

Luís Renato Meneghelli

**Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição  
de Tensões Utilizando o Método da Otimização  
Topológica**

Joinville, SC

2013

Luís Renato Meneghelli

# **Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição de Tensões Utilizando o Método da Otimização Topológica**

Dissertação apresentada para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT.

Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC  
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso

Joinville, SC

2013

---

M541p

Luís Renato Meneghelli

Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição de Tensões Utilizando o Método da Otimização Topológica/ Luís Renato Meneghelli . – Joinville, SC, 2013-

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso

75 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Dissertação – Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC  
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica , 2013.

1. Mecanismos Flexíveis. 2. Restrição de Tensão. I. Eduardo Lenz Cardoso. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas III. Mestrado em Engenharia Mecânica. IV. Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição de Tensões Utilizando o Método da Otimização Topológica

CDD 620.1

---

# **Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição de Tensões Utilizando o Método da Otimização Topológica**

por

**Luís Renato Meneghelli**

Dissertação apresentada para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT.

Trabalho aprovado. Joinville, SC, 07 de março de 2013:

---

**Eduardo Lenz Cardoso**  
CCT/UEDESC Orientador

---

**Otávio Augusto Alves da Silveira**  
CCT/UEDESC

---

**Jun Sérgio Ono Fonseca**  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Joinville, SC  
2013

*Dedico este trabalho à minha família, em especial a meus pais Aldo e Marisa, e a minha namorada Raquel.*

# Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus pelas condições físicas e intelectuais necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço a minha família pelo apoio moral e material necessários para realização do mestrado, especialmente a meus pais Aldo José Meneghelli e Marisa Meneghelli. Agradeço também a minha namorada Raquel pelas palavras e atitudes de amor, pela compreensão e pelo incentivo ao início deste trabalho.
- Agradeço ao Prof. Eduardo Lenz Cardoso por sua imprescindível orientação neste trabalho, por compartilhar todo o seu conhecimento, pelo apoio e paciência constantes.
- Agradeço à UDESC e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade de ingresso e financiamento deste estudo, em especial ao coordenador deste programa Prof. Joel Martins Crichigno Filho.
- Meus agradecimentos também a todos os professores membros do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica por todo conhecimento transmitido, que exerceu forte contribuição para o embasamento conceitual desta dissertação.
- Agradeço a todos os colegas do mestrado pelos bons momentos de convivência durante este período.

*“Quanto mais aumenta nosso conhecimento,  
mais evidente fica nossa ignorância. “*

*John F. Kennedy*

# Resumo

Mecanismos flexíveis são dispositivos mecânicos que transformam ou transferem movimento, força ou energia, através de uma única peça. Este tipo de mecanismo encontra aplicações importantes em sistemas micro eletromecânicos (MEMS, *micro electromechanical systems*) e demais sistemas que exijam grandes precisões nos movimentos e escala microscópica. O projeto de mecanismos flexíveis é realizado através do Método de Otimização Topológica e o problema de otimização será formulado tendo em vista a maximização de energia de deformação elástica armazenada pelo mecanismo, eliminando assim a ocorrência de rótulas (*hinges*). O comportamento cinemático do mecanismo é imposto através de restrições sobre o campo de deslocamentos em alguns graus de liberdade de interesse. O comportamento elástico dos mecanismos flexíveis é imposto usando um critério global de restrição de tensão e algumas questões importantes associadas a parametrização das tensões são discutidas no contexto de projeto de mecanismos. Os exemplos numéricos mostram que é possível obter topologias bem definidas e que satisfaçam as restrições do projeto. Com base nestes exemplos, verifica-se que a restrição de tensão exerce forte influência no resultado, podendo limitar a quantidade de energia necessária para atender às restrições do mecanismo.

**Palavras-chave:** Mecanismos flexíveis. Restrição de tensão. Otimização Topológica.

# Abstract

Compliant mechanisms are mechanical devices that transform or transfer motion, force or energy through a single part. These mechanisms have important applications in micro electromechanical systems (MEMS) as well as systems that require large accuracy in motion and micro scale. In this work the compliant mechanisms design is performed by means of the Topology Optimization Method, and the optimization problem is formulated in order to maximize the strain energy stored inside the mechanism, eliminating the appearance of hinges. The kinematic behavior of the mechanism is imposed through a set of constraints on displacements of a few degrees of freedom of interest. The elastic behavior is imposed by means of a global stress constraint and some issues associated to the stress parametrization in topology optimization are addressed in the context of mechanisms design. The numerical examples shown that the proposed formulation is able to generate clean topologies of feasible compliant mechanisms. Based on the results, it is clear that the stress constraint has a deep impact on the design of compliant mechanisms, since it can constraint the amount of energy used to enforce the displacement constraints.

**Keywords:** Compliant Mechanisms. Stress Constraint. Topology Optimization.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Mecanismo com flexibilidade distribuída sujeito a ocorrência de tensões mecânicas. . . . .	18
Figura 2 – Otimização Paramétrica (esquerda), Otimização de Forma (centro) e Otimização Topológica (direita). . . . .	21
Figura 3 – Curvas do modelo SIMP . . . . .	24
Figura 4 – Raio de abrangência do filtro espacial. . . . .	30
Figura 5 – Algoritmo para Otimização Topológica (baseado na figura 1.5, página 14 de (BENDSØE; SIGMUND, 2003)). . . . .	32
Figura 6 – Mecanismo tradicional . . . . .	33
Figura 7 – Mecanismo flexível . . . . .	34
Figura 8 – Flexibilidade distribuída (A) e flexibilidade concentrada (B) . . . . .	35
Figura 9 – Domínio fixo inicial - mecanismo genérico . . . . .	36
Figura 10 – Influência do expoente $n$ no comportamento da função de energia de deformação modificada ( $p = 1$ ). . . . .	37
Figura 11 – Linearização da função objetivo em torno de $\mathbf{x}^k$ . . . . .	49
Figura 12 – Fluxograma do algoritmo . . . . .	51
Figura 13 – Mecanismo inversor. . . . .	52
Figura 14 – Domínio seccionado. . . . .	52
Figura 15 – Carregamento e rigidez aplicados no domínio. . . . .	53
Figura 16 – Nós onde são aplicadas as restrições de deslocamento. . . . .	53
Figura 17 – Modelo físico do mecanismo inversor. . . . .	53
Figura 18 – Topologia obtida com restrição de volume de 40% - caso 1 . . . . .	55
Figura 19 – Topologia obtida com restrição de volume de 25% - caso 2 . . . . .	56
Figura 20 – Topologia obtida com restrição de volume de 15% - caso 3 . . . . .	56
Figura 21 – Tensões equivalentes de von Mises para o caso $V_{max} = 40\%$ . . . . .	56
Figura 22 – Tensões equivalentes de von Mises para o caso $V_{max} = 25\%$ . . . . .	56
Figura 23 – Energia de deformação modificada ( $\Psi$ ). $V_{max} = 40\%$ - caso 1 . . . . .	57
Figura 24 – Energia de deformação modificada ( $\Psi$ ). $V_{max} = 25\%$ - caso 2 . . . . .	57
Figura 25 – Energia de deformação modificada ( $\Psi$ ). $V_{max} = 15\%$ - caso 2 . . . . .	57
Figura 26 – Rigidez reduzida: $K_{dist} = 2 \times 10^7 N/m$ - caso 1. . . . .	57
Figura 27 – Rigidez aumentada: $K_{dist} = 2 \times 10^9 N/m$ - caso 2. . . . .	58
Figura 28 – Rigidez aumentada - distribuição das tensões equivalentes de von Mises. . . . .	58

Figura 29	– Rigidez reduzida: $K_{dist} = 2 \times 10^7 N/m$ .	58
Figura 30	– Influência da variação do raio de filtragem $R_{max} = 1,1 \times 10^{-3} m$ - caso 1.	59
Figura 31	– Influência da variação do raio de filtragem $R_{max} = 1,1 \times 10^{-3} m$ - caso 2.	59
Figura 32	– Influência da variação de $n$ ( $n = 3$ ).	60
Figura 33	– Influência da variação de $n$ ( $n = 5$ ).	60
Figura 34	– Influência da variação de $n$ ( $n = 10$ ).	60
Figura 35	– Campo de deslocamentos ( $q = 2, 8$ ) - caso 1.	61
Figura 36	– Topologia obtida com $q = 2, 8$ - caso 1.	61
Figura 37	– Distribuição das tensões equivalentes de von Mises, $q = 2, 8$ - caso 1.	61
Figura 38	– Distribuição das tensões equivalentes de von Mises, $q = 2, 4$ - caso 2.	61
Figura 39	– Topologia obtida com $\sigma_{lim} = 600 MPa$ - caso 1	62
Figura 40	– Distribuição de energia para $\sigma_{lim} = 600 MPa$ - caso 1.	62
Figura 41	– Distribuição das tensões para $\sigma_{lim} = 600 MPa$ - caso 1.	62
Figura 42	– Mecanismo com limite de tensão $\sigma_{lim} = 20 MPa$ - caso 2	63
Figura 43	– Distribuição de energia para $\sigma_{lim} = 20 MPa$ - caso 2.	63
Figura 44	– Distribuição das tensões para $\sigma_{lim} = 20 MPa$ - caso 2.	63
Figura 45	– Influência do refino da malha: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita). $q = 2$	63
Figura 46	– Comparativo das tensões: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita) $q = 2$ .	64
Figura 47	– Influência do refino da malha: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita). $q = 1, 5$ .	64
Figura 48	– Comparativo das tensões: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita) $q = 1, 5$ .	64

## Lista de tabelas

Tabela 1	– Valores utilizados na estratégia de limites móveis. . . . .	53
Tabela 2	– Parâmetros fixos na análise sobre a influência do volume disponível. . .	55
Tabela 3	– Resultados obtidos para o estudo de variação da restrição de volume. .	55
Tabela 4	– Resultados obtidos com a variação da rigidez do meio externo. . . . .	57
Tabela 5	– Resultados para variação do raio de filtragem. . . . .	58
Tabela 6	– Resultados para variação do parâmetro $n$ . . . . .	59
Tabela 7	– Resultados para variação do parâmetro $q$ . . . . .	60
Tabela 8	– Resultados para variação do limite de tensão $\sigma_{lim}$ . . . . .	62
Tabela 9	– Resultados e comparações para o refino da malha . . . . .	64

# Lista de Símbolos

$1_{\Omega^{mat}}$	Função indicadora	
$\alpha_i^k$	Fator de ajuste do limite móvel, da variável $i$ , iteração $k$	
$\alpha_l$	Fator de diminuição para $\alpha$	
$\alpha_u$	Fator de aumento para $\alpha$	
$\langle \bar{\cdot} \rangle$	Valor superior de uma variável	
$\bar{x}_i^k$	Limite móvel superior da variável $i$ , iteração $k$	
$\uplus$	Operador de sobreposição local-global	
$\lambda$	Vetor adjunto	
$\sigma_i$	Estado de tensões no ponto $i$	$Pa$
$\bar{\sigma}_i$	Estado de tensões.	$Pa$
$\epsilon$	Fator de relaxação $\epsilon$	
$\Gamma$	Medida global de tensão	$Pa$
$\gamma_j$	Multiplicador de Khun-Tucker associado a $g_j$	
$\ \circ\ _P$	Norma $P$	
$\mathbf{B}$	Matriz de derivada das funções de interpolação	
$\mathbf{E}$	Tensor constitutivo efetivo	$Pa$
$\mathbf{E}^0$	Tensor constitutivo do material base	$Pa$
$\mathbf{F}$	Vetor força global	$N$
$\mathbf{H}_e$	Matriz de localização	
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global	$\frac{N}{m}$
$\mathbf{K}_e$	Matriz de rigidez efetiva do elemento $e$	$\frac{N}{m}$
$\mathbf{K}_e^0$	Matriz de rigidez do elemento $e$ , sem considerar a pseudo densidade	$\frac{N}{m}$

$L_j$	Operador de localização para o vetor de deslocamento	
$M$	Matriz utilizada no cálculo de $\sigma_{vm}$	
$U$	Vetor global de deslocamentos	$m$
$U_e$	Vetor deslocamento de um elemento finito	$m$
$x$	Vetor de variáveis de projeto	
$x^*$	Ponto estacionário	
$\mu_e$	Variável intermediária	
$\mu_j$	Multiplicador de Khun-Tucker associado a $h_j$	
$\nu^0$	Coefficiente de Poisson do material base	
$\Omega$	Domínio de projeto	
$\Omega^{mat}$	Região do domínio de projeto que contém material	
$\bar{E}_{def}$	Energia de deformação efetiva de um elemento finito	$J$
$\Psi$	Valor da função Energia Modificada considerando toda a malha de elementos finitos	$J$
$\Psi_e$	Energia Modificada de um elemento finito	$J$
$\rho(X)$	Pseudo densidade na posição X	
$\rho_e$	Pseudo densidade do elemento $e$	
$\rho_{min}$	Valor mínimo para as pseudo densidades	
$\sigma_{lim}$	Valor limite de tensão	$Pa$
$\sigma_{vm}$	Tensão equivalente de von Mises	$Pa$
$\sigma_{vme}$	Tensão equivalente de von Mises no centróide do $e$ -ésimo elemento	$Pa$
$\leq\leq$	Valor inferior de uma variável	
$\underline{x}_i^k$	Limite móvel inferior da variável $i$ , iteração $k$	
$c^k$	Fator de correção da norma na iteração $k$	
$E_e$	Energia de entrada no mecanismo.	$J$
$E_s$	Energia de saída no mecanismo.	$J$

$E_{max}$	Energia disponível no mecanismo.	$J$
$f$	Função Objetivo	
$F_{dist}$	Força distribuída por unidade de área	$\frac{N}{m^2}$
$g_j$	$j$ -ésima Restrição de desigualdade	
$h_j$	$j$ -ésima Restrição de igualdade	
$K_{dist}$	Rigidez distribuída por unidade de comprimento	$\frac{N}{m}/m$
$m_g$	Número de restrições de desigualdade	
$m_h$	Número de restrições de igualdade	
$n$	Expoente da função Energia Modificada	
$n_{rd}$	Número de restrições de deslocamento.	
$ne$	Número de elementos finitos	
$nv$	Número de variáveis de projeto	
$nv$	Número de variáveis de projeto	
$P$	Expoente da norma P	
$p$	Expoente da parametrização SIMP	
$P_r$	Operador de projeção	
$q$	Expoente do método de relaxação $qp$	
$R_{ej}$	Distância entre o elemento $e$ e o elemento $j$	$m$
$R_{max}$	Raio de filtragem	$m$
$U_e$	Deslocamento de entrada do mecanismo	$m$
$U_s$	Deslocamento de saída do mecanismo	$m$
$v_j$	Volume do elemento $j$	$m^3$
$Vol(\Omega^{mat})$	Volume total da parcela do domínio que contém material	$m^3$
$w_j$	Função peso associada ao $j$ -ésimo elemento	
$X$	Posição no domínio $\Omega$	$m$
$x_{max}$	Valor superior de $x$	

$x_{min}$	Valor inferior de $x$	
$E_{def}^0$	Energia de deformação de um elemento finito sem considerar a pseudo densidade	$J$
$U_j$	$j$ -ésima componente do vetor deslocamento	$m$
$V$	Volume	$m^3$

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>18</b>
<b>1 Método da Otimização Topológica</b>	<b>20</b>
1.1 Introdução	20
1.2 Histórico	21
1.3 Parametrização Material	22
1.4 Restrição de Tensão	25
1.5 Problemas Relacionados a Otimização Topológica	27
1.6 Filtros	28
1.6.1 Filtro de Vizinhança Espacial	29
1.6.2 Comentários	30
1.6.3 Procedimento Computacional	31
<b>2 Mecanismos Flexíveis</b>	<b>33</b>
2.1 Conceitos	33
2.2 Revisão histórica	34
2.3 Mecanismos com flexibilidade distribuída	36
2.4 Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição de Tensão	38
2.4.1 Formulação do problema	39
<b>3 Análise de sensibilidades</b>	<b>41</b>
3.1 Sensibilidade da Função Energia de Deformação	41
3.2 Sensibilidade de Uma Componente do Vetor Deslocamento	43
3.3 Sensibilidade da Restrição de Tensão	44
<b>4 Programação Matemática</b>	<b>47</b>
4.1 Programação Linear Sequencial	48
4.2 Algoritmo de Otimização	50
<b>5 Resultados</b>	<b>52</b>
5.1 Influência do Volume Disponível de Material	54
5.2 Influência da Rigidez do Meio Externo	57
5.3 Influência do Raio de Filtragem	58
5.4 Influência do Parâmetro $n$	59
5.5 Influência do Parâmetro $q$	60
5.6 Influência da Restrição de Tensão	61
5.7 A influência do Refino da Malha	63

<b>6 Conclusão</b> . . . . .	<b>65</b>
6.1 Sugestões a trabalhos futuros . . . . .	67
<b>Referências</b> . . . . .	<b>69</b>

# Introdução

A presente proposta trata do projeto de mecanismos flexíveis distribuídos, considerando restrições quanto a segurança ao escoamento. Este tópico é bastante atual, uma vez que existem diversas propostas na literatura relativas ao projeto de mecanismos flexíveis e a consideração de restrições de tensão. A restrição de tensão é uma questão crucial no projeto mecânico, pois a integridade de qualquer estrutura está relacionada ao controle das tensões mecânicas.

Neste trabalho, o projeto otimizado será obtido por meio da técnica de Otimização Topológica. A formulação utilizada para o projeto do mecanismo flexível distribuído será baseada no trabalho apresentado por Cardoso e Fonseca (2004), que propõe a maximização de uma função da energia de deformação elástica juntamente com restrições de volume e restrições sobre o comportamento cinemático. No entanto, observa-se nos resultados obtidos com esta formulação, que podemos encontrar regiões com tensões elevadas já que a energia de deformação é proporcional ao nível de tensão em cada ponto do domínio, conforme a figura 1.

Desta forma, este trabalho propõe a consideração de uma restrição global de tensão mecânica baseada no trabalho de Le *et al* (2010) em adição a formulação de maximização da energia de deformação citada anteriormente. Para isto, será investigada a influência do comportamento da parametrização das tensões mecânicas em problemas com grandes regiões de vazios e submetidas a deformações consideráveis, como as que ocorrem nas topologias obtidas no trabalho de Cardoso e Fonseca (2004).

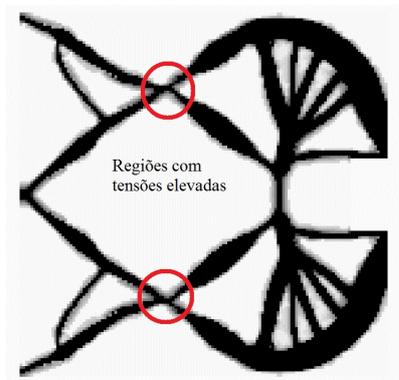


Figura 1 – Mecanismo com flexibilidade distribuída sujeito a ocorrência de tensões mecânicas.

## Sequência do Trabalho

Diversos temas referentes a composição da dissertação de mestrado serão investigados, com intuito de fornecer um embasamento conceitual sobre o assunto e avaliar o que tem sido publicado nos últimos anos para que uma contribuição eficaz e utilitária possa ser alcançada ao final desta pesquisa.

O capítulo 1 é dedicado ao Método da Otimização Topológica (MOT), contendo uma revisão histórica dos principais trabalhos que contribuíram para a evolução deste método e conceitos sobre a parametrização SIMP. Também é discutida a inserção de restrição de tensão em problemas de otimização, sobretudo as dificuldades relacionadas e os métodos que visam amenizar estes problemas. São mostrados ainda os principais problemas inerentes ao MOT e os métodos de filtragem, importantes para a implementação do método.

O capítulo 2 apresenta conceitos gerais sobre mecanismos flexíveis e comparações com os mecanismos tradicionais, sua importância bem como as diversas aplicações no contexto industrial, as vantagens e os desafios que ainda circundam este assunto. Também é discutida a classificação destas estruturas e os modelos existentes. Serão mencionados alguns trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento deste tema. Ao final do capítulo 2 é apresentada a formulação que será aplicada e investigada nesta dissertação.

No capítulo 3 são mostrados os desenvolvimentos das equações de sensibilidade, fundamentais no processo de otimização. Os conceitos de Programação Matemática, Programação Linear Sequencial bem como o algoritmo de otimização desenvolvido para este estudo são apresentados no capítulo 4.

Após apresentar os conceitos necessários e estabelecer a formulação do problema, o capítulo 5 irá apresentar e discutir os resultados obtidos com o mecanismo inversor. Finalmente o capítulo 6 trará discussões gerais sobre o estudo assim como as conclusões finais.

# 1 Método da Otimização Topológica

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos de otimização estrutural e suas principais implementações. Após, serão apresentados conceitos associados ao Método da Otimização Topológica, tais como fundamentação, histórico, parametrizações materiais e restrição de tensão. Por fim, serão apresentados alguns problemas associados a Otimização Topológica, com uma discussão sobre as alternativas encontradas na literatura. Em especial, serão abordados os filtros de vizinhança espacial.

## 1.1 Introdução

Otimização é um procedimento matemático que busca o valor extremo de um funcional, ao mesmo tempo em que satisfaz um conjunto de restrições (ARORA, 2007). O procedimento de otimização se dá por meio da modificação de um conjunto de parâmetros associados ao projeto, conhecidos como variáveis de projeto. Uma vez formulado, um problema de otimização é descrito em uma forma padrão,

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min/Max} & f(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{x} & \\
 \text{T.q.} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1..m_g \\
 & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1..m_h \\
 & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1..nv
 \end{array} \tag{1.1}$$

onde:

$\mathbf{x}$ :	vetor de variáveis de projeto
$f(\mathbf{x})$ :	função objetivo que se deseja extremar,
$g_j(\mathbf{x})$ :	funções de restrições de desigualdade,
$h_j(\mathbf{x})$ :	funções de restrições de igualdade,
$\bar{x}_i$ :	limite superior da i-ésima variável de projeto,
$\underline{x}_i$ :	limite inferior da i-ésima variável de projeto,
$m_g$	número de restrições de desigualdade,
$m_h$	número de restrições de igualdade,
$nv$	número de variáveis de projeto.

