DISSERTAÇÃO

Otimização Paramétrica de um Flange de Motor Elétrico

Gilberto Paulo Wappler

Joinville, 2014

Gilberto Paulo Wappler

Otimização Paramétrica de um Flange de Motor Elétrico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito necessário para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Prof: Eduardo Lenz Cardoso

Joinville, SC
2014

W252o Wappler, Gilberto Paulo
Otimização Paramétrica de um Flange de Motor Elétrico/Gilberto Paulo Wappler - 2015.
133 p. : il. ; 21 cm

Orientador: Eduardo Lenz Cardoso
Bibliografia: 111-115 p.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2015.

1. Engenharia Mecânica. 2. Flange de Motor Elétrico 3. Otimização Paramétrica. 4. Análise Modal. I. Cardoso, Eduardo Lenz. II. Universidade do Estado Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Otimização Paramétrica de Um Flange de Motor Elétrico.

CDD: 620.1 - 23. ed.

Gilberto Paulo Wappler

Otimização Paramétrica de um Flange de Motor Elétrico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica como requisito necessário para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Banca Examinadora

Orientador: ______________________________
Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: ______________________________
Prof. Dr. Joel Martins Crichigno Filho
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: ______________________________
Prof. Dr. Sérgio Junichi Idehara
Universidade Federal de Santa Catarina

Joinville, 16 de dezembro de 2014.

Dedico este trabalho à minha esposa Cristiane, pela paciência, amor, apoio e dedicação incondicional à nossa família nessa etapa tão importante na minha formação acadêmica. Aos meus pais Hildemar e Aneli (in memoriam), pelo incentivo e por sempre primarem pela educação de seus filhos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado forças para transpor todos os obstáculos e buscar novos desafios sem medo do que estaria por vir durante essa caminhada.

À minha esposa Cristiane, pelo seu insentivo, carinho e amor, e por sempre me dar forças para continuar, apesar de tantas dificuldades.

Agradeço ao Prof. Eduardo Lenz Cardoso por sua orientação neste trabalho, por mostrar que o caminho é difícil, porém com muita dedicação é possível transpor todos os obstáculos. Agradeço por compartilhado todo o seu conhecimento, sempre com muita paciência e sabedoria.

Agradeço à UDESC e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade de fazer parte do curso de mestrado e poder buscar novos desafios.

À WEG Equipamentos Elétricos S.A. por disponibilizar os seus recursos e por incentivar constantemente o desenvolvimento de seus colaboradores.

Meus agradecimentos também a todos os professores membros do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Agradeço a todos os colegas do mestrado pelos bons momentos de convivência durante este período e que contribuíram de uma forma ou de outra na realização desta dissertação.

"Uma mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein.

Resumo

WAPPLER, Gilberto Paulo. **Otimização Paramétrica de um Flange de Motor Elétrico**. 2014. Número total de folhas. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2014.

Este trabalho tem como objetivo implementar um procedimento de otimização estrutural aplicado ao ajuste da frequência natural de motores elétricos. Isto é realizado pela modificação de algumas dimensões do flange, elemento de ligação entre o motor e o sistema que está sendo acionado. O algoritmo de otimização implementado é o PSO (Otimização por enxame de partículas), que se mostrou adequado ao tipo de problema considerado (não convexo e com poucas variáveis de projeto). A formulação de otimização tem como objetivo obter um conjunto motor/flange cuja primeira frequência natural seja igual a um valor estipulado, respeitando o critério de Rankine para materiais frágeis. A análise modal e de tensões é realizada por um programa comercial de elementos finitos. Devido ao grande custo computacional associado ao uso conjunto do PSO com um programa externo de elementos finitos, é estudada uma aproximação por mínimos quadrados da frequência natural e das tensões principais. Este procedimento se mostrou eficaz e extremamente eficiente. Exemplos de projetos de flange obtidos com o uso da formulação proposta são apresentados e discutidos, mostrando a validade do procedimento adotado.

Palavras-chave: Otimização Estrutural, Flange de Motor Elétrico, Análise Modal.

Abstract

WAPPLER, Gilberto Paulo. **Parametric Optimization of an Electric Motor Flange**. 2014. Número total de folhas. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2014.

This work has the objective of implementing a structural optimization procedure in order to adjust the natural frequency of electric motors. This is accomplished by modifying some flange dimensions, which is the part connecting the motor to the system being driven. The implemented optimization algorithm is the PSO (Particle Swarm Optimization), which proved to be appropriate for the type of problem considered (non convex and with few design variables). The optimization formulation aims to get a motor/flange whose first natural frequency is equal to a specified value while observing the criterion of Rankine for brittle materials. Both the modal analysis and evaluation of the principal stresses are performed by a commercial finite element code. Due to the large computational cost associated to the combined use of PSO with an external finite element program, it is studied an approximation by least squares of the natural frequency and of the principal stresses. This procedure is effective and extremely efficient. Examples of flange designs obtained using the proposed formulation are presented and discussed, showing the validity of the procedure adopted.

Keywords: Structural Optimization, Electrical Motor Flange, Modal Analysis.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

PSO	Particle Swarm Optimization
MEF	Método dos Elementos Finitos
CAD	Computer Aided Design
CAE	Computer Aided Engineering
IEC	International Eletrotechnical Commission
NEMA	National Electrical Manufactures Association
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
GDL	Grau de Liberdade
FRF	Função Resposta em Frequência
KKT	Condições de Karush-Kuhn-Tucker
AG	Algoritmos Genéticos
AE	Algoritmos Evolucionários
APDL	Ansys Parametric Design Language
MQ	Mínimos Quadrados

Lista de símbolos

$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento viscoso
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\boldsymbol{\omega}$	Matriz das frequências naturais
$\mathbf{H}(\omega)$	Matriz função resposta em frequência
$\mathbf{\Phi}$	Matriz modal
$h(t)$	Resposta da estrutura ao longo do tempo
ω	Frequências naturais
ζ	Fator de amortecimento
$\ddot{\mathbf{x}}$	Vetor das acelerações nas coordenadas generalizadas
$\dot{\mathbf{x}}$	Vetor das velocidades nas coordenadas generalizadas
$\mathbf{x}$	Vetor dos deslocamentos nas coordenadas generalizadas
$\mathbf{F}$	Vetor de forças externas
ϕ	Vetor modal
λ	Autovalor
λ_r	r-ésimo autovalor
$\mathbf{m}$	Matriz modal de massa

$\mathbf{k}$	Matriz modal de rigidez
$\mathbf{c}$	Matriz modal de amortecimento
$\mathbf{m}_r$	r-ésima matriz modal de massa
$\hat{\boldsymbol{\phi}}_r$	r-ésimo modo de vibração
m_r	r-ésima massa modal
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$\boldsymbol{\Omega}$	Matriz de autovalores
$\boldsymbol{\Xi}$	Matriz dos termos de amortecimento diagonalizados
ζ_i	Razão de amortecimento do modo i
F_q	Amplitude da força senoidal aplicada na q-ésima coordenada generalizada
$\mathbf{U}$	Vetor de amplitudes
$\mathbf{x}$	Vetor de variáveis de projeto
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
$g_j(\mathbf{x})$	Função de restrição de desigualdade
$h_j(\mathbf{x})$	Função de restrição de igualdade
$\overline{x}_i$	Limite superior da i-ésima variável de projeto
$\underline{x}_i$	Limite inferior da i-ésima variável de projeto
m_g	Número de restrições de desigualdade
m_h	Número de restrições de igualdade
nv	Número de variáveis de projeto
L	Função lagrangiana

γ	Multiplicador de Lagrange
β	Multiplicador de Kuhn-Tucker
$\mathbf{v}_k^i$	Velocidade da partícula i na iteração k
$\mathbf{x}_k^i$	Posição da partícula i na iteração k
C_1	Taxa de aprendizagem cognitiva individual
C_2	Taxa de aprendizagem cognitiva do grupo
R_1 e R_2	Números aleatórios que variam entre 0 e 1
N	Número de partículas
w	Fator de inércia da partícula
d_{max}	Restrição lateral superior
d_{min}	Restrição lateral inferior
f_{worst}	Pior objetivo das partículas viáveis
ω_1	Frequência natural do primeiro modo de vibração
$\bar{\omega}_1$	Frequência natural desejada
$\Vert\sigma_1\Vert_\infty$	Módulo da maior tensão principal trativa da estrutura
σ_{rup}^T	Tensão admissível de tração
$\Vert\sigma_3\Vert_\infty$	Maior tensão principal de compressão da estrutura
$\vert\sigma_{rup}^C\vert$	Módulo da tensão admissível de compressão
V_i	Valores obtidos por elementos finitos nos pontos selecionados do espaço de projeto
$\mathbf{p}(\mathbf{x})$	Vetor que contém os termos da base
$\mathbf{a}$	Vetor que contém os coeficientes da base

$r_1, .., r_6$	Variáveis normalizadas
$\mathbf{Q}$	Matriz ortogonal

Sumário

1 Introdução

A evolução e as exigências do mercado de motores elétricos tem desafiado os fabricantes deste tipo de equipamento na busca da excelência de seus produtos. Uma das características desejáveis em uma máquina elétrica girante é o baixo nível de ruído e vibração. Aliado a isso, existem diversas exigências de normas e órgãos certificadores em relação ao controle de ruído e vibração, tornando-se necessário um maior conhecimento das propriedades e do comportamento dinâmico/estrutural dos motores elétricos.

Um dos maiores problemas que ocorrem em motores elétricos está relacionado a grandes amplitudes de vibrações mecânicas. Além do dano ao motor propriamente dito, este fenômeno é transmitido para as fixações e, consequentemente, para o restante da estrutura do equipamento, ocasionando a redução da sua vida. Dessa forma, o que se deseja durante o projeto e concepção de um motor elétrico é evitar frequências críticas de operação e com isso minimizar a vibração e ao mesmo tempo manter-se dentro de critérios estabelecidos nas normas IEC (1991) e NEMA (2011). Portanto, é de extrema importância conhecer, além das propriedades estáticas, as propriedades dinâmicas da máquina a ser projetada.

A complexidade da estrutura mecânica de um motor elétrico é muito grande, o que limita a quantidade de ferramentas que podem ser utilizadas para determinar os primeiros modos naturais de vibração. No entanto, com o incremento em termos computacionais e de softwares, uma das opções que se tornou viável é a utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF) para resolver problemas relacionados a vibrações.

Com o avanço dos softwares de CAD (*Computer Aided Design*) e CAE (*Computer Aided Engineering*) e o conhecimento das características dinâmicas dos motores elétricos, tem-se obtido bons resultados em termos de projeto e desempenho dos produtos finais. Apesar disso, os recursos ainda são um pouco limitados quando o assunto é otimização estrutural. Dessa forma, observa-se um grande potencial neste segmento, principalmente na fase de projeto conceitual do produto, seja a nível de componente ou do conjunto da máquina ou equipamento. Este fato acabou motivando a realização deste trabalho, que nada mais é que a criação de um projeto otimizado de um flange de motor elétrico utilizando como ferramenta a otimização estrutural.

1.1 Motivação

As vibrações mecânicas em níveis elevados acabam muitas vezes potencializando a chance de falha em máquinas e equipamentos industriais (TUSTIN, 2005). Por isso, se torna muito importante controlar os seus efeitos afim de minimizar a falha de forma prematura. Na indústria, este fenômeno é controlado através de especificações cada vez mais severas de órgãos normativos para o segmento de máquinas elétricas girantes. Paralelo a isso, os grandes fabricantes tem estipulado critérios cada vez mais rigorosos em relação aos previstos em normas. Obviamente, a dificuldade de obter níveis de vibração descritos em normas aumenta com o incremento na potência e consequentemente com o tamanho do motor elétrico.

O aumento do tamanho do motor altera a relação massa por rigidez e, inevitavelmente modifica as frequências naturais e modos de vibração do sistema. Por outro lado, a fonte de excitação está relacionada ao giro do motor elétrico, em harmônicos da frequência da rede elétrica, e é transmitida para o restante do equipamento através do flange (interface motor/ equipamento). Este componente tem uma importância fundamental durante a fase conceitual do produto, já que é o momento onde é possível propor alterações de parâmetros construtivos de forma a mudar características como rigidez e massa e, consequentemente, as frequências naturais do sistema. Portanto, se torna cada mais importante conhecer as propriedades dinâmicas do motor elétrico, a fim de evitar determinadas frequências e consequentemente minimar os efeitos provocados pelas vibrações mecânicas. Por isso, projetar os componentes que afetam diretamente o bom funcionamento do motor, bem como do sistema relacionado, de forma acertiva e atendendo às normas e requisitos de cada mercado, se torna algo imprescindível.

1.2 Objetivo do Trabalho

O objetivo deste trabalho é projetar um flange de motor elétrico utilizando como ferramenta a otimização estrutural. Em termos de condições de contorno, o motor estará fixado pelo flange, na horizontal (conforme Figura 1), submetido à uma aceleração de $6.g$ ($58,96 m/s^2$) e uma força no mancal dianteiro de $3750N$, correspondente a máxima carga estática do rolamento. Estas informações são provenientes de dados obtidos de forma prática (medições no campo) em aplicações consideradas severas e também através das normas IEC (2007) e NEMA (2011).

O motor elétrico utilizado no estudo é do tamanho IEC 71, com flange FF, aproximadamente 15kg e com caixa de ligação. A especificação "IEC 71" corresponde a um motor elétrico com a linha de centro do eixo do motor situado a 71 mm da base, conforme norma IEC-60072 (1991).

1.3 Sequência do Trabalho

Essa dissertação é organizada da seguinte forma:

O capítulo 1 corresponde ao capítulo de introdução, onde foi apresentado o objetivo do trabalho, além da descrição do problema que motivou o desenvolvimento do estudo.

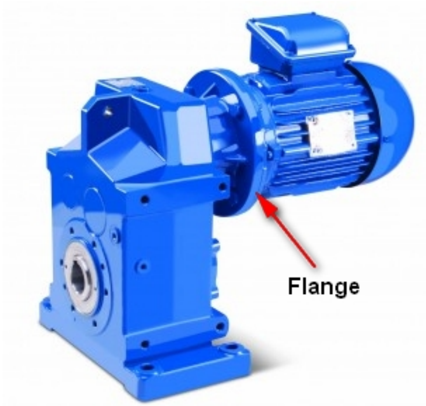

Figura 1: Ilustração de um motor elétrico flangeado montado no equipamento.

FONTE: (WEG Equipamentos Elétricos S.A.)

O capítulo 2 consta de uma revisão bibliográfica sobre os assuntos mais relevantes, com o objetivo de facilitar a compreensão da abordagem utilizada no decorrer do trabalho. Além disso, é apresentado um estudo de vibração em motores elétricos.

No capítulo 3 é apresentado os conceitos sobre análise modal.

No capítulo 4 é apresentado os conceitos sobre otimização estrutural.

No capítulo 5 é apresentado o método de otimização por enxame de partículas realizados alguns estudos a partir de problemas de otimização diversos.

No Capítulo 6 faz uma abordação sobre a formulação do problema utilizado neste trabalho.

No Capítulo 7 são apresentados os resultados e dicussões gerais. No Capítulo 8 é feita a conclusão do trabalho e sugeridos temas para futuros projetos.

E para finalizar, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas para a realização deste trabalho e os apêndices.

2 Vibrações em Motores Elétricos

Este capítulo faz um apanhado geral de alguns temas importantes que serão abordados neste trabalho. O objetivo é facilitar a compreensão e mostrar a correlação entre alguns assuntos empregados na dissertação: motores elétricos e vibrações mecânicas.

Assim, assuntos inerentes às vibrações mecânicas (fontes de vibração e formas de reduzi-la) em motores elétricos, além de um breve histórico sobre motores elétricos de indução e aspectos construtivos serão abordados no decorrer deste capítulo.

2.1 Motores Elétricos de Indução

Um dos primeiros relatos de que era possível transformar energia elétrica em energia mecânica foi feito por Michael Faraday em 1831, através da lei da indução eletromagnética, considerada até hoje uma das maiores descoberta individuais para o progresso da ciência. Já em 1885, o físico Galileu Ferraris desenvolveu um motor elétrico de corrente alternada, baseado no trabalho de Faraday. No entanto, a invenção do primeiro motor de indução se deu no ano de 1883 em Estrasburgo na França, pelo cientista sérvio-americano Nikola Tesla. A patente deste motor foi registrada em 1888 e um dos seus originais está ilustrado na Figura 2.

Os motores elétricos de indução estão presentes em inúmeras aplicações, sejam elas industriais, comerciais ou residenciais. Este tipo de motor subtituiu facilmente sistemas mecânicos de baixa eficiência e de forma geral são baratos, de construção simples e confiáveis. Além disso, utilizam como fonte de alimentação a energia elétrica, e são hoje

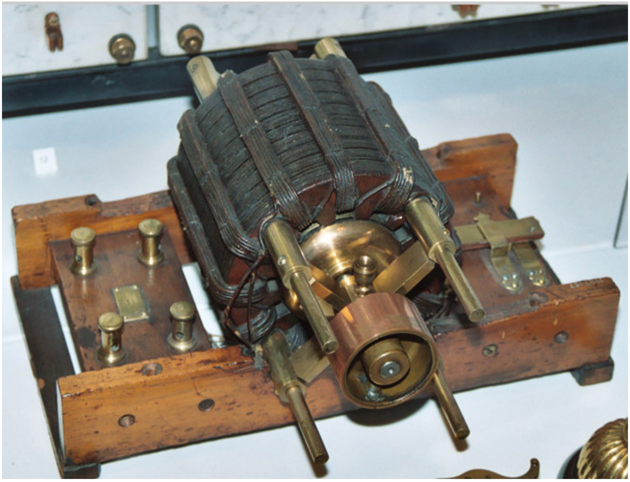

Figura 2: Um dos motores elétricos de indução originais desenvolvido por Tesla em exposição no Museu de Ciência Britânico, em Londres.

FONTE: (http://www.teslasociety.com - Acesso em: 15/02/2014)

um dos meios mais indicados e utilizados para a transformação de energia elétrica em mecânica.

Na próxima seção serão apresentados os principais componentes de um motor elétrico e uma breve descrição de cada um deles.

2.1.1 Componentes do Motor Elétrico de Indução

Com o intuito de padronizar a nomenclatura e facilitar a compreensão do texto, a Figura 3 apresenta uma vista explodida de um motor elétrico de indução trifásico, indicando os seus principais componentes.

Em termos estruturais e funcionais, o motor elétrico pode ser dividido em duas partes principais: a estacionária e a rotativa.

- **Estacionária**: formada pelo estator bobinado e constitui a parte

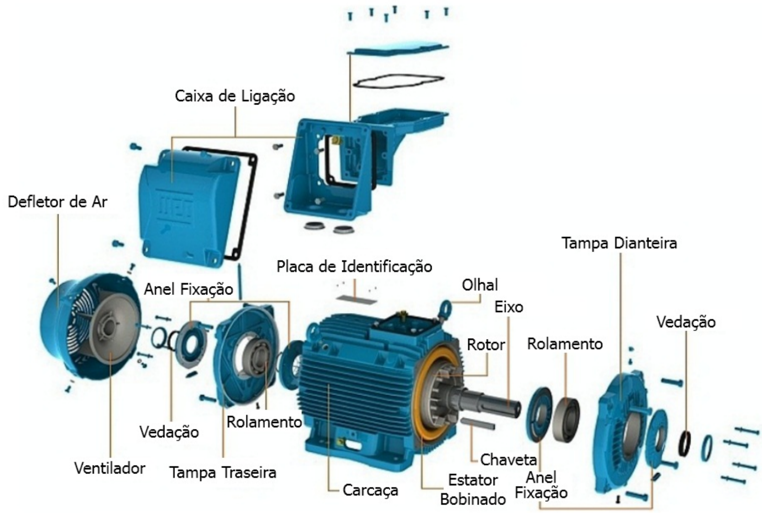

Figura 3: Componentes de um motor elétrico trifásico padrão.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

estática do motor elétrico. É constituido por um núcleo de chapas finas, geralmente com espessura menor que 1mm, empilhadas para formar o pacote que varia de acordo com a potência do motor. As chapas são de aço magnético e tem a forma de anel com ranhuras na parte interna que servem para alojar as bobinas de cobre ou alumínio. A função das bobinas é gerar o campo magnético girante e consequemente dar o movimento rotativo na ponta de eixo. As características construtivas da chapa tem influência direta nas propriedades magnéticas e dinâmicas (vibrações mecânicas), além de influenciar no desempenho elétrico do motor (FILHO, 2000). A Figura 4 mostra o núcleo de chapas e as bobinas, conhecido como estator bobinado.

Para dar sustentação, o estator bobinado é montado, sob interferência, em uma carcaça, conforme Figura 5. A carcaça é normalmente fabricada em ferro fundido, aço ou alumínio e tem a

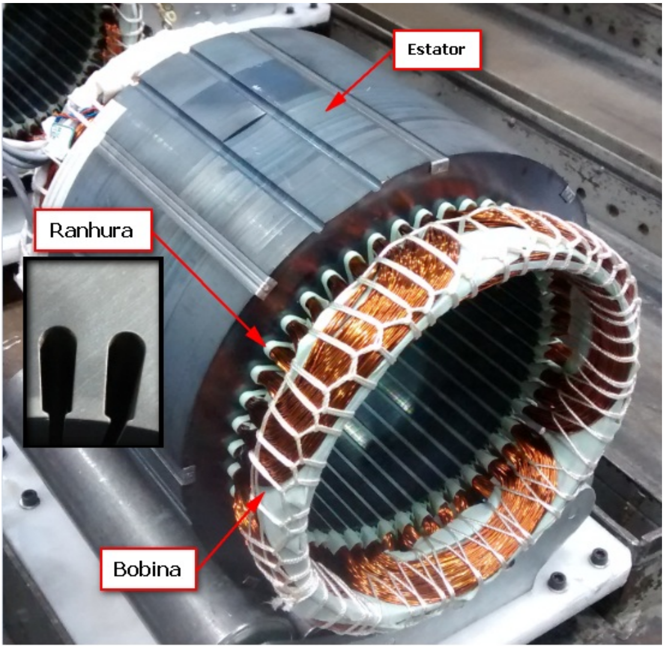

Figura 4: Detalhe do Estator, bobinada e ranhura.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

função de promover a rigidez necessária entre estator bobinado e rotor.

Além da função estrutural, a carcaça também serve para garantir o grau de proteção do motor (poeira e água), sendo classificado como aberto ou fechado. São cobertas em grande parte da superfície externa com aletas, que tem a função de aumentar a troca térmica.

Nas duas extremidades da carcaça são montadas as tampas dianteira (flangeada ou não) e traseira. As tampas tem a função de dar sustentação ao mancais, normalmente de rolamento, e consequentemente ao rotor.

