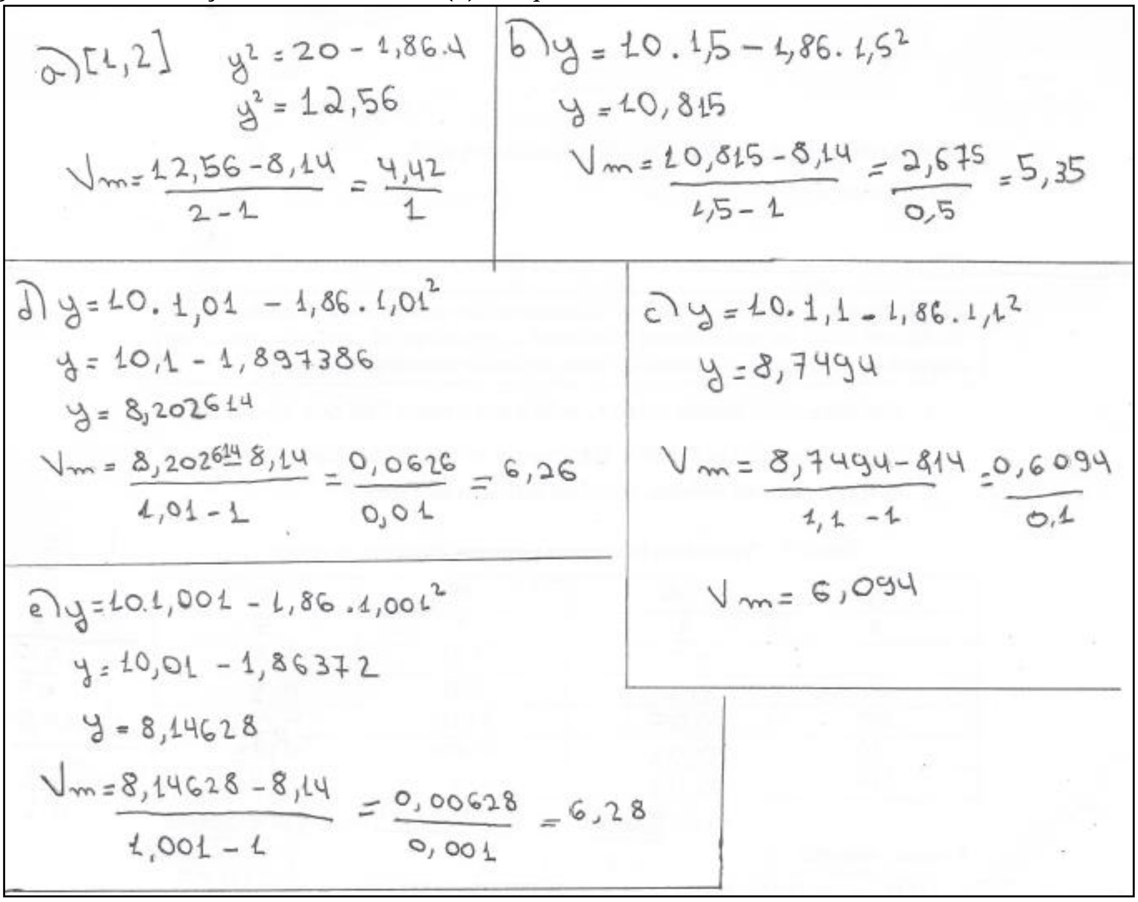
y = 10,01 − 1,86 . 1,002001

y = 8,14627814

$Vm = \frac{8{,}14627814 - 8{,}14}{1{,}001 - 1}$ Vm = 6,27814 m/s

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Figura 76 - Resolução de E2 do item (a) da questão 2 da Atividade 5