Quando o funcional e as restrições estão associados a um problema de engenharia que envolva o cálculo de estruturas mecânicas, diz-se então que a otimização é estrutu-

ral. Dependendo do conjunto de variáveis de projeto, podemos classificar a otimização estrutural como sendo paramétrica, de forma ou topológica (Figura 2):

- Otimização Paramétrica: as variáveis de projeto são parâmetros geométricos da estrutura, como por exemplo, o comprimento de uma viga, o diâmetro de um eixo, o diâmetro de um furo, espessuras e dimensões de uma seção transversal. Neste caso, a forma e a distribuição de material no projeto não são alteradas, apenas os valores de algumas dimensões.

- Otimização de Forma: as variáveis de projeto são associadas aos contornos da estrutura. Os contornos são gerados com interpolações baseadas nas variáveis de projeto, como por exemplo, interpolação por splines.

- Otimização Topológica: as variáveis de projeto são associadas a distribuição de material em um domínio fixo. Esta abordagem é mais genérica do que as anteriores, pois além de permitir a criação de contornos, possibilita a inclusão de vazios na estrutura.

Assim, a Otimização Topológica consiste em distribuir material em uma região do espaço previamente definida,  $\Omega$ , com o objetivo de extremar um funcional e de satisfazer as condições de contorno do problema de equilíbrio e as restrições associadas ao problema de otimização.

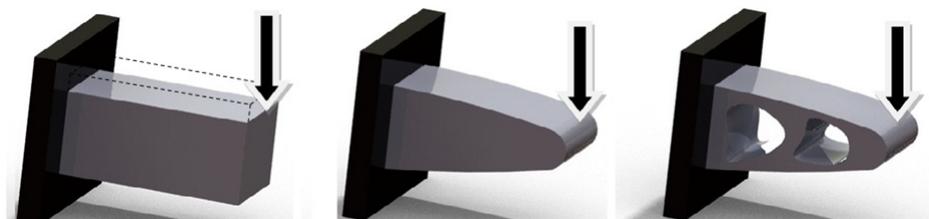


Figura 2 – Otimização Paramétrica (esquerda), Otimização de Forma (centro) e Otimização Topológica (direita).

## 1.2 Histórico

A Otimização Topológica é um campo de estudos consideravelmente novo e que vem se desenvolvendo rapidamente no contexto de estruturas mecânicas, bem como em outras áreas. O primeiro trabalho em Otimização Topológica foi apresentado por Michell no início do século XX, (MICHELL, 1904). No entanto, tal desenvolvimento se manteve desconhecido até a década de 70, quando foi redescoberto (ROZVANY; ADIDAM, 1972). Embora estes trabalhos sejam de Otimização Topológica, a abordagem utilizada era baseada em uma malha de treliças, conhecida como universo de barras. Em trabalhos de Otimização Topológica de meios contínuos, Cheng e Olhoff (1981), apresentaram um estudo sobre maximização da rigidez de placas delgadas considerando a espessura como variável de projeto. Eles observaram que quanto mais fina a discretização do domínio,

maior era o número de reforços obtidos, indicando uma influência da malha na solução do problema discretizado. Para evitar tal problema, Cheng e Olhoff (1982) propuseram a utilização de uma parametrização alternativa, onde ao invés de considerar diretamente as espessuras como variáveis de projeto, utilizaram os parâmetros geométricos de reforços com geometria pré-definida. Esta abordagem foi generalizada para problemas de elasticidade por Kohn e Strang (1986a, ) e posteriormente utilizada por Bendsøe e Kikuchi (1988), onde a parametrização não era aplicada diretamente sobre a quantidade de material, mas sim sobre propriedades geométricas de uma microestrutura periódica. As propriedades efetivas do meio eram então obtidas por meio do método de Homogeneização, (HASSANI; HINTON, 1998; SILVA et al., 1999). Embora tal abordagem permitisse a solução do problema de distribuição de material em um domínio contínuo, introduzia na solução regiões de material poroso de difícil interpretação e fabricação. Por isto, Bendsøe (1989), introduziu a parametrização alternativa SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*), cujo nome foi proposto em 1992 por (ROZVANY; SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, 1992a). Bendsøe e Sigmund (1999) apresentam uma boa revisão e fundamentação sobre a parametrização SIMP.

Em uma linha alternativa, Ambrósio e Buttazzo (1993) propuseram uma restrição do perímetro como forma de restringir o espaço de solução e garantir a existência de um ponto de ótimo. Harber, Jog e Bendsøe (1996) implementaram esta abordagem para parametrizações contínuas, com resultados interessantes. Beekers (1997) apresenta uma implementação baseada em variáveis discretas, com bons resultados mas de difícil generalização. Borrvall (2001) apresenta um estudo sobre os métodos restritivos como o controle de perímetro, controle de gradientes, filtros de densidades, entre outros. É feita também uma comparação entre alguns métodos.

Uma vez estabelecida a base matemática para a correta parametrização de material no domínio, outras contribuições relevantes surgem com os trabalhos de Sigmund (1994, 1997), que propõem filtros para suavizar a distribuição espacial das pseudo densidades, eliminando assim o fenômeno da instabilidade de tabuleiro ou *checkerboard*. Uma boa revisão sobre os métodos de filtragem é apresentada por (SIGMUND, 2007).

Atualmente, a Otimização Topológica tem sido utilizada para o projeto otimizado de mecanismo flexíveis, (RUBIO; NISHIWAKI; SILVA, 2010; LIN; LUO; TONG, 2010), transdutores piezelétricos, (NAKASONE; SILVA, 2010), dispositivos fotônicos, (CHEN et al., 2011), moldes para sinterização por plasma, (VASCONCELOS; MELLO; SILVA, 2010), projeto de materiais celulares (GUTH; LUERSEN; MUÑOZ-ROJAS, 2012), projeto de estruturas inteligentes para controle de vibrações (MOLTER et al., 2010), entre outros.

### 1.3 Parametrização Material

A Otimização Topológica de meios contínuos é formulada por meio da distribuição de um ou mais materiais em um domínio fixo, de modo a extremar um funcional sujeito a restrições (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Uma vez definido o domínio ( $\Omega$ ), passa-se a buscar o domínio que efetivamente contém material ( $\Omega^{mat}$ ). Em se tratando da distribuição de um material isotrópico, o desejável seria utilizar a parametrização

$$\mathbf{E}(X) = 1_{\Omega^{mat}}(X)\mathbf{E}^0, 1_{\Omega^{mat}}(X) = \begin{cases} 1 & X \in \Omega^{mat} \\ 0 & X \in \Omega/\Omega^{mat} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}}(X)d\Omega \leq Vol(\Omega^{mat}) \leq V,$$

onde  $\mathbf{E}^0$  é o tensor constitutivo que representa as propriedades de um material base isotrópico,  $\mathbf{E}$  é o tensor constitutivo efetivo e  $V$  é o volume limite de material. Esta abordagem é de natureza discreta, não permitindo valores intermediários, somente presença ou ausência de material. Tal parametrização faz com que o problema de otimização seja mal posto, o que leva a uma dependência da discretização quando solucionado por meio de métodos numéricos tais como o Método dos Elementos Finitos (KOHN; STRANG, 1986a; KOHN; STRANG, 1986b; KOHN; STRANG, 1986c). Em se tratando de Otimização Topológica de meios contínuos, Bendsøe e Kikuchi (1988), propuseram uma parametrização que descreve a variação espacial de um material anisotrópico periódico, onde as propriedades em cada ponto do domínio são descritas por parâmetros geométricos de uma célula unitária. As propriedades efetivas do material são obtidas utilizando-se o Método da Homogeneização (HASSANI; HINTON, 1998). Com isto o problema se torna bem posto e possui solução (BENDSØE, 1995).

No entanto, geralmente é difícil interpretar a distribuição de material com tal parametrização. O método SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*) é um modelo de material que tem como objetivo relaxar a parametrização discreta proposta na equação 1.2, ao mesmo tempo em que permite a utilização de materiais isotrópicos. A parametrização SIMP tem a forma

$$\mathbf{E}(X) = \rho(X)^p \mathbf{E}^0 \quad (1.3)$$

$$\int_{\Omega} \rho(X)d\Omega \leq V, \quad 0 \leq \rho(X) \leq 1, \quad \forall X \in \Omega$$

onde  $\rho(X)$  é a pseudo densidade na coordenada  $X$ , tal que  $0 \leq \rho(X) \leq 1$ ,  $\mathbf{E}^0$  é o tensor constitutivo que representa as propriedades de um material base isotrópico,  $\mathbf{E}$  é o tensor constitutivo efetivo na posição  $X$  e  $V$  é o volume disponível de material. O expoente  $p > 1$  tem como objetivo penalizar o aparecimento de pseudo densidades intermediárias. De acordo com Bendsøe e Sigmund (2003), o expoente deve satisfazer as relações

$$p \geq \left\{ \frac{2}{1 - \nu^0}, \frac{4}{1 + \nu^0} \right\} \quad (1.4)$$

e

$$p \geq \left\{ 15 \frac{1 - \nu^0}{7 - 5\nu^0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu^0}{1 - 2\nu^0} \right\}, \quad (1.5)$$

para 2D e 3D, respectivamente, onde  $\nu^0$  representa o coeficiente de Poisson do material base. Assim, se o material possuir  $\nu^0 = 1/3$ , o menor valor admissível para  $p$  será 3 (EPT) ou 2 (3D).

A relação entre o módulo de elasticidade e a pseudo densidade com a variação de  $p$ , é apresentada na Figura 3, onde fica claro que para  $p = 1$  obtemos uma relação linear entre a rigidez efetiva do meio e a pseudo densidade e para  $p \rightarrow \infty$  recuperamos a parametrização da equação 1.2. No entanto, no processo de otimização podemos obter regiões com pseudo densidades intermediárias, conhecidas como escalas de cinza ou *gray-scales*, que podem ser amenizadas utilizando-se um valor adequado de  $p$ .

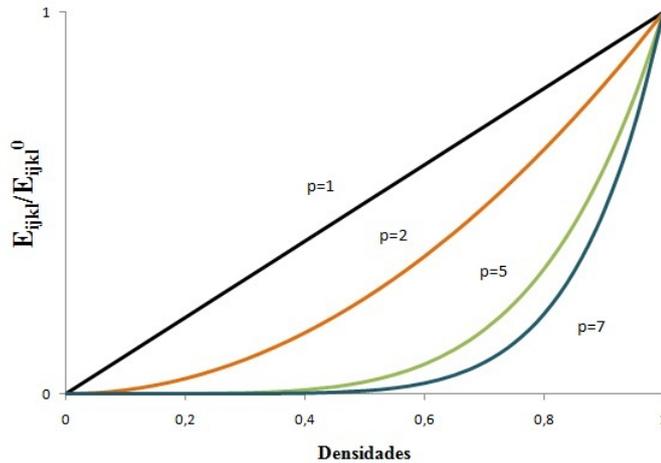


Figura 3 – Curvas do modelo SIMP

Se o domínio for discretizado por elementos finitos, como utilizado neste trabalho, assume-se que cada elemento é constituído de um material cuja propriedade é  $\mathbf{E} = \rho_e^p \mathbf{E}^0$ . Assim a matriz rigidez local deste elemento será

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega_e = \rho_e^p \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{B} d\Omega_e, \quad (1.6)$$

onde  $\mathbf{K}_e$  representa a rigidez efetiva do elemento,  $\mathbf{B}$  é a matriz de derivadas das funções de interpolação e  $\mathbf{K}_e^0$  é matriz de rigidez sem levar em consideração a pseudo densidade. A rigidez global da malha de elementos finitos,  $\mathbf{K}$ , é obtida por meio de um operador de sobreposição local-global, na forma

$$\mathbf{K} = \bigoplus_{e=1}^{ne} \mathbf{K}_e \quad (1.7)$$

onde  $ne$  é o número de elementos finitos na malha. É importante salientar que, na prática, este operador é implementado por meio de um algoritmo (BATHE, 1996). Com isto, o número de pseudo densidades da malha será igual ao número de elementos finitos.

De modo a evitar problemas numéricos associados a uma matriz de rigidez global singular, utiliza-se um valor de pseudo densidade mínimo maior do que zero, tal que  $0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$ . Neste trabalho um valor  $\rho_{min} = 1 \times 10^{-4}$  foi utilizado.

## 1.4 Restrição de Tensão

A imposição de restrições de tensão tem sido um tema desafiador na otimização estrutural, em especial na Otimização Topológica. Devido ao seu caráter local, só podemos garantir a segurança da topologia em relação a um critério de falha baseado em tensão se todos os seus pontos forem seguros. Idealmente, isto implica em um número elevado de restrições, dependentes da discretização do domínio e da técnica utilizada para o cálculo das tensões em cada elemento/nó da malha. Como um exemplo, se uma malha de elementos finitos for composta de 1000 elementos e se calcularmos as tensões somente nos centróides dos elementos, teremos 1000 restrições associadas ao limite de tensão. Um número tão elevado de restrições implica em uma grande dificuldade para a convergência do algoritmo de otimização utilizado. Desta forma, observa-se na literatura uma busca por medidas globais de tensão, que permitam "condensar" as restrições locais em uma única restrição. No entanto, existe muita dificuldade em encontrar uma função geral e robusta que seja capaz de controlar com eficiência os valores de pico locais. Idealmente, o objetivo destas abordagens é obter uma única restrição na forma

$$\Gamma(\boldsymbol{\sigma}_i) \leq \sigma_{lim} \quad i = 1..ne, \quad (1.8)$$

onde  $\Gamma$  é um operador que reúne as informações de todos os estados de tensão presentes na malha de elementos finitos. A abordagem mais comum para obter-se  $\Gamma$  é a utilização

de uma norma- $P$  (equação 1.9) baseada na tensão equivalente de von Mises, tal que

$$\Gamma(\boldsymbol{\sigma}_i) = \|\sigma_{vm}\|_P = \left( \sum_{i=1}^{ne} \sigma_{vm_i}^P \right)^{\frac{1}{P}}, \quad (1.9)$$

embora outros critérios de falha também sejam abordados na literatura (BRUGGI; DUYSINX, 2012).

No entanto, esta abordagem só faz sentido físico se o expoente  $P$  da norma tender para infinito, o que na prática implica em instabilidades numéricas. Assim, valores baixos de  $P$  resultam em topologias similares a minimizações de flexibilidade com tensões concentradas em um ponto da estrutura e para valores altos pode-se perceber uma distribuição uniforme de tensão com poucas concentrações de tensões (LE et al., 2010). Visando solucionar este problema, Le et al (2010) propõem a utilização de um fator  $c$  que considera informações da iteração anterior,  $(k-1)$ , a fim de obter uma tensão global que represente a tensão equivalente máxima da estrutura, na forma

$$c^k \|\sigma_{vm}^k\|_P \leq \sigma_{lim} \quad (1.10)$$

com

$$c^k = \frac{\max(\sigma_{vm})^{k-1}}{\|\sigma_{vm}^{k-1}\|_P}.$$

Em uma linha alternativa, Pereira, Fancello e Barcellos (2004) utilizaram o método do Lagrangeano Aumentado para considerar as restrições locais de tensão. Cada restrição local é posta como uma penalização na função objetivo e ponderada por um multiplicador de Lagrange. Conforme demonstrado pelos autores, esta opção permite a obtenção de boas topologias, sem a preocupação com parâmetros associados a uma medida global de tensão. Por outro lado, tal algoritmo é bastante sensível a escolha dos parâmetros utilizados no método do Lagrangeano Aumentado. Outro estudo que aborda restrições locais de tensão pode ser visto em (AMSTUTZ; NOVOTNY, 2010).

Um trabalho recente que trata desta questão é o de Paríz (2010), onde são desenvolvidas 3 formulações de restrições tensão: restrição local, restrição global e restrição por blocos agregados. Para restrições locais é usada uma formulação baseada nos estudos de Yang e Chen (1996) e Duysinx e Bendsøe (1998). Para uma restrição global a função com comportamento logarítmico-exponencial de Kreisselmeier-Steinhauser (função KS) é estabelecida (KREISSELMEIER; R., 1979). Para a formulação de blocos agregados, os elementos são agrupados em diversos blocos de modo que a cada bloco é imposto uma restrição de tensão. Conseqüentemente, quanto maior o número de blocos estabelecidos maior será a quantidade de restrições de tensão. Blocos agregados também são utilizados por Le et al. (2010), em problemas de minimização de massa.

Outra dificuldade relacionada a restrição de tensão em Otimização Topológica está associada a parametrização material. Conforme discutido por Duysinx e Bendsøe (1998), a parametrização SIMP pode ser estendida para levar em consideração a relação entre pseudo densidade e tensão em um ponto. A forma correta para esta parametrização é

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho^p}{\rho^q} \mathbf{E}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (1.11)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o estado de tensão no ponto,  $\rho$  é a pseudo densidade,  $\mathbf{E}^0$  é o tensor constitutivo do material base e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}$  é o estado de deformação no ponto. O expoente  $p$  é o expoente já definido para a parametrização SIMP de rigidez e o expoente  $q$  é um expoente associado ao comportamento assintótico da tensão quando obtido por meio de uma microestrutura do tipo Rank-2. Conforme discutido no artigo, do ponto de vista de coerência com uma microestrutura ótima, a opção correta para a escolha de  $q$  é tal que  $q = p$ . No entanto, conforme discutido por Bruggi (2008), isto provoca um fenômeno de singularidade, uma vez que um ponto com  $\rho = \rho_{min}$  pode apresentar uma tensão elevada, dependente apenas da magnitude do estado de deformação. Isto provoca um problema bastante conhecido em Otimização Topológica, onde não é possível retirar material do domínio. Para solucionar este problema, Cheng e Guo (1997) propõem aplicar uma relaxação da forma

$$(\sigma_{vm} - \rho^p \sigma_{lim}) \rho \leq \epsilon \quad \epsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho, \quad (1.12)$$

onde  $\sigma_{vm}$  é a tensão equivalente de von Mises no ponto,  $\sigma_{lim}$  é o valor limite de tensão e  $\epsilon$  é um fator de relaxação. O processo de solução inicia-se solucionando a otimização com um valor elevado para  $\epsilon$  como forma de relaxar a região degenerada do domínio. Em seguida, os valores do parâmetro de relaxação devem ser reduzidos gradativamente e os resultados devem ser utilizados como ponto inicial para a próxima equação mais restritiva. Rozvany e Sobieszczanski (1992b), utilizam funções envelope de relaxação (*smooth envelope functions*, SEF's), como uma alternativa a parametrização da equação 1.11, mostrando que a relaxação- $\epsilon$  pode ser vista como um caso especial. Nesta mesma linha, Bruggi (2008) propõe a utilização de valores  $p$  e  $q$  diferentes na equação 1.11, de modo a obter um comportamento onde a tensão vai efetivamente a zero em regiões de vazio, mesmo que isto implique em violar o comportamento de uma microestrutura ótima. No método da relaxação- $qp$ , inicialmente adota-se um valor pequeno para  $q$  que satisfaça  $q < p$  e encontra-se a solução para o problema de otimização com restrições de tensão. Então aumenta-se o valor de  $q$  e o novo ponto deve ser usado como o ponto inicial para encontrar a nova solução (método de continuação). Bruggi (2008) apresenta comparações entre os métodos relaxação- $\epsilon$  e relaxação- $qp$ . Na opinião dos autores, o método da relaxação- $qp$  é mais simples de implementar do que a relaxação- $\epsilon$  e permite solucionar efetivamente o problema da singularidade de tensões.

Por fim, cabe salientar que um terceiro ponto de interesse em se tratando de restrições de tensão é a qualidade do cálculo de tensões. Embora este tópico não seja muito discutido na literatura de Otimização Topológica, sabe-se que a tensão obtida pelo método dos Elementos Finitos Compatíveis, comumente utilizado na implementação de Otimização Topológica, apresenta problemas de precisão, principalmente no contorno. Colombo, Cardoso e Muñoz-Rojas (2011) discutem este problema e propõem o uso de esquemas superconvergentes de recuperação de tensão.

No presente estudo, será utilizado o critério global de tensão definido na equação 1.10 juntamente com a relaxação-*qp*. As tensões são calculadas no centróide de cada elemento finito bilinear isoparamétrico de 4 nós, sem qualquer tratamento posterior.

## 1.5 Problemas Relacionados a Otimização Topológica

Podem ser destacadas algumas dificuldades relacionadas a este método de otimização:

- A dependência da malha: Embora a parametrização SIMP permita a formulação do problema, ela não evita a dependência do resultado com o refino da malha, associado ao fato de o espaço de solução não ser fechado. Isto pode ser explicado pelo fato de estarmos distribuindo um material isotrópico, quando sabemos que somente materiais anisotrópicos permitem atingir o ótimo. Com isto, a medida que se refina a malha, o número de reforços é aumentado, tendendo para uma microestrutura anisotrópica.
- A instabilidade do tabuleiro: Em alguns casos, a distribuição de material no domínio pode produzir regiões onde a pseudo densidade dos elementos adjacentes varia de forma periódica. A região se configura com característica similar a um tabuleiro de xadrez, alternando entre espaços vazios e espaços sólidos que não correspondem a distribuição ótima de material. Na literatura internacional este fenômeno é conhecido como *checkerboard*. Os resultados do trabalho de Díaz e Sigmund (1995) mostram que esse fenômeno surge devido a um modelamento inadequado do MEF e, nas regiões onde isso acontece, a rigidez aparenta artificialmente ter um valor elevado quando comparado com outra região da estrutura que possua o mesmo volume mas com uma distribuição homogênea.
- Mínimos locais: Os problemas de engenharia, quando se referem a otimização, são na sua grande maioria não convexos. Isto faz com que possuam muitos mínimos locais e conseqüentemente um mesmo problema de otimização é conduzido a estes vários mínimos diferentes dependendo dos parâmetros e das variáveis iniciais do algoritmo.