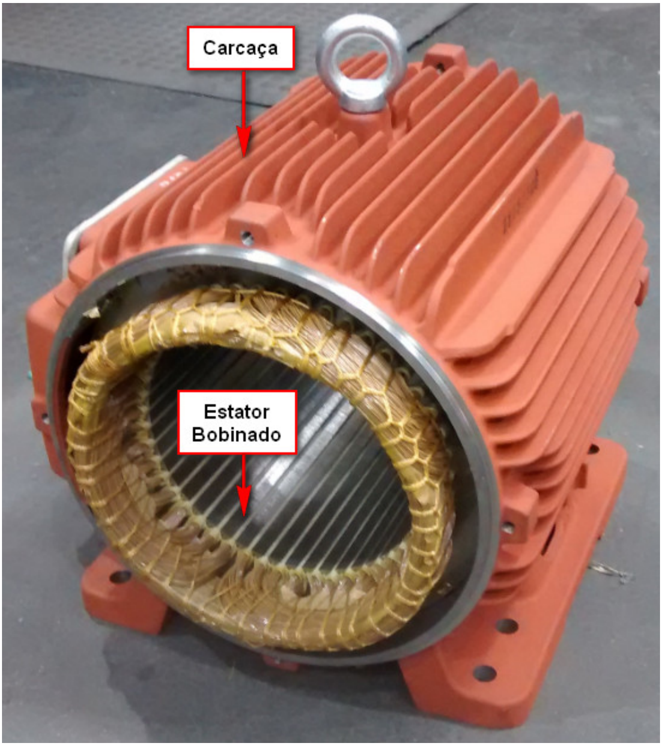

Figura 5: Estator bobinado montado na carcaça de um motor elétrico.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

- **Rotativa**: formada pelo rotor que é um núcleo ou pacote de chapas de aço, constituído de condutores retilíneos interligados nas duas extremidades por anéis de curto-circuito. O rotor é prensado sobre um eixo, geralmente maciço, de aço carbono, e dois rolamentos que servirão de mancais (conforme Figura 6) e serão montado posteriormente nas tampas dianteira e traseira. Os mancais dianteiro e traseiro tem a função de suportar a massa do rotor, sendo que o dianteiro ainda deve resistir o carregamento proveniente da aplicação, tanto no sentido radial quanto no axial. A Figura 6 ilustra o conjunto montado do rotor (eixo, rotor e rolamentos).

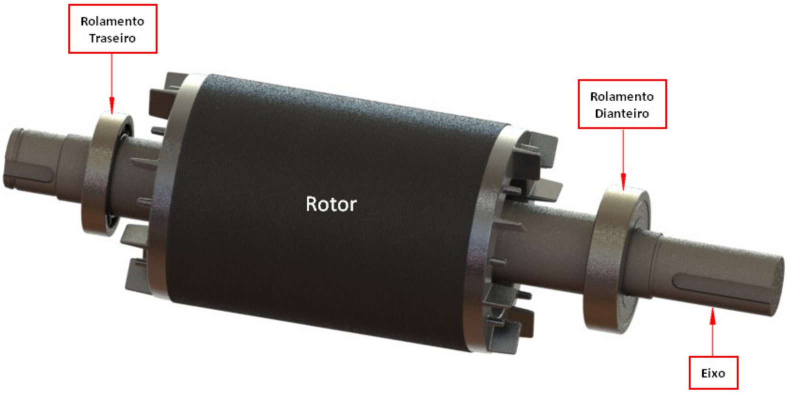

Figura 6: Conjunto montado do rotor.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

Fazem parte do motor, ainda, o ventilador que auxilia no resfriamento dos enrolamentos, os rolamentos e a caixa de ligações. As dimensões dos motores elétricos são normatizadas por duas entidades:

- Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), a qual é filiada à International Eletrotechnical Comission (IEC)
- National Electrical Manufacturers Association (NEMA)

O conjunto do rotor é sustentado pelo flange, Figura 7, e tampa traseira, Figura 8, que tem a função de garantir que o rotor e o estator bobinado fiquem o mais concêntricos possível. O detalhamento da montagem do motor e seus subconjuntos é ilustrado na Figura 9.

2.1.2 Fontes de Vibrações Mecânicas em Motores Elétricos

O motor elétrico é um dos elementos mais críticos na maioria das máquinas e equipamentos que utilizam a energia elétrica como fonte

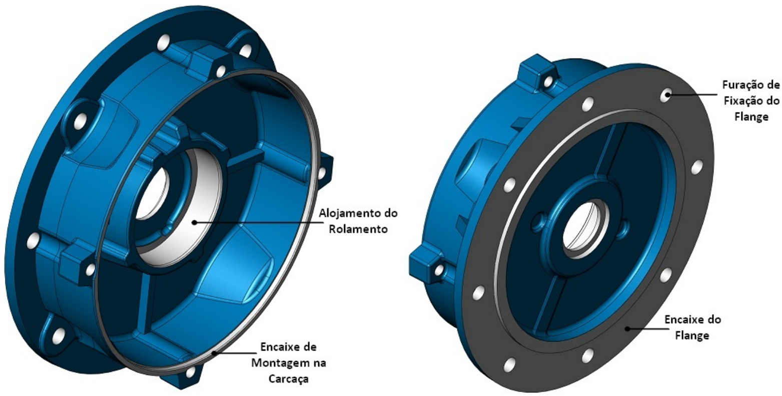

Figura 7: Flange do motor elétrico.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

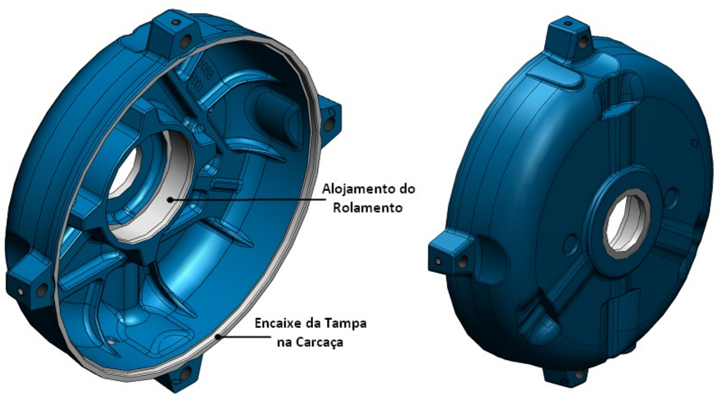

Figura 8: Tampa traseira do motor elétrico.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

de alimentação. O projeto deve ter uma concepção robusta, porém deve ser leve, de menor tamanho possível e que tenha um comportamento

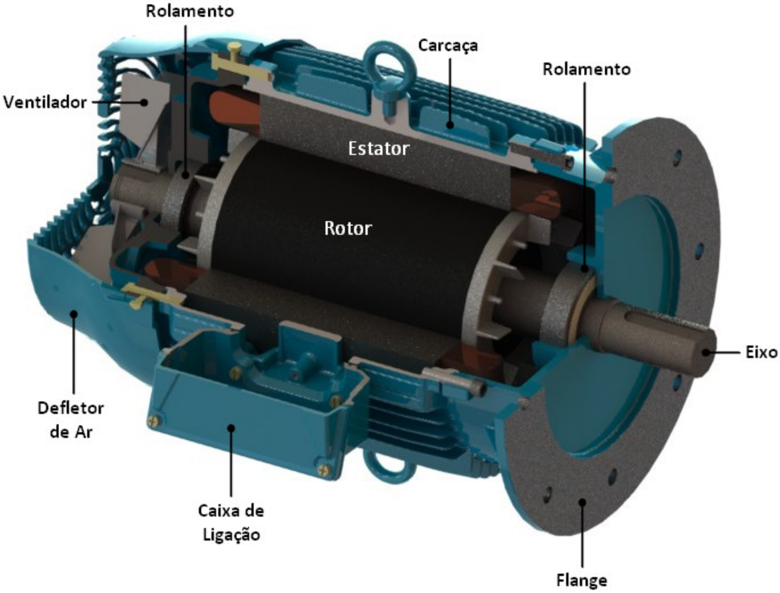

Figura 9: Motor elétrico em corte.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

dinâmico estável. Além disso, o produto deve ser de fácil manutenção e deve apresentar baixos níveis de ruído e de vibração. Para atingir esses objetivos é preciso uma avaliação minuciosa durante a fase de projeto, prevendo frequências naturais indesejáveis e problemas de fabricação, como desalinhamentos e folgas entre os componentes.

Normalmente as vibrações mecânicas em motores elétricos podem ter excitação mecânica ou eletromagnética. Para entendê-las, a primeira coisa que deve-se lembrar é que o motor funciona de forma muito similar a qualquer outro tipo de equipamento mecânico. Ou seja, para que funcione corretante, o eixo deve ser o mais retilíneo possível (projetado para ter a menor flexão possível), o rotor deve estar balanceado, os rolamentos devem estar em boas condições e com a graxa mais adequada para a aplicação. Além disso, o projeto elétrico deve garantir o equilíbrio eletromagnético, de forma a evitar o aparecimento de forças que venham a causar um desequilíbrio dinâmico do sistema. No entanto, por uma série de fatores, é impossível eliminar todos os problemas de origem mecânica e magnética.

Para entender melhor as vibrações mecânicas em motores elétricos serão apresentados a seguir os fatores principais que causam este fenômeno e suas características. A vibração global de máquina, na sua rotação nominal, consiste em diversos componentes individuais de vibração, oriundas de folgas entre os componentes, desequilíbrio do campo magnético gerado no estator bobinado, falhas nos rolamentos, montagem inadequada, entre outros. Na literatura existem vários trabalhos abordando o tema vibrações em motores elétricos, dentre eles pode-se citar Timar et al. (1989), Ozturk et al. (1994),Costello (1990), Finley (1991) e Finley, Hodowanec e Holter (2000). Nestes estudos, são avaliados problemas de vibrações relacionados ao projeto elétrico (campo magnético e as forças geradas por ele) e problemas de ordem estrutural.

As forças eletromagnéticas tem suas duas principais componentes evidenciadas em um motor de indução em 60 Hz e 120 Hz (NASSER, 2004). Qualquer assimetria no campo magnético produz uma força lateral, cuja frequência é de 60 Hz (frequência de alimentação da rede no Brasil). Geralmente, essa componente da força é muito pequena e não gera preocupação. A componente da força gerada em 120 Hz é resultado de duas fontes: uma é em relação a força magnética de atração entre o rotor e o estator bobinado e a outra força é devido a variação do entreferro magnético ($airgap$). O entreferro nada mais é do que a folga ou espaço entre o estator bobinado e o rotor. Idealmente, o rotor deve estar perfeitamente concêntrico com o estator. Na prática, no entanto, devido ao processo de fabricação e as tolerâncias de montagem, esta situação é impossível de ser alcançada. Felizmente, a variação máxima no entreferro não passa, em média, de 5% do seu valor nominal ou de projeto, especialmente em motores que atingem altas rotações. A Figura 10 ilustra a resposta em frequência de um motor elétrico em operação, onde fica aparente o pico em $120Hz$.

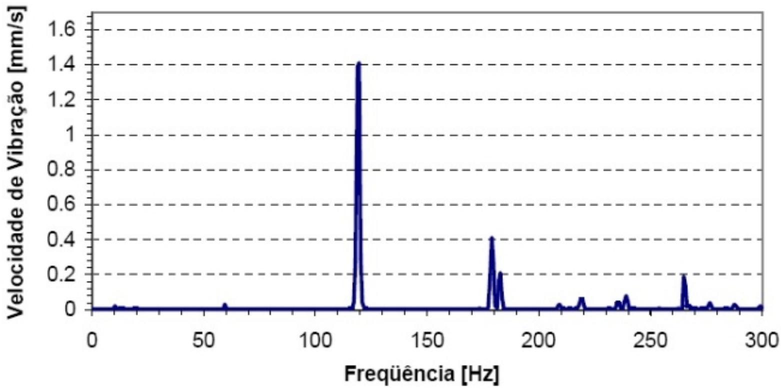

Figura 10: Espectro de frequências de um motor elétrico em operação.

FONTE: Cortesia WEG Equipamentos Elétricos S.A.

Já a vibração de origem mecânica pode ser derivada de uma série de fatores. Para isso, foram listados alguns componentes e subconjuntos mecânicos, que em função de terminadas variações podem gerar algum grau de vibração nos motores elétricos:

- **Carcaça**: É um componente estrutural, que garante rigidez para o estator bobinado, além de garantir o alinhamento dos mancais (geralmente de rolamento). Problemas geométricos na usinagem da carcaça podem provocar o desalinhamento dos mancais e consequentemente a variação do entreferro, ocasionando um desequilíbrio de forças e, consequentemente o aparecimento de vibrações mecânicas. Em Leissa e So (1995), Liew, Hung e Lim (1995),Yuan e Dickinson (1994) e Tzou, Wickert e Akay (1998) os problemas de vibração e as dinâmicas estruturais da carcaça foram investigadas extensivamente.

- **Rotor/Estator**: a excentricidade do rotor em relação ao estator é um dos principais problemas que causam o aparecimento de vibração no motor elétrico. Ela produz uma variação na folga entre o estator e o rotor (entreferro), como mencionado anteriormente, gerando uma componente de vibração equivalente a duas vezes a frequência da rede elétrica, na direção do maior valor do entreferro. Falhas na fabricação do estator, na carcaça ou na prensagem do estator bobinado na carcaça são as principais causadoras da excentricidade do estator. Enquanto que no caso do rotor, o desalinhamento dos mancais é um dos fatores que contribuem para essa variação.

- **Tampas Dianteira e Traseira**: As tampas dianteira e traseira são basicamente placas circulares com um alojamento dos rolamentos e um encaixe para montagem na carcaça. Estes componentes tem papel fundamental para manter o alinhamento dos mancais e evitar os problemas de excentricidade, devendo ser projetadas de forma a evitar as frequências naturais de rotores. A dinâmica estrutural destes componentes foi investigada por Tseng e Wickert (1994), e Parker e Mote (1996).

A grande complexidade do motor elétrico em termos de projeto e fabricação, limita a quantidade de ferramentas que podem ser utilizadas na avaliação dos primeiros modos naturais de vibração. Normalmente, os métodos analíticos dependem de simplificações e considerações para tornarem a solução possível. Uma das opções viáveis de solução para esse tipo de problema é a utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF).

Em motores elétricos verticais, por exemplo, para evitar problemas de ressonância entre a excitação em função do desbalanceamento na frequência de rotação mecânica e uma frequência natural do motor, a norma norte americana *National Electrical Manufacturers Association* (NEMA, 2011) série $MG1$, faz uma simplificação e considera o motor elétrico como uma viga engastada. A partir dessa informação, a solução analítica da primeira frequência natural do motor, utiliza um modelo de um (01) grau de liberdade ($1GDL$), o que obviamente é uma simplificação excessiva de conjunto tão complexo.

O trabalho desenvolvido na WEG Equipamentos Elétricos S.A. por Santos (2008), mostra que determinados tipos de motores fixos em base rígida apresentam um modo lateral de vibração com frequência natural próxima a duas vezes a frequência de alimentação da rede elétrica. Por exemplo, caso o motor opere em $60Hz$, a frequência crítica será em torno de $120Hz$. Este problema é mais crítico nos motores de dois pólos, onde as forças magnéticas criadas no estator bobinado geram uma deformação elíptica rotativa. Pode-se interpretar como dois ciclos de vibração por cada revolução do campo magnético, ou melhor, o campo magnético girante produz vibração em duas vezes a frequência de alimentação da rede de alimentação.

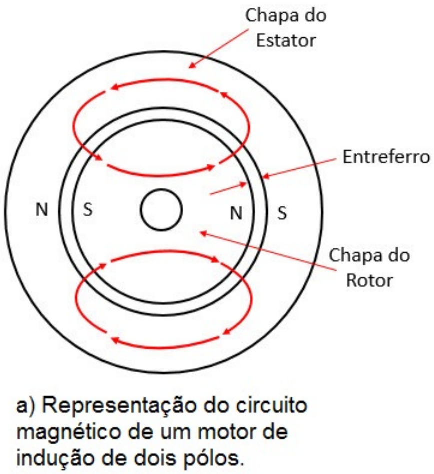

Figura 11: Característica vibratória de origem eletromagnética de um estator de motor elétrico de dois pólos (GOLDMAN, 1999).

A coincidência, ou proximidade, de um modo lateral com a excitação em duas vezes a frequência da rede de alimentação proporciona uma amplificação da resposta e, consequentemente, altos níveis de vibração do conjunto (fenômeno de ressonância). Essa característica impõe graves restrições comerciais, uma vez que contratos comerciais são comumente atrelados ao bom desempenho elétrico e mecânico do motor, incluindo os níveis de vibração.

2.2 Redução de Vibrações em Motores Elétricos

Baseado nestas informações, verifica-se que a vibração do motor em operação está associada a suas características modais e ao espectro de frequência de seu funcionamento (excitação elétrica). Como a característica de frequência da rede elétrica é fixa, podemos alterar somente as características modais do sistema, modificando a massa e/ou a rigidez. No entanto, como o projeto do motor envolve outras questões além da resposta modal, verifica-se que é mais fácil modificar a geometria da flange do que outras características do motor. Da mesma forma, pela alteração da flange, é possível fazer um ajuste fino de um mesmo tipo de motor para aplicação em diferentes sistemas mecânicos.

Esta é a linha de raciocínio que levou a definição do presente trabalho: modificar, via otimização estrutural, o projeto da flange, com o objetivo de ajustar as frequências naturais do sistema motor/flange, mas de uma forma mais detalhada do que a apresentada nas normas NEMA e IEC. Para isto, o motor (ou um modelo simplificado do mesmo) será modelado por elementos finitos e sua resposta modal será obtida numericamente. Com estas informações, será desenvolvido um programa de otimização que irá modificar parâmetros geométricos da flange, para que a resposta modal desejada do conjunto seja obtida. No que segue, serão apresentados os conceitos necessários para a formulação e para a implementação desta proposta.

3 Análise Modal Numérica

3.1 Introdução

A análise modal nada mais é que um processo pelo qual é possível descrever a resposta de uma determinada estrutura em termos de um conjunto de parâmetros, tais como, as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os modos de vibração (RAO, 2005). Este processo, o qual utiliza um conjunto de técnicas teóricas e/ou experimentais, possibilita a construção de um modelo matemático capaz de representar o comportamento dinâmico do sistema em estudo.

Estes parâmetros podem ser determinados através de métodos analíticos ou, quando não é possível encontrá-los dessa forma, pode-se utilizar a análise experimental. No entanto, nada impede que mesmo sendo possível obter os parâmetros analiticamente, utiliza-se a abordagem experimental, principalmente quando se deseja fazer a verificação e validação dos resultados. A análise modal tem diversas aplicações e apresentam uma gama de objetivos, entre eles

- Identificar fenômenos relacionados à vibrações;
- Desenvolvimento de modelos através de experimentos;
- Validação e ajuste de modelos analíticos;
- Identifcação de falhas em estruturas;
- Controle ativo de vibração.

Esta análise é bastante custosa, tanto na abordagem experimental quanto na numérica. No caso experimental, deve-se excitar a estrutura em diferentes situações e localizações, de modo a capturar de forma correta os diversos modos e frequências de vibração. Além disto, deve-se tratar matematicamente os dados obtidos no tempo, de modo a obter a resposta no domínio da frequência ou do tempo. A abordagem numérica, por sua vez, envolve a geração do modelo geométrico da peça e a solução de um problema de autovalores e autovetores de grande dimensões.

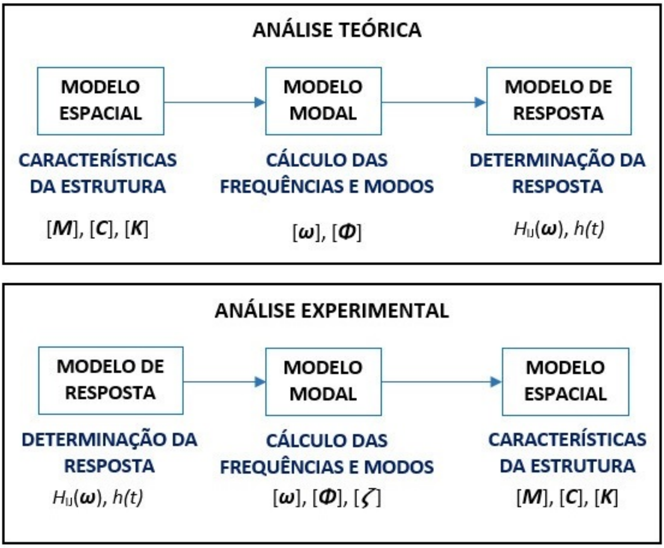

Figura 12: Análise teórica das vibrações de um sistema (MAIA N. M. M.AND SILVA, 1997).

Estes passos estão ilustrados na Figura 12, onde $\boldsymbol{M}$ é a matriz de massa, $\boldsymbol{C}$ é a matriz amortecimento viscoso, $\boldsymbol{K}$ é a matriz de rigidez, $\boldsymbol{\omega}$ é a matriz das frequências naturais, $\boldsymbol{H}(\omega)$ é a matriz função resposta em frequência, $\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz modal, $h(t)$ é a resposta da estrutura ao longo do tempo.

No que segue serão apresentados os conceitos envolvidos na análise modal por elementos finitos, método que foi utilizado neste trabalho.

3.2 Análise Modal Teórica

A análise modal teórica utiliza técnicas como, por exemplo, o método de elementos finitos, para obter os parâmetros modais do modelo a partir dos parâmetros espaciais (propriedades físicas e geométricas), ou seja, as matrizes de rigidez $\mathbf{K}$, de massa $\mathbf{M}$ e de amortecimento $\mathbf{C}$.

A seguir é construído o modelo modal, por meio de um análise teórica do modelo espacial, que é formado pelas frequências naturais ω, seus modos $\mathbf{\Phi}$ e os fatores de amortecimento ζ, chamados de parâmetros modais. No espaço modal, existe a vantagem de se trabalhar com as equações do sistema desacopladas, tendo como resultado diversos modelos de um grau de liberdade, sendo um para cada modo de vibração do modelo.

3.3 Modelagem Modal

A equação de equilíbrio dinâmico de um sistema discretizado em n graus de liberdade pode ser descrita por um sistema de equações diferenciais (RAO, 2005) na forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{C}$ é Matriz de amortecimento, $\mathbf{K}$ é Matriz de rigidez, $\ddot{\mathbf{x}}$ é o vetor das acelerações nas coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{x}}$ é o vetor das velocidades nas coordenadas generalizadas, $\mathbf{x}$ é o vetor dos deslocamentos nas coordenadas generalizadas e $\mathbf{F}$ é o vetor de forças externas.

Para simplificar a notação, será retirado o termo refente à dependência do tempo nas próximas equações. Considere que um sistema descrito pela Equação 3.1 possui amortecimento nulo $\mathbf{C} = 0$ e não possui excitação externa alguma $\mathbf{F} = 0$. Assim a equação do movimento reduz para

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0. \tag{3.2}$$

A solução geral da Equação 3.2, para condições iniciais não nulas, é dada por uma combinação linear de soluções do tipo

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}, \tag{3.3}$$

onde o vetor $\boldsymbol{\phi}$, de ordem $n \times 1$, é formado por amplitudes que indicam quais as formas modais do problema, e é conhecido também como vetor modal.

Destaca-se, neste ponto, a influência da aproximação adotada para o modelo de amortecimento na resposta do sistema estrutural. No caso acima (sem amortecimento), ou em sistemas com amortecimento proporcional, os modos de vibração $\boldsymbol{\phi}$ são números reais. O caso mais geral ocorre em sistemas não-conservativos, quando a matriz de amortecimento do sistema é do tipo não proporcional, resultando os modos de vibração em vetores de números complexos. Substituindo a Equação 3.3 na Equação 3.2, obtém-se

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi e^{i\omega t} = \mathbf{0}, \tag{3.4}$$

que resultará em solução não-nula (a nula é a trivial), se e somente se

$$det[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] = 0, \tag{3.5}$$

onde $\lambda = \omega^2$.

A Equação 3.5, conhecida como a equação característica do sistema, constitui-se em um problema generalizado de autovalores e autovetores, com N autovalores λ_r que a satisfaz.

A substituição de um autovalor λ_r na Equação 3.4 resulta num autovetor (ω_r) real correspondente ao r-ésimo modo de vibração do sistema não amortecido. Assim, a cada freqüência natural ω_r associa-se um modo de vibrar λ_r obtido mediante a solução do sistema homogêneo que satisfaz

$$(\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M})\phi_r = \mathbf{0}. \tag{3.6}$$

Os vetores modais do sistema podem ser agrupados em uma matriz $n \times n$, denominada matriz modal ($\mathbf{\Phi}$), onde cada coluna desta matriz corresponde a um modo de vibração

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \ldots & \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \ldots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \ldots & \phi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \ldots & \phi_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

O modelo da estrutura não-amortecido consiste, assim, das frequências naturais e os modos de vibração.