a) [1, 2] $y^2 = 20 - 1{,}86.4$

$y^2 = 12{,}56$

$Vm = \frac{12{,}56 - 8{,}14}{2-1} = \frac{4{,}42}{1}$

b) $y = 10.1{,}5 - 1{,}86.1{,}5^2$

y = 10,815

$Vm = \frac{10{,}815 - 8{,}14}{1{,}5-1} = \frac{2{,}675}{0{,}5} = 5{,}35$

d) $y = 10.1{,}01 - 1{,}86.1{,}01^2$

y = 10,1 − 1,897386

y = 8,202614

$Vm = \frac{8{,}202614 - 8{,}14}{1{,}01-1} = \frac{0{,}0626}{0{,}01} = 6{,}26$

c) $y = 10.1{,}1 - 1{,}86.1{,}1^2$

y = 8,7494

$Vm = \frac{8{,}7494 - 8{,}14}{1{,}1-1} = \frac{0{,}6094}{0{,}1}$

Vm = 6,094

e) $y = 10.1{,}001 - 1{,}86.1{,}001^2$

y = 10,01 − 1,86372

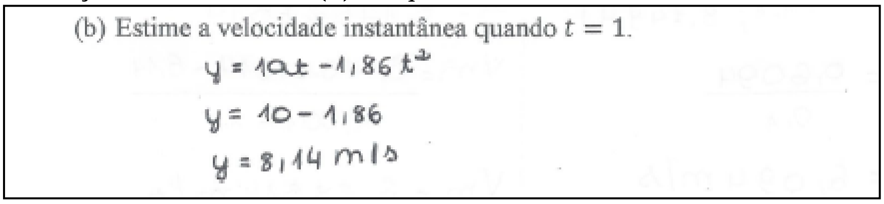
y = 8,14628

$Vm = \frac{8{,}14628 - 8{,}14}{1{,}001-1} = \frac{0{,}00628}{0{,}001} = 6{,}28$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Desse modo, as duas equipes construíram o ferramental necessário para responder o item (b) dessa questão. A equipe E1 substituiu o valor $t = 1$ na função $y = 10t - 1{,}86t^2$ que se refere a posição do móvel em função do tempo e não a velocidade desse móvel (Figura 77). Também podemos verificar que a equipe não considerou os cálculos efetuados no item (a), que os levaria a possível resposta para o problema. Não conseguimos apontar precisamente o motivo desse engano, mas podemos supor que seja por falta de atenção, ou fadiga, pois essa foi a última atividade de nossa pesquisa, e os alunos poderiam estar cansados.

Figura 77 - Resolução de E1 do item (b) da questão 2 da Atividade 5


(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

$y = 10t - 1{,}86\,t^2$

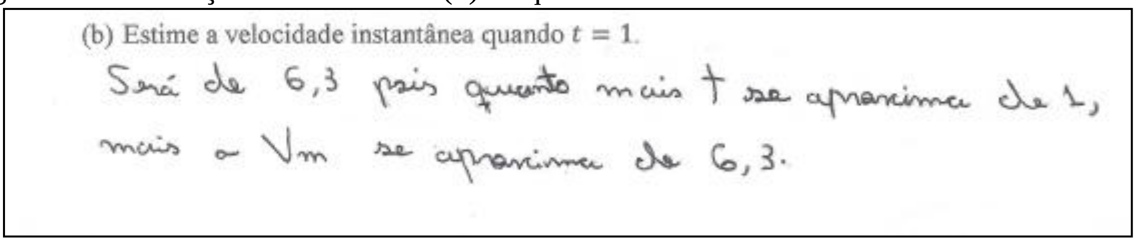
$y = 10 - 1{,}86$

$y = 8{,}14\ m/s$

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe E2 demonstrou entendimento da variação das velocidades calculadas no item (a), de modo que utilizando os resultados obtidos estimaram a velocidade instantânea $v = 6{,}3\ m/s$, justificando que “quanto mais t se aproxima de 1, mais a velocidade média aproxima-se de 6,3” (Figura 78). A ressalva fica para o erro na notação utilizada na resposta, em que os alunos escreveram que t aproxima-se de 1, quando na verdade deveriam apontar que os intervalos de tempo utilizados aproximavam-se de zero, com o valor do tempo final se aproximando de 1. Porém, esse problema de notação não representa de fato um problema quanto o entendimento da ideia.

Figura 78 - Resolução de E2 do item (b) da questão 2 da Atividade 5


(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

Será de 6,3 pois quanto mais t se aproxima de 1, mais a Vm se aproxima de 6,3.

Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

6.6 ALGUMAS CONCLUSÕES SOBRE A APLICAÇÃO

A aplicação dessa sequência didática teve como principal norteador os métodos propostos por Dante (2009) para trabalhar a Resolução de Problemas em sala de aula. Vários desses aspectos puderam ser trabalhados durante as aplicações, dentre os quais se destacam oportunizar os alunos a serem participantes efetivos das resoluções dos problemas, incitando-os a terem espírito investigativo e aguçando a criatividade.

