

Este trabalho aborda o uso da otimização topológica de estruturas contínuas sob incertezas nas propriedades do material associadas à rigidez. Dois problemas são analisados: o problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume e o problema de minimização de volume com restrição local de tensão.

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso

Joinville, 2016

ANO  
2016

GUSTAVO ASSIS DA SILVA | OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS  
CONTÍNUAS CONSIDERANDO INCERTEZAS



**UDESC**

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE  
ESTRUTURAS CONTÍNUAS  
CONSIDERANDO INCERTEZAS**

GUSTAVO ASSIS DA SILVA

JOINVILLE, 2016

**GUSTAVO ASSIS DA SILVA**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS  
CONSIDERANDO INCERTEZAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso

**JOINVILLE, SC  
2016**

S586o Silva, Gustavo Assis da  
Otimização topológica de estruturas contínuas considerando incertezas / Gustavo Assis da Silva. - 2016.  
143 p. : il. ; 21 cm

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso

Bibliografia: p. 137-143

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2016.

1. Otimização topológica. 2. Incertezas. 3. Campo aleatório. 4. Restrição de tensão. 5. Lagrangiano aumentado. I. Cardoso, Eduardo Lenz. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD 620.1 – 23.ed.

**GUSTAVO ASSIS DA SILVA**  
**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS CONTÍNUAS**  
**CONSIDERANDO INCERTEZAS**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de concentração “Modelagem e Simulação Numérica”

**Banca Examinadora**

Orientador:



\_\_\_\_\_  
Prof Dr Eduardo Lenz Cardoso  
CCT/UDESC

**Membros**



\_\_\_\_\_  
Prof Dr Pablo Andrés Muñoz Rojas  
CCT/UDESC



\_\_\_\_\_  
Prof Dr Rafael Holdorf Lopez  
UFSC

**Joinville, SC, 22 de fevereiro de 2016.**



## AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer ao professor Eduardo Lenz Cardoso, por depositar confiança no meu trabalho, me apoiar e me incentivar constantemente. Agradeço por sua paciência, principalmente durante os anos em que trabalhamos juntos na minha graduação, e também pelas diversas conversas e discussões, que ajudaram tanto no desenvolvimento deste trabalho quanto no meu desenvolvimento pessoal.

Gostaria de agradecer aos professores Pablo Andrés Muñoz Rojas e Rafael Holdorf Lopez pelas importantes contribuições dadas para o desenvolvimento deste trabalho, por participarem do meu exame de qualificação e por aceitarem participar da minha banca examinadora de defesa.

Agradeço aos meus colegas do departamento, em especial ao colega Bruno Guilherme Christoff pelas diversas trocas de ideias.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais que sempre me apoiaram em todas as minhas decisões e que sempre incentivaram os meus estudos.

Agradeço à minha namorada Tássia Luize Soares por todo o apoio e incentivo prestados, em todos os momentos, durante todos os anos em que estivemos juntos. Agradeço por acreditar em mim até no momento em que eu deixei de acreditar. Agradeço por todos os momentos que passamos juntos.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos os professores da UDESC que contribuíram para a minha formação e a CAPES pelo apoio financeiro.



## RESUMO

Este trabalho aborda o uso da otimização topológica de estruturas contínuas sob incertezas nas propriedades do material associadas à rigidez. O método de perturbação é utilizado para a quantificação de incertezas e o método do ponto médio é utilizado para a discretização do campo aleatório, onde uma abordagem de desacoplamento é utilizada para reduzir o custo computacional. O método dos elementos finitos é utilizado para a discretização do domínio e o modelo SIMP é utilizado na parametrização material. Dois problemas são analisados: o problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume e o problema de minimização de volume com restrição local de tensão. O primeiro problema é solucionado utilizando-se um método de critério de ótimo e o segundo problema utilizando-se o método do Lagrangiano aumentado juntamente com um método de minimização baseado em gradiente proposto neste trabalho. Considerando-se o problema com restrição local de tensão, utilizou-se a relaxação qp para evitar o fenômeno de singularidade. Embora esta abordagem possa ser utilizada considerando-se incerteza em qualquer propriedade do material associada à rigidez, os exemplos ilustrados no trabalho apresentam incerteza apenas no módulo de elasticidade. Diferentes tamanhos de correlação são considerados de forma a verificar a sua influência na topologia ótima. Verifica-se que a topologia obtida, em ambos os problemas apresentados, torna-se mais distinta da topologia determinística com a redução do tamanho de correlação.

**Palavras-chave:** Otimização topológica. Incertezas. Campo aleatório. Restrição de tensão. Lagrangiano aumentado.





## ABSTRACT

This work addresses the use of the topology optimization of continuum structures under uncertainties in material properties associated to stiffness. The perturbation approach is used to perform the uncertainties quantification and the midpoint method is used for the random field discretization, where a decorrelation technique is used to reduce the computational effort. The finite element method is used for the domain discretization and the SIMP approach is used as material parameterization. Two problems are analyzed: the compliance minimization with volume constraint and the volume minimization with local stress constraints. The first problem is solved by using a optimality criteria method and the second problem by using the augmented Lagrangian method with a gradient based minimization method proposed in this work. The qp approach is used to avoid the singularity phenomenon in the problem with local stress constraints. Although this approach can be used considering uncertainty in any material property associated to stiffness, the examples in this work show uncertainty only in Young's modulus. Different correlation lengths are considered to verify its influence in the optimum topologies. It is shown that the optimum topology, in both problems analyzed, becomes more distinct from the deterministic topology when the correlation length is reduced.

**Key-words:** Topology optimization. Uncertainties. Random field. Stress constraint. Augmented Lagrangian.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Problema de otimização topológica: a) Domínio e condições de contorno; b) Solução do problema determinístico; e c) Solução do problema estocástico. . . . .	26
Figura 2 – Classes de otimização estrutural: a) Otimização paramétrica; b) Otimização de forma; e c) Otimização topológica. . . . .	33
Figura 3 – Problema genérico de distribuição de material isotrópico por meio da otimização topológica. . . . .	35
Figura 4 – Problema utilizado para a demonstração da dependência da malha e da instabilidade de tabuleiro. . . . .	41
Figura 5 – Dependência da malha no problema de minimização de flexibilidade da Figura 4. Solução para uma discretização de: a) 300; b) 1200; c) 4800; e d) 19200 elementos. . . . .	42
Figura 6 – Instabilidade de tabuleiro no problema de minimização de flexibilidade da Figura 4. Solução para uma discretização de: a) 300; b) 1200; c) 4800; e d) 19200 elementos. . . . .	43
Figura 7 – Aplicação de filtro de vizinhança espacial de densidade no problema de minimização de flexibilidade da Figura 4. Solução para uma discretização de: a) 300; b) 1200; c) 4800; e d) 19200 elementos. . . . .	45
Figura 8 – Obtenção da direção de busca. . . . .	51
Figura 9 – Classificação dos métodos probabilísticos de propagação de incertezas. . . . .	56
Figura 10 – Barra fixa sujeita a força determinística na extremidade. . . . .	79
Figura 11 – Funções de densidade de probabilidade Gaussiana e Gaussiana truncada de forma simétrica em $-1 < \alpha < 1$ . . . . .	81
Figura 12 – Valores esperados $E[U(\alpha)]$ para diferentes desvios padrão $Std[\alpha]$ , considerando aproximações de segunda e décima ordem e simulações de Monte Carlo com $-0.99 < \alpha < 1.99$ e $-0.9 < \alpha < 1.9$ . . . . .	86
Figura 13 – Desvios padrão $Std[U(\alpha)]$ para diferentes desvios padrão $Std[\alpha]$ , considerando aproximações de segunda e décima ordem e simulações de Monte Carlo com $-0.99 < \alpha < 1.99$ e $-0.9 < \alpha < 1.9$ . . . . .	87
Figura 14 – Funções de densidade de probabilidade da variável aleatória $\alpha$ considerando $Std[\alpha] = 0.1, 0.2$ e $0.3$ , respectivamente, no intervalo $-0.99 \leq x \leq 0.99$ . . . . .	90

Figura 15 – Funções de densidade de probabilidade do deslocamento $U(\alpha)$ considerando $Std[\alpha] = 0.1, 0.2$ e $0.3$ , respectivamente, no intervalo $\frac{1}{1.99} \leq y \leq 3$ . . . . .	91
Figura 16 – Domínios e condições de contorno dos casos estudados.	118
Figura 17 – Realizações da distribuição espacial do módulo de elasticidade considerando os comprimentos de correlação de $0.4m$ e $1.0m$ . . . . .	119
Figura 18 – Topologias robustas obtidas considerando-se diferentes tamanhos de correlação para os três casos ilustrados na Figura 16. . . . .	121
Figura 19 – Topologias obtidas para o caso 3, considerando diferentes tamanhos de correlação e diferentes valores de $\gamma$ . . . . .	123
Figura 20 – Domínio em L e condições de contorno. . . . .	125
Figura 21 – Resultados determinísticos considerando o problema de minimização de volume com restrição de tensão. . . . .	127
Figura 22 – Topologias, domínio em L, considerando o problema de minimização de volume com restrição de tensão: (a) (PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004); (b) (LE et al., 2010) e (c) (FARIAS; CARDOSO; MUNOZ-ROJAS, 2011). As topologias são apenas ilustrativas, pois os carregamentos são distintos. . . . .	128
Figura 23 – Campos de densidades obtidos por meio da abordagem robusta considerando o problema de minimização de volume com restrição de tensão. . . . .	129
Figura 24 – Campos de tensões equivalentes de von Mises das topologias mostradas na Figura 23. . . . .	130
Figura 25 – Campos de densidades, tensões equivalentes de von Mises e probabilidades de falha calculadas com a MCS considerando $\beta = 0$ e $\beta = 3$ para $a = 0.025m$ . . . . .	132

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Modos dominantes necessários para obter uma tolerância igual a $\varepsilon = 0.0001$ na Eq. (4.70), para $N = 4000$ .	119
Tabela 2	– Valor esperado e desvio padrão da flexibilidade para a estrutura robusta do caso 1, Figura 18.	120
Tabela 3	– Valor esperado e desvio padrão da flexibilidade para a estrutura robusta do caso 2, Figura 18.	121
Tabela 4	– Valor esperado e desvio padrão da flexibilidade para a estrutura robusta do caso 3, Figura 18.	122
Tabela 5	– Valor esperado da flexibilidade para as estruturas do caso 3, Figura 19.	123
Tabela 6	– Desvio padrão da flexibilidade para as estruturas do caso 3, Figura 19.	124
Tabela 7	– Modos dominantes necessários para obter uma tolerância igual a $\varepsilon = 0.0001$ na Eq. (4.70), para $N = 6400$ .	128
Tabela 8	– Máxima probabilidade de falha para diferentes valores de $\beta$ .	131



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

RDO	Otimização Estrutural Robusta
RBDO	Otimização Estrutural Baseada em Confiabilidade
RTO	Otimização Topológica Robusta
RBTO	Otimização Topológica Baseada em Confiabilidade
FEM	Método dos Elementos Finitos
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
DFP	Davidon-Fletcher-Powell
BFGS	Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno
OC	Critério de Ótimo
FORM	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem
SORM	Método de Confiabilidade de Segunda Ordem
MCS	Simulação de Monte Carlo
MP	Ponto Médio
SA	Média Espacial
SF	Funções de Forma
OLE	Estimativa Linear Ótima
KL	Karhunen-Loève
OSE	Expansão em Séries Ortogonais
EOLE	Expansão Estimativa Linear Ótima





## LISTA DE SÍMBOLOS

$f_{obj}$	Função objetivo
$\mathbf{z}$	Vetor de variáveis de projeto
$N_v$	Número de variáveis de projeto
$g_{des}^{(i)}$	$i$ -ésima restrição de desigualdade
$N_g$	Número de restrições de desigualdade
$h_{ig}^{(i)}$	$i$ -ésima restrição de igualdade
$N_h$	Número de restrições de igualdade
$\underline{z}_i$	$i$ -ésima restrição lateral inferior
$\bar{z}_i$	$i$ -ésima restrição lateral superior
$\Omega$	Domínio fixo de referência para a otimização topológica
$d$	Dimensão do domínio $\Omega$
$\Omega^m$	Domínio sólido em $\Omega$
$\Omega \setminus \Omega^m$	Domínio vazio em $\Omega$
$\mathbf{C}$	Tensor constitutivo do material
$\mathbf{t}$	Sistema de coordenadas
$\mathbf{C}^b$	Tensor constitutivo do material base
$\chi$	Parametrização discreta
$p$	Expoente parametrização SIMP
$\rho$	Parametrização contínua
$V$	Volume
$\mathbf{C}_e$	Tensor constitutivo do elemento $e$
$\rho_e$	Pseudo densidade do elemento $e$
$\mathbf{C}_e^b$	Tensor constitutivo do material base no centroide do elemento $e$

$f$	Flexibilidade do problema determinístico
$\rho$	Vetor de pseudo densidades
$\mathbf{F}$	Vetor de forças externas
$\mathbf{U}$	Vetor de deslocamentos
$V_{max}$	Restrição de volume
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global
$\rho_{min}$	Pseudo densidade mínima
$N_e$	Número de elementos da malha de elementos finitos
$\mathbf{k}_e$	Matriz de rigidez local do elemento $e$
$\Omega_e$	Domínio do elemento $e$
$\mathbf{B}_e$	Operador deformação-deslocamento do elemento $e$
$\mathbf{k}_e^b$	Matriz de rigidez local do elemento $e$ considerando o material base
$V_e$	Volume do elemento $e$
$\zeta$	Limite móvel
$\eta$	Coefficiente de amortecimento numérico
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange
$\boldsymbol{\lambda}$	Vetor adjunto
$\mathbf{u}_m$	Vetor de deslocamentos local do elemento $m$
$\vartheta_e$	Vizinhança do elemento $e$
$R$	Raio da vizinhança
$\mathbf{t}_i$	Coordenadas do centroide do elemento $i$
$w$	Função de decaimento linear
$\mathbf{D}$	Direção de busca (máxima descida)
$\tilde{\mathbf{D}}$	Direção de busca filtrada

$D_e$	Componente da direção de busca associada ao elemento $e$
$\tilde{D}_e$	Componente da direção de busca filtrada associada ao elemento $e$
$\tilde{\rho}_e$	Pseudo densidade filtrada do elemento $e$
$\tilde{\rho}$	Vetor de pseudo densidades filtradas
$\sigma_{eq}^{(k)}$	Tensão equivalente de von Mises no ponto $k$
$\sigma_y$	Restrição de tensão
$N_k$	Número de restrições de tensão
$\mathbf{M}$	Matriz auxiliar para o cálculo da tensão equivalente de von Mises
$\sigma_k$	Tensão no ponto $k$
$q$	Fator utilizado na interpolação da tensão
$\epsilon$	Fator de relaxação de tensão
$L$	Função do Lagrangiano aumentado do problema de tensão determinístico
$\mu$	Vetor de multiplicadores de Lagrange
$r$	Fator de penalização
$\mu_k$	Multiplicador de Lagrange da $k$ -ésima restrição de tensão
$c$	$c$ -ésimo subproblema de otimização
$\delta$	Escalar utilizado para atualizar o fator $r$
$v$	Parcela de $\mathbf{D}$ na região viável
$\mathbf{D}_{nova}$	Nova direção de busca
$\mathbf{bc}$	Restrição lateral
$\mathbf{H}_k$	Operador de localização que mapeia o vetor local $\mathbf{u}_k$ de $\mathbf{U}$
$\lambda_m$	Vetor adjunto local do elemento $m$

$\mathbf{X}$	Vetor aleatório
$\mathbf{Y}$	Resposta aleatória
$X$	Variável aleatória
$\Psi$	Espaço amostral
$A$	Evento
$P()$	Probabilidade
$F_X$	Função de distribuição cumulativa de $X$
$f_X$	Função de densidade de probabilidade de $X$
$E()$	Valor esperado
$m_k$	$k$ -ésimo momento de uma variável aleatória
$\bar{m}_k$	$k$ -ésimo momento central de uma variável aleatória
$Var()$	Variância
$Std()$	Desvio padrão
$X_i$	$i$ -ésima variável do vetor $\mathbf{X}$
$N$	Número de variáveis aleatórias
$F_{\mathbf{X}}$	Função de distribuição cumulativa multi variável de $\mathbf{X}$
$f_{\mathbf{X}}$	Função de densidade de probabilidade multi variável de $\mathbf{X}$
$f_{X_i}$	Função de densidade de probabilidade marginal de $X_i$
$f_{X_i X_j}$	Função de densidade de probabilidade marginal multi variável de $X_i$ e $X_j$
$m_{kr}$	$(k + r)$ -ésimo momento de duas variáveis aleatórias
$\bar{m}_{kr}$	$(k + r)$ -ésimo momento central de duas variáveis aleatórias
$Cov()$	Covariância
$\mu_{ij}$	Coefficiente de correlação

$\mathbf{S}$	Matriz de covariâncias
$H$	Campo aleatório real e escalar
$\mu$	Função de correlação
$\mu_A$	Modelo de correlação exponencial
$\mu_B$	Modelo de correlação exponencial ao quadrado
$\mu_C$	Modelo de correlação seno cardeal
$a$	Tamanho de correlação
$l$	Tamanho do elemento do campo aleatório
$\alpha$	Variável aleatória com média zero
$\boldsymbol{\alpha}$	Vetor aleatório com média zero
$\alpha_i$	$i$ -ésima variável do vetor $\boldsymbol{\alpha}$
$()^0$	Coefficiente de ordem zero (determinístico)
$()^I_i$	Derivada em relação à variável aleatória $i$
$()^{II}_{ij}$	Derivada cruzada em relação às variáveis aleatórias $i$ e $j$
$S_{ij}$	Covariância entre as variáveis aleatórias $i$ e $j$
$\mathbf{c}$	Vetor aleatório de variáveis não correlacionadas
$\Theta$	Matriz diagonal com os autovalores de $\mathbf{S}$
$\Phi$	Matriz com os autovetores de $\mathbf{S}$
$c_i$	$i$ -ésima variável do vetor $\mathbf{c}$
$()^{\tilde{I}}_i$	Derivada em relação à variável aleatória não correlacionada $i$
$()^{\tilde{II}}_{ii}$	Derivada segunda em relação à variável aleatória não correlacionada $i$
$\Theta_{ii}$	Componente $ii$ de $\Theta$
$\Phi_{ji}$	Componente $ji$ de $\Phi$

$\tilde{N}$	Número de modos dominantes
$tr()$	Operador traço
$\varepsilon$	Tolerância referente aos modos dominantes
$E$	Módulo de elasticidade
$L_b$	Comprimento da barra
$A_b$	Área da seção transversal da barra
$F_b$	Força aplicada na barra
$U$	Deslocamento no ponto de aplicação da força na barra
$\sigma$	Desvio padrão da distribuição Gaussiana
$E_{MCS}()$	Valor esperado obtido com a MCS
$Var_{MCS}()$	Variância obtida com a MCS
$Std_{MCS}()$	Desvio padrão obtido com a MCS
$N_m$	Número de variáveis aleatórias na MCS
$N_t$	Número de termos da expansão em série de Taylor
$P_f^{max}$	Probabilidade de falha permitida
$\gamma_E$	Coefficiente de ponderação do valor esperado
$\gamma_S$	Coefficiente de ponderação do desvio padrão
$\beta$	Coefficiente de ponderação do desvio padrão da restrição
$\hat{f}$	Função objetivo do problema robusto de flexibilidade
$\lambda_i$	$i$ -ésimo vetor adjunto de primeira ordem
$\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}$	Tensão equivalente de von Mises do problema estocástico no ponto $k$
$\hat{L}$	Função do Lagrangiano aumentado do problema de tensão estocástico

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>OTIMIZAÇÃO</b>	<b>29</b>
2.1	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	32
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA</b>	<b>35</b>
3.1	MINIMIZAÇÃO DE FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME	37
3.1.1	<b>Definição do problema</b>	<b>37</b>
3.1.2	<b>Procedimento de solução</b>	<b>38</b>
3.1.3	<b>Análise de sensibilidades</b>	<b>39</b>
3.2	DIFICULDADES ASSOCIADAS	40
3.2.1	<b>Dependência da malha</b>	<b>40</b>
3.2.2	<b>Instabilidade de tabuleiro</b>	<b>41</b>
3.3	MÉTODOS DE RESTRIÇÃO DO ESPAÇO DE SOLUÇÃO	42
3.3.1	<b>Filtros de vizinhança espacial</b>	<b>43</b>
3.3.1.1	Filtro de vizinhança espacial de gradiente	44
3.3.1.2	Filtro de vizinhança espacial de densidades	46
3.4	MINIMIZAÇÃO DE VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO	47
3.4.1	<b>Definição do problema</b>	<b>47</b>
3.4.2	<b>Procedimento de solução</b>	<b>50</b>
3.4.3	<b>Análise de sensibilidades</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>INCERTEZAS</b>	<b>55</b>
4.1	CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE	58
4.1.1	<b>Variável aleatória</b>	<b>58</b>
4.1.2	<b>Vetor aleatório</b>	<b>60</b>
4.1.3	<b>Funções de densidade de probabilidade normais</b>	<b>62</b>
4.2	CAMPOS ALEATÓRIOS	63
4.2.1	<b>Modelos de autocorrelação homogêneos</b>	<b>64</b>
4.2.2	<b>Métodos de discretização de campos aleatórios</b>	<b>65</b>
4.3	MÉTODO DA PERTURBAÇÃO PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS	67
4.3.1	<b>Campo de deslocamentos</b>	<b>67</b>
4.3.2	<b>Técnica de desacoplamento de variáveis aleatórias</b>	<b>72</b>
4.3.3	<b>Campo de tensões</b>	<b>74</b>



4.3.4	<b>Campo de tensões considerando incerteza no módulo de elasticidade e grandes tamanhos de correlação . . . . .</b>	<b>77</b>
4.3.5	<b>Estudo da validade do método da perturbação . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>5</b>	<b>OTIMIZAÇÃO CONSIDERANDO INCERTEZAS . . . . .</b>	<b>93</b>
5.1	OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE . . . . .	93
5.2	OTIMIZAÇÃO ROBUSTA . . . . .	94
<b>6</b>	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO INCERTEZAS . . . . .</b>	<b>97</b>
6.1	MINIMIZAÇÃO DE FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME . . . . .	98
6.1.1	<b>Definição do problema . . . . .</b>	<b>98</b>
6.1.2	<b>Análise de sensibilidades . . . . .</b>	<b>99</b>
6.1.3	<b>Análise de sensibilidades considerando incerteza no módulo de elasticidade e grandes tamanhos de correlação . . . . .</b>	<b>105</b>
6.2	MINIMIZAÇÃO DE VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO . . . . .	107
6.2.1	<b>Definição do problema . . . . .</b>	<b>107</b>
6.2.2	<b>Análise de sensibilidades . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>7</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>117</b>
7.1	PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME . . . . .	118
7.1.1	<b>Minimização do desvio padrão da flexibilidade . . . . .</b>	<b>120</b>
7.1.2	<b>Influência dos coeficientes de ponderação no procedimento de otimização . . . . .</b>	<b>122</b>
7.2	PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO . . . . .	124
7.2.1	<b>Resultados do problema determinístico . . . . .</b>	<b>126</b>
7.2.2	<b>Resultados do problema estocástico . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>133</b>
8.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	134
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>137</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A otimização topológica é um método geral utilizado na resolução de problemas físicos de otimização. Este método permite o projeto de estruturas de alto desempenho e tem sido alvo de intensas pesquisas nas últimas décadas (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Esta abordagem lida com a distribuição de material em um domínio de projeto pré-determinado.

A maioria dos problemas de otimização topológica de estruturas contínuas são estudados na literatura considerando uma abordagem determinística, em que todos os parâmetros do modelo matemático são totalmente conhecidos. Esta abordagem, se aplicada a problemas reais de engenharia, pode levar a obtenção de estruturas não ótimas ou até mesmo inviáveis, pois muitas vezes os valores exatos de muitos parâmetros são desconhecidos (KLEIBER; HIEN, 1992), de forma que uma análise determinística, considerando parâmetros estimados, poderia levar a uma representação incorreta da realidade (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

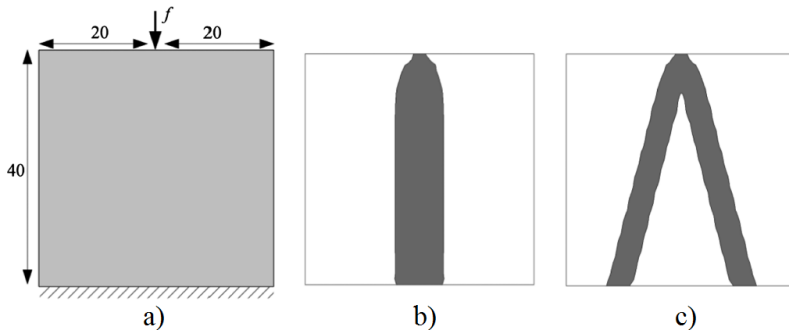
A otimização considerando incertezas tem sido alvo de intensas pesquisas nos últimos anos para um aprimoramento e desenvolvimento de métodos na obtenção de soluções robustas e confiáveis (BEYER; SENDHOFF, 2007). Uma solução robusta, por definição, possui um desempenho que apresenta pouca variação na presença de incertezas (BEYER; SENDHOFF, 2007), enquanto uma solução confiável apresenta uma pequena probabilidade de falha na presença de incertezas (AGARWAL, 2004). São conceitos distintos que são normalmente tratados de forma separada na literatura (BEYER; SENDHOFF, 2007). Dentro da engenharia estrutural, as principais técnicas utilizadas para obter soluções ótimas na presença de incertezas são a otimização estrutural robusta (BEYER; SENDHOFF, 2007) (RDO - *Robust Design Optimization*) e a otimização estrutural baseada em confiabilidade (AGARWAL, 2004) (RBDO - *Reliability-Based Design Optimization*). A abordagem RBDO é utilizada na obtenção de estruturas confiáveis por meio da restrição de uma medida de probabilidade de falha. Por outro lado a abordagem RDO é frequentemente utilizada para a obtenção de estruturas robustas por meio da extremização do desvio padrão ou da variância da medida de desempenho.

Quando as abordagens RBDO e RDO são aplicadas no âmbito da otimização topológica, os problemas são frequentemente denominados de otimização topológica baseada em confiabilidade (RBTO - *Reliability-Based Topology Optimization*) e otimização topológica robusta (RTO - *Robust Topology Optimization*), respectivamente. A otimização topoló-

gica de estruturas contínuas considerando incertezas tem sido muito estudada nos últimos anos devido a sua importância em problemas reais de engenharia.

A Figura 1 mostra duas soluções para um problema de otimização topológica. A primeira delas consiste na solução tradicional determinística, em que todos os parâmetros são completamente conhecidos *a priori*. A segunda solução foi obtida considerando-se uma incerteza no ângulo de aplicação da força concentrada, que idealmente é perfeitamente vertical. Quando a incerteza no ângulo da força concentrada é considerada, a solução determinística, representada por uma coluna vertical, deixa de ser a solução ótima do problema de otimização topológica. A solução ótima, neste caso, é uma topologia com duas colunas inclinadas.

Figura 1 – Problema de otimização topológica: a) Domínio e condições de contorno; b) Solução do problema determinístico; e c) Solução do problema estocástico.



Fonte: (DUNNING; KIM; MULLINEUX, 2011).

A Figura 1 mostra a importância da consideração de incertezas em um problema de otimização topológica. Em alguns casos, como neste ilustrado na Figura 1, retirada do trabalho de Dunning, Kim e Mullineux (2011), a topologia obtida com a abordagem determinística é apenas uma solução não ótima. Em outros casos, como é mostrado neste trabalho, a topologia obtida com a abordagem determinística apresenta uma probabilidade de falha muito superior à probabilidade de falha da topologia obtida com a abordagem estocástica, sendo muitas vezes uma solução inviável.

O objetivo deste trabalho consiste no estudo da otimização topológica de estruturas contínuas considerando incertezas nos parâmetros do modelo matemático. Tanto o problema de minimização de flexibilidade

---

com restrição de volume quanto o de minimização de volume com restrição de tensão são apresentados considerando a abordagem RTO e são estudados considerando incertezas nas propriedades do material associadas à rigidez.

O método dos elementos finitos (BATHE, 1996) (FEM - *Finite Element Method*) é utilizado para a discretização do problema e o modelo SIMP (BENDSØE; SIGMUND, 1999) (*Solid Isotropic Material with Penalization*) padrão é utilizado para a parametrização material. As incertezas são representadas por campos aleatórios Gaussianos, que são discretizados por meio do método do ponto médio (KIUREGHIAN; KE, 1988). Para a propagação de incertezas o método da perturbação é utilizado (KLEIBER; HIEN, 1992) junto a estratégia de desacoplamento proposta em Liu, Belytschko e Mani (1986b). Os problemas de minimização de flexibilidade com restrição de volume são solucionados com o método padrão de critério de ótimo (BENDSØE; SIGMUND, 2003), enquanto os problemas de minimização de volume com restrição de tensão são solucionados com um algoritmo de Lagrangiano aumentado (MARTÍNEZ, 2009). As análises de sensibilidades são realizadas analiticamente.



## 2 OTIMIZAÇÃO

Otimizar é o ato de obter o valor extremo de um funcional (medida de desempenho), enquanto um conjunto de restrições é satisfeito (ARORA, 2012; RAO, 2009). Um problema de otimização pode ser representado como

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f_{obj}(\mathbf{z}) = f_{obj}(z_1, z_2, \dots, z_{N_v}) \\
 \text{T.q.} \quad & g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_g \\
 & h_{ig}^{(i)}(\mathbf{z}) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_h \\
 & \underline{z}_i \leq z_i \leq \overline{z}_i; \quad i = 1, 2, \dots, N_v
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $f_{obj}(\mathbf{z})$  é denominada de função objetivo,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{N_v}$  é o vetor que contém as variáveis de projeto  $z_1, z_2, \dots, z_{N_v}$ ,  $N_v$  é o número de variáveis de projeto,  $g_{des}^{(i)}(\mathbf{z})$  é a  $i$ -ésima restrição de desigualdade,  $N_g$  é o número de restrições de desigualdade,  $h_{ig}^{(i)}(\mathbf{z})$  é a  $i$ -ésima restrição de igualdade,  $N_h$  é o número de restrições de igualdade e  $\underline{z}_i$  e  $\overline{z}_i$  são as  $i$ -ésimas restrições laterais inferiores e superiores, respectivamente.

As variáveis de projeto  $\mathbf{z}$  são as variáveis que podem ser modificadas para a extremização (neste caso minimização) da função objetivo  $f(\mathbf{z})$  no domínio criado pelas restrições de desigualdade  $g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}) \leq 0$ , de igualdade  $h_{ig}^{(i)}(\mathbf{z}) = 0$  e laterais  $\underline{z}_i \leq z_i \leq \overline{z}_i$ .

Três abordagens podem ser utilizadas para solucionar um problema genérico de otimização: a abordagem gráfica, a abordagem analítica e a abordagem numérica (ARORA, 2012). As abordagens gráfica e analítica podem ser utilizadas na solução de alguns problemas específicos de otimização, em que a função objetivo e as restrições podem ser obtidas explicitamente em relação às variáveis de projeto. Na abordagem gráfica, além da necessidade desta relação explícita, existe a limitação na quantidade de variáveis de projeto, que deve ser menor que três. Em problemas onde esta relação explícita não pode ser obtida (quando o cálculo da função objetivo depende da resposta de uma estrutura, que por sua vez depende de uma análise de elementos finitos, por exemplo), ou é dificilmente obtida, métodos numéricos podem ser utilizados.

Existem vários métodos numéricos disponíveis na literatura que podem ser utilizados para solucionar um problema de otimização. Algoritmos de otimização são geralmente iterativos (LOPEZ; BECK, 2013), começando com uma estimativa inicial das variáveis de projeto e gerando uma seqüência de estimativas melhoradas até a obtenção da solução do problema. A estratégia utilizada para o aprimoramento da estimativa de-

termina o tipo de algoritmo utilizado. Alguns métodos funcionam somente com os valores da função objetivo e das restrições, chamados de métodos de ordem zero, enquanto outros métodos utilizam informações de gradiente (ordem um) e de hessiana (ordem dois) (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Independentemente destas especificações, três critérios podem ser utilizados para a comparação de algoritmos de otimização (NOCEDAL; WRIGHT, 1999):

- Robustez. O algoritmo deve funcionar bem para uma ampla variedade de problemas e para uma ampla variedade de estimativas iniciais;
- Eficiência. O número de chamadas da função objetivo deve ser baixo;
- Acurácia. O algoritmo deve ser pouco sensível a erros numéricos, que ocorrem nas implementações computacionais;

Estes critérios estão geralmente em conflito. Atualmente, não existe um método de otimização que seja extremamente eficiente e que funcione para qualquer tipo de problema. O que é feito na prática é a escolha de um algoritmo que seja adequado para a resolução do problema em estudo.