3.4 Condições de Ortogonalidade

O modelo modal da estrutura pode ser estudado empregando-se as propriedades de ortogonalidade (CLOUGH; PENZIEN, 1993), ou seja

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{m} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{k} \tag{3.9}$$

onde

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & m_2 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

é a matriz modal de massa (diagonal) e

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & k_2 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

é a matriz modal de rigidez (diagonal).

Se a matriz de amortecimento $\mathbf{C}$ for expressa como uma combinação das matrizes $\mathbf{M}$ e a matriz $\mathbf{K}$ (amortecimento de Rayleigh), tem-se que

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}, \tag{3.12}$$

tal que a matriz $\mathbf{C}$ também pode ser diagonalizada pelo princípio da ortogonalidade

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \mathbf{c} \tag{3.13}$$

onde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & c_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & c_n \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Alternativamente, os modos de vibração podem ser normalizados pelas massas modais

$$\hat{\phi}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}}\phi_r \tag{3.15}$$

onde $\mathbf{m}_r = \mathbf{\Phi}_r^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_r$ e $\hat{\phi}_r$ é o r-ésimo modo de vibração, normalizado em relação à r-ésima massa modal m_r. Na forma matricial

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{11}}{\sqrt{m_1}} & \frac{\phi_{12}}{\sqrt{m_2}} & ... & \frac{\phi_{1n}}{\sqrt{m_n}} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

com propriedades

$$\hat{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{I}, \tag{3.17}$$

$$\hat{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

e

$$\hat{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{\Phi}} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Xi}, \tag{3.19}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade, $\mathbf{\Omega}$ é a matriz dos autovalores e $\mathbf{\Xi}$ é a matriz dos termos de amortecimento diagonalizados.

Definindo uma nova variável $\mathbf{X}$, na forma

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{X}, \tag{3.20}$$

e substituindo a Equação 3.20 na Equação 3.1, obtém-se

$$\mathbf{M}\hat{\mathbf{\Phi}}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{X} = \mathbf{F}. \tag{3.21}$$

Em seguida, multiplica-se a Equação 3.21 por $\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}$, tal que

$$\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\hat{\mathbf{\Phi}}\ddot{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}\dot{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{X} = \hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}, \tag{3.22}$$

onde $\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\hat{\mathbf{\Phi}}$ é a matriz identidade $\mathbf{I}$, $\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Phi}}$ é a matriz $\mathbf{\Xi}$, $\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\hat{\mathbf{\Phi}}$ é a matriz $\mathbf{\Omega}$ e $\hat{\mathbf{\Phi}}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}$ será chamado de $\hat{\mathbf{P}}$.

A Equação 3.22 corresponde a um sistema de N equações de um (01) grau de liberdade desacopladas, na forma

$$\ddot{x}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \hat{p}_i, \tag{3.23}$$

onde ζ_i é a razão de amortecimento do modo i.

3.5 Função Resposta à Frequência - FRF

A Função Resposta à Frequência (FRF) é uma função de transferência expressa no domínio da frequência, relacionando a resposta de um ponto i a uma excitação de um ponto j (RAO, 2005). Essa grandeza é repetida como uma matriz $H_{ij}(\omega)$, com divisões compatíveis com o número de entradas e saídas consideradas. Dessa forma, a FRF é uma função muito utilizada para a análise de vibração.

Para obter a expressão da FRF, considere um sistema amortecido, submetido a uma função de força externa

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}. \tag{3.24}$$

Admitindo que o vetor de força de excitação é composto de apenas uma força harmônica de entrada, aplicada em um único ponto da estrutura

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad com \quad \mathbf{F} = \{0 \quad ... \quad F_q \quad ... \quad 0\}^T, \tag{3.25}$$

onde F_q é a amplitude da força senoidal aplicada na q-ésima coordenada generalizada.

Se o sistema for linear, então a resposta terá a forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}e^{i\omega t} \tag{3.26}$$

onde $\mathbf{U}$ contém as amplitudes, é independente no tempo e tem dimensão $n \times 1$.

Assim, a equação de movimento pode ser escrita como

$$[-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{U}e^{i\omega t} = \mathbf{F}e^{i\omega t}, \tag{3.27}$$

tal que, isolando $\boldsymbol{U}$ obtém-se:

$$\mathbf{U} = [(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) + i\omega\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{F} \tag{3.28}$$

onde a matriz $[(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) + i\omega\mathbf{C}]^{-1}$ é chamada de matriz da Função de Resposta em Frequência (FRF), $\boldsymbol{H}(\omega)$, de ordem $n \times n$. Essa função tem significado de uma função de transferência. A relação da Figura 13 pode ser representada pelas seguintes equações

$$U_p(\omega) = H_{pq}(\omega)F_q(\omega) \tag{3.29}$$

ou

$$H_{pq}(\omega) = \frac{U_p(\omega)}{F_q(\omega)} \tag{3.30}$$

Cada função é uma função complexa, podendo ser representada em termos de amplitude e fase. Cada função é, portanto, uma função espectral.

Figura 13: $F(\omega)$ é a força aplicada como uma função da frequência angular ω, $H(\omega)$ é a função de transferência e $U(\omega)$ é a função de resposta de deslocamento.

Entretanto, com este procedimento de cálculo para a obtenção da FRF no qual deve-se inverter uma matriz em cada frequência, torna-se muito custoso computacionalmente.

Justamente por isso, faz-se uso das propriedades modais do sistema. Dessa forma, a partir da Equação 3.28 tem-se:

$$[(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) + i\omega\mathbf{C}] = \mathbf{H}^{-1}(\omega) \tag{3.31}$$

A seguir, multiplicando ambos os lados da Equação 3.31 por $\hat{\mathbf{\Phi}}^T$ e, posteriormente multiplicando por $\hat{\Phi}$ (definidas a partir da Equação 3.15),

$$\mathbf{\Phi}^T[(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) + i\omega\mathbf{C}]\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{H}^{-1}(\omega)\mathbf{\Phi}. \tag{3.32}$$

Agora, aplicando as propriedades das Equações 3.17, 3.18 e 3.19,

$$[(-\omega^2\mathbf{I} + \mathbf{\Omega}) + i\omega\mathbf{\Xi}] = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{H}^{-1}(\omega)\mathbf{\Phi} \tag{3.33}$$

e isolando $H(w)$, obtém-se

$$\mathbf{H}(\omega) = \hat{\mathbf{\Phi}}[(-\omega^2\mathbf{I} + \omega) + i\omega\mathbf{\Xi}]^{-1}\hat{\mathbf{\Phi}}^T. \tag{3.34}$$

A matriz modal $\hat{\Phi}$ é usada para a ortogonalização, e dessa forma as matrizes resultam diagonais. Por conseguinte, cada termo de $H(\omega)$ corresponderá a

$$\mathbf{H}(\omega) = \hat{\mathbf{\Phi}}[(\omega_r^2 - \omega^2) + i2\zeta_r\omega_r\omega]^{-1}\hat{\mathbf{\Phi}}^T. \tag{3.35}$$

No processo de superposição modal assume-se que a resposta final do sistema é um somatório das respostas nos N modos de vibração individuais, sendo possível definir a matriz FRF na forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}_r \hat{\boldsymbol{\phi}}_r^{\,T}}{[(\omega_r^2 - \omega^2) + i2\zeta_r\omega_r\omega]} \tag{3.36}$$

e assim, cada um dos seus elementos pode ser expresso como

$$H_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\hat{\phi_{rp}} \hat{\phi_{rq}}^{\,T}}{[(\omega_r^2 - \omega^2) + i2\zeta_r\omega_r\omega]} \tag{3.37}$$

e dividindo a matriz dos modos desacoplados pela massa, $\hat{\mathbf{\Phi}}$,

$$H_{pq}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{rp}\phi_{rq}}{m_r[(\omega_r^2 - \omega^2) + i2\zeta_r\omega_r\omega]}, \tag{3.38}$$

onde ϕ_{rp} e ϕ_{rq} são o p-ésimo e o q-ésimo elemento, respectivamente, do r-ésimo vetor representativo do modo de vibração.

Caso $p = q$, obtém-se

$$H_{pp}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{pp}^2}{m_r[(w_r^2 - \omega^2) + i2\zeta_r\omega_r\omega]}. \tag{3.39}$$

Quando o amortecimento ζ_r tende a zero e ω tende a ω_r, $\mathbf{H}_{pp}(\omega)$ cresce rapidamente no entorno de ω_r, justificando assim a análise puramente modal, que será utilizado neste trabalho.

Em todo o desenvolvimento anterior, as respostas do sistema são indicadas em termos do deslocamento. A FRF $\mathbf{H}(\omega)$ é chamada de matriz de receptância (ou admitância), tambem designada por $\mathbf{R}(\omega)$. As relações entre a FRF de receptância $\mathbf{R}(\omega)$ (que relaciona a resposta em termos de deslocamentos) com a FRF de mobilidade $\mathbf{M}(\omega)$ (que relaciona a resposta em termos de velocidades) e com a FRF de acelerância (ou inertância) $\mathbf{A}(\omega)$ (que relaciona a resposta em termos de acelerações) são

$$M_{pq} = i\omega R_{pq} \tag{3.40}$$

e

$$A_{pq} = -\omega^2 R_{pq}. \tag{3.41}$$

A mobilidade $M_{pq}(\omega)$ é definida como a relação entre a velocidade da estrutura no ponto p pela força de excitação unitária atuante no ponto q, e a acelerância $A_{pq}(\omega)$ é definida como a relação entre a aceleração da estrutura no ponto p pela força de excitação unitária atuante no ponto q.

4 Otimização

4.1 Introdução

Otimização é um processo matemático que tem como objetivo buscar o máximo ou o mínimo de um funcional (função objetivo), obedecendo a certas restrições (ARORA, 2007). Este funcional é descrito por um conjunto de variáveis de projeto x que modificam o valor do objetivo e das restrições.

Uma vez formulado, o problema de otimização é descrito de uma forma padrão como

$$
\begin{array}{lcccl}
\underset{\mathbf{x}}{Min/Max} & f(\mathbf{x}) & & & \\
T.q. & g_j(\mathbf{x}) & \leq & 0 & j = 1..m_g \\
 & h_j(\mathbf{x}) & = & 0 & j = 1..m_h \\
 \underline{x}_i & \leq x_i \leq & \bar{x}_i & & i = 1..nv,
\end{array}
\tag{4.1}
$$

onde:

$\mathbf{x}$:	Vetor de variáveis de projeto
$f(\mathbf{x})$:	Função objetivo que se deseja extremar,
$g_j(\mathbf{x})$:	Funções de restrições de desigualdade,
$h_j(\mathbf{x})$:	Funções de restrições de igualdade,
$\overline{x}_i$:	Limite superior da i-ésima variável de projeto,
$\underline{x}_i$:	Limite inferior da i-ésima variável de projeto,
m_g	Número de restrições de desigualdade,
m_h	Número de restrições de igualdade,
nv	Número de variáveis de projeto.

É possível descrever diversos problemas de projeto na forma de um problema de otimização, permitindo, assim, o uso das técnicas de otimização para a solução de problemas de engenharia.

Em um problema de otimização com restrições, existem algumas condições que devem ser satisfeitas para que se obtenha o mínimo. Para discutir essas condições, serão abordadas algumas definições como ponto regular, multiplicadores de Lagrange e condições de Karush-Kuhn-Tucker ou KKT (ARORA, 2007).

4.2 Ponto Regular

Considere um problema restrito de minimização de $f(\boldsymbol{x})$ onde as restrições são dadas por $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$ com $i = 1$ à m. Um ponto $\boldsymbol{x}^*$ que satisfaça as restrições $h_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$ é dito *ponto regular da região viável* se $f(\mathbf{x}^*)$ é diferenciável e o vetor gradiente das restrições no ponto $\boldsymbol{x}^*$ é linearmente independente (ARORA, 2007).

Quando restrições de desigualdade também são incluídas no problema, o vetor gradiente das restrições ativas também deve ser linearmente independente.

4.3 Multiplicadores de Lagrange

Os multiplicadores de Lagrange são valores escalares associados a cada restrição de desigualdade. Estes valores dependem das funções de restrição, tal que se as funções mudam, os multiplicadores também mudam (ARORA, 2007).

O conceito dos multiplicadores de Lagrange é bem geral e pode ser encontrado em várias aplicações além da otimização. Os multiplicadores para as restrições podem ser interpretados como a força requerida para impor a restrição.

Seja um problema com restrições de igualdade

$$\text{Minimize} \qquad f(\boldsymbol{x}) \tag{4.2}$$

$$\text{Sujeito à} \qquad h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{4.3}$$

A função Lagrangiana é definida introduzindo um multiplicador de Lagrange γ_i para cada restrição $h_i(\boldsymbol{x})$

$$L(x_1, \ldots, x_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m) = f(\boldsymbol{x}) + \gamma_1 h_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \gamma_m h_m(\boldsymbol{x}).$$

Assim as condições necessárias para encontrar o extremo de L são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots n \tag{4.4}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = h_i(\boldsymbol{x}) = 0. \qquad i = 1, \ldots, m \tag{4.5}$$

Nota-se que qualquer ponto que não satisfaça as condições 4.4 e 4.5, não pode ser um ponto de mínimo. Entretanto, se um ponto satisfaz as condições, ele não é necessariamente um ponto de mínimo, podendo ser um ponto de máximo ou de inflexão.

Supondo que as soluções das condições 4.4 e 4.5 são

$$f(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\gamma}^* = \begin{bmatrix} \gamma_1^* \\ \gamma_2^* \\ \vdots \\ \gamma_m^* \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

então $\boldsymbol{x}^*$ é um candidato a ponto de mínimo e o vetor $\boldsymbol{\gamma}^*$ oferece informações sobre a sensibilidade do ponto de ótimo em relação a satisfação das restrições (RAO, 2009).

4.4 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

A maioria dos problemas de otimização envolvem restrições de desigualdade. Nesses casos pode-se transformar a restrição de desigualdade em restrição de igualdade adicionando uma nova variável y_i chamada de variável de folga, ou em inglês *slack variable*. (ARORA, 2007).

Quando a variável é igual a zero, temos que a restrição é ativa, e quando a variável é não nula, a restrição é de desigualdade estrita, sendo chamada de restrição inativa.

Como a variável de folga deve ser sempre positiva, utiliza-se y_i^2. Assim a restrição do tipo

$$g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \tag{4.7}$$

se torna

$$g_i(\boldsymbol{x}) + y_i^2 = 0. \tag{4.8}$$

As condições necessárias para um problema com restrições de igualdade e desigualdade foram primeiramente publicadas de forma simplificada por William Karush em 1939, mas elas se tornaram conhecidas quando apresentadas por Harold W. Kuhn e Albert W. Tucker em 1951. Hoje em dia elas são conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker ou KKT (KARUSH, 1939).

Seja um problema de minimização de $f(\boldsymbol{x})$, sujeita à $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$ com $i = 1, \ldots, m$ e $g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0$ com $j = 1, \ldots, p$. Então a função Lagrangiana é dada por

$$L(\mathbf{x}, \gamma, \beta, y) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j (g_j(\mathbf{x}) + y_j^2) \tag{4.9}$$

onde β_j são os multiplicadores de Kuhn-Tucker e y_j são as variáveis de folga.

Assim as condições necessárias para este problema são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\partial h_i}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \frac{\partial g_j}{\partial x_l} = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = h_i(\mathbf{x}) = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = g_j(\mathbf{x}) + y_j^2 = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = 2\beta_j y_j = 0, \tag{4.13}$$

$$y_j^2 \geq 0, \tag{4.14}$$

$$\beta_j \geq 0. \tag{4.15}$$

As condições (KKT) servem para verificar a possibilidade de ótimo de um dado ponto e para determinar um ponto candidato à mínimo local.

Algumas informações importantes sobre as condições (KKT) merecem ser destacadas (ARORA, 2007):

- As condições (KKT) não são aplicáveis em pontos que não são regulares;
- Qualquer ponto que não satisfaz as condições (KKT) não pode ser um mínimo local;
- Um ponto que satisfaça as condições (KKT) pode ser restrito ou irrestrito. Ele é irrestrito se não tem restrições de igualdade e as restrições de desigualdade estão inativas. Neste caso ele pode ser um ponto de mínimo, de máximo ou de inflexão.

O método de solução de um problema de otimização depende da natureza das funções envolvidas em sua definição. Se o problema for definido por funções contínuas e variáveis contínuas, então pode ser solucionado de forma eficiente por métodos baseados em derivadas. Do contrário, deve-se considerar métodos que não façam uso de derivadas, como por exemplo o Branch and Bound, (ARORA, 2007), ou métodos evolucionários, (KAVEH; LAKNEJADI, 2013).

Os métodos baseados em derivadas partem do princípio de que um ponto no espaço de solução, $\mathbf{x}^k$, pode ser melhorado de forma sequencial, tal que a cada iteração

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k$$

onde $\mathbf{d}^k$ é uma direção minimizante (que depende das derivadas no ponto) e α é um valor de passo nesta direção. Se $\mathbf{d}$ e α forem calculados corretamente a cada iteração, chega-se a um ponto de mínimo (local) $\mathbf{x}^*$ que satisfaz as condições de KKT. No entanto, pode existir mais de um mínimo para um determinado problema, uma vez que as condições de KKT são condições de primeira ordem. Desta forma, deve-se avaliar quais são as condições que levam a diferentes mínimos em um problema de otimização.

4.5 Problemas Convexos

A existência de mais de um mínimo em um problema de otimização está associada ao conceito de convexidade. Problemas não-convexos são uma das ocorrências mais comuns em problemas de otimização (Figura 14), pois muitas vezes existe mais de um ponto que satisfaz a condição necessária para o ótimo do problema (ARORA, 2007). Nestes casos, um procedimento tradicional de otimização irá obter o mínimo mais próximo do ponto de partida utilizado na otimização (que pode ser um mínimo local). Desta forma, é importante que sejam definidos os conceitos associados a convexidade das funções que descrevem o problema de otimização.

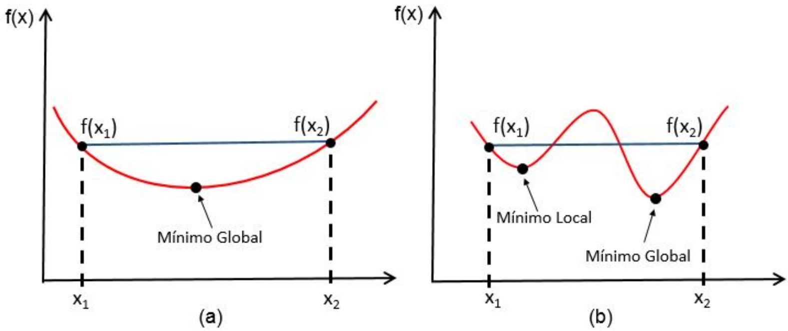

Figura 14: (a) Função convexa (b) Função não-convexa (RAO, 2009).

Segundo Arora (2007), uma função é convexa se e somente se sua matriz Hessiana

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

for semidefinida positiva ou definida positiva para todo o ponto do domínio. Geometricamente, observamos que em funções convexas, um reta que liga os extremos da função não irá interceptar a curva da função ao longo do domínio, permanecendo sempre acima da mesma. Uma função que não atende a estes requisitos é dita não-convexa. A Figura 14 ilustra exemplos de funções convexas e não-convexas.

Como o problema de otimização com restrições leva a definição da função Lagrangeana, Equação 4.4, observamos que para a mesma ser convexa, devemos ter um problema de otimização definido por uma função objetivo convexa e restrições convexa, uma vez que a combinação linear de funções convexas irá resultar em uma função convexa. Neste caso, o problema tem apenas um ótimo, conhecido como ótimo global.

4.6 Otimização Estrutural

Quando o funcional e as restrições estão associados a um problema de engenharia que envolva o cálculo de estruturas em geral, diz-se então que a otimização é estrutural. Dependendo do conjunto de variáveis de projeto, podemos classificar a otimização estrutural como sendo paramétrica, de forma ou topológica, conforme Figura 15. Assim, os tipos de otimização podem ser descritos da seguinte forma:

- Otimização Paramétrica: as variáveis de projeto são parâmetros geométricos da estrutura, como por exemplo, o comprimento de uma viga, o diâmetro de um eixo, o diâmetro de um furo, espessuras e dimensões de uma seção transversal. Neste caso, a forma e a distribuição de material no projeto não são alteradas, apenas os valores de algumas dimensões.

- Otimização de Forma: as variáveis de projeto são associadas aos contornos da estrutura. Os contornos são gerados com interpolações baseadas nas variáveis de projeto, como por exemplo, interpolação por *Splines*.

- Otimização Topológica: as variáveis de projeto são associadas a distribuição de material em um domínio fixo. Esta abordagem é mais genérica do que as anteriores, pois além de permitir a criação de contornos, possibilita a inclusão de vazios na estrutura. Assim, a Otimização Topológica consiste em distribuir material em uma região do espaço previamente definida, Ω, com o objetivo de extremar um funcional e de satisfazer as condições de contorno do problema de equilíbrio e as restrições associadas ao problema de otimização.

A otimização estrutural depende da solução do problema de equilíbrio e do cálculo das restrições do problema, com por exemplo, frequencias naturais, cargas críticas de flambagem, tensões principais,

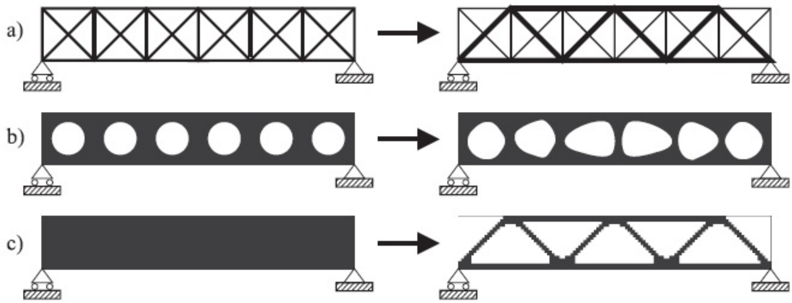

Figura 15: Otimização Paramétrica (a), Otimização de Forma (b) e Otimização Topológica (c)(BENDSØE; SIGMUND, 2003).

etc. Como estes cálculos podem ser bastantes complexos para geometrias e condições de contorno encontradas na prática, pode-se utilizar um programa externo de análise para realizar esta etapa da otimização. Neste caso, o projetista pode não ter acesso as rotinas de cálculo e, portanto, não poderá realizar o cálculo das derivadas necessárias para a solução do problema de otimização. Além disto, devido a complexidade das restrições e das funções consideradas, pode-se facilmente definir um problema não-convexo.

Desta forma, justifica-se o uso de um método de otimização que não utilize derivadas e que seja menos propenso a encontar mínimos locais. O método utilizado neste trabalho é o *Particle Swarm Optimization* ou Otimização por Enxame de Partículas, e será detalhado no capítulo a seguir.

5 Otimização por Enxame de Partículas

Nessa seção serão apresentados os conceitos do método de otimização por enxame de partículas ou PSO (em inglês, Particle Swarm Optimization) utilizado neste trabalho. Além disso, serão mostrados detalhes da formulação do algoritmo e seu funcionamento.