O professor pesquisador procurou fazer interferências pontuais nos casos que foram necessários, visando estimular o pensamento do aluno, não lhes proporcionando respostas prontas, pelo contrário, incitando-os a encontrarem por si só, saídas para as situações dificultosas em que se encontravam. Podemos destacar também na atuação do professor, a importância do recurso gráfico utilizado durante a pesquisa (software *GeoGebra*) pois esse foi uma ferramenta muito importante para que os alunos conseguissem visualizar dinamicamente a aproximação de retas secantes a uma reta tangente, se situar dentro do que era proposto e modelar soluções para as atividades.

As equipes deram um retorno positivo quanto as atividades aplicadas, mostraram-se interessados em aprender mais sobre o assunto e foram unanimes em dizer que o tema é relevante e que poderia ser abordado durante o Ensino Médio durante as aulas de Matemática e Física.

De modo geral, ao que se propunha cada uma das atividades desenvolvidas, os alunos obtiveram êxito nas resoluções, os conceitos trabalhados foram absorvidos pelos alunos, que mostraram entendimento do processo intuitivo para definir e trabalhar com derivadas. Podemos dizer que para esse grupo de alunos, a sequência foi útil para definir intuitivamente o conceito de derivada, e como esses alunos demonstraram interesse em seguir suas graduações em áreas de Ciências Exatas, espera-se que essa sequência aplicada lhes ajude no Ensino Superior.

No que se refere aos objetivos da metodologia da Didática da Resolução de Problemas, apontados por Dante (2009) e que serviram como norteadores de nossa pesquisa, concluímos que a sequência mostrou-se eficaz para atingir tais objetivos, podendo ela ainda ser adaptada e/ou aperfeiçoada conforme objetivos e propostas metodológicas que outros professores de Matemática queiram privilegiar.

Os alunos se depararam durante a pesquisa com situações desafiadoras que os levaram a pensar produtivamente, aumentando sua capacidade de raciocínio lógico. A sequência era dotada de problemas que desafiaram os alunos a lidarem com situações novas, com resultados até então inesperados, oportunizando os alunos o envolvimento com aplicações da Matemática, como por exemplo, a Atividade 5 de aplicação na Física.

As atividades propostas na sequência equiparam os alunos com novas ferramentas para soluções de problemas, incentivando-os a procurarem estratégias diferentes, estimulando a pesquisa e a investigação. Quando os alunos se deparam com situações desafiadoras, em que podem enxergar a sua aplicação, dando-lhes perspectiva de uso das ferramentas desenvolvidas (aplicação no curso de graduação em alguma área de Ciências Exatas por exemplo), as aulas tornam-se mais interessantes, pois despertam a curiosidade do aluno, levando ele a se envolver com a construção do conhecimento e dos conceitos apresentados.

Desse modo, a sequência apresentada nessa pesquisa, atende aos objetivos da Didática da Resolução de Problemas, sendo que ela não precisa ser considerada como fechada e pronta, pois como apontamos no decorrer de nossa análise, ela é adaptável a novas situações e a novos objetivos que podem ser trabalhados em sala de aulas por professores interessados em aprofundar a pesquisa.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Os estudos sobre ensino de Cálculo no Brasil e no exterior têm revelado um aspecto preocupante referente ao rendimento dos alunos que ingressam no Ensino Superior em áreas de Ciências Exatas, pois esses apresentam muitas dificuldades de compreensão dos conceitos e conteúdos pertinentes a essa disciplina, o que tem acarretado em um alto índice de reprovações, revelando que são necessárias mais pesquisas sobre o ensino de Cálculo de modo a melhorar os índices de aprovação. Muitos são os fatores que podem contribuir para esse fato, mas como apontam alguns pesquisadores, um dos motivos mais citados por alunos e professores da disciplina é a pouca prática matemática ou a falta de base. Essas pesquisas, e as observações e preocupações do próprio pesquisador referentes ao processo de ensino de Matemática no Ensino Médio, motivaram a elaboração da sequência didática apresentada nessa pesquisa, que corrobora com metodologias que usem abordagens intuitivas de Cálculo nesse nível de ensino.