Assim não se pode garantir que o ponto de mínimo fornecido pela solução seja o melhor ponto, isto é, o mínimo global.

## 1.6 Filtros

Filtros são operadores matemáticos aplicados sobre uma função não regular, tendo como objetivo suavizar sua distribuição espacial. Com isto, instabilidades numéricas tais como o *checkerboards*, são eliminados além de permitirem algum controle sobre a complexidade da topologia obtida (CARDOSO; FONSECA, 1999). É possível também obter um grau de independência dos resultados com o refino da malha através da utilização dos filtros.

Basicamente, os filtros podem ser classificados em 3 categorias, de acordo com (SIGMUND, 2007):

1. Filtros de vizinhança espacial: Nestes filtros uma grandeza associada a um elemento finito é obtida por meio de uma média ponderada das grandezas dos elementos vizinhos. A vizinhança é obtida por meio da definição de um raio em torno do elemento. Geralmente esses filtros são aplicados sobre as sensibilidades ou pseudo densidades dos elementos, embora outras grandezas também possam ser filtradas (CARDOSO; FONSECA, 1999).
2. Métodos restritivos: Controle de perímetro proposto por (AMBROSIO; BUTTAZZO, 1993) e (HARBER; JOG; BENDSØE, 1996) e métodos de controle de gradiente local e global (PETERSON; SIGMUND, 1998).
3. Outros métodos como *Wavelet Parametrization* (KIM; YOON, 2000) e o Método de *level set* (ALLAIRE; JOUVE; TOADER, 2004).

Os filtros citados na classificação 1 são os mais utilizados devido a facilidade de implementação e eficiência. Os métodos restritivos da segunda classificação são mais difíceis de aplicar devido a dependência da geometria e das condições do problema. Existem ainda métodos híbridos que combinam as categorias 1 e 2 como discutido em (CARDOSO, 2000).

Cabe ressaltar que embora as primeiras implementações de Otimização Topológica utilizassem como variáveis de projeto as pseudo densidades de cada elemento, tem-se observado na literatura um aumento no uso de variáveis nodais, que são posteriormente aplicadas aos centróides dos elementos. Na verdade, isto é uma escolha do usuário, sendo que os métodos discutidos aqui podem ser implementados das duas formas.

### 1.6.1 Filtro de Vizinhança Espacial

Filtros de Vizinhança Espacial agem modificando as pseudo densidades dos elementos (e conseqüentemente a sua rigidez), através da aplicação de um operador que depende dos valores de pseudo densidades presentes em uma vizinhança em torno do elemento em questão. Uma discussão importante é a conservação do volume contido na vizinhança antes e depois da atuação do filtro (SIGMUND, 2007).

O filtro espacial de densidades introduzido por (BRUNS; TORTORELLI, 2001) calcula a pseudo densidade de um elemento  $e$  por meio de uma média ponderada, na forma:

$$\rho_e = \frac{\sum_{j=1}^{nev} w_j v_j \rho_j}{\sum_{j=1}^{nev} w_j v_j} \quad (1.13)$$

sendo  $j$  um elemento vizinho,  $v_j$  seu volume,  $w_j$  uma função peso que tem como objetivo ponderar a influência dos vizinhos em função de sua distância e  $nev$  é o número de vizinhos ao elemento. A abordagem mais utilizada é a linear, com a forma

$$w_j = \frac{R_{max} - R_{ej}}{R_{max}}, \quad (1.14)$$

onde  $R_{max}$  é o raio de filtragem previamente estipulado para abranger uma determinada vizinhança, conforme a figura 4.  $R_{ej}$  é a distância entre o elemento central e um determinado vizinho  $j$ . Desta forma, verifica-se que o raio de abrangência  $R_{max}$  é o parâmetro de controle do filtro e a função  $w_j$  será zero se o vizinho estiver além da abrangência do raio. A suavização da distribuição das variáveis no domínio será proporcional a magnitude do raio.

Uma modificação interessante aos filtros espaciais é conhecida na literatura como operador de projeção. Nesta formulação, a média ponderada apresentada na equação 1.13 não é aplicada diretamente na pseudo densidade do elemento central, mas atribuída a uma variável intermediária  $\mu_e$ , na forma

$$\mu_e = \frac{\sum_{j=1}^{nev} w_j \rho_j}{\sum_{j=1}^{nev} w_j} \quad (1.15)$$

e a pseudo densidade no elemento  $e$  é obtida por meio de um operador

$$\rho_e = P_r(\mu_e), \quad (1.16)$$

que pode assumir diversas formas, como por exemplo o operador Heaviside, que tem como característica penalizar o aparecimento de pseudo densidades intermediárias, além de permitir um bom controle sobre a espessura dos reforços obtidos na otimização (GUEST; PRÉVOST; BELYTSCHKO, 2004). Cabe ressaltar que o filtro de densidades tradicional

é obtido com a projeção direta, ou seja,  $\rho_e = \mu_e$ , como a utilizada neste trabalho. Do ponto de vista estritamente matemático, um operador de projeção  $P_r$  deve ser uma transformação linear com propriedade  $P_r : P_r \rightarrow P_r$ , fato este que não é discutido na literatura quando no uso da denominação projeção em trabalhos de Otimização Topológica. Devido a este fato, iremos utilizar a nomenclatura padrão de filtros espaciais neste trabalho.

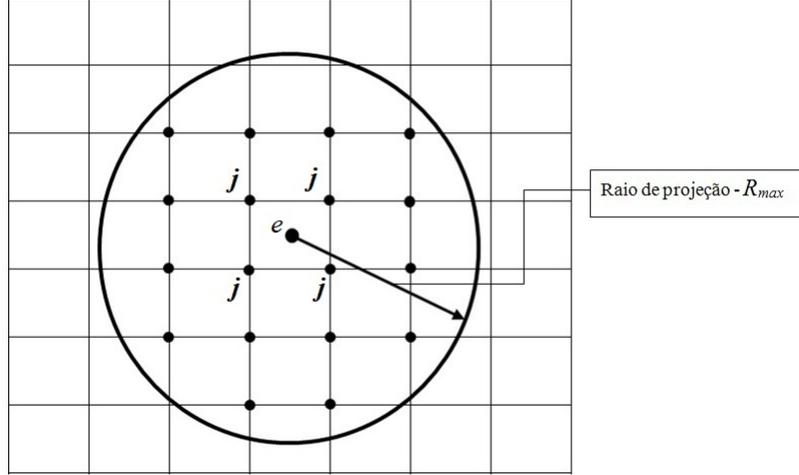


Figura 4 – Raio de abrangência do filtro espacial.

### 1.6.2 Comentários

Pode ser observado que uso dos filtros produz regiões com pseudo densidades intermediárias na topologia final (LIMA, 2002). No entanto, a sua implementação é necessária para introduzir algum grau de independência da solução com a malha de elementos finitos e também evitar o aparecimento da instabilidade de tabuleiro. Por isto Cardoso (2000) e outros autores propõem o desligamento do filtro após a obtenção da topologia final, procedendo algumas iterações adicionais no algoritmo de otimização. É importante controlar o número de iterações extras para que o *checkerboard* não apareça novamente. Este método é conhecido como continuação, permitindo obter uma topologia clara e que não viole as restrições.

Neste trabalho, o processo de otimização ocorre através das variáveis nodais  $\mathbf{x}$  (figura 4), que são mapeadas para os centróides dos elementos vizinhos, por meio das equações 1.16, 1.15 e 1.14. No entanto, todas as sensibilidades que serão obtidas neste texto serão calculadas em relação as pseudo densidades centroidais. Assim, tais sensibilidades devem ser corrigidas usando a regra da cadeia, na forma

$$\frac{df}{dx_m} = \frac{df}{d\rho_e} \frac{d\rho_e}{dx_m}, \quad (1.17)$$

com

$$\frac{d\rho_e}{dx_m} = \frac{\delta_{jm} w_m}{\sum_{j=1}^{nev} w_j}. \quad (1.18)$$

Entretanto cabe ressaltar que o somatório não é calculado em todos os elementos da malha, pois  $\frac{d\rho_e}{dx_m}$  é definida somente na vizinhança do elemento  $m$ .

### 1.6.3 Procedimento Computacional

A implementação computacional de um problema de Otimização Topológica consiste na realização sequencial de diversas etapas, conforme ilustrado na figura 5.

A primeira etapa, a fase de pré-processamento, refere-se a definição do domínio de projeto, de sua discretização e da imposição das condições de contorno do problema de equilíbrio, na forma:

- Escolher adequadamente o domínio de referência que permita a definição de carregamento e condições de contorno;
- Definir as regiões do espaço de projeto que devam obrigatoriamente conter ou não material;
- Construir uma malha de elementos finitos para o domínio já estabelecido. O refino da malha de ser tal que consiga representar adequadamente a estrutura, tanto do ponto de vista de equilíbrio quanto de definição da topologia que se deseja.

Na segunda etapa é realizada efetivamente a otimização:

- Fazer uma estimativa inicial das variáveis de projeto;
- Calcular as sensibilidades (gradientes);
- Utilizar um algoritmo de otimização como MMA (Método das Assíntotas Móveis) ou SLP (Programação Linear Sequencial);
- Atualizar as variáveis de projeto e repetir o procedimento até que seja atingido o ponto de ótimo.

A última etapa é a fase de pós-processamento.

- Os resultados obtidos na segunda etapa devem ser interpretados, analisados e representados como uma topologia definida.

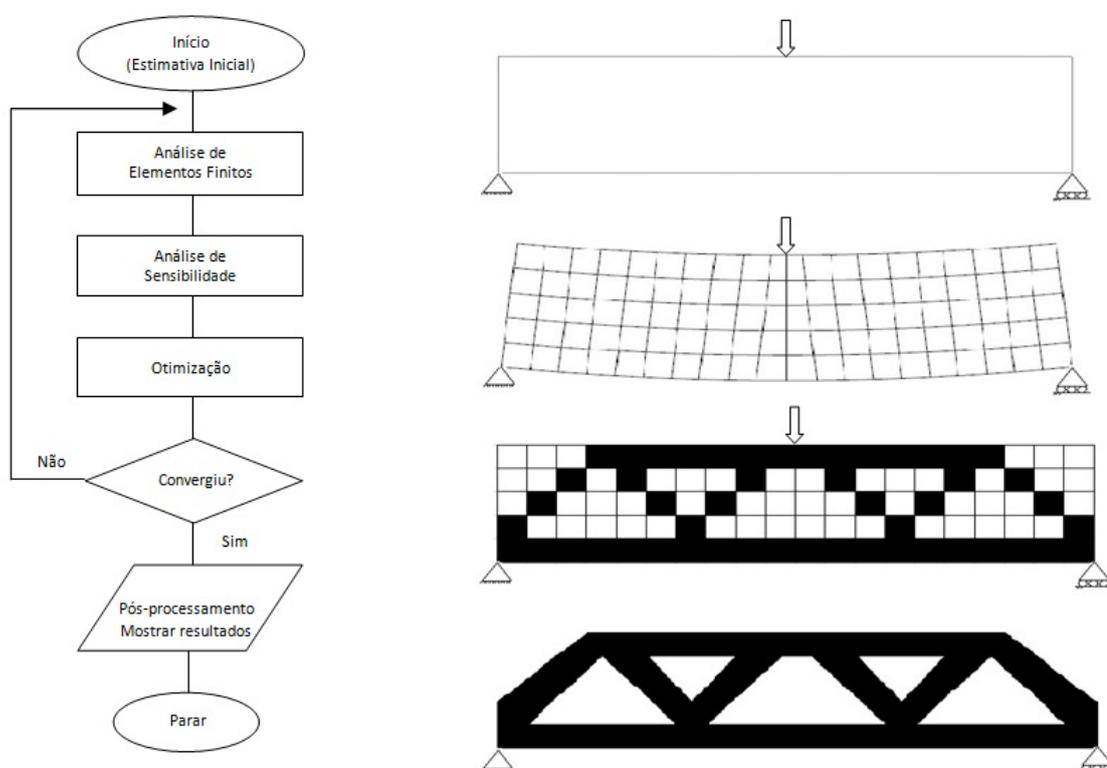


Figura 5 – Algoritmo para Otimização Topológica (baseado na figura 1.5, página 14 de (BENDSØE; SIGMUND, 2003)).

## 2 Mecanismos Flexíveis

Neste capítulo são apresentados os conceitos relacionados a mecanismos flexíveis, bem como uma breve revisão histórica. Após, é apresentada uma discussão sobre o aparecimento de elementos conectados por um nó (rótulas ou *hinges*) e uma discussão sobre uma formulação alternativa para a eliminação deste tipo de problema.

### 2.1 Conceitos

Um mecanismo é um dispositivo mecânico cuja função é transferir ou transformar movimento, força ou energia (BUSCH-VISHNIAC, 1998). Mecanismos tradicionais, tais como o ilustrado na Figura 6, são formados por diversas peças rígidas nas quais não são permitidos grandes deformações elásticas para que a eficácia do mecanismo não fique prejudicada. As articulações móveis entre as peças geram movimento relativo, ocasionando atrito e suas consequências, tais como ruído, desgaste, folga e vibrações.



Figura 6 – Mecanismo tradicional

FONTE:

[www.virtual.unal.edu.co/cursos/ingenieria/2001734/lecciones/tem05/lec03\\_1\\_2.htm](http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ingenieria/2001734/lecciones/tem05/lec03_1_2.htm),  
acesso em 26 de Março de 2012.

Por sua vez, um mecanismo flexível (*compliant mechanism*), como o ilustrado na Figura 7, permite que as funções deste dispositivo mecânico sejam cumpridas utilizando-se apenas uma peça, eliminando assim as juntas móveis, o desgaste e a necessidade de lubrificação. A redução da quantidade de peças que o mecanismo flexível proporciona pode simplificar a produção eliminando a montagem e gerando assim uma grande redução nos custos de fabricação. Este tipo de mecanismo deve ter rigidez suficiente para transmitir esforços e em contrapartida deve ter flexibilidade suficiente para se deformar e atingir o objetivo ao qual se propõe. Dependendo da forma como a flexibilidade é distribuída ao longo do mecanismo, podemos ter dois tipos de mecanismos flexíveis (Figura 8). Nos mecanismos de flexibilidade concentrada, temos algumas regiões com flexibilidade muito maior do que no restante da peça. Por sua vez, nos mecanismos com flexibilidade distribuída, não observamos pontos com flexibilidade dominante.



Figura 7 – Mecanismo flexível

FONTE: <http://compliantmechanisms.byu.edu/image-gallery/grippers>, acesso em 26 de Março de 2012.

De modo geral, os mecanismos flexíveis proporcionam grande precisão nos movimentos, podendo ser fabricados em escala microscópica. Por isso são aplicados em sistemas que exigem tais requisitos, como sistema microeletromecânicos (MEMS). Outra importante utilização dos mecanismos flexíveis é na instrumentação cirúrgica, onde a precisão é um fator determinante. O peso reduzido, a possibilidade de construção em tamanhos muito reduzidos e aplicação em ambientes hostis fazem deste tipo de mecanismo uma grande alternativa para indústrias eletrônica e espacial.

Assim como existem vantagens associadas a mecanismos flexíveis, existem também vários desafios e desvantagens para algumas aplicações. Talvez o maior desafio seja analisar e projetar tais sistemas, pois isto requer conhecimento dos métodos de análise de mecanismos e da deflexão dos membros flexíveis do dispositivo. Devido a estas dificuldades, no passado os mecanismos flexíveis foram desenvolvidos pelo método de tentativa erro. Tais métodos são aplicáveis apenas para sistemas muito simples e muitas vezes não são economicamente viáveis para muitas aplicações potenciais. Muitas teorias foram desenvolvidas para simplificar a análise e o projeto de mecanismos flexíveis, mas mesmo considerando esses avanços, a tarefa de projetar e analisar tais sistemas ainda são desafadores.

## 2.2 Revisão histórica

Os métodos para síntese de mecanismos flexíveis se dividem em dois tipos principais: a síntese cinemática e síntese do contínuo. A síntese cinemática (MIDHA; NORTON; HOWELL, 1992) é baseada na síntese de mecanismos tradicionais constituídos de elementos rígidos. Neste caso a flexibilidade fica concentrada apenas em algumas regiões do mecanismo, ocasionando tensões e deformações excessivas.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos baseados nessa teoria, onde a cinemática de corpos rígidos era aplicada para projetar um mecanismo parcialmente flexível ou com

flexibilidade em algumas regiões somente (HER; MIDHA, 1987). Outra abordagem que considera o projeto de mecanismos distribuídos concentrados é apresentada por Howell e Midha, (1996), sendo conhecida como pseudo-corpo rígido, possuindo barras rígidas e molas em sua constituição. Este método pode ser aplicado para desenvolver mecanismos com grandes deslocamentos.

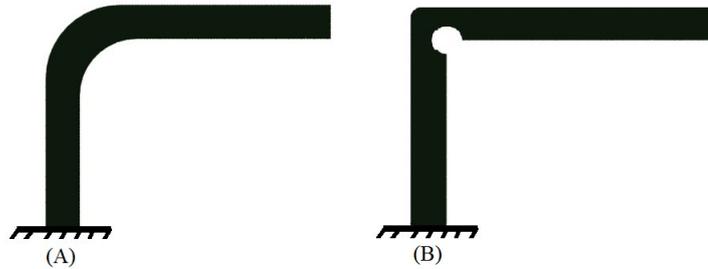


Figura 8 – Flexibilidade distribuída (A) e flexibilidade concentrada (B)

Por outro lado, um mecanismo flexível projetado com base na síntese do contínuo, com uma formulação adequada e com o auxílio do Método da Otimização Topológica (MOT), pode ter a flexibilidade distribuída em toda sua estrutura.

Neste sentido, Ananthasuresh (1994) e Ananthasuresh e Kota (1995), foram os trabalhos pioneiros no uso do Método da Otimização Topológica para o projeto de mecanismos com flexibilidade distribuída. Nestes trabalhos os autores propõem o uso de formulações de minimização de flexibilidade e peso, aplicando um carregamento pré-definido, com restrições nos deslocamentos do mecanismo, (SIGMUND, 1995; SIGMUND, 1999). Estas formulações são muito parecidas com o projeto de estruturas rígidas, não satisfazendo os deslocamentos requeridos. Por isso, este tipo de formulação não foi adotado em propostas consecutivas.

O mecanismo flexível deve se deformar para atingir o deslocamento desejado e ao mesmo tempo deve ter rigidez para suportar os esforços envolvidos no movimento. A partir desta ideia surgiram formulações baseadas em maximizar a energia mútua e minimizar a energia de deformação através de uma razão entre estas grandezas. Sobre este método cabe destacar os trabalhos de Frecker (1996), Kikuchi *et al*, (1998) e Nishiwaki *et al* (1998) e (LIN; LUO; TONG, 2010).

Existe ainda a proposta de Sigmund (1997) que maximiza um funcional baseado em parâmetros do mecanismo como vantagem mecânica (VA) e a vantagem geométrica (VG). A vantagem mecânica (VA) corresponde a razão entre o carregamento de saída e o carregamento de entrada  $\left(\frac{F_{out}}{F_{in}}\right)$ . A vantagem geométrica (VG) representa a razão entre o deslocamento de saída e o deslocamento de entrada  $\left(\frac{d_{out}}{d_{in}}\right)$ . O autor também propõe a maximização da eficiência mecânica (EM), definida como o produto de VA e VG.

Todas estas formulações propostas para projeto de mecanismos flexíveis apresen-

tam a ocorrência de rótulas (*hinges*), que são elementos finitos conectados por apenas um nó (SIGMUND, 1997). Nestas regiões, ocorre um movimento de rotação de corpo rígido em torno da rótula, sendo que esta é uma maneira artificial de se obter o comportamento cinemático, uma vez que não há energia de deformação associada a este movimento (a elasticidade clássica não contempla o grau de liberdade de rotação). Este é um dos principais problemas associados ao uso da Otimização Topológica no projeto de mecanismos flexíveis, sendo que diversas referências discutem alternativas para evitar o seu aparecimento.

Poulsen (2002) propõe uma função de restrição que associa o aparecimento de rótulas a um projeto inviável. Há também uma proposta baseada no método *wavelet* (YOON et al., 2004). Cardoso e Fonseca, (2004) propõem uma formulação de maximização de uma função da energia de deformação elástica para eliminar as rótulas dos mecanismos. Esta mesma formulação é aplicada em Silva, (2007) para analisar múltiplos carregamentos. Ainda sobre este assunto Lue et al (2008) apresentam um funcional baseado em energia e no método *level set*, que se mostra capaz de produzir mecanismos com flexibilidade distribuída. Formulações de filtros de erosão e dilatação como forma de eliminar a formação de rótulas são discutidos por (WANG; LAZAROV; SIGMUND, 2011).

Cardoso e Fonseca (2004) demonstram que os *hinges* estão associados as abordagens de projeto de mecanismos propostas na literatura, pois o objetivo de maximizar o trabalho de saída do mecanismo é conflitante com o objetivo de se armazenar energia de deformação ao longo da topologia. Desta forma, é proposta uma formulação onde o objetivo é maximizar uma função modificada da energia de deformação, de tal forma que a peça apresente flexibilidade distribuída. O comportamento cinemático é imposto via um conjunto de restrições.

Entre outros trabalhos a respeito de mecanismos flexíveis, pode-se destacar o projeto de mecanismos multi-atuadores piezelétricos aplicando o modelo SIMP (CARBONARI; SILVA; NISHIWAKI, 2005) e sua continuação, onde atuadores foram fabricados e analisados experimentalmente com interferômetro a laser (CARBONARI; NADER; SILVA, 2005). Zhu e Zhang (2012) o método *level set* é utilizado para projetar mecanismos com flexibilidade distribuída. Por fim, Mello, Salas e Silva (2012) propõem a maximização do deslocamento de saída (definido como uma função do tempo) de mecanismos eletromecânicos MEMS com o objetivo de reduzir o tempo de resposta da estrutura.