Várias classificações são feitas na literatura em relação aos métodos numéricos de otimização. Eles são normalmente divididos entre métodos globais ou locais, métodos para a otimização restrita ou irrestrita e métodos que necessitam ou não de informações de ordem superior (gradiente e hessiana) (RAO, 2009). Em geral, otimizadores que utilizam informações de derivadas, sejam elas de ordem um ou dois, são caracterizados pela obtenção de mínimos locais, enquanto otimizadores que não utilizam estas informações são caracterizados como otimizadores globais (tendo algumas exceções como o método de Powell (POWELL, 1964) e o método Simplex (NELDER; MEAD, 1965), que não utilizam informações de derivadas, mas são suscetíveis a encontrar mínimos locais). Em contrapartida, os métodos que utilizam informações de derivadas são muito mais eficientes quando comparados aos métodos de ordem zero (RAO, 2009). Os métodos de otimização citados a seguir utilizam informações de derivadas e todos eles garantem apenas a obtenção de mínimos locais, se estes existirem.

Como exemplos de métodos utilizados para otimização irrestrita (sem restrições), tem-se:

1. Métodos de ordem um, por exemplo:
  - Método da máxima descida;

- Métodos de gradientes conjugados;
- Métodos Quasi-Newton (DFP e BFGS).

2. Métodos de ordem dois, por exemplo:

- Método de Newton;
- Método de Levenberg-Marquardt.

Como exemplos de métodos utilizados para otimização restrita (com restrições), tem-se:

1. Métodos de ordem um, por exemplo:

- Métodos de critério de ótimo;
- Programação linear sequencial;
- Métodos de penalização;
- Método do Lagrangiano aumentado.

2. Métodos de ordem dois, por exemplo:

- Programação quadrática sequencial.

De uma forma geral, os métodos que utilizam informações da hessiana possuem uma maior eficiência quando comparados aos métodos que utilizam somente informação de gradiente. Porém, quando o número de variáveis de projeto é muito elevado, os métodos de segunda ordem começam a perder em eficiência quando comparados aos métodos de primeira ordem, pois é necessária muita memória para o armazenamento da matriz hessiana (RAO, 2009). Outro ponto que merece destaque é a facilidade de se obter as informações das derivadas necessárias. Geralmente o cálculo das derivadas primeiras é muito mais fácil de ser realizado quando comparado ao cálculo das derivadas segundas. Em outros casos o cálculo das derivadas é muito difícil, ou até mesmo impossível, de forma que a utilização do método das diferenças finitas se torna necessário para a aproximação do gradiente e/ou hessiana (RAO, 2009). Desta forma, deve-se observar com muito cuidado o tipo de problema de otimização que deve ser solucionado, sendo do projetista a responsabilidade de escolha do melhor algoritmo de otimização para o problema em estudo (LOPEZ; BECK, 2013).

Neste trabalho, problemas de otimização de larga escala são estudados. Estes problemas possuem um elevado número de variáveis de projeto e, em alguns casos, um elevado número de restrições. Para solucionar os



problemas de otimização topológica deste trabalho, que são o problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume e o problema de minimização de volume com restrição de tensão, algoritmos de primeira ordem (que utilizam informações de gradiente) são utilizados.

Para solucionar o problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume um algoritmo de critério de ótimo é utilizado (BENDSØe; SIGMUND, 2003). Este algoritmo se mostrou muito eficiente na resolução deste tipo de problema na literatura.

O problema de minimização de volume com restrição de tensão ainda é pouco estudado na literatura, de forma que ainda não existe um consenso de quais são os métodos mais eficientes para tratar este tipo de problema. Para a resolução deste problema um algoritmo de Lagrangiano aumentado é utilizado (MARTÍNEZ, 2009), devido ao elevado número de variáveis de projeto e de restrições.

Ambos os algoritmos são apresentados em detalhes nas seções referentes aos problemas determinísticos discretizados.

## 2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Quando o objetivo e/ou as restrições estão associados a cálculos estruturais o problema é denominado de otimização estrutural, sendo frequentemente dividido em três classes na literatura: paramétrica, de forma e topológica (CHRISTENSEN; KLARBING, 2009)

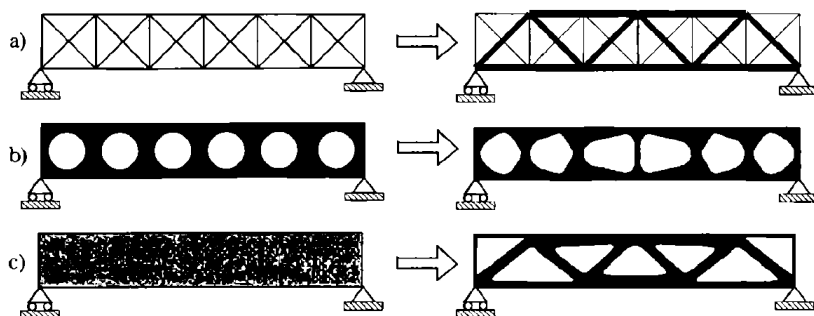
A Figura 2 ilustra as diferentes classes de otimização estrutural descritas na literatura.

Um problema de otimização estrutural é classificado como um problema de otimização paramétrica quando apenas alguns parâmetros geométricos são considerados como variáveis de projeto, como, por exemplo, a espessura de uma placa ou as áreas das seções transversais das barras de uma treliça (CHRISTENSEN; KLARBING, 2009).

Um problema de otimização de forma consiste na obtenção da forma ótima de uma estrutura que possui uma topologia fixa, definida *a priori* pelo projetista (BENDSØe; SIGMUND, 2003).

A otimização topológica é a abordagem mais geral de otimização estrutural (CHRISTENSEN; KLARBING, 2009). Ela consiste na distribuição de material em um domínio previamente definido para a obtenção de uma estrutura com um formato ótimo (BENDSØe; SIGMUND, 2003).

Figura 2 – Classes de otimização estrutural: a) Otimização paramétrica; b) Otimização de forma; e c) Otimização topológica.



Fonte: (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

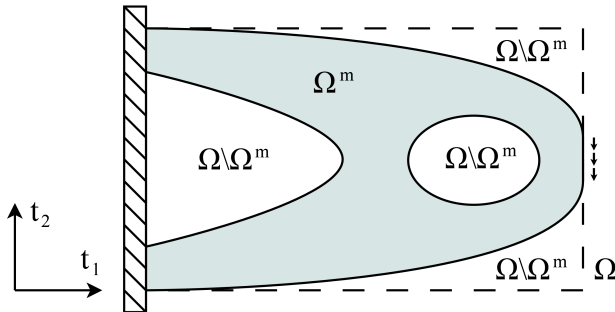


### 3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste trabalho os problemas de otimização topológica de meios contínuos são definidos sobre um domínio fixo de referência  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ , onde  $d = 2$  ou  $3$ . O objetivo de um problema de otimização topológica é encontrar uma distribuição de material que extremize a medida de desempenho selecionada enquanto as restrições consideradas são satisfeitas.

Quando estão sendo considerados materiais isotrópicos, pode-se determinar quais pontos do domínio  $\Omega$  devem ser pontos com material e quais pontos devem permanecer sem material (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Ilustrativamente, na Figura 3, considerando  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , os pontos com material, ou partes sólidas, são representadas por  $\Omega^m$ , e os vazios por  $\Omega \setminus \Omega^m$ .

Figura 3 – Problema genérico de distribuição de material isotrópico por meio da otimização topológica.



Fonte: Produção do próprio autor.

Idealmente, conforme apresentado em Bendsøe e Sigmund (1999), para obter a distribuição ótima de materiais isotrópicos, com sólidos e vazios, em um domínio fixo de referência  $\Omega$  definido *a priori*, pode-se utilizar a parametrização discreta (ou inteira)

$$\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \chi(\mathbf{t})\mathbf{C}^b(\mathbf{t}), \quad (3.1)$$

na parametrização do tensor constitutivo do material  $\mathbf{C}(\mathbf{t})$ , onde  $\mathbf{t} \in \Omega$ ,  $\mathbf{C}^b(\mathbf{t})$  representa o tensor constitutivo do material base e  $\chi(\mathbf{t})$  representa a fração de volume ponto a ponto do material, tal que

$$\chi(\mathbf{t}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{t} \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } \mathbf{t} \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases}. \quad (3.2)$$

Conforme apresentado em Kohn e Strang (1986), a parametrização discreta, Eq. (3.1), quando solucionada por uma aproximação finito dimensional, leva a problemas numéricos associados a não unicidade de solução, além de não permitir o cálculo de derivadas.

Uma forma de evitar o problema de não unicidade de solução consiste em relaxar o espaço de solução modificando a parametrização do tensor constitutivo do material (BENDSØE; SIGMUND, 1999), tal que

$$\mathbf{C}(\mathbf{t}) = (\rho(\mathbf{t}))^p \mathbf{C}^b(\mathbf{t}), \quad 0 \leq \rho(\mathbf{t}) \leq 1, \quad (3.3)$$

onde  $p$  é utilizado para regular o grau de não linearidade da equação e  $\rho(\mathbf{t})$ , denominado de pseudo densidade do ponto  $\mathbf{t}$ , é uma função contínua e diferenciável no intervalo  $[0, 1]$ . Esta abordagem, denominada de SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), modifica o problema original 0-1, de sólidos e vazios, permitindo pontos  $\mathbf{t}$  com tensores constitutivos  $\mathbf{C}(\mathbf{t})$  intermediários entre 0 e  $\mathbf{C}^b(\mathbf{t})$ . Desta forma, verifica-se que o espaço de solução considerando a parametrização contínua SIMP é maior que o espaço de solução do problema original 0-1, além de tornar o problema contínuo (ou seja, permitir o cálculo de derivadas).

Quando  $p = 1$ , tem-se uma relação linear entre o tensor constitutivo  $\mathbf{C}(\mathbf{t})$  e o tensor constitutivo do material base  $\mathbf{C}^b(\mathbf{t})$ , de forma que pseudo densidades  $\rho(\mathbf{t})$  intermediárias tornam-se frequentes na topologia ótima (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Na medida em que se aumenta o valor de  $p$ , menos frequentes tornam-se as pseudo densidades intermediárias, pois os tensores constitutivos  $\mathbf{C}(\mathbf{t})$  referentes a estas pseudo densidades aproximam-se de zero, enquanto o volume  $V = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{t}) d\Omega$  sempre apresenta uma relação linear com o volume do domínio, de forma que as pseudo densidades intermediárias passam a não serem mais preferidas pelo otimizador. No caso limite, quando  $p \rightarrow \infty$ , volta-se à parametrização discreta, pois  $(\rho(\mathbf{t}))^p \rightarrow 0, \forall \rho(\mathbf{t}) \in [0, 1]$ .

Como pseudo densidades intermediárias não são de interesse no resultado do problema de otimização, pode-se utilizar valores  $p > 1$ , tomando cuidado para não utilizar um valor de  $p$  extremamente elevado que leve à parametrização discreta e, conseqüentemente, a um problema mal posto. O que é feito com frequência na literatura para a obtenção de estruturas 0-1 é a abordagem de continuação (SIGMUND, 1994), que consiste na utilização de valores de  $p$  inicialmente baixos que são aumentados no decorrer do procedimento de otimização até um valor máximo definido *a priori*. Neste trabalho, um valor fixo de  $p$  foi utilizado em todo o procedimento de otimização, como também é feito em muitos trabalhos da literatura (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Conforme apresentado

em Bendsøe e Sigmund (1999), para um coeficiente de Poisson igual a  $1/3$ , por exemplo, pode-se utilizar  $\nu \geq 3$  para a obtenção de estruturas basicamente 0-1.

Para a realização dos cálculos estruturais, necessários para a obtenção numérica da função objetivo e/ou restrições, podem-se utilizar métodos numéricos como o FEM (BATHE, 1996). Conforme apresentado na literatura Bendsøe e Sigmund (2003), métodos de discretização como o FEM podem ser utilizados com o método de parametrização SIMP. Pode-se, para isto, considerar constante a pseudo densidade  $\rho(\mathbf{t})$ , contínua no intervalo  $(0, 1]$  e no domínio  $\Omega$ , em cada elemento finito  $e$ , da malha de elementos finitos utilizada. O valor da pseudo densidade em cada elemento finito  $e$  é considerada igual ao valor da pseudo densidade no centroide deste elemento, tal que

$$\mathbf{C}_e(\rho_e) = \rho_e^p \mathbf{C}_e^b, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{C}_e(\rho_e)$  é o tensor constitutivo do elemento  $e$ ,  $\rho_e^p$  é a pseudo densidade do centroide do elemento  $e$  e  $\mathbf{C}_e^b$  é o tensor constitutivo do material base no centroide do elemento  $e$ .

Neste trabalho os problemas contínuos são discretizados utilizando-se o FEM (BATHE, 1996) e o modelo SIMP padrão (BENDSØE; SIGMUND, 1999) é utilizado na parametrização material para a obtenção de estruturas 0-1.

### 3.1 MINIMIZAÇÃO DE FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME

#### 3.1.1 Definição do problema

O primeiro problema apresentado, já na forma discreta, consiste no problema padrão de minimização de flexibilidade, de estruturas lineares, elásticas e isotrópicas, com restrição de volume definido como

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{T.q.} \quad & V(\boldsymbol{\rho}) \leq V_{max} \\ & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $f(\boldsymbol{\rho})$  é a flexibilidade,  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{N_e}$  é o vetor de pseudo densidades,  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças externas,  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})$  é o vetor de deslocamentos,  $V(\boldsymbol{\rho})$  é o volume da estrutura,  $V_{max}$  é a restrição de volume imposta pelo projetista,

$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$  é a matriz de rigidez global,  $\rho_{min}$  é a pseudo densidade mínima que cada elemento  $e$  pode assumir (para evitar um problema singular de equilíbrio),  $\rho_e$  é a pseudo densidade do elemento  $e$  e  $N_e$  é o número total de elementos na malha de elementos finitos.

A matriz de rigidez global  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$  é obtida pela sobreposição, em nível global, de todas as matrizes de rigidez locais da malha de elementos finitos. Essa operação pode ser representada por

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \leftarrow \biguplus_{e=1}^{N_e} \mathbf{k}_e(\rho_e), \quad (3.6)$$

onde  $\biguplus$  é o operador de sobreposição e  $\mathbf{k}_e(\rho_e)$  é a matriz de rigidez local do elemento  $e$

$$\mathbf{k}_e(\rho_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e(\rho_e) \mathbf{B}_e d\Omega_e, \quad (3.7)$$

onde  $\Omega_e$  é o domínio do elemento  $e$  e  $\mathbf{B}_e$  é o operador deformação-deslocamento do elemento  $e$ . Substituindo a Eq. (3.4) na Eq. (3.7), tem-se que

$$\mathbf{k}_e(\rho_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \rho_e^p \mathbf{C}_e^b \mathbf{B}_e d\Omega_e = \rho_e^p \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e^b \mathbf{B}_e d\Omega_e, \quad (3.8)$$

tal que

$$\mathbf{k}_e(\rho_e) = \mathbf{k}_e^b \rho_e^p, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{k}_e^b$  é a matriz de rigidez local do elemento considerando o material base (obtida diretamente da discretização de elementos finitos).

O volume da estrutura  $V(\boldsymbol{\rho})$  é obtido como

$$V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{N_e} V_e \rho_e, \quad (3.10)$$

onde  $V_e$  é o volume do elemento finito  $e$ .

### 3.1.2 Procedimento de solução

Para solucionar o problema de otimização e obter o projeto ótimo, um algoritmo padrão de critério de ótimo (OC - *Optimality Criteria*) é

utilizado (BENDSØE; SIGMUND, 2003), tal que

$$\rho_e^{k+1} = \begin{cases} \max \{ (1 - \zeta) \rho_e^k, \rho_{min} \} & \text{se } \rho_e^k \beta_e^\eta \leq \max \{ (1 - \zeta) \rho_e^k, \rho_{min} \} \\ \min \{ (1 + \zeta) \rho_e^k, 1 \} & \text{se } \rho_e^k \beta_e^\eta \geq \min \{ (1 + \zeta) \rho_e^k, 1 \} \\ \rho_e^k \beta_e^\eta & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.11)$$

onde  $\zeta$  é um limite móvel positivo,  $\eta$  é um coeficiente de amortecimento numérico e, da condição de otimalidade

$$\beta_e = \frac{-\frac{df(\rho)}{d\rho_e}}{\lambda \frac{dV(\rho)}{d\rho_e}}, \quad (3.12)$$

onde  $\lambda$  é um multiplicador de Lagrange que pode ser encontrado por meio de um algoritmo de bissecção (ARORA, 2012).

### 3.1.3 Análise de sensibilidades

A derivada do volume da estrutura em relação a uma pseudo densidade  $\rho_m$  pode ser obtida diretamente como

$$\frac{dV(\rho)}{d\rho_m} = V_m, \quad (3.13)$$

onde  $V_m$  é o volume do elemento finito  $m$ .

A análise de sensibilidades da flexibilidade em relação a uma pseudo densidade  $\rho_m$  pode ser obtida utilizando-se o método adjunto. Neste método, a função objetivo é reescrita com o intuito de evitar as derivadas de  $\mathbf{U}$  em relação às variáveis de projeto. Retirando a dependência de  $\mathbf{K}(\rho)$  e  $\mathbf{U}(\rho)$  em relação a  $\rho$  por conveniência, pode-se escrever a flexibilidade como

$$f = \mathbf{F}^T \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{U}), \quad (3.14)$$

onde, devido à equação de equilíbrio de problemas lineares elásticos já ter sido resolvida,  $\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{U}) = 0$  para qualquer vetor  $\boldsymbol{\lambda}$ . Calculando a derivada da Eq. (3.14) em relação a uma variável de projeto  $\rho_m$

$$\frac{df}{d\rho_m} = \frac{d\mathbf{F}^T}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{F}^T \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{d\mathbf{F}}{d\rho_m} - \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right). \quad (3.15)$$

Se as forças de corpo não são consideradas, a Eq. (3.15) pode ser escrita como

$$\frac{df}{d\rho_m} = \mathbf{F}^T \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( -\frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right). \quad (3.16)$$



Manipulando a Eq. (3.16), pode-se escrever

$$\frac{df}{d\rho_m} = (\mathbf{F} - \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda})^T \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U}, \quad (3.17)$$

e, como o vetor  $\boldsymbol{\lambda}$  pode assumir quaisquer valores, pode-se assumir intencionalmente que  $\mathbf{F} - \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = 0$  (onde pode ser verificado que  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{U}$ ), então a necessidade de avaliar a derivada do vetor de deslocamentos em relação às variáveis de projeto  $\frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}$  desaparece, tal que

$$\frac{df}{d\rho_m} = -\mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} = -\mathbf{u}_m^T \frac{d\mathbf{k}_m}{d\rho_m} \mathbf{u}_m, \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{u}_m$  e  $\mathbf{k}_m$  são o vetor de deslocamentos e a matriz de rigidez locais do elemento  $m$  respectivamente. Então, para cada variável de projeto, um simples cálculo local é necessário para a obtenção da derivada da flexibilidade.

Para garantir a independência da malha e evitar a instabilidade de tabuleiro na solução do problema de otimização topológica (dificuldades associadas a problemas de otimização topológica, discutidas na próxima subseção) (SIGMUND, 1994), um filtro de vizinhança espacial de gradiente, sem ponderação pelas pseudo densidades (SIGMUND, 2007), é aplicado no gradiente da flexibilidade.

## 3.2 DIFICULDADES ASSOCIADAS

As principais dificuldades associadas à resolução de um problema de otimização topológica são a dependência da malha e a instabilidade de tabuleiro (SIGMUND, 1994). Estes fenômenos foram observados primeiramente em problemas de minimização de flexibilidade com restrição de volume (SIGMUND, 1994), mas também se estendem para problemas de minimização de volume com restrição de tensão (DUYSINX; BENDSØE, 1998).

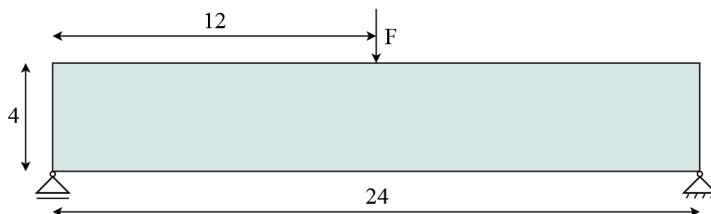
### 3.2.1 Dependência da malha

A principal dificuldade associada a problemas de otimização topológica com a parametrização 0-1 é a não existência de soluções para o problema contínuo (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Isto ocorre, pois quanto maior o número de vazios adicionados à topologia, sem modificar o volume

da estrutura, maior, em geral, é a eficiência desta estrutura (BENDSØe; SIGMUND, 2003). No limite deste processo são obtidas variações estruturais que apresentam um uso melhorado de material (BENDSØe; SIGMUND, 2003). Estas estruturas são tipicamente não isotrópicas e não podem ser representadas dentro da descrição original do problema que consiste na utilização de somente material isotrópico (BENDSØe; SIGMUND, 2003). Em implementações computacionais este fenômeno pode ser visto como uma instabilidade numérica onde um maior número de vazios aparece quando uma malha mais fina de elementos finitos é utilizada (BENDSØe; SIGMUND, 2003), isto é, em sua dependência da discretização.

Na Figura 5, pode-se verificar o problema de dependência da malha para o problema linear, elástico e isotrópico de minimização de flexibilidade com restrição de 50% da fração de volume, representado na Figura 4.

Figura 4 – Problema utilizado para a demonstração da dependência da malha e da instabilidade de tabuleiro.



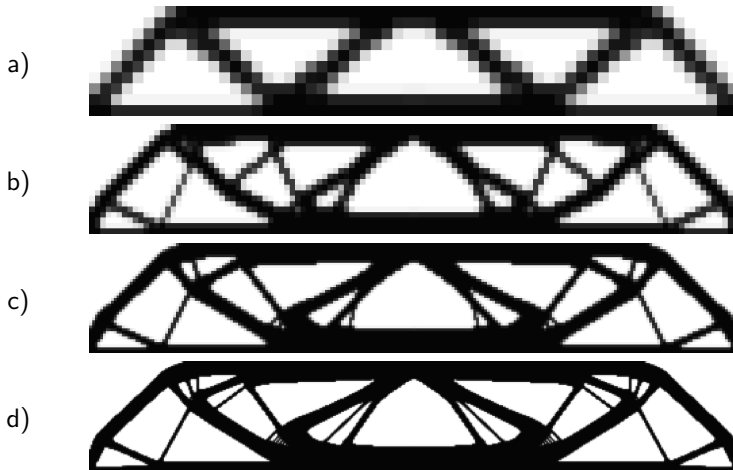
Fonte: Produção do próprio autor.

Na prática é necessário o controle do tamanho dos reforços, para fins de fabricação e para que uma malha mais refinada resulte apenas em um melhor modelamento utilizando o FEM e uma melhor descrição do contorno da estrutura (BENDSØe; SIGMUND, 2003).

### 3.2.2 Instabilidade de tabuleiro

Outra dificuldade associada a problemas de otimização topológica é a instabilidade de tabuleiro. Este fenômeno é definido como uma região que alterna elementos sólidos e vazios (similar a um tabuleiro de xadrez), que ocorre devido ao modelamento matemático inadequado das regiões que apresentam esta instabilidade, normalmente associado a elementos finitos de baixa ordem (SIGMUND, 1994), Figura 6. Conforme apresentado em

Figura 5 – Dependência da malha no problema de minimização de flexibilidade da Figura 4. Solução para uma discretização de: a) 300; b) 1200; c) 4800; e d) 19200 elementos.



Fonte: Produção do próprio autor.

Sigmund (1994), este fenômeno não pode ser interpretado como um tipo ótimo de estrutura.

### 3.3 MÉTODOS DE RESTRIÇÃO DO ESPAÇO DE SOLUÇÃO

Para evitar os problemas de instabilidade de tabuleiro e de dependência da malha, mencionados anteriormente, métodos de restrição do espaço de solução podem ser utilizados (SIGMUND, 2007). Estes métodos restringem o espaço de solução de forma que o problema de não existência de solução é eliminado (SIGMUND, 2007). A utilização destes métodos também permite algum controle sobre a complexidade da topologia obtida (SIGMUND, 2007).

Conforme Sigmund (2007), métodos de restrição do espaço de solução podem ser divididos em três categorias: 1) filtros de vizinhança espacial, definidos como operadores de convolução que podem ser aplicados sobre as pseudo densidades (BRUNS; TORTORELLI, 2001) ou sobre o gradiente utilizado no método de otimização (SIGMUND, 1994; SIGMUND, 2007); 2) métodos restritivos como o método de controle de perímetro (HABER; JOG; BENDSØE, 1996); e 3) outros métodos como o método

Figura 6 – Instabilidade de tabuleiro no problema de minimização de flexibilidade da Figura 4. Solução para uma discretização de: a) 300; b) 1200; c) 4800; e d) 19200 elementos.



Fonte: Produção do próprio autor.

*level-set* (EMMENDOERFER; FANCELLO, 2014).

Também existem os métodos híbridos entre as categorias 1 e 2 como o apresentado em Cardoso e Fonseca (2003), que consiste na aplicação de filtros de vizinhança espacial sobre as restrições laterais originadas dos limites móveis, utilizadas no algoritmo de otimização.

Conforme apresentado em Sigmund (2007), os filtros da categoria 1 são os mais utilizados na literatura devido à sua fácil implementação e utilização. A seguir serão apresentados os filtros que são utilizados neste trabalho, que consistem em filtros de vizinhança espacial aplicados no gradiente ou nas pseudo densidades, dependendo do caso estudado.

### 3.3.1 Filtros de vizinhança espacial

Os filtros de vizinhança espacial adicionam um baixo custo computacional ao problema de otimização e fornecem um bom controle sobre a complexidade da topologia, de forma que dimensões mínimas de reforços podem ser estipuladas (SIGMUND, 2007).

A vizinhança de um elemento  $e$  pode ser definida como os ele-

mentos que possuem o centro dentro de uma área circular de raio  $R$  com o centro em  $e$ , tal que

$$\vartheta_e = \{i \mid \|\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_e\| \leq R\}, \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{t}_i$  e  $\mathbf{t}_e$  são as coordenadas do centroide dos elementos finitos  $i$  e  $e$  respectivamente.

Um filtro de vizinhança espacial é caracterizado como um operador aplicado sobre alguma grandeza do problema de otimização, como as pseudo densidades ou o gradiente, tal que

$$\tilde{\Upsilon}_e = \frac{\sum_{i \in \vartheta_e} w(\mathbf{t}_i) \Upsilon_i}{\sum_{i \in \vartheta_e} w(\mathbf{t}_i)}, \quad (3.20)$$

onde  $\tilde{\Upsilon}_e$  representa a grandeza após a aplicação do filtro, que depende das grandezas  $\Upsilon_i$  referentes aos elementos  $i \in \vartheta_e$  e  $w(\mathbf{t}_i)$  é, em geral, uma função linear representada por

$$w(\mathbf{t}_i) = R - \|\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_e\|. \quad (3.21)$$

O valor de duas vezes o raio  $R$  representa a dimensão mínima que pode ter um reforço dentro do domínio de solução, de forma que o problema deixa de ser dependente da malha e passa a ser dependente de  $R$ .

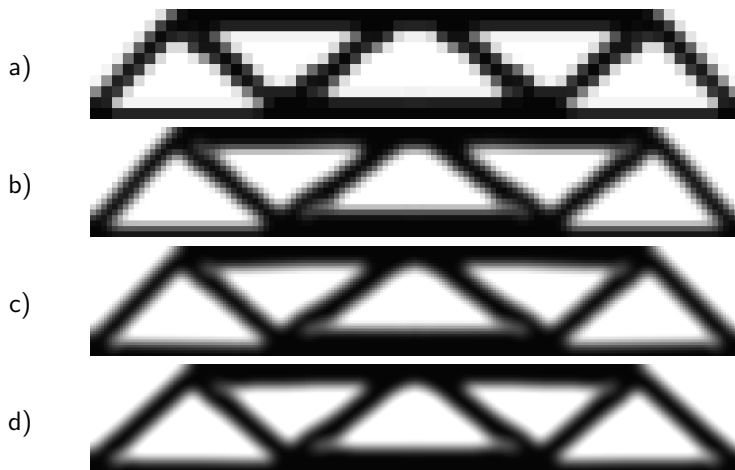
Conforme apresentado em Sigmund (2007), algumas variações da Eq. (3.20) existem na literatura, como a utilizada para o filtro de densidades apresentada a seguir, onde o volume do elemento  $i$  é também multiplicado no numerador e no denominador da Eq. (3.20).

Na Figura 7, pode-se verificar a aplicação de um filtro de vizinhança espacial com raio  $R$  fixo (neste caso é utilizado o filtro de densidades, que será apresentado a seguir) no problema linear, elástico e isotrópico de minimização de flexibilidade com restrição de 50% da fração de volume, representado na Figura 4.

### 3.3.1.1 Filtro de vizinhança espacial de gradiente

Os filtros de vizinhança espacial de gradiente são abordagens heurísticas que funcionam bem para algumas classes específicas de problemas, como problemas de minimização de flexibilidade e problemas simples de mecanismos flexíveis (SIGMUND, 2007). Esta abordagem consiste basicamente na modificação da direção de busca utilizada no procedimento de

Figura 7 – Aplicação de filtro de vizinhança espacial de densidade no problema de minimização de flexibilidade da Figura 4. Solução para uma discretização de: a) 300; b) 1200; c) 4800; e d) 19200 elementos.



Fonte: Produção do próprio autor.

otimização segundo alguma regra de atualização (SIGMUND, 2007). Vale salientar que existem vários tipos de filtro de gradiente e cada um deles possui suas particularidades (SIGMUND, 2007).

Neste trabalho, o filtro de gradiente utilizado, nos problemas de minimização de flexibilidade com restrição de volume, consiste em modificar a direção de busca  $\mathbf{D}$  (equivalente a direção de máxima descida neste caso) utilizada no procedimento de otimização como

$$\tilde{D}_e = \frac{\sum_{i \in \vartheta_e} w(\mathbf{t}_i) D_i}{\sum_{i \in \vartheta_e} w(\mathbf{t}_i)}, \quad (3.22)$$

onde  $\tilde{D}_e$  é a  $e$ -ésima componente da nova direção de busca  $\tilde{\mathbf{D}}$  e  $D_i$  é a  $i$ -ésima componente da direção de busca  $\mathbf{D}$ .

O procedimento heurístico de restrição do espaço de solução apresentado na Eq. (3.22) apresenta um bom desempenho quando utilizado na resolução de problemas de minimização de flexibilidade com restrição de volume e, conforme mostrado na seção de resultados, soluções próximas de 0-1 são obtidas, com poucas pseudo densidades intermediárias.

Vale salientar que os filtros de gradiente, apresentados em Sigmund (2007), foram implementados e testados nos problemas de minimização de volume com restrição de tensão mostrados neste trabalho, mas não apresentaram um bom desempenho. O motivo da ineficiência destes filtros sobre este problema não foi analisado. Como este tópico exige uma análise mais aprofundada, sugere-se a investigação deste fenômeno, que não foi realizada durante este trabalho.

### 3.3.1.2 Filtro de vizinhança espacial de densidades

Os filtros de vizinhança espacial de densidades, conforme discutido em Sigmund (2007), são matematicamente consistentes. O filtro de densidades original, proposto em Bruns e Tortorelli (2001), é utilizado com sucesso em uma série de problemas na literatura (SIGMUND, 2007; BRUNS; TORTORELLI, 2001), inclusive em problemas com restrição de tensão (LE et al., 2010; FARIAS; CARDOSO; MUNOZ-ROJAS, 2011). Apesar de fornecer uma solução com uma porcentagem relativamente elevada de pseudo densidades intermediárias (SIGMUND, 2007), o filtro de densidades proposto em Bruns e Tortorelli (2001) é utilizado neste trabalho para solucionar os problemas de minimização de volume com restrição de tensão.

O filtro de densidades consiste em modificar as pseudo densidades como

$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{i \in \vartheta_e} w(\mathbf{t}_i) V_i \rho_i}{\sum_{i \in \vartheta_e} w(\mathbf{t}_i) V_i}, \quad (3.23)$$

onde  $\tilde{\rho}_e$  é a nova pseudo densidade do elemento finito  $e$ .

Quando o filtro de densidades é utilizado, as derivadas necessárias das grandezas  $\varphi$ , que dependem das variáveis de projeto  $\rho$ , devem ser atualizadas como

$$\frac{d\varphi}{d\rho_e} = \sum_{i \in \vartheta_e} \frac{d\varphi}{d\tilde{\rho}_i} \frac{d\tilde{\rho}_i}{d\rho_e}, \quad (3.24)$$

onde  $\frac{d\varphi}{d\rho_e}$  representa a  $e$ -ésima componente do gradiente consistente da grandeza  $\varphi$  em relação às variáveis de projeto  $\rho$ ,  $\frac{d\varphi}{d\tilde{\rho}_i}$  representa a  $i$ -ésima componente do gradiente intermediário da grandeza  $\varphi$  em relação às variáveis de projeto filtradas  $\tilde{\rho}$  e a derivada  $\frac{d\tilde{\rho}_i}{d\rho_e}$  pode ser obtida como

$$\frac{d\tilde{\rho}_i}{d\rho_e} = \frac{w(\mathbf{t}_e) V_e}{\sum_{j \in \vartheta_i} w(\mathbf{t}_j) V_j}. \quad (3.25)$$

O filtro de densidades, utilizado neste trabalho na resolução dos problemas de minimização de volume com restrição de tensão, apresentou um bom desempenho, evitando a instabilidade de tabuleiro e garantindo a independência da malha, como pode ser visto na seção de resultados.