Conforme apontado no referencial teórico de nossa pesquisa, uma abordagem formal e rigorosa de conceitos de Cálculo no Ensino Médio não é viável, porém ideias intuitivas relacionadas aos conteúdos que fazem parte do currículo nesse nível de ensino podem refletir positivamente não só para diminuir as dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo nas primeiras séries dos cursos de graduação, como também estão consonantes com as propostas apontadas na BNCC (BRASIL, 2018), de que o ensino de Matemática deve promover ações que provoquem a capacidade de abstração dos alunos, e de relacionar o uso da Matemática às tecnologias utilizadas no cotidiano, pois o Cálculo é uma área de estudo moderna dentro do campo da Matemática.

Essa pesquisa propôs uma sequência didática que tem por objetivo promover a integração de conteúdos de Cálculo com a Geometria Analítica que geralmente é trabalhada na terceira série do Ensino Médio, por meio de uma abordagem intuitiva conforme sugerem os pesquisadores da área. Embasamos a aplicação de nossa pesquisa na Didática da Resolução de Problemas proposta por Dante (1991), sendo essa a norteadora das aplicações feitas com os alunos. Evidenciamos os aspectos dessa didática nos relatos das experiências vividas com os alunos durante a aplicação. Essa metodologia também foi norteadora do processo de avaliação e análise dos resultados.

A sequência proposta não está fechada e pronta, conforme apontamos durante os relatos das aplicações das atividades e na análise dos resultados obtidos, essa sequência serve como uma ferramenta ou um embasamento para que professores e alunos interessados em utilizá-la, possam fazer adaptações conforme a realidade de seu trabalho ou grupo de pesquisa. Uma das aplicações que procuramos evidenciar foi o uso da sequência para a abordagem de conteúdo de Física, mas pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento matemático, desde que não perca seu caráter intuitivo.

Em relação à atuação do pesquisador durante as aplicações das atividades, verificou-se que a experiência foi válida para a melhoria de sua prática profissional e para aprofundamento dos conteúdos. O professor/pesquisador teve a oportunidade de colocar em prática as diretrizes do trabalho em sala de aula pautado na Didática da Resolução de Problemas. A mudança da prática pedagógica de “tirar dúvidas dos alunos” sem dar-lhes soluções para os desafios encontrados, mas sim de incentivá-los a investigarem por conta própria os métodos que poderiam utilizar, fazer a verificação dos resultados junto com a turma e discutir as ideias por eles desenvolvidas, são práticas que a partir do momento da pesquisa serão adotadas pelo pesquisador em seu cotidiano de trabalho.

Quanto às atividades aplicadas nessa pesquisa, a sequência proposta exigiu que o grupo participante revisasse conceitos de Geometria Analítica que foram estudados durante o ano letivo, o que sugerimos que seja feito sempre que uma sequência desse tipo seja aplicada. O grupo de alunos selecionados não apresentou dificuldades nessa etapa, o que pode não acontecer com uma turma com um número maior de alunos. As atividades seguiram com um problema de pesquisa, incentivando o caráter investigativo dos alunos e como uma aplicação dos conceitos trabalhados na revisão e das definições pesquisadas. Os alunos não conseguiram encontrar a solução da questão 3 da Atividade 2, o que sugere que o método empregado nessa sequência deixou poucos indícios de como encontrar essa resposta, sendo assim, o problema ficou difícil para os alunos. Sugere-se que mais questões sejam trabalhadas na sequência para que esses indícios fiquem mais claros para os alunos. Outro fator importante a se destacar é a falta de uma discussão e correção da questão 4 da Atividade 1, a falta disso prejudicou o entendimento dos alunos quanto o objetivo da questão 3 da Atividade 2. Conforme a Didática da Resolução de Problemas, essa verificação e correção são muito importantes para os processos de ensino e aprendizagem, e não deve ser negligenciada.

Outro ponto que pode ser melhorado na sequência é a abordagem feita para determinar a reta tangente a uma parábola, como na Atividade 2. Poderíamos ter explorado a ideia de que a reta tangente a parábola é aquela que tem apenas um ponto em comum com ela, e que a deixa totalmente em um dos semiplanos definidos por essa reta, conforme a demonstração apresentada em nosso referencial teórico e, depois disso, mostrar que para curvas não parabólicas, essa relação não valeria, enquanto que o processo de aproximação de retas secantes continuaria válido.