No que segue, o trabalho de (CARDOSO; FONSECA, 2004) será apresentado em detalhes, uma vez que esta formulação será utilizada nesta dissertação.

## 2.3 Mecanismos com flexibilidade distribuída

Em se tratando da Otimização Topológica, o projeto de mecanismos flexíveis inicia-se com a definição de um domínio fixo,  $\Omega$ , onde estará contida a estrutura final (Figura 9). Então deve-se definir as condições de contorno do problema bem como a rigidez do meio externo  $K_s$  que representa o corpo submetido a ação do mecanismo e um conjunto de deslocamentos de entrada,  $U_e$ , e de saída,  $U_s$ , associados ao comportamento cinemático.

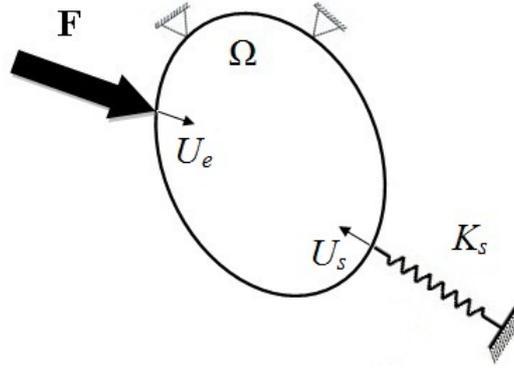


Figura 9 – Domínio fixo inicial - mecanismo genérico

Uma formulação adequada para o projeto de mecanismos com flexibilidade distribuída deve impor que uma parte da energia disponível seja armazenada na estrutura sob a forma de energia de deformação elástica. Além disso, ela deve ser facilmente aplicada a problemas com não linearidade geométrica e/ou material e deve considerar características do meio externo (CARDOSO; FONSECA, 2004).

Baseados nessa análise Cardoso e Fonseca (2004) mostram que a energia de deformação efetiva de um elemento,  $\bar{E}_{def}$ , é inversamente proporcional a sua pseudo densidade

$$\bar{E}_{def_e} = \frac{1}{\rho_e^p} E_{def}^0 \quad (2.1)$$

onde  $\rho_e$  é a pseudo densidade do elemento e  $E_{def}^0$  é a energia de deformação considerando o material isotrópico base ( $\mathbf{E}_{ijkl}^0$ ) e  $p$  é o expoente da penalização SIMP. Cabe salientar que no trabalho de Cardoso e Fonseca a formulação é particularizada para  $p = 1$ , sendo que aqui as equações serão desenvolvidas de forma geral.

Evidentemente, a maximização de  $\bar{E}_{def}$  é obtida quando  $\rho_e \rightarrow 0$ , fazendo com que não seja possível obter uma topologia sólida. Para lidar com este problema, é proposta pelos autores uma função baseada na energia de deformação de um elemento finito

$$\Psi_e = \rho_e^n \bar{E}_{def} = \rho_e^{n+p} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{U}_e = \rho_e^n \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e, \quad (2.2)$$

onde  $\rho_e$  é a pseudo densidade do elemento,  $\mathbf{U}_e$  é o vetor deslocamento do elemento,  $n$  é um expoente que permite ajustar o comportamento da função  $\Psi_e$  e  $\mathbf{K}_e$  e  $\mathbf{K}_e^0$  são a matriz de rigidez do elemento, com e sem a pseudo densidade, respectivamente.

Esta nova função evita o valor de energia infinita quando  $\rho \rightarrow 0$ , penaliza o aparecimento de pseudo densidades intermediárias e retém o comportamento da energia de deformação original para o material sólido ( $\rho = 1$ ). A figura 10 ilustra este comportamento para alguns valores de  $n$  (assumindo  $p = 1$ ).

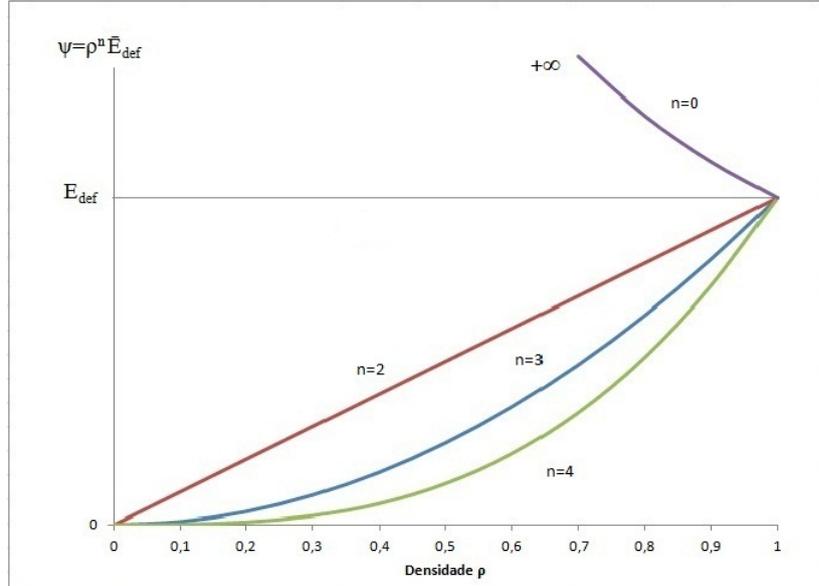


Figura 10 – Influência do expoente  $n$  no comportamento da função de energia de deformação modificada ( $p = 1$ ).

Para toda a topologia, composta de  $ne$  elementos finitos, definimos:

$$\Psi = \sum_{e=1}^{ne} \rho_e^n \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \sum_{e=1}^{ne} \rho_e^{n+p} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{U}_e \quad (2.3)$$

de tal forma que a maximização desta função implica em maximizar o armazenamento de energia no material (sólido) que constitui o mecanismo flexível. O comportamento cinemático deve ser imposto por meio de um conjunto de restrições sobre deslocamentos em graus de liberdade de interesse e a quantidade de material a ser utilizada deve ser imposta por meio de uma restrição de volume. Assim, obtém-se a formulação de otimização

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \Psi \\ \text{T.q.} \quad & \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_{max} \\ & \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & U_j \leq \bar{U}_j \quad j = 1..n_{rd} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $U_j$  representa a  $j$ -ésima componente do vetor de deslocamento global,  $\bar{U}_j$  é o seu valor limite,  $n_{rd}$  é o número de restrições de deslocamento e  $V_{max}$  é o volume máximo de material.

Um fator importante na obtenção de um mecanismo flexível é o balanço de energia. Nas formulações que maximizam, direta ou indiretamente, o trabalho de saída, é de se esperar que não haja energia para ser armazenada no interior do mecanismo. Com isto, o otimizador irá utilizar artifícios como os elementos conectados por um nó (rótulas). Na formulação da equação 2.4, deve-se avaliar se o comportamento cinemático imposto permite o armazenamento de energia suficiente para o projeto de um mecanismo flexível. Como exemplo, considere um mecanismo com uma força de entrada  $F_e$ , uma restrição de deslocamento de entrada  $U_e$ , uma rigidez de saída  $K_s$  e uma restrição de deslocamento de saída  $U_s$ . A energia disponível no interior da região de projeto será

$$E_{max} = E_e - E_s = \frac{1}{2} (F_e U_e - K_s U_s^2) \quad (2.5)$$

sendo que combinações de parâmetros que levem a  $E_s > E_e$  não permitem o projeto de mecanismos flexíveis.

Uma questão importante no projeto de mecanismos flexíveis é o controle do nível de tensões mecânicas. Uma questão não abordada no artigo de Cardoso e Fonseca (2004) é o fato de as tensões serem diretamente proporcionais a energia de deformação, de tal forma que a maximização de energia deve levar a uma maximização das tensões. Por isto, o presente trabalho tem como objetivo principal a imposição de restrições de tensão na formulação da equação 2.4.

## 2.4 Projeto de Mecanismos Flexíveis com Restrição de Tensão

O objetivo desta seção é apresentar a formulação de Otimização Topológica empregada neste trabalho. O modelo de material SIMP com  $p = 3$  será aplicado juntamente com o filtro espacial de densidades discutido anteriormente na Seção 1.6.1. A medida de tensão empregada nesta proposta é a tensão equivalente de von Mises, embora outras medidas possam ser aplicadas. Como consequência direta desta escolha, a tensão de escoamento será utilizada como tensão limite para garantir que o material aplicado tenha comportamento elástico.

Como o código computacional associado a este trabalho utiliza somente o elemento finito isoparamétrico de 4 nós, as tensões serão calculadas nos centróides dos elementos, pois este é o ponto superconvergente de tensão (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1995). Assim, os somatórios da norma- $P$  serão sempre realizados entre 1 e  $ne$ , fato que pode ser facilmente generalizado caso sejam desejadas as tensões em outros pontos. Deve-se salientar que estas são particularizações da implementação deste trabalho, não da formulação proposta.

### 2.4.1 Formulação do problema

A formulação desta investigação baseia-se no modelo descrito na Seção 2.3 que maximiza a energia de deformação armazenada pela estrutura, com restrições sobre algumas componentes de deslocamento e sobre o volume máximo permitido. Partindo desta concepção será acrescentada uma restrição de tensão baseada na norma- $P$  modificada (LE et al., 2010). Assim, o problema de otimização se torna

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{e=1}^{ne} \rho_e^{n+p} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{U}_e \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq V_{max} \\ & U_j \leq \bar{U}_j, \quad j = 1..n_{rd} \\ & \Phi = c^k \left\| \sigma_{vm}^k \right\|_P \leq \sigma_{lim} \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde as tensões equivalentes de von Mises, para o caso de Estado Plano de Tensões (EPT), são obtidas por

$$\sigma_{vm} = (\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_e)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e as tensões  $\boldsymbol{\sigma}_e$  são obtidas de acordo com a equação 1.11, no centróide de cada elemento. A escolha do centróide se deve a este ser o ponto superconvergente de tensão no elemento bilinear isoparamétrico de 4 nós utilizado neste trabalho.

Ao solucionar este problema, percebe-se que as regiões de aplicação das forças e das molas podem convergir para os valores mínimos de pseudo densidade, o que não é desejável. Este comportamento está associado a:

- A única maneira de satisfazer as restrições de deslocamento é diminuindo a rigidez destes elementos;
- Estes elementos apresentam tensões elevadas e, como consequência, sua pseudo densidade tende para o valor mínimo.

Com objetivo de evitar este comportamento, serão fixadas pseudo densidades unitárias,  $\rho = 1$ , para elementos situados nas proximidades das forças e molas do modelo. Cabe salientar que esta abordagem não evita que outros elementos apresentem este comportamento. No entanto, pelo menos garante a transferência de esforços entre o domínio de projeto  $\Omega$  e o meio externo.

Outra consideração importante é a disparidade entre os valores impostos nas restrições do problema, isto é, valores baixos na ordem de milésimos para restrições de deslocamento e valores elevados na ordem de milhões para a restrição de tensão. Esta diferença pode causar dificuldades numéricas durante a otimização, o que pode ser facilmente solucionado dividindo-se cada restrição de forma que se tenha a unidade como limite superior, ou seja, dividindo cada restrição pelo valor absoluto de seu valor limite.

### 3 Análise de sensibilidades

O proceso de otimização exige o cálculo dos gradientes da função objetivo e das restrições. Estes gradientes indicam a sensibilidade das funções quando se faz modificações nas variáveis de projeto. As sensibilidades são calculadas analiticamente e aplicadas no processo de otimização, como por exemplo, a programação linear sequencial (SLP). Neste capítulo serão obtidas as equações de sensibilidade da função energia de deformação, deslocamento e norma- $P$  modificada utilizadas neste trabalho.

#### 3.1 Sensibilidade da Função Energia de Deformação

A sensibilidade da função objetivo em relação as variáveis de projeto é demonstrada para o caso  $p = 1$  por Cardoso e Fonseca (2004). De modo a generalizar a proposta para diferentes valores de  $p$ , reescrevemos a equação 2.3 considerando um termo auxiliar (termo adjunto)

$$\Psi = \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \rho_e^n (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \mathbf{K}_e (\mathbf{H}_e \mathbf{U}) \right\} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}), \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{H}_e$  é uma matriz de localização que mapeia o vetor deslocamento global  $\mathbf{U}$  para o vetor de deslocamento local,  $\mathbf{U}_e$ . Derivando em relação a  $m$ -ésima variável de projeto e considerando a simetria da matriz rigidez do elemento obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\rho_m} = & \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \frac{d\rho_e^n}{d\rho_m} (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \mathbf{K}_e (\mathbf{H}_e \mathbf{U}) + 2\rho_e^n (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \mathbf{K}_e \mathbf{H}_e \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right. \\ & \left. + \rho_e^n (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \frac{d\mathbf{K}_e}{d\rho_m} (\mathbf{H}_e \mathbf{U}) \right\} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

tal que, colocando  $\frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}$  em evidência, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\rho_m} = & \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \frac{d\rho_e^n}{d\rho_m} (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \mathbf{K}_e (\mathbf{H}_e \mathbf{U}) \right\} + \left\{ \left( \sum_{e=1}^{ne} 2\rho_e^n (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \mathbf{K}_e \mathbf{H}_e \right) + \right. \\ & \left. \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right\} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} + \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \rho_e^n (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \frac{d\mathbf{K}_e}{d\rho_m} (\mathbf{H}_e \mathbf{U}) \right\} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se observarmos o último termo da equação 3.3, iremos notar que a derivada da matriz rigidez global em relação a variável  $\rho_m$  pode ser definida como

$$\frac{d\mathbf{K}_e}{d\rho_m} = p\rho_m^{p-1}\mathbf{K}_m^0$$

pois para problemas lineares, a dependência da matriz global em relação as pseudo densidades dos elementos é local.

Para evitar o cálculo da derivada do vetor deslocamento global em relação a  $\rho_m$ , a segunda parcela da equação 3.3 deve ser levada a zero, resultando em

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{e=1}^{ne} \left\{ -2\rho_e^{n+p} (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{H}_e \right\}. \quad (3.4)$$

O termo  $\mathbf{H}_e$  da equação 3.4 é não nulo somente quando  $e = m$ , tal que a equação 3.3 deve ser calculada somente neste caso,

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \sum_{m=1}^{ne} \left\{ -2\rho_m^{n+p} \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m^0 \mathbf{H}_m \right\}. \quad (3.5)$$

Pode-se verificar na equação 3.3 que

$$\sum_{e=1}^{ne} \frac{d\rho_e^n}{d\rho_m} \left[ (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \mathbf{K}_e (\mathbf{H}_e \mathbf{U}) \right] \quad (3.6)$$

é não nulo somente quando  $e = m$ , resultando em

$$n\rho_m^{n+p-1} \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m^0 \mathbf{U}_m, \quad (3.7)$$

que também é um termo local.

Devido ao fato de o termo remanescente

$$\sum_{e=1}^{ne} \rho_e^n (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \frac{d\mathbf{K}_e}{d\rho_m} (\mathbf{H}_e \mathbf{U}), \quad (3.8)$$

também ser local, verifica-se que

$$\sum_{e=1}^{ne} \rho_e^n (\mathbf{H}_e \mathbf{U})^T \delta_{em} p\rho_m^{p-1} \mathbf{K}_m^0 (\mathbf{H}_e \mathbf{U}), \quad (3.9)$$

resulta em

$$p\rho_m^{n+p-1} \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m^0 \mathbf{U}_m. \quad (3.10)$$

Po fim, agrupando todos os resultados, obtemos a expressão desejada

$$\frac{d\Psi}{d\rho_m} = \left( n\rho_m^{n+p-1} + p\rho_m^{n+p-1} \right) \mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m^0 \mathbf{U}_m + \boldsymbol{\lambda}_m^T p\rho_m^{p-1} \mathbf{K}_m^0 \mathbf{U}_m \quad (3.11)$$

com  $\boldsymbol{\lambda}_e = \mathbf{H}_e \boldsymbol{\lambda}$ , sendo  $\boldsymbol{\lambda}$  obtido por meio da equação 3.5.

## 3.2 Sensibilidade de Uma Componente do Vetor Deslocamento

Com o objetivo de prescrever o comportamento cinemático do mecanismo, devemos impor um conjunto de restrições sobre algumas componentes de deslocamento. De modo a facilitar o desenvolvimento da análise de sensibilidade, definimos o operador de localização  $\mathbf{L}_j$ , com a mesma dimensão do vetor global de deslocamentos e com todas as posições nulas, a não ser a posição  $j$ , que é unitária. Com isto, a componente de deslocamento  $U_j$  pode ser obtida com

$$U_j = \mathbf{L}_j \mathbf{U}. \quad (3.12)$$

Desta forma, utilizando o artifício apresentado na equação 3.12 e a abordagem adjunta, obtemos

$$U_j = \mathbf{L}^T \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}). \quad (3.13)$$

A derivada da  $j$ -ésima componente do vetor de deslocamento global em relação a  $m$ -ésima variável de projeto tem a forma

$$\frac{dU_j}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{L}^T}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{L}^T \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}. \quad (3.14)$$

O primeiro termo é independente de  $\rho$  e portanto a sua derivada é nula. Agrupando os termos comuns teremos

$$\frac{dU_j}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} (\mathbf{L}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K}) + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U}. \quad (3.15)$$

de modo que a derivada do deslocamento global na equação 3.15 pode ser evitada resolvendo-se o sistema linear de equações

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{L}, \quad (3.16)$$

para cada restrição de deslocamento presente no problema.

A sensibilidade do deslocamento é obtida então por

$$\frac{dU_j}{d\rho_m} = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} = \boldsymbol{\lambda}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m. \quad (3.17)$$

com  $\boldsymbol{\lambda}_e = \mathbf{H}_e \boldsymbol{\lambda}$ , sendo  $\boldsymbol{\lambda}$  obtido por meio da equação 3.16.

### 3.3 Sensibilidade da Restrição de Tensão

Neste trabalho será utilizado o critério global de restrição de tensão apresentado na equação 1.10. Sendo assim, necessitamos das sensibilidades da função  $\Phi$  com respeito as pseudo densidades da malha. De modo a utilizar uma abordagem adjunta, a função  $\Phi^k$  é reescrita na forma

$$\Phi^k = c^k \left\| \sigma_{vm}^k \right\|_P + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}). \quad (3.18)$$

Assim, derivando a equação 3.18 em relação a  $m$ -ésima pseudo densidade, obtemos

$$\frac{d\Phi^k}{d\rho_m} = c^k T_1 \left( \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^{P-1} \frac{d\sigma_{vm_e}}{d\rho_m} \right) + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right), \quad (3.19)$$

onde

$$T_1 = \left( \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^P \right)^{\frac{1}{P}-1}, \quad (3.20)$$

é um termo que não depende das derivadas das tensões e pode ser obtido diretamente.

A derivada no primeiro termo na equação 3.19 corresponde a

$$\frac{d\sigma_{vm_e}}{d\rho_m} = \frac{d}{d\rho_m} \left( \boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_e \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d\sigma_{vm_e}}{d\boldsymbol{\sigma}_e} \frac{d\boldsymbol{\sigma}_e}{d\rho_m}. \quad (3.21)$$

Assim, a primeira derivada da equação 3.21 torna-se

$$\frac{d\sigma_{vm_e}}{d\boldsymbol{\sigma}_e} = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_e \right)^{\frac{1}{2}-1} 2\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}_e = \frac{\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}_e}{\sigma_{vm_e}}, \quad (3.22)$$

e a segunda derivada em relação a  $\rho_m$

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_e}{d\rho_m} = \frac{d}{d\rho_m} \left( \mathbf{E}_e \rho_e^{(p-q)} \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e \right) = (p-q) \delta_{em} \frac{\rho_e^{(p-q)}}{\rho_e} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e + \rho_e^{(p-q)} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \frac{d\mathbf{U}_e}{d\rho_m}. \quad (3.23)$$

Agrupando todos os termos temos

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^k}{d\rho_m} &= c^k T_1 \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^{P-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm_e}} \left( (p-q) \delta_{em} \frac{\rho_e^{(p-q)}}{\rho_e} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e + \rho_e^{(p-q)} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \frac{d\mathbf{U}_e}{d\rho_m} \right) \\ &\quad + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

e expandindo esta equação obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi^k}{d\rho_m} &= c^k T_1 \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^{P-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm_e}} (p-q) \delta_{em} \frac{\rho_e^{(p-q)}}{\rho_e} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e \\
&+ c^k T_1 \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^{P-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm_e}} \rho_e^{(p-q)} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \frac{d\mathbf{U}_e}{d\rho_m} \\
&+ \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

De modo a isolar a derivada do vetor de estados em relação a uma pseudo densidade  $m$ , podemos fazer uso do operador de localização  $\mathbf{H}_e$

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{H}_e \mathbf{U} \tag{3.26}$$

tal que

$$\frac{d\mathbf{U}_e}{d\rho_m} = \frac{d(\mathbf{H}_e \mathbf{U})}{d\rho_m} = \mathbf{H}_e \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}. \tag{3.27}$$

Então, inserindo este termo e agrupando os termos comuns podemos reescrever a equação 3.25 na forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi^k}{d\rho_m} &= c^k T_1 \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^{P-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm_e}} (p-q) \delta_{em} \frac{\rho_e^{(p-q)}}{\rho_e} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \mathbf{U}_e + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} \\
&+ \left( \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} + c^k T_1 \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^{P-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm_e}} \rho_e^{(p-q)} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \mathbf{H}_e \right) \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

As duas parcelas finais da equação 3.28 são igualadas a zero a fim de eliminar a derivada  $\frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}$ , dando origem a um sistema linear de equações para a determinação do vetor adjunto  $\boldsymbol{\lambda}$ , conforme equação 3.29,

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = -c^k T_1 \sum_{e=1}^{ne} \sigma_{vm_e}^{P-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M}}{\sigma_{vm_e}} \rho_e^{(p-q)} \mathbf{E}_e \mathbf{B}_e \mathbf{H}_e. \tag{3.29}$$

Reorganizando a equação 3.28, esta passa a ser escrita como

$$\frac{d\Phi^k}{d\rho_m} = c^k T_1 \sigma_{vm_e}^{P-2} \left( \frac{p-q}{\rho_m} \right) \boldsymbol{\sigma}_m^T \mathbf{M} \rho_m^{(p-q)} \mathbf{E}_m \mathbf{B}_m \mathbf{U}_m + \boldsymbol{\lambda}_m^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U}. \tag{3.30}$$

A derivada da matriz rigidez global em relação a  $\rho_m$  é definida como

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} = p \rho_m^{p-1} \mathbf{K}_m^0$$

devido a dependência local de  $\mathbf{K}$  em relação a  $\rho_m$  em problemas lineares.