5.1 Introdução

O algoritmo PSO utiliza alguns conceitos da programação evolucionária em geral, entre eles os Algoritmos Genéticos (AG), conforme Holland (1975). Um destes conceitos é a existência de uma população inicial de indivíduos e a função objetivo. Porém, no PSO não se tem os conceitos explícitos de cruzamento, mutação, ao contrário dos algoritmos genéticos. Uma diferença muito importante entre o PSO e os Algoritmos Evolucionários (AE), por exemplo, é que no PSO existe uma interação social e a troca de conhecimento sobre o espaço de busca (ENGELBRECHT, 2005), enquanto que no AE, o que impera é a sobrevivência dos melhores indivíduos, que competem e criam as novas gerações.

A utilização do PSO, que pode ser aplicado à otimização de problemas onde as funções são não-lineares e não-convexas tem algumas vantagens, dentre elas, a simplicidade de implementação e a facilidade de estruturação e compreensão. De acordo com o artigo de Jr, Cardoso e Stahlschimdt (2013), onde foi desenvolvido um estudo para a identificação de parâmetros inelásticos, o PSO se mostrou uma alternativa viável devido à sua robustez (alcançando o mínimo global com alta tolerância a variações no tamanho da população e parâmetros de controle) e, em contraste com os algoritmos genéticos (AG), tem uma maior taxa de convergência e pequeno número de variáveis de controle.

5.2 Conceitos

O método de otimização por enxame de partículas (PSO) foi desenvolvido originalmente por (KENNEDY; EBERHART, 1995). O conceito de inteligência de enxame foi implementado para resolver problemas de otimização de funções contínuas não-lineares, baseado no comportamento de organismos sociais, como abelhas, pássaros, peixes, etc.

A busca por alimentos destes indivíduos e a interação entre eles são modeladas como um mecanismo de otimização. Teoricamente, cada indivíduo pode se adaptar e tirar proveito do melhor caminho para o alimento descoberto por outro membro do grupo durante o processo de procura. Esta técnica de troca de informações de indivíduos dentro de um grupo social, inspirada na natureza, é dita evolucionária. De forma geral, ela visa solucionar problemas de otimização combinatória, e foi primordial para a criação do método de otimização por enxame de partículas.

O algoritmo PSO é formado por uma população inicial de indivíduos que interagem localmente entre si, regidos por um comportamento global, buscando a solução para problemas de forma distribuída. Cada indivíduo é chamado de *partícula*, mas não se comportam como aves ou peixes, pois caso contrário, as partículas possuiriam capacidade cognitiva individual, o que geraria um conflito com o conceito de enxame de partículas, as quais agem somente se estiverem em grupo.

Cada partícula se movimenta num espaço multivariável, n-dimensional, onde n é o número de variáveis de projeto e cada ponto representa uma solução do problema. A população inicial é dada como fixa, com cada partícula localizada em posições aleatórias dentro do espaço de projeto. As partículas apresentam duas características: a posição e a velocidade. Dessa forma, a partícula se movimenta de uma posição aleatória para regiões do espaço de projeto onde a função objetivo possui um valor menor. Para que a convergência seja atingida, cada partícula deve obedecer uma mesma lei de velocidades, que recebe informações da partícula e do grupo, a cada iteração do algoritmo. Com os dados de velocidade e posição de cada partícula na *i-ésima* iteração, é feita uma avaliação da função objetivo para obter novas informações sobre melhores regiões do espaço de projeto. Esta atualização das velocidades das partículas depende de alguns parâmetros: valores aleatórios, inércia da partícula e algumas constantes de cada partícula e sua vizinhança.

No método PSO, a vizinhança social de cada partícula tem influência na sua trajetória no espaço de procura. Normalmente são utilizadas dois tipos de topologias:

- Topologia Totalmente Conectada: conhecida como topologia *gbest*, onde a trajetória da partícula sofre influência da melhor posição encontrada por qualquer outra partícula do enxame, bem como da sua própria experiência.

- Topologia em Anel: conhecida como *lbest* (KENNEDY; MENDES, 2002), onde cada partícula está conectada a dois vizinhos imediatos.

A topologia de vizinhança tem influência na taxa de convergência do PSO. Ela determina o tempo necessário para as partículas encontrarem a melhor posição no espaço de busca. Portanto, na topologia totlamente conectadas, todas as partículas estão conectadas e recebem informação sobre a melhor solução ao mesmo tempo. Na prática, a topologia totalmente conectada converge mais rapidamente, porém está mais suscetível a cair em um ótimo local. Em contrapartida, a topologia em anel faz uma busca mais profunda no espaço de busca e assim está menos propenso a cair em mínimos locais.

(KENNEDY; MENDES, 2002) avaliaram diversas vizinhanças e concluiram que para uma determinada função objetivo, a eficácia do algoritmo depende da topologia. Para este trabalho foi usada a topologia totalmente conectada. Na Figura 16 é possível visualizar os tipos de topologias de vizinhança descritas anteriormente.

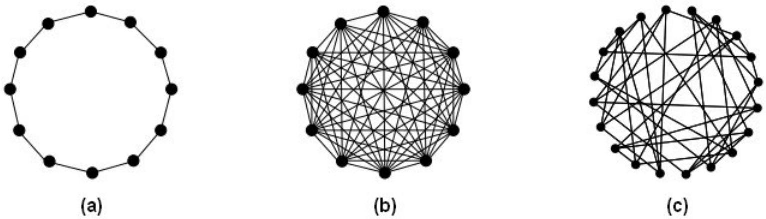

Figura 16: Topologias de vizinhança: (a) Topologia de Anel (b) Topologia Totalmente Conectada (c) Topologia Randômica.

FONTE: (FONTAN et al., 2012).

Cada partícula assume, inicialmente, uma velocidade e uma posição aleatórias. Essas partículas repassam para as outras partículas as melhores posições e dessa forma ajustam a velocidade e posição de acordo com essa informação. Logo após, é atribuída uma velocidade a cada uma das partículas. A velocidade subsequente da partícula j na iteração i é dada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{v}_{k+1}^i = w\boldsymbol{v}_k^i + C_1 R_1(\boldsymbol{p}_{best,k} - \boldsymbol{x}_k^i) + C_2 R_2(\boldsymbol{g}_{best,k} - \boldsymbol{x}_j^i); \quad j = 1, 2, ..., N \tag{5.1}$$

e a posição ou coordenada da $k-ésima$ partícula na $i-ésima$ iteração é dada por

$$\mathbf{x}_k^i = \mathbf{x}_k^i + \mathbf{v}_{k+1}^i; \quad j = 1, 2, ..., N \tag{5.2}$$

onde $\mathbf{v}_k^i$ representa a velocidade e $\mathbf{x}_k^i$ a posição da partícula i na iteração k. Já C_1 e C_2 são as taxas de aprendizagem cognitiva (individual) e social (grupo), respectivamente, R_1 e R_2 são números aleatórios que variam entre 0 e 1. Normalmente assume-se C_1 e C_2 como 2, embora essa escolha seja dependente do problema. N representa o número de partículas, e w é o fator de inércia da partícula, que determina a intensificação da partícula. Ele controla o impacto da velocidade da iteração k da partícula sobre sua velocidade atual $k+1$ (EBERHART; SHI, 1998). Um valor de w alto facilita uma exploração global do espaço de busca, ao passo que um valor baixo, promove uma busca local. Por isso, é muito importante a utilização de um valor de peso de inércia adequado para promover um equilíbrio ou balanço entre a capacidade de busca local e de busca global do algoritmo, fazendo com que seja necessário um número menor de iterações para se chegar ao ponto ótimo global. A Equação 5.1 admite transições aleatórias nas posições das partículas, fazendo com que o algoritmo não caia em pontos de ótimo local.

A literatura propõe usar $0.8 < w < 1.4$, $C_1 = C_2 = 2$ para manter um equilíbrio entre a capacidade de busca global e local do algoritmo (KENNEDY; EBERHART, 1995). No entanto, isto depende do problema e tais parâmetros devem ser estudados.

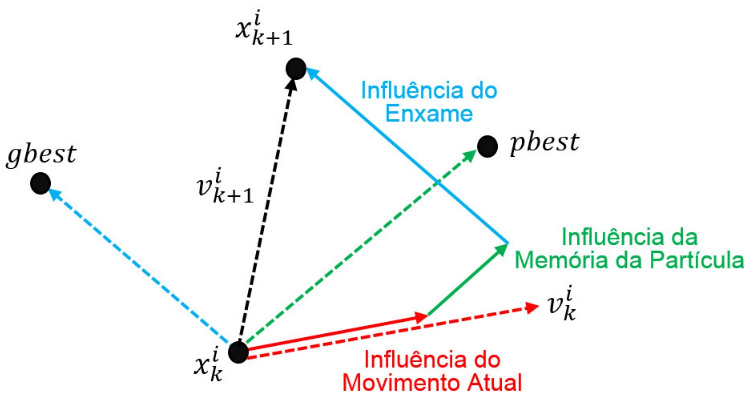

Figura 17: Atualização das velocidades do método PSO (HASSAN; COHANIM; WECK, 2005).

5.3 Restrições

A lei das velocidades e os critérios de estabilidade e convergência já são suficientes para que o algoritmo seja utilizado para a solução de problemas de otimização. Porém, como em sua publicação original (KENNEDY; EBERHART, 1995), o problema era irrestrito e o espaço de busca infinito, nada foi especificado sobre como aplicar restrições.

Como o problema de otimização a ser solucionado neste trabalho contém restrições laterais e restrições funcionais de desigualdade, foi necessário modificar o algoritmo original. Desta forma, foram utilizadas duas estratégias simples, mas que se mostrarm eficicazes.

5.3.1 Restrições Laterais

Para limitar o espaço de busca de forma simples, é possível impedir que as partículas o deixem (MONTERO; CARDOSO, 2013). Quando alguma partícula deixar o limite inferior ou superior de busca de certa dimensão, sua posição nesta dimensão será exatamente o limite. Assim, se torna impossível para qualquer partícula violar as restrições laterais

$$\begin{cases} Se \quad \mathbf{x}_k^i(d) > d_{max}(d); \quad \mathbf{x}_k^i(d) = d_{max}(d) \\ Se \quad \mathbf{x}_k^i(d) < d_{min}(d); \quad \mathbf{x}_k^i(d) = d_{min}(d) \end{cases}, \tag{5.3}$$

onde d_{max} e d_{min} são as restrições laterais superior e inferior, respectivamente, onde d é a dimensão do problema.

5.4 Restrições Funcionais de Desigualdade

As restrições de desigualdade separam o domínio de solução em uma parte viável e uma parte inviável. Nestes casos, devemos considerar as partículas inviáveis, da mesma forma que consideramos as partículas viáveis, porém devemos penalizar o valor de seu objetivo. Uma das abordagens mais simples para realizar esta penalização foi proposta por (DEB, 2000), e adaptada para o PSO no trabalho de

(MONTERO; CARDOSO, 2013). Nesta estratégia, chamamos o pior objetivo das partículas viáveis de f_{worst} e modificamos os objetivos das partículas inviáveis, de modo que estas passam a ter como objetivo

$$f_i = f_{worst} + \sum_{j=1}^{m_g} \max(0, g_j), \tag{5.4}$$

tal que as partículas inviáveis terão a função objetivo sempre pior do que as viáveis. Assim, o procedimento faz com que as partículas inviáveis primeiro convirjam para a região viável, para depois se dirigir para o ponto de ótimo.

5.5 Validação da Implementação Proposta

Há alguns parâmetros no PSO que devem ser estudados para garantir uma melhor acertividade nos resultados obtidos. Dentre eles: a inércia (w), o parâmetro de confiança individual (C_1), o social (C_2), o número de partículas (np) e o critério de parada, que no caso deste trabalho é o número de iterações.

Na teoria, um número maior de partículas significaria uma melhor exploração do espaço de busca, já que as posições iniciais são inicializadas de forma randômica ou aleatória. Portanto, quanto maior a população, maiores serão as chances de encontrar a região de um ótimo local. Já um número maior de iterações faz com que o algoritmo avalie um número maior de soluções para cada partícula, até atingir o melhor resultado.

A utilização, ao mesmo tempo, de um número grande de iterações e partículas torna o algoritmo mais robusto, no entanto o custo computacional aumenta consideravelmente. Neste trabalho não será realizada a avaliação destes parâmetros, mas sim dos parâmetros w, C_1 e C_2 que são normalmente avaliados na literatura.

Os resultados dos melhores parâmetros encontrados nos testes, não necessariamente se estendem para outros problemas. O objetivo principal foi a validação do código computacional e entender como o algoritmo responde às mudanças destes parâmetros.

Avaliar todas as combinações das 03 variáveis se tornaria muito demorado. Por isso, C_1 e C_2 serão agrupadas para realização dos testes. Estes dois parâmetros serão alternados entre 0,5; 1,0; 1,5 e 2,0, enquanto w irá variar de 0 a 1,0 com incrementos de 0,1.

Os problemas de teste avaliados neste trabalho envolvem a utilização de diferentes números de variáveis projeto e apresentam diferentes graus de complexidade e são apresentados na próxima seção.

5.5.1 Problema de Teste 1

Este problema é defindo por uma função objetivo contínua, convexa e unimodal, ou seja, possui somente um ponto de máximo ou mínimo. No entanto, como o problema é sujeito a uma restrição de desigualdade, o ponto de mínimo é diferente da solução irrestrita.

A Figura 5.5.1 ilustra, de forma gráfica, a função em estudo.

O problema é definido por

$$
\begin{array}{lll}
\underset{\mathbf{x}}{Min} & f(\mathbf{x}) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 & \\
S.t. & -x_1^2 - x_2^2 + 7^2 \leq 0 & \\
 & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i & i = 1..2
\end{array}
\tag{5.5}
$$

sendo que o mínimo irrestrito é $\boldsymbol{x}^* = (5, 3)$, correspondendo a $f(\boldsymbol{x}^*) = 0$. Como já mencionado anteriormente, com a inclusão da restrição este valores se alteram (conforme dados apresentados na seção 5.5.3), tal que o ponto de ótimo é $\boldsymbol{x}^* = (6,0020; 3,6022)$.

5.5.2 Problema de Teste 2

Este problema é definido por uma função objetivo não-convexa, com mínimos locais regularmente distribuídos. O ponto de mínimo irrestrito no intervalo considerado ($x_1 \in [0, 10]$ e $x_2 \in [0, 10]$) é $\boldsymbol{x}^* =$

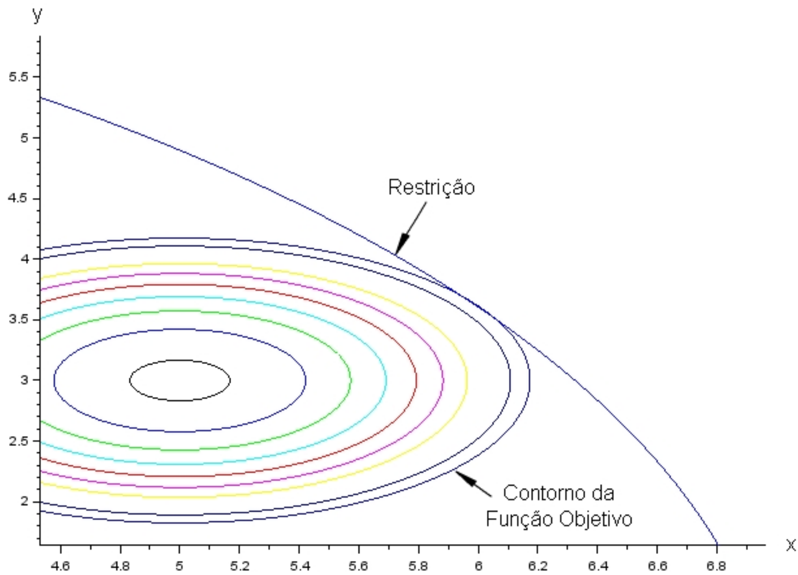

Figura 18: Gráfico do problema de teste 1.

$(9,0389; 8,6681)$ com $f(\boldsymbol{x}^*) = -18,5547$. Assim como no primeiro problema de teste, este também é sujeito a uma restrição, pois um dos objetivos é avaliar a estratégia de imposição das restrições.

$$
\begin{array}{lll}
\underset{\mathbf{x}}{Min} & f(\mathbf{x}) = x_1 sen(4x_1) + 1,1x_2 sen(2x_2) & \\
S.t. & -x_1 - x_2 + 10 < 0 & \\
 & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i & i = 1..5
\end{array}
\tag{5.6}
$$

As isolinhas da função objetivo e da restrição são apresentadas na Figura 19.

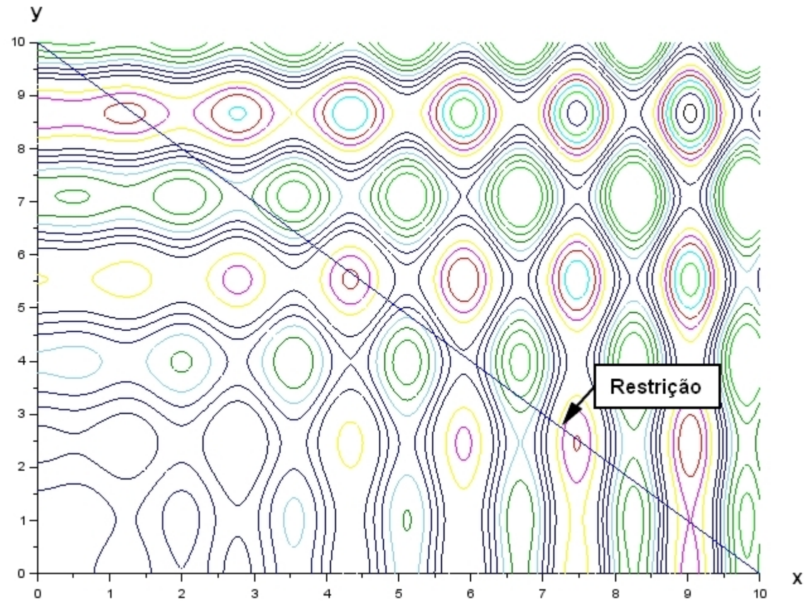

Figura 19: Gráfico do problema de teste 2.

5.5.3 Análise dos Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados encontrados nas simulações do algoritmo proposto aplicado à otimização das funções de teste descritas anteriormente, com o objetivo de minimização. O algoritmo foi executado 100 vezes para cada caso e a partir destes dados foram calculadas a média e o desvio padrão (DP) dos valores obtidos para a função objetivo.

Pela avaliação dos resultados, pode-se notar que tanto para o problema 1 quanto para o problema 2, os melhores resultados dos parâmetros individual e social são obtidos com $C_1 = C_2 = 2$. Para os valores de inércia, o problema 1 obteve melhores valores entre 0,5 e 0,8. No segundo problema, os melhores valores ficaram entre 0,7 e 0,9.

Apesar dos melhores valores dos parâmetros C_1, C_2 e w dependerem de cada função estudada, os problemas de teste e também algumas referências (JR; CARDOSO; STAHLSCHIMDT, 2013) mostram que existem alguns valores que apresentam bons resultados para vários tipos de problemas. Baseado nisso, serão utilizados neste trabalho os seguintes valores para estes três parâmetros: $C_1 = 2$, $C_2 = 2$ e $w = 0,7$.

Tabela 1: Resultados da função objetivo do problema de teste 1 com 100 iterações e w variando de 0,0 à 0,5.

C_1 e C_2	w											
	0		0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	1.3780	0.0220	1.3711	0.0059	1.3684	0.0032	1.3676	0.0011	1.3671	4.320E-4	1.3671	6.721E-4
0,5 e 1,5	1.3737	0.0058	1.3676	0.0019	1.3670	3.326E-4	1.3693	0.0033	1.3667	4.470E-5	1.3668	2.438E-4
0,5 e 2,0	1.3696	0.0043	1.3671	7.120E-4	1.3671	4.472E-4	1.3670	2.950E-4	1.3669	1.975E-4	1.3669	4.617E-4
1,0 e 1,5	1.3826	0.0205	1.3667	7.140E-5	1.3683	0.0026	1.3667	1.916E-4	1.3667	1.627E-4	1.3668	2.021E-4
1,0 e 2,0	1.3668	4.006E-4	1.3680	0.0028	1.2659	0.2257	1.3667	1.651E-4	1.3667	6.680E-5	1.3667	3.700E-5
1,5 e 2,0	1.3670	7.706E-4	1.3667	3.140E-5	1.3667	1.259E-4	1.3667	3.630E-5	1.3667	7.640E-5	1.3667	1.470E-5
0,5 e 0,5	1.3720	0.0109	1.3710	0.0068	1.3695	0.0042	1.3533	0.0301	1.3667	5.050E-5	1.3667	5.230E-5
1,0 e 1,0	1.3754	0.0167	1.3716	0.0050	1.3668	1.945E-4	1.3666	5.100E-6	1.3667	2.189E-4	1.3667	1.149E-4
1,5 e 1,5	1.3674	0.0015	1.3667	1.243E-4	1.3667	1.651E-4	1.3668	2.444E-4	1.3667	2.090E-5	1.3666	2.800E-6
2,0 e 2,0	1.3670	4.606E-4	1.3667	4.920E-5	1.3668	2.936E-4	1.3668	4.363E-4	1.3666	1.900E-5	1.3667	1.350E-4
1,0 e 0,5	1.3678	5.493E-4	1.3669	3.492E-4	1.3669	3.110E-4	1.3667	3.430E-5	1.3667	5.370E-5	1.3666	7.000E-7
1,5 e 0,5	1.3666	4.070E-5	1.3671	9.671E-4	1.3669	5.265E-4	1.3667	7.500E-5	1.3666	1.100E-6	1.3666	3.200E-6
2,0 e 0,5	1.3666	9.500E-6	1.3676	0.0014	1.3685	0.0023	1.3672	6.072E-4	1.3666	6.300E-6	1.3666	1.060E-5
1,5 e 1,0	1.3762	0.0201	1.3842	0.0285	1.3666	2.390E-5	1.3667	4.370E-5	1.3667	2.580E-5	1.3666	5.600E-6
2,0 e 1,0	1.2721	0.2176	1.3680	0.0023	1.3667	4.160E-5	1.3667	9.050E-5	1.3666	1.430E-5	1.3667	7.330E-5
2,0 e 1,5	1.3668	1.509E-4	1.3668	2.667E-4	1.3666	2.740E-5	1.3667	1.680E-5	1.3667	1.023E-5	1.3667	2.700E-5

Tabela 2: Resultados da função objetivo do problema de teste 1 com 100 iterações e w variando de 0,6 à 1,0.

C_1 e C_2	w									
	0,6		0,7		0,8		0,9		1,0	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	1.3669	5.669E-4	1.3667	3.310E-5	1.3666	1.590E-5	1.3678	0.0013	1.3742	0.0067
0,5 e 1,5	1.3667	8.960E-5	1.3667	7.490E-5	1.3668	3.870E-5	1.3691	0.0021	1.4064	0.0305
0,5 e 2,0	1.3666	2.270E-5	1.3667	7.220E-5	1.3669	2.704E-4	1.2829	0.2024	1.4233	0.0101
1,0 e 1,5	1.3667	1.184E-4	1.3667	1.559E-4	1.3668	2.062E-4	1.3697	0.0027	1.3932	0.0347
1,0 e 2,0	1.3667	1.165E-4	1.3666	1.870E-5	1.3668	9.900E-5	1.3346	0.0763	1.4034	0.0262
1,5 e 2,0	1.3667	2.700E-5	1.3667	1.870E-5	1.3674	4.399E-4	1.3758	0.0054	1.4154	0.0271
0,5 e 0,5	1.3666	3.420E-5	1.3670	4.185E-4	1.3667	1.058E-4	1.3670	2.648E-4	1.3783	0.0115
1,0 e 1,0	1.3667	2.890E-5	1.3667	6.910E-5	1.3667	3.960E-5	1.3673	2.929E-4	1.3407	0.0995
1,5 e 1,5	1.3666	2.200E-5	1.3667	3.240E-5	1.3669	2.068E-4	1.3687	6.492E-4	1.4018	0.0165
2,0 e 2,0	1.3669	3.312E-4	1.3670	3.861E-4	1.3677	6.114E-4	1.3903	0.0120	1.4178	0.0206
1,0 e 0,5	1.3666	4.100E-6	1.3666	2.300E-6	1.3666	2.720E-5	1.3669	1.480E-4	1.3732	0.0048
1,5 e 0,5	1.3667	6.700E-6	1.3666	1.140E-5	1.3667	2.380E-5	1.3673	6.186E-4	1.3795	0.0076
2,0 e 0,5	1.3667	1.450E-5	1.3667	1.280E-5	1.3668	2.432E-4	1.3695	0.0021	1.3837	0.0111
1,5 e 1,0	1.3666	1.490E-5	1.3667	4.550E-5	1.3669	1.797E-4	1.3691	0.0034	1.3848	0.0157
2,0 e 1,0	1.3666	1.100E-5	1.3667	7.250E-5	1.3668	7.730E-5	1.3712	0.0048	1.3860	0.0215
2,0 e 1,5	1.3667	1.830E-5	1.36674	5.470E-5	1.3675	5.016E-4	1.3732	0.0033	1.3933	0.02105

Tabela 3: Resultados da função objetivo do problema de teste 1 com 1000 iterações e w variando de 0 à 0,5.