Como em nossa pesquisa os alunos foram previamente selecionados por sua afinidade com a Matemática e por seus interesses pelas Ciências Exatas, sugere-se que para turmas maiores ou para aplicação com turmas regulares, que se inclua no pré-requisito uma revisão sobre Produtos Notáveis e Frações Algébricas. Como o desenvolvimento para obtenção da derivada é intuitivo, ele se assemelha ao processo de determinação pela definição utilizando limites, então, para que os alunos encontrem os resultados esperados, eles precisam ter domínio desse tipo de manipulação algébrica. Durante a aplicação de nossa pesquisa, o professor teve que fazer duas interferências nesse sentido, no momento em que os alunos precisaram desenvolver o cubo da soma e quando precisaram aplicar o processo de racionalização do numerados (ou multiplicação pelo conjugado). Essas interferências não prejudicaram o andamento da pesquisa no que diz respeito ao tempo, pois os alunos selecionados tinham afinidade com a Matemática e as dúvidas foram rapidamente dirimidas.

Outra sugestão que podemos apontar para aplicação e aperfeiçoamento da sequência proposta, é que os professores podem utilizar algumas dessas atividades como problemas motivadores de introdução dos conteúdos, como por exemplo, tomar uma reta secante a uma parábola para encontrar a equação dessa reta utilizando dois pontos dessa parábola.

Não podemos deixar de destacar que a sequência foi aplicada com um número pequeno de alunos pré-selecionados, e que as aulas aconteceram durante o período contra turno das aulas regulares, sendo assim, nosso espaço amostral é pequeno para que possamos tirar conclusões mais precisas sobre a eficácia de nosso material. Incentivamos os professores e pesquisadores que se dispuserem a aplicar essa sequência, que busquem adaptá-la a sua realidade de trabalho e que considerem os aperfeiçoamentos que estamos sugerindo. Aos professores de Física, sugerimos uma experimentação da abordagem utilizada em nossa sequência, principalmente no que diz respeito à compreensão do aluno sobre a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea, por exemplo. Sugerimos também que a didática da RP seja sempre considerada e adotada como referencial, pela experiência do pesquisador com a aplicação, essa metodologia apresenta métodos que melhoram a prática pedagógica, e a interação dos alunos com o conhecimento.

Outro fator relevante de nossa pesquisa foi a utilização do recurso tecnológico e o software *GeoGebra*, esse mostrou-se muito útil para a compreensão dos alunos sobre os resultados obtidos, para a interpretação geométrica desses resultados e como ferramenta de ajuda para sanar dúvidas e ajudar os alunos a saírem de situações em que não conseguiam continuar o desenvolvimento das resoluções. A ferramenta tecnológica foi de fundamental importância em nossa pesquisa, e sugerimos que seja empregada pelos professores e pesquisadores que desejarem utilizar a nossa sequência.

Como experiência pessoal, o pesquisador pode apontar que a pesquisa e a aplicação da sequência contribuíram para o desenvolvimento profissional, melhora da prática pedagógica (em seu ponto de vista) e melhoria do domínio dos conteúdos de Cálculo, que sempre foram de interesse, fazendo com que essa pesquisa sirva como motivadora para outras pesquisas na área para o Ensino Médio e Ensino Superior.

Esperamos que esse trabalho contribua com os processos de ensino e aprendizagem de Cálculo no Ensino Médio, e que essas ideias sejam divulgadas e aprofundadas, com o intuito de que as dificuldades em Cálculo nas primeiras séries dos cursos de graduação sejam reduzidas, melhorando os índices de aprovação e fornecendo uma base matemática mais sólida para os estudantes que experimentarem propostas como essa.

REFERÊNCIAS

ABDELMALACK, Andrea. **O ensino-aprendizagem-avaliação da derivada para o curso de engenharia através da resolução de problemas.** 2011. 175 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

ALVARENGA, Karly Barbosa; DORR, Raquel Carneiro; VIEIRA, Vanda Domingos. O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: Características e interseções no centro-oeste brasileiro. **REBES - Rev. Brasileira de Ensino Superior**, 2(4): 46-57, out.-dez. 2016.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo.** Porto Alegre: Bookman, 2014.

ÁVILA, Geraldo. Limites e derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 60, p. 30-38, 2006.

ÁVILA, Geraldo. O Ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de matemática**, n.18, 1991.

AZEVEDO, Eliane Bihuna de; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; PALHARES, Pedro Manuel Baptista. A visão do aluno sobre a metodologia de resolução de problemas aplicada no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. In: **VIII CIBEM** Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 2017, Madrid - Espanha. Anais do VIII CIBEM, 2017.