Assim, a sensibilidade da norma- $P$  modificada resulta em

$$\frac{d\Phi^k}{d\rho_m} = c^k T_1 \sigma_{vm_m}^{P-2} (p - q) \boldsymbol{\sigma}_m^T \mathbf{M} \rho_m^{(p-q-1)} \mathbf{E}_m \mathbf{B}_m \mathbf{U}_m + \boldsymbol{\lambda}_m^T p \rho_m^{p-1} \mathbf{K}_m^0 \mathbf{U}_m, \quad (3.31)$$

com o vetor adjunto  $\boldsymbol{\lambda}$  obtido pela solução da equação 3.29.

## 4 Programação Matemática

A otimização busca a maximização ou minimização de um funcional por meio da modificação do valor de um conjunto de variáveis pré-selecionadas (variáveis de projeto). Diversos problemas relacionados à engenharia, administração (recursos financeiros e humanos), logística e transportes (armazagem e fluxo de cargas) podem ser formulados matematicamente com intuito de melhorar a performance de um parâmetro ou um recurso desejado.

Um problema de otimização normalmente é composto por 3 elementos fundamentais: o primeiro é a função objetivo que se deseja extremar, o segundo é o conjunto de variáveis envolvidas no problema e finalmente as funções de restrição que limitam os valores assumidos pelas variáveis de projeto (ARORA, 2007), na forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{t.q.} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1..m_g \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1..m_h \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1..ne \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $f$  é a função objetivo,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis de projeto,  $g_j$  são restrições de desigualdade,  $h_j$  são as restrições de igualdade,  $m_g$  é o número de restrições de desigualdade,  $m_h$  o número de restrições de igualdade e  $\underline{x}_i$  e  $\bar{x}_i$  são, respectivamente, o valor superior e o valor inferior para cada variável de projeto. Um ponto de ótimo local,  $\mathbf{x}^*$ , é um ponto que satisfaz todas as restrições do problema e também o critério de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), Arora (2007),

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m_g} \gamma_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m_h} \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (4.2)$$

O problema definido acima pode ser solucionado analiticamente (quando possível) ou por meio de métodos numéricos, onde o procedimento é realizado iterativamente a partir de uma estimativa inicial das variáveis de projeto, buscando sempre valores das variáveis que extremizem a função objetivo e simultaneamente satisfaçam as restrições impostas pelo modelo. Esta abordagem foi utilizada pioneiramente por Leonid Kantorovich (KANTOROVICH, 1940). Posteriormente em 1947 George B. Dantzig apresentou o método Simplex, que permitiu a solução de problemas de programação linear com maior eficiência. Neste mesmo ano, John von Neumann desenvolveu a teoria da

dualidade. Um avanço significativo nesta área ocorreu em 1984 quando Narendra Karmarkar desenvolveu um novo método para solucionar problemas de programação linear (KARMARKAR, 1984).

Dependendo da natureza das funções envolvidas na formulação, podemos utilizar algumas abordagens bem conhecidas na literatura para a solução do problema apresentado na equação 4.1, tal como a Programação Linear, aplicável em funções lineares, e a Programação Quadrática, aplicável quando a função objetivo for quadrática e as restrições forem lineares. Existem ainda outros métodos que utilizam aproximações convexas, como os da família MMA (SVANBERG, 1987). Devido a simplicidade e a robustez do LP, este será o método de otimização utilizado neste trabalho. No entanto, devido ao caráter não linear das equações utilizadas aqui, iremos utilizar uma abordagem sequencial, conhecida como Programação Linear Sequencial, onde a cada iteração linearizam-se as equações envolvidas e, então, soluciona-se um problema aproximado.

## 4.1 Programação Linear Sequencial

A Programação Linear Sequencial consiste em solucionar um problema de Otimização formulado em termo de funções não lineares com o uso da Programação Linear. Para isto, a cada iteração é realizada uma linearização por meio de uma expansão em série de Taylor utilizando apenas os termos de primeira ordem, conforme figura 11. Desta maneira, o subproblema em uma iteração  $k$  será:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min/Max} & f(\mathbf{x}^k) + \frac{\partial f(\mathbf{x}^k)}{\partial x_m}(x_m - x_m^k) \\
 \mathbf{x} & \\
 \text{T.q.} & g_j(\mathbf{x}^k) + \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_m}(x_m - x_m^k) \leq 0 \quad j = 1..m_g \\
 & h_j(\mathbf{x}^k) + \frac{\partial h_j(\mathbf{x}^k)}{\partial x_m}(x_m - x_m^k) = 0 \quad j = 1..m_h \\
 & \underline{x}_i^k \leq x_i^k \leq \bar{x}_i^k \quad i = 1..nv
 \end{array} \quad (4.3)$$

onde  $\underline{x}_i^k$  e  $\bar{x}_i^k$  são conhecidos como limites móveis, definidos com objetivo de garantir validade da linearização.

A escolha apropriada dos limites móveis é fundamental para o êxito da solução e requer certa experiência com o método e conhecimento do problema que se pretende resolver. Limites móveis muito pequenos tornam a otimização extremamente lenta e em contrapartida quando são muito elevados podem ocasionar grandes erros na solução bem como oscilações em torno da solução ótima. No início da otimização os limites móveis devem promover um avanço mais eficiente da busca pelo ponto ótimo e a medida que se aproxima da solução, eles são reduzidos gradativamente e determinados com base nas variáveis de projeto.

A respeito dos limites móveis, foram propostas algumas técnicas para a escolha

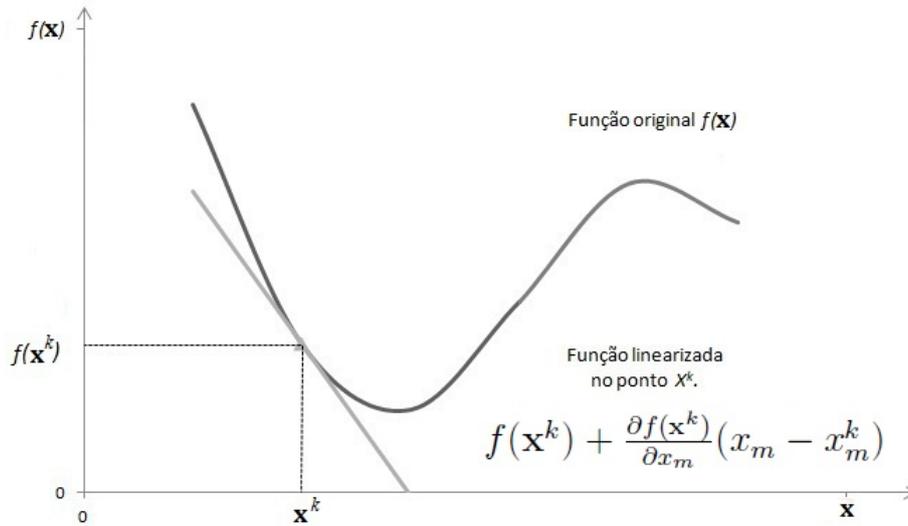


Figura 11 – Linearização da função objetivo em torno de  $\mathbf{x}^k$

adequada, como em Chen (1993) onde são consideradas as informações das derivadas da função objetivo e das restrições. Wujek e Renaud (1998), também utilizaram estas informações para propor métodos de determinação dos limites móveis e mostraram uma revisão sobre este assunto. Além disso, há métodos heurísticos que utilizam como base de cálculo o comportamento da função objetivo ou das variáveis de projeto (FONSECA; KIKUCHI, 1998; HAFTKA R.; GÜRDAL, 1996; PETERSON; SIGMUND, 1998).

Neste trabalho, o cálculo dos limites móveis será feito baseado no comportamento das variáveis de projeto nas 3 iterações anteriores a atual, com o objetivo de evitar oscilações no processo iterativo. Para isto, definimos um parâmetro  $\alpha_i^k$  associado a cada variável de projeto, a ser calculado a cada iteração de acordo com:

- Se o sinal da oscilação de uma variável nas últimas 3 iterações se mantém constante, isto é, se  $(x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) > 0$ , então mantém-se o valor de  $\alpha_i^k$  constante ou aumenta-se o valor de acordo com um fator de aumento,  $\alpha_u$ , tal que  $\alpha_i^k = \alpha_u \alpha_i^{k-1}$ ;
- Caso  $(x_i^k - x_i^{k-1})(x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) < 0$ , então diminui-se  $\alpha_i^k$  de acordo com um fator de diminuição,  $\alpha_l$ , tal que  $\alpha_i^k = \alpha_l \alpha_i^{k-1}$ ;

De posse de  $\alpha_i^k$ , calculamos os limites móveis com

$$\bar{x}_i^k = \min(x_{max}, x_i(1 + \alpha_i^k)) \quad (4.4)$$

e

$$\underline{x}_i^k = \max(x_{min}, x_i(1 - \alpha_i^k)). \quad (4.5)$$

onde  $x_{min}$  e  $x_{max}$  são, respectivamente, os valores mínimo e máximo que a variável de projeto pode assumir. Por fim, deve-se observar os valores mínimos e máximos que os limites móveis podem assumir ( $\alpha_{min}$  e  $\alpha_{max}$ ).

De maneira geral, o procedimento SLP consiste em partir de um ponto inicial onde as funções originais devem ser linearizadas e os limites móveis devem ser definidos. Na sequência, a otimização linear deve ser realizada e um novo mínimo é então encontrado. Esta operação deve ser repetida até que seja obtida a convergência. Neste trabalho foi utilizada uma subrotina específica para a solução do subproblema linear (HANSON; HIRBERT, 1981).

## 4.2 Algoritmo de Otimização

O procedimento numérico foi desenvolvido em C++ e a malha de elementos finitos bem como as condições geométricas e as informações inerentes ao mecanismo são escritas previamente em um arquivo de entrada. Para melhor compreensão do procedimento numérico, na sequência serão explanadas as etapas que constituem a análise e solução do problema, ilustrado na Figura 12.

1. Dados de entrada: recebe através de um arquivo de entrada as informações sobre a malha de elementos finitos, condições de contorno, forças aplicadas, condições do meio externo e propriedades do material.
2. Determinação da vizinhança: definição dos elementos e nós vizinhos contidos em um raio de filtragem determinado.
3. Estimativa inicial das variáveis nodais  $\mathbf{x}$ .
4. Projeção das pseudo densidades  $\rho$ : nesta etapa é feito o mapeamento de  $\mathbf{x}$  para as pseudo densidades  $\rho$  dos elementos, segundo a vizinhança determinada pelo raio de filtragem.
5. Calcula a resposta da estrutura: após definidas as pseudo densidades, a rigidez, os deslocamentos e as tensões são calculados pelo método dos Elementos Finitos.
6. Cálculo de sensibilidades: devem ser calculadas as derivadas da função objetivo e das restrições em relação a  $\rho$  e, utilizando a regra da cadeia, projetar os seus valores para as variáveis nodais  $\mathbf{x}$ .
7. Linearização das funções: o subproblema linear neste ponto  $\mathbf{x}$  deve ser determinado, para isso deve-se linearizar as funções.
8. Definição dos limites móveis: para completar a definição do subproblema linear, deve-se calcular os limites móveis com base no vetor  $\mathbf{x}$ .

9. Otimização: agora busca-se extremar o subproblema linear, determinando um novo vetor de variáveis  $\mathbf{x}$ .
10. Convergência: deve-se verificar a convergência da função objetivo e as restrições, se ambas forem satisfeitas o ponto ótimo foi encontrado, caso contrário o procedimento é repetido a partir do item 4.

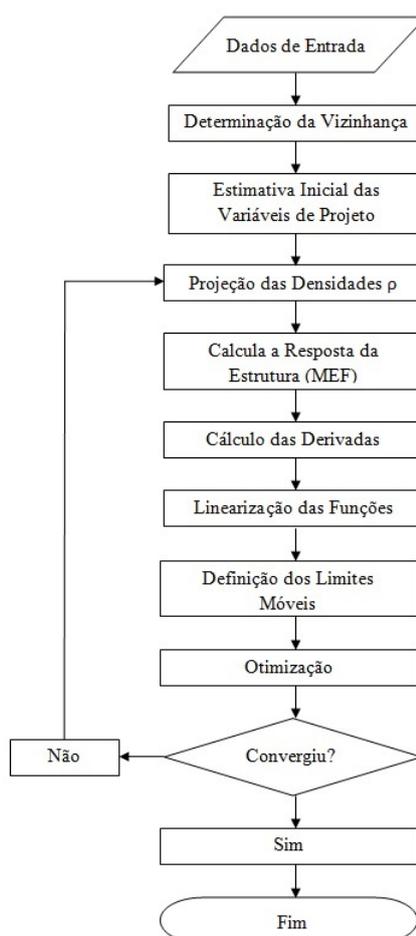


Figura 12 – Fluxograma do algoritmo

## 5 Resultados

Este capítulo tem como objetivo apresentar os resultados obtidos com a formulação desenvolvida neste trabalho. Para realizar os estudos aqui propostos foi selecionado o projeto de um mecanismo inversor, que comporta-se de tal maneira que a força de entrada aplicada produz um deslocamento  $U_s$  na saída, de sentido oposto a esta força, de acordo com figura 13. A rigidez do meio externo é representada por molas lineares.

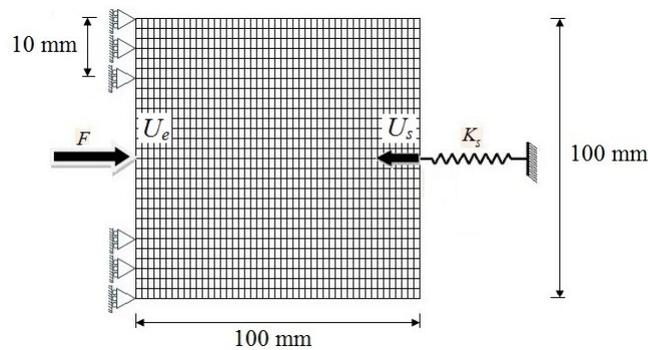


Figura 13 – Mecanismo inversor.

A geometria considerada nos exemplos deste trabalho apresenta dimensões  $100 \times 100 \times 5$  mm e, como possui condições de simetria em relação a seu plano médio horizontal, este domínio pode ser seccionado como mostra a figura 14.

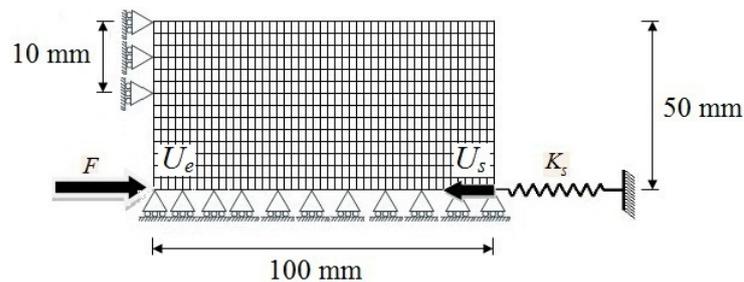


Figura 14 – Domínio seccionado.

De modo a evitar singularidades provocadas por força e/ou rigidez concentradas, o carregamento e a rigidez serão distribuídos em uma fração do comprimento da altura,  $5\text{mm}$ , conforme ilustrado na Figura 15. Como estas regiões devem ter seu comportamento cinemático imposto por meio das restrições  $U_j$ , escolheu-se utilizar os deslocamentos dos nós extremos de cada região, figura 16, resultando assim em 4 restrições de deslocamentos: duas de entrada (posições 1 e 2) e duas de saída (posições 3 e 4). Certamente o correto seria

impor o comportamento em todos os nós destas regiões, mas isto provoca dificuldades de convergência no procedimento de otimização adotado. De qualquer forma, a abordagem proposta permite a obtenção de mecanismos mais realistas, uma vez que a imposição de deslocamento em apenas um nó das regiões de entrada/saída faz com que o mecanismo não atue em toda a região com força ou rigidez distribuídas.

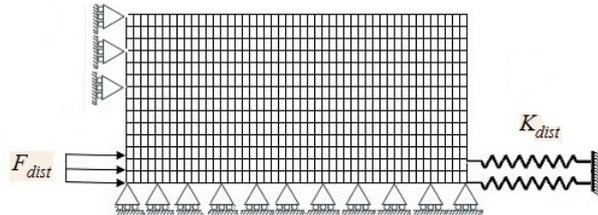


Figura 15 – Carregamento e rigidez aplicados no domínio.

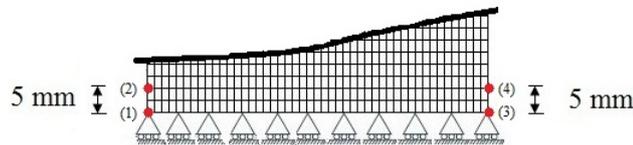


Figura 16 – Nós onde são aplicadas as restrições de deslocamento.

O domínio  $\Omega$  é discretizado por 9600 elementos bilineares isoparamétricos de 4 nós  $(0,625 \times 0,833 \text{ mm})$ . Os nós localizados dentro de uma distância de 10 mm da aresta esquerda da topologia têm seu deslocamento restrito na direção horizontal, e os todos os nós da aresta inferior têm seu deslocamento vertical restrito devido a simetria. Os valores do carregamento distribuído e da mola são respectivamente  $F_{dist} = 8 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$  e  $K_{dist} = 2 \times 10^8 \frac{N}{m}$ . O material isotrópico de base utilizado em todos os exemplos foi o cobre, com  $E^0 = 110GPa$ ,  $\nu^0 = 0.34$  e  $\sigma_{lim} = 60MPa$ .

Assim, o modelo utilizado para a otimização topológica do mecanismo inversor pode ser observada na figura 17.

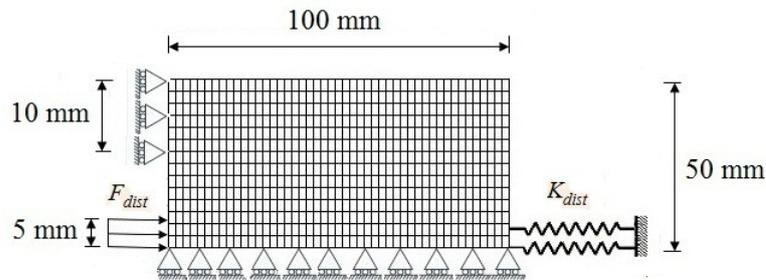


Figura 17 – Modelo físico do mecanismo inversor.

A tabela 1 ilustra os parâmetros relacionados ao cálculo dos limites móveis utilizados neste trabalho. Deve-se enfatizar que devido ao caráter extremamente não-linear

da restrição de tensão, se fez necessário o uso de limites móveis extremamente pequenos. Isto permite o uso da programação linear sequencial, mas implica em um número médio de 2000 iterações para convergência.

$\alpha_u = 1, 1$
$\alpha_l = 0, 9$
$\alpha_0 = 0, 1$
$\alpha_{max} = 0, 1$
$\alpha_{min} = 1 \times 10^{-5}$

Tabela 1 – Valores utilizados na estratégia de limites móveis.

Devido a seu caráter extremamente não linear e ao grande número de parâmetros envolvidos na formulação discutida neste trabalho, é importante listarmos quais destes parâmetros devem ser investigados:

1. Volume disponível de material:  $V_{max}$ ,
2. Rigidez do meio externo:  $K_{dist}$ ,
3. Raio de filtragem:  $R_{max}$ ,
4. Expoente da função energia de deformação:  $n$ ,
5. Parâmetro de relaxação para tensão:  $q$ ,
6. Tensão limite do material:  $\sigma_{lim}$ ,
7. Parâmetro da norma- $P$ :  $P$
8. Refino da malha (número de elementos):  $ne$ ,
9. Vetor de variáveis iniciais de projeto:  $\mathbf{x}^0$ ,
10. Domínio fixo de projeto:  $\Omega$ .

Alguns parâmetros listados acima são específicos a este trabalho, devendo ser explorados com mais detalhes. Outros parâmetros, tais como a influência do domínio inicial de projeto e do vetor de variáveis iniciais de projeto são bem conhecidos na literatura, não merecendo o mesmo destaque neste texto. No que segue, será inicialmente realizada uma investigação sobre a influência/necessidade da restrição de fração de volume. Com os resultados obtidos, serão investigados a influência da rigidez do meio externo, a influência do raio de filtragem, a influência do expoente  $n$  da formulação de energia modificada, a influência do parâmetro  $q$  da relaxação de tensão, a influência do valor limite de tensão e a influência do grau de refino da malha. Todas as figuras deste capítulo foram geradas utilizando-se o programa de código aberto *gmsh* (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009).

## 5.1 Influência do Volume Disponível de Material

A primeira investigação realizada foi sobre a influência da variação do volume disponível para o mecanismo  $V_{max}$ , representado por uma fração do volume total do domínio fixo, sobre o resultado final. Para isso, os demais parâmetros devem ser mantidos constantes e assumem os valores apresentados na tabela 2. Para estudo da influência da restrição de volume foram consideradas frações de volume de 40%, 25% e 15%. A tabela 3 ilustra valores obtidos para estas análises.