### 3.4 MINIMIZAÇÃO DE VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO

#### 3.4.1 Definição do problema

O segundo problema apresentado, já na forma discreta, consiste no problema de minimização de volume, de estruturas lineares, elásticas e isotrópicas, com restrição de tensão, definido como

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{N_e} V_e \rho_e \\ \text{T.q.} \quad & \frac{\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})}{\sigma_y} - 1 \leq 0; \quad k = 1, 2, \dots, N_k \\ & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$  representa a tensão equivalente de von Mises no ponto  $k$ ,  $\sigma_y$  é a restrição de tensão imposta pelo projetista e  $N_k$  é o número total de pontos em que são calculadas as tensões de von Mises.

Para problemas planos, a tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})$  calculada no ponto  $k$  pode ser escrita como

$$\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_k^T(\boldsymbol{\rho})\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}_k(\boldsymbol{\rho})}, \quad (3.27)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

A tensão no ponto  $k$  pode ser escrita na forma de um vetor (notação compacta)  $\boldsymbol{\sigma}_k(\boldsymbol{\rho}) = [\sigma_{xx}(\boldsymbol{\rho}), \sigma_{yy}(\boldsymbol{\rho}), \sigma_{xy}(\boldsymbol{\rho})]_k^T$  e é obtida como

$$\boldsymbol{\sigma}_k(\boldsymbol{\rho}) = \overline{\mathbf{C}}_k(\rho_k)\mathbf{B}_k\mathbf{u}_k(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{B}_k$  é o operador deformação-deslocamento no ponto  $k$ ,  $\mathbf{u}_k(\rho_k)$  é o vetor de deslocamentos local correspondente ao elemento que contém o ponto  $k$  e a matriz  $\overline{\mathbf{C}}_k(\rho_k)$ , considerando a parametrização material SIMP



para a matriz constitutiva, Eq. (3.4), é definida como

$$\bar{\mathbf{C}}_k(\rho_k) = \frac{\mathbf{C}_k(\rho_k)}{\rho_k^q} = \frac{\rho_k^p \mathbf{C}_k^b}{\rho_k^q} = \rho_k^{p-q} \mathbf{C}_k^b = \rho_k^n \mathbf{C}_k^b, \quad (3.30)$$

onde  $p$  é o fator utilizado na parametrização SIMP,  $q$  é o fator utilizado na interpolação da tensão e  $\mathbf{C}_k^b$  é a matriz constitutiva do material base no ponto  $k$  (DUYSINX; BENDSØe, 1998). O parâmetro  $\rho_k^q$ , que aparece no denominador da Eq. (3.30), é determinado por um requerimento de coerência com o critério de tensão derivado de materiais rank 2 (DUYSINX; BENDSØe, 1998). Para manter a consistência física das pseudo densidades intermediárias, deve-se assumir  $p = q$  (DUYSINX; BENDSØe, 1998). Entretanto, considerando o mesmo expoente na interpolação da rigidez e na interpolação da tensão, ocorre o fenômeno de singularidade (DUYSINX; BENDSØe, 1998).

O fenômeno de singularidade consiste em uma irregularidade no espaço de solução, que impede a obtenção do ótimo global utilizando-se algoritmos baseados nas condições de Karush-Kuhn-Tucker (DUYSINX; BENDSØe, 1998). De um ponto de vista de projeto, este fenômeno pode ser visto como a incapacidade do algoritmo em remover algumas regiões que apresentam pseudo densidades intermediárias (DUYSINX; BENDSØe, 1998).

Duas abordagens são frequentemente utilizadas na literatura para evitar o fenômeno de singularidade: a relaxação  $\epsilon$  (CHENG; GUO, 1997) e a relaxação qp (BRUGGI, 2008). O principal objetivo destas abordagens consiste na relaxação das restrições de tensão (BRUGGI, 2008), com o intuito de modificar o espaço de solução, retirando a irregularidade e permitindo a obtenção do mínimo global do problema utilizando-se minimizadores baseados em gradiente (DUYSINX; BENDSØe, 1998).

A relaxação  $\epsilon$  consiste em modificar as restrições de tensão do problema discreto apresentado anteriormente da seguinte forma

$$\left( \frac{\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})}{\sigma_y} - 1 \right) \rho_k \leq \epsilon; \quad \epsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho_k; \quad k = 1, 2, \dots, N_k. \quad (3.31)$$

Com esta modificação, retira-se a irregularidade do espaço de solução, permitindo a obtenção do mínimo global do problema de otimização utilizando-se minimizadores baseados em gradiente. Deve-se salientar que a solução do novo problema de otimização, conforme apresentado em Bruggi (2008), não é exatamente a solução do problema original. Quanto maior o

valor de  $\epsilon$  utilizado, menos irregular torna-se o espaço de solução e mais fácil é a obtenção da solução do problema modificado, mas mais distante é esta solução da solução do problema original. O que é feito na prática é uma abordagem de continuação, de forma que se inicia com um valor elevado de  $\epsilon$ , obtém-se a solução do problema de otimização modificado, diminui-se o valor de  $\epsilon$  e utiliza-se a solução do problema anterior como estimativa inicial para o novo problema. Este procedimento é então feito até que o valor de  $\epsilon$  seja suficientemente baixo, de forma que a solução do problema modificado esteja muito próxima da solução do problema original.

A abordagem de relaxação qp consiste em resolver o problema de otimização da forma em que é apresentado no início desta seção, mas com o uso de  $p > q$  no cálculo da Eq. (3.30) (BRUGGI, 2008). A remoção da consistência física das pseudo densidades intermediárias deve ser utilizada como uma manipulação matemática que permite, em aplicações práticas, a resolução do problema e a obtenção de uma topologia 0-1 (BRUGGI, 2008). A utilização de  $p > q$  modifica o espaço de solução, retirando a irregularidade do problema original. Da mesma forma que ocorre na abordagem de relaxação  $\epsilon$ , quanto menor o valor de  $q$  utilizado em relação ao valor de  $p$ , menos irregular torna-se o espaço de solução e mais fácil é a obtenção da solução do problema modificado, mas mais distante é esta solução em relação solução do problema original. A abordagem de continuação também pode ser feita neste caso, de forma que se inicia com um valor baixo de  $q$ , em relação ao valor de  $p$ , soluciona-se o problema de otimização, aumenta-se o valor de  $q$  e utiliza-se a solução do problema anterior como estimativa para o novo problema de otimização. Este procedimento é então feito até que o valor de  $q$  seja suficientemente próximo de  $p$ .

Como mostrado em Bruggi (2008), ambas as abordagens são equivalentes quando  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow p$ .

Neste trabalho a abordagem de relaxação qp é utilizada. A abordagem de continuação não é utilizada neste trabalho. O valor do parâmetro  $q$  é escolhido com base em trabalhos da literatura Le et al. (2010), Farias, Cardoso e Munoz-Rojas (2011), Bruggi (2008), onde se mostrou possível a utilização de um valor fixo de  $q$  de forma a eliminar o fenômeno de singularidade e possibilitar a obtenção de estruturas bem definidas.

### 3.4.2 Procedimento de solução

Para resolver o problema de otimização na forma discreta um algoritmo de Lagrangiano aumentado é utilizado (MARTÍNEZ, 2009). A função do Lagrangiano aumentado é definida para este problema como

$$L_r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) = V(\boldsymbol{\rho}) + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{N_k} \left\langle \frac{\mu_k}{r} + \frac{\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})}{\sigma_y} - 1 \right\rangle^2, \quad (3.32)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}$  é o vetor que contém os multiplicadores de Lagrange,  $r$  é um fator de penalização,  $\mu_k$  é o multiplicador de Lagrange associado com a  $k$ -ésima restrição de tensão e o operador  $\langle \cdot \rangle$  indica que apenas a parte positiva é considerada. As restrições laterais não são consideradas na função do Lagrangiano aumentado, pois o ponto de projeto pode passar para a região inviável durante o procedimento de otimização. Isto significa que pseudo densidades maiores que 1 e menores que 0 poderiam ser obtidas durante o procedimento de otimização, levando a inconsistências físicas e a um problema singular de equilíbrio devido as pseudo densidades possivelmente negativas.

O método do Lagrangiano aumentado consiste na resolução de subproblemas de otimização em sequência, onde a solução do último subproblema é utilizada como estimativa inicial para o próximo subproblema. O  $c$ -ésimo subproblema de otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & L_{r^{(c)}}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}^{(c)}) = V(\boldsymbol{\rho}) + \frac{r^{(c)}}{2} \sum_{k=1}^{N_k} \left\langle \frac{\mu_k^{(c)}}{r^{(c)}} + \frac{\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})}{\sigma_y} - 1 \right\rangle^2 \\ \text{T.q.} \quad & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde os multiplicadores de Lagrange  $\mu_k$  e o parâmetro de penalização  $r$  são atualizados no final de cada subproblema  $c$  de otimização como

$$\mu_k^{(c+1)} \leftarrow \left\langle r^{(c)} \left( \frac{\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})}{\sigma_y} - 1 \right) + \mu_k^{(c)} \right\rangle \quad (3.34)$$

e

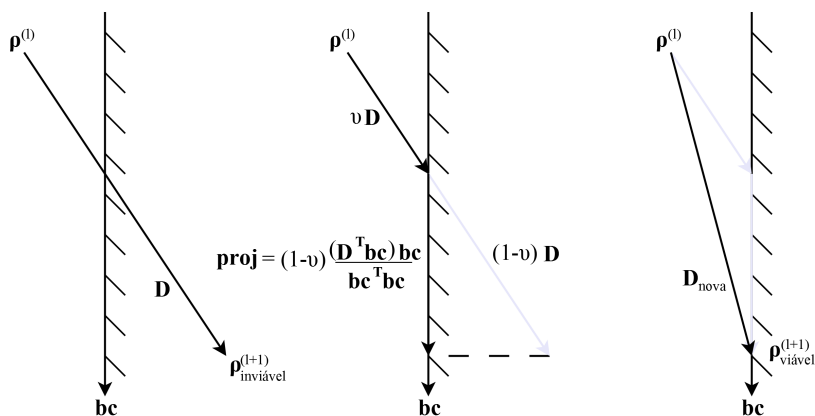
$$r^{(c+1)} \leftarrow \delta r^{(c)}; \delta > 1. \quad (3.35)$$

Para resolver cada subproblema de otimização (*loop* interno) um algoritmo baseado em gradiente é utilizado. A direção de máxima descida  $\mathbf{D}$  é inicialmente calculada e diretamente utilizada com uma procura em

linha inexistente se nenhuma restrição lateral, denominada por  $\mathbf{bc}$ , está ativa ou é ativada no final do passo. A direção de máxima descida é utilizada em poucas iterações, pois as restrições laterais estão, em sua maioria, ativas no final do procedimento de otimização.

Se a região inviável é alcançada durante o procedimento de otimização, com alguma estimativa de passo utilizada com a direção de máxima descida  $\mathbf{D}$ , como pode ser visto na Figura 8, a parcela da direção de máxima descida na região inviável  $(1-v)\mathbf{D}$  é projetada nas restrições laterais. A nova direção de busca  $\mathbf{D}_{nova}$  é uma simples soma vetorial entre a parcela da direção de máxima descida na região viável  $v\mathbf{D}$  e da projeção denominada por  $\mathbf{proj}$ , tal que  $\mathbf{D}_{nova} = v\mathbf{D} + \mathbf{proj}$ . Se a função do Lagrangiano aumentado aumentar nesta iteração, o ponto de projeto não é aceito, o passo é reduzido e uma nova tentativa deve ser realizada.

Figura 8 – Obtenção da direção de busca.



Fonte: Produção do próprio autor.

Pode-se verificar que a nova direção de busca  $\mathbf{D}_{nova}$  é sempre uma direção de descida considerando um tamanho de passo infinitesimal, pois  $-\mathbf{D}^T \mathbf{D}_{nova} = -v\mathbf{D}^T \mathbf{D} - (1-v) \frac{(\mathbf{D}^T \mathbf{bc})^2}{\mathbf{bc}^T \mathbf{bc}} \leq 0, \forall \mathbf{D}, \mathbf{bc} \in \mathbb{R}^{N_e}$ .

Com esse procedimento a função do Lagrangiano aumentado sempre decresce no decorrer das iterações do subproblema de otimização.

Como alternativa ao procedimento adotado para solucionar o problema de otimização interno, uma simples estratégia de bloqueio pode ser utilizada (ARORA, 2012). Esta estratégia foi implementada e testada para solucionar o problema interno de otimização, mas uma convergência ex-

tremamente lenta foi obtida, devido ao elevado número de variáveis de projeto e de restrições laterais.

Para evitar a instabilidade de tabuleiro e a dependência da malha na solução (SIGMUND, 1994), um filtro de vizinhança espacial aplicado nas pseudo densidades é utilizado (BRUNS; TORTORELLI, 2001), conforme mencionado anteriormente.

### 3.4.3 Análise de sensibilidades

Como um algoritmo baseado em gradiente é utilizado na resolução do subproblema de otimização, a sensibilidade do Lagrangiano aumentado, Eq. (3.32), em relação a uma pseudo densidade  $\rho_m$  é obtida. O método adjunto é utilizado para evitar as derivadas do vetor  $\mathbf{U}$  em relação às variáveis de projeto.

Pode-se escrever o Lagrangiano aumentado, Eq. (3.32), como

$$L_r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) = V(\boldsymbol{\rho}) + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{N_k} \left\langle \frac{\mu_k}{r} + \frac{\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho})}{\sigma_y} - 1 \right\rangle^2 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{F}), \quad (3.36)$$

onde, devido a equação de equilíbrio de deslocamentos para problemas lineares elásticos,  $\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{F}) = 0$  para qualquer vetor  $\boldsymbol{\lambda}$ . Pode-se calcular a derivada de  $L_r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu})$  em relação a variável de projeto  $\rho_m$ , retirando a dependência em relação a  $r$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  e  $\boldsymbol{\mu}$  por conveniência

$$\frac{dL}{d\rho_m} = \frac{dV}{d\rho_m} + r \sum_{k=1}^{N_k} \left\langle \frac{\mu_k}{r} + \frac{\sigma_{eq}^{(k)}}{\sigma_y} - 1 \right\rangle \frac{1}{\sigma_y} \frac{d\sigma_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right), \quad (3.37)$$

assumindo que  $\mathbf{F}$  não depende das variáveis de projeto  $\boldsymbol{\rho}$ .

Definindo

$$h_k = \left\langle \mu_k + r \left( \frac{\sigma_{eq}^{(k)}}{\sigma_y} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{\sigma_y}, \quad (3.38)$$

pode-se reescrever a Eq. (3.37), tal que

$$\frac{dL}{d\rho_m} = V_m + \sum_{k=1}^{N_k} h_k \frac{d\sigma_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right), \quad (3.39)$$

onde  $V_m$  é a derivada do volume em relação à variável de projeto  $\rho_m$ , Eq. (3.13).

Como pode ser visto na Eq. (3.39), a derivada da tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{eq}^{(k)}$ , Eq. (3.27), em relação a pseudo densidade  $\rho_m$  é necessária. Esta derivada pode ser obtida diretamente das derivadas das Eqs. (3.27), (3.29) e (3.30), tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} = & \frac{1}{2\sigma_{eq}^{(k)}} \left( \frac{d\mathbf{u}_k^T}{d\rho_m} \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \right. \\ & \left. + \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{M} \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k}{d\rho_m} \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{B}_k \frac{d\mathbf{u}_k}{d\rho_m} \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

tal que

$$\frac{d\sigma_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} = \frac{1}{\sigma_{eq}^{(k)}} \left( \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{B}_k \frac{d\mathbf{u}_k}{d\rho_m} + \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \right). \quad (3.41)$$

Definindo

$$\mathbf{a}_k^T = \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{B}_k, \quad (3.42)$$

e

$$g_k = \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad (3.43)$$

pode-se reescrever a Eq. (3.41) como

$$\frac{d\sigma_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} = \frac{1}{\sigma_{eq}^{(k)}} \left( \mathbf{a}_k^T \frac{d\mathbf{u}_k}{d\rho_m} + g_k \right). \quad (3.44)$$

Substituindo a Eq. (3.44) na Eq. (3.39)

$$\frac{dL}{d\rho_m} = \frac{dV}{d\rho_m} + \sum_{k=1}^{N_k} h_k \left[ \frac{1}{\sigma_{eq}^{(k)}} \left( \mathbf{a}_k^T \frac{d\mathbf{u}_k}{d\rho_m} + g_k \right) \right] + \lambda^T \left( \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m} \right). \quad (3.45)$$

Considerando que  $\mathbf{u}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{U}$ , onde  $\mathbf{H}_k$  é um operador de localização, que mapeia o vetor de deslocamentos local  $\mathbf{u}_k$  do vetor de deslocamentos global  $\mathbf{U}$ , e após algumas manipulações, pode-se reescrever a Eq.

(3.45) como

$$\frac{dL}{d\rho_m} = V_m + \sum_{k=1}^{N_k} \frac{h_k}{\sigma_{eq}^{(k)}} g_k + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_m} \mathbf{U} + \left( \sum_{k=1}^{N_k} \frac{h_k}{\sigma_{eq}^{(k)}} \mathbf{a}_k^T \mathbf{H}_k + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_m}. \quad (3.46)$$

Como o vetor  $\boldsymbol{\lambda}$  pode assumir quaisquer valores, pode-se intencionalmente assumir que

$$\sum_{k=1}^{N_k} \frac{h_k}{\sigma_{eq}^{(k)}} \mathbf{a}_k^T \mathbf{H}_k + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = \mathbf{0}^T, \quad (3.47)$$

tal que

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = - \sum_{k=1}^{N_k} \frac{h_k}{\sigma_{eq}^{(k)}} \mathbf{H}_k^T \mathbf{a}_k, \quad (3.48)$$

onde é verificado que o vetor adjunto  $\boldsymbol{\lambda}$  pode ser obtido com a resolução de um único sistema de equações lineares. Assim, a derivada do Lagrangiano aumentado em relação a uma pseudo densidade  $\rho_m$  pode ser calculada com

$$\frac{dL}{d\rho_m} = V_m + \sum_{k=1}^{N_k} \frac{h_k}{\sigma_{eq}^{(k)}} g_k + \boldsymbol{\lambda}_m^T \frac{d\mathbf{k}_m}{d\rho_m} \mathbf{u}_m. \quad (3.49)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}_m$ ,  $\mathbf{k}_m$  e  $\mathbf{u}_m$  são o vetor adjunto, matriz de rigidez e vetor de deslocamentos locais do elemento  $m$  respectivamente. O vetor adjunto local, tal como o vetor de deslocamentos local, de um elemento  $m$ , pode ser obtido como  $\boldsymbol{\lambda}_m = \mathbf{H}_m \boldsymbol{\lambda}$ .

## 4 INCERTEZAS

Muitos sistemas físicos, biológicos, econômicos e sociais possuem características que, analisadas em uma escala apropriada, apresentam modelos complexos de variação no espaço e no tempo (VANMARCKE, 1983). As forças do vento e/ou de terremotos que atuam sobre uma estrutura (VANMARCKE et al., 1986), as frações de volume de matriz e fibra em materiais compósitos poliméricos (SRIRAMULA; CHRYSANTHOPOULOS, 2009) e as propriedades elásticas não homogêneas em vidros (MIZUNO; MOSSA; BARRAT, 2013) são exemplos de características que apresentam variações em problemas de engenharia estrutural.

Em um problema real de engenharia estrutural os valores exatos de muitos parâmetros são geralmente desconhecidos (KLEIBER; HIEN, 1992), de forma que uma análise determinística, considerando parâmetros estimados, poderia levar a uma representação incorreta da realidade (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

Os parâmetros que não podem ser determinados de forma exata apresentam incertezas, que são classificadas em dois tipos de acordo com a literatura: aleatórias e epistêmicas (LOPEZ; BECK, 2013). As incertezas aleatórias, também chamadas de irredutíveis, se referem a situações onde existe uma variabilidade natural do fenômeno em análise, enquanto as incertezas epistêmicas, também chamadas de redutíveis, se referem à falta de conhecimento sobre este fenômeno (SUDRET, 2007).

Em problemas de engenharia estrutural, quando um modelo físico é transformado em um modelo matemático, apenas incertezas epistêmicas estão presentes, pois as equações matemáticas não conseguem representar todas as não linearidades do modelo físico de forma exata (AGARWAL, 2004). No entanto, considerando os parâmetros de entrada no modelo matemático, pode-se ter ambos os tipos de incertezas (AGARWAL, 2004). Neste trabalho consideram-se somente as incertezas aleatórias relativas aos parâmetros de entrada no modelo matemático.

Duas abordagens são frequentemente utilizadas para representar os parâmetros de resposta: a abordagem probabilística e a abordagem possibilística (LOPEZ; BECK, 2013). A abordagem probabilística, utilizada neste trabalho, é baseada na teoria da probabilidade, de forma que as incertezas são representadas como variáveis aleatórias (AGARWAL, 2004). Em geral, informações completas, como médias, desvios padrão e correlação, referentes às variáveis aleatórias, são necessárias para a correta representação dos parâmetros de resposta (LOPEZ; BECK, 2013). A abordagem



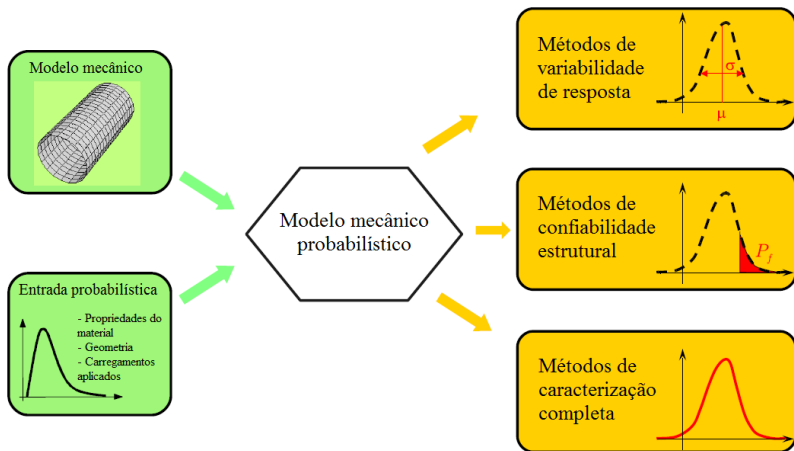
possibilística, em contrapartida, é utilizada quando se tem informações insuficientes referentes às incertezas do problema (AGARWAL, 2004). A abordagem possibilística está além do escopo deste trabalho. O leitor interessado pode consultar Agarwal (2004) para detalhes.

Para representar os parâmetros de resposta de forma probabilística, inicialmente, considera-se um modelo  $M : x \rightarrow y$  e supõe-se que a descrição probabilística dos parâmetros de entrada é disponível em termos de um vetor aleatório  $\mathbf{X}$ . A resposta aleatória é definida por

$$\mathbf{Y} = M(\mathbf{X}), \quad (4.1)$$

onde o principal objetivo da análise estrutural probabilística é o estudo do conteúdo probabilístico de  $\mathbf{Y}$  (SUDRET, 2007). Entretanto, essa função não pode ser obtida diretamente para problemas complexos de engenharia, de forma que métodos probabilísticos para a propagação de incertezas devem ser utilizados (SUDRET, 2007). Estes métodos são frequentemente classificados em três categorias na literatura: métodos de variabilidade de resposta, métodos de confiabilidade estrutural e métodos de caracterização completa (LOPEZ; BECK, 2013), ilustrativamente representados na Figura 9.

Figura 9 – Classificação dos métodos probabilísticos de propagação de incertezas.



Fonte: Adaptado de (SUDRET, 2007).

Os métodos de variabilidade de resposta são limitados ao cálculo de grandezas como o valor esperado e o desvio padrão dos parâmetros de

resposta (LOPEZ; BECK, 2013). O método de perturbação (KLEIBER; HIEN, 1992), utilizado para a propagação de incertezas neste trabalho, é o mais estudado e conhecido na literatura entre os métodos de variabilidade de resposta. Outro método de variabilidade de resposta que merece destaque, proposto em Elishakoff e Ren (1999), consiste na obtenção exata do valor esperado e da variância dos deslocamentos para qualquer variação nos parâmetros de entrada. Este método é baseado na obtenção exata da matriz inversa de rigidez global de problemas estruturais e é limitado a problemas relativamente simples de engenharia.

Os métodos de confiabilidade estrutural essencialmente verificam a probabilidade de falha do sistema (SUDRET, 2007). As principais abordagens utilizadas para aproximar a probabilidade de falha são os métodos de confiabilidade de primeira e de segunda ordem (FORM - *First Order Reliability Method* e SORM - *Second Order Reliability Method*, respectivamente) (DITLEVSEN; MADSEN, 2007). Em problemas de larga escala a abordagem FORM é normalmente utilizada devido ao custo computacional reduzido em relação às outras abordagens (LOPEZ; BECK, 2013).

Os métodos de caracterização completa são utilizados para a obtenção das funções de densidade de probabilidade dos parâmetros de resposta (LOPEZ; BECK, 2013). Os métodos de caracterização completa mais estudados e conhecidos na literatura são os métodos espectrais (GHANEM; SPANOS, 2003) e o método de simulação de Monte Carlo (ELISHAKOFF, 1999) (MCS - *Monte Carlo Simulation*), sendo este último também considerado como um método de referência utilizado para validação de outros métodos. Deve-se salientar que os métodos de caracterização completa também podem ser utilizados para o cálculo de valor esperado, desvio padrão e probabilidade de falha por meio do pós processamento das funções de densidade de probabilidade obtidas (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000; SUDRET, 2007; GHANEM; SPANOS, 2003).

Quando as incertezas dos parâmetros do modelo são representadas por meio de campos aleatórios contínuos, torna-se necessária a utilização de algum método de discretização previamente à utilização dos métodos de propagação mencionados anteriormente (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

Nas próximas subseções alguns conceitos básicos da teoria da probabilidade, de campos aleatórios (incluindo um breve estudo sobre métodos de discretização de campos aleatórios) e o método de perturbação para propagação de incertezas são apresentados.

## 4.1 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Nesta subseção, algumas definições e propriedades básicas referentes a variáveis aleatórias e vetores aleatórios são apresentadas, baseando-se nos trabalhos de Kleiber e Hien (1992), Elishakoff (1999).

### 4.1.1 Variável aleatória

Uma variável aleatória real  $X(\omega)$ ,  $\omega \in \Psi$ , é uma função real  $X : \Psi \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Psi$  é o conjunto de todos os possíveis eventos, também denominado de espaço amostral. Espaços amostrais  $\Psi$  são geralmente classificados de acordo com o número de elementos que eles possuem. Se o número de elementos for finito, o espaço é dito discreto, caso contrário ele é dito contínuo.

Para cada evento  $A$  é associado um número real não negativo  $P(A) \geq 0$  que representa a sua probabilidade.

A função de distribuição cumulativa  $F_X(x)$  de uma variável aleatória  $X$  é definida como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Psi : X(\omega) \leq x), \quad (4.2)$$

para todo número real  $x$ .

Uma variável aleatória  $X$  é dita contínua se existe uma função não negativa  $f_X(x)$ , tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx, \quad (4.3)$$

para todo número real  $x$ . A função  $f_X(x)$  é denominada de função de densidade de probabilidade de  $X$ . Se  $F_X(x)$  é absolutamente contínua e diferenciável em todo  $x$ , então a sua derivada é igual a função de densidade de probabilidade de  $X$ :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}. \quad (4.4)$$

As propriedades da função de densidade de probabilidade são:

1.  $f_X(x) \geq 0$ ;

2. Para todo  $x_1$  e  $x_2$ ,

$$P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx, \quad (4.5)$$

ou seja, a propriedade de uma variável aleatória pertencer ao intervalo definido pelos valores reais  $x_1$  e  $x_2$  é igual a integral da função de densidade de probabilidade neste intervalo;

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (4.6)$$

Enquanto a função de distribuição cumulativa, Eq. (4.2), representa a caracterização completa de uma variável aleatória  $X$ , é às vezes possível a sua caracterização com poucos parâmetros.

O valor esperado de uma variável aleatória  $X$  contínua, com função de densidade de probabilidade  $f_X(x)$ , é obtido como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad (4.7)$$

se a integral for absolutamente convergente, ou seja, se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty, \quad (4.8)$$

isto é, se a integral representada na Eq. (4.8) for finita.

Se  $\phi(X)$  é uma função determinística de uma variável aleatória, então

$$E[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_X(x) dx, \quad (4.9)$$

se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| f_X(x) dx < \infty. \quad (4.10)$$

Um caso particular da Eq. (4.9) é considerar  $\phi(X) = X^k$ , onde  $k$  é zero ou um inteiro positivo. Para  $k = 0$ , tem-se  $E[X^0] = E[1] = 1$ , para  $k = 1$ , tem-se  $E[X^1] = E[X]$ , que corresponde ao valor esperado de  $X$ , e para  $k > 1$ , tem-se o  $k$ -ésimo momento de  $X$

$$m_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx, \quad (4.11)$$

tal que o valor esperado é o primeiro momento de uma variável aleatória.

O valor esperado de  $(X - E[X])^k$  é definido como o  $k$ -ésimo momento central

$$\bar{m}_k = E \left[ (X - E[X])^k \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^k f_X(x) dx. \quad (4.12)$$

O momento central para  $k = 0$  é  $E \left[ (X - E[X])^0 \right] = E[1] = 1$  e o primeiro momento central é  $E \left[ (X - E[X])^1 \right] = E[X] - E[X] = 0$ . O segundo momento central de uma variável aleatória  $\bar{m}_2$  é chamado de variância e é representado por

$$Var[X] = E \left[ (X - E[X])^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx. \quad (4.13)$$

O valor esperado é uma medida média dos valores da variável aleatória, enquanto a variância é uma medida de dispersão.

O desvio padrão de  $X$  é definido como

$$Std[X] = \sqrt{Var[X]}. \quad (4.14)$$

### 4.1.2 Vetor aleatório

Um vetor aleatório  $N$ -dimensional pode ser visto como um conjunto de variáveis aleatórias  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$ , que possui uma função de distribuição cumulativa multi variável de forma

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N). \quad (4.15)$$

A função de distribuição e a função de densidade de probabilidade multi variável, de forma análoga ao caso de uma única variável aleatória, Eqs. (4.3) e (4.4), são relacionadas como

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_N} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N, \quad (4.16)$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N}. \quad (4.17)$$

Um função de densidade de probabilidade multi variável  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  possui as informações da função de densidade de probabilidade de qualquer variável aleatória  $X_i$ . Esta função de uma variável isolada  $X_i$  é denominada função de densidade de probabilidade marginal e pode ser obtida como

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \times dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N. \quad (4.18)$$

Da mesma forma, funções de densidade de probabilidade marginais multi variável podem ser obtidas, como por exemplo, considerando duas variáveis aleatórias  $X_i$  e  $X_j$ , tal que

$$f_{X_i X_j}(x_i, x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) \times dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_N. \quad (4.19)$$

Considerando agora uma função  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_N)$ , pode-se calcular o seu valor esperado como

$$E[\phi(X_1, X_2, \dots, X_N)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1, x_2, \dots, x_N) \times f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N, \quad (4.20)$$

que pode ser representado em uma forma compacta como

$$E[\phi(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.21)$$

Um caso particular da Eq. (4.20) é considerar  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_N) = X_i^k X_j^r$ ,  $\forall k, r \in \mathbb{N}$ , tal que

$$m_{kr} = E[X_i^k X_j^r] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k x_j^r f_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j, \quad (4.22)$$

onde  $m_{kr}$  é denominado de  $(k+r)$ -ésimo momento das variáveis aleatórias  $X_i$  e  $X_j$ .

Os momentos centrais multi variável são definidos considerando, na Eq. (4.20),  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_N) = (X_i - E[X_i])^k (X_j - E[X_j])^r$ , tal

que

$$\bar{m}_{kr} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E[X_i])^k (x_j - E[X_j])^r f_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j. \quad (4.23)$$

O segundo momento central  $\bar{m}_{11}$ , ou  $Cov[X_i, X_j]$ , de uma variável aleatória é denominado de covariância e é representado por

$$Cov[X_i, X_j] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E[X_i]) (x_j - E[X_j]) f_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j, \quad (4.24)$$

ou

$$Cov[X_i, X_j] = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])], \quad (4.25)$$

tal que

$$Cov[X_i, X_j] = E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j]. \quad (4.26)$$

A razão

$$\mu_{ij} = \frac{Cov[X_i, X_j]}{\sqrt{Var[X_i] Var[X_j]}}, \quad (4.27)$$

é chamada de coeficiente de correlação e, devido a inequação de *Cauchy-Schwarz*

$$|Cov[X_i, X_j]| \leq Std[X_i] Std[X_j], \quad (4.28)$$

verifica-se que

$$|\mu_{ij}| \leq 1, \quad (4.29)$$

onde  $|\mu_{ij}| = 1$  indica total correlação entre as variáveis aleatórias  $X_i$  e  $X_j$  e  $|\mu_{ij}| = 0$  indica variáveis aleatórias  $X_i$  e  $X_j$  não correlacionadas.

### 4.1.3 Funções de densidade de probabilidade normais

Como um exemplo de função de densidade de probabilidade, as funções normais (ou Gaussianas) para uma única variável aleatória e para um vetor aleatório N-dimensional são apresentadas. As funções Gaussianas são frequentemente utilizadas para a representação de campos aleatórios em problemas de engenharia.