AZEVEDO, Eliane Bihuna. **Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese de doutorado. Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF; 1998.

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Resolução de problemas e o software Geogebra no ensino e aprendizagem de otimização de funções**. 2018. 155 p. Dissertação (Mestrado)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Joinville, 2018.

CASTRUCCI, Benedito. **Lições de Geometria Plana.** São Paulo: Livraria Nobel, 1976.

COIMBRA, Jayro Mendes. **O ensino de Cálculo na Educação Básica.** Dissertação de Mestrado. UERJ/RJ, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.** São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações**. 3. ed. – São Paulo: Ática, 2016.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; SIPLE, Ivanete Zuchi; AZEVEDO, Eliane Bihuna de; MORO, Graciela. Uma experiência de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas da Matemática Nos cursos de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 33, n. 1, p. 13-23, 2014.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. 6ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa.** 2. ed. – São Paulo: FTD, 2005.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo.** 5. ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio –** Volume 3. 6 ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006.

LIMA, Sabrina Anne de; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da; SANTOS JUNIOR, Guataçara dos; ALMEIDA, Marina Ferreira Araújo de. O ensino de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de administração: principais dificuldades de aprendizagem dos alunos. **IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia.** Ponta Grossa/PR, 2014.

MACHADO, Nilson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica:** possível e necessário. São Paulo: USP, 2008. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080311.pdf>. Acesso em 09 jan. 2019.

MOREIRA, Marco Antonio; MASSONI, Neusa Teresinha. **Pesquisa qualitativa em Educação em ciências: projetos, entrevistas, questionários, teoria fundamentada, redação científica**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física. 2011.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria –** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:** CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PAGANI, Érica Marlúcia Leite; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: Um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **VIDYA**, v. 34, n. 2, p. 61-74, jul./dez., 2014 - Santa Maria, 2014. **ISSN** 2176-4603.

PAGANI, E. M. L. (2016). **O ensino-aprendizagem-avaliação de derivadas no curso Técnico integrado ao Médio através da resolução de problemas**. (Tese de doutorado), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo (SP).

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**. 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**. 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2010.

PALHARES, Pedro. Histórias com problemas construídas com professores de matemática. In FERNANDES, Domingos; LESTER, Frank; BORRALHO, Antonio. Vale, I. (Coords.). **Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática – múltiplos contextos e perspectivas.** Aveiro: GIRP/JNICT. pp. 154-188.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

POLYA George. Sobre a resolução de problemas de matemática na *high school*. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** Editora Atual, São Paulo, 1997.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

STEWART, James. **Cálculo:** volume I. 8ª ed. São Paulo/SP: Cengage Learning, 2016.

SWOKOWSKI, Earl Willian. **Cálculo com Geometria Analítica.** 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

YOUNG, Hugh David; FREEDMAN, Roger. **Física I –** Mecânica. 12ª ed. – São Paulo. Addison Wesley, 2008.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa:** Como Ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2007.

ZUCHI, Ivanete. **A ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE VIA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional.** 2005. 254 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.