Parâmetros
$K_{dist} = 2 \times 10^8 \frac{N}{m}$
$R_{max} = 2 \times 10^{-3} m$
$n = 8$
$\sigma_{lim} = 60 MPa$
$q = 2$
$P = 4$
$\mathbf{x}^0 = 0, 5$
$\bar{U}_s = -0, 1 mm$
$\bar{U}_e = 0, 2 mm$
$F_{dist} = 8 \times 10^6 N/m^2$
$ne = 9600$

Tabela 2 – Parâmetros fixos na análise sobre a influência do volume disponível.

	Fração Vol. Final	Energia $\Psi$ (J)	Desloc. Entrada (m)	Desloc. Saída (m)	Tensão $\Phi$ (MPa)	
caso 1	$V_{max} = 40\%$	23%	0,013	(1) 0,000158, (2) 0,000152	(3) -0,000102, (4) -0,000100	60
caso 2	$V_{max} = 25\%$	23%	0,00625	(1) 0,000107, (2) 0,000105	(3) -0,000102, (4) -0,000100	60
caso 3	$V_{max} = 15\%$	15%	0,0047	(1) 0,000114, (2) 0,000113	(3) -0,000106, (4) -0,000100	60

Tabela 3 – Resultados obtidos para o estudo de variação da restrição de volume.

Com as informações da tabela 3, pode-se observar que as restrições de volume irão permanecer inativas para valores acima de 23%, e embora os volumes finais para os dois primeiros casos da tabela tenham estabilizado no mesmo valor, a energia de deformação elástica armazenada no primeiro caso foi quase o dobro quando comparada com o segundo caso. Isto ocorre porque a distribuição de material em cada uma das topologias foi diferente. Neste caso, a imposição de uma restrição de igualdade  $V_{max} = 40\%$  levaria a um mecanismo com regiões rígidas, concentrando a flexibilidade em algumas porções e até mesmo impossibilitando os deslocamentos desejados.

No último caso, a restrição de volume permaneceu ativa armazenando menos energia em relação aos dois primeiros casos.

A restrição de tensão e as restrições de deslocamento na saída permaneceram ativas em todos os casos. Os deslocamentos de entrada ficaram abaixo do limite imposto pela restrição, o que não configura uma violação ao comportamento cinemático imposto.



Figura 18 – Topologia obtida com restrição de volume de 40% - caso 1

As figuras 18, 19 e 20 mostram as topologias obtidas para os casos 40%, 25% e 15% respectivamente. Como no primeiro caso a disponibilidade de material é maior, o otimizador constrói na saída regiões suscetíveis a flexão que permitem armazenar mais energia de deformação elástica. Isto explica os contornos sinuosos observados. A medida que se reduz a disponibilidade de material há uma tendência de formação da estrutura visando apenas uma rigidez axial para atingir os deslocamentos exigidos pela restrição, produzindo contornos mais retos e armazenando menos energia, como pode ser observado na figura 20.



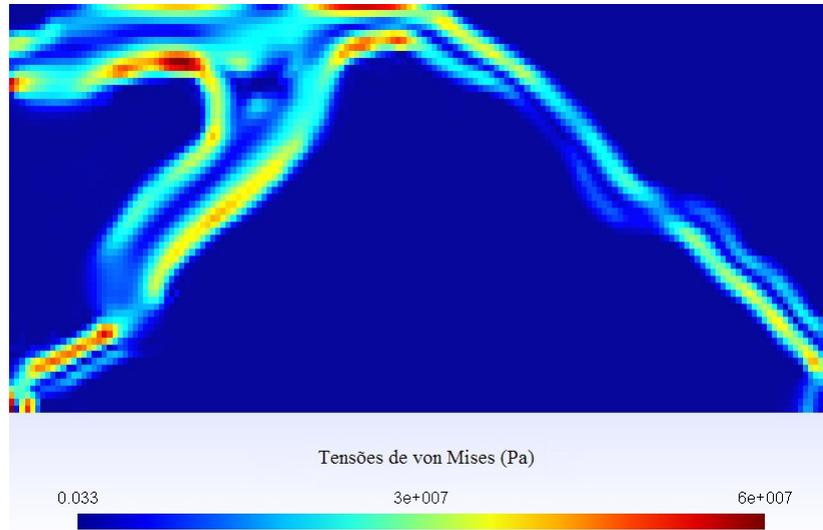
Figura 19 – Topologia obtida com restrição de volume de 25% - caso 2

As figuras 21 e 22 mostram as tensões equivalentes de von Mises nos elementos de cada mecanismo. Na figura 21 pode ser observado que na região de saída as tensões ocorrem próximo aos contornos externos, evidenciando o comportamento de flexão. A região de aplicação do carregamento externo apresenta níveis de tensões e deformações elevados. Com isto, de forma a satisfazer a restrição de tensão, o otimizador aumenta a rigidez na região de entrada e, com isto, diminui o deslocamento nesta região. Assim, verifica-se que a restrição de tensão limita a transferência de energia mecânica proveniente do carregamento externo para dentro do mecanismo, podendo assim diminuir a quantidade de energia disponível para a correta formação da topologia.



Figura 20 – Topologia obtida com restrição de volume de 15% - caso 3

Assim, nestes exemplos fica evidente que as restrições de volume e de deslocamento de entrada são influenciadas pela restrição de tensão, ao ponto de esta tornar as demais inativas. Assim, valores muito elevados de fração de volume não tem influência significativa no projeto. Da mesma forma, impor um deslocamento de entrada elevado, na esperança de permitir a geração de um valor elevado de energia de entrada pode provocar tensões elevadas, que na prática limitam o deslocamento de entrada e, conseqüentemente, a energia disponível.

Figura 21 – Tensões equivalentes de von Mises para o caso  $V_{max} = 40\%$ .

As figuras 23, 24 e 25 ilustram a distribuição da função energia de deformação,  $\Psi$ , em cada mecanismo. Comparando os três resultados fica evidente que a estrutura com menor volume possui uma melhor distribuição de energia de deformação, enquanto na estrutura de maior volume há uma tendência a concentração desta energia de deformação.

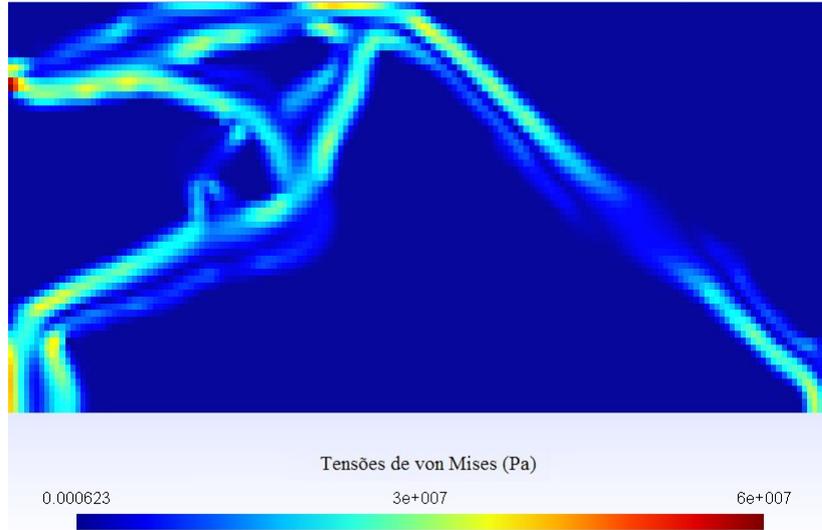


Figura 22 – Tensões equivalentes de von Mises para o caso  $V_{max} = 25\%$ .

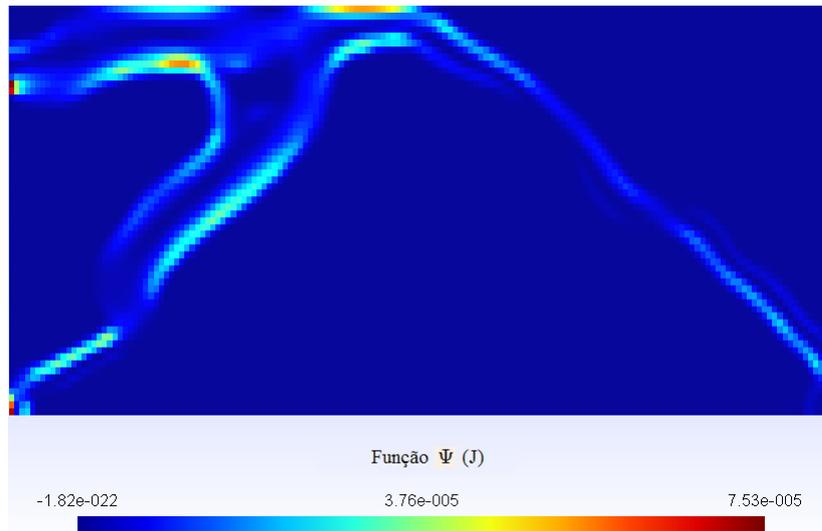


Figura 23 – Energia de deformação modificada ( $\Psi$ ).  $V_{max} = 40\%$  - caso 1

## 5.2 Influência da Rigidez do Meio Externo

A rigidez do meio externo é representada por uma distribuição de molas e visa a aproximação do comportamento do objeto que está sujeito a ação do mecanismo. Para verificar como esta rigidez afeta o projeto, foram utilizados os 3 casos mostrados nas figuras 18, 19 e 20 modificando apenas o parâmetro  $K_{dist}$ . Os resultados obtidos são ilustrados na tabela 4.

	$K_{dist} \left( \frac{N}{m} \right)$	Fração Vol. Final	Energia $\Psi$ (J)	Desloc. Entrada (m)	Desloc. Saída (m)	Tensão $\Phi$ (MPa)
caso 1 $V_{max} = 40\%$	$2 \times 10^7$	27%	0,00742	(1) 0,000063, (2) 0,000062	(3) -0,000102, (4) -0,000100	60
caso 2 $V_{max} = 25\%$	$2 \times 10^9$	25%	0,00521	(1) 0,000074, (2) 0,000074	(3) -0,000025, (4) -0,000021	60
caso 3 $V_{max} = 15\%$	$2 \times 10^7$	15%	0,00479	(1) 0,000050, (2) 0,000048	(3) -0,000100, (4) -0,000100	60

Tabela 4 – Resultados obtidos com a variação da rigidez do meio externo.

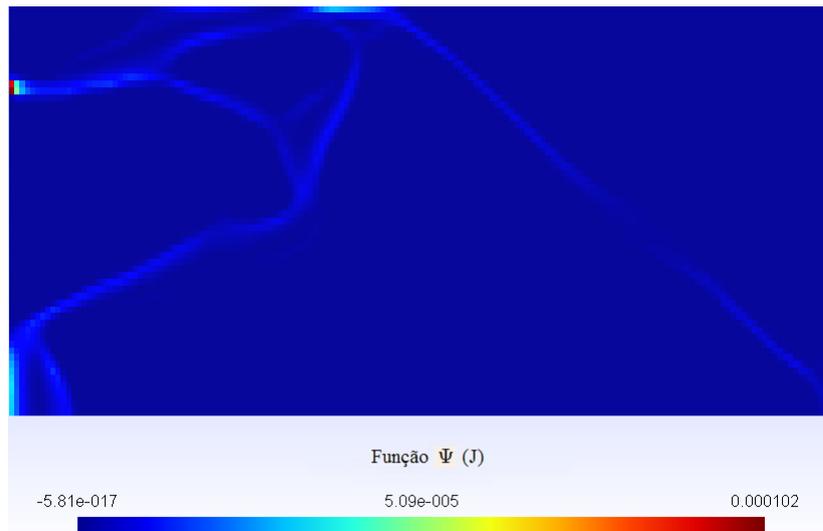


Figura 24 – Energia de deformação modificada ( $\Psi$ ).  $V_{max} = 25\%$  - caso 2

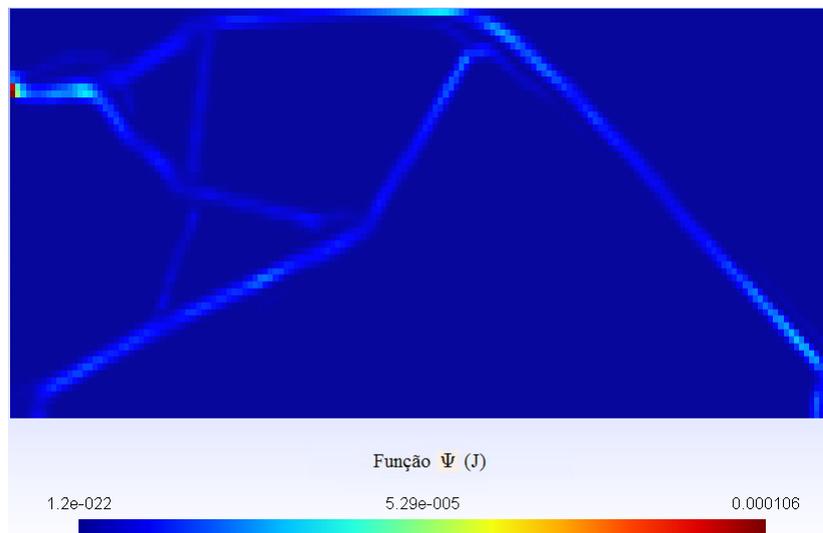


Figura 25 – Energia de deformação modificada ( $\Psi$ ).  $V_{max} = 15\%$  - caso 2

O decréscimo da rigidez estipulado no primeiro e no terceiro caso implicam em uma maior facilidade para satisfazer as restrições de deslocamento, exigindo do mecanismo menos rigidez na região das molas. Isto faz com que surjam elementos com pseudo densidades intermediárias, como pode ser verificado nas figuras. Embora o modelo SIMP tenha como característica penalizar tais pseudo densidades, não o fez devido a influências do raio de filtragem e do tamanho da malha. Esta certamente é uma limitação do modelo SIMP, onde mesmo em regiões com baixa pseudo densidade ainda há material com capacidade de atuação sobre o meio externo.

Um acréscimo na rigidez externa significa que mais energia deve ser empregada para atender as restrições de deslocamento. A rigidez no local de interesse deve ser maior do que a rigidez do meio externo para produzir o deslocamento desejado. Desta



Figura 26 – Rigidez reduzida:  $K_{dist} = 2 \times 10^7 N/m$  - caso 1.

forma, verifica-se na figura 27 o surgimento de um reforço estrutural na região que leva a saída. Neste caso verifica-se que os deslocamentos exigidos na saída não são satisfeitos, a restrição de volume está ativa e observa-se que a restrição de tensão impede maiores deformações nesta região. Assim, novamente observa-se que a restrição de tensão limita o comportamento cinemático do mecanismo.



Figura 27 – Rigidez aumentada:  $K_{dist} = 2 \times 10^9 N/m$  - caso 2.

Para o terceiro caso, ocorrem também pseudo densidades intermediárias devido a baixa rigidez exigida à estrutura. Grande parte do volume disponível se concentra na região esquerda do domínio. Os mecanismos das figuras 26 e 29 não apresentam uma condição propícia de utilização devido a grande porção cinza. Serão apresentadas posteriormente outras análises destes casos modificando o raio de filtragem e refinando a malha.

### 5.3 Influência do Raio de Filtragem

Esta investigação visa compreender qual o efeito do raio de filtragem sobre a topologia do mecanismo. Para isto foram utilizados o caso 1 da tabela 3 e o caso 3 da

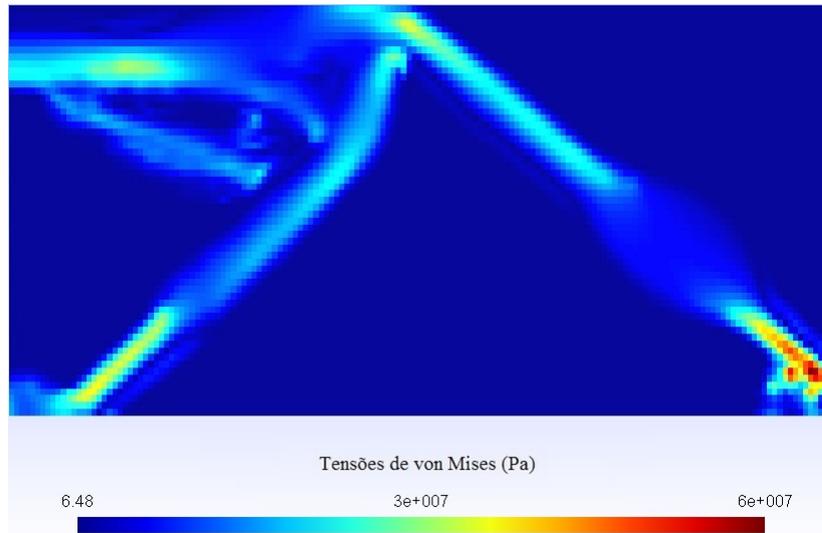


Figura 28 – Rigidez aumentada - distribuição das tensões equivalentes de von Mises.



Figura 29 – Rigidez reduzida:  $K_{dist} = 2 \times 10^7 N/m$ .

tabela 4. O valor  $R_{max} = 2 \times 10^{-3} m$  inicialmente estipulado engloba cerca de 22 elementos em relação ao elemento central. O novo raio proposto é reduzido para  $R_{max} = 1,1 \times 10^{-3} m$  englobando 8 elementos vizinhos apenas. A tabela 5 mostra os dois casos executados para análise.

		$R_{max}$ (m)	Fração Vol. Final	Energia $\Psi$ (J)	Desloc. Entrada (m)	Desloc. Saída (m)	Tensão $\Phi$ (MPa)
caso 1	$V_{max} = 40\%$	$1,1 \times 10^{-3}$	22%	0,0111	(1) 0,000130, (2) 0,000127	(3) -0,000103, (4) -0,000100	60
caso 2	$V_{max} = 15\%$	$1,1 \times 10^{-3}$	15%	0,00603	(1) 0,000108, (2) 0,000104	(3) -0,000104, (4) -0,000100	60

Tabela 5 – Resultados para variação do raio de filtragem.

Para estes dois casos não houve variações consideráveis no que se refere as restrições do problema incluindo a função energia  $\Psi$ , ou seja, os parâmetros da tabela 5 sofreram poucas alterações. Todavia a distribuição de material é bastante diferente em ambos os casos. O mecanismo obtido no primeiro caso (figura 30) mostra um maior número de reforços estruturais consequentemente mais "buracos" na estrutura quando comparado com a figura 18. Também ocorre uma área menor de transição entre os elementos com

$\rho = 1$  e os elementos vazios.



Figura 30 – Influência da variação do raio de filtragem  $R_{max} = 1,1 \times 10^{-3}m$  - caso 1.

Para o segundo caso conforme figura 31, foi possível formar um mecanismo aceitável com uma distribuição uniforme somente pela diminuição do raio de filtragem.



Figura 31 – Influência da variação do raio de filtragem  $R_{max} = 1,1 \times 10^{-3}m$  - caso 2.

## 5.4 Influência do Parâmetro $n$

O parâmetro  $n$  age como penalizador para a energia de deformação elástica, impedindo que elementos de baixa pseudo densidade armazenem muita energia. A influência de  $n$  foi verificada com o mecanismo da figura 18 para três valores diferentes, 3, 5 e 10. Os resultados são mostrados na tabela 6 e nas figuras 32, 33 e 34.

		$n$	Fração Vol. Final	Energia $\Psi$ (J)	Desloc. Entrada (m)	Desloc. Saída (m)	Tensão $\Phi$ (MPa)
caso 1	$V_{max} = 40\%$	3	23%	0,009	(1) 0,000117, (2) 0,000112	(3) -0,000100, (4) -0,000100	60
caso 2	$V_{max} = 40\%$	5	23%	0,0133	(1) 0,000150, (2) 0,000150	(3) -0,000104, (4) -0,000100	60
caso 3	$V_{max} = 40\%$	10	23%	0,0062	(1) 0,000111, (2) 0,000107	(3) -0,000100, (4) -0,000100	60

Tabela 6 – Resultados para variação do parâmetro  $n$ .

Comparando as 3 figuras, nota-se que para  $n = 5$  a topologia é mais definida e armazena mais energia. Para  $n = 3$  percebe-se do lado esquerdo um surgimento discreto de reforço estrutural e para  $n = 10$  ele aparece mais acentuado. Pode-se concluir que

Figura 32 – Influência da variação de  $n$  ( $n = 3$ ).Figura 33 – Influência da variação de  $n$  ( $n = 5$ ).Figura 34 – Influência da variação de  $n$  ( $n = 10$ ).

a escolha de um valor adequado para  $n$  é muito importante nesta formulação, havendo portanto um valor favorável para o acúmulo de energia.

Valores muito baixos para  $n$  não são favoráveis ao armazenamento de energia de deformação elástica. Em contrapartida, para valores elevados de  $n$  o problema torna-se altamente não linear, conduzindo a problemas numéricos. Para os problemas estudados aqui, com  $p = 3$ , verificou-se que a melhor relação entre o comportamento da energia

modificada e a estabilidade numérica é obtida com  $n = 5$ .

## 5.5 Influência do Parâmetro $q$

A escolha do parâmetro  $q$  tem forte influência no cálculo das tensões, mitigando o fenômeno da singularidade que faz com que apareçam tensões em elementos com baixa pseudo densidade. Inicialmente foi usado o valor  $q = 2$ , em combinação com  $p = 3$ , o que garantiu um bom comportamento das tensões em regiões vazias. Para mostrar o fenômeno da singularidade foram usados valores mais altos para  $q$  a partir do resultado obtido no primeiro caso da tabela 3. A tabela 7 refere-se aos resultados obtidos para  $q = 2,8$  e  $q = 2,4$ .

		$q$	Fração Vol. Final	Energia $\Psi$ (J)	Desloc. Entrada (m)	Desloc. Saída (m)	Tensão $\Phi$ (MPa)
caso 1	$V_{max} = 40\%$	2,8	40%	0,0008	(1) 0,000013, (2) 0,000012	(3) -0,000010, (4) -0,000010	60
caso 2	$V_{max} = 40\%$	2,4	23%	0,008	(1) 0,000120, (2) 0,000110	(3) -0,000118, (4) -0,000100	60

Tabela 7 – Resultados para variação do parâmetro  $q$ .