C_1 e C_2	w											
	0		0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	1,3697	1,9416E-03	1,3727	0,0108	1,3675	7,5610E-04	1,3669	4,4210E-04	1,3678	1,3805E-03	1,3670	6,2690E-04
0,5 e 1,5	1,3717	8,0175E-03	1,3759	6,1502E-03	1,3713	5,2355E-03	1,3677	1,4344E-03	1,3668	4,4700E-05	1,3668	2,2350E-04
0,5 e 2,0	1,3678	1,9575E-03	1,3681	2,8782E-03	1,3674	1,3019E-03	1,3669	3,0550E-04	1,3669	2,9730E-04	1,3667	4,7000E-05
1,0 e 1,5	1,3822	0,0253	1,3812	0,0249	1,3784	0,0115	1,3780	0,0125	1,3714	6,6587E-03	1,3669	2,1630E-04
1,0 e 2,0	1,3780	0,0138	1,3739	0,0137151	1,3675	1,1067E-03	1,0952	0,6086	1,3695	1,5772E-03	1,3671	6,2800E-04
1,5 e 2,0	1,3766	0,0222	1,3671	6,2570E-04	1,3669	2,2790E-04	1,3667	7,5400E-05	1,3669	4,4010E-04	1,3671	8,0900E-04
0,5 e 0,5	1,5612	0,2358	1,3765	9,4992E-03	1,4205	0,0879	1,7129	0,3589	1,3708	8,1065E-03	1,3708	6,4832E-03
1,0 e 1,0	1,4423	0,0776	1,6659	0,6261	1,3925	0,0381	1,3689	3,0060E-03	1,3691	3,2561E-03	1,3669	3,3470E-04
1,5 e 1,5	1,3767	0,0171	1,3687	4,0179E-03	1,3760	0,0151	1,3692	4,1486E-03	1,3676	1,1986E-03	1,3668	3,0700E-04
2,0 e 2,0	1,3667	2,0900E-04	1,3667	9,3000E-06	1,3667	1,3000E-06	1,3667	1,1400E-05	1,3667	7,3000E-06	1,3667	2,0000E-06
1,0 e 0,5	1,4194	0,0604	1,4314	0,1348	1,5037	0,2292	1,3677	8,7510E-04	1,3703	6,9804E-03	1,3667	2,1000E-06
1,5 e 0,5	1,3730	9,0694E-03	1,4428	0,1690	1,3731	0,0140	1,3726	8,9949E-03	1,3686	1,8303E-03	1,3667	7,4900E-05
2,0 e 0,5	1,5134	0,3274	1,3682	2,4876E-03	1,4199	0,0775	1,3755	0,0175	1,3812	3,2472E-02	1,3667	1,1000E-06
1,5 e 1,0	1,8624	0,9930	1,3765	7,0244E-03	1,3676	1,9033E-03	1,3675	6,7410E-04	1,3707	8,1124E-03	1,3679	1,5211E-03
2,0 e 1,0	1,4666	0,1618	1,4890	0,2651	1,2275	0,3152	1,3685	4,1103E-03	1,3667	2,9900E-05	1,3668	2,7660E-04
2,0 e 1,5	1,2577	0,2517	1,3699	5,0122E-03	1,3671	1,0291E-03	1,3668	2,3620E-04	1,3667	5,0600E-05	1,3668	1,3150E-04

Tabela 4: Resultados da função objetivo do problema de teste 1 com 1000 iterações e w variando de 0,6 à 1,0.

C_1 e C_2	w									
	0,6		0,7		0,8		0,9		1,0	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	1,3668	2,3270E-04	1,3667	1,4800E-05	1,3667	6,0500E-05	1,3667	5,2000E-05	1,3782	6,7291E-03
0,5 e 1,5	1,3667	7,0500E-05	1,3668	1,3120E-05	1,3667	1,1600E-05	1,3667	7,1000E-05	1,3901	1,0993E-02
0,5 e 2,0	1,3668	1,3780E-04	1,3667	1,9000E-05	1,3667	2,5000E-06	1,3675	9,8720E-04	1,3826	1,3839E-02
1,0 e 1,5	1,3679	2,1362E-03	1,3670	4,6950E-04	1,3667	1,3920E-04	1,3667	4,9700E-05	1,3993	2,4430E-02
1,0 e 2,0	1,3669	4,5130E-04	1,3667	2,0200E-05	1,3667	5,3000E-06	1,3676	1,1744E-03	1,3896	1,1085E-02
1,5 e 2,0	1,3667	2,4200E-05	1,3667	7,8000E-06	1,3667	2,0000E-06	1,3684	1,5832E-03	1,3835	1,2801E-02
0,5 e 0,5	1,3674	1,1882E-03	1,3675	1,0540E-03	1,3682	2,5306E-03	1,3667	1,0300E-05	1,3855	1,7767E-02
1,0 e 1,0	1,3667	1,9800E-05	1,3674	1,6494E-03	1,3671	1,0162E-03	1,3667	2,0000E-06	1,3886	1,1680E-02
1,5 e 1,5	1,3668	1,3950E-04	1,3667	6,5000E-06	1,3667	5,8000E-06	1,3668	1,0370E-04	1,4120	2,4173E-02
2,0 e 2,0	1,3667	1,8800E-05	1,3667	8,3000E-06	1,3667	4,9000E-05	1,3721	4,1504E-03	1,4042	2,4275E-02
1,0 e 0,5	1,3668	2,1010E-04	1,3667	6,6200E-05	1,3671	8,8860E-04	1,3667	7,2000E-06	1,3954	1,4772E-02
1,5 e 0,5	1,3667	1,7000E-06	1,3667	1,4920E-04	1,3667	3,1000E-06	1,3667	2,1000E-05	1,3894	1,1805E-02
2,0 e 0,5	1,3667	2,0000E-07	1,3667	1,4000E-06	1,3667	1,9000E-06	1,3668	1,1630E-04	1,3836	5,0243E-03
1,5 e 1,0	1,3673	7,7300E-04	1,3667	7,0800E-05	1,3667	9,0000E-07	1,3667	6,5000E-06	1,3820	7,8588E-03
2,0 e 1,0	1,3667	1,1780E-04	1,3667	3,2000E-06	1,3667	2,1000E-06	1,3676	8,9070E-04	1,4026	3,3487E-02
2,0 e 1,5	1,3668	2,5710E-04	1,3667	4,8400E-05	1,3667	1,8700E-05	1,3679	1,3524E-03	1,3965	1,7204E-02

Tabela 5: Resultados da função objetivo do problema de teste 2 com 100 iterações w variando de 0,0 à 0,5.

C1 e C2	w											
	0,0		0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	-13,4624	2,6160	-13,2533	2,3858	-14,4166	2,9232	-15,3001	2,3657	-12,8633	7,0605	-16,0772	1,6020
0,5 e 1,5	-17,2682	1,8204	-14,1289	2,2622	-16,2341	1,6068	-15,9842	2,5808	-16,9260	2,6874	-17,8960	1,1772
0,5 e 2,0	-17,2682	1,6631	-16,7665	1,9343	-17,1419	1,7274	-15,3287	2,0164	-17,2680	1,0601	-17,5229	2,3202
1,0 e 1,5	-15,1356	1,9303	-15,4822	1,8624	-16,4525	1,5441	-15,6373	2,3800	-17,7084	1,4554	-16,2959	2,1522
1,0 e 2,0	-16,9541	1,5190	-17,1115	2,0501	-17,3637	1,6303	-17,5822	1,7339	-18,2100	1,0900	-18,2407	0,6620
1,5 e 2,0	-18,2100	1,0900	-17,8654	1,4533	-18,3977	0,4965	-17,0498	1,9767	-18,3977	0,4965	-18,5547	0,0000
0,5 e 0,5	-11,0796	4,3614	-14,1775	2,4011	-12,2508	2,1774	-13,0276	2,2692	-15,5113	2,6780	-14,2942	2,7211
1,0 e 1,0	-13,2394	1,4548	-14,6299	2,6822	-15,3900	2,5622	-15,5726	2,3911	-16,5502	2,1254	-17,0497	1,6771
1,5 e 1,5	-15,1668	2,2950	-17,8960	1,1772	-17,4558	1,4891	-17,2989	1,6211	-17,8654	1,4533	-18,3977	0,4965
2,0 e 2,0	-18,3977	0,4965	-18,2407	0,9929	-18,5547	0,0000	-18,2100	1,0900	-18,3977	0,4965	-18,5547	1,5790E-12
1,0 e 0,5	-9,7087	7,3667	-13,9809	2,7339	-13,3046	1,9386	-14,0183	2,2651	-15,2072	1,6400	-16,2061	1,4799
1,5 e 0,5	-13,4511	2,1091	-12,3715	4,8544	-12,8851	0,8008	-14,8226	1,6805	-14,1343	1,7599	-15,6738	1,8351
2,0 e 0,5	-12,2902	6,9109	-14,8071	1,8650	-14,9163	1,9580	-14,7611	1,0757	-14,8397	3,0617	-17,6905	1,2194
1,5 e 1,0	-13,7424	2,0791	-15,0737	1,8369	-14,8567	2,6604	-16,9846	1,6543	-17,0519	2,2087	-17,7084	1,4554
2,0 e 1,0	-15,4579	3,1946	-17,2496	1,4730	-16,5140	1,8199	-17,9269	1,5164	-18,0530	1,1464	-17,8961	1,3905
2,0 e 1,5	-18,2074	1,0891	-18,3977	0,4965	-17,7391	1,3964	-17,7697	0,8275	-18,0530	1,1464	-18,5547	4,4310E-15

Tabela 6: Resultados da função objetivo do problema de teste 2 com 100 iterações w variando de 0,6 à 1,0.

C1 e C2	w									
	0,6		0,7		0,8		0,9		1,0	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	-17,8960	1,1772	-17,8961	1,3905	-18,2100	1,0900	-18,5545	2,5400E-04	-18,5241	0,0335
0,5 e 1,5	-17,2375	1,8573	-18,2407	6,6200E-01	-18,5547	1,0000E-07	-18,5540	1,0326E-03	-18,5299	0,0126
0,5 e 2,0	-18,3977	0,4965	-18,2100	1,0900	-18,5547	2,6000E-06	-18,5508	3,0585E-03	-18,4980	0,0611
1,0 e 1,5	-18,3977	0,4965	-18,2100	1,0900	-18,2100	1,0900	-18,5533	2,1409E-03	-18,5153	0,0360
1,0 e 2,0	-18,5547	3,5670E-14	-18,5547	1,5720E-08	-18,5547	1,7100E-05	-18,5489	5,1048E-03	-18,4715	0,0744
1,5 e 2,0	-18,5547	2,5750E-12	-18,5547	1,2100E-08	-18,5547	3,6400E-05	-18,5433	1,5636E-02	-18,5120	0,0384
0,5 e 0,5	-15,8918	2,5008	-17,5536	2,2864	-17,7084	1,4554	-18,5547	2,2900E-05	-18,5242	0,0359
1,0 e 1,0	-17,5207	1,6650	-17,8961	1,3905	-18,2100	1,0900	-18,5545	1,8560E-04	-18,5361	0,0193
1,5 e 1,5	-18,5547	1,7100E-13	-18,5547	3,1880E-10	-18,5547	4,3000E-06	-18,5517	6,4524E-03	-18,5211	0,0414
2,0 e 2,0	-18,5547	4,9990E-10	-18,5547	7,2300E-05	-18,5542	5,4860E-04	-18,5254	3,3002E-02	-18,5029	0,0606
1,0 e 0,5	-16,5275	1,3400	-17,3939	1,5857	-18,3977	4,9650E-01	-18,5543	5,9240E-04	-18,5262	0,0295
1,5 e 0,5	-16,5218	2,8837	-18,5547	3,3000E-06	-18,5547	8,4000E-06	-18,5546	1,6760E-04	-18,5200	0,0391
2,0 e 0,5	-18,1960	1,0857	-18,5546	3,0990E-04	-18,5547	4,1000E-05	-18,5427	1,7272E-02	-18,5026	0,0591
1,5 e 1,0	-18,3977	0,4965	-18,3977	4,9650E-01	-18,5547	4,6000E-06	-18,5531	2,4183E-03	-18,4932	0,0358
2,0 e 1,0	-18,5547	8,3270E-12	-18,5547	1,3330E-10	-18,5547	9,6000E-06	-18,5527	2,2784E-03	-18,4621	0,1330
2,0 e 1,5	-18,5547	1,0780E-11	-18,5547	9,6740E-08	-18,5547	2,4200E-05	-18,5468	6,9792E-03	-18,4950	0,0574

Tabela 7: Resultados da função objetivo do problema de teste 2 com 1000 iterações e w variando de 0,0 à 0,5.

C_1 e C_2	w											
	0,0		0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	-14,1132	2,4489	-14,5363	2,5899	-15,2638	2,3666	-15,0453	1,8631	-16,1700	2,3810	-17,0805	1,7990
0,5 e 1,5	-14,7648	2,8199	-15,4829	2,5979	-16,4241	2,3725	-15,7676	2,6576	-16,5195	2,5208	-16,7970	0,9486
0,5 e 2,0	-16,2648	1,5857	-17,0497	2,0038	-16,7665	1,7871	-17,4250	1,3487	-17,2375	2,1569	-18,2100	1,0900
1,0 e 1,5	-15,2353	2,4119	-16,5195	2,5208	-17,2396	2,2288	-16,7666	2,3433	-17,4559	1,6628	-17,7390	1,1843
1,0 e 2,0	-17,5821	1,3827	-17,2685	2,0989	-17,2067	1,9213	-17,2682	1,8204	-17,7390	1,1843	-17,3659	2,2956
1,5 e 2,0	-18,2407	0,6620	-17,7084	1,4554	-18,5547	0,0000	-18,5547	0,0000	-18,5547	0,0000	-18,2100	1,0900
0,5 e 0,5	-12,2571	2,2001	-13,2615	2,0697	-11,8217	5,4961	-14,3816	2,0228	-15,6392	2,4473	-13,8564	2,2454
1,0 e 1,0	-14,3864	2,6119	-14,0372	1,6214	-14,1039	2,1840	-15,1295	2,3297	-16,7380	2,3159	-17,0804	1,4635
1,5 e 1,5	-17,3944	1,5854	-17,3945	1,8994	-17,1115	2,0501	-18,0530	1,5865	-18,3977	0,4965	-17,0805	1,7990
2,0 e 2,0	-18,3977	0,4965	-17,8960	1,6088	-18,2407	0,6620	-18,5547	0,0000	-18,2100	1,0900	-18,2407	0,6620
1,0 e 0,5	-14,0567	2,6267	-10,8298	5,6303	-14,1782	2,3652	-14,9567	1,9540	-15,2924	1,4882	-16,2033	1,6598
1,5 e 0,5	-13,3347	3,3121	-14,2743	2,3738	-14,9915	1,6634	-15,3842	2,3437	-16,6401	1,2759	-18,2407	0,6620
2,0 e 0,5	-14,1701	5,4574	-16,5625	1,8792	-16,5168	1,3718	-15,3402	1,8329	-17,2374	1,5346	-17,5821	1,3827
1,5 e 1,0	-13,7684	2,4505	-15,2920	2,0703	-15,6617	2,5667	-16,4832	1,6880	-17,2682	1,8204	-17,5821	1,3827
2,0 e 1,0	-16,8542	2,3833	-16,4177	2,5438	-16,5502	2,1254	-16,7357	1,8448	-17,5229	2,3202	-17,8961	1,3905
2,0 e 1,5	-18,0530	1,1464	-17,7391	1,3964	-17,7391	1,3964	-18,2407	0,6620	-18,2100	1,0900	-18,3977	0,4965

Tabela 8: Resultados da função objetivo do problema de teste 2 com 1000 iterações e w variando de 0,6 à 1,0.

C_1 e C_2	w									
	0,6		0,7		0,8		0,9		1,0	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP	Média	DP
0,5 e 1,0	-16,6098	2,3788	-18,2407	9,9288E-01	-18,2100	1,09E+00	-18,5547	0,0000E+00	-18,5521	0,0022
0,5 e 1,5	-18,2407	0,6620	-17,8654	1,4533E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	3,3500E-15	-18,5519	0,0024
0,5 e 2,0	-18,0530	1,1464	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	1,8920E-05	-18,5504	0,0057
1,0 e 1,5	-17,7106	2,1744	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	1,1950E-13	-18,5509	0,0039
1,0 e 2,0	-18,5547	0,0000	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	8,0000E-07	-18,5482	0,0074
1,5 e 2,0	-18,3977	0,4965	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	1,9800E-05	-18,5472	0,0060
0,5 e 0,5	-15,3900	2,4310	-17,0519	2,3294E+00	-17,2374	1,70E+00	-18,2100	1,0900E+00	-18,5533	0,0016
1,0 e 1,0	-17,2680	1,6953	-17,7084	1,4554E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	0,0000E+00	-18,5536	0,0008
1,5 e 1,5	-18,2100	1,0900	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	9,4480E-08	-18,5468	0,0103
2,0 e 2,0	-18,5547	0,0000	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	1,23E-14	-18,5546	1,7650E-04	-18,5494	0,0052
1,0 e 0,5	-18,0837	1,0596	-18,0530	1,1464E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,3977	4,9650E-01	-18,5525	0,0032
1,5 e 0,5	-17,8960	1,1772	-18,2407	9,9288E-01	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	0,0000E+00	-18,5502	0,0046
2,0 e 0,5	-18,5547	0,0000	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	4,7980E-08	-18,5520	0,0026
1,5 e 1,0	-17,7698	1,5254	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	2,3220E-13	-18,5516	0,0036
2,0 e 1,0	-18,2100	1,0900	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	4,0000E-07	-18,5515	0,0039
2,0 e 1,5	-18,5547	0,0000	-18,5547	0,0000E+00	-18,5547	0,00E+00	-18,5547	4,6100E-05	-18,5478	0,0041

6 Formulação do Problema

Alguns estudos têm sido desenvolvidos visando diminuir a transmissão da vibração de máquinas e equipamentos quando um mecanismo é utilizado para a ligação da máquina com outro sistema. Dentre eles pode-se citar o trabalho de Radle, Zeiler e Richards (1997) e Vervoordeldonk, Ruijl e Rijs (2004). A redução da vibração dessas máquinas não foi descrita de forma sistemática, os mecanismos propostos têm muitos componentes e, além disso, a fabricação é complexa. A modelagem do atrito e rigidez nos contatos ou mesmo nos elementos de fixação das partes do equipamento se torna muito difícil.

Já no trabalho de Hwang et al. (2010) é proposto um módulo de redução de vibração, onde o projeto do dispositivo é bastante simples, porém bastante eficaz. A principal virtude é que ele pode ser aplicado em diversas áreas da indústria. Tal mecanismo pode ser classificado como um mecanismo flexível (CARDOSO, 2000) e, portanto, não apresenta os problemas de atrito, rigidez de contato e dificuldade de fabricação.

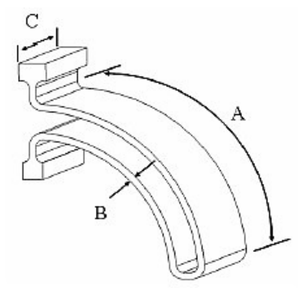

Figura 20: Mecanismo flexível desenvolvido por (HWANG et al., 2010).

O módulo proposto por Hwang et al. (2010) considera um isolador de vibração fixado a uma base rígida. A massa vibrante repousa sobre um mecanismo flexível (similar a uma mola), que foi projetado considerando um sistema de um grau de liberdade, como o da Figura 21.

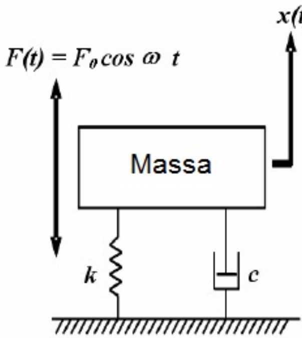

Figura 21: Modelo ideal de um (01) grau de liberdade (1GDL) de um sistema massa-mola (HWANG et al., 2010).

Para elaborar o projeto do módulo de redução de vibração-força-transmissibilidade com um mecanismo flexível (mola), alguns fatores de projeto são muito importantes. No caso do trabalho de Hwang (2010), foi considerada a tensão máxima provocada pelas vibrações e a frequência natural do módulo, o que obviamente tem um efeito sobre a durabilidade e a confiabilidade do equipamento.

Seguindo a linha do artigo de Hwang et al. (2010), neste trabalho o flange do motor elétrico funcionará como o elemento flexível. Assim, o processo de modificação da estrutura focará no flange e terá como objetivo minimizar a transmissibilidade de vibração, sempre respeitando os limites de projeto. Este problema é formulado como um problema de otimização estrutural, mais especificamente, a otimização paramétrica, onde alguns parâmetros geométricos de um modelo de elementos finitos são modificados de modo a alterar o projeto inicial. A função objetivo é dada pela diferença entre a frequência natural de um modo de interesse e um valor especificado. As restrições, por sua vez, levam em consideração a resistência mecânica (critério de Rankine) e parâmetros construtivos do flange.

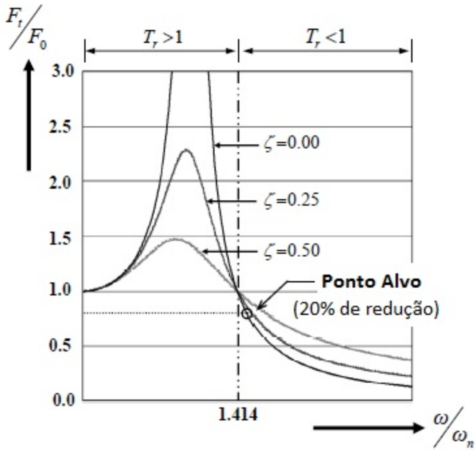

Figura 22: Razão de frequências de excitação (w) versus transmissibilidade (T_r) e o ponto alvo (HWANG et al., 2010).