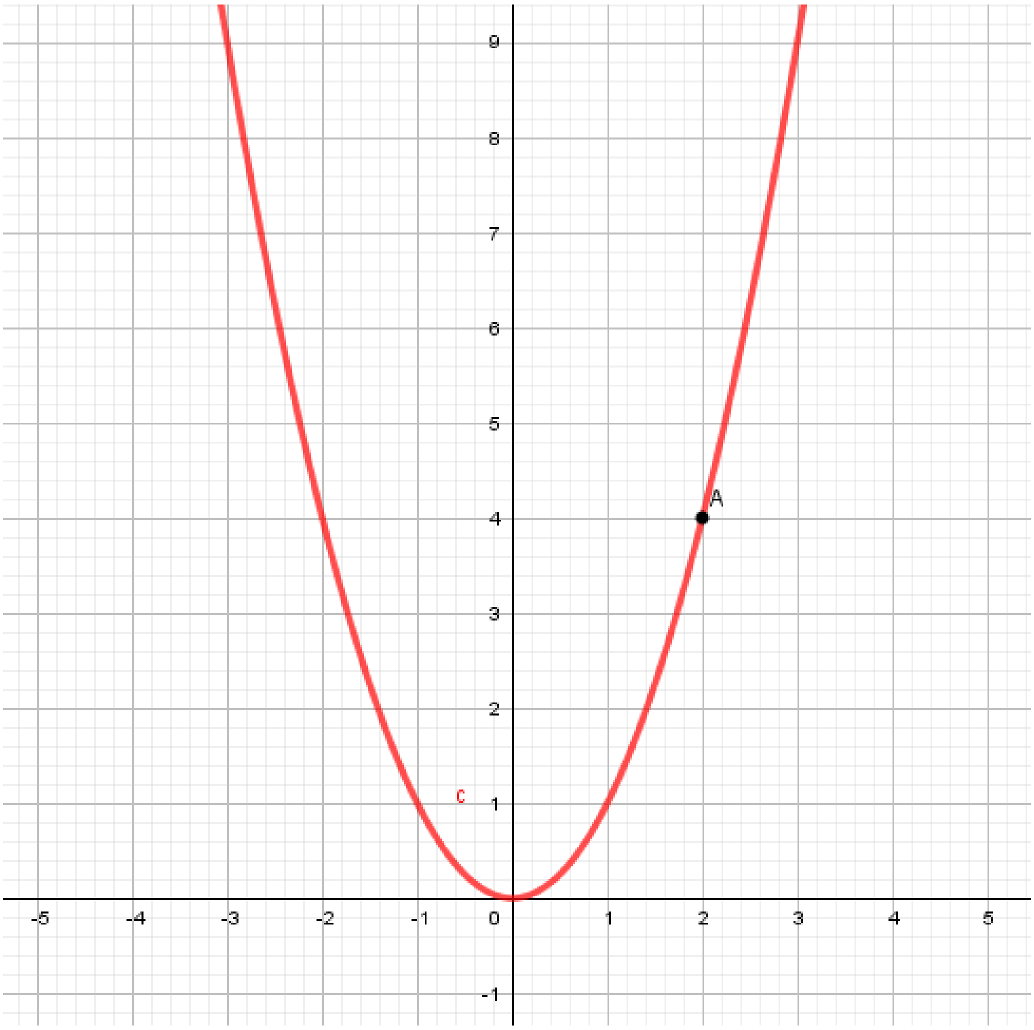
APÊNDICES

APÊNDICE A: Atividade 1 – Pré-requisito

Aluno/Grupo:

---

1. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e:
   (a) Tem inclinação -3;
   (b) É paralela ao eixo x;
   (c) É paralela ao eixo y;
   (d) É paralela a reta $2x - 4y = 3$;
2. Sejam $A\ (-7, 4)$ e $B\ (5, -12)$ pontos do plano:
   (c) Encontre a inclinação da reta que contém A e B;
   (d) Encontre uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as intersecções com os eixos?
3. O que é reta secante a uma curva?
4. Considere a parábola que é gráfico da função $f(x) = x^2$ e o ponto $P(2, 4)$, pertencente a parábola. Determine o coeficiente angular de três retas secantes a essa parábola. Desenhe essa retas no gráfico da figura a seguir.



APÊNDICE B: Atividade 2 – Encontrar uma reta tangente à uma curva dada.

Aluno/Grupo:

---

1. Defina reta tangente à uma curva.
2. Descreva como determinar a equação de uma reta tangente à uma curva (aqui você pode fazer desenhos e/ou escrever).
3. Encontre o coeficiente angular da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$. Escreva a equação dessa reta tangente.

APÊNDICE C: Atividade 3 – Encontrar a equação da reta tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$ em um ponto qualquer.

Aluno/Grupo:

---

1. Considere a parábola $y = 2x^2 + 3x + 1$. Determine o coeficiente angular e a equação da reta tangente à esta parábola no ponto de abscissa 1.
2. Considerando a mesma parábola do exercício 1, calcule o coeficiente angular de uma reta tangente a esta parábola em um ponto $Q(x_0, y_0)$. Determine a equação dessa reta.
3. Encontre a equação da reta tangente a parábola da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, em um ponto $P(x_0, y_0)$ qualquer, pertencente a esta parábola.

APÊNDICE D: Atividade 4 – Equação da reta tangente à uma curva não parabólica, em um ponto qualquer.