Para o primeiro caso foram observadas alterações consideráveis em relação ao mecanismo da figura 18. Na topologia é observada uma grande região com pseudo densidades intermediárias e ainda quando  $q = 2,8$  surgem tensões elevadas em uma grande porção de baixa pseudo densidade do mecanismo, conforme figura 37. Este fato contribuiu para que as restrições de deslocamento não fossem satisfeitas, bem como para a não definição da topologia. É importante ressaltar que o otimizador utilizou todo o volume disponível para manter satisfeita a restrição de tensão, tornando ativa a restrição de volume.

É muito importante salientar que o fenômeno da singularidade se deve ao comportamento da tensão com a deformação, por meio da relação constitutiva parametrizada, equação 1.11. Por meio da modificação realizada pelo parâmetro  $q$ , altera-se esta relação. No entanto, um expoente que funciona bem em um problema de elasticidade, onde o objetivo é obter uma estrutura rígida, não irá funcionar adequadamente em um problema como o estudado aqui. A melhor maneira de visualizar este comportamento é por meio do mapa de deslocamentos que ocorre no mecanismo, figura 35, onde fica claro que o padrão de deslocamentos implica em um esmagamento da região que apresenta o problema da singularidade.

Reduzindo para  $q = 2,4$  tem-se uma completa eliminação da região degenerada conforme a figura 38. Neste caso o mecanismo é similar ao obtido para  $q = 2,0$ . Não foram constatadas mudanças consideráveis em relação ao caso apresentado na tabela 3. Isto demonstra de maneira inequívoca a capacidade da relaxação  $qp$ , bem como o cuidado que devemos ter no seu uso com o projeto de mecanismos flexíveis.

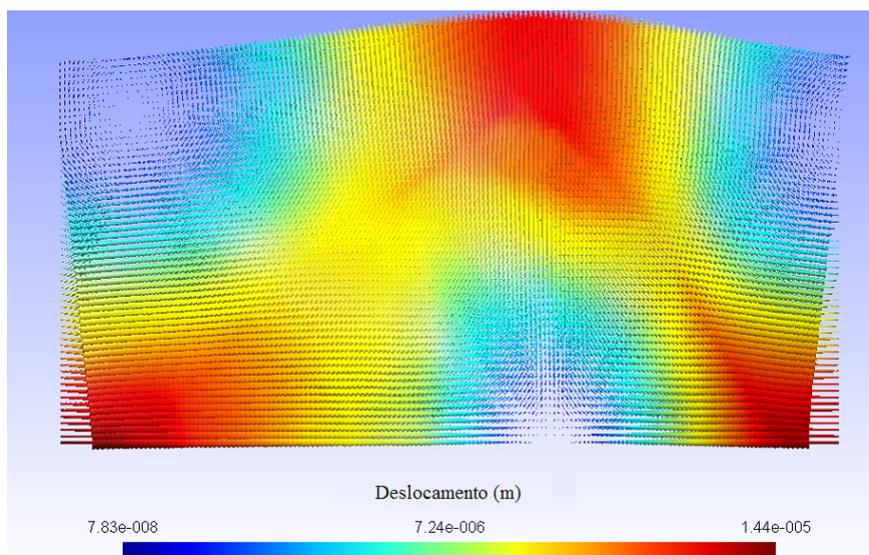


Figura 35 – Campo de deslocamentos ( $q = 2, 8$ ) - caso 1.



Figura 36 – Topologia obtida com  $q = 2, 8$  - caso 1.

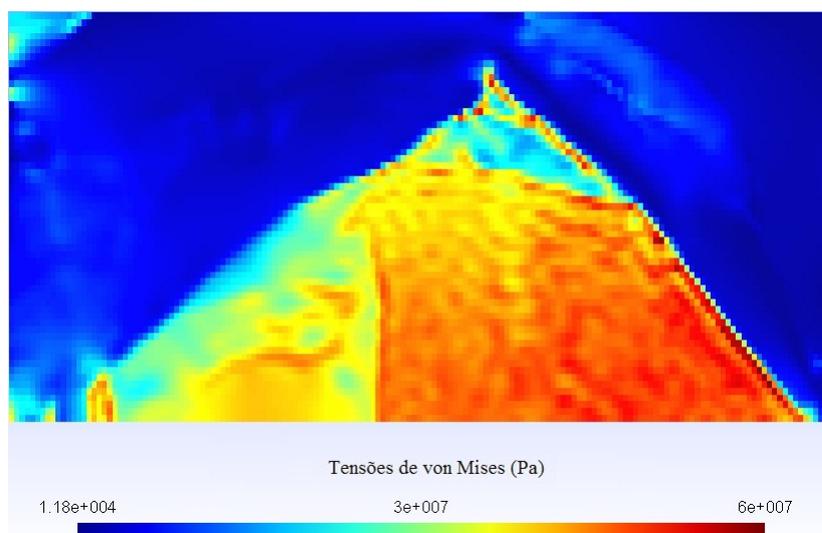


Figura 37 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises,  $q = 2, 8$  - caso 1.

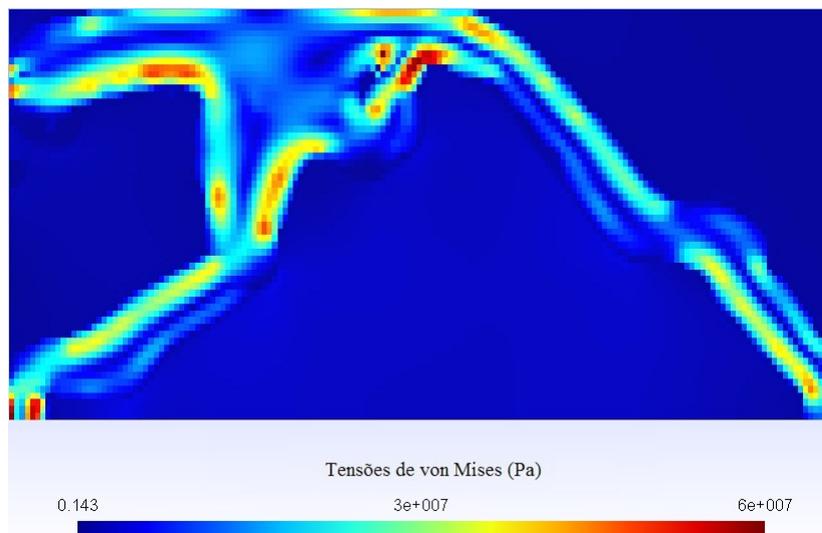


Figura 38 – Distribuição das tensões equivalentes de von Mises,  $q = 2, 4$  - caso 2.

## 5.6 Influência da Restrição de Tensão

Conforme demonstrado em exemplos anteriores, verifica-se que a restrição de tensão tem um impacto direto no projeto final e na viabilidade das demais restrições. Assim, nem todos os requisitos desejáveis em um mecanismo podem ser satisfeitos simultaneamente em alguns casos. Uma exigência de um grande deslocamento pode infringir a restrição de tensão e de volume simultaneamente. Em contrapartida, uma restrição muito severa de volume pode impedir a formação da estrutura e violar a restrição de tensão. Esta concepção deve servir de base para entender as condições que possibilitam ou não a construção de um mecanismo.

A análise da influência da restrição de tensão é feita usando como base o caso 1 da tabela 3, e considerando dois valores limites:  $600MPa$  e  $20MPa$ , conforme ilustrado na tabela 8.

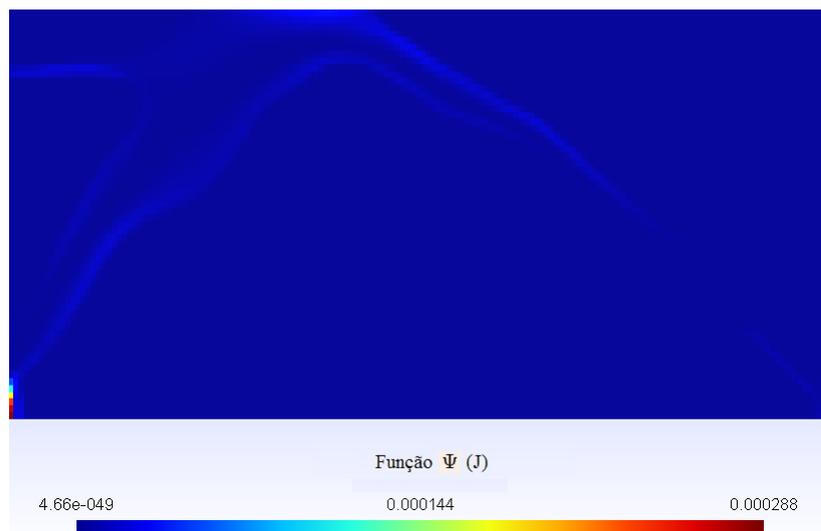
	$\sigma_{lim}$ (MPa)	Fração Vol. Final	Energia $\Psi$ (J)	Desloc. Entrada (m)	Desloc. Saída (m)	Tensão $\Phi$ (MPa)
caso 1 $V_{max} = 40\%$	600	32%	0,019	(1) 0,000200, (2) 0,0000180	(3) -0,000100, (4) -0,000100	150
caso 2 $V_{max} = 40\%$	20	40%	0,0011	(1) 0,000017, (2) 0,000017	(3) -0,000035, (4) -0,000034	20

Tabela 8 – Resultados para variação do limite de tensão  $\sigma_{lim}$ .

Como esperado, com  $\sigma_{lim} = 600MPa$  observa-se que maiores deslocamentos podem ser alcançados. O volume final estabilizou em 32% para garantir que a estrutura tivesse flexibilidade suficiente para promover o deslocamento necessário e, como consequência, a restrição de tensão ficou inativa e estabilizou-se em 150 MPa. A topologia resultante é mais robusta, com componentes estruturais mais largos, conforme a figura 39. Na região da mola uma faixa estreita de material é formada para permitir flexibilidade e facilitar o deslocamento requerido. Há ainda uma formação indefinida no canto superior direito, onde o material que não é utilizado na topologia acaba sendo "descartado".

Figura 39 – Topologia obtida com  $\sigma_{lim} = 600MPa$  - caso 1

Além disso, mais energia pôde ser armazenada, porém de forma mais concentrada, de acordo com a figura 40. A restrição de tensões foi satisfeita, sendo que a distribuição das tensões equivalentes de von Mises está ilustrada na figura 41.

Figura 40 – Distribuição de energia para  $\sigma_{lim} = 600MPa$  - caso 1.

Para o caso 2 foi aplicada uma tensão limite bem inferior ao limite real do material:  $\sigma_{lim} = 20MPa$ . Como consequência desta restrição severa, observa-se que a restrição de deslocamento de saída não foi satisfeita. A topologia é mostrada na figura 42, onde observa-se uma região de pseudo densidade concentrada, como tentativa de aumentar a rigidez e, assim, reduzir as tensões e garantir o deslocamento.

Um fato interessante é que neste caso a restrição de volume está ativa, indicando que o otimizador utilizou todo o volume disponível para controlar o nível de tensões mantendo a restrição de tensão satisfeita. A quantidade de energia armazenada foi muito inferior em comparação com o caso 1, confirmando que a restrição de tensão limita a quantidade de energia de deformação armazenada.

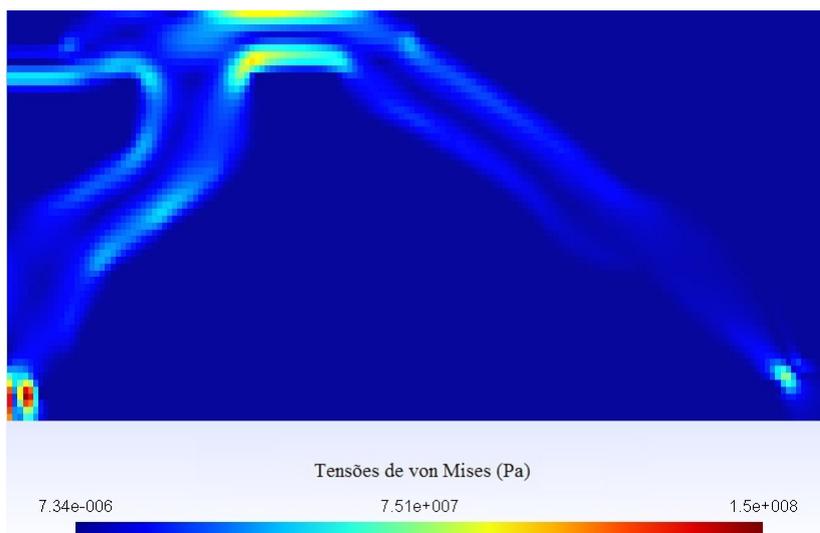


Figura 41 – Distribuição das tensões para  $\sigma_{lim} = 600MPa$  - caso 1.



Figura 42 – Mecanismo com limite de tensão  $\sigma_{lim} = 20MPa$  - caso 2

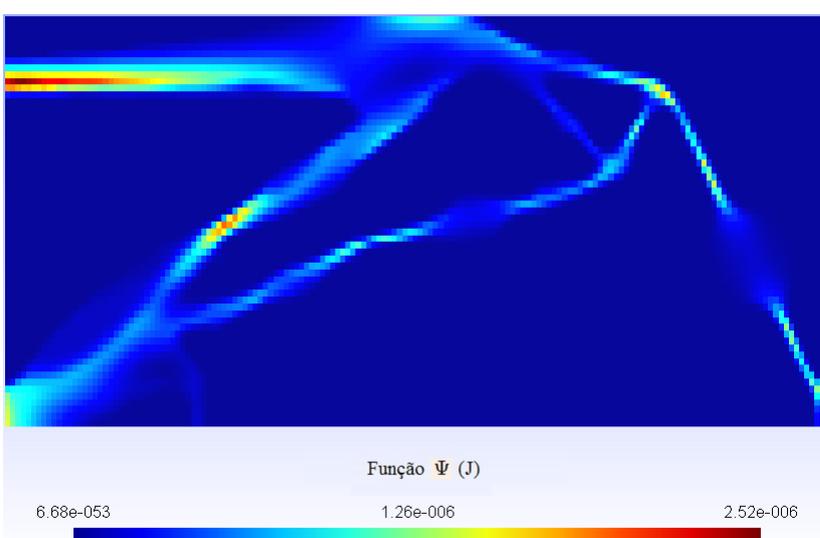


Figura 43 – Distribuição de energia para  $\sigma_{lim} = 20MPa$  - caso 2.

O mecanismo do caso 2 apresenta componentes estruturais mais esbeltos em relação ao caso 1. Esta ocorrência permite mais flexibilidade para tentar satisfazer os deslocamentos, em contrapartida conduz a maiores regiões submetidas a tensões, conforme figura 44.

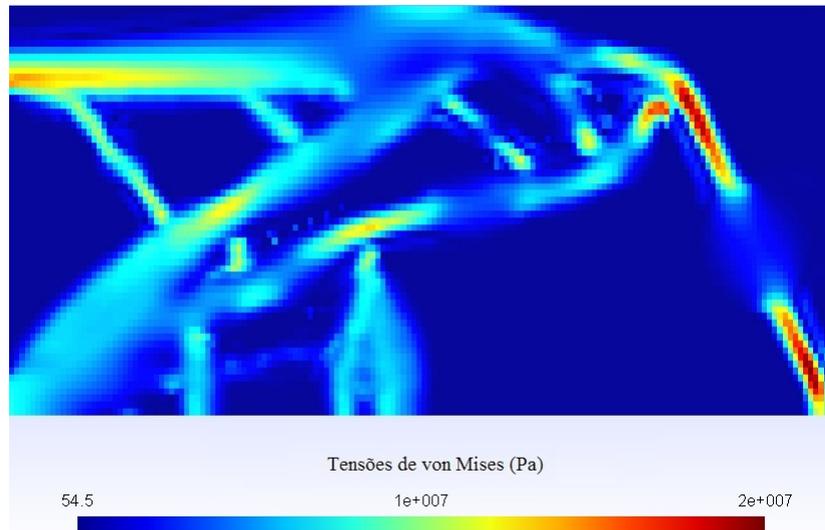


Figura 44 – Distribuição das tensões para  $\sigma_{lim} = 20MPa$  - caso 2.

## 5.7 A influência do Refino da Malha

Para avaliar como o refino da malha influencia no projeto, foram utilizadas as mesmas condições do caso 1 da tabela 4 para uma malha de 38400 elementos. Este caso foi escolhido visando uma melhor definição da região cinza localizada na região de saída do mecanismo bem como avaliação da qualidade das tensões obtidas pelo método dos elementos finitos.



Figura 45 – Influência do refino da malha: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita).  $q = 2$

Um resultado interessante observado na malha de 38400 elementos é o fato de esta topologia apresentar o problema de singularidade de tensão, enquanto o mesmo problema com a malha de 9600 elementos não indicou este comportamento. Certamente,

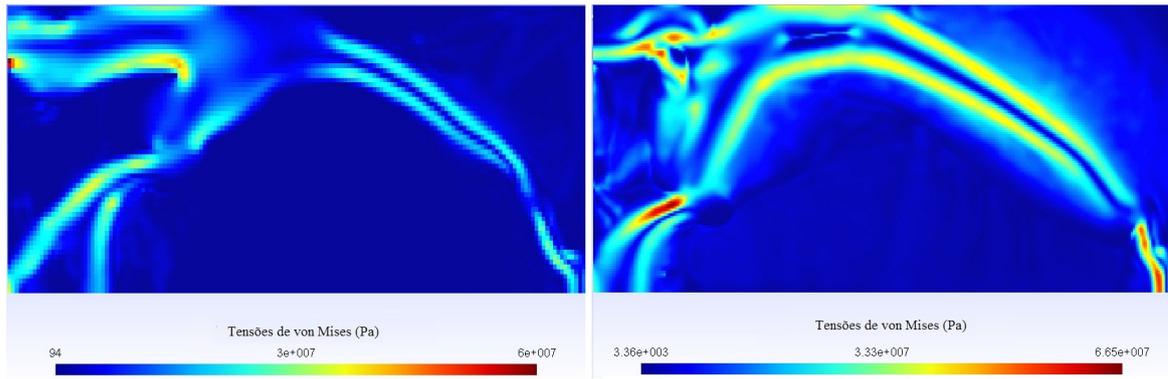


Figura 46 – Comparativo das tensões: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita)  $q = 2$ .

isto está relacionado ao fato de o campo de tensões estar sendo melhor descrito com esta malha refinada, como pode ser verificado graficamente na figura 46, topologia da direita, onde o pico de tensão ficou um pouco acima de uma região de densidade unitária. Se considerarmos novamente este problema, mas com um fator  $q = 1,5$ , obtemos a topologia da figura 47 e a distribuição de tensões equivalentes da figura 48. Neste caso, verifica-se que todas as restrições foram satisfeitas (tabela 9). Para o caso mais refinado ocorre uma melhor definição da região de saída, não eliminando porém os elementos com pseudo densidades intermediárias, conforme figura 47. O problema do surgimento de inúmeros reforços finos inerente a discretização da malha foi controlado com a aplicação do filtro espacial, uma vez que o mesmo raio foi considerado nos dois casos.



Figura 47 – Influência do refino da malha: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita).  $q = 1,5$ .

		$K_{dist} (\frac{\Sigma}{m}/m)$	Fração Vol. Final	Energia $\Psi (J)$	Desloc. Entrada (m)	Desloc. Saída (m)	Tensão $\Phi (MPa)$
caso 1 ( $q = 2,0$ )	$ne = 38400$	$2 \times 10^7$	24%	0,01022	(1) 0,000138, (2) 0,000137	(3) -0,000127, (4) -0,000121	66,5
caso 2 ( $q = 1,5$ )	$ne = 38400$	$2 \times 10^7$	28%	0,0121	(1) 0,000110, (2) 0,000110	(3) -0,000110, (4) -0,000110	60
(caso 1 da tabela 4)	$ne = 9600$	$2 \times 10^7$	27%	0,00742	(1) 0,000063, (2) 0,000062	(3) -0,000102, (4) -0,000100	60

Tabela 9 – Resultados e comparações para o refino da malha

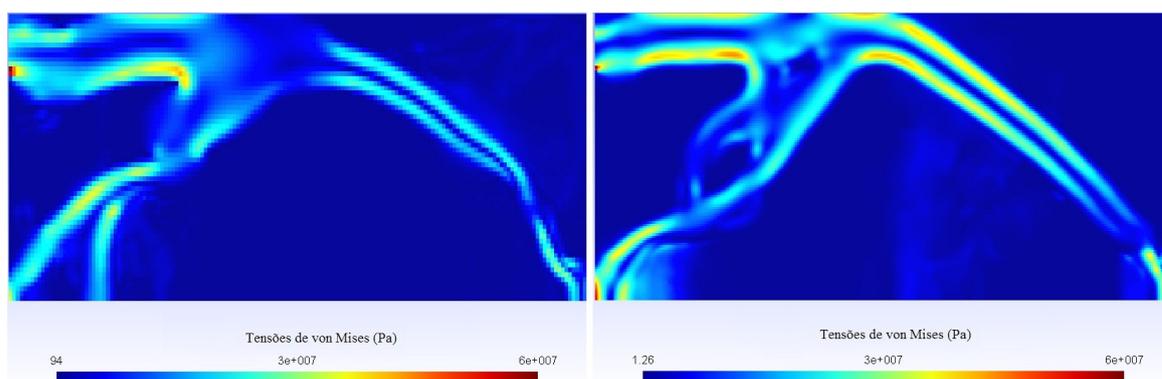


Figura 48 – Comparativo das tensões: 9600 elementos (esquerda) e 38400 elementos (direita)  $q = 1,5$ .