Uma variável aleatória  $X$  é dita Gaussiana se a sua função de densidade de probabilidade é definida por

$$f_X(x) = \frac{1}{Std[X]\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - E[X]}{Std[X]}\right)^2\right], \quad (4.30)$$

que depende unicamente do valor esperado  $E[X]$  e do desvio padrão  $Std[X]$  da variável aleatória  $X$ . Estes parâmetros caracterizam completamente qualquer distribuição de probabilidade Gaussiana de uma única variável aleatória.

Um vetor aleatório  $\mathbf{X}$  é dito Gaussiano se a sua função de densidade de probabilidade multi variável é definida por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det \mathbf{S}]^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}]) \right], \quad (4.31)$$

que depende unicamente do valor esperado  $E[\mathbf{X}] = [E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_N]]^T$  e da matriz de covariâncias  $\mathbf{S}$  do vetor  $\mathbf{X}$ , que é definida como

$$\mathbf{S} = E \left[ (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T \right], \quad (4.32)$$

tal que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} Var[X_1] & Cov[X_1, X_2] & \cdots & Cov[X_1, X_N] \\ Cov[X_2, X_1] & Var[X_2] & \cdots & Cov[X_2, X_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[X_N, X_1] & Cov[X_N, X_2] & \cdots & Var[X_N] \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

## 4.2 CAMPOS ALEATÓRIOS

Em muitos cálculos estruturais é necessário a utilização de campos aleatórios para a representação de incertezas em alguns parâmetros do modelo (LI; KIUUREGHIAN, 1993). Como exemplo, pode-se citar a variabilidade espacial aleatória da geometria e das propriedades do material de uma estrutura mecânica.

Um campo aleatório real e escalar  $H(\mathbf{t})$  é uma coleção de variáveis aleatórias, onde  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$  representa as coordenadas de um ponto em um espaço  $d$ -dimensional (VANMARCKE, 1983). Em aplicações práticas de engenharia estrutural, considerando somente variações no espaço, tem-se  $d = 1, 2$  ou  $3$  (SUDRET, 2007). Um campo aleatório é dito unidimensional ou multidimensional de acordo com a dimensão  $d$  de  $\mathbf{t}$ , ou seja,  $d = 1$  ou  $d > 1$  (SUDRET, 2007).

As informações de segunda ordem relativas a variação ponto a ponto estão presentes na função de covariâncias  $Cov[H(\mathbf{t}), H(\mathbf{t}')]$ , que



representa a covariância entre valores do campo aleatório nos pontos  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}'$  (VANMARCKE, 1983). A função de covariâncias é determinada como

$$Cov [H(\mathbf{t}), H(\mathbf{t}')] = \mu(\mathbf{t}, \mathbf{t}') Var [H(\mathbf{t})] Var [H(\mathbf{t}')], \quad (4.34)$$

onde  $Var [H(\mathbf{t})]$  e  $Var [H(\mathbf{t}')]$  são as funções da variância do campo aleatório em  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}'$ , respectivamente, e  $\mu(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$  é a função de correlação do campo aleatório (SUDRET, 2007).

Quando  $E [H(\mathbf{t})]$ , que representa a função do valor esperado do campo aleatório, e  $Var [H(\mathbf{t})]$  são constantes e  $\mu(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$  depende unicamente das diferenças  $t_i - t'_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , o campo é dito homogêneo (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

Além destas classificações, os campos aleatórios podem ser ditos Gaussianos ou não Gaussianos. Campos aleatórios Gaussianos são completamente descritos por meio de  $E [H(\mathbf{t})]$  e de  $Cov [H(\mathbf{t}), H(\mathbf{t}')] (SUDRET, 2007).$

#### 4.2.1 Modelos de autocorrelação homogêneos

Para a definição da função de covariâncias, Eq. (4.34), é necessária a definição da função de correlação  $\mu(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$ . Existem alguns modelos de função de correlação, apresentados a seguir, que são frequentemente utilizados na literatura (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000):

- Exponencial

$$\mu_A(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \exp \left( -\frac{|\mathbf{t} - \mathbf{t}'|}{a} \right); \quad (4.35)$$

- Exponencial ao quadrado

$$\mu_B(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \exp \left( -\frac{|\mathbf{t} - \mathbf{t}'|^2}{a^2} \right); \quad (4.36)$$

- Seno cardeal

$$\mu_C(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \frac{\sin \left( \frac{2.2|\mathbf{t} - \mathbf{t}'|}{a} \right)}{\frac{2.2|\mathbf{t} - \mathbf{t}'|}{a}}; \quad (4.37)$$

onde  $a$  é uma medida de taxa de flutuação espacial do campo aleatório, também conhecido como tamanho de correlação (LI; KIUREGHIAN, 1993).

De uma forma geral, quanto maior o valor do comprimento de correlação  $\alpha$ , menor é a taxa de flutuação do campo aleatório.

Na maioria das aplicações práticas, é necessária a representação de um campo aleatório contínuo em termos de um vetor finito de variáveis aleatórias (LI; KIUREGHIAN, 1993). Essa transformação é denominada de discretização de campos aleatórios.

Conforme apresentado em Sudret e Kiureghian (2000), quando o modelo de correlação exponencial  $\mu_A(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$  é utilizado, maiores são os erros associados comparando-se o campo discretizado com o campo contínuo, considerando qualquer método de discretização de campos aleatórios (apresentados na próxima subseção). Isto ocorre devido ao campo aleatório Gaussiano, considerando este modelo de correlação, ser não diferenciável (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000). Desta forma, em aplicações práticas, se não existem evidências da forma do modelo de correlação, os modelos  $\mu_B(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$  ou  $\mu_C(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$  podem ser utilizados (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

#### 4.2.2 Métodos de discretização de campos aleatórios

Vários métodos para a discretização de campos aleatórios foram propostos na literatura, sendo que os mais conhecidos e estudados são:

- Método do ponto médio (MP - *MidPoint*) (KIUREGHIAN; KE, 1988);
- Método da média espacial (SA - *Spatial Average*) (VANMARCKE; GRIGORIU, 1983);
- Método das funções de forma (SF - *Shape Functions*) (LIU; BELYTSCHKO; MANI, 1986b);
- Método da estimativa linear ótima (OLE - *Optimal Linear Estimation*) (LI; KIUREGHIAN, 1993);
- Expansão Karhunen-Loève (KL) (GHANEM; SPANOS, 2003);
- Expansão em séries ortogonais (OSE - *Orthogonal Series Expansion*) (ZHANG; ELLINGWOOD, 1994);
- Expansão estimativa linear ótima (EOLE - *Expansion Optimal Linear Estimation*) (LI; KIUREGHIAN, 1993).

Análises comparativas de desempenho entre os métodos MP, SA, SF e OLE são feitas em Li e Kiureghian (1993), onde verifica-se que o método OLE é superior em performance em todos os casos analisados enquanto o método MP é inferior em todos os casos analisados. Além disso, independente do método de discretização e da função de correlação considerados, o erro do campo discretizado (em relação ao campo contínuo) aumenta com o tamanho do elemento do campo aleatório normalizado pelo tamanho de correlação  $l/a$ . Ou seja, para tamanhos de correlação  $a$  pequenos, deve-se utilizar um tamanho de elemento do campo aleatório  $l$  pequeno com o intuito de garantir pequenos erros em relação ao campo contínuo.

Os métodos de expansão em séries (KL, OSE e EOLE) são comparados em Sudret e Kiureghian (2000), onde verifica-se que o método KL apresenta os melhores resultados, seguido dos métodos EOLE e OSE.

Cada método de discretização citado possui sua particularidade. Teoricamente, se a malha de discretização do campo aleatório for extremamente refinada (se o tamanho do elemento tender a zero), considerando os métodos MP, SA, SF e OLE, o resultado obtido será o mesmo (LI; KIUREGHIAN, 1993). O mesmo pode ser dito sobre os métodos de expansão em séries KL, OSE e EOLE. Se o número de termos utilizados na expansão tender a infinito, o resultado obtido será o mesmo (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

Normalmente, na literatura, os métodos de expansão em séries são utilizados junto ao método espectral para a quantificação de incertezas (GHANEM; SPANOS, 2003), enquanto os outros métodos são utilizados junto ao método de perturbação (KLEIBER; HIEN, 1992), mas isto não é uma regra. Métodos de expansão em séries também podem ser utilizados junto ao método da perturbação, conforme mostrado em Sudret e Kiureghian (2000), Lepage (2006).

Vale salientar que os métodos MP, SA e SF podem ter uma melhora significativa na eficiência computacional utilizando a abordagem de desacoplamento apresentada em Liu, Belytschko e Mani (1986b).

Neste trabalho optou-se pela utilização do método MP devido a sua simplicidade de implementação junto ao método de perturbação. No método MP, o valor do campo aleatório sobre um elemento é considerado constante e é representado pelo valor do campo no ponto central do elemento (KIUREGHIAN; KE, 1988), de forma que uma realização deste campo é uma função que apresenta descontinuidades ao longo do contorno dos elementos (LI; KIUREGHIAN, 1993). Os valores esperados e a

matriz de covariâncias dos parâmetros de entrada que apresentam incertezas são obtidos diretamente por meio dos valores médios, das variâncias e da função de correlação (LI; KIUREGHIAN, 1993). Vale salientar que este método pode ser utilizado tanto para a discretização de campos Gaussianos como para a discretização de campos não Gaussianos (LEPAGE, 2006; MATTHIES et al., 1997).

### 4.3 MÉTODO DA PERTURBAÇÃO PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

O método de perturbação para propagação de incertezas na análise estrutural tem sido utilizado por diversos autores na literatura Kleiber e Hien (1992), Sudret e Kiureghian (2000), Liu, Belytschko e Mani (1986b), Liu, Belytschko e Mani (1986a), Matthies et al. (1997).

Neste trabalho, a abordagem de perturbação de segunda ordem é utilizada para a representação dos deslocamentos e a abordagem de primeira ordem para a representação das tensões de von Mises.

Inicialmente o campo de deslocamentos de segunda ordem é obtido e a técnica de desacoplamento é apresentada conforme Lepage (2006). A obtenção das tensões de von Mises é apresentada posteriormente. Por último é apresentado um breve estudo da validade do método da perturbação.

#### 4.3.1 Campo de deslocamentos

Considerando que qualquer parâmetro  $z$  que apresenta incerteza pode ser representado em função de uma variável aleatória com média zero  $\alpha$  como

$$z(\alpha) = z^0(1 + \alpha), \quad (4.38)$$

onde  $z^0$  representa a parte determinística de  $z$ . Agora, dada a equação de equilíbrio de deslocamentos para problemas lineares elásticos

$$\mathbf{K}(\alpha)\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{F} \quad (4.39)$$

e considerando que as propriedades do material associadas à rigidez oscilam como um processo estocástico espacial, a matriz de rigidez global  $\mathbf{K}(\alpha)$  e o vetor de deslocamentos global  $\mathbf{U}(\alpha)$  podem ser expandidos em séries

de Taylor em torno do valor médio

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j, \quad (4.41)$$

onde  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$  representa um vetor aleatório com média zero,  $E[\alpha_i] = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $(\cdot)^0$ ,  $(\cdot)_i^I$  e  $(\cdot)_{ij}^{II}$  representam os coeficientes de ordem zero, um e dois, associados às derivadas em relação às variáveis aleatórias, respectivamente, e  $N$  representa o número de variáveis aleatórias. Os termos de ordem um  $\mathbf{K}_i^I$  e dois  $\mathbf{K}_{ij}^{II}$  podem ser obtidos por meio da derivada da matriz de rigidez global

$$\mathbf{K}_i^I = \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}, \quad (4.43)$$

em relação às variáveis de projeto.

Substituindo as Eqs. (4.40) e (4.41) na Eq. (4.39) e separando por ordem de perturbação, obtém-se

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{U}^0 = \mathbf{F}^0, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{U}_i^I = -\mathbf{K}_i^I \mathbf{U}^0, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{U}_{ij}^{II} = -2\mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0, \quad (4.46)$$

onde  $\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}$ , pois as forças aplicadas não dependem das propriedades do material associadas à rigidez.

Com o intuito de obter um menor custo computacional, após a aplicação das condições de contorno na Eq. (4.44), a fatoração da matriz de rigidez global determinística  $\mathbf{K}^0$  pode ser feita uma única vez de forma que apenas substituições são necessárias para a obtenção de  $\mathbf{U}_i^I$  e  $\mathbf{U}_{ij}^{II}$ .

O vetor de deslocamentos esperados pode ser obtido calculando o valor esperado da aproximação de segunda ordem em série de Taylor, Eq. (4.41), tal que

$$E[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = E \left[ \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j \right], \quad (4.47)$$

onde, a partir da Eq. (4.26), como  $E[\alpha_i] = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tem-se que  $E[\alpha_i \alpha_j] = Cov[\alpha_i, \alpha_j]$ . Então, pode-se escrever Eq (4.47) como

$$E[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} S_{ij}, \quad (4.48)$$

onde  $S_{ij}$  é a componente  $ij$  da matriz de covariâncias obtida pela discretização do campo aleatório.

A matriz de covariâncias dos deslocamentos pode ser obtida como

$$Cov[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = E \left[ (\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}) - E[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})]) (\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}) - E[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})])^T \right], \quad (4.49)$$

onde é utilizada a aproximação de primeira ordem dos deslocamentos, que pode ser obtida truncando a Eq. (4.41), de forma que o valor esperado dos deslocamentos neste caso é o próprio valor médio  $E[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = \mathbf{U}^0$ , tal que

$$Cov[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = E \left[ \left( \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i - E \left[ \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i \right] \right) \left( \mathbf{U}^0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j^I \alpha_j - E \left[ \mathbf{U}^0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j^I \alpha_j \right] \right)^T \right], \quad (4.50)$$

$$Cov[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = E \left[ \left( \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i - \mathbf{U}^0 \right) \left( \mathbf{U}^0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j^I \alpha_j - \mathbf{U}^0 \right)^T \right] \quad (4.51)$$

e

$$Cov[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = E \left[ \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i \right) \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j^I \alpha_j \right)^T \right], \quad (4.52)$$

então

$$Cov [\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_j^I)^T S_{ij}. \quad (4.53)$$

Devido ao truncamento das séries de Taylor nas Eqs. (4.40) e (4.41) apenas aproximações de segunda ordem podem ser obtidas. A aproximação de primeira ordem da matriz de covariâncias é utilizada neste trabalho, pois os momentos centrais de terceira e quarta ordem são necessários no cálculo da matriz de covariâncias de segunda ordem (KLEIBER; HIEN, 1992), o que é impossível de ser realizado na prática para campos não Gaussianos (STEFANOU, 2009), pois a função de densidade de probabilidade multi variável deve ser conhecida (MATTHIES et al., 1997). Devido a aproximação pobre considerada no cálculo da matriz de covariâncias dos deslocamentos, o método da perturbação fica limitado a pequenas variações nos parâmetros de entrada, geralmente menor que 10% ou 20% dos valores médios, para obter resultados com uma boa exatidão (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

Deve-se salientar que o método da perturbação pode ser utilizado considerando-se qualquer distribuição de probabilidade nos parâmetros de entrada, mas ele fica limitado em aproximações de segunda e de primeira ordem, apresentadas nas Eqs. (4.48) e (4.53), para os deslocamentos esperados e para a matriz de covariâncias dos deslocamentos, respectivamente (STEFANOU, 2009).

Quando campos Gaussianos são considerados, aproximações de mais alta ordem podem ser facilmente utilizadas, pois os momentos centrais de mais alta ordem podem ser escritos em função de momentos centrais de segunda ordem. Como exemplo, pode-se escrever a matriz de covariâncias de segunda ordem dos deslocamentos, que pode ser obtida por meio da Eq. (4.49), onde agora é utilizada a aproximação de segunda ordem dos deslocamentos, Eq. (4.41), e a aproximação de segunda ordem do valor esperado dos deslocamentos, Eq. (4.48). Retirando a notação de dependência dos deslocamentos  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})$  em relação às variáveis aleatórias  $\boldsymbol{\alpha}$  por conveniência, da Eq. (4.49), tem-se

$$Cov [\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E \left[ (\mathbf{U} - E[\mathbf{U}]) (\mathbf{U} - E[\mathbf{U}])^T \right], \quad (4.54)$$

tal que

$$\begin{aligned}
 Cov[\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E \left[ \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} S_{ij} \right) \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k^I \alpha_k \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{kl}^{II} S_{kl} \right)^T \right], \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Cov[\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_j^I)^T \alpha_i \alpha_j \right. \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_{jk}^{II})^T \alpha_i \alpha_j \alpha_k \\
 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_{jk}^{II})^T \alpha_i S_{jk} \\
 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_k^I)^T \alpha_i \alpha_j \alpha_k \\
 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_{kl}^{II})^T \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l \\
 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_{kl}^{II})^T \alpha_i \alpha_j S_{kl} \\
 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_k^I)^T S_{ij} \alpha_k \\
 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_{kl}^{II})^T S_{ij} \alpha_k \alpha_l \\
 \left. + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_{kl}^{II})^T S_{ij} S_{kl} \right], \quad (4.56)
 \end{aligned}$$



onde, considerando variáveis aleatórias Gaussianas (MATTHIES et al., 1997), tem-se que

$$E[\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k] = 0, \quad (4.57)$$

$$E[\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \alpha_l] = S_{ij}S_{kl} + S_{il}S_{jk} + S_{ik}S_{jl}, \quad (4.58)$$

tal que

$$\begin{aligned} Cov[\mathbf{U}, \mathbf{U}] &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} (\mathbf{U}_{kl}^{II})^T (S_{il}S_{jk} + S_{ik}S_{jl}) \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_j^I)^T S_{ij}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Verifica-se que existe a necessidade do cálculo de somatórios quádruplos para a obtenção da matriz de covariâncias de segunda ordem dos deslocamentos, o que aumenta muito o custo computacional. Além disso, a Eq. (4.59), conforme mencionado anteriormente, se limita a variáveis aleatórias Gaussianas.

Neste trabalho, a aproximação de segunda ordem da matriz de covariâncias dos deslocamentos não foi utilizada na análise de sensibilidades e, conseqüentemente, não foi utilizada nos procedimentos de otimização, devido ao elevado custo computacional associado.

Para o leitor interessado, o método de perturbação com expansões de mais alta ordem é estudado em Kamiński (2007).

### 4.3.2 Técnica de desacoplamento de variáveis aleatórias

Para evitar os somatórios duplos necessários no cálculo no valor esperado dos deslocamentos, Eq. (4.48), e na matriz de covariâncias dos deslocamentos, Eq. (4.53), e reduzir o custo computacional associado, uma transformação pode ser realizada com o intuito de desacoplar as variáveis aleatórias (LIU; BELYTSCHKO; MANI, 1986b).

A técnica de desacoplamento pode ser realizada através de um problema de autovalores e autovetores. Esta técnica consiste na transformação de um conjunto de variáveis aleatórias correlacionadas  $\alpha$  em um conjunto de variáveis aleatórias não correlacionadas  $c$ . O procedimento consiste na diagonalização da matriz de covariâncias  $\mathbf{S}$  (real e simétrica

por construção), assumindo-se que ela é positivo definida, pela seguinte transformação ortogonal

$$\Theta = \Phi^T \mathbf{S} \Phi, \quad (4.60)$$

onde  $\Theta$  é uma matriz diagonal que contém os autovalores de  $\mathbf{S}$  e  $\Phi$  é uma matriz onde as colunas são os autovetores correspondentes. O conjunto de variáveis não correlacionadas em relação ao conjunto de variáveis correlacionadas  $\alpha$  é dado por

$$\mathbf{c} = \Phi^T \alpha. \quad (4.61)$$

O valor esperado e a matriz de covariâncias de  $\mathbf{c}$  são dados por

$$E[\mathbf{c}] = \Phi^T E[\alpha], \quad (4.62)$$

$$Cov[\mathbf{c}, \mathbf{c}] = \Phi^T \mathbf{S} \Phi = \Theta. \quad (4.63)$$

As derivadas primeira e segunda de qualquer matriz  $\mathbf{M}$  em relação a  $\mathbf{c}$  são escritas em termos de  $\alpha$  como (LEPAGE, 2006)

$$\mathbf{M}_{\tilde{i}}^{\tilde{i}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial c_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_j} = \sum_{j=1}^N \Phi_{ji} \mathbf{M}_j^I, \quad (4.64)$$

e

$$\mathbf{M}_{\tilde{i}\tilde{i}}^{\tilde{i}\tilde{i}} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial c_i^2} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_i} \frac{\partial \alpha_k}{\partial c_i} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \Phi_{ji} \Phi_{ki} \mathbf{M}_{jk}^{II}, \quad (4.65)$$

onde os índices  $(\tilde{i})_i$  e  $(\tilde{i}\tilde{i})_{ii}$  representam as derivadas em relação às variáveis não correlacionadas e  $\Phi_{ji}$  e  $\Phi_{ki}$  representam as componentes  $ji$  e  $ki$  da matriz de autovetores, respectivamente.

Usando as Eqs. (4.64) e (4.65) pode-se reescrever as equações de equilíbrio de ordem um, Eq. (4.45), e dois, Eq. (4.46), como

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{U}_i^{\tilde{i}} = -\mathbf{K}_i^{\tilde{i}} \mathbf{U}^0, \quad (4.66)$$

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{U}_{ii}^{\tilde{i}\tilde{i}} = -2\mathbf{K}_i^{\tilde{i}} \mathbf{U}_i^{\tilde{i}} - \mathbf{K}_{ii}^{\tilde{i}\tilde{i}} \mathbf{U}^0. \quad (4.67)$$

O vetor de deslocamentos esperados de segunda ordem e a matriz de covariâncias dos deslocamentos de primeira ordem podem ser escritos em relação ao conjunto de variáveis não correlacionadas como

$$E[\mathbf{U}(\alpha)] = \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{ii}^{\tilde{i}\tilde{i}} \Theta_{ii}, \quad (4.68)$$

$$Cov [\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} \left( \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} \right)^T \Theta_{ii}, \quad (4.69)$$

onde, em geral, apenas um pequeno número de modos dominantes  $\tilde{N}$ , com  $\tilde{N} \ll N$ , é necessário para descrever as principais características de muitos campos aleatórios discretizados com uma exatidão aceitável (KLEIBER; HIEN, 1992). Na prática, quanto mais próximo o conjunto de variáveis aleatórias está de um conjunto de variáveis perfeitamente correlacionadas, menor é o número necessário de modos dominantes  $\tilde{N}$  para descrever o campo aleatório discretizado. Como os maiores modos são dominantes, pode-se obter  $\tilde{N}$  que satisfaz

$$\frac{tr(\mathbf{S}) - tr(\tilde{\Theta}(\tilde{N}))}{tr(\mathbf{S})} = \varepsilon, \quad (4.70)$$

onde  $tr()$  é o operador traço,  $\tilde{\Theta}$  é a matriz diagonal que contém os maiores  $\tilde{N}$  autovalores de  $\mathbf{S}$  e  $\varepsilon$  é uma tolerância definida pelo projetista.

Desta forma, pode-se reescrever as Eqs. (4.68) e (4.69) como

$$E[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{U}_{ii}^{\tilde{I}\tilde{I}} \Theta_{ii}, \quad (4.71)$$

$$Cov[\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha})] = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} \left( \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} \right)^T \Theta_{ii}. \quad (4.72)$$

### 4.3.3 Campo de tensões

Neste trabalho apenas as aproximações de primeira ordem, considerando a abordagem tradicional de perturbação (KLEIBER; HIEN, 1992), são utilizadas no cálculo dos valores esperados e das variâncias das tensões equivalentes de von Mises em cada ponto de cálculo de tensão, devido ao elevado custo computacional associado à posterior análise de sensibilidade. Desta forma, o método da perturbação torna-se ainda mais limitado. Em geral variações menores que 10% podem ser utilizadas para a obtenção de resultados com uma boa exatidão (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000).

O mesmo procedimento adotado no cálculo do campo de deslocamentos, considerando o método da perturbação, pode ser utilizado para a obtenção da tensão equivalente de von Mises. Inicialmente, considerando

que as propriedades do material associadas à rigidez oscilam como um processo estocástico espacial, uma expansão em séries de Taylor de primeira ordem da tensão equivalente de von Mises em um ponto  $k$  pode ser realizada em torno do valor médio

$$\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) = (\sigma_{eq}^0)_k + \sum_{i=1}^N (\sigma_{eq}^I)_{k,i} \alpha_i, \quad (4.73)$$

onde

$$(\sigma_{eq}^I)_{k,i} = \left. \frac{\partial \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}. \quad (4.74)$$

A derivada de  $\sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha})$  em relação a variável aleatória  $\alpha_i$ , considerando estado plano, considerando que  $\mathbf{B}_k$  é determinística e considerando que  $\mathbf{u}_k(\boldsymbol{\alpha})$  e  $\overline{\mathbf{C}}_k(\boldsymbol{\alpha})$  são variáveis aleatórias por dependerem das propriedades do material associadas à rigidez, pode ser obtida derivando as Eqs. (3.27), (3.29) e (3.30), tal que

$$\begin{aligned} (\sigma_{eq}^I)_{k,i} &= \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k} \left[ (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \overline{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \overline{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^I)_k \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T (\overline{\mathbf{C}}_i^I)_k \mathbf{M} \overline{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \right], \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde

$$(\mathbf{u}_i^I)_k = \left. \frac{\partial \mathbf{u}_k(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}, \quad (4.76)$$

e

$$(\overline{\mathbf{C}}_i^I)_k = \left. \frac{\partial \overline{\mathbf{C}}_k(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}. \quad (4.77)$$

O valor esperado da tensão equivalente de von Mises em um ponto  $k$  pode ser obtido a partir da Eq. (4.73), tal que

$$E \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = E \left[ (\sigma_{eq}^0)_k + \sum_{i=1}^N (\sigma_{eq}^I)_{k,i} \alpha_i \right] = (\sigma_{eq}^0)_k. \quad (4.78)$$

Como na abordagem de perturbação os valores esperados de primeira ordem são os próprios valores determinísticos, é necessário somente o cálculo da variância das tensões equivalentes de von Mises.

Para calcular a variância da tensão equivalente de von Mises no ponto  $k$  pode-se utilizar a Eq. (4.13)

$$Var \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = E \left[ \left( \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) - E \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] \right)^2 \right], \quad (4.79)$$

tal que, substituindo as Eqs. (4.73) e (4.78) na Eq. (4.79), obtém-se

$$Var \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = E \left[ \left[ \sum_{i=1}^N (\sigma_{eq}^I)_{k,i} \alpha_i \right] \left[ \sum_{j=1}^N (\sigma_{eq}^I)_{k,j} \alpha_j \right] \right], \quad (4.80)$$

e

$$Var \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\sigma_{eq}^I)_{k,i} (\sigma_{eq}^I)_{k,j} S_{ij}. \quad (4.81)$$

Substituindo a Eq. (4.75) na Eq. (4.81) e usando a técnica de desacoplamento apresentada anteriormente, obtém-se a variância da tensão equivalente de von Mises no ponto  $k$

$$\begin{aligned} Var \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} \left\{ \left[ (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k \right]^2 \right. \\ &\quad + 2 \left[ (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k \right] \\ &\quad \times \left[ (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \right] \\ &\quad \left. + \left[ (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \right]^2 \right\} \Theta_{ii}. \quad (4.82) \end{aligned}$$

Definindo

$$b_{ki} = (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k, \quad (4.83)$$

e

$$d_{ki} = (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0, \quad (4.84)$$

pode-se reescrever a Eq. (4.82) em uma notação compacta como

$$Var \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} (b_{ki}^2 + 2b_{ki}d_{ki} + d_{ki}^2) \Theta_{ii}. \quad (4.85)$$

As covariâncias entre as tensões equivalentes de von Mises de pontos distintos não são obtidas, pois conforme será apresentado na seção de otimização topológica considerando incertezas, não são necessárias neste trabalho.

#### 4.3.4 Campo de tensões considerando incerteza no módulo de elasticidade e grandes tamanhos de correlação

A variância da tensão equivalente de von Mises calculada no ponto  $k$ , Eq. (4.82), pode ser simplificada para um tamanho de correlação especial e considerando incerteza somente no módulo de elasticidade. Se  $a \rightarrow \infty$ , então  $\tilde{N} \rightarrow 1$  e  $\mathbf{S} \rightarrow (Std[E])^2 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ , tal que calculando os autovalores e os autovetores de  $\mathbf{S}$ , obtém-se  $\Theta \rightarrow N(Std[E])^2$  e  $\Phi \rightarrow [\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}]^T$ , onde  $Std[E]$  é o desvio padrão do módulo de elasticidade.

Considerando que tem-se somente uma equação de equilíbrio de primeira ordem, pois  $\tilde{N} \rightarrow 1$ , de acordo com a Eq. (4.66)

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{U}^{\tilde{I}} = -\mathbf{K}^{\tilde{I}} \mathbf{U}^0, \quad (4.86)$$

onde

$$\mathbf{K}^{\tilde{I}} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \mathbf{K}_j^I = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_j^I. \quad (4.87)$$

Como a rigidez depende linearmente do módulo de elasticidade

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{K}_j^I = \frac{\mathbf{K}^0}{E[E]}, \quad (4.88)$$

onde  $E[E]$  é o valor esperado do módulo de elasticidade.

Agora, substituindo a Eq. (4.88) na Eq. (4.87), obtém-se

$$\mathbf{K}^{\tilde{I}} = \frac{\mathbf{K}^0}{\sqrt{N}E[E]}, \quad (4.89)$$

tal que, substituindo a Eq. (4.89) na Eq. (4.86), obtém-se

$$\mathbf{U}^{\tilde{I}} = -\frac{\mathbf{U}^0}{\sqrt{N}E[E]}. \quad (4.90)$$

A derivada da matriz  $\bar{\mathbf{C}}_k$  em relação a uma variável aleatória pode ser obtida com

$$\left(\bar{\mathbf{C}}^I\right)_k = \sum_{j=1}^N \Phi_j \left(\bar{\mathbf{C}}_j^I\right)_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \left(\bar{\mathbf{C}}_j^I\right)_k, \quad (4.91)$$

e, como a matriz depende linearmente do módulo de elasticidade

$$\sum_{j=1}^N \left(\bar{\mathbf{C}}_j^I\right)_k = \frac{\bar{\mathbf{C}}_k^0}{E[E]}. \quad (4.92)$$

Agora, substituindo a Eq. (4.92) na Eq. (4.91), verifica-se que

$$\left(\bar{\mathbf{C}}^I\right)_k = \frac{\bar{\mathbf{C}}_k^0}{\sqrt{N}E[E]}. \quad (4.93)$$

Avaliando a variância da tensão equivalente de von Mises calculada no ponto  $k$ , Eq. (4.82), para  $\tilde{N} \rightarrow 1$ , tem-se que

$$\begin{aligned} Var \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] &= \frac{1}{\left(\sigma_{eq}^0\right)_k^2} \left\{ \left[ \left(\mathbf{u}_k^0\right)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \left(\mathbf{u}^I\right)_k \right]^2 \right. \\ &\quad + 2 \left[ \left(\mathbf{u}_k^0\right)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \left(\mathbf{u}^I\right)_k \right] \\ &\quad \times \left[ \left(\mathbf{u}_k^0\right)^T \mathbf{B}_k^T \left(\bar{\mathbf{C}}^I\right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \right] \\ &\quad \left. + \left[ \left(\mathbf{u}_k^0\right)^T \mathbf{B}_k^T \left(\bar{\mathbf{C}}^I\right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \right]^2 \right\} \Theta, \quad (4.94) \end{aligned}$$

e substituindo as Eqs. (4.90) e (4.93) na Eq. (4.94), após algumas manipulações, obtém-se

$$Var \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = 0. \quad (4.95)$$

Verifica-se que quando o tamanho de correlação tende a infinito  $a \rightarrow \infty$ , ou seja, quando as variáveis aleatórias estão fortemente correlacionadas, a variância da tensão equivalente de von Mises calculada no ponto  $k$ , Eq. (4.95), tende a zero.

Este fenômeno ocorre, neste caso onde existe incerteza apenas no módulo de elasticidade, pois quando se tem um grande tamanho de correlação, não se tem variação espacial das propriedades do material. A

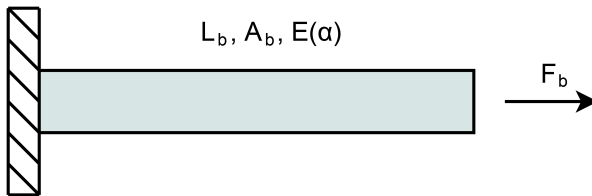
incerteza, neste caso, encontra-se unicamente na intensidade do módulo de elasticidade, pois quando  $a \rightarrow \infty$ , esta é uma grandeza homogênea.

Considerando o problema linear, elástico e isotrópico em estudo, desde que o material seja homogêneo, as tensões no ponto  $k$ , Eq. (3.29), e consequentemente a tensão equivalente de von Mises no ponto  $k$ , Eq. (3.27), não dependem do módulo de elasticidade, de forma que não são consideradas variáveis aleatórias e, consequentemente, apresentam um valor determinístico.

#### 4.3.5 Estudo da validade do método da perturbação

Esta seção apresenta um breve estudo da validade do método da perturbação. Um simples caso de uma barra fixa em uma extremidade, Figura 10, com uma força aplicada na extremidade livre, é estudado considerando incerteza no módulo de elasticidade.