Aluno/Grupo:

---

1. Calcule o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^3 - x$, no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{2}$. Determine a equação dessa reta.
2. Considere a mesma curva do exercício 1. Determine o coeficiente angular e a equação da reta tangente à essa curva, em um ponto $P(x_0, y_0)$ qualquer.
3. Seja $y = \sqrt{x}$ uma função, determine a equação da reta tangente a essa curva no ponto de abscissa $x = 4$.
4. Considere a mesma curva do exercício 3, e determine o coeficiente angular e a equação da reta tangente a essa curva no ponto $P(x_0, y_0)$.

APÊNDICE E: Atividade 5 – Aplicações da derivada na Física.

Aluno / Grupo:

Essa atividade proposta foi extraída e/ou adaptada da Tese de Doutorado de Eliane Bihuna de. Azevedo (2019). Título: Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

1. Considere que o instante inicial $t_0 = 3s$ e que o tempo final $t_f = t_0 + \Delta t$ são os valores fornecidos na Tabela 3. Determine a velocidade média para os intervalos de tempo cada vez menores, conforme indicados na Tabela 3.

Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

$\boldsymbol{t_f}$	$\Delta \boldsymbol{t}$	$\Delta \boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{v_m}$
4		5	
3.5		2.25	
3.1		0.41	
3.05		0.2025	
3.02		0.0804	
3.01		0.0401	

A seguir, responda:

(a) O que você pôde observar com relação aos valores $\Delta \boldsymbol{t}$?

(b) Qual o valor que você acredita que seja a velocidade no instante $\boldsymbol{t} = 3\boldsymbol{s}$? Por quê?

(c) Se quisermos calcular a velocidade do corpo em um determinado instante de tempo *t* qualquer, como você acha que poderíamos fazer?

Essa atividade proposta foi extraída e/ou adaptada do Livro Cálculo – Volume 1 de James Stewart; tradução Helena Maria Ávila de Castro, 8ª edição.

2. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de $10\ m/s$, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1{,}86t^2$.

   (a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:

(i) $[1,2]$

(ii) $[1;1{,}5]$

(iii) $[1;1{,}1]$

(iv) $[1;1{,}01]$

(v) $[1;1{,}001]$

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

ANEXOS

ANEXO 1 – Declaração da instituição participante, carta de anuência

DECLARAÇÃO DA INSTITUIÇÃO PARTICIPANTE
CARTA DE ANUÊNCIA

Autorizamos o pesquisador responsável Gabriel Felipe da Silva, mestrando do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), orientado pela professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo, a realizar uma aplicação para sua Dissertação de Mestrado nas dependências da EEM Governador Celso Ramos, intitulada “O Conceito de derivada por meio do estudo das equações da reta na Geometria Analítica” sendo esta a instituição coparticipante, motivo ao qual está sendo direcionada a carta de anuência.

Como mencionado anteriormente, a pesquisa será realizada nas dependências da escola, onde a pesquisadora trabalha como docente do Ensino Médio atualmente.

Concordamos que os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados por escritos e oralmente em banca de Dissertação, em exposição oral, congressos e revistas científicas.

Joinville, ___ de _______ de 2018.

Atenciosamente,

____
Diretor Geral

ANEXO 2 – Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: O Conceito de derivada por meio do estudo das equações da reta na Geometria Analítica, do acadêmico *Gabriel Felipe da Silva*, tendo como objetivo conceituar intuitivamente a derivada de uma função por meio das equações da reta, aplicadas nas aulas de Matemática, sob concordância do próprio acadêmico que é professor de Matemática na escola, e também da direção da EEM Governador Celso Ramos.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo no contraturno escolar.

A identidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar os desafios encontrados nas estratégias de resolução de problemas das atividades de Geometria Analítica, e ainda construindo conceitos de aplicabilidade em diversas áreas em cursos superiores e podendo substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão o estudante de mestrado Gabriel Felipe da Silva, e a professora orientadora Elisandra Bar de Figueiredo.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados de do(a) seu(ua) filho(a)/dependente, como as resolução das atividades e da transcrição de áudios e imagens que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(a) senhor(a) poderá solicitar o não uso das transcrições dos áudios e resoluções das atividades do(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestrando: Gabriel Felipe da Silva

Telefone: (47) 999381015
Endereço: Rua Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,

Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

Professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Telefone: (47) 34817665
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome do aluno:____

Nome do responsável por extenso:____

Assinatura ___________________________ Local: ___________________ Data: ____/____/____ .