## 6 Conclusão

Após a obtenção, análise e interpretação dos resultados, algumas conclusões podem ser alcançadas. Inicialmente, verifica-se que com a formulação proposta neste trabalho é possível obter um mecanismo que satisfaça as restrições impostas e que apresente uma topologia bem definida e sem a presença de rótulas (*hinges*). Todavia, esta formulação é muito sensível aos parâmetros listados no início do capítulo 5 tal que uma escolha cuidadosa deve ser feita nesse sentido. Em especial, observa-se que a imposição do comportamento cinemático do mecanismo via um conjunto de restrições de deslocamento não apresenta a facilidade de uso quando comparada a outras formulações que incluem os deslocamentos diretamente na função objetivo.

A maximização da energia de deformação elástica modificada (função  $\Psi$ ) pode induzir um aumento na magnitude de algumas componentes de deslocamento, conforme ilustrado na primeira seção do capítulo 5. De forma indireta, este aumento no nível de deslocamentos pode produzir um aumento no nível de tensões. Este fato pode gerar um conflito entre as restrições de deslocamento e tensão, visto que uma imposição muito severa em uma delas poderá resultar em um projeto inviável. Conforme ilustrado na seção 5.6, ao aumentarmos o limite de tensão permitimos maiores deslocamentos e conseqüentemente maior armazenamento de energia.

Observou-se que a restrição de volume permaneceu inativa em muitos casos avaliados, pois as restrições de deslocamento exercem um controle sobre o volume final da topologia. Isto ocorre pois uma grande quantidade de material tornaria o mecanismo muito rígido, impossibilitando a satisfação das restrições de deslocamentos. De forma geral, foi possível avaliar que para os casos com excesso de material disponível ocorrem regiões sinuosas com predominância de flexão (priorizando o armazenamento de energia). De forma análoga, quando existe pouco material disponível, a topologia apresenta predominância de regiões com comportamento axial (priorizando a rigidez em detrimento de energia). Estes comportamentos podem ser claramente observados nas figuras 18 e 20, respectivamente.

A especificação do carregamento e dos deslocamentos na entrada, bem como deslocamentos e rigidez na saída devem priorizar o armazenamento de energia conforme descrito ao final da seção 2.3, caso contrário o projeto será inviável. Soma-se a isto o fato de as dimensões básicas do domínio de projeto terem um impacto direto sobre a capacidade de armazenamento de energia, pois um domínio fixo maior proporciona maior volume para armazenamento de energia. Isto pode permitir a obtenção de maiores deslocamentos na

região de saída para uma dada restrição de tensão.

Em relação ao raio de filtragem, pôde ser constatado que este exerce grande influência na distribuição de material no domínio. A diminuição deste raio de 2 para 1,1 mm ocasionou uma maior complexidade da estrutura, diminuição da região de transição entre regiões sólidas e vazias e proporcionou uma expressiva modificação na formação do mecanismo mostrado na figura 31. Verifica-se que para uma dada malha de elementos finitos, não deve-se utilizar um valor excessivamente elevado de raio, pois isto não permite a correta definição da topologia. Da mesma forma, valores muito pequenos implicam em topologias muito complexas. O valor ideal em termos de definição de topologia é o raio associado a uma vizinhança de primeira ordem em torno de cada elemento (vizinhos de nós e arestas).

Outra observação importante foi em relação a escolha do parâmetro  $n$ , havendo um balanço entre a penalização do armazenamento de energia em baixas pseudo densidades e o grau de não linearidade da função objetivo. Para  $n = 3$  e  $n = 10$  a penalização não foi eficiente, armazenando menos energia e apresentando regiões com densidades intermediárias. O valor  $n = 5$  foi mais favorável ao armazenamento de energia e mais eficaz na redução das densidades intermediárias. No entanto, para as faixas de valores estudadas aqui, este parâmetro mostrou pouca influência no resultado final, desde que a relaxação proposta por Cardoso e Fonseca 2004, seja observada.

A relaxação- $qp$  utilizando  $q = 2$  foi eficaz para o controle do fenômeno da singularidade, penalizando as tensões em elementos de baixa densidade quando  $q < p$ . Uma das principais conclusões deste trabalho é a de que parâmetros adequados de relaxação- $qp$  em Otimização Topológica de estruturas mecânicas não necessariamente levam a parâmetros adequados no projeto de mecanismos flexíveis, uma vez que nestes o campo de deformações tende a apresentar regiões com valores mais elevados (associados ao comportamento cinemático do mecanismo). Conforme apresentado anteriormente  $q = 2,8$  não foi capaz de controlar o fenômeno da singularidade. Outro resultado importante foi obtido com o refinamento de malha, uma vez que a melhora na descrição no campo de tensões também tem influência na escolha de tal parâmetro. Com uma malha refinada, o valor  $q = 2$  não foi satisfatório pois não eliminou o fenômeno da singularidade, que impediu a satisfação da restrição de tensão. Posteriormente foi adotado  $q = 1,5$  que conseguiu melhorar o problema a ponto de satisfazer todas as restrições. Assim, deve-se enfatizar que um extremo cuidado deve ser tomado em relação a escolha dos parâmetros da relaxação  $qp$ .

Um dos parâmetros associados a formulação proposta e que não foi abordado neste estudo é o expoente  $P$  da norma. Sabe-se que este expoente deve apresentar um valor elevado em caso de concentrações de tensão, embora esta situação não tenha sido enfrentada nos exemplos aqui estudados. Desta forma, de modo a obter um bom balanço entre não-linearidade e localização de tensões foi utilizado um valor suficientemente baixo

( $P = 4$ ).

Não foi utilizado tratamento para eliminação das regiões com densidades intermediárias, como por exemplo, o desligamento do filtro ou o aumento de  $p$ . Embora Bruggi (2008) utilize o método da continuação no parâmetro  $q$ , esta abordagem não foi aplicada neste trabalho.

Uma questão importante e que não foi avaliada neste trabalho é a qualidade dos deslocamentos e tensões obtidas com o tipo de elemento finito utilizado. Sabe-se que o elemento finito bilinear isoparamétrico de 4 nós apresenta um comportamento muito rígido em flexão, conhecido como cisalhamento parasita (*parasitic shear*). Observando alguns dos resultados obtidos fica evidente que este aumento artificial de rigidez deve estar sendo utilizado em regiões submetidas a flexão e que possuam poucos elementos com pseudo densidade unitária na espessura. Os valores de tensão obtidos também estão sujeitos a tais discrepâncias, associadas ao modelo de elementos finitos e não a formulação proposta e avaliada neste trabalho.

Deve-se salientar que devido a natureza do problema de otimização solucionado aqui, não existe garantia de que os mínimos obtidos sejam globais. Desta forma, ao solucionarmos os problemas apresentados aqui com uma pequena mudança na estratégia de limites móveis ou até mesmo em computadores com precisão diferentes poderemos observar resultados diferentes.

## 6.1 Sugestões a trabalhos futuros

Alguns parâmetros associados a formulação discutida neste trabalho não puderam ser estudados em profundidade. Em especial, o estudo de situações onde ocorram concentração de tensões pode indicar a dependência com o expoente  $P$  da norma. Outra questão importante e que não pode ser avaliada em detalhes é a influência das dimensões do domínio de projeto, embora existam indicações de que isto pode ter um impacto relevante na faixa de valores de deslocamento que podem ser alcançados. Em especial, verifica-se que a formulação baseada em energia se mostra adequada para o projeto de mecanismos flexíveis, embora a imposição do comportamento cinemático por meio de um conjunto de restrições torne o projeto semi-automático, uma vez que um balanço prévio de energia deve ser realizado. Desta forma, sugere-se que novas formulações baseadas no conceito de energia elástica armazenada sejam propostas e estudadas. Certamente, diversos modos de falha devem ser considerados no projeto de um mecanismo flexível. Neste trabalho foi abordada uma restrição fundamental, mas que certamente não é a única a ser considerada. Em especial, acredita-se que a consideração da restrição de flambagem deva ser abordada em trabalhos futuros.

Por fim, sugere-se a utilização de algum algoritmo de otimização que permita a

solução dos problemas abordados neste trabalho em um número menor de iterações.

## Referências

- ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A. M. Identification and control of dynamical system using neural networks. **J. Comput. Phys**, 2004. v. 194, n. 1, p. 363–393, 2004. Citado na página 29.
- AMBROSIO, L.; BUTTAZZO, G. An optimal design problem with perimeter penalization, calculus and variations and partial differential equations. **Calc. of Var.**, 1993. p. 55–69, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 29.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to von mises stress constraints. **Struct. Multidisc. Optim**, 2010. v. 41, p. 407–420, 2010. Citado na página 26.
- ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S. Designing compliant mechanisms. **ASME Mechanical Engineering**, 1995. v. 117, p. 93–96, 1995. Citado na página 35.
- ANANTHASURESH, G. K.; KOTA, S.; GIANCHANDANI, Y. A methodical approach to the design of compliant micromechanisms. **SOLID-STATE SENSOR AND ACTUATOR WORKSHOP**, 1994. p. 189–192, 1994. Citado na página 35.
- ARORA, J. S. **Optimization of Structural and Mechanical Systems**. [S.l.]: 2 ed. Iowa, World Scientific, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 47.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Simon & Schuster Company Englewood Cliffs, New Jersey, 1996. Citado na página 24.
- BECKERS, M. Optimisation topologique de structures tridimensionnelles en variable discretas. **Technical Report Of-44**, 1997. 1997. LTAS, University of Liege. Citado na página 22.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, 1989. v. 1, p. 192–202, 1989. Citado na página 22.
- BENDSØE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1995. Citado na página 23.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics**, 1988. v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archives of Applied Mechanics**, 1999. v. 69(9-10), p. 635–654, 1999. Citado na página 22.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 9, 23, 24 e 32.

- BORRVALL, T. Topology optimization of elastic continua using restriction. **Archives of Computational Methods in Engineering**, 2001. v. 8, p. 351–385, 2001. Citado na página 22.
- BRUGGI, M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2008. v. 36, p. 125–141, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 67.
- BRUGGI, M.; DUYSINX, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2012. v. 46, p. 369–384, 2012. Citado na página 25.
- BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of nonlinear elastic structures and compliant mechanisms. **Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.**, 2001. v. 190, p. 3443–3459, 2001. Citado na página 29.
- BUSCH-VISHNIAC, I. J. **Electromechanical Sensors and Actuators**. [S.l.]: Springer Verlag, 1998. Citado na página 33.
- CARBONARI, R. C.; NADER, G.; SILVA, E. C. N. Experimental e numerical characterization of piezoelectric mechanisms designed using topology optimization. In: **Proceedings of 18th International Congress of Mechanical Engineering**. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 36.
- CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S. Design of multi-actuated piezoelectric mechanisms using topology optimization. In: **6th World Congress on Structural and Mutidisciplinary Optimization (WCSMO-6)**. [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 36.
- CARDOSO, E. L. **Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. Intermediate density reduction and complexity control in the topology optimization. In: **In: 20TH IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE99)**. [S.l.: s.n.], 1999. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. Strain energy maximization approach to the design of fully compliant mechanisms using topology optimization. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 2004. v. 1, p. 263–275, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 18, 36, 37, 38 e 41.
- CHEN, T. Calculation of the move limits for the sequential linear programming method. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, 1993. v. 36, p. 2661–2679, 1993. Citado na página 49.
- CHEN, Y. et al. Modelling of active semiconductor photonic crystal waveguides and robust designs based on topology optimization. In: **13th International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON)**. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 22.

- CHENG, G. D.; GUO, X.  $\epsilon$ -relaxed approach in structural topology optimization. **Struct. Optim.**, 1997. v. 13, p. 258–266, 1997. Citado na página 27.
- CHENG, T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. **International Journal of Solid Structures**, 1981. v. 17, p. 305–323, 1981. Citado na página 21.
- CHENG, T.; OLHOFF, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. **International Journal of Solid Structures**, 1982. v. 18, p. 153–169, 1982. Citado na página 21.
- COLOMBO, J. F.; CARDOSO, E. L.; A., M. N.-R. P. Topology optimization with stress constraints using superconvergent patch recovery. In: **Mechanics of Solids in Brazil, E. A. Fancello and P. T. R. Mendonça and M. Alves**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 175–195. Citado na página 27.
- DÍAZ, A. R.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 1995. v. 10, p. 40–45, 1995. Citado na página 28.
- DUYSINX, P.; BENDSØE, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998. v. 43, p. 1453–1478, 1998. Citado na página 26.
- FONSECA, J.; KIKUCHI, N. Digital imaging filtering in topology optimization. In: **Computational Mechanics New Trends and Applications, CIMNE**. [S.l.: s.n.], 1998. Citado na página 49.
- FRECKER, M. I.; KIKUCHI, N.; KOTA, S. Optimal synthesis of compliant mechanisms to satisfy kinematic and structural requirements - preliminary results. In: **PROCEEDINGS OF THE 1996 ASME DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS IN ENGINEERING CONFERENCE**. [S.l.: s.n.], 1996. p. 177–192. Citado na página 35.
- GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 2009. v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. Citado na página 54.
- GUEST, J. K.; PRÉVOST, J. H.; BELYTSCHKO, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. **Numer. Meth. Engng.**, 2004. v. 61, p. 238–254, 2004. Citado na página 30.
- GUTH, D. C.; LUERSEN, M. A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Optimization of periodic truss materials including constitutive symmetry constraints. **Materialwissenschaft und Werkstofftechnik**, 2012. v. 43, p. 447–456, 2012. Citado na página 22.
- HAFTKA R., T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, London, 1996. Citado na página 49.
- HANSON, R.; HIRBERT, K. **A Sparse Linear Programming Subprogram**. [S.l.], 1981. SAND81-0297. Citado na página 49.

- HARBER, R. B.; JOG, C. S.; BENDSØE, M. P. New approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. **Structural and Multidisciplinary Optimization**", 1996. v. 11, p. 1–12, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 29.
- HASSANI, B.; HINTON, E. **Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software**. [S.l.]: New York: Springer-Verlag, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- HER, I.; MIDHA, A. A compliance number concept for compliant mechanisms and type synthesis. **Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Transaction of the ASME**, 1987. v. 109, p. 348–355, 1987. Citado na página 34.
- HOWELL, L. L.; MIDHA, A. A loop-closure theory for the analysis and synthesis of compliant mechanisms. **Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME**, 1996. v. 118, p. 121–125, 1996. Citado na página 34.
- KANTOROVICH, L. V. A new method of solving some classes of extremal problems. **Doklady Akad Sci USSR**, 1940. v. 28, p. 211–214, 1940. Citado na página 47.
- KARMARKAR, N. A new polynomial time algorithm for linear programming. **Combinatorica**, 1984. v. 4, n. 4, p. 373–395, 1984. Citado na página 48.
- KIKUCHI, N.; NISHIWAKI S.AND FONSECA, J. S. O.; SILVA, E. C. N. Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure. **Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.**, 1998. v. 151, p. 401–417, 1998. Citado na página 35.
- KIM, Y. Y.; YOON, G. H. Multi-resolution multi-scale topology optimization - a new paradigm. **Int. J. Solids Struct**, 2000. v. 37, p. 5529–5559, 2000. Citado na página 29.
- KOHN, R. V.; STRANG, G. optimal design and relaxation of variational problems. **Comm on Pure an Appl. Math**, 1986. v. 39, p. 113–137, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- KOHN, R. V.; STRANG, G. optimal design and relaxation of variational problems. **Comm on Pure an Appl. Math**, 1986. v. 39, p. 139–182, 1986. Citado na página 23.
- KOHN, R. V.; STRANG, G. optimal design and relaxation of variational problems. **Comm on Pure an Appl. Math**, 1986. v. 39, p. 353–377, 1986. Citado na página 23.
- KREISSELMEIER, R.; R., S. Systematic control design by optimizing a vector performance index. In: **INTERNATIONAL FEDERATION OF ACTIVE CONTROLS SYMPOSIUM ON COMPUTER-AIDED DESIGN FO CONTROL SYSTEMS**. [S.l.: s.n.], 1979. Citado na página 26.
- LE, C. et al. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2010. v. 41, p. 605–620, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 18, 25, 26 e 39.
- LIMA, C. R. **Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica**. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecatrônica, São Paulo, 2002. Citado na página 30.

- LIN, J.; LUO, Z.; TONG, L. A new multi-objective programming scheme for topology optimization of compliant mechanisms. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2010. v. 40, p. 241–255, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 35.
- LUO, J. et al. A new level set method for systematic design of hinge-free compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2008. v. 198, p. 318–331, 2008. Citado na página 36.
- MELLO, L. A. M.; SALAS, R. A.; SILVA, E. C. N. On response time reduction of electrothermomechanical mems using topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2012. v. 247, p. 93–102, 2012. Citado na página 36.
- MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame structures. **Philosophical Magazine**, 1904. v. 6, n. 8, p. 589–597, 1904. Citado na página 21.
- MIDHA, A.; NORTON, T. W.; HOWELL, L. L. On the nomenclature and classification of compliant mechanisms: Abstraction of mechanisms and mechanism synthesis problems, flexible mechanisms, dynamics and analysis. In: **ASME 1992 DESIGN TECHNICAL CONFERENCES, 22ND BIENNIAL MECHANISMS CONFERENCES**. [S.l.: s.n.], 1992. p. 13–16. Citado na página 34.
- MOLTER, A. et al. Simultaneous piezoelectric actuator and sensor placement optimization and control design of manipulators with flexible links using sdre method. **Mathematical Problems in Engineering**, 2010. v. 2010, 1 2010. ISSN 1563-5147. [Http://www.odysci.com/article/1010113017475843](http://www.odysci.com/article/1010113017475843). Disponível em: [<http://www.hindawi.com/journals/mpe/2010/362437/>](http://www.hindawi.com/journals/mpe/2010/362437/). Citado na página 22.
- NAKASONE, P. H.; SILVA, E. C. Dynamic design of piezoelectric laminated sensors and actuators using topology optimization. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2010. v. 21, p. 1627–1652, 2010. Citado na página 22.
- NISHIWAKI, S. et al. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998. v. 42, p. 535–559, 1998. Citado na página 35.
- PARÍS, J. et al. Una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión en optimización topológica de estructuras. **Revista Internacional de Métodos numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, 2010. v. 28, n. 1, p. 33–48, 2010. Citado na página 26.
- PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2004. v. 26, p. 50–56, 2004. Citado na página 26.
- PETERSON, J.; SIGMUND, O. Slope constrained topology optimization. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, 1998. v. 41, p. 1171–1194, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 49.
- POULSEN, T. A. A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2002. v. 24, p. 396–399, 2002. Citado na página 35.

- ROZVANY, G. I. N.; ADIDAM, S. Rectangular grillage of least weight. **J. Eng. Mch. ASCE**, 1972. v. 98, p. 1337–1352, 1972. Citado na página 21.
- ROZVANY, G. I. N.; SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. Generalized shape optimization without homogenization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 1992. v. 4, p. 250–252, 1992. Citado na página 22.
- ROZVANY, G. I. N.; SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. New optimality criteria methods: forcing uniqueness of the adjoint strains by cornerrounding at constraint intersections. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 1992. v. 4, p. 244–246, 1992. Citado na página 27.
- RUBIO, W. M.; NISHIWAKI, S.; SILVA, E. C. N. Design of compliant mechanisms considering thermal effect compensation and topology optimization. **Finite Element in Analysis and Design**, 2010. v. 46, p. 1049–1060, 2010. Citado na página 22.
- SIGMUND, O. **Design of Material Structures Using Topology Optimization**. Tese (PhD) — Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, Denmark, 1994. Citado na página 22.
- SIGMUND, O. Some inverse problem in topology design of materials and mechanisms. In: **PROCEEDINGS OF IUTAM SYMPOSIUM ON OPTIMIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS**. [S.l.: s.n.], 1995. p. 26–31. Citado na página 35.
- SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Mechanics of Structures and Machines**, 1997. v. 25, p. 495–526, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 35.
- SIGMUND, O. Topology synthesis of two phase compliant actuator. In: **PROCEEDINGS OF THE ASME DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 12–15. Citado na página 35.
- SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2007. v. 33, p. 401–424, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 22, 28 e 29.
- SILVA, E. C. N. et al. Optimization methods applied to material and flextensional actuator design using the homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1999. v. 172, p. 241–271, 1999. Citado na página 22.
- SILVA, M. C. **Aplicação do Método da Otimização Topológica para o Projeto de Mecanismos Flexíveis menos suscetíveis à ocorrência de dobradiças**. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2007. Citado na página 36.
- SVANBERG, K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 1987. v. 24, p. 359–373, 1987. Citado na página 48.
- VASCONCELOS, F. M.; MELLO, L. A. M.; SILVA, E. C. N. Design os spark plasma sintering graphite die using topology optimization. In: DVORKIN MARCELA GOLDSCHMIT, M. S. E. (Ed.). **Mecânica Computacional**. [S.l.: s.n.], 2010. XXIX, p. 8411–8420. Citado na página 22.

- WANG, F.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2011. v. 43, p. 767–784, 2011. Citado na página 36.
- WUJEK, B. A.; RENAUD, J. E. New adaptative move-limit management strategy for approximate optimization. **AIAA Journal**, 1998. v. 36, n. 10, p. 1922–1934, 1998. Citado na página 49.
- YANG, R. J.; J., C. C. Stress-based topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 1996. v. 12, p. 98–105, 1996. Citado na página 26.
- YOON, G. H. et al. Hinge-free topology optimization with embedded translation-invariant differentiable wavelet shrinkage. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2004. v. 27, p. 139–150, 2004. Citado na página 36.
- ZHU, B.; ZHANG, X. A new level set method for topology optimization of distributed compliant mechanisms. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, 2012. v. 91, p. 843–871, 2012. Citado na página 36.
- ZIENKIEWICZ, O.; ZHU, J. Superconvergence and the superconvergent patch recovery. **Finite Elements in Analysis & Design**, 1995. v. 19, n. 1, p. 11–23, 1995. Citado na página 39.