Assim, escrevendo o problema na forma padrão de otimização, propõe-se

$$
\begin{array}{lccc}
\underset{\mathbf{x}}{Min} & (\omega_1 - \bar{\omega}_1)^2 & & \\
S.t. & \|\sigma_1\|_\infty \leq \sigma_{rup}^T & & \\
 & \|\sigma_3\|_\infty \leq |\sigma_{rup}^C| & & \\
\underline{x}_i & \leq x_i \leq & \bar{x}_i & i = 1..6
\end{array}
\tag{6.1}
$$

onde ω_1 é a frequência natural do primeiro modo de vibração, $\bar{\omega}_1$ é a frequência natural desejada, $\|\sigma_1\|_\infty$ é a maior tensão principal trativa da estrutura, σ_{rup}^T é a tensão admissível de tração, $\|\sigma_3\|_\infty$ é o módulo da maior tensão principal de compressão e $|\sigma_{rup}^C|$ é o módulo da tensão admissível de compressão. As seis (06) variáveis de projeto consideradas são ilustradas na Figura 24, sobre o projeto original da flange.

Deve-se salientar que esta formulação utiliza somente as informações modais do modelo de elementos finitos, isto é, não é realizada uma análise transiente. De fato, se o objetivo for minimizar a transmissibilidade de um problema geral, então é realmente necessária uma análise mais completa, de modo a garantir que os frequências de excitação não excitem as regiões de amplificação da FRF. No entanto, sabe-se que os sistemas mecânicos em estudo apresentam baixas razões de amortecimento (GONÇALVES, 2012), tal que as regiões de amplificação são realmente estreitas no espectro de frequência. Avaliando a Equação 3.39, apresentada na seção 3.5, para ζ_r tendendo a zero, e para ω tendendo a ω_r, observamos que os termos $(w_r^2 - \omega^2) = 0$ e $(i2\zeta_r\omega_r\omega)$, tendem a zero, tal que H_{pp} tende rapidamente ao infinito.

Isto motivou a escolha da abordagem puramente modal, uma vez que isto facilita a solução do problema, sem comprometer a aplicação dos resultados. Assim, a frequência natural desejada, $\bar{\omega}$ é selecionada de modo a atingir uma relação de frequência que afaste a primeira frequência natural, ou alguma frequência de interessa, do conjunto motor/flange da primeira frequência de excitação (e de suas harmônicas). A Figura 23 ilustra as curvas de FRF numérica e experimentais desenvolvidas no trabalho de (GONÇALVES, 2012), em um motor elétrico da carcaça IEC 225S/M.

O problema definido na Equação 6.1 é não-convexo (devido a natureza da função objetivo e das restrições) e não diferenciável (devido a norma ∞), tal que, na forma apresentada, é de difícil solução. Além disso, o problema tem poucas variáveis de projeto, conforme é ilustrado na Figura 24. Por este motivo, é utilizado o método de enxame de partículas, *Particle Swarm Optimization* ou PSO, que não depende do cálculo das derivadas e que apresenta a robustez necessária para a busca do ótimo global.

Conforme apresentado no capítulo sobre o PSO, o método é de ordem zero e necessita de um grande número de avaliações das funções envolvidas. Neste trabalho a análise modal por elementos finitos é

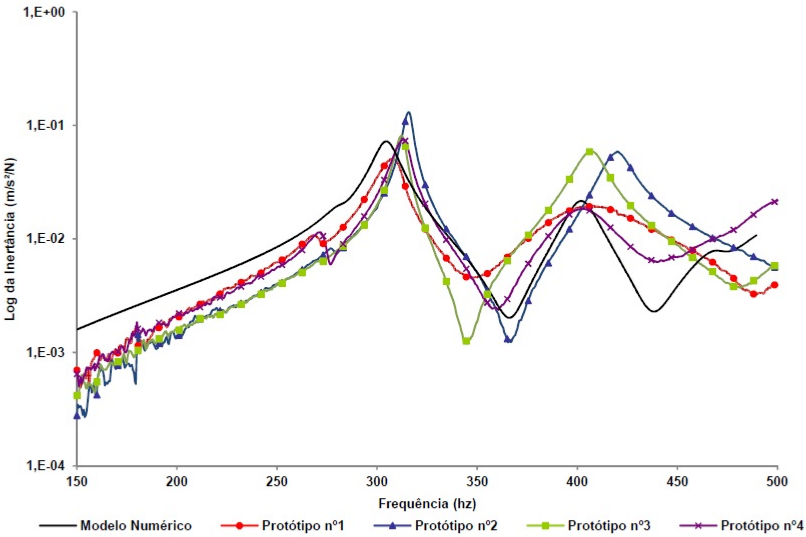

Figura 23: Curvas de FRF numérica e experimentais do trabalho de (GONÇALVES, 2012). Fator de amortecimento médio = 1,87%. A diferença entre os protótipos 1 à 4 está na interferência entre o estator bobinado e a carcaça.

realizada no programa comercial ANSYS, que é um programa de modelagem de problemas multifísicos baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF). O ANSYS possui uma linguagem de programação própria, APDL (Ansys Parametric Design Language), que permite uma integração com o programa de otimização, escrito em Scilab. Assim, tanto a frequência quanto as tensões principais associadas a um dado conjunto de variáveis de projeto são obtidas por meio da modificação dos valores destas variáveis em um arquivo com comandos APDL gerado com o modelo do motor. Isto é feito por um programa escrito em Scilab. O único trabalho do analista é gerar o arquivo APDL com as definições do modelo de elementos finitos, e informar ao programa do Scilab o nome das variáveis utilizadas para realizar a parametrização.

De posse deste programa, é possível utilizar o PSO para realizar a otimização paramétrica, bastando para isto extrair os dados de

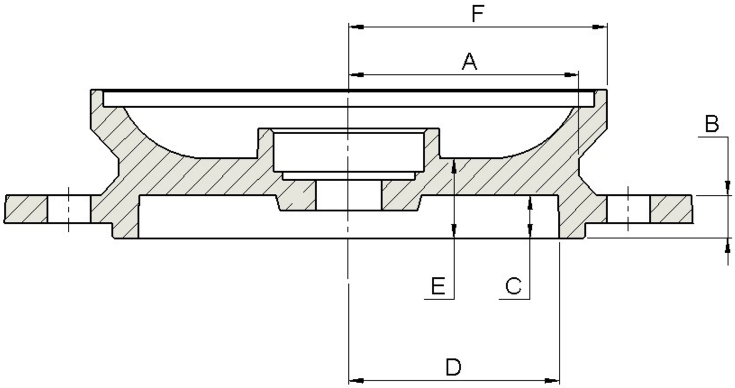

Figura 24: Variáveis de projeto do flange a ser otimizado.

frequência e tensão dos arquivos de saída do ANSYS, tarefa realizada por outro programa desenvolvido em Scilab. Desta forma, o procedimento de otimização é o ilustrado na Figura 25.

No entanto, cada análise de elementos finitos é bastante custosa, o que faz com que o procedimento de otimização seja bastante demorado, mesmo quando um modelo bidimensional é utilizado.

6.1 Aproximação por Mínimos Quadrados

Para permitir um estudo mais completo sobre o problema de otimização proposto e, também, para avaliarmos a viabilidade da formulação proposta, foi implementada uma aproximação por mínimos quadrados do comportamento da frequência natural e das tensões principais em relação as variáveis de projeto.

A aproximação por mínimos quadrados foi gerada com um espaçamento uniforme de 4 pontos para cada variável de projeto, totalizando 4.096 (4^6) avaliações das funções (cada avaliação corresponde a uma execução do ANSYS, com a malha ilustrada na Figura 26 (Apên-

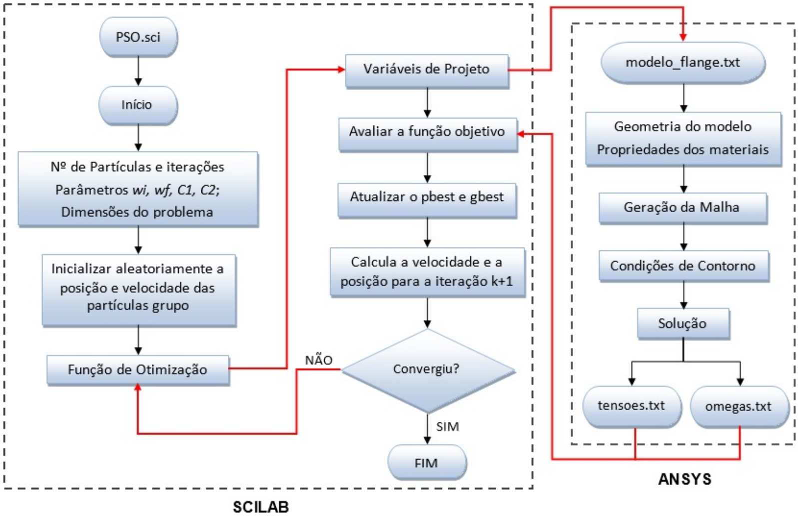

Figura 25: Procedimento de otimização 1: interface do otimizador com o programa de análise modal e estrutural ANSYS.

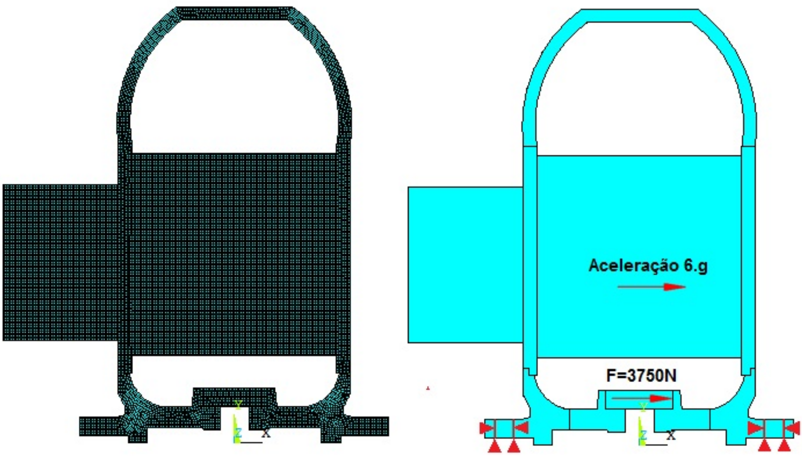

Figura 26: Modelo 2D do motor elétrico: malha e condições de contorno.

dice A). O número de pontos em cada direção (variável) foi escolhido para permitir uma interpolação cúbica completa em relação a cada va-

Tabela 9: Valores limites das variáveis de projeto.

Variável	Valor inicial [m]	Valor final [m]
A	$0,0500$	$0,0650$
B	$0,0085$	$0,0135$
C	$0,0080$	$0,0150$
D	$0,0575$	$0,0600$
E	$0,0280$	$0,0495$
F	$0,0575$	$0,0605$

riável. As faixas de valores para cada variável estão ilustradas na tabela 9.

Com os dados obtidos, foram testadas diferentes bases polinomiais, até que um erro médio especificado fosse obtido para a frequência e para as tensões principais. Assim, se a função de erro quadrático médio da aproximação for dada por

$$\Phi = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(f(\bar{\mathbf{x}}_i) - V_i\right)^2} \tag{6.2}$$

onde V_i são os valores obtidos por elementos finitos nos pontos selecionados do espaço de projeto $\mathbf{x}_i$ (ω, σ_1 ou σ_3), n é o número de pontos avaliados por elementos finitos (4^6) e f é a função de aproximação que se deseja obter.

Supondo agora que a função f seja descrita por um polinômio de ordem m, na forma

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} \tag{6.3}$$

onde $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ é um vetor que contém os termos da base e $\mathbf{a}$ é um vetor que contém os coeficientes, teremos

$$\Phi = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{p}^{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}_i)\mathbf{a} - V_i\right)^2}. \tag{6.4}$$

A condição necessária para mínimo desta função é

$$\nabla_{\mathbf{a}}\Phi = \mathbf{0} \tag{6.5}$$

equivalendo a um sistema de equações lineares na forma

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{6.6}$$

onde

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}(\bar{\mathbf{x}}_i)\mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}}_i) \tag{6.7}$$

e

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}(\bar{\mathbf{x}}_i)V_i. \tag{6.8}$$

Todavia, a matriz de coeficientes **A** tem a tendência de ser mal-condicionada, especialmente no caso onde as variáveis assumem valores de magnitude muito diferentes. Neste caso, a melhor estratégia consiste em trabalhar com um novo conjunto de variáveis normalizadas. Assim, se uma variável original x é definida no intervalo $[x_{min}, x_{max}]$ e queremos que a variável passe a ter valores no intervalo $[r_{min}, r_{max}]$, podemos definir o mapeamento

$$r = r_{min} + (x - x_{min})\left(\frac{r_{max} - r_{min}}{x_{max} - x_{min}}\right). \tag{6.9}$$

Desta forma, podemos fazer com que todas as variáveis apresentem a mesma ordem de grandeza, reduzindo muito a chance de observarmos o mal condicionamento. É importante salientar que as equações obtidas serão em função das novas variáveis r, mas que o mapeamento inverso é obtido por

$$x = x_{min} + (r - r_{min})\left(\frac{x_{max} - x_{min}}{r_{max} - r_{min}}\right). \tag{6.10}$$

Foram testados vários conjuntos de base, até que o erro médio nos pontos avaliados por elementos finitos fosse baixo ($E_\omega = 0,0202$, $E_{\sigma_1} = 0,2470$ e $E_{\sigma_3} = 0,3336$). A base final utilizada no trabalho é

$$p(\mathbf{r}) = \{1\ r_1\ r_2\ r_3\ r_4\ r_5\ r_6\ r_1r_2\ r_1r_3\ r_1r_4\ r_1r_5\ r_1r_6\ r_2r_3\ r_2r_4\ r_2r_5\ r_2r_6$$

$$r_3r_4\ r_3r_5\ r_3r_6\ r_4r_5\ r_4r_6\ r_1^2\ r_2^2\ r_3^2\ r_4^2\ r_5^2\ r_6^2\ r_1^2r_2\ r_1^2r_3\ r_1^2r_4\ r_1^2r_5\ r_1^2r_6$$

$$r_2^2r_3\ r_2^2r_4\ r_2^2r_5\ r_2^2r_6\ r_3^2r_4\ r_3^2r_5\ r_3^2r_6\ r_4^2r_5\ r_4^2r_6\ r_1^3$$

$$r_2^3\ r_3^3\ r_4^3\ r_5^3, r_6^3\} \tag{6.11}$$

onde $r_1, .., r_6$ são as variáveis normalizadas. De modo a minimizar o mal-condicionamento, além da estratégia de mudança de variável, foi utilizado o método QR para a solução do sistema linear de equações. Neste método, decompomos a matriz $\mathbf{A}$ em

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} \tag{6.12}$$

onde $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal, ie, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, e $\mathbf{R}$ é uma matriz triangular superior. Este processo pode ser realizado por mais de um método, como por exemplo a ortogonalização de Gram-Schmidt. Considerando que $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, então

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{6.13}$$

pode ser escrita como

$$\mathbf{QRx} = \mathbf{b} \tag{6.14}$$

e, como $\mathbf{Q}$ é ortogonal, então podemos multiplicar ambos os lados por $\mathbf{Q}^T$, tal que

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b} \tag{6.15}$$

e, finalmente, como $\mathbf{R}$ é triangular superior, podemos solucionar o sistema por meio de uma retrosubstituição. A complexidade desta operação é da ordem de n^3.

A solução do problema de mínimos quadrados para os valores de frequência e de tensões principais resultou no conjunto de coeficientes apresentado na tabela 11, onde cada coeficiente multiplica um dos termos da base normalizada, resultando no polinômio que descreve o comportamento da grandeza em questão.

Tabela 10: Coeficientes obtidos por mínimos quadrados. Cada linha corresponde ao coeficiente que multiplica o termo de base (primeira coluna).

Termo da base	ω_1	σ_1	σ_3
1	$486,1234$	$10,3953$	51.1684
r_1	$30,2732$	$8,3267$	-6.2468
r_2	$4,8291$	$1,9635$	$-2,8351$
r_3	$1,7633$	$-9,8337$	$10,35620$
r_4	$3,0898$	$-0,3720$	$-0,4477$
r_5	$-38,9092$	$23,1606$	$-52,9297$
r_6	$1,4368$	$-0,8523$	$1,1327$
r_1r_2	$0,31109$	$0,2674$	$-0,3203$
r_1r_3	$-0,8704$	$-0,6543$	$0,6446$
r_1r_4	$4,6006\times10^{-2}$	$4,0256\times10^{-2}$	$-7,6581\times10^{-3}$
r_1r_5	$0,6287$	$-1,3067$	$1,0636$
r_1r_6	$7,0159\times10^{-2}$	$1,3309\times10^{-2}$	$-1,3625\times10^{-2}$
r_2r_3	$0,4195$	$-0,81889$	$0,8977$
r_2r_4	$7,8672\times10^{-2}$	$2,9182\times10^{-3}$	$8,8162\times10^{-2}$
r_2r_5	$-0,1049$	$-0,5517$	$0,7671$
r_2r_6	$-0,3521$	$0,1949$	$-0,2793$
r_3r_4	$-8,1544\times10^{-2}$	$6,8759\times10^{-2}$	$-2,5127\times10^{-2}$
r_3r_5	$-0,2239$	$2,4482$	$-2,3977$
r_3r_6	$1,9689\times10^{-3}$	$6,4147\times10^{-3}$	$-1,6975\times10^{-2}$
r_4r_5	$-8,9415\times10^{-2}$	$0,1553$	$-2,7713\times10^{-3}$
r_4r_6	$2,2249\times10^{-2}$	$1,7702\times10^{-2}$	$-1,0879\times10^{-2}$
r_1^2	$-0,1240$	$-0,1792$	$0,3071$
r_2^2	$-0,5344$	$8,0586\times10^{-2}$	$-7,1469\times10^{-2}$
r_3^2	$0,2481$	$0,5043$	-0.7466
r_4^2	$-0,1403$	$-0,1145$	$0,1587$
r_5^2	$6,7741$	$-4,1090$	$8,6907$
r_6^2	$-2,8232\times10^{-2}$	$4,2141\times10^{-2}$	$-4,9418\times10^{-2}$
$r_1^2r_2$	$6,1886\times10^{-2}$	$-2,0667\times10^{-2}$	$2,7768\times10^{-2}$
$r_1^2r_3$	$-4,7605\times10^{-2}$	$4,5383\times10^{-2}$	$-4,1181\times10^{-2}$
$r_1^2r_3$	$2,7091\times10^{-2}$	$-4,0690\times10^{-3}$	$1,8699\times10^{-4}$
$r_1^2r_5$	$-2,4194\times10^{-2}$	$0,1008$	$-7,7665\times10^{-2}$
$r_1^2r_6$	$1,9738\times10^{-2}$	$-3,4493\times10^{-3}$	$3,2634\times10^{-2}$
$r_2^2r_3$	$3,3781\times10^{-2}$	$3,2367\times10^{-2}$	$-4,1471\times10^{-2}$
$r_2^2r_4$	$-1,7492\times10^{-3}$	$3,2021\times10^{-4}$	$-1,1926\times10^{-3}$
$r_2^2r_5$	$-1,7585\times10^{-3}$	$2,7848\times10^{-2}$	$-4,4783\times10^{-2}$
$r_2^2r_6$	$1,5338\times10^{-2}$	$-1,3592\times10^{-2}$	$2,1705\times10^{-2}$
$r_3^2r_4$	$-1,0375\times10^{-2}$	$-1,0332\times10^{-2}$	$4,7721\times10^{-3}$
$r_3^2r_5$	$-8,9907\times10^{-2}$	$-0,2402$	$0,2216$

Tabela 11: Coeficientes obtidos por mínimos quadrados (continuação). Cada linha corresponde ao coeficiente que multiplica o termo de base (primeira coluna).

Termo da base	ω_1	σ_1	σ_3
$r_3^2 r_6$	$7,3519 \times 10^{-3}$	$-5,5775 \times 10^{-3}$	$6,4710 \times 10^{-3}$
$r_4^2 r_5$	$2,5108 \times 10^{-3}$	$-1,6464 \times 10^{-2}$	$1,2966 \times 10^{-3}$
$r_4^2 r_6$	$-8,9549 \times 10^{-4}$	$-1,4337 \times 10^{-2}$	$9,1931 \times 10^{-4}$
r_1^3	$-5,9174 \times 10^{-2}$	$4,4182 \times 10^{-4}$	$1,0838 \times 10^{-2}$
r_2^3	$1,3823 \times 10^{-2}$	$-1,3143 \times 10^{-2}$	$1,9632 \times 10^{-2}$
r_3^3	$-3,8405 \times 10^{-2}$	$0,1972$	$-0,1599$
r_4^3	$1,5790 \times 10^{-3}$	$1,6203 \times 10^{-2}$	$-1,3929 \times 10^{-2}$
r_5^3	$-0,3943$	$0,2432$	$-0,4743$
r_6^3	$-1,6932 \times 10^{-4}$	$-2,6558 \times 10^{-3}$	$2,1990 \times 10^{-3}$

O gráfico da Figura 27 ilustra a variação da frequência natural obtida pela aproximação de mínimos quadrados quando cada uma das variáveis r_i varia na faixa normalizada $[0, 10]$ e as demais variáveis são matidas no mínimo (1,0). Como pode visto na figura, nesta situação as variáveis r_1,r_3 e r_5, tem maior influência no resultado. Os gráficos das Figuras 28 e 29, por sua vez, ilustram o mesmo raciocínio, mas para o caso em que as variáveis são mantidas no valor médio do intervalo normalizado (5,0) e no maior valor normalizado (10,0), respectivamente. Como pode ser visto nas figuras, as variáveis r_1,r_3 e r_5 (A, C, E), apresentam maior influência nestes três caso ilustrados.

A Figura 30 ilustra a alteração que o uso das aproximações por mínimos quadrados causa no procedimento anterior. Neste caso, pode-se notar que os cálculos de elementos finitos são substituidos pelas aproximações polinomiais propostas. Isto fez com que o tempo de processamento seja diminuido de 24 horas para aproximadamente 01 minuto (60 partículas e 100 gerações), mantendo a margem de erro discutida anteriormente. O computador utilizado tem as seguintes características: processador $Intel\ Core^{TM}$ i5 CPU M 460 @ 2.53Ghz.

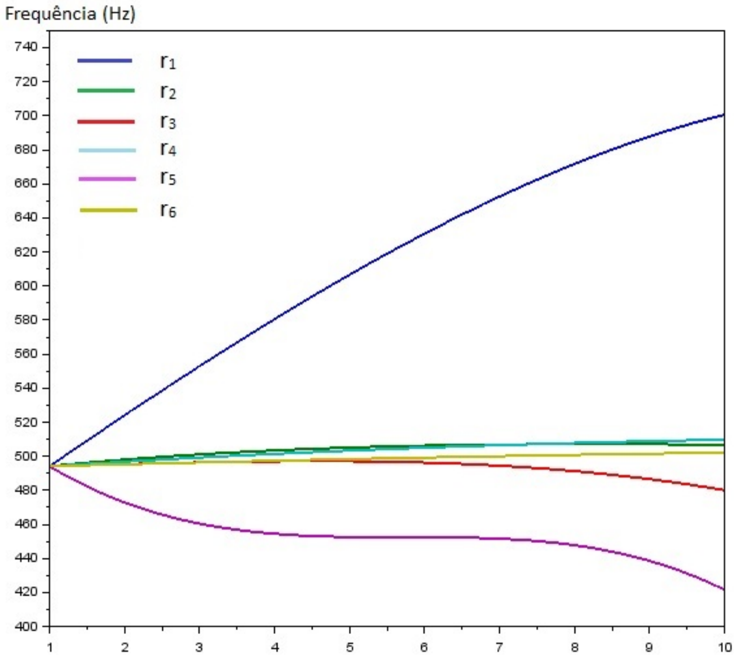

Figura 27: Gráfico ilustrando a importância das variáveis de projeto no valor de ω, onde as variáveis são mantidas no valor inferior do intervalo normalizado (1,0).