Figura 10 – Barra fixa sujeita a força determinística na extremidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

A barra em estudo apresenta área da seção transversal  $A_b$ , comprimento  $L_b$ , força normal  $F_b$  e módulo de elasticidade  $E(\alpha)$ , que depende de uma variável aleatória de média zero  $\alpha$ , na forma  $E(\alpha) = E^0(1 + \alpha)$ , onde  $E^0$  representa o valor médio do módulo de elasticidade.

O deslocamento no ponto de aplicação da força, considerando um material linear, elástico e isotrópico, pode ser obtido como

$$U(\alpha) = \frac{F_b L_b}{E(\alpha) A_b} = \frac{F_b L_b}{E^0 (1 + \alpha) A_b}. \quad (4.96)$$

Para a obtenção do valor esperado  $E[U(\alpha)]$  e do desvio padrão  $Std[U(\alpha)]$  exatos do deslocamento, para posterior comparação com o método da perturbação, precisa-se conhecer a função de densidade de probabilidade  $f_\alpha(x)$  da variável aleatória  $\alpha$ .



Neste trabalho, conforme apresentado na seção dos resultados, campos aleatórios Gaussianos foram utilizados para a representação da incerteza no módulo de elasticidade. Conforme apresentado em Sudret e Kiureghian (2000), a escolha de distribuições Gaussianas é questionável para descrever grandezas que são de natureza positiva, como o módulo de elasticidade. Teoricamente, independente do desvio padrão utilizado, sempre existe a possibilidade de obtenção de uma realização que apresente um valor negativo, ou nulo, desta grandeza (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000). Para evitar este problema, pode-se considerar uma distribuição Gaussiana truncada para a variável aleatória  $\alpha$ , tal que (ELISHAKOFF, 1999)

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{\varsigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right], & -k\sigma \leq x \leq k\sigma \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.97)$$

onde  $\sigma$  representa o desvio padrão da distribuição Gaussiana que é truncada,  $k$  é uma constante real positiva e  $\varsigma$  é uma constante que depende de  $k$ , tal que

$$\varsigma = [2\text{erf}(k)]^{-1} = \left[2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy\right]^{-1}, \quad (4.98)$$

que pode ser avaliada numericamente. Existem diversas tabelas na literatura, como a apresentada em Elishakoff (1999), que também podem ser utilizadas para a obtenção de  $\text{erf}(k)$  e, conseqüentemente, de  $\varsigma$ .

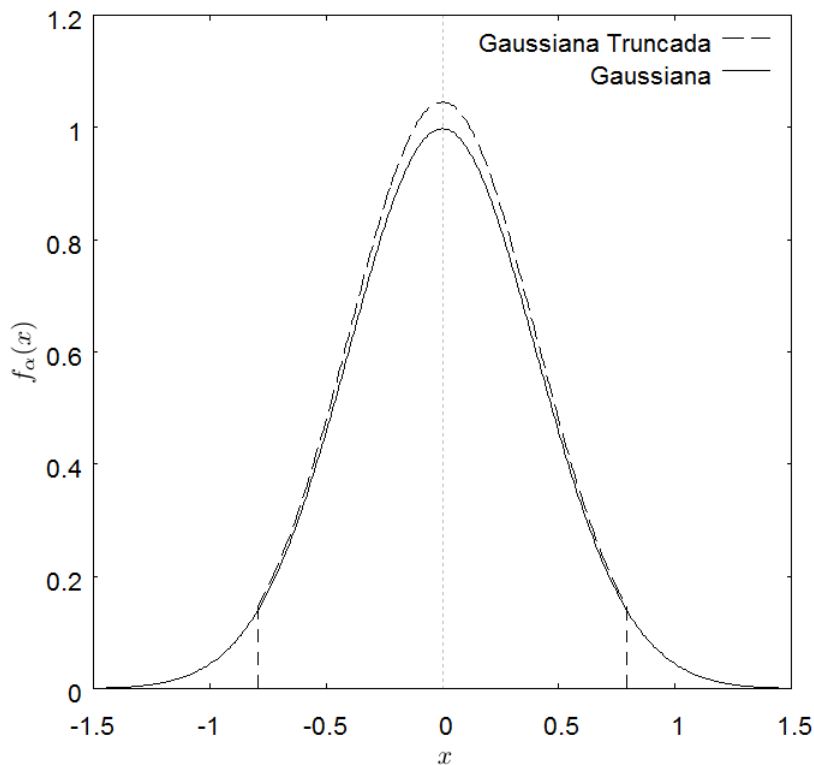
A função Gaussiana truncada, Eq. (4.97), poderia ser truncada apenas nos valores negativos de  $\alpha$ , mas optou-se por um truncamento simétrico para manter nula a média da variável aleatória. Para garantir um módulo de elasticidade sempre positivo, ou seja,  $E(\alpha) = E^0(1 + \alpha) > 0$ , deve-se considerar  $k\sigma < 1$ , de forma que  $\alpha > -1$ . A Figura 11 ilustra uma função de densidade de probabilidade Gaussiana e uma função Gaussiana truncada no intervalo  $\alpha \in (-1, 1)$ .

Deve-se salientar que a variância da variável aleatória  $\alpha$ , e conseqüentemente o seu desvio padrão, não é igual à variância da variável aleatória definida pela função de densidade de probabilidade Gaussiana com desvio padrão  $\sigma$ . Conforme apresentado em Elishakoff (1999), a variância da variável aleatória  $\alpha$  é definida como

$$\text{Var}[\alpha] = \sigma^2 \left\{ 1 - \varsigma \left[ \frac{2k}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) \right] \right\}. \quad (4.99)$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ , tem-se que  $\varsigma \rightarrow 1$  e  $\text{Var}[\alpha] \rightarrow \sigma^2$ , de forma que a variável aleatória  $\alpha$  se torna Gaussiana (ELISHAKOFF, 1999). Neste es-

Figura 11 – Funções de densidade de probabilidade Gaussiana e Gaussiana truncada de forma simétrica em  $-1 < \alpha < 1$ .



Fonte: Produção do próprio autor.

tudo, de todas as distribuições Gaussianas utilizadas, considerou-se um valor mínimo de  $k$  igual a 3. Para  $k = 3$ , tem-se, da Eq. (4.98),  $\zeta = 1.0027073$  e, da Eq. (4.99),  $Var[\alpha] = 0.9733369\sigma^2$ , tal que  $Std[\alpha] = \sqrt{Var[\alpha]} = 0.9865784\sigma$ . Desta forma, como  $\zeta \cong 1$  e  $Std[\alpha] \cong \sigma$ , verifica-se que as distribuições Gaussianas truncadas utilizadas neste trabalho são muito próximas a distribuições Gaussianas no intervalo  $-k\sigma \leq x \leq k\sigma$ . Quanto menor o valor de  $k$  utilizado, mais distinta fica a distribuição Gaussiana truncada da distribuição Gaussiana.

Conhecendo a função de densidade de probabilidade da variável

aleatória  $\alpha$ , pode-se obter o valor esperado e o desvio padrão do deslocamento  $U(\alpha)$ . Inicialmente, pode-se atribuir valores numéricos às variáveis determinísticas:  $A_b = 1$ ,  $L_b = 10$ ,  $F_b = 0.1$  e  $E^0 = 1$ , tal que

$$U(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha}. \quad (4.100)$$

Para a obtenção do valor esperado e do desvio padrão de referência do deslocamento (para posterior comparação com o método da perturbação), a simulação de Monte Carlo é utilizada. Este procedimento é frequentemente utilizado na literatura para a validação de outros métodos e consiste na atribuição de um conjunto de valores aleatórios numéricos à variável  $\alpha$ , na forma  $\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(N_m)}\}$ , de forma que para cada valor aleatório atribuído, um deslocamento  $U(\alpha)$  é calculado a partir da Eq. (4.100) (SUDRET, 2007). Então, o valor esperado e a variância podem ser obtidos como (SUDRET, 2007)

$$E_{MCS}[U(\alpha)] = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} U(\alpha^{(i)}), \quad (4.101)$$

$$Var_{MCS}[U(\alpha)] = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \left( U(\alpha^{(i)}) - E_{MCS}[U(\alpha)] \right)^2. \quad (4.102)$$

Quanto maior o conjunto de variáveis aleatórias utilizado, maior é a exatidão de  $E_{MCS}[U(\alpha)]$  e  $Var_{MCS}[U(\alpha)]$ . Neste estudo, um valor de  $N_m = 6 \times 10^6$  é utilizado devido aos recursos computacionais disponíveis.

Desta forma, pode-se obter o valor esperado e o desvio padrão do deslocamento por meio do método da perturbação para posterior comparação com os resultados de referência, obtidos com o MCS. Pode-se representar o deslocamento  $U(\alpha)$ , Eq. (4.100), utilizando uma expansão em série de Taylor de ordem  $N_t$  em torno de zero, tal que

$$U(\alpha) = \sum_{i=0}^{N_t} \left. \frac{d^i U(\alpha)}{d\alpha^i} \right|_{\alpha=0} \frac{\alpha^i}{i!}, \quad (4.103)$$

onde

$$\left. \frac{d^i U(\alpha)}{d\alpha^i} \right|_{\alpha=0} = (-1)^i i!, \quad (4.104)$$

de forma que

$$U(\alpha) = \sum_{i=0}^{N_t} (-1)^i \alpha^i = 1 + \sum_{i=1}^{N_t} (-1)^i \alpha^i. \quad (4.105)$$

O valor esperado do deslocamento aproximado por série de Taylor, Eq. (4.105), pode ser obtido como

$$E[U(\alpha)] = E \left[ 1 + \sum_{i=1}^{N_t} (-1)^i \alpha^i \right] = 1 + \sum_{i=1}^{N_t} (-1)^i E[\alpha^i], \quad (4.106)$$

onde  $E[\alpha] = 0$  e  $E[\alpha^2] = (Std[\alpha])^2$ . Os momentos de ordem superior  $E[\alpha^i]$ ,  $\forall i > 2$  podem ser obtidos conhecendo-se a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $\alpha$ . A partir deste ponto, considera-se que a variável aleatória  $\alpha$  é uma variável aleatória Gaussiana, de forma que pode-se obter os momentos de ordem superior como função do momento de segunda ordem. Conforme apresentado em Elishakoff (1999), considerando uma variável aleatória  $\alpha$  Gaussiana com média zero, quando  $i$  for ímpar,  $E[\alpha^i] = 0$  e, quando  $i$  for par

$$E[\alpha^i] = (i-1)!! (Std[\alpha])^i, \quad i = 2, 4, 6, \dots \quad (4.107)$$

onde  $(i-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (i-1)$ .

Pode-se escrever, então

$$E[\alpha^i] = \frac{[(-1)^i + 1]}{2} (i-1)!! (Std[\alpha])^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.108)$$

de forma que, quando  $i$  for ímpar, a Eq. (4.108) é zero, e quando  $i$  for par, a Eq. (4.108) resulta na Eq. (4.107).

Substituindo a Eq. (4.108) na Eq. (4.106), obtém-se uma expressão para o valor esperado de  $U(\alpha)$ , tal que

$$E[U(\alpha)] = 1 + \sum_{i=1}^{N_t} \frac{[(-1)^i + 1]}{2} (i-1)!! (Std[\alpha])^i. \quad (4.109)$$

Com o valor esperado, Eq. (4.109), pode-se obter a variância de  $U(\alpha)$ , utilizando a Eq. (4.13), tal que

$$Var[U(\alpha)] = E \left[ (U(\alpha) - E[U(\alpha)])^2 \right]. \quad (4.110)$$

Substituindo as Eqs. (4.105) e (4.109) na Eq. (4.110), obtém-se

$$Var [U(\alpha)] = E \left[ \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} (-1)^i \alpha^i - \frac{[(-1)^i + 1]}{2} (i-1)!! (Std[\alpha])^i \right\}^2 \right], \quad (4.111)$$

tal que

$$Var [U(\alpha)] = E \left[ \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} (-1)^i \alpha^i - \frac{[(-1)^i + 1]}{2} (i-1)!! (Std[\alpha])^i \right\} \times \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} (-1)^j \alpha^j - \frac{[(-1)^j + 1]}{2} (j-1)!! (Std[\alpha])^j \right\} \right], \quad (4.112)$$

então

$$\begin{aligned} Var [U(\alpha)] &= E \left[ \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} (-1)^{i+j} \alpha^{i+j} - (-1)^i \alpha^i \frac{[(-1)^j + 1]}{2} \right. \\ &\quad \times (j-1)!! (Std[\alpha])^j - (-1)^j \alpha^j \frac{[(-1)^i + 1]}{2} (i-1)!! \\ &\quad \times (Std[\alpha])^i + \frac{[(-1)^i + 1]}{2} (i-1)!! (Std[\alpha])^i \\ &\quad \left. \times \frac{[(-1)^j + 1]}{2} (j-1)!! (Std[\alpha])^j \right], \quad (4.113) \end{aligned}$$

de forma que obtém-se uma expressão para a variância do deslocamento  $U(\alpha)$  aproximado por série de Taylor como

$$\begin{aligned} Var [U(\alpha)] &= \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{2} [(-1)^{i+j} + 1] (i+j-1)!! (Std[\alpha])^{i+j} \\ &\quad - \frac{1}{4} [(-1)^i + 1] (i-1)!! (Std[\alpha])^i [(-1)^j + 1] (j-1)!! \\ &\quad \times (Std[\alpha])^j, \quad (4.114) \end{aligned}$$

tal que

$$Std [U(\alpha)] = \sqrt{Var [U(\alpha)]}. \quad (4.115)$$

Com as expressões do valor esperado  $E [U(\alpha)]$ , Eq. (4.109), e do desvio padrão  $Std [U(\alpha)]$ , Eq. (4.115), pode-se calcular estas grandezas

considerando diferentes desvios padrão de entrada  $Std[\alpha]$  e diferentes ordens  $N_t$ , para as aproximações em série de Taylor. Verifica-se que estas expressões se limitam a variáveis aleatórias  $\alpha$  Gaussianas para  $N_t > 2$  considerando o valor esperado e para  $N_t > 1$  considerando o desvio padrão do deslocamento, devido à necessidade de momentos de ordem superior.

Conforme mencionado anteriormente, comparações entre a abordagem MCS e o método da perturbação são realizadas. Para a obtenção dos valores esperados  $E_{MCS}[U(\alpha)]$  e dos desvios padrão  $Std_{MCS}[U(\alpha)] = \sqrt{Var_{MCS}[U(\alpha)]}$  utilizando-se o MCS, a distribuição Gaussiana truncada, Eq. (4.97), é utilizada para representar a variável aleatória  $\alpha$ . Para a obtenção destas mesmas grandezas considerando o método da perturbação, uma distribuição Gaussiana

$$f_{\alpha}(x)_{Gauss} = \frac{1}{Std[\alpha]\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{Std[\alpha]}\right)^2\right], \quad (4.116)$$

é utilizada para representar a variável aleatória  $\alpha$ .

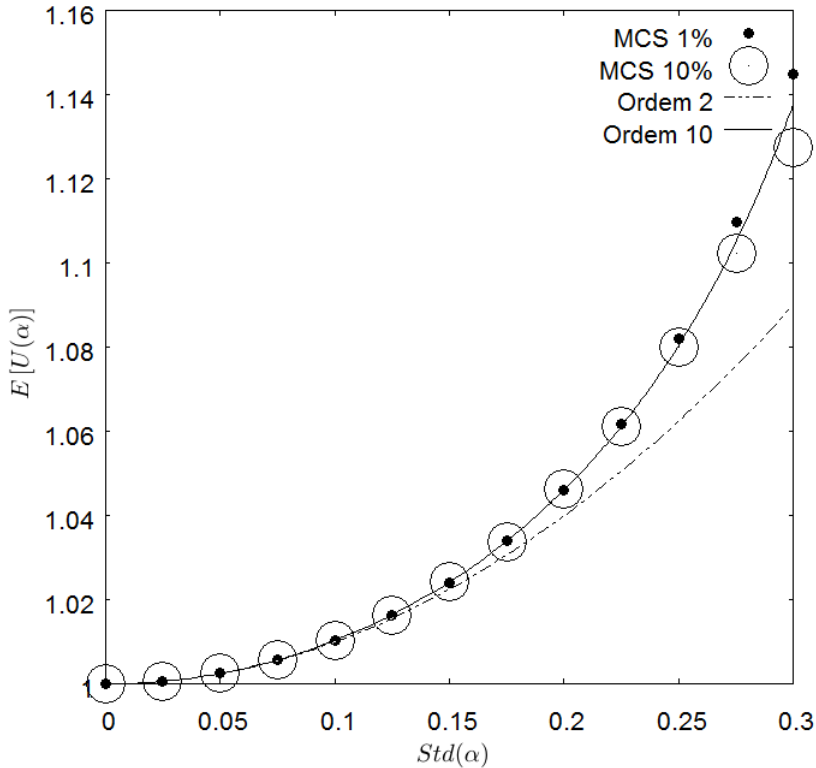
Teoricamente dois problemas distintos estão sendo comparados, com duas funções de densidade de probabilidade distintas. Na prática, para grandes valores de  $k$  na Eq. (4.97), conforme discutido anteriormente, tem-se funções de densidade de probabilidade similares dentro do intervalo  $-k\sigma \leq x \leq k\sigma$ . Desta forma, algumas comparações são realizadas para verificar até que ponto pode-se representar uma função de densidade de probabilidade Gaussiana truncada utilizando-se o método da perturbação para variáveis Gaussianas.

Considerando o método MCS, dois valores mínimos distintos são considerados para o truncamento:  $k\sigma = 0.99$  e  $k\sigma = 0.9$ , de forma que os módulos de elasticidade menores que  $1\%E^0$  e  $10\%E^0$  e maiores que  $199\%E^0$  e  $190\%E^0$ , respectivamente, não são considerados.

Nas Figuras 12 e 13 pode-se visualizar os gráficos dos valores esperados  $E[U(\alpha)]$  e dos desvios padrão  $Std[U(\alpha)]$ , respectivamente, em relação ao desvio padrão  $Std[\alpha]$ , considerando a abordagem de perturbação e o MCS.

Em ambas as figuras, verifica-se que os procedimentos de simulação de Monte Carlo levaram a resultados distintos dependendo do valor mínimo considerado a variável aleatória  $\alpha$ . Tanto os valores esperados como os desvios padrão do deslocamento resultaram maiores considerando um MCS com  $-0.99 < \alpha < 1.99$ . Isto é explicado devido a uma maior quantidade de valores mais próximos de zero no denominador de  $U(\alpha)$ , Eq.

Figura 12 – Valores esperados  $E[U(\alpha)]$  para diferentes desvios padrão  $Std[\alpha]$ , considerando aproximações de segunda e décima ordem e simulações de Monte Carlo com  $-0.99 < \alpha < 1.99$  e  $-0.9 < \alpha < 1.9$ .

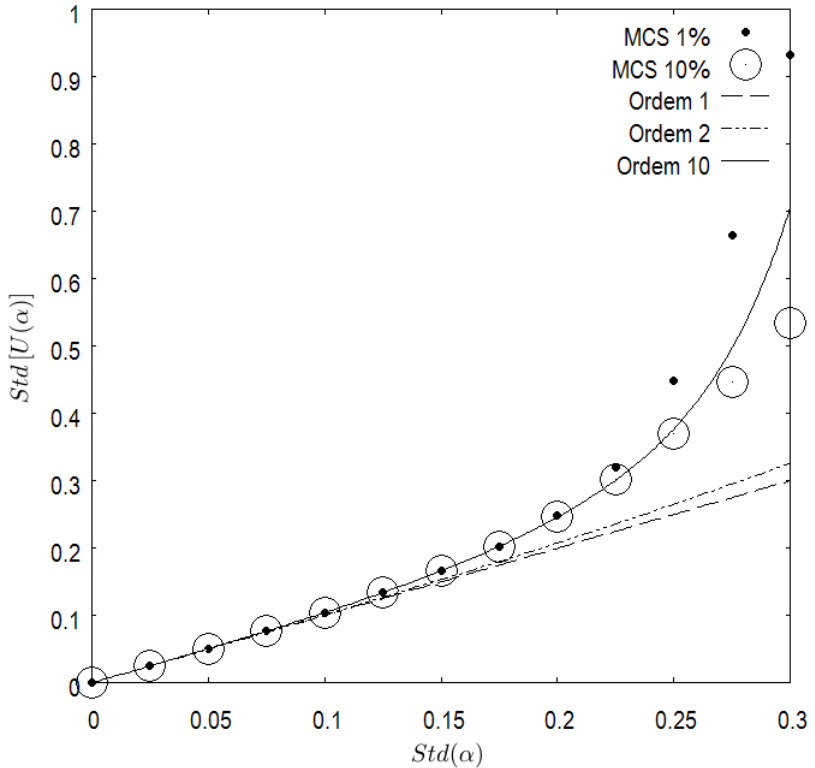


Fonte: Produção do próprio autor.

(4.100). Quando os valores de  $\alpha$  tendem para  $-1$  pela direita, o valor de  $U(\alpha)$  tende a  $+\infty$ , de forma que maiores serão os valores de  $E_{MCS}[U(\alpha)]$ , Eq. (4.101), e  $Var_{MCS}[U(\alpha)]$ , Eq. (4.102), conseqüentemente. Quando grandes desvios padrão são considerados, maior é a probabilidade de obtenção de realizações de  $\alpha$  próximas aos limites mínimos definidos *a priori*.

Verifica-se, também, que até aproximadamente um desvio padrão  $Std[\alpha]$  de 0.2, os valores numéricos referentes às simulações de Monte

Figura 13 – Desvios padrão  $Std[U(\alpha)]$  para diferentes desvios padrão  $Std[\alpha]$ , considerando aproximações de segunda e décima ordem e simulações de Monte Carlo com  $-0.99 < \alpha < 1.99$  e  $-0.9 < \alpha < 1.9$ .



Fonte: Produção do próprio autor.

Carlo são idênticos. Isto ocorre, pois quanto menor o desvio padrão  $Std[\alpha]$  considerado, menor a probabilidade de obtenção de uma realização  $\alpha$  próxima aos limites definidos *a priori*, de forma que fica-se afastado da singularidade em  $\alpha = -1$  em ambos os casos.

Agora, considerando a abordagem de perturbação, que é utilizada neste trabalho para a propagação de incertezas, pode-se fazer comparações com a abordagem MCS considerando pequenos desvios padrão ( $Std[\alpha] <$



0.2).

Observando-se a Figura 12, referente aos valores esperados do deslocamento, pode-se verificar que a abordagem de segunda ordem apresenta resultados praticamente idênticos aos obtidos por meio da abordagem MCS para  $Std[\alpha] < 0.1$ , enquanto a abordagem de décima ordem para  $Std[\alpha] < 0.2$ . O mesmo pode ser dito observando-se a Figura 13, referente aos desvios padrão do deslocamento. As abordagens de primeira e de segunda ordem apresentam resultados similares aos obtidos por meio da abordagem MCS para  $Std[\alpha] < 0.1$ , enquanto a abordagem de décima ordem para  $Std[\alpha] < 0.2$ .

Pode-se observar que, considerando uma variação pequena na variável aleatória  $\alpha$ , a abordagem de segunda ordem para o valor esperado e a abordagem de primeira ordem para o desvio padrão fornecem um resultado satisfatório. Abordagens de ordem superior apresentam um resultado melhor quando comparados à abordagem MCS, mas considerando problemas com várias variáveis aleatórias (como na seção de resultados deste trabalho), o custo computacional necessário seria muito elevado.

Pode-se então verificar que o método da perturbação pode ser utilizado considerando distribuições Gaussianas para a representação de grandezas de natureza positiva, como o módulo de elasticidade, desde que pequenas variações sejam consideradas. A distribuição de probabilidade real associada a essas grandezas nunca pode ser uma distribuição Gaussiana, sendo no máximo uma distribuição Gaussiana truncada, mas considerando pequenos desvios a distribuição Gaussiana truncada pode ser representada por uma distribuição Gaussiana.

Para propósitos ilustrativos, pode-se obter a função de densidade de probabilidade do deslocamento  $U(\alpha)$  dada a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $\alpha$ . Inicialmente, considera-se que a distribuição de  $\alpha$  é Gaussiana no intervalo  $-k\sigma \leq x \leq k\sigma$  (hipótese válida para pequenos desvios padrão de  $\alpha$ ), tal que

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{1}{Std[\alpha]\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{Std[\alpha]}\right)^2\right], & -k\sigma \leq x \leq k\sigma \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.117)$$

A função  $U(\alpha)$ ,  $\forall \alpha > -1$  (e consequentemente  $E(\alpha) > 0$ ), é estritamente monotônica decrescente. Desta forma, conforme apresentado em Elishakoff (1999), pode-se obter a função de densidade de probabilidade

do deslocamento  $U(\alpha)$  como

$$f_U(y) = -f_\alpha[\kappa(y)] \frac{d\kappa(y)}{dy}, \quad (4.118)$$

onde a função  $\kappa$  pode ser obtida isolando-se a variável aleatória  $\alpha$  na Eq. (4.100), tal que

$$\alpha = \kappa(U) = \frac{1}{U} - 1, \quad (4.119)$$

de forma que pode-se escrever a função de densidade de probabilidade do deslocamento  $U(\alpha)$  como

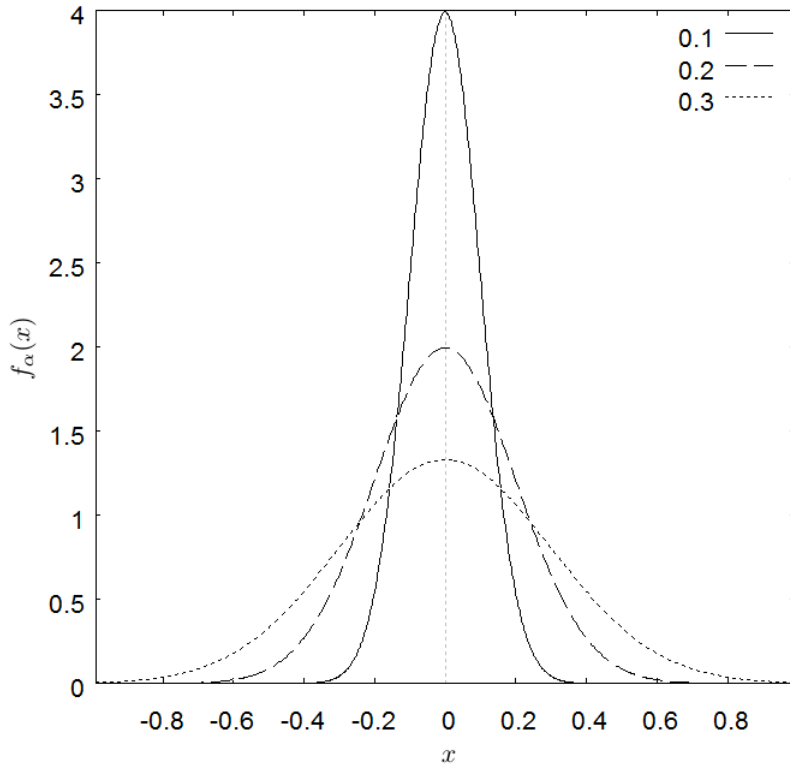
$$f_U(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2 Std[\alpha] \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{y} - 1}{Std[\alpha]} \right)^2 \right], & -k\sigma \leq \frac{1}{y} - 1 \leq k\sigma \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.120)$$

Nas Figuras 14 e 15 pode-se verificar as funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias  $\alpha$  e  $U(\alpha)$ , para  $k\sigma = 0.99$ , de forma que os limites das distribuições de probabilidade são, da Eq. (4.117),  $-0.99 \leq x \leq 0.99$  e, da Eq. (4.120),  $\frac{1}{1.99} \leq y \leq \frac{1}{0.01}$  (onde, para uma melhor visualização, foi utilizado o intervalo  $\frac{1}{1.99} \leq y \leq 3$ ).

Conforme mostrado na Eq. (4.120), a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $U(\alpha)$  não é uma distribuição Gaussiana se  $\alpha$  for Gaussiana no intervalo definido *a priori*. Mas, por meio da análise da Figura 15, verifica-se que as distribuições da variável aleatória  $U(\alpha)$  se aproximam de uma função de densidade de probabilidade Gaussiana a medida que  $Std[\alpha]$  diminui.

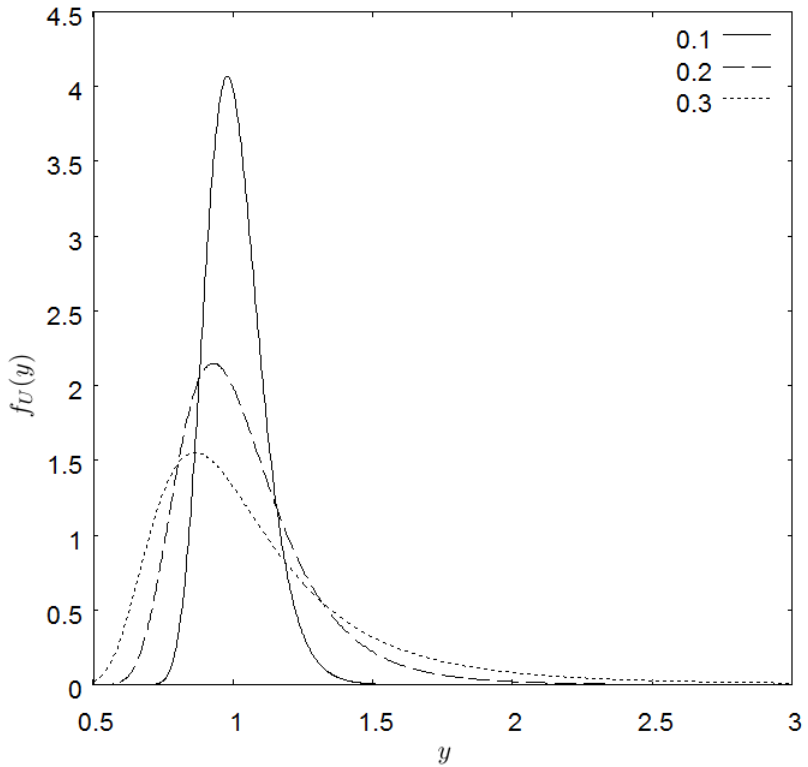
Conforme apresentado anteriormente, uma expansão em série de Taylor de baixa ordem consegue aproximar o valor esperado e o desvio padrão de resposta para valores baixos de desvios padrão de entrada. Isto ocorre devido a proximidade da função de densidade de probabilidade de resposta a uma função Gaussiana, considerando estes valores de desvios padrão de entrada, de forma que com um ou dois termos da expansão em série de Taylor é possível descrever as características da função de resposta de forma satisfatória.

Figura 14 – Funções de densidade de probabilidade da variável aleatória  $\alpha$  considerando  $Std[\alpha] = 0.1, 0.2$  e  $0.3$ , respectivamente, no intervalo  $-0.99 \leq x \leq 0.99$ .



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 15 – Funções de densidade de probabilidade do deslocamento  $U(\alpha)$  considerando  $Std[\alpha] = 0.1, 0.2$  e  $0.3$ , respectivamente, no intervalo  $\frac{1}{1.99} \leq y \leq 3$ .



Fonte: Produção do próprio autor.



## 5 OTIMIZAÇÃO CONSIDERANDO INCERTEZAS

As abordagens de otimização discutidas nesta seção são apresentadas visando a otimização estrutural sob o efeito de incertezas aleatórias.

As principais abordagens utilizadas para solucionar problemas de otimização estrutural sob o efeito de incertezas são a otimização estrutural robusta (RDO) e a otimização estrutural baseada em confiabilidade (RBDO) (LOPEZ; BECK, 2013). A abordagem RDO é normalmente utilizada para a obtenção de estruturas que possuem um desempenho que apresenta pouca variação (estrutura robusta) (BEYER; SENDHOFF, 2007), enquanto a abordagem RBDO é normalmente utilizada para obter uma estrutura que apresenta uma pequena probabilidade de falha (estrutura confiável) (AGARWAL, 2004).

### 5.1 OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE

O problema de otimização baseado em confiabilidade é normalmente apresentado na literatura como a minimização de uma função objetivo determinística sujeita a restrições de desigualdade que dependem de variáveis que apresentam incertezas

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f_{obj}(\mathbf{z}) \\ \text{T.q.} \quad & P\left(g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) > 0\right) \leq P_{f_i}^{max}; \quad i = 1, 2, \dots, N_g \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{N_v}$  é o vetor de variáveis de projeto,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$  é o vetor de variáveis aleatórias,  $P\left(g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) > 0\right)$  é a probabilidade que a função  $g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X})$  (originalmente na forma da restrição determinística  $g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}) \leq 0$ ) possui em ter um valor maior que zero, também chamada de probabilidade de falha da  $i$ -ésima restrição e  $P_{f_i}^{max}$  é a probabilidade de falha permitida (máxima) que pode apresentar a restrição  $i$  (LOPEZ; BECK, 2013).

A probabilidade de falha da restrição  $i$  pode ser calculada analiticamente por

$$P\left(g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) > 0\right) = \int_{g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) > 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.2)$$

onde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  é a função de densidade de probabilidade multi variável do vetor aleatório  $\mathbf{X}$  (LOPEZ; BECK, 2013). Em aplicações complexas de

engenharia o cálculo analítico da probabilidade de falha das restrições, Eq. (5.2), é muito difícil, pois depende da resposta de métodos numéricos como o FEM (LOPEZ; BECK, 2013). Desta forma, métodos de aproximação, como os métodos de confiabilidade estrutural apresentados anteriormente, são amplamente pesquisados na literatura.

## 5.2 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

A forma mais simples de apresentação do problema de otimização robusta consiste na minimização de uma soma ponderada entre o valor esperado de uma função objetivo, que depende de variáveis que apresentam incertezas, e do desvio padrão desta função objetivo, sujeita a restrições de desigualdade determinísticas

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \gamma_E E[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] + \gamma_S \text{Std}[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] \\ \text{T.q.} \quad & g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}) \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_g \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $\gamma_E$  e  $\gamma_S$  representam os coeficientes de ponderação (reais maiores ou igual a zero) definidos pelo projetista,  $E[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})]$  representa o valor esperado da função objetivo e  $\text{Std}[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})]$  representa o desvio padrão da função objetivo (LOPEZ; BECK, 2013).

O valor esperado da função objetivo é obtido analiticamente como

$$E[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.4)$$

e o seu desvio padrão como

$$\text{Std}[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] = \sqrt{\text{Var}[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})]} = \sqrt{E[(f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) - E[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})])^2]}. \quad (5.5)$$

A avaliação analítica do valor esperado, Eq. (5.4), e do desvio padrão da função objetivo, Eq. (5.5), torna-se muito difícil em aplicações práticas de engenharia devido ao cálculo da função objetivo por meio da utilização de métodos numéricos como o FEM (KLEIBER; HIEN, 1992). Os métodos de aproximação, como os métodos de variabilidade de resposta apresentados anteriormente, podem então ser utilizados como uma alternativa ao cálculo analítico destas grandezas.

Quando as restrições dependem de parâmetros que apresentam incertezas, o problema de otimização robusta deve ser modificado para que as restrições sejam satisfeitas na presença de incertezas (ARORA, 2012).

Em aplicações práticas na literatura Arora (2012), Asadpoure, Tootkaboni e Guest (2011), Tootkaboni, Asadpoure e Guest (2012) o problema de otimização robusta com restrições que dependem de parâmetros sob incertezas é definido como

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \gamma_E E[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] + \gamma_S \text{Std}[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] \\ \text{T.q.} \quad & E[g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] + \beta \text{Std}[g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] \leq 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_g \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $\beta$  é um número real maior ou igual a zero definido pelo projetista.

Uma alternativa a esta abordagem é escrever diretamente as restrições que dependem de parâmetros sob incertezas conforme o problema de otimização baseada em confiabilidade apresentado anteriormente (BEYER; SENDHOFF, 2007), Eq. (5.1), onde calculam-se suas probabilidades de falha, Eq. (5.2), tal que

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \gamma_E E[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] + \gamma_S \text{Std}[f_{obj}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] \\ \text{T.q.} \quad & P(g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) > 0) \leq P_{fi}^{max}; \quad i = 1, 2, \dots, N_g \end{aligned} \quad (5.7)$$

Conforme apresentado em Beyer e Sendhoff (2007), não existe um consenso na literatura afirmando que a abordagem RBDO não é definida como parte da abordagem RDO, pois na abordagem RDO as restrições também podem ser tratadas de forma probabilística, de forma que é possível a garantia de uma solução ótima com uma confiabilidade mínima.

Neste trabalho, o problema de otimização robusta, conforme apresentado na Eq. (5.6), é utilizado para solucionar problemas de otimização topológica sob a influência de incertezas sobre os parâmetros do modelo matemático. Conforme verificado na Eq. (5.6), não consegue-se quantificar uma probabilidade de falha, de forma imediata, utilizando-se este modelo, conforme feito na Eq. (5.7). O projetista tem o controle sobre o parâmetro  $\beta$ , e de forma intuitiva sabe-se que quanto maior o valor de  $\beta$  considerado, menor a probabilidade de falha do problema.

Para propósitos práticos de projeto, a desigualdade unilateral de Chebyshev é apresentada (ROSS, 2010)

$$P(X - E[X] \geq \beta \text{Std}[X]) \leq \frac{1}{1 + \beta^2}. \quad (5.8)$$

Esta desigualdade é válida para qualquer variável aleatória  $X$  com uma variância finita e independente da distribuição de probabilidade de  $X$  (ROSS, 2010).



Como não sabe-se exatamente a distribuição de probabilidade de  $g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X})$ , pode-se calcular a probabilidade de falha máxima utilizando a desigualdade unilateral de Chebyshev. Considerando a Eq. (5.6), a falha ocorre apenas se  $g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) > E[g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] + \beta Std[g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X})] \leq 0$ . Então, da Eq. (5.8), tem-se que

$$P\left(g_{des}^{(i)}(\mathbf{z}, \mathbf{X}) > 0\right) \leq \frac{1}{1 + \beta^2}. \quad (5.9)$$

Por exemplo, para  $\beta = 3$  tem-se uma probabilidade menor ou igual a  $\frac{1}{10} = 10\%$  de obter uma realização de  $\mathbf{X}$  que possa causar uma falha na solução ótima obtida por meio da abordagem robusta com o mesmo  $\beta$ .

## 6 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO INCERTEZAS

Quando as abordagens de otimização estrutural considerando incertezas são aplicadas para a resolução de problemas de otimização topológica, os problemas são frequentemente denominados de otimização topológica baseada em confiabilidade e otimização topológica robusta.

Uma série de pesquisas são realizadas na área de otimização topológica baseada em confiabilidade (RBTO). Normalmente, devido ao elevado número de variáveis de projeto em problemas de otimização topológica, o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM) é utilizado na aproximação da probabilidade de falha. O problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume de estruturas contínuas, lineares, elásticas e isotrópicas, sujeitas a incertezas nas forças aplicadas e na geometria, é estudado por diversos autores na literatura Kharmanda e Olhoff (2002), Kharmanda et al. (2004), Ouyang, Zhang e Kuang (2008). Em Patel et al. (2005), uma abordagem para a solução do problema de minimização de volume com restrição de deslocamento de estruturas contínuas, sujeitas a incertezas nas forças aplicadas e no módulo de elasticidade, é proposta. O problema de minimização de volume com restrição de deslocamento também é estudado considerando estruturas reticuladas, em Jalalpour, Guest e Igusa (2013), onde são consideradas incertezas nas coordenadas nodais e no módulo de elasticidade. Em Zhao et al. (2014), comparações de métodos de confiabilidade estrutural são realizadas, onde problemas contínuos de otimização topológica estruturais e de condução de calor são analisados. O problema de minimização de volume com restrição de tensão sujeito a incertezas na força e nas propriedades do material é analisado em Luo et al. (2014), onde uma estratégia de redução no índice de confiabilidade é proposta e utilizada junto a relaxação  $\epsilon$  para evitar o fenômeno de singularidade e uma abordagem é utilizada para agrupar as restrições ativas selecionadas de forma a reduzir o custo computacional associado a natureza local das restrições de tensão.

Na área de otimização topológica robusta (RTO), de uma forma geral, o método de perturbação e os métodos espectrais são utilizados na quantificação de incertezas. Em Asadpoure, Tootkaboni e Guest (2011), estruturas reticuladas robustas são obtidas com a minimização de uma soma ponderada entre o valor esperado e o desvio padrão da flexibilidade com restrição de volume, onde o método de perturbação de segunda ordem é utilizado para a quantificação de incertezas na rigidez das barras. O problema de minimização de volume com restrição de flexibilidade também é

estudado. Em Tootkaboni, Asadpoure e Guest (2012), o problema de minimização de volume de estruturas contínuas é estudado, onde a incerteza na rigidez é representada por campos aleatórios com grandes tamanhos de correlação e um método espectral é utilizado na sua quantificação. Em Jansen et al. (2013), uma pequena perturbação na função do filtro é realizada para a obtenção de estruturas robustas em relação a flexibilidade. Problemas simples de mecanismos flexíveis também são estudados (SCHEVENELS; LAZAROV; SIGMUND, 2010), onde estruturas sem rótulas (elementos conectados por um único nó) são obtidas. Em alguns trabalhos, abordagens analíticas são utilizadas para a quantificação de incertezas (DUNNING; KIM; MULLINEUX, 2011; DUNNING; KIM, 2013), mas se limitam a problemas simples de minimização de flexibilidade de estruturas contínuas, sujeitas a incertezas nas forças aplicadas, representadas por variáveis aleatórias Gaussianas não correlacionadas.

Os mesmos problemas apresentados na seção de otimização topológica (sob as mesmas hipóteses) são apresentados nesta seção, considerando uma incerteza nas propriedades do material associadas à rigidez, representada por um campo aleatório. Os problemas robustos de otimização topológica são apresentados a seguir, conforme modelo de otimização apresentado na Eq. (5.6).

## 6.1 MINIMIZAÇÃO DE FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME

### 6.1.1 Definição do problema

A definição do problema estocástico, a análise sensibilidades da função objetivo e os resultados posteriormente apresentados referentes ao problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume foram originalmente publicados no trabalho Silva e Cardoso (2015), do autor desta dissertação e de seu orientador. As mesmas hipóteses consideradas na subseção referente ao problema determinístico de minimização de flexibilidade com restrição de volume são consideradas nesta subseção. A função objetivo é uma soma ponderada entre o valor esperado da flexibilidade e do desvio padrão da flexibilidade

$$\hat{f}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) = \gamma_E E[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})] + \gamma_S Std[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})], \quad (6.1)$$

onde  $E[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})]$  é o valor esperado da flexibilidade

$$E[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})] = E[\mathbf{F}^T \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})], \quad (6.2)$$

e  $Std[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})]$  é o desvio padrão da flexibilidade

$$Std[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})] = \sqrt{Cov[\mathbf{F}^T \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})]}. \quad (6.3)$$

A forma discreta do problema RTO pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \hat{f}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) = \gamma_E E[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})] + \gamma_S Std[f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})] \\ \text{T.q.} \quad & V(\boldsymbol{\rho}) \leq V_{max} \\ & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1; e = 1, 2, \dots, N_e \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde verifica-se que não existe incertezas na restrição de volume e nas restrições laterais (que não dependem das propriedades do material associadas à rigidez), de forma que as incertezas estão presentes somente no cálculo da função objetivo  $\hat{f}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$ . Vale salientar que diferentes estruturas podem ser obtidas alterando os coeficientes de ponderação  $\gamma_E$  e  $\gamma_S$ .

Para obter a solução ótima, pode-se utilizar o método padrão de OC com uma pequena modificação no cálculo de  $\beta_e$ , definido pela Eq. (3.12), pois as sensibilidades de  $\hat{f}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$  ao contrário das sensibilidades da função objetivo determinística  $f(\boldsymbol{\rho})$ , podem assumir valores positivos e negativos. O valor de  $\beta_e$  deve ser modificado para (BENDSØE; SIGMUND, 2003)

$$\beta_e = \frac{\max\left\{0, -\frac{d\hat{f}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})}{d\rho_e}\right\}}{\lambda \frac{dV(\boldsymbol{\rho})}{d\rho_e}}. \quad (6.5)$$

### 6.1.2 Análise de sensibilidades

Com o intuito de obter a sensibilidade de  $\hat{f}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$ , Eq. (6.1), em relação a  $\rho_m$ , manipulações matemáticas são inicialmente feitas no valor esperado da flexibilidade, Eq. (6.2). Retirando a dependência de  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$  e  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})$  em relação a  $\boldsymbol{\rho}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$ , pode-se reescrever a Eq. (6.2) como

$$E[f] = E\left[(\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}\right] = (\mathbf{F}^0)^T E[\mathbf{U}]. \quad (6.6)$$

Substituindo a Eq. (4.48) na Eq. (6.6), obtém-se

$$E[f] = (\mathbf{F}^0)^T \left( \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_{ij}^{II} S_{ij} \right), \quad (6.7)$$

e considerando a Eq. (4.46)

$$E[f] = (\mathbf{F}^0)^T \left[ \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{K}^0)^{-1} (-2\mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0) S_{ij} \right]. \quad (6.8)$$

Manipulando a Eq. (6.8), pode-se escrever

$$E[f] = (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T (-2\mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0) S_{ij}, \quad (6.9)$$

ou

$$E[f] = (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ -2 (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 \right] S_{ij}, \quad (6.10)$$

onde, de acordo com a Eq. (4.45),  $(\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_i^I = -(\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{K}^0$ , tal que

$$E[f] = (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{K}^0 \mathbf{U}_j^I S_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 S_{ij}. \quad (6.11)$$

Considerando as Eqs. (4.53) e (6.3), o desvio padrão da flexibilidade pode ser escrito como

$$Std[f] = \sqrt{(\mathbf{F}^0)^T Cov[\mathbf{U}, \mathbf{U}] \mathbf{F}^0}. \quad (6.12)$$

ou

$$Std[f] = \sqrt{(\mathbf{F}^0)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_j^I)^T S_{ij} \mathbf{F}^0}. \quad (6.13)$$

Para evitar as derivadas dos vetores  $\mathbf{U}^0$  e  $\mathbf{U}_i^I$  em relação às variáveis de projeto  $\boldsymbol{\rho}$ , utiliza-se o método adjunto, de forma que a função

objetivo é escrita como

$$\begin{aligned}
 \hat{f} = & \gamma_E \left[ (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{K}^0 \mathbf{U}_j^I S_{ij} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 S_{ij} \right] \\
 & + \gamma_S \sqrt{(\mathbf{F}^0)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_i^I (\mathbf{U}_j^I)^T S_{ij} \mathbf{F}^0} \\
 & + (\boldsymbol{\lambda}^0)^T (\mathbf{F}^0 - \mathbf{K}^0 \mathbf{U}^0) + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}_i^T (\mathbf{K}^0 \mathbf{U}_i^I + \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}^0), \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

onde, de acordo com as Eqs. (4.44) e (4.45),  $(\mathbf{F}^0 - \mathbf{K}^0 \mathbf{U}^0) = (\mathbf{K}^0 \mathbf{U}_i^I + \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}^0) = \mathbf{0}$ .

Calculando a derivada de  $\hat{f}$ , Eq. (6.14), em relação a variável de projeto  $\rho_m$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = & \gamma_E \left\{ (\mathbf{F}^0)^T \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{d\mathbf{U}_i^I}{d\rho_m} \right)^T \mathbf{K}^0 \mathbf{U}_j^I + (\mathbf{U}_i^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_j^I \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{K}^0 \frac{d\mathbf{U}_j^I}{d\rho_m} \right] S_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_{ij}^{II}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right] S_{ij} \right\} \\
 & + \gamma_S \left\{ \frac{1}{2Std[f]} (\mathbf{F}^0)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d\mathbf{U}_i^I}{d\rho_m} (\mathbf{U}_j^I)^T \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mathbf{U}_i^I \left( \frac{d\mathbf{U}_j^I}{d\rho_m} \right)^T \right] S_{ij} \mathbf{F}^0 \right\} + (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \left( -\frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 - \mathbf{K}^0 \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}_i^T \left( \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^I + \mathbf{K}^0 \frac{d\mathbf{U}_i^I}{d\rho_m} + \frac{d\mathbf{K}_i^I}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \mathbf{K}_i^I \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right), \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = & \left[ \gamma_E (\mathbf{F}^0)^T - \gamma_E \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} S_{ij} - (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \mathbf{K}^0 \right. \\
 & + \left. \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{K}_i^I \right] \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} + \sum_{j=1}^N \left[ 2\gamma_E \sum_{i=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{K}^0 S_{ij} \right. \\
 & + \left. \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{F}^0)^T \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I S_{ij} (\mathbf{F}^0)^T + \boldsymbol{\lambda}_j^T \mathbf{K}^0 \right] \frac{d\mathbf{U}_j^I}{d\rho_m} \\
 & + \gamma_E \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_j^I S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_E \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_{ij}^{II}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 S_{ij} \\
 & - (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}_i^T \left( \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^I + \frac{d\mathbf{K}_i^I}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right). \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Para eliminar  $\frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m}$  e  $\frac{d\mathbf{U}_j^I}{d\rho_m}$  e para evitar estes cálculos, inicia-se com o segundo termo da Eq. (6.16)

$$2\gamma_E \sum_{i=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{K}^0 S_{ij} + \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{F}^0)^T \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I S_{ij} (\mathbf{F}^0)^T + \boldsymbol{\lambda}_j^T \mathbf{K}^0 = \mathbf{0}, \quad (6.17)$$

ou

$$2\gamma_E \sum_{i=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{K}^0 S_{ij} + \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{F}^0)^T \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I S_{ij} (\mathbf{F}^0)^T = -\boldsymbol{\lambda}_j^T \mathbf{K}^0, \quad (6.18)$$

e, multiplicando ambos os lados da igualdade por  $(\mathbf{K}^0)^{-1}$ ,

$$2\gamma_E \sum_{i=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \mathbf{I} S_{ij} + \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{F}^0)^T \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I S_{ij} (\mathbf{U}^0)^T = -\boldsymbol{\lambda}_j^T, \quad (6.19)$$

tal que

$$\boldsymbol{\lambda}_j = - \left[ 2\gamma_E \mathbf{I} + \frac{\gamma_S}{Std[f]} \mathbf{U}^0 (\mathbf{F}^0)^T \right] \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I S_{ij}. \quad (6.20)$$

Para o primeiro termo da Eq. (6.16), tem-se

$$\gamma_E (\mathbf{F}^0)^T - \gamma_E \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} S_{ij} - (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{K}_i^I = \mathbf{0}, \quad (6.21)$$

ou

$$(\boldsymbol{\lambda}^0)^T \mathbf{K}^0 = \gamma_E \left[ (\mathbf{F}^0)^T - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T \mathbf{K}_{ij}^{II} S_{ij} \right] + \sum_{i=1}^N \lambda_i^T \mathbf{K}_i^I. \quad (6.22)$$

Como as matrizes de rigidez são simétricas,

$$\mathbf{K}^0 \boldsymbol{\lambda}^0 = \gamma_E \left( \mathbf{F}^0 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 S_{ij} \right) + \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i^I \lambda_i, \quad (6.23)$$

tal que

$$\boldsymbol{\lambda}^0 = \gamma_E \left[ \mathbf{U}^0 - (\mathbf{K}^0)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 S_{ij} \right] + (\mathbf{K}^0)^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i^I \lambda_i. \quad (6.24)$$

Substituindo as Eqs. (6.20) e (6.24) na Eq. (6.16), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} &= \gamma_E \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}_i^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_j^I S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_E \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_{ij}^{II}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 S_{ij} \\ &\quad - (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \left\{ \gamma_E \left[ \mathbf{U}^0 - (\mathbf{K}^0)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 S_{ij} \right] \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{K}^0)^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i^I \left[ 2\gamma_E \mathbf{I} + \frac{\gamma_S}{Std[f]} \mathbf{U}^0 (\mathbf{F}^0)^T \right] \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I S_{ij} \right\} \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \left[ (\mathbf{U}_j^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} + (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_j^I}{d\rho_m} \right] [2\gamma_E \mathbf{I} \\ &\quad + \frac{\gamma_S}{Std[f]} \mathbf{U}^0 (\mathbf{F}^0)^T] \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_i^I S_{ij}, \end{aligned} \quad (6.25)$$



e, agrupando por termos  $\gamma_E$  e  $\gamma_S$  em comum,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} &= \gamma_E \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ (\mathbf{U}_i^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_j^I - \frac{1}{2} (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_{ij}^{II}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 (\mathbf{U}_j^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^I - 2 (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_j^I}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^I \right] S_{ij} - (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right. \\
 &\quad \left. + (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} (\mathbf{K}^0)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 + 2\mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I) S_{ij} \right\} \\
 &\quad + \frac{\gamma_S}{Std[f]} \left\{ (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} (\mathbf{K}^0)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}^0 (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}_i^I S_{ij} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ (\mathbf{U}_j^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}_i^I \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_j^I}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}_i^I \right] S_{ij} \right\}, \tag{6.26}
 \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{U}_j^I = -(\mathbf{K}^0)^{-1} \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}^0$ , tal que

$$\mathbf{K}^0 \boldsymbol{\xi} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0 + 2\mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I) S_{ij}, \tag{6.27}$$

e

$$f_i = (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}_i^I, \tag{6.28}$$

então, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} &= -\gamma_E \left\{ (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \boldsymbol{\xi}^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ (\mathbf{U}_i^I)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_j^I \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_j^I}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^I + \frac{1}{2} (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_{ij}^{II}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right] S_{ij} \right\} \\
 &\quad - \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{U}^0)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( 2 \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_j^I + \frac{d\mathbf{K}_j^I}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right) f_i S_{ij}, \tag{6.29}
 \end{aligned}$$

onde os somatórios duplos podem ser transformados em um único somatório por meio da utilização da técnica de desacoplamento apresentada

anteriormente, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = & -\gamma_E \left\{ (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \boldsymbol{\xi}^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left[ (\mathbf{U}_i^{\tilde{I}})^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} + \frac{1}{2} (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}_{ii}^{\tilde{I}\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right] \Theta_{ii} \right\} \\ & - \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{U}^0)^T \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left( 2 \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} + \frac{d\mathbf{K}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right) f_i \Theta_{ii}, \quad (6.30) \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{K}^0 \boldsymbol{\xi} = - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left( \mathbf{K}_{ii}^{\tilde{I}\tilde{I}} \mathbf{U}^0 + 2\mathbf{K}_i^{\tilde{I}} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} \right) \Theta_{ii}, \quad (6.31)$$

e

$$f_i = (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}_i^{\tilde{I}}. \quad (6.32)$$

A derivada de  $\hat{f}$  pode ser então obtida por meio de cálculos locais

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = & -\gamma_E \left\{ (\mathbf{u}_m^0)^T \frac{d\mathbf{k}_m^0}{d\rho_m} \mathbf{u}_m^0 + \boldsymbol{\xi}_m^T \frac{d\mathbf{k}_m^0}{d\rho_m} \mathbf{u}_m^0 + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left[ (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_m^T \frac{d\mathbf{k}_m^0}{d\rho_m} (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_m \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(\mathbf{u}_m^0)^T \frac{d(\mathbf{k}_i^{\tilde{I}})_m}{d\rho_m} (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_m + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_m^0)^T \frac{d(\mathbf{k}_{ii}^{\tilde{I}\tilde{I}})_m}{d\rho_m} \mathbf{u}_m^0 \right] \Theta_{ii} \right\} \\ & - \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{u}_m^0)^T \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left[ 2 \frac{d\mathbf{k}_m^0}{d\rho_m} (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_m + \frac{d(\mathbf{k}_i^{\tilde{I}})_m}{d\rho_m} \mathbf{u}_m^0 \right] f_i \Theta_{ii}, \quad (6.33) \end{aligned}$$

onde o índice  $m$  representa a matriz (ou vetor) local associada ao elemento finito  $m$ .

Conforme o esperado, a Eq. (3.18) é um caso particular da Eq. (6.33) para problemas determinísticos, pois quando  $\Theta_{ii} = 0$  todos os termos, exceto o primeiro, da Eq. (6.33), são iguais a zero.

### 6.1.3 Análise de sensibilidades considerando incerteza no módulo de elasticidade e grandes tamanhos de correlação

A análise de sensibilidades realizada anteriormente e obtida na Eq. (6.30) pode ser simplificada considerando um tamanho de correlação

$a$  especial, conforme feito na seção de quantificação de incertezas por meio do método da perturbação, considerando o campo de tensões de primeira ordem. Se  $a \rightarrow \infty$ , então  $\tilde{N} \rightarrow 1$  e  $\mathbf{S} \rightarrow (Std[E])^2 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ , de forma que, calculando os autovalores e os autovetores normalizados de  $\mathbf{S}$ , obtém-se  $\Theta \rightarrow N(Std[E])^2$  e  $\Phi \rightarrow [\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}]^T$ , onde  $Std[E]$  é o desvio padrão do módulo de elasticidade.

Como, neste caso,  $\mathbf{K}^{\tilde{I}} = \mathbf{0}$ , das Eqs. (6.31) e (6.32)

$$\mathbf{K}^0 \boldsymbol{\xi} = -2\mathbf{K}^{\tilde{I}} \mathbf{U}^{\tilde{I}} \Theta, \quad (6.34)$$

$$\bar{f} = (\mathbf{F}^0)^T \mathbf{U}^{\tilde{I}}. \quad (6.35)$$

Substituindo as Eqs. (4.89) e (4.90) nas Eqs. (6.34) e (6.35), depois de algumas manipulações, obtém-se

$$\boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{U}^0 \left( \frac{Std[E]}{E[E]} \right)^2, \quad (6.36)$$

$$\bar{f} = -\frac{f}{\sqrt{N}E[E]}. \quad (6.37)$$

Avaliando a análise de sensibilidades, de acordo com a Eq. (6.30), e considerando  $\tilde{N} \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = & -\gamma_E \left\{ (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \boldsymbol{\xi}^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \left[ (\mathbf{U}^{\tilde{I}})^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^{\tilde{I}} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^{\tilde{I}} \right] \Theta \right\} \\ & - \frac{\gamma_S}{Std[f]} (\mathbf{U}^0)^T \left( 2 \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^{\tilde{I}} + \frac{d\mathbf{K}^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right) \bar{f} \Theta. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Substituindo as Eqs. (4.89), (4.90), (6.36) e (6.37) na Eq. (6.38), depois de algumas manipulações

$$\frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = \left\{ -\gamma_E \left[ 1 + \left( \frac{Std[E]}{E[E]} \right)^2 \right] - \gamma_S \frac{f}{Std[f]} \left( \frac{Std[E]}{E[E]} \right)^2 \right\} (\mathbf{U}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0, \quad (6.39)$$

$$\frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = \left\{ \gamma_E \left[ 1 + \left( \frac{Std[E]}{E[E]} \right)^2 \right] + \gamma_S \frac{f}{Std[f]} \left( \frac{Std[E]}{E[E]} \right)^2 \right\} \frac{df}{d\rho_m}, \quad (6.40)$$

$$\frac{d\hat{f}}{d\rho_m} = \psi \frac{df}{d\rho_m}, \quad (6.41)$$

onde

$$\psi = \gamma_E \left[ 1 + \left( \frac{Std[E]}{E[E]} \right)^2 \right] + \gamma_S \frac{f}{Std[f]} \left( \frac{Std[E]}{E[E]} \right)^2. \quad (6.42)$$

A constante  $\psi$  não depende de  $m$ , de forma que o gradiente de  $\hat{f}$  em relação a  $\rho$  depende linearmente do gradiente de  $f$  em relação a  $\rho$ . Assim, a otimização estocástica tende ao projeto determinístico se o tamanho de correlação tende a infinito.

## 6.2 MINIMIZAÇÃO DE VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO

### 6.2.1 Definição do problema

As mesmas hipóteses consideradas na subsecção referente ao problema determinístico de minimização de volume com restrição de tensão são consideradas nesta subsecção. Neste caso, como o volume não depende das propriedades do material associadas à rigidez, a função objetivo é considerada determinística, de forma que as incertezas estão presentes somente nas restrições de tensão

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & V(\rho) = \sum_{e=1}^{N_e} V_e \rho_e \\ \text{T.q.} \quad & \frac{\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}(\rho, \alpha)}{\sigma_y} - 1 \leq 0; \quad k = 1, 2, \dots, N_k \\ & \mathbf{K}(\rho, \alpha) \mathbf{U}(\rho, \alpha) = \mathbf{F} \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1; \quad e = 1, 2, \dots, N_e \end{aligned} \quad (6.43)$$

tal que

$$\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}(\rho, \alpha) = E \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\rho, \alpha) \right] + \beta Std \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\rho, \alpha) \right], \quad (6.44)$$

onde  $E \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\rho, \alpha) \right]$  é o valor esperado da tensão equivalente de von Mises no ponto  $k$  e  $Std \left[ \sigma_{eq}^{(k)}(\rho, \alpha) \right]$  é o desvio padrão da tensão equivalente de

von Mises no ponto  $k$ . Pode-se verificar que, de uma forma geral, diferentes valores de  $\beta$ , utilizados na Eq. (6.44), levam a diferentes problemas de otimização que levam a diferentes soluções. De uma forma geral, quanto maior o valor de  $\beta$ , mais confiável é a solução obtida. Conforme apresentado na Eq. (5.9), pode-se quantificar a probabilidade de falha máxima dependendo do valor de  $\beta$  utilizado.

Para solucionar este problema de otimização, o mesmo algoritmo utilizado para a solução do problema determinístico de minimização de volume com restrição de tensão é utilizado.

## 6.2.2 Análise de sensibilidades

Como no caso determinístico, o método adjunto é utilizado para a análise de sensibilidades. Neste caso, o cálculo das derivadas de  $\mathbf{U}^0$  e  $\mathbf{U}_i^{\tilde{I}}$  em relação às variáveis de projeto são evitadas. O Lagrangiano aumentado do problema estocástico pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{L}_r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu}) &= V(\boldsymbol{\rho}) + \frac{r}{2} \sum_{k=1}^{N_k} \left\langle \frac{\mu_k}{r} + \frac{\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha})}{\sigma_y} - 1 \right\rangle^2 \\ &+ (\boldsymbol{\lambda}^0)^T (\mathbf{K}^0 \mathbf{U}^0 - \mathbf{F}^0) \\ &+ \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \boldsymbol{\lambda}_i^T \left( \mathbf{K}^0 \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} + \mathbf{K}_i^{\tilde{I}} \mathbf{U}^0 \right), \end{aligned} \quad (6.45)$$

onde, de acordo com as Eqs. (4.44) e (4.66),  $(\mathbf{F}^0 - \mathbf{K}^0 \mathbf{U}^0) = (\mathbf{K}^0 \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} + \mathbf{K}_i^{\tilde{I}} \mathbf{U}^0) = \mathbf{0}$ .