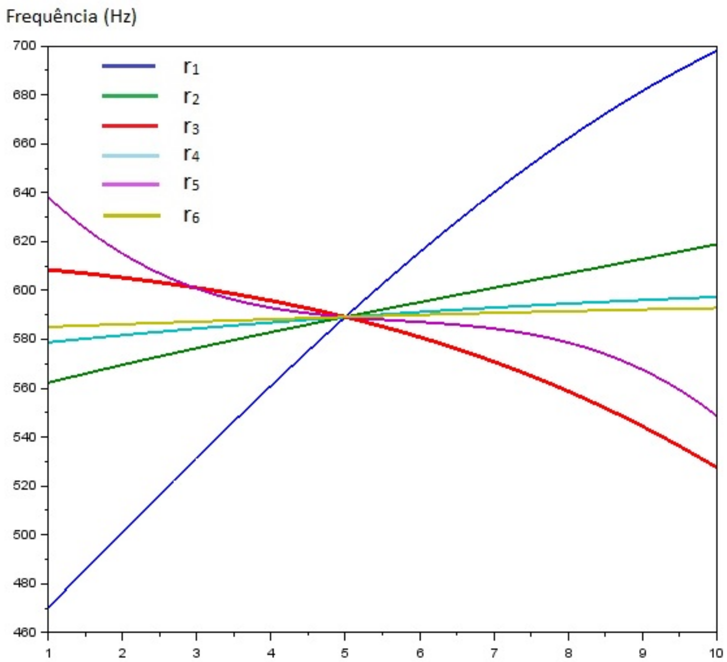

Figura 28: Gráfico ilustrando a importância das variáveis de projeto no valor de ω, onde as variáveis são mantidas no valor médio do intervalo normalizado (5,0).

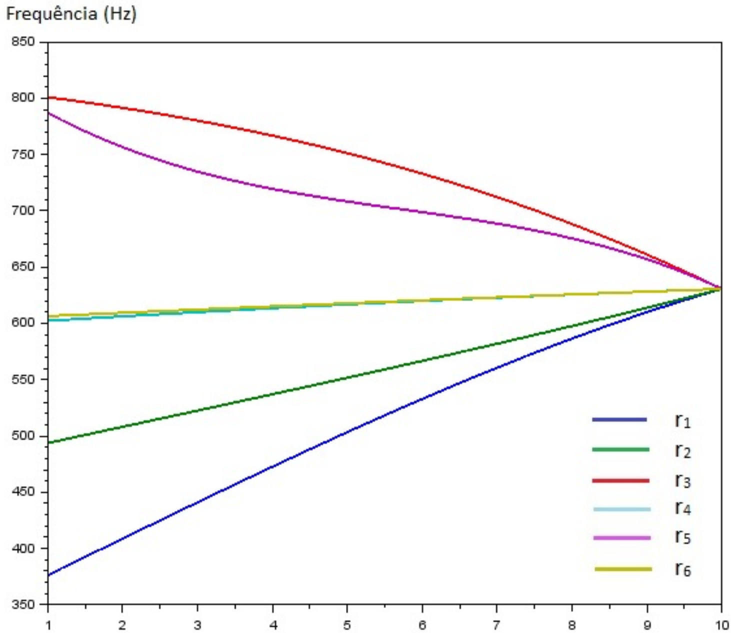

Figura 29: Gráfico ilustrando a importância das variáveis de projeto no valor de ω, onde as variáveis são mantidas no valor superior do intervalo normalizado (10,0).

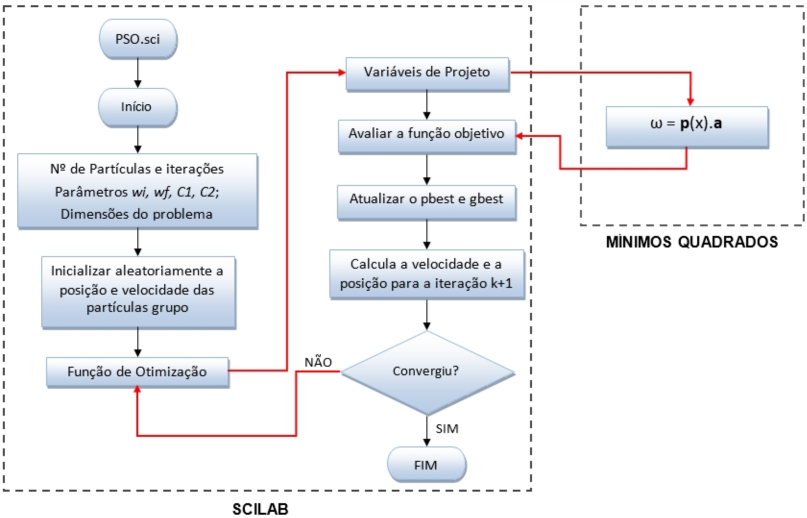

Figura 30: Procedimento de otimização 2: interface do otimizador com a aproximação por mínimos quadrados.

7 Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados encontrados utilizando a metodologia e os procedimentos apresentados nos capítulos anteriores. Em todos os casos, os parâmetros utilizados no PSO foram

- Número de Partículas (np): 60;
- Número de Iterações (nit): 500;
- Peso da Inércia (w): 0,7;
- Parâmetro de Confiança Individual(C_1): 2,0;
- Parâmetro de Confiança Social (C_2): 2,0.

7.1 Otimização Paramétrica do Flange

Para avaliarmos a formulação proposta, foi selecionada como frequência alvo $\bar{\omega} = 750Hz$, a qual se localiza entre duas harmônicas do motor elétrico ($720Hz$ e $780Hz$). No modelo 3D do motor original, a primeira frequência natural obtida por elementos finitos é de $790Hz$, ou seja, $10Hz$ acima de uma das harmônicas ($780Hz$) da excitação, indicando que o motor opera em uma região de amplificação da FRF. O padrão geométrico associado a vibração nesta frequência (modo) é ilustrada na figura 31.

Foram realizadas 100 otimizações utilizando o PSO e a aproximação por mínimos quadrados desenvolvida neste trabalho, sendo que os resultados obtidos estão listados no apêndice C, tabelas 17 e 18. As variáveis de projeto da melhor solução obtida estão apresentadas na

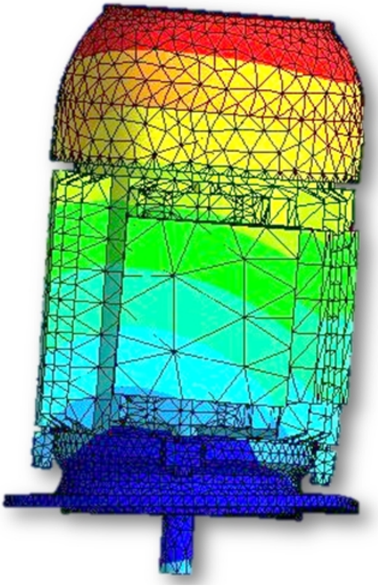

Figura 31: Primeiro modo de vibração do modelo estudado.

tabela 12, sendo que a comparação da geometria da flange original com a flange otimizada é ilustrada na figura 32.

A última linha da tabela 12 apresenta a verificação do resultado obtido diretamente no ANSYS, pois o resultado obtido via otimização reflete o comportamento do motor descrito pelos polinômios ajustados por mínimos quadrados. Como pode ser verificado, os valores são muito próximos, sendo que as tensões calculadas pelo ANSYS estão a favor da segurança. Isto comprova a eficácia do procedimento proposto, sendo que o ganho de eficiencia é indiscutível.

Com o objetivo de avaliar as modificações estruturais que levam a frequências naturais abaixo e acima da frequência alvo estudada anteriormente, $\bar{\omega} = 750Hz$, são analizados também duas situações distintas: $\bar{\omega} = 460Hz$ e $\bar{\omega} = 810Hz$ pois ambas ilustram alterações significativas frente a frequência natural do flange original ($790Hz$).

Para a frequência alvo $\bar{\omega} = 460Hz$, foram também realizadas 100 otimizações utilizando o PSO com a aproximação por mínimos quadrados. Os resultados obtidos estão listados nas tabelas 21 e 22, Apêndice C. As variáveis de projeto da melhor solução obtida estão ilustradas na tabela 13, onde pode-se avaliar que a verificação realizada no ANSYS demonstra mais uma vez a validade do procedimento de mínimos quadrados utilizado.

A titulo de comparação, o mesmo problema foi solucionado **uma vez** sem a utilização da aproximação por mínimos quadrados, isto é, chamando o ANSYS diretamente a cada análise. O resultado obtido está ilustrado na tabela 15, onde pode-se ver que a solução obtida é equivalente a uma das muitas soluções obtidas nas tabelas do apêndice C. Como pode ser verificado, devido a natureza estocástica do PSO e do caráter não convexo do problema, devemos avaliar diversas soluções de otimização.

Por fim, para a frequência alvo $\bar{\omega} = 810Hz$, também foram realizadas 100 otimizações utilizando o PSO com a aproximação de mínimos quadrados. Os resultados obtidos estão listados nas tabelas 19 e 20, Apêndice C, sendo que a tabela 14 ilustra as variáveis de projeto da melhor solução obtida. A ultima linha da tabela 14 mostra que, neste caso, a estimativa de frequência e de tensões principais obtidas pelo ANSYS diferem, quando comparadas com as soluções anteriores, mais do previsto pela aproximação de mínimos quadrados. Isto mostra que existem pontos ao longo do espaço de projeto em que a aproximação por mínimos quadrados pode ser melhorada.

É importante salientar que em todas as otimizações realizadas existiram partículas em posições não viáveis. Conforme pode ser verificado nos resultados obtidos neste capítulo, todas as soluções ótimas são viáveis, o que comprova que o procedimento de tratamento de partículas não viáveis utilizado neste trabalho é eficaz.

Conforme pode ser avaliado pelos resultados obtidos, é muito difícil para o projetista extrapolar um comportamento global, seja da frequência natural, seja das tensões principais, para a variação conjunta das seis variáveis de projeto. Isto mostra a importância do procedimento de otimização, que explora as possibilidades de projeto de forma sistemática e automatizada.

Tabela 12: Valores encontrados para o objetivo de $750Hz$.

	A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
PSO	0,0565	0,0085	0,0080	0,0600	0,0426	0,0605	0,0000	750,0000	52,1574	-52,7185
ANSYS				-				751,8500	43,9820	-44,0330
							Erro	0,25%	15,67%	16,48%

Tabela 13: Valores encontrados para o objetivo de $460Hz$.

	A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
PSO	0,0500	0,0085	0,0080	0,0575	0,0417	0,0605	0,0000	460,0000	52,6663	-51,9878
ANSYS				-				456,6600	44,0030	-44,0500
							Erro	0,72%	16,45%	15,27%

Tabela 14: Valores encontrados para o objetivo de $810Hz$.

	A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
PSO	0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0408	0,0582	0,0000	810,0000	58,7280	-56,9660
ANSYS				-				792,5700	43,9350	-43,9860
							Erro	2,15%	25,19%	22,78%

Avaliando os resultados encontrados para as três (03) frequências alvo ($460Hz$, $750Hz$ e $810Hz$) e a Figura 33, pode-se observar os seguintes pontos:

- As variáveis **A** e **B** tem grande influência em relação à $\bar{\omega}$, já que tem impacto na rigidez flexional e, portanto, na frequência natural;
- A variável **C** tem pouca influência sobre o resultado final e praticamente não se altera;
- A variável **D** também tem influência na rigidez flexional, porém não tem o mesmo efeito proporcionado pela variável **A**, por exemplo;
- A variável **F** foi alterada somente para a menor frequência ($460Hz$) e sua influência é menor em detrimento das demais.

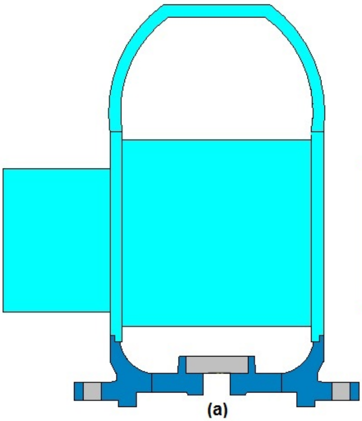

Figura 32: (a) Modelo original (b) Modelo otimizado, com frequência alvo de $\omega = 750Hz$.

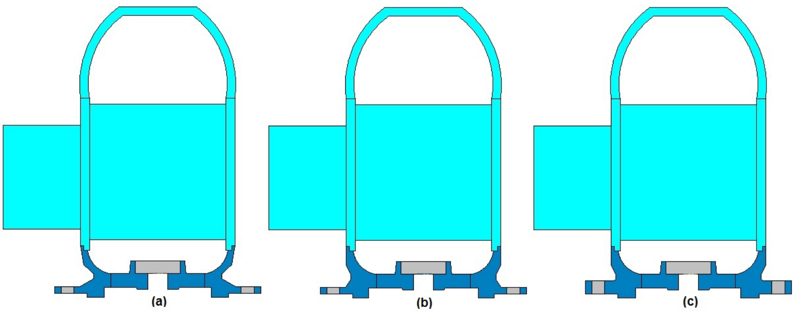

Figura 33: Modelos otimizados (a) Frequência alvo de $\omega = 460Hz$ (b) Frequência alvo de $\omega = 750Hz$ (c) Frequência alvo de $\omega = 810Hz$.

Tabela 15: Valores encontrados para o objetivo de $460Hz$, avaliações diretamente pelo ANSYS.

	A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
PSO	$0,05000$	$0,01119$	$0,01500$	$0,05993$	$0,04230$	$0,05982$	$3,7636$	$461,94$	$56,91$	$-56,89$

8 Conclusão

O presente trabalho propõe a otimização estrutural de um flange de motor elétrico, com o objetivo de ajustar a frequência natural. Para isto, foi elaborado um procedimento onde são realizadas modificações em determinadas dimensões do flange, que é o elemento que faz a ligação entre o motor e o equipamento.

Foi implantado o algoritmo de otimização PSO (Otimização por enxame de partículas), que se mostrou adequado para este tipo de problema (não convexo e com poucas variáveis de projeto). O objetivo principal da formulação de otimização é obter um conjunto motor e flange onde a primeira frequência natural seja igual ou muito próxima de um valor pré determinado. Além disso, é utilizado o critério de Rankine (materiais frágeis) para a avaliação de resistência mecânica (tensões principais σ_1 e σ_3).

Inicialmente, a análise modal e de tensões principais foi realizada a partir do ANSYS, que é um programa de modelagem de problemas multifísicos baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF). Em função da interface entre o PSO e o programa externo de elementos finitos, o custo computacional é muito alto, mesmo utilizando um modelo 2D. Em termos comparativos, o tempo estimado utilizando o procedimento com o ANSYS foi de aproxidamente um (01) dia (realizando uma otimização), enquanto que para o procedimento que utiliza a aproximação por mínimos quadrados foi de mais ou memos um (01) minuto (realizando 100 otimizações). Estes resultados fizeram com que fosse optado pela utilização do procedimento de aproximação por mínimos quadrados da frequência natural e das tensões principais no decorrer do trabalho.

A implementação da aproximação por mínimos quadrados (MQ), além de trazer um ganho imenso em termos computacionais, permitiu realizar os testes com problemas de otimização. A partir destes dados foi possível validar o algoritmo PSO e ajustar os parâmetros C_1, C_2 e w. Dessa forma, é possível realizar um grande número de análises de otimização a um tempo bastante competitivo. Vale salientar que este problema pode ser estendido para o caso de modelos 3D, além do modelo 2D implementado neste trabalho.

Utilizando os resultados encontrados a partir da aproximação por minímos quadrados diretamente no ANSYS, pode-se verificar que o resultado obtido via otimização reflete o comportamento do motor descrito pelos polinômios ajustados por MQ. A diferença entre os resultados é muito pequena e, dessa forma, comprova a eficácia do procedimento proposto, sendo que o ganho de eficiência é indiscutível.

Deve-se salientar que, embora tenha sido utilizada a proximação por mínimos quadrados, pode-se utilizar o ANSYS diretamente para a avaliação das frequências e tensões principais (principalmente porque, para determinar a aproximação de minímos quadrados, foi necessário executar o ANSYS para cada uma das 4.096 combinações das variáveis de projeto).

Os resultados obtidos mostram que o procedimento é robusto e pode ser implementado por projetistas e engenheiros sem maiores problemas, bastando conhecer e gerar o arquivo APDL com as definições do modelo de elementos finitos, e informar ao programa do Scilab o nome das variáveis utilizadas para realizar a parametrização. Fica claro também que é muito difícil para o projetista extrapolar um comportamento global do sistema, tanto para a frequência natural, quanto para as tensões principais, para propor a variação conjunta das seis variáveis de projeto. Isto mostra a importância do procedimento de otimização, que explora as possibilidades de projeto de forma sistemática e automatizada, além de auxiliar na tomada de decisões pelo engenheiro durante a fase de projeto conceitual.

8.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Abaixo algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Elaborar um estudo comparando os resultados do modelo 2D (simplificado) com os dados de uma análise experimental;
- Implementação de novas técnicas de otimização para a atualização dos parâmetros, como os algoritmos genéticos, redes neurais, etc;
- Aplicação da metodologia proposta em outras geometrias de flange, para que o procedimento possa ser aprimorado;
- Utilizar a metodologia para otimizar um número maior de modos;
- Trabalhar com a redução de ordem do modelo combinado com a metodologia proposta.

Referências

ARORA, J. S. *Optimization of Structural and Mechanical Systems*. [S.l.]: 2 ed. Iowa, World Scientific, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 61, 62, 64, 65, 66 e 67.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003. Citado na página 69.

CARDOSO, E. L. *Controle de Complexidade na Otimização Topológica de Estruturas Contínuas*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000. Citado na página 85.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1993. Citado na página 53.

COSTELLO, M. J. Understanding the vibration forces in induction motors. *Proc. of the 19th Turbomachinery Symposium, Dallas, TX*, 1990. p. 67–76, 1990. Citado na página 43.

CRAIG, R. R. *Structural dynamics: an introduction to computer methods*. [S.l.]: John Wiley, 1981. Nenhuma citação no texto.

DEB, K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, 2000. v. 186, p. 311–338, 2000. Citado na página 76.

EBERHART, R. C.; SHI, Y. Comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization. *Evolutionary Computation Proceedings - IEEE World Congress on Computational Intelligence*, 1998. p. 69–73, 1998. Citado na página 75.

ENGELBRECHT, A. P. *Fundamentals of Computational Swarm Intelligence*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2005. Citado na página 71.

FILHO, G. F. *Motor de Indução: Princípios de Funcionamento, Características Operacionais, Aplicaç oes, Acionamentos e Comandos*. [S.l.]: Érica, São Paulo, 2000. Citado na página 37.

FINLEY, W. R. Noise in induction motors-causes and treatments. *IEEE Transactions of Industry Applications*, 1991. v. 27, n. 6, 1991. Citado na página 43.

FINLEY, W. R.; HODOWANEC, M.; HOLTER, W. An analytical approach to solving motor vibration problems. *IEEE Trans. on Industry Applications*, 2000. v. 36, n. 5, p. 1467–1480, 2000. Citado na página 43.

FONTAN, M. et al. *Inverse Analysis in Civil Engineering: Applications to Identification of Parameters and Design of Structural Material Using Mono or Multi-Objective Particle Swarm Optimization, Theory and New Applications of Swarm Intelligence.* [S.l.]: InTech, 2012. Citado na página 74.

GOLDMAN, S. *Vibration Spectrum Analysis.* New York, USA: Industrial Press Inc., 1999. Citado na página 46.

GONÇALVES, V. S. *Desenvolvimento de uma Metodologia Numérica Para a Predição dos Três Primeiros Modos de Vibração de Um Motor Elétrico Fixo em Base Rígida.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.

HASSAN, R.; COHANIM, B. E.; WECK, O. L. de. Comparison of particle swarm optimization and the genetic algorithm. In: AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. *46th AIAA ASME ASCE AHS ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference.* Austin, Texas, 2005. Citado na página 75.

HOLLAND, J. *Adaptation in natural and Artificial Systems.* [S.l.]: The University of Michigan Press - Ann Arbor, Michigan, USA, 1975. Citado na página 71.

HWANG, D. et al. Vibration transmissibility reduction module with flexure mechanism for personal tools. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2010. p. 223 – 226, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 85, 86 e 87.

IEC. *International Eletrotechnical Commission - IEC 60072 Dimensions and Output Series for Rotating Electrical Machines.* Standard, Geneva, 1991. Citado na página 29.

IEC-60034. *International Eletrotechnical Commission - IEC 60034 Rotating Electrical Machines Part 14: Mechanical Vibration of Certain*

Machines With Shaft Heights 56mm and Higher - Measurement, Evalution and Limits of Vibration Severety. Standard, Geneva, 2007. Citado na página 31.

IEC-60072. *International Eletrotechnical Commission - IEC 60072 Dimensions and Output Series for Rotating Electrical Machines*. Standard, Geneva, 1991. Citado na página 31.

JR, M. V.; CARDOSO, E. L.; STAHLSCHIMDT, J. Particle swarm optimization and identification of inelastic material parameters. *Engineering Computations*, 2013. v. 30, n. Iss:7, p. 936–960, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 81.

KARUSH, W. *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*. Dissertação (Mestrado) — Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Illinois, 1939. Citado na página 64.

KAVEH, A.; LAKNEJADI, K. A new multi-swarm multi-objetive optimization method for structural design. *Advances in Engineering Software*, 2013. v. 58, p. 54–69, 2013. Citado na página 66.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. *Particle swarm optimization*. 1995. Citado 3 vezes nas páginas 72, 75 e 76.

KENNEDY, J.; MENDES, R. Population structure and particle swarm performance. *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation*, 2002. p. 1671–1676, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.

LEISSA, A. W.; SO, J. Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995. v. 98, p. 2136–2141, 1995. Citado na página 44.

LIEW, K. M.; HUNG, K. C.; LIM, M. K. Vibration of stress-free hollow cylinders of arbitrary cross section. *Journal of Applied Mechanics*, 1995. v. 62, p. 718–724, 1995. Citado na página 44.

MAIA N. M. M.AND SILVA, J. M. M. Theoretical and experimental modal analysis. 1997. 1997. Citado na página 50.

MONTERO, D.; CARDOSO, E. *Otimização por Enxame de Partículas em Treliças: Estudo de Parâmetros e Integração com Programa Comercial de Elementos Finitos*. [S.l.], 2013. Trabalho de conclusão de curso - Engenharia Mecânica. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.

NASSER, M. A. Modal based predictive design and analysis of electric motors. In: *Conference and Exposition on Structural Synamics*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado na página 43.

NEMA. *NATIONAL ELECTRICAL MANUFACTURERS ASSOCIATION - NEMA MG-1: Motors and Generators*. Standard, Virginia, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 45.

OZTURK, C. O. et al. Origins of the electromagnetic vibrations in series fractional horsepower motors. *Proc. of the ISMA - Tools for Noise and Vibration Analysis*, 1994. v. 19, n. 1, p. 1103–1114, 1994. Citado na página 43.

PARKER, R. G.; MOTE, C. D. Exact perturbation for the vibration of almost annular or circular plates. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1996. v. 118, p. 436–445, 1996. Citado na página 45.

RADLE, P. J.; ZEILER, J. M.; RICHARDS, D. Power tool with vibration isolated handle. *U.S. Patent 5697456*, 1997. 1997. Citado na página 85.

RAO, S. *Mechanical Vibration*. 3ed.. ed. New York, USA: Addison-Wesley, 2005. Pp 492-506. Citado 3 vezes nas páginas 49, 51 e 56.

RAO, S. S. *Engineering Optimization - Theory and Practice*. [S.l.]: 4 ed. New Jersey, John Wiley and Sons, Inc., 2009. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 67.

SANTOS, H. *Lateral critical speeds analysis – RTEC0035/2008*. [S.l.], 2008. Citado na página 46.