Pode-se calcular as derivadas de  $\hat{L}_r(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu})$  em relação à variável de projeto  $\rho_m$ , retirando as dependências em relação a  $r$ ,  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\mu}$  por conveniência

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}}{d\rho_m} &= \frac{dV}{d\rho_m} + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \frac{d\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} + (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \left( \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \mathbf{K}^0 \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \boldsymbol{\lambda}_i^T \left( \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} + \mathbf{K}^0 \frac{d\mathbf{U}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \right. \\ &\left. + \frac{d\mathbf{K}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \mathbf{K}_i^{\tilde{I}} \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right), \end{aligned} \quad (6.46)$$

onde  $\hat{h}_k$  é definido como

$$\hat{h}_k = \left\langle \mu_k + r \left( \frac{\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{\sigma_y} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{\sigma_y}. \quad (6.47)$$

Inicialmente, pode-se calcular  $\frac{d\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{d\rho_m}$  derivando a Eq. (6.44), tal que

$$\frac{d\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} = \frac{dE[\sigma_{eq}^{(k)}]}{d\rho_m} + \beta \frac{dStd[\sigma_{eq}^{(k)}]}{d\rho_m} = \frac{d(\sigma_{eq}^0)_k}{d\rho_m} + \frac{\beta}{2Std[\sigma_{eq}^{(k)}]} \frac{dVar[\sigma_{eq}^{(k)}]}{d\rho_m}. \quad (6.48)$$

Para calcular  $\frac{d\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{d\rho_m}$ , é necessário calcular  $\frac{dVar[\sigma_{eq}^{(k)}]}{d\rho_m}$  primeiro, como

$$\begin{aligned} \frac{dVar[\sigma_{eq}^{(k)}]}{d\rho_m} = & \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left\{ -\frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k} \frac{d(\sigma_{eq}^0)_k}{d\rho_m} (b_{ki}^2 + 2b_{ki}d_{ki} + d_{ki}^2) \right. \\ & + \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k} \left\{ 2b_{ki} \left[ \frac{d(\mathbf{u}_k^0)^T}{d\rho_m} \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k \right. \right. \\ & + 2(\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k^0}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k \\ & \left. \left. + (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} \right] \right. \\ & + 2b_{ki} \left[ 2(\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} \right. \\ & + (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k}{d\rho_m} \mathbf{M} \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k^0}{d\rho_m} \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \\ & \left. \left. + (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \right] \right. \\ & + 2d_{ki} \left[ \frac{d(\mathbf{u}_k^0)^T}{d\rho_m} \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k \right. \\ & + 2(\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k^0}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k (\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k \\ & \left. \left. + (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} \right] \right. \\ & + 2d_{ki} \left[ 2(\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} \right. \\ & + (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \\ & \left. \left. + (\mathbf{u}_k^0)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k^0}{d\rho_m} \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0 \right] \right\} \Theta_{ii}. \quad (6.49) \end{aligned}$$

Para manipular mais facilmente os termos da Eq. (6.49) e escrever

esta equação em uma notação mais compacta, pode-se definir

$$\mathbf{e}_{ki} = \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \left( \mathbf{u}_i^{\tilde{I}} \right)_k, \quad (6.50)$$

$$f_{ki} = \left( \mathbf{u}_k^0 \right)^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k^0}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \left( \mathbf{u}_i^{\tilde{I}} \right)_k, \quad (6.51)$$

$$\mathbf{o}_{ki}^T = \left( \mathbf{u}_k^0 \right)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k, \quad (6.52)$$

$$t_{ki} = \left( \mathbf{u}_k^0 \right)^T \mathbf{B}_k^T \frac{d \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0, \quad (6.53)$$

$$v_{ki} = \left( \mathbf{u}_k^0 \right)^T \mathbf{B}_k^T \left( \bar{\mathbf{C}}_i^{\tilde{I}} \right)_k \mathbf{M} \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k^0}{d\rho_m} \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0, \quad (6.54)$$

$$y_{ki} = b_{ki}^2 + 2b_{ki}d_{ki} + d_{ki}^2, \quad (6.55)$$

$$z_{ki} = t_{ki} + v_{ki} \quad (6.56)$$

e, da Eq. (3.44)

$$\frac{d \left( \sigma_{eq}^0 \right)_k}{d\rho_m} = \frac{1}{\left( \sigma_{eq}^0 \right)_k} \left[ \left( \mathbf{a}_k^0 \right)^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + g_k^0 \right], \quad (6.57)$$

onde  $\mathbf{a}_k^0$  e  $g_k^0$  são definidos como

$$\left( \mathbf{a}_k^0 \right)^T = \left( \mathbf{u}_k^0 \right)^T \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k, \quad (6.58)$$

e

$$g_k^0 = \left( \mathbf{u}_k^0 \right)^T \mathbf{B}_k^T \frac{d\bar{\mathbf{C}}_k^0}{d\rho_m} \mathbf{M} \bar{\mathbf{C}}_k^0 \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^0, \quad (6.59)$$



tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{dVar \left[ \sigma_{eq}^{(k)} \right]}{d\rho_m} &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left\{ -\frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^4} \left[ (\mathbf{a}_k^0)^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + g_k^0 \right] y_{ki} + \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} \right. \\
 &\quad \times \left\{ 2b_{ki} \left[ \mathbf{e}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + 2f_{ki} + (\mathbf{a}_k^0)^T \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} \right] \right. \\
 &\quad + 2b_{ki} \left( 2\mathbf{o}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + z_{ki} \right) + 2d_{ki} \left[ \mathbf{e}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + 2f_{ki} \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\mathbf{a}_k^0)^T \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2d_{ki} \left( 2\mathbf{o}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + z_{ki} \right) \right\} \right\} \Theta_{ii}, \tag{6.60}
 \end{aligned}$$

manipulando os termos da Eq. (6.60)

$$\begin{aligned}
 \frac{dVar \left[ \sigma_{eq}^{(k)} \right]}{d\rho_m} &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left[ -\frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^4} y_{ki} (\mathbf{a}_k^0)^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} - \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^4} g_k^0 y_{ki} \right. \\
 &\quad + \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} b_{ki} \mathbf{e}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + \frac{4}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} b_{ki} f_{ki} \\
 &\quad + \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} b_{ki} (\mathbf{a}_k^0)^T \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} + \frac{4}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} b_{ki} \mathbf{o}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} \\
 &\quad + \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} b_{ki} z_{ki} + \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} d_{ki} \mathbf{e}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + \frac{4}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} d_{ki} f_{ki} \\
 &\quad + \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} d_{ki} (\mathbf{a}_k^0)^T \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} + \frac{4}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} d_{ki} \mathbf{o}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} \\
 &\quad \left. + \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} d_{ki} z_{ki} \right] \Theta_{ii}, \tag{6.61}
 \end{aligned}$$

agrupando por termos  $\frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m}$  e  $\frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{f}})_k}{d\rho_m}$  em comum

$$\begin{aligned} \frac{dVar[\sigma_{eq}^{(k)}]}{d\rho_m} &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}} -\frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} \left\{ \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} y_{ki} (\mathbf{a}_k^0)^T \right. \\ &\quad \left. - [(b_{ki} + d_{ki}) (\mathbf{e}_{ki}^T + 2\mathbf{o}_{ki}^T)] \right\} \Theta_{ii} \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left[ \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} (b_{ki} + d_{ki}) (\mathbf{a}_k^0)^T \right] \Theta_{ii} \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{f}})_k}{d\rho_m} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} -\frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} \left\{ \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} g_k^0 y_{ki} \right. \\ &\quad \left. - [(b_{ki} + d_{ki}) (2f_{ki} + z_{ki})] \right\} \Theta_{ii}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Para manipular mais facilmente os termos da Eq. (6.62) e escrever esta equação em uma notação mais compacta, pode-se definir

$$\mathbf{E}_{ki}^T = -\frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} \left\{ \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} y_{ki} (\mathbf{a}_k^0)^T - [(b_{ki} + d_{ki}) (\mathbf{e}_{ki}^T + 2\mathbf{o}_{ki}^T)] \right\} \Theta_{ii}, \quad (6.63)$$

$$\mathbf{G}_{ki}^T = \left[ \frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} (b_{ki} + d_{ki}) (\mathbf{a}_k^0)^T \right] \Theta_{ii} \quad (6.64)$$

e

$$J_{ki} = -\frac{2}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} \left\{ \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k^2} g_k^0 y_{ki} - [(b_{ki} + d_{ki}) (2f_{ki} + z_{ki})] \right\} \Theta_{ii}, \quad (6.65)$$

tal que

$$\frac{dVar[\sigma_{eq}^{(k)}]}{d\rho_m} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{E}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{G}_{ki}^T \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{f}})_k}{d\rho_m} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} J_{ki}. \quad (6.66)$$

Pode-se calcular  $\frac{d\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{d\rho_m}$  substituindo as Eqs. (6.57) e (6.66) na Eq.

(6.48), tal que

$$\frac{d\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} = (\mathbf{A}_k^0)^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + D_k^0 + \beta_k \left[ \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{E}_{ki}^T \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{G}_{ki}^T \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} J_{ki} \right], \quad (6.67)$$

onde

$$\mathbf{A}_k^0 = \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k} \mathbf{a}_k^0, \quad (6.68)$$

$$D_k^0 = \frac{1}{(\sigma_{eq}^0)_k} g_k^0 \quad (6.69)$$

e

$$\beta_k = \frac{\beta}{2Std[\sigma_{eq}^{(k)}]}, \quad (6.70)$$

tal que, pode-se agrupar por termos  $\frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m}$  em comum e reescrever a Eq. (6.67) como

$$\frac{d\hat{\sigma}_{eq}^{(k)}}{d\rho_m} = \left[ (\mathbf{A}_k^0)^T + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{E}_{ki}^T \right] \frac{d\mathbf{u}_k^0}{d\rho_m} + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{G}_{ki}^T \frac{d(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k}{d\rho_m} + D_k^0 + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} J_{ki}. \quad (6.71)$$

Substituindo a Eq. (6.71) na Eq. (6.46), considerando que  $\mathbf{u}_k^0 = \mathbf{H}_k \mathbf{U}^0$  e  $(\mathbf{u}_i^{\tilde{I}})_k = \mathbf{H}_k \mathbf{U}_i^{\tilde{I}}$ , onde  $\mathbf{H}_k$  é um operador de localização, que mapeia os vetores locais dos vetores globais, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}}{d\rho_m} = & V_m + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \left[ (\mathbf{A}_k^0)^T + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{E}_{ki}^T \right] \mathbf{H}_k \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \\ & + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{G}_{ki}^T \mathbf{H}_k \frac{d\mathbf{U}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \left( D_k^0 + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} J_{ki} \right) \\ & + (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \left( \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \mathbf{K}^0 \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right) + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \boldsymbol{\lambda}_i^T \left( \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} \right. \\ & \left. + \mathbf{K}^0 \frac{d\mathbf{U}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} + \frac{d\mathbf{K}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 + \mathbf{K}_i^{\tilde{I}} \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} \right), \quad (6.72) \end{aligned}$$

onde  $V_m$  é a derivada do volume em relação à variável de projeto  $\rho_m$ , Eq. (3.13).

Novamente, agrupando a Eq. (6.72) por termos  $\frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m}$  e  $\frac{d\mathbf{U}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m}$  em comum, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}}{d\rho_m} = & \left[ \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k (\mathbf{A}_k^0)^T \mathbf{H}_k + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{E}_{ki}^T \mathbf{H}_k + (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \mathbf{K}^0 \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{K}_i^{\tilde{I}} \right] \frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left( \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \beta_k \mathbf{G}_{ki}^T \mathbf{H}_k + \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{K}^0 \right) \frac{d\mathbf{U}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \\ & + V_m + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \left( D_k^0 + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} J_{ki} \right) + (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left( \boldsymbol{\lambda}_i^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^{\tilde{I}} + \boldsymbol{\lambda}_i^T \frac{d\mathbf{K}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right), \end{aligned} \quad (6.73)$$

onde, com o intuito de eliminar  $\frac{d\mathbf{U}^0}{d\rho_m}$  e  $\frac{d\mathbf{U}_i^{\tilde{I}}}{d\rho_m}$  e evitar estes cálculos, como os vetores  $\boldsymbol{\lambda}^0$  e  $\boldsymbol{\lambda}_i^T$  podem assumir quaisquer valores, pode-se intencionalmente assumir que o segundo termo da Eq. (6.73) é nulo, isto é,

$$\sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \beta_k \mathbf{G}_{ki}^T \mathbf{H}_k + \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{K}^0 = \mathbf{0}^T, \quad (6.74)$$

e, como a matriz  $\mathbf{K}^0$  é simétrica,

$$\mathbf{K}^0 \boldsymbol{\lambda}_i = - \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \beta_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{G}_{ki}. \quad (6.75)$$

Após a obtenção dos  $\tilde{N}$  vetores adjuntos de primeira ordem  $\boldsymbol{\lambda}_i$ , pode-se calcular o vetor adjunto de ordem zero assumindo que o primeiro termo da Eq. (6.73) é nulo, isto é,

$$\sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k (\mathbf{A}_k^0)^T \mathbf{H}_k + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{E}_{ki}^T \mathbf{H}_k + (\boldsymbol{\lambda}^0)^T \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \boldsymbol{\lambda}_i^T \mathbf{K}_i^{\tilde{I}} = \mathbf{0}^T, \quad (6.76)$$

e, novamente, devido a simetria da matriz  $\mathbf{K}^0$ , tem-se que

$$\mathbf{K}^0 \boldsymbol{\lambda}^0 = - \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k^0 - \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{H}_k^T \mathbf{E}_{ki} - \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{K}_i^{\tilde{I}} \boldsymbol{\lambda}_i. \quad (6.77)$$

Com os  $\tilde{N}$  vetores adjuntos de primeira ordem  $\lambda_i$  e o vetor adjunto de ordem zero  $\lambda^0$ , pode-se obter a expressão final para a derivada do Lagrangiano aumentado do problema estocástico

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}}{d\rho_m} = & V_m + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \left( D_k^0 + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} J_{ki} \right) + (\lambda^0)^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left( \lambda_i^T \frac{d\mathbf{K}^0}{d\rho_m} \mathbf{U}_i^{\tilde{}} + \lambda_i^T \frac{d\mathbf{K}_i^{\tilde{}}}{d\rho_m} \mathbf{U}^0 \right), \end{aligned} \quad (6.78)$$

que pode ser feita por meio de cálculos locais

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}}{d\rho_m} = & V_m + \sum_{k=1}^{N_k} \hat{h}_k \left( D_k^0 + \beta_k \sum_{i=1}^{\tilde{N}} J_{ki} \right) + (\lambda^0)_m^T \frac{d\mathbf{k}_m^0}{d\rho_m} \mathbf{u}_m^0 \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left[ (\lambda_i)_m^T \frac{d\mathbf{k}_m^0}{d\rho_m} (\mathbf{u}_i^{\tilde{}})_m + (\lambda_i)_m^T \frac{d(\mathbf{k}_i^{\tilde{}})_m}{d\rho_m} \mathbf{u}_m^0 \right]. \end{aligned} \quad (6.79)$$

## 7 RESULTADOS

Nesta seção alguns problemas são analisados para verificar a influência das incertezas nas propriedades do material associadas à rigidez. Em todos os casos analisados é considerada incerteza no módulo de elasticidade enquanto todos os outros parâmetros são determinísticos. O módulo de elasticidade  $E(\mathbf{t})$  é representado como um campo aleatório bidimensional Gaussiano com um modelo de correlação homogêneo exponencial ao quadrado  $\mu_B(\mathbf{t}, \mathbf{t}')$ , Eq. (4.36), tal que

$$\mu_B(t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, t_1^{(j)}, t_2^{(j)}) = \exp\left(-\frac{|t_1^{(i)} - t_1^{(j)}|^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{|t_2^{(i)} - t_2^{(j)}|^2}{a^2}\right), \quad (7.1)$$

onde  $t_1^{(i)}$  e  $t_2^{(i)}$  são as coordenadas do ponto  $i$ ,  $t_1^{(j)}$  e  $t_2^{(j)}$  são as coordenadas do ponto  $j$  e  $a$  é o tamanho de correlação.

Em todos os casos o modelo de estado plano de tensão é considerado, onde elementos bilineares isoparamétricos de quatro nós quadrados são utilizados para a discretização do domínio enquanto o método do ponto médio é utilizado para a discretização do campo aleatório. A mesma malha é utilizada em ambas as discretizações. Conforme apresentado em Li e Kiureghian (1993) e mencionado anteriormente, a utilização do método do ponto médio para a discretização do campo aleatório proporciona descontinuidades ao longo do contorno dos elementos. Quanto menor o tamanho de correlação considerado, maior é a taxa de flutuação do campo aleatório e mais refinada deve ser a malha do campo aleatório, de forma a representar de forma adequada as possíveis variações. Quando a malha utilizada na discretização do campo aleatório é refinada, deve-se refinar também a malha de elementos finitos utilizada na discretização do domínio. Desta forma, quanto menor o tamanho de correlação utilizado, maior o número de variáveis aleatórias  $N$  e, conseqüentemente, o número de elementos finitos  $N_e$  necessários para uma adequada quantificação de resposta.

Para a redução do custo computacional associado à quantificação de incertezas, utilizou-se a técnica de desacoplamento apresentada anteriormente, onde uma tolerância de  $\varepsilon = 0.0001$  é utilizada na Eq. (4.70), de forma a considerar 99.99% dos autovalores da matriz de covariâncias  $\mathbf{S}$ .

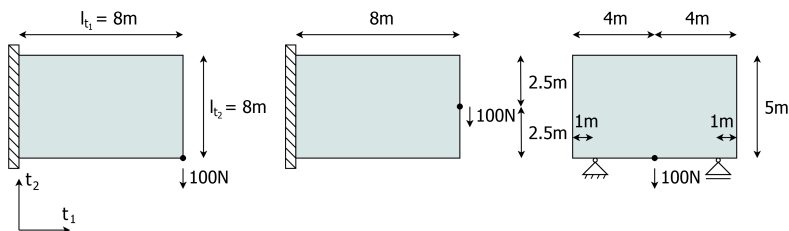
O número de autovalores  $\tilde{N}$  utilizados para calcular os momentos estatísticos e as sensibilidades aumenta com a redução do tamanho de correlação. Além disso, conforme mencionado anteriormente, o número de

elementos finitos  $N_e$  também aumenta (como consequência do aumento de variáveis aleatórias  $N$ ) com a redução do tamanho de correlação. Como o número de operações necessárias para calcular os momentos estatísticos e as sensibilidades são proporcionais ao número de autovalores  $\tilde{N}$  e ao número de elementos finitos  $N_e$  utilizados, verifica-se que a eficiência computacional diminui com a redução do tamanho de correlação.

## 7.1 PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE FLEXIBILIDADE COM RESTRIÇÃO DE VOLUME

Três casos são estudados nesta subseção. Na Figura 16 os domínios e condições de contorno referentes aos casos estudados são apresentados. Uma malha fixa com 4000 ( $80 \times 50$ ) elementos, suficiente para a obtenção de uma boa descrição do contorno da estrutura, é utilizada em todos os exemplos. Dados de entrada determinísticos: dimensões  $l_{t_1} = 8m$  e  $l_{t_2} = 5m$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 1/3$ , espessura  $esp = 0.01m$ , força concentrada  $F = 100N$  e condições de contorno mostradas na Figura 16. O valor esperado  $E[E]$  e o desvio padrão  $Std[E]$  do módulo de elasticidade são iguais a  $200GPa$  e  $20GPa$  (10%) respectivamente.

Figura 16 – Domínios e condições de contorno dos casos estudados.



Fonte: Produção do próprio autor.

De forma a verificar a influência do tamanho de correlação nas topologias ótimas, quatro valores diferentes são considerados para  $a$ :  $0.4m$ ,  $0.6m$ ,  $0.8m$  e  $1.0m$ . O tamanho do elemento utilizado para discretizar o campo aleatório  $l$  é constante e igual a  $0.1m$ , de forma que o maior valor normalizado  $l/a$  é igual a  $0.25$ , considerando  $a = 0.4m$ . Conforme apresentado em Li e Kiureghian (1993), para um tamanho de elemento normalizado de  $0.25$  tem-se um erro de aproximadamente 6% ao longo do contorno dos elementos, considerando o modelo de correlação  $\mu_B$  utilizado.

Para propósitos ilustrativos, realizações do campo aleatório, considerando os comprimentos de correlação de  $0.4m$  e  $1.0m$ , são apresentados na Figura 17. Estas realizações são ilustradas no intervalo  $[140GPa, 260GPa]$ , variando linearmente as cores de branco (valor mínimo) à preto (valor máximo).

Figura 17 – Realizações da distribuição espacial do módulo de elasticidade considerando os comprimentos de correlação de  $0.4m$  e  $1.0m$ .

$a(m)$ \ Real.	1	2
1.0		
0.4		

Fonte: Produção do próprio autor.

Conforme mencionado anteriormente, a técnica de desacoplamento foi utilizada para a redução do custo computacional. O número de autovalores  $\tilde{N}$  necessários para a obtenção da tolerância  $\varepsilon$  desejada pode ser verificado para cada tamanho de correlação na Tabela 1.

Tabela 1 – Modos dominantes necessários para obter uma tolerância igual a  $\varepsilon = 0.0001$  na Eq. (4.70), para  $N = 4000$ .

$a(m)$	1.0	0.8	0.6	0.4
$\tilde{N}$	156	230	385	814

Fonte: Produção do próprio autor.

Considerando o procedimento de otimização topológica, o fator de penalização  $p$  é considerado igual a 3 em todos os casos analisados. O raio do filtro, neste caso aplicado diretamente na direção de busca, é considerado igual a  $0.15m$ , de forma que a vizinhança de cada elemento é composta pelo próprio elemento e pelos elementos que compartilham aresta com o elemento central.

A restrição de volume  $V_{max}$  é considerada a mesma nos casos 1 e 2 e igual a 50% do volume do domínio de referência  $V(\mathbf{1})$ . No caso 3, 30% do volume do domínio de referência é considerado como restrição de volume. Em todos os casos, a estimativa inicial é a razão entre a restrição



de volume e o volume do domínio de referência  $\rho_o = 1V_{max}/V(\mathbf{1})$ . Para evitar um problema de equilíbrio singular,  $\rho_{min} = 1 \times 10^{-3}$ .

Na subsecção 7.1.1, o procedimento de otimização robusta é aplicado para a obtenção de estruturas com uma variância mínima de resposta, considerando os três casos apresentados na Figura 16. Na subsecção 7.1.2, diferentes coeficientes de ponderação  $\gamma_E$  e  $\gamma_S$  são considerados para o caso 3, para verificar a influência destes parâmetros na solução do problema de otimização.

### 7.1.1 Minimização do desvio padrão da flexibilidade

Nesta subsecção a otimização topológica robusta é realizada com o objetivo de obter uma topologia com uma variância mínima ( $\gamma_E$  e  $\gamma_S$  iguais a 0 e 1, respectivamente). Assim, o problema de otimização consiste na minimização do desvio padrão da flexibilidade  $Std[f]$  com restrição de volume.

Na Figura 18 as topologias robustas, considerando uma incerteza na distribuição espacial do módulo de elasticidade, são apresentadas. Nesta mesma figura também pode-se visualizar as topologias determinísticas, representadas por  $a \rightarrow \infty$ , referente aos três casos analisados.

O valor esperado e o desvio padrão da flexibilidade são apresentados nas Tabelas 2, 3 e 4 para as estruturas robustas ilustradas na Figura 18 e comparados com os momentos estatísticos das estruturas determinísticas (obtidos por meio de uma análise estocástica, utilizando-se o método da perturbação, com  $\varepsilon = 0.0001$ ).

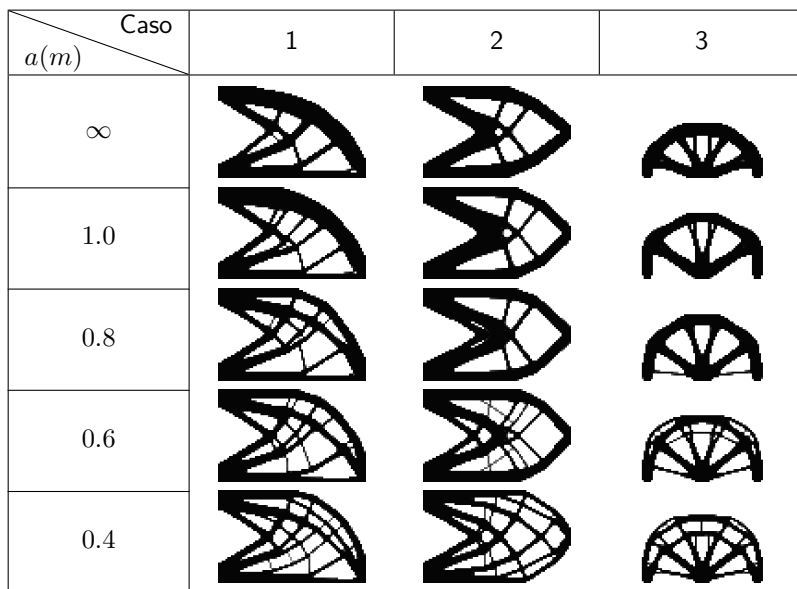
Tabela 2 – Valor esperado e desvio padrão da flexibilidade para a estrutura robusta do caso 1, Figura 18.

$a(m)$	Valor esperado			Desvio padrão		
	Robusta ( $10^{-6}Nm$ )	Determ. ( $10^{-6}Nm$ )	Dif. (%)	Robusta ( $10^{-6}Nm$ )	Determ. ( $10^{-6}Nm$ )	Dif. (%)
1.0	224.25	222.73	0.68	6.32	6.44	-1.98
0.8	228.88	222.70	2.78	5.55	5.69	-2.38
0.6	232.34	222.66	4.35	4.67	4.84	-3.49
0.4	235.48	222.58	5.79	3.70	3.86	-4.04

Fonte: Produção do próprio autor.

Analisando as Tabelas 2, 3 e 4 pode-se verificar que a diferença (Dif.) do desvio padrão da flexibilidade diminui (aumenta em módulo) com a redução do tamanho de correlação. Conforme mostrado na sub-

Figura 18 – Topologias robustas obtidas considerando-se diferentes tamanhos de correlação para os três casos ilustrados na Figura 16.



Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 3 – Valor esperado e desvio padrão da flexibilidade para a estrutura robusta do caso 2, Figura 18.

$a(m)$	Valor esperado			Desvio padrão		
	Robusta ( $10^{-6}Nm$ )	Determ. ( $10^{-6}Nm$ )	Dif. (%)	Robusta ( $10^{-6}Nm$ )	Determ. ( $10^{-6}Nm$ )	Dif. (%)
1.0	191.60	187.91	1.97	5.21	5.25	-0.72
0.8	192.91	187.88	2.68	4.46	4.54	-1.65
0.6	197.09	187.85	4.92	3.63	3.75	-3.09
0.4	199.80	187.78	6.40	2.61	2.82	-7.51

Fonte: Produção do próprio autor.

seção 4.3.4, a estrutura determinística é equivalente a estrutura robusta considerando-se um tamanho de correlação tendendo a infinito. Levando isto em consideração e analisando as topologias ilustradas na Figura 18, pode-se verificar que um domínio com uma heterogeneidade no módulo de elasticidade representada com um campo aleatório fracamente correlacionado (pequeno tamanho de correlação) pode levar a obtenção de uma estrutura robusta muito diferente da estrutura obtida com a abordagem

Tabela 4 – Valor esperado e desvio padrão da flexibilidade para a estrutura robusta do caso 3, Figura 18.

$a(m)$	Valor esperado			Desvio padrão		
	Robusta ( $10^{-6}Nm$ )	Determ. ( $10^{-6}Nm$ )	Dif. (%)	Robusta ( $10^{-6}Nm$ )	Determ. ( $10^{-6}Nm$ )	Dif. (%)
1.0	51.11	48.80	4.74	1.83	1.92	-4.76
0.8	50.52	48.79	3.54	1.62	1.72	-5.85
0.6	51.45	48.78	5.46	1.40	1.49	-6.67
0.4	52.32	48.77	7.28	1.15	1.24	-7.06

Fonte: Produção do próprio autor.

determinística, tanto na topologia quanto nos momentos estatísticos.

Na Figura 18, pode-se verificar o aparecimento de reforços finos à medida em que o tamanho de correlação diminui. Um pequeno tamanho de correlação implica em uma grande variação no módulo de elasticidade dentro de uma determinada porção de material. Desta forma, os reforços grandes são evitados de forma a evitar estas grandes variações e reduzir o desvio padrão de resposta. Isto leva à interessante conclusão de que a utilização de um tamanho de correlação extremamente pequeno resultaria em uma topologia extremamente complexa, com vários reforços finos.

Pode-se verificar que as estruturas robustas possuem uma flexibilidade esperada maior quando comparadas às estruturas determinísticas. Considerando-se os casos 1 e 2, associados às Tabelas 2 e 3, as diferenças (Dif.) do valor esperado da flexibilidade aumenta com a redução do tamanho de correlação. Analisando a Tabela 4, observa-se que a diferença diminui, de  $a = 1.0m$  para  $a = 0.8m$ , e aumenta, de  $0.8m$  para  $0.4m$ . Este comportamento pode ser explicado pelo fato de que a flexibilidade esperada não está sendo considerada no problema de otimização, pois  $\gamma_E = 0$ .













### 7.1.2 Influência dos coeficientes de ponderação no procedimento de otimização

Com o intuito de verificar a influência da minimização do valor esperado da flexibilidade no procedimento de otimização, diferentes coeficientes de ponderação  $\gamma_E$  e  $\gamma_S$  são considerados. Inicialmente, uma normalização é realizada, tal que  $\gamma_E = \gamma/E[f]_d$  e  $\gamma_S = (1 - \gamma)/Std[f]_d$ , onde  $\gamma$  é um número real entre 0 e 1,  $E[f]_d$  é o valor esperado da flexibilidade da solução determinística e  $Std[f]_d$  é o desvio padrão da flexibilidade da solução determinística. Se  $\gamma = 0$ , o procedimento de otimização se torna a minimização do desvio padrão da flexibilidade, conforme apresen-

tado anteriormente para os três casos ilustrados na Figura 16. Se  $\gamma = 1$ , o procedimento de otimização se torna a minimização do valor esperado da flexibilidade. Para analisar a influência de  $\gamma$  na topologia e nos momentos estatísticos das soluções, um procedimento de otimização topológica é realizada para o caso 3, considerando três valores de  $\gamma$ : 0, 0.5 e 1; para os mesmos tamanhos de correlação  $a$  utilizados anteriormente:  $0.4m$ ,  $0.6m$ ,  $0.8m$  e  $1.0m$ .

Na Figura 19 as topologias obtidas, considerando-se o caso 3, são apresentadas para diferentes valores de  $\gamma$ . Nas Tabelas 5 e 6, os valores esperados e os desvios padrão são apresentados, respectivamente, e comparados com os valores obtidos com a solução determinística.

Figura 19 – Topologias obtidas para o caso 3, considerando diferentes tamanhos de correlação e diferentes valores de  $\gamma$ .

$a(m) \backslash \gamma$	1	0.5	0
1.0			
0.8			
0.6			
0.4			

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 5 – Valor esperado da flexibilidade para as estruturas do caso 3, Figura 19.

$a(m)$	Determinística ( $10^{-6}Nm$ )	$\gamma = 1$ ( $10^{-6}Nm$ )	$\gamma = 0.5$ ( $10^{-6}Nm$ )	$\gamma = 0$ ( $10^{-6}Nm$ )
1.0	48.80	48.71	49.50	51.11
0.8	48.79	48.70	49.56	50.52
0.6	48.78	48.70	49.52	51.45
0.4	48.77	48.68	49.59	52.32

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 6 – Desvio padrão da flexibilidade para as estruturas do caso 3, Figura 19.

$a(m)$	Determinística ( $10^{-6}Nm$ )	$\gamma = 1$ ( $10^{-6}Nm$ )	$\gamma = 0.5$ ( $10^{-6}Nm$ )	$\gamma = 0$ ( $10^{-6}Nm$ )
1.0	1.92	1.93	1.87	1.83
0.8	1.72	1.72	1.67	1.62
0.6	1.49	1.50	1.44	1.40
0.4	1.24	1.24	1.19	1.15

Fonte: Produção do próprio autor.

Como pode ser visto na Figura 19, as topologias obtidas considerando  $\gamma = 1$ , onde a minimização da flexibilidade esperada é realizada, são quase idênticas às topologias obtidas com a abordagem determinística ( $a \rightarrow \infty$  na Figura 18). Isto pode ser explicado analisando a Eq. (6.6), que depende da Eq. (4.71). Apesar da dificuldade de analisar cada termo desta equação para um problema complexo, pode-se fazer o uso do resultado particular obtido na subseção 4.3.4. Neste caso, pode ser visto na Eq. (6.42), que o termo  $1 + \left(\frac{Std[E]}{E[E]}\right)^2$  está associado aos termos  $U^0$ , com peso 1.0, e  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \mathbf{U}_{ii}^{\tilde{I}\tilde{I}} \Theta_{ii}$ , com peso  $\left(\frac{Std[E]}{E[E]}\right)^2$ . Assim, para pequenos valores de  $Std[E]$ , a importância do termo de segunda ordem é muito pequena, de forma que a topologia resultante se assemelha a estrutura determinística. Esta tendência é observada em todos os exemplos estudados neste trabalho, pois  $\frac{Std[E]}{E[E]} = 0.1$ .

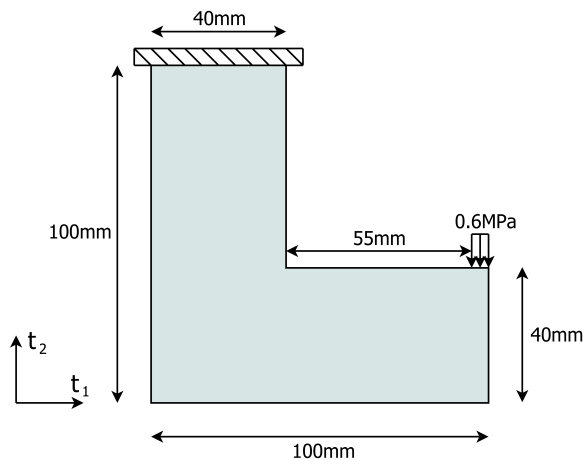
Analisando-se as Tabelas 5 e 6, pode-se verificar que os momentos estatísticos das estruturas obtidas com  $\gamma = 1$ , comparados aos valores obtidos com a estrutura determinística, são muito próximos. Para  $\gamma = 0.5$ , estruturas com momentos estatísticos intermediários entre as estruturas referentes a  $\gamma = 0$  e  $\gamma = 1$  são obtidas considerando-se todos os tamanhos de correlação analisados.

## 7.2 PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE VOLUME COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO

Nesta subseção um problema frequentemente estudado na literatura (domínio em  $L$ ) é analisado. Inicialmente considera-se que todos os parâmetros são determinísticos, de forma a comprovar a eficácia do algoritmo de Lagrangiano aumentado utilizado com o método proposto para a solução de problemas com restrições laterais. Posteriormente o problema

é solucionado considerando-se incerteza no módulo de elasticidade. Na Figura 20, o domínio e as condições de contorno do caso estudado podem ser verificados.

Figura 20 – Domínio em L e condições de contorno.



Fonte: Produção do próprio autor.

Em todos os problemas ilustrados, como o elemento bilinear isoparamétrico de quatro nós está sendo utilizado, o cálculo da tensão equivalente de von Mises foi efetuado no centro de cada elemento, por este se tratar do ponto superconvergente para o cálculo de tensões considerando este tipo de elemento (BARLOW, 1976). Desta forma, o número de restrições de tensão é igual ao número de variáveis de projeto.

Dados de entrada determinísticos: coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , espessura  $esp = 1mm$ , restrição de tensão  $\sigma_y = 1.6MPa$  e força aplicada  $F = 3N$  distribuída sobre os nós em um perímetro de  $5mm$  conforme ilustrado na Figura 20. As dimensões do domínio também podem ser verificadas na Figura 20. Considerando o procedimento de otimização, o fator de penalização  $p$  é considerado igual a 3, o fator  $q$  é considerado igual a 2.5, o raio do filtro é constante e igual a  $2mm$ , o parâmetro de penalização inicial  $r$  é considerado igual a 100 e o fator de penalização  $\delta$  é considerado igual a 10. A estimativa inicial (pseudo densidades iniciais) é  $\rho_o = 1$  em todos os exemplos. Para evitar um problema de equilíbrio singular,  $\rho_{min} = 1 \times 10^{-3}$ .

Considerando-se o problema determinístico, utilizou-se um módulo

de elasticidade  $E = 1MPa$ . No problema estocástico, o valor esperado  $E[E]$  e o desvio padrão  $Std[E]$  do módulo de elasticidade são iguais a  $1MPa$  e  $0.1MPa$  (10%) respectivamente.

A seguir os resultados obtidos com a abordagem determinística e com a abordagem estocástica são apresentados.

### 7.2.1 Resultados do problema determinístico

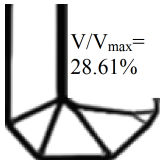
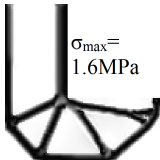
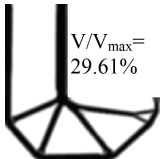
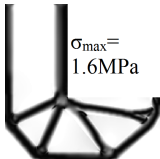
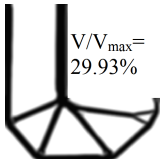
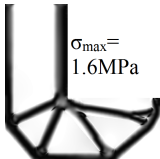
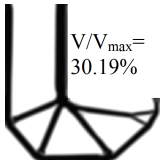
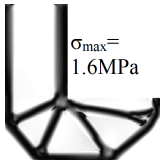
Na Figura 21 as topologias obtidas por meio da solução do problema determinístico são ilustradas com as suas distribuições de tensão equivalente de von Mises. Para verificar se a solução obtida é independente da malha, quatro malhas são utilizadas para a discretização do domínio:  $N_e = 6400, 25600, 57600$  e  $102400$ . Na Figura 21, as tensões equivalentes de von Mises variam linearmente de branco ( $\cong 0.0MPa$ ) a preto ( $1.6MPa$ ). A restrição de tensão é satisfeita em todos os pontos onde a tensão é calculada, em todos os casos apresentados. A razão de volume ótima  $V/V_{max}$  obtida é igual a 28.61%, 29.61%, 29.93% e 30.19% considerando os casos com  $N_e = 6400, 25600, 57600$  e  $102400$ , respectivamente.

Analisando a Figura 21, pode-se verificar que existe uma tendência a evitar o canto singular com o refino da malha, devido à melhora na qualidade do cálculo de tensões. Pode-se verificar, também, que o fenômeno de singularidade é evitado com o uso de  $q < p$  na Eq. (3.30), pois poucos elementos com pseudo densidades intermediárias (cinzas) estão presentes nas topologias otimizadas.

Para propósitos comparativos, alguns resultados da literatura são apresentados na Figura 22. Em (a) a relaxação  $\epsilon$  é utilizada para evitar o fenômeno de singularidade e um algoritmo de Lagrangiano aumentado é utilizado para solucionar o problema de otimização discretizado. O leitor pode consultar Pereira, Fancello e Barcellos (2004) para mais detalhes. Em (b) e (c) a abordagem qp é utilizada para evitar o fenômeno de singularidade e, para solucionar o problema de otimização discretizado com o Método das Assíntotas Móveis (MMA - *Method of Moving Asymptotes*), todas as restrições de tensão são agrupadas em um conjunto reduzido de restrições e em uma única restrição, respectivamente. O leitor pode consultar Le et al. (2010), Farias, Cardoso e Munoz-Rojas (2011) para mais detalhes.

Por meio da análise da Figura 22, verifica-se que topologias obtidas por meio da solução de um problema de minimização de volume com restrição de tensão tendem a suavizar a região de singularidade de tensão no

Figura 21 – Resultados determinísticos considerando o problema de minimização de volume com restrição de tensão.

$N_e$ \ Campo	Densidades	Tensões de von Mises
6400	 $V/V_{\max} = 28.61\%$	 $\sigma_{\max} = 1.6\text{MPa}$
25600	 $V/V_{\max} = 29.61\%$	 $\sigma_{\max} = 1.6\text{MPa}$
57600	 $V/V_{\max} = 29.93\%$	 $\sigma_{\max} = 1.6\text{MPa}$
102400	 $V/V_{\max} = 30.19\%$	 $\sigma_{\max} = 1.6\text{MPa}$

Fonte: Produção do próprio autor.

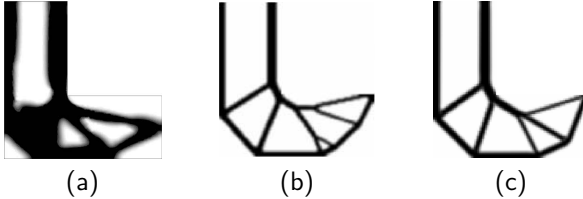
domínio em L. As topologias apresentadas são arredondadas nesta região de singularidade.

### 7.2.2 Resultados do problema estocástico

Para solucionar o problema estocástico de minimização de volume com restrição de tensão, uma malha de 6400 elementos foi utilizada em todos os casos. Com o intuito de verificar a influência do tamanho de correlação nas topologias ótimas, quatro valores diferentes são considerados para  $a$ :  $0.025m$ ,  $0.05m$ ,  $0.075m$  e  $0.1m$ . O tamanho do elemento utilizado para discretizar o campo aleatório  $l$  é constante e igual a  $0.001m$ , de forma que o maior valor normalizado  $l/a$  é igual a  $0.04$ , considerando



Figura 22 – Topologias, domínio em L, considerando o problema de minimização de volume com restrição de tensão: (a) (PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004); (b) (LE et al., 2010) e (c) (FARIAS; CARDOSO; MUNOZ-ROJAS, 2011). As topologias são apenas ilustrativas, pois os carregamentos são distintos.



Fonte: (a) (PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004); (b) (LE et al., 2010) e (c) (FARIAS; CARDOSO; MUNOZ-ROJAS, 2011).

$a = 0.025m$ . Conforme apresentado em Li e Kiureghian (1993), para um tamanho de elemento normalizado de 0.04 tem-se um erro menor que 1% ao longo do contorno dos elementos, considerando o modelo de correlação  $\mu_B$  utilizado.

O número de autovalores  $\tilde{N}$  necessários para a obtenção da tolerância  $\varepsilon$  desejada pode ser verificado para cada tamanho de correlação na Tabela 7.

Tabela 7 – Modos dominantes necessários para obter uma tolerância igual a  $\varepsilon = 0.0001$  na Eq. (4.70), para  $N = 6400$ .

$a(m)$	0.1	0.075	0.05	0.025
$\tilde{N}$	10	14	22	55

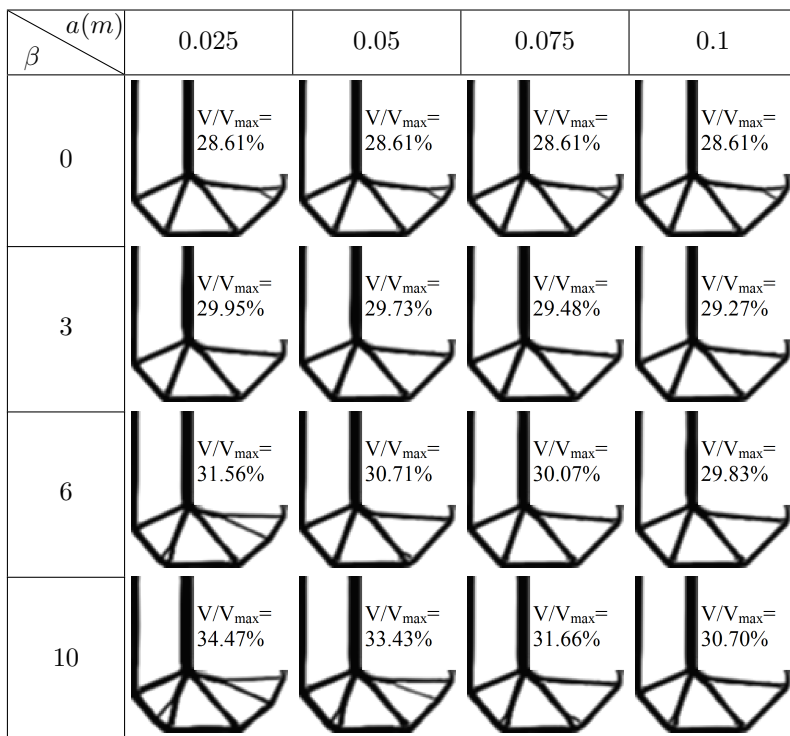
Fonte: Produção do próprio autor.

Nas Figuras 23 e 24 os campos de densidades ótimos obtidos por meio da abordagem robusta e os respectivos campos de tensões equivalentes de von Mises são mostrados. A restrição de tensão é satisfeita em todos os pontos onde a tensão é calculada, em todos os casos apresentados.

Analisando a Figura 23, pode-se verificar que a razão de volume ótima  $V/V_{max}$  aumenta com o aumento do parâmetro  $\beta$  utilizado na Eq. (6.44) e com a redução do tamanho de correlação  $a$  utilizado na Eq. (7.1).

O aumento da razão de volume ótima  $V/V_{max}$  com o aumento do parâmetro  $\beta$  é facilmente interpretado analisando-se as Eqs. (6.44) e (4.78). Considerando  $\beta = 0$  tem-se  $\hat{\sigma}_{eq}^{(k)} = E \left[ \sigma_{eq}^{(k)} \right] = (\sigma_{eq}^0)_k$ , de forma

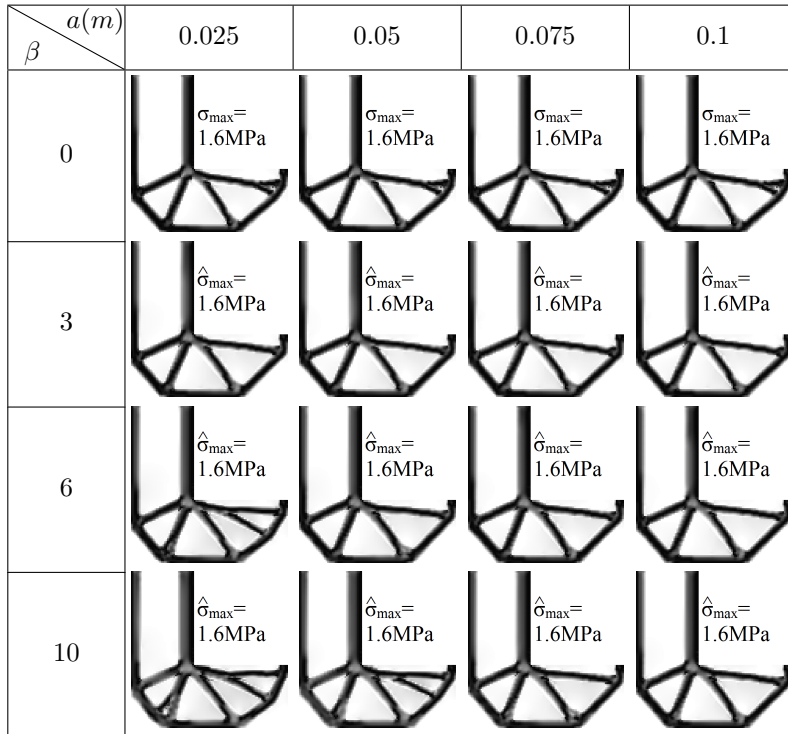
Figura 23 – Campos de densidades obtidos por meio da abordagem robusta considerando o problema de minimização de volume com restrição de tensão.



Fonte: Produção do próprio autor.

que os resultados obtidos com a abordagem robusta são equivalentes aos resultados determinísticos para qualquer tamanho de correlação considerado. Quando um valor positivo de  $\beta$  é utilizado, de acordo com as Eqs. (6.44) e (4.78), tem-se  $\hat{\sigma}_{eq}^{(k)} = (\sigma_{eq}^0)_k + \beta Std [\sigma_{eq}^{(k)}]$ . Como o desvio padrão de qualquer variável aleatória é sempre positivo, o valor  $\beta Std [\sigma_{eq}^{(k)}]$  é também sempre positivo para qualquer  $\beta > 0$ . Então, aumentando o valor de  $\beta$ , aumenta-se o valor de  $\beta Std [\sigma_{eq}^{(k)}]$ . Como consequência, no procedimento de otimização, precisa-se de um valor menor de  $(\sigma_{eq}^0)_k$  para satisfazer as restrições de tensão em cada ponto  $k$ . Para esta finalidade, precisa-se de mais material distribuído de forma correta, o que implica em

Figura 24 – Campos de tensões equivalentes de von Mises das topologias mostradas na Figura 23.



Fonte: Produção do próprio autor.

uma maior razão de volume ótima  $V/V_{max}$ .

Conforme já demonstrado neste trabalho, considerando incertezas somente no módulo de elasticidade e para  $a \rightarrow \infty$ , tem-se  $Var[\sigma_{eq}^{(k)}] = 0$ , Eq. (4.95). Então, para  $a \rightarrow \infty$ , a tensão equivalente de von Mises para problemas estocásticos, Eq. (6.44), tende à tensão determinística  $\hat{\sigma}_{eq}^{(k)} \rightarrow (\sigma_{eq}^0)_k$  e, como consequência, a topologia ótima obtida por meio da abordagem robusta é a mesma quando comparada a topologia obtida por meio da abordagem determinística. Conforme o tamanho de correlação  $a$  decresce, menor é a escala de flutuação espacial do módulo de elasticidade e, conseqüentemente, maior é a sua heterogeneidade. Conforme a heterogeneidade do módulo de elasticidade aumenta, maior é a diferença de comportamentos entre as abordagens determinística e estocástica. Pode-se

verificar que, para um parâmetro  $\beta$  fixo, conforme aumenta-se a heterogeneidade do módulo de elasticidade, maior é a razão de volume  $V/V_{max}$  da estrutura ótima.

Analisando a Eq. (5.9), pode-se verificar que a máxima probabilidade de falha decresce com o aumento de  $\beta$ . A Tabela 8 apresenta a máxima probabilidade de falha para cada  $\beta$  utilizado na obtenção das topologias ótimas mostradas na Figura 23.

Tabela 8 – Máxima probabilidade de falha para diferentes valores de  $\beta$ .

$\beta$	$P_f^{max}(\%)$
0	100.000
3	10.000
6	2.703
10	0.990

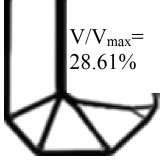
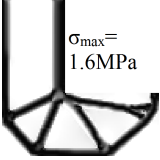
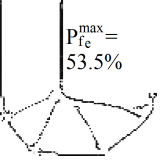
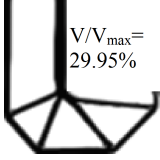
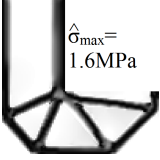
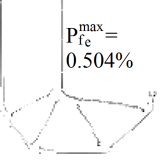
Fonte: Produção do próprio autor.

O aumento na razão de volume  $V/V_{max}$  na topologias ótimas, associado com uma correta distribuição de material, reduz a máxima probabilidade de falha destas estruturas. Quando se utiliza um  $\beta = 0$ , tem-se a estrutura determinística. Para  $\beta = 3$ , as mesmas topologias são obtidas considerando-se todos os tamanhos de correlação analisados, mas elas são um pouco diferentes na forma e na razão de volume e também diferentes quando comparadas às topologias determinísticas. Para  $\beta = 6$  pode-se verificar diferenças entre as topologias para diferentes tamanhos de correlação. As topologias para  $a = 0.1m$  e  $a = 0.075m$  são as mesmas quando comparadas às topologias considerando  $\beta = 3$ . Para  $a = 0.05m$  um pequeno reforço aparece e para  $a = 0.025m$  uma topologia diferente, com dois novos reforços é obtida. Para  $\beta = 10$  as mesmas topologias são obtidas para  $a = 0.025m$ ,  $0.05m$  e  $0.075m$ , com diferenças na forma e na razão de volume. Para  $a = 0.1m$  a mesma topologia é obtida quando comparada aquelas encontradas considerando-se  $\beta = 3$ .

Para verificar se esta abordagem está de fato reduzindo a probabilidade de falha das estruturas ótimas, uma MCS com  $1 \times 10^5$  realizações do módulo de elasticidade (no intervalo  $[0.1MPa, 1.9MPa]$ ) nas estruturas ótimas considerando  $\beta = 0$  e  $\beta = 3$  para  $a = 0.025m$  foi efetuada. Os resultados são mostrados na Figura 25, onde a probabilidade de falha de cada restrição de tensão pode ser verificada, variando linearmente de branco ( $P_{f_e} = 0$ ) a preto ( $P_{f_e}^{max}$ ).

Analisando a Figura 25 pode-se verificar que a probabilidade de falha máxima é bastante reduzida com o aumento do parâmetro  $\beta$ . A

Figura 25 – Campos de densidades, tensões equivalentes de von Mises e probabilidades de falha calculadas com a MCS considerando  $\beta = 0$  e  $\beta = 3$  para  $a = 0.025m$ .

$\beta$ \ Campo	Densidades	Tens. von Mises	Prob. falha
0	 $V/V_{max} = 28.61\%$	 $\sigma_{max} = 1.6\text{MPa}$	 $P_{f_e}^{max} = 53.5\%$
3	 $V/V_{max} = 29.95\%$	 $\hat{\sigma}_{max} = 1.6\text{MPa}$	 $P_{f_e}^{max} = 0.504\%$

Fonte: Produção do próprio autor.

razão de volume  $V/V_{max}$  da estrutura obtida com a abordagem robusta é maior que a razão de volume da estrutura obtida com a abordagem determinística, mas a estrutura obtida com a abordagem robusta é mais confiável.

Também se pode verificar, por meio da análise da Tabela 8, que as máximas probabilidades de falha  $P_{f_e}^{max}$  obtidas por meio da MCS são menores do que as máximas probabilidades de falha  $P_f^{max}$  obtidas por meio da desigualdade unilateral de Chebyshev, conforme o esperado.

## 8 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados problemas de otimização topológica de meios contínuos considerando incertezas nas propriedades do material associadas à rigidez. Dois problemas foram analisados: o problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume e o problema de minimização de volume com restrição local de tensão.

O método de perturbação foi utilizado para a quantificação de incertezas e o método do ponto médio foi utilizado para a discretização do campo aleatório, onde uma abordagem de desacoplamento foi utilizada para reduzir o custo computacional. O método dos elementos finitos foi utilizado para a discretização do domínio e o modelo SIMP foi utilizado na parametrização material. Os exemplos apresentados no trabalho apresentam um desvio padrão de 10% no módulo de elasticidade (referente ao seu valor médio), compatível com as limitações do método de perturbação.

O problema de minimização de flexibilidade com restrição de volume foi solucionado utilizando-se um algoritmo de critério de ótimo. Quando as incertezas são consideradas neste caso, um problema multi objetivo deve ser solucionado, onde coeficientes de ponderação são determinados pelo projetista para quantificar o valor esperado e o desvio padrão da flexibilidade. Verificou-se que, quando o objetivo é a minimização do valor esperado da flexibilidade, poucas são as diferenças entre as topologias obtidas por meio das abordagens determinística e estocástica. Quando o objetivo é a minimização do desvio padrão da flexibilidade, maiores são as diferenças, tanto em topologia como em desempenho, entre as estruturas obtidas por meio de ambas as abordagens quanto menor o comprimento de correlação utilizado na função de correlação que representa o campo aleatório. Quando o objetivo é a minimização de uma média entre o valor esperado e o desvio padrão da flexibilidade, estruturas intermediárias em desempenho, entre aquelas obtidas com a minimização do valor esperado e a minimização do desvio padrão da flexibilidade, são obtidas.

O problema de minimização de volume com restrição local de tensão foi solucionado utilizando-se o método do Lagrangiano aumentado juntamente com o método proposto para a solução de problemas com restrições laterais, onde a abordagem qp foi utilizada para evitar o fenômeno de singularidade. O problema estocástico, neste caso, apresenta incertezas unicamente nas restrições de tensão. O problema é tratado conforme abordado em vários trabalhos na literatura, em que a restrição é representada como uma soma entre o seu valor esperado e o seu desvio padrão

multiplicado por uma constante positiva  $\beta$  estipulada pelo projetista (número de desvios). Quanto maior o valor desta constante, maior é o peso do desvio padrão na restrição  $e$ , conseqüentemente, maior é a dificuldade de se satisfazer esta restrição. Neste problema, verificou-se que o volume da estrutura otimizada aumenta com o aumento de  $\beta$  e com a redução do comprimento de correlação considerado na função de correlação. Diferenças de topologia também são observadas para grandes valores de  $\beta$  e pequenos comprimentos de correlação. A formulação apresentada e os resultados obtidos são inéditos na literatura.

De uma forma geral, verificou-se uma grande importância do comprimento de correlação da função de correlação utilizada para representar a incerteza no módulo de elasticidade. Foi observado que problemas em que o módulo de elasticidade é representado por um campo aleatório fracamente correlacionado apresentam uma solução distinta da solução do problema determinístico. Quando o campo é fortemente correlacionado, as soluções dos problemas determinístico e estocástico são iguais.

Verificou-se, também, que o método proposto para a solução de problemas de otimização com somente restrições laterais funcionou bem quando acoplado ao método do Lagrangiano aumentado. O método se mostrou eficaz na solução dos problemas determinístico e estocástico de minimização de volume com restrição local de tensão.

## 8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Modificar o método utilizado na discretização do campo aleatório. O método do ponto médio, utilizado neste trabalho, pode ser substituído por métodos que proporcionam um menor erro em relação ao campo contínuo, como os métodos de expansão em séries;
- Modificar o método de quantificação de incertezas. O método de perturbação é limitado para pequenas incertezas nos parâmetros de entrada. Quando incertezas moderadas ou grandes são consideradas, métodos espectrais ou de simulação podem ser utilizados;
- Modificar o algoritmo utilizado na solução do problema de minimização interno do Lagrangiano aumentado, considerando o problema com restrição de tensão. Podem-se estudar algoritmos alternativos,

que sejam eficientes na solução de problemas de larga escala com restrições laterais em todas as variáveis de projeto;

- Modificar o problema estocástico de minimização de volume com restrição local de tensão, de forma que as restrições de tensão sejam quantificadas probabilisticamente. Da forma em que o problema é apresentado, não se pode dizer exatamente qual a probabilidade de falha da estrutura otimizada. Para isto, pode-se utilizar o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM), por exemplo, para calcular a probabilidade de falha de cada restrição de tensão;
- Modificar o filtro utilizado na solução do problema com restrição local de tensão, com o intuito de reduzir a quantidade de pseudo densidades intermediárias. Pode-se, para isto, utilizar operadores não lineares de projeção. O problema ficaria ainda mais não convexo e a convergência ainda mais lenta, mas uma quantidade menor de pseudo densidades intermediárias seria obtida;
- Considerar incertezas em outras grandezas, como por exemplo, nas forças externas, tanto na sua direção como na sua intensidade;
- Estender a metodologia apresentada para problemas de mecanismos flexíveis;





## REFERÊNCIAS

- AGARWAL, H. *Reliability based design optimization: Formulations and methodologies*. Tese (PhD Thesis) — Graduate School of the University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 25, 55, 56 e 93.
- ARORA, J. *Introduction to Optimum Design*. third. [S.l.]: Academic Press, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 29, 39, 51, 94 e 95.
- ASADPOURE, A.; TOOTKABONI, M.; GUEST, J. Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness: Application to truss structures. *Computers and Structures*, v. 89, p. 1131–1141, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.
- BARLOW, J. Optimal stress locations in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, p. 243–251, 1976. Citado na página 125.
- BATHE, K.-L. *Finite Element Procedures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 37.
- BENDSØE, M.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. *Applied Mechanics*, v. 69, p. 635–654, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 27, 35, 36 e 37.
- BENDSØE, M.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. [S.l.]: Springer, 2003. Citado 11 vezes nas páginas 25, 27, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 41 e 99.
- BEYER, H.-G.; SENDHOFF, B. Robust optimization: A comprehensive survey. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, p. 3190–3218, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 25, 93 e 95.
- BRUGGI, M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. *Struct Multidisc Optim*, p. 125–141, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- BRUNS, T.; TORTORELLI, D. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, p. 3443–3459, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 42, 46 e 52.

CARDOSO, E.; FONSECA, J. Complexity control in the topology optimization of continuum structures. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci & Eng.*, XXV, n. 3, p. 293–301, July-September 2003. Citado na página 43.

CHENG, G.; GUO, X.  $\epsilon$ -relaxed approach in structural topology optimization. *Structural Optimization*, p. 258–266, 1997. Citado na página 48.

CHRISTENSEN, P.; KLARBING, A. *An Introduction to Structural Optimization*. [S.l.]: Springer, 2009. Citado na página 32.

DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. *Structural Reliability Methods*. Internet Edition, 2007. Disponível em: <<http://www.od-website.dk//index-2.html/books.htm>>. Citado na página 57.

DUNNING, P.; KIM, A. Robust topology optimization: Minimization of expected and variance of compliance. *AIAA Journal*, v. 51, n. 11, p. 2656–2664, 2013. Citado na página 98.

DUNNING, P.; KIM, A.; MULLINEUX, G. Introducing loading uncertainty in topology optimization. *AIAA Journal*, v. 49, n. 4, p. 760–768, April 2011. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 98.

DUYSINX, P.; BENDSØE, M. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, p. 1453–1478, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 48.

ELISHAKOFF, I. *Probabilistic Theory of Structures*. Second. [S.l.]: Dover, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 57, 58, 80, 83 e 88.

ELISHAKOFF, I.; REN, Y. The bird's eye view on finite element method for structures with large stochastic variations. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, p. 51–61, 1999. Citado na página 57.

EMMENDOERFER, H.; FANCELLO, E. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 99, n. 2, p. 129–156, 2014. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.4676>>. Citado na página 43.

FARIAS, J.-M.; CARDOSO, E.; MUNOZ-ROJAS, P. Topology optimization with stress constraints using superconvergent patch recovery. In: *Solid Mechanics in Brazil 2011 - MECSOL 2011 - Third International*

*Symposium on Solid Mechanics*. Florianópolis, Brazil: [s.n.], 2011. Citado 5 vezes nas páginas 12, 46, 49, 126 e 128.

GHANEM, R.; SPANOS, P. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. [S.l.]: Dover Publications, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 57, 65 e 66.

HABER, R.; JOG, C.; BENDSØE, M. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural Optimization*, p. 1–12, 1996. Citado na página 42.

JALALPOUR, M.; GUEST, J.; IGUSA, T. Reliability-based topology optimization of trusses with stochastic stiffness. *Structural Safety*, v. 43, p. 41–49, 2013. Citado na página 97.

JANSEN, M.; LOMBAERT, G.; SCHVENELS, M.; LAZAROV, B.; SIGMUND, O. Robust topology optimization of slender structures with geometric imperfections. In: *10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Orlando, Florida, USA: [s.n.], 2013. p. 1–10. Citado na página 98.

KAMIŃSKI, M. Generalized perturbation-based stochastic finite element method in elastostatics. *Computers and Structures*, v. 85, p. 586–594, 2007. Citado na página 72.

KHARMANDA, G.; OLHOFF, N. Reliability-based topology optimization as a new strategy to generate different structural topologies. In: E., L.; N., O.; J., S. (Ed.). *15th Nordic Seminar on Computational Mechanics - NSCM 15*. Aalborg, Denmark: [s.n.], 2002. p. 211–214. Citado na página 97.

KHARMANDA, G.; OLHOFF, N.; MOHAMED, A.; LEMAIRE, M. Reliability-based topology optimization. *Struct Multidisc Optim*, v. 26, p. 295–307, 2004. Citado na página 97.

KIUREGHIAN, A. D.; KE, J.-B. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 3, n. 2, p. 83–91, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 27, 65 e 66.

KLEIBER, M.; HIEN, T. *The Stochastic Finite Element: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*. [S.l.]: John Wiley & sons, 1992. Citado 10 vezes nas páginas 25, 27, 55, 57, 58, 66, 67, 70, 74 e 94.

- KOHN, R.; STRANG, G. Optimal design and relaxation of variational problems, i. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 39, n. 1, p. 113–137, 1986. ISSN 1097-0312. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160390107>>. Citado na página 36.
- LE, C.; NORATO, J.; BRUNS, T.; HA, C.; TORTORELLI, D. Stress-based topology optimization for continua. *Struct Multidisc Optim*, p. 605–620, 2010. Citado 5 vezes nas páginas 12, 46, 49, 126 e 128.
- LEPAGE, S. *Stochastic Finite Element Method for the Modeling of Thermoelastic Damping in Micro-Resonators*. Tese (PhD Thesis) — Université de Liège, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 66, 67 e 73.
- LI, C.-C.; KIUREGHIAN, A. D. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 119, n. 6, p. 1136–1154, June 1993. Citado 8 vezes nas páginas 63, 64, 65, 66, 67, 117, 118 e 128.
- LIU, W.; BELYTSCHKO, T.; MANI, A. Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 61–81, 1986. Citado na página 67.
- LIU, W.; BELYTSCHKO, T.; MANI, A. Random field finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 1831–1845, 1986. Citado 5 vezes nas páginas 27, 65, 66, 67 e 72.
- LOPEZ, R.; BECK, A. Optimization under uncertainties. In: \_\_\_\_\_. *Optimization of Structures and Components*. [S.l.]: Springer, 2013. cap. X, p. 117–138. Citado 7 vezes nas páginas 29, 31, 55, 56, 57, 93 e 94.
- LUO, Y.; ZHOU, M.; WANG, M.; DENG, Z. Reliability based topology optimization for continuum structures with local failure constraints. *Computers and Structures*, p. 73–84, 2014. Citado na página 97.
- MARTÍNEZ, J. *Otimização Prática Usando o Lagrangiano Aumentado*. [S.l.], 2009. Citado 3 vezes nas páginas 27, 32 e 50.
- MATTHIES, H.; BRENNER, C.; BUCHER, C.; SOARES, C. Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - stochastic finite elements. *Structural Safety*, v. 19, n. 3, p. 283–336, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 67, 70 e 72.
- MIZUNO, H.; MOSSA, S.; BARRAT, J.-L. Measuring spatial distribution of the local elastic modulus in glasses. *Phys. Rev. E*,

American Physical Society, v. 87, p. 042306, Apr 2013. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.87.042306>>. Citado na página 55.

NELDER, J.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, v. 7, p. 308, 1965. Citado na página 30.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical Optimization*. [S.l.]: Springer, 1999. Citado na página 30.

OUYANG, G.; ZHANG, X.; KUANG, Y. Reliability-based topology optimization of continuous structures. In: *Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Chongqing, China: [s.n.], 2008. p. 7026–7031. Citado na página 97.

PATEL, N.; AGARWAL, H.; TOVAR, A.; RENAUD, J. Reliability based topology optimization using a hybrid cellular automaton algorithm. In: *6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization*. Rio de Janeiro, Brazil: [s.n.], 2005. p. 1–10. Citado na página 97.

PEREIRA, J.; FANCELLO, E.; BARCELLOS, C. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Struct Multidisc Optim*, p. 50–66, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 12, 126 e 128.

POWELL, M. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Computer Journal*, v. 7, p. 155–162, 1964. Citado na página 30.

RAO, S. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. fourth. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.

ROSS, S. *A First Course in Probability*. 8th. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2010. Citado na página 95.

SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B.; SIGMUND, O. Robust topology optimization considering geometric imperfections. In: *9th World Congresses on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Shizuoka, Japan: [s.n.], 2010. p. 1–10. Citado na página 98.

SIGMUND, O. *Design of Material Structures Using Topology Optimization*. Tese (PhD Thesis) — Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark, Denmark, 1994. Citado 5 vezes nas páginas 36, 40, 41, 42 e 52.

- SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 33, n. 4-5, p. 401–424, 2007. ISSN 1615-147X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>>. Citado 6 vezes nas páginas 40, 42, 43, 44, 45 e 46.
- SILVA, G. da; CARDOSO, E. Topology optimization of continuum structures subjected to uncertainties in material properties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015. Accepted Article. Citado na página 98.
- SRIRAMULA, S.; CHRYSANTHOPOULOS, M. Quantification of uncertainty modelling in stochastic analysis of frp composites. *Composites: Part A*, v. 40, p. 1673–1684, 2009. Citado na página 55.
- STEFANOU, G. The stochastic finite element method: Past, present and future. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 198, p. 1031–1051, 2009. Citado na página 70.
- SUDRET, B. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. [S.l.], 2007. Citado 6 vezes nas páginas 55, 56, 57, 63, 64 e 82.
- SUDRET, B.; KIUREGHIAN, A. D. *Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report*. [S.l.], 2000. Citado 10 vezes nas páginas 25, 55, 57, 64, 65, 66, 67, 70, 74 e 80.
- TOOTKABONI, M.; ASADPOURE, A.; GUEST, J. Topology optimization of continuum structures under uncertainty: A polynomial chaos approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 201-204, p. 263–275, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 98.
- VANMARCKE, E. *Random fields: analysis and synthesis*. [S.l.]: The MIT Press, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 55, 63 e 64.
- VANMARCKE, E.; GRIGORIU, M. Stochastic finite element analysis of simple beams. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 109, n. 5, p. 1203–1214, October 1983. Citado na página 65.
- VANMARCKE, E.; SHINOZUKA, M.; NAKAGIRI, S.; SCHUELLER, G.; GRIGORIU, M. Random fields and stochastic finite elements. *Structural Safety*, p. 143–166, 1986. Citado na página 55.

ZHANG, J.; ELLINGWOOD, B. Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 120, n. 12, p. 2660–2677, December 1994. Citado na página 65.

ZHAO, Q.; CHEN, X.; MA, Z.-D.; LIN, Y. Reliability-based topology optimization using stochastic response surface method with sparse grid design. *Mathematical Problems in Engineering*, p. 1–14, 2014. Citado na página 97.