TIMAR, P. L. et al. *Noise and Vibration of Electrical Machines*. [S.l.]: Elsevier Science Publishers, 1989. Citado na página 43.

TSENG, J. G.; WICKERT, J. A. On the vibration of bolted plate and flange assemblies. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1994. v. 116, n. 4, p. 468–473, 1994. Citado na página 45.

TUSTIN, W. *Randon Vibrations and Shock Testing*. [S.l.]: Santa Barbara: Equipment Reliability Institute, 2005. Citado na página 30.

TZOU, K. I.; WICKERT, J. A.; AKAY, A. Frequency clusters in the spectrum of annular cylinders. *Journal of Applied Mechanics*, 1998. v. 65, p. 797–803, 1998. Citado na página 44.

VERVOORDELDONK, M. J.; RUIJL, T. A. M.; RIJS, R. M. G. Development of a novel active isolation concept. *ASPE - Spring Topical Meeting*, 2004. 2004. Citado na página 85.

YUAN, J.; DICKINSON, S. M. The free vibration of circularly cylindrical shell and plate systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1994. v. 175, n. 2, p. 241–263, 1994. Citado na página 44.

Apêndices

APÊNDICE A – Condições de Contorno Modelos 2D e 3D

Para fins de ilustração do procedimento numérico desenvolvido neste trabalho, a otimização paramétrica do motor ilustrado na Figura 1 é realizada no modelo bidimensional ilustrado na Figura 34. A malha de elementos finitos utilizada foi obtida após o estudo da convergência para as duas primeiras frequências naturais e utiliza elementos incompatíveis de 4 nós para elasticidade plana (PLANE42) em estado plano de tensão. A primeira frequência natural obtida para o modelo de referência do flange é de $790Hz$ e foram selecionadas dois valores de frequência para os modelos otimizados $460Hz$ e $810Hz$, além da frequência alvo de $750Hz$. A Figura 34 ilustra o modelo 2D simplificado do motor elétrico.

O modelo de elementos finitos apresenta 5490 elementos, com tamanho de 3mm. É aplicada uma aceleração de 6 g, ou seja, $58,86m/s^2$ (equivalente às solicitações externas), um carregamento de $3750N$ no mancal dianteiro (carregamento estático máximo do rolamento 6202ZZ utilizado no modelo) e a fixação do modelo é dada pelo flange, conforme Figura 35. Os dados do material considerado no modelo do flange são ilustrados na tabela (16).

Já nas Figuras 36 e 37 estão ilustrados o modelo 3D e a malha de elementos finitos utilizado neste trabalho.

O modelo (3D) de elementos finitos apresenta 54.360 elementos (na grande maioria do tipo $SOLID187$), com tamanho de 3mm na

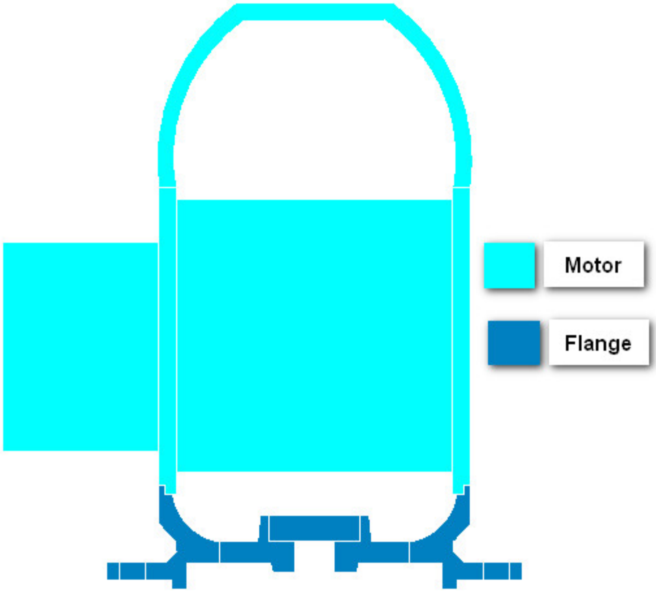

Figura 34: Modelo bidimensional simplificado do motor elétrico.

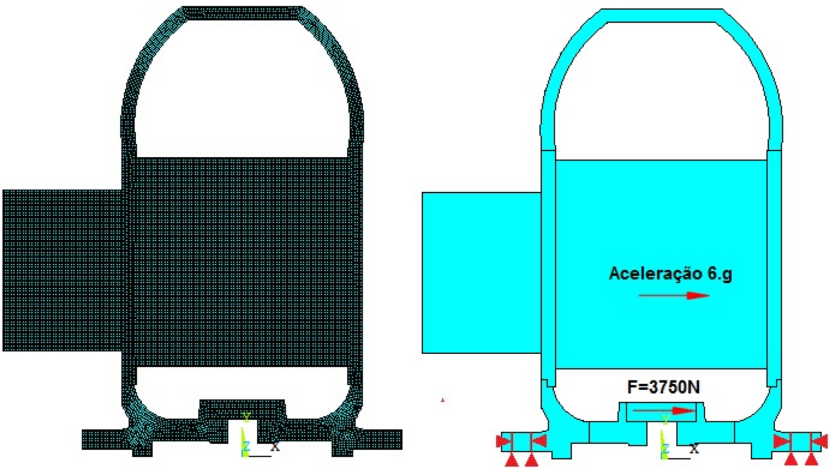

Figura 35: Modelo 2D do motor elétrico.

Grandeza	Símbolo	Valor	Unidade
Densidade	ρ	7180	kg/m^3
Coeficiente de Poisson	ν	$0,24$	-
Módulo de Elasticidade Longitudinal	E	90	GPa
Tensão de Ruptura em Tração	σ_{rup}^{T}	200	MPa
Tensão de Ruptura em Compressão	σ_{rup}^{C}	600	MPa

Tabela 16: Propriedades mecânicas do material utilizado no modelo.

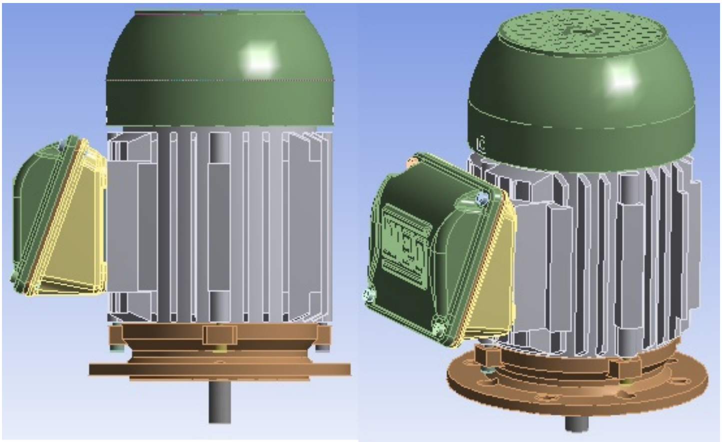

Figura 36: Modelo 3D do motor elétrico.

região do flange. O restante do modelo apresenta o tamanho de malha $default$ do ANSYS. As condições de carregamento são impostas da mesma forma que o modelo 2D, assim como os dados de material.

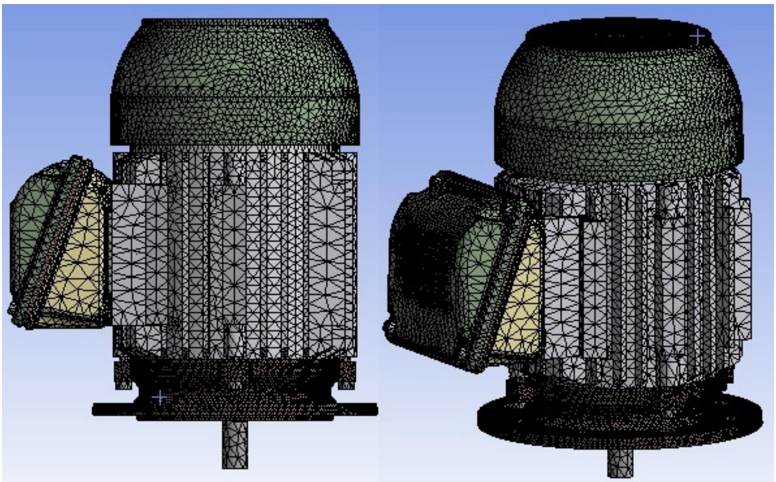

Figura 37: Malha gerada no ANSYS no modelo 3D.

APÊNDICE B – Procedimento de Aproximação/Equivalência entre os Modelos 3D e 2D

Com o objetivo de simplicar a análise e, consequentemente, diminuir o custo computacional foi elaborado um procedimento de aproximação ou equivalência entre o modelo 3D e 2D do motor elétrico. Vale ressaltar que o procedimento é uma aproximação e portanto existem erros intrínsecos, porém podem ser considerados aceitáveis.

B.1 Equivalência de Inércia

A seguir será mostrada a sequência para o cálculo da equivalência entre os dois modelos.

$$m_{(total-3D)} = m_{(motor-3D)} + m_{(caixa-3D)}, \tag{B.1}$$

onde $m_{(total-3D)}$ é a massa total do motor, $m_{(motor-3D)}$ é a massa do estator bobinado, carcaça, rotor, defletor de ar, ventilador e $mcaixa$ é a massa da caixa de ligação. Todos estes dados referem-se ao modelo 3D.

O momento de inércia é calculado da seguinte forma:

$$J_{3D} = m_{motor_3D} d_1^2 + m_{caixa_3D} d_2^2, \tag{B.2}$$

onde J_{3D} é o momento de inércia do modelo 3D em relação à origem. As dimensões d_1 e d_2 estão ilustradas na Figura 38.

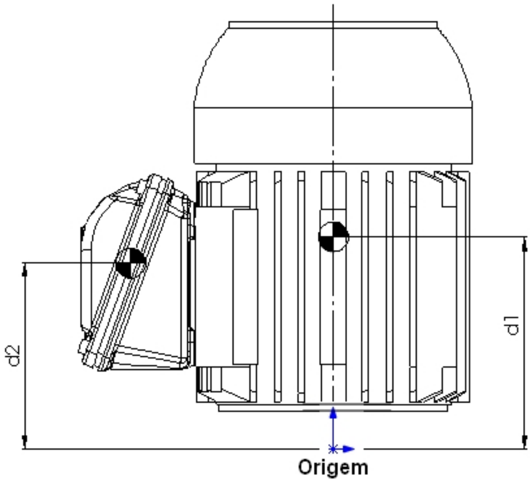

Figura 38: Baricentro do motor no modelo 3D.

Para que os modelos sejam equivalentes, a seguinte relação deve ser respeitada:

$$J_{3D} = J_{2D}, \tag{B.3}$$

onde J_{2D} é o momento de inércia do modelo 2D em relação à origem. Ou seja,

$$m_{(motor-3D)} + m_{(caixa-3D)} = m_{(motor-2D)} + m_{(caixa-2D)}, \tag{B.4}$$

e

$$m_{(motor-3D)} d_1^2 + m_{(caixa-3D)} d_1^2 = m_{(motor-2D)} d_3^2 + m_{(caixa-2D)} d_4^2 \tag{B.5}$$

Dados retirados a partir do modelo 3D em CAD (*Computer Aided Design*):

- $m_{(motor-3D)}$
- $m_{(caixa_3D)}$
- d_1 e d_2

$$m_{(motor-2D)} = A_{(2D)}\rho t_{(motor)} m_{(caixa-2D)} = A_{(2D)}\rho t_{(caixa)}, \tag{B.6}$$

onde $A_{(2D)}$ é a área formada pela seção referente ao motor, conforme Figura 39. ρ é a densidade e $t_{(motor)}$ é a espessura do motor na região avaliada.

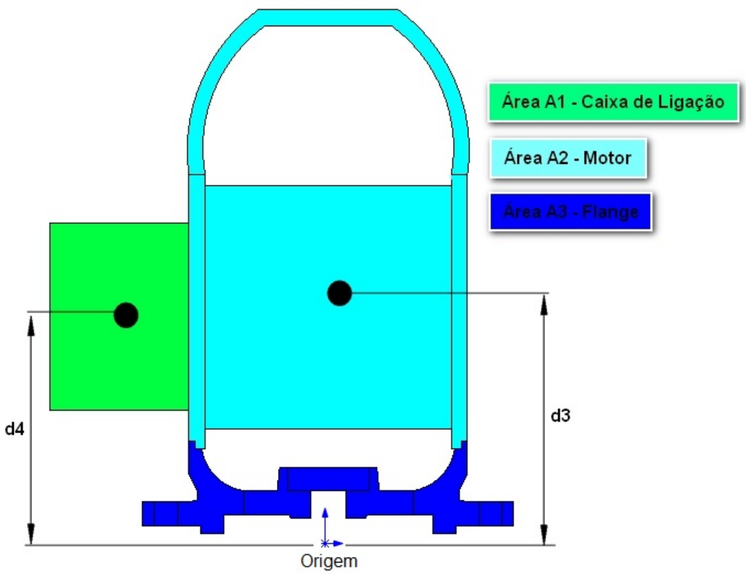

Figura 39: Baricentro do motor no modelo 2D.

B.2 Equivalência de rigidez flexional (primeiro modo)

No caso específico do flange, como a característica que tem mais impacto é a rigidez, o procedimento para calcular a equivalência do modelo 3D para o 2D é um pouco diferente. O flange é dividido em algumas áreas, conforme Figura 40 e a cada uma dessas áreas é dada uma determinada espessura. O procedimento é aproximado e feito diretamente no script do ANSYS.

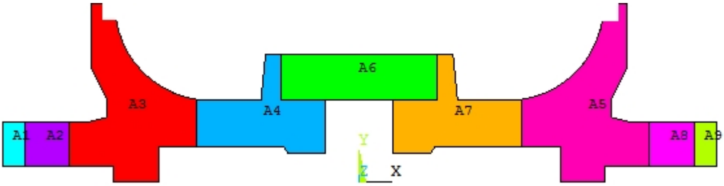

Figura 40: Áreas formadas na região do flange.

APÊNDICE C – Resultados do PSO - Minímos Quadrados

Para avaliar o comportamento do algoritmo PSO, foram testados diferentes conjuntos de C_1, C_2 e w com a aproximação de mínimos quadrados gerada no capítulo 5. No que segue são apresentadas as tabelas com os resultados obtidos com 100 repetições para cada conjunto.

Nas tabelas 17, 18, 19, 20, 21 e 22 estão os resultados encontrados executando o PSO com os seguites valores:

- Número de Partículas (np): 60;
- Número de Iterações (nit): 500;
- Peso da Inércia (w): 0,7;
- Parâmetro de Confiança Individual(C_1): 2,0;
- Parâmetro de Confiança Social (C_2): 2,0.

Para cada caso (objetivo de 750, 810 e 460Hz) foram executados 100 vezes o PSO.

Tabela 17: Resultados encontrados com $C_1 = 2,0$, $C_2 = 2,0$, $w = 0,7$, $nit = 500$ e $objetivo = 750Hz$

A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
0,0564	0,0107	0,0084	0,0600	0,0371	0,0576	2,9900E-18	750,0000	59,9280	-59,9676
0,0551	0,0135	0,0080	0,0600	0,0407	0,0601	1,2920E-26	750,0000	59,6889	-58,8919
0,0565	0,0099	0,0080	0,0599	0,0495	0,0605	8,0490E-17	750,0000	65,5077	-71,8522
0,0565	0,0101	0,0080	0,0575	0,0280	0,0592	0,0000E+00	750,0000	43,4824	-7,9313
0,0565	0,0096	0,0080	0,0600	0,0306	0,0575	0,0000E+00	750,0000	55,9032	-38,9978
0,0561	0,0135	0,0080	0,0587	0,0495	0,0587	5,1700E-26	750,0000	65,0101	-67,4685
0,0552	0,0125	0,0107	0,0600	0,0280	0,0584	6,4000E-19	750,0000	32,5198	5,3252
0,0565	0,0135	0,0083	0,0575	0,0495	0,0605	1,2920E-26	750,0000	65,0129	-66,5530
0,0565	0,0115	0,0080	0,0575	0,0329	0,0603	7,4450E-24	750,0000	61,5198	-54,4271
0,0565	0,0115	0,0131	0,0599	0,0280	0,0603	1,5048E-16	750,0000	57,5128	-15,6939
0,0557	0,0128	0,0131	0,0598	0,0280	0,0597	2,5601E-06	750,0000	57,8494	-15,3596
0,0558	0,0135	0,0080	0,0580	0,0331	0,0586	1,0130E-23	750,0000	66,6372	-57,9022
0,0564	0,0135	0,0099	0,0575	0,0331	0,0599	1,0130E-23	750,0000	46,4170	-36,1713
0,0565	0,0127	0,0119	0,0599	0,0340	0,0605	3,8800E-16	750,0000	53,7638	-46,8038
0,0565	0,0112	0,0080	0,0585	0,0443	0,0580	1,1630E-25	750,0000	54,9934	-52,0544
0,0565	0,0102	0,0103	0,0585	0,0280	0,0603	1,6750E-23	750,0000	21,1230	14,0773
0,0565	0,0135	0,0103	0,0586	0,0413	0,0579	0,0000E+00	750,0000	51,4011	-48,1103
0,0565	0,0135	0,0105	0,0597	0,0486	0,0600	3,2270E-22	750,0000	66,6425	-67,4344
0,0565	0,0109	0,0080	0,0575	0,0280	0,0575	0,0000E+00	750,0000	47,5338	-12,0442
0,0553	0,0135	0,0095	0,0600	0,0344	0,0605	5,2940E-23	750,0000	55,2324	-49,6483
0,0550	0,0134	0,0080	0,0600	0,0319	0,0602	0,0000E+00	750,0000	70,2269	-56,8794
0,0565	0,0111	0,0080	0,0578	0,0440	0,0602	0,0000E+00	750,0000	54,0122	-51,7317
0,0565	0,0085	0,0080	0,0600	0,0431	0,0605	0,0000E+00	750,0000	52,2651	-52,7476
0,0565	0,0092	0,0106	0,0600	0,0280	0,0605	0,0000E+00	750,0000	22,7691	14,5047
0,0565	0,0122	0,0101	0,0600	0,0446	0,0577	0,0000E+00	750,0000	57,0266	-54,5061
0,0553	0,0135	0,0080	0,0594	0,0379	0,0596	1,2920E-26	750,0000	63,0942	-62,1264
0,0565	0,0135	0,0099	0,0591	0,0495	0,0605	1,2920E-26	750,0000	70,0834	-71,5706
0,0565	0,0135	0,0100	0,0575	0,0421	0,0605	1,2920E-26	750,0000	49,4057	-45,2638
0,0565	0,0085	0,0080	0,0600	0,0426	0,0605	0,0000E+00	750,0000	52,1574	-52,7185
0,0565	0,0095	0,0080	0,0591	0,0339	0,0605	8,6910E-23	750,0000	55,0567	-51,7720
0,0555	0,0126	0,0082	0,0575	0,0280	0,0591	2,7930E-22	750,0000	52,7246	-16,0771
0,0565	0,0132	0,0150	0,0600	0,0280	0,0605	0,0000E+00	750,0000	138,1207	-83,6684
0,0565	0,0121	0,0092	0,0580	0,0354	0,0604	4,1000E-19	750,0000	53,3048	-50,8132
0,0551	0,0135	0,0108	0,0585	0,0280	0,0605	8,9040E-23	750,0000	26,3056	11,8466
0,0565	0,0135	0,0098	0,0575	0,0434	0,0601	0,0000E+00	750,0000	51,1775	-46,5230
0,0565	0,0113	0,0080	0,0600	0,0495	0,0575	1,2920E-26	750,0000	66,5701	-71,4682
0,0552	0,0135	0,0080	0,0575	0,0280	0,0605	1,2920E-26	750,0000	56,2760	-17,8201
0,0563	0,0133	0,0114	0,0600	0,0375	0,0593	3,1287E-06	749,9982	54,0329	-51,7504
0,0565	0,0114	0,0090	0,0579	0,0299	0,0591	1,2920E-26	750,0000	43,8936	-22,5628
0,0557	0,0135	0,0097	0,0575	0,0280	0,0575	2,2962E-16	750,0000	32,6318	5,5388
0,0565	0,0088	0,0080	0,0597	0,0325	0,0605	1,3024E-06	750,0000	52,2414	-44,0165
0,0565	0,0132	0,0084	0,0575	0,0386	0,0575	0,0000E+00	750,0000	59,0346	-56,9321
0,0563	0,0115	0,0104	0,0596	0,0301	0,0580	7,7430E-21	750,0000	38,0066	-16,9775
0,0565	0,0135	0,0150	0,0600	0,0280	0,0596	5,1700E-26	750,0000	139,1590	-84,1946
0,0563	0,0112	0,0080	0,0600	0,0480	0,0575	5,1700E-26	750,0000	60,4117	-62,3312
0,0565	0,0135	0,0124	0,0575	0,0283	0,0591	2,1840E-24	750,0000	40,4857	-0,3259
0,0565	0,0101	0,0087	0,0594	0,0439	0,0598	6,2500E-18	750,0000	54,6688	-52,7447
0,0565	0,0125	0,0080	0,0579	0,0461	0,0575	1,3872E-15	750,0000	57,2528	-54,0951
0,0565	0,0120	0,0080	0,0581	0,0392	0,0575	1,2920E-26	750,0000	59,6222	-58,6942
0,0565	0,0130	0,0087	0,0575	0,0471	0,0600	3,2356E-16	750,0000	58,5031	-55,6450

Tabela 18: Resultados encontrados com $C_1 = 2,0$, $C_2 = 2,0$, $w = 0,7$, $nit = 500$ e $objetivo = 750Hz$ (continuação)

A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
0,0565	0,0134	0,0124	0,0575	0,0280	0,0587	0,0000E+00	750,0000	38,4078	3,9000
0,0565	0,0101	0,0080	0,0589	0,0404	0,0594	9,0000E-20	750,0000	54,6951	-54,5211
0,0565	0,0102	0,0081	0,0586	0,0378	0,0604	1,6420E-17	750,0000	56,2552	-56,9264
0,0565	0,0113	0,0091	0,0600	0,0495	0,0605	1,9911E-16	750,0000	71,1403	-75,9734
0,0565	0,0088	0,0084	0,0595	0,0280	0,0586	0,0000E+00	750,0000	33,4639	2,1838
0,0565	0,0099	0,0080	0,0585	0,0280	0,0575	0,0000E+00	750,0000	42,6207	-8,3506
0,0565	0,0104	0,0080	0,0586	0,0379	0,0598	5,1700E-26	750,0000	57,3436	-57,8003
0,0565	0,0131	0,0103	0,0584	0,0320	0,0576	0,0000E+00	750,0000	43,2788	-30,8158
0,0565	0,0118	0,0080	0,0575	0,0342	0,0601	0,0000E+00	750,0000	62,5843	-58,3925
0,0545	0,0135	0,0080	0,0600	0,0280	0,0575	1,2920E-26	750,0000	62,1130	-24,3685
0,0565	0,0125	0,0109	0,0600	0,0428	0,0593	1,3581E-14	750,0000	54,8833	-52,4246
0,0565	0,0085	0,0080	0,0600	0,0426	0,0605	0,0000E+00	750,0000	52,1574	-52,7185
0,0565	0,0135	0,0122	0,0590	0,0327	0,0600	0,0000E+00	750,0000	52,3658	-39,7001
0,0565	0,0135	0,0093	0,0592	0,0495	0,0579	1,2920E-26	750,0000	70,8351	-72,8597
0,0563	0,0093	0,0082	0,0600	0,0361	0,0605	1,2920E-26	750,0000	56,5702	-56,6182
0,0565	0,0135	0,0080	0,0575	0,0475	0,0575	0,0000E+00	750,0000	59,5932	-57,8037
0,0564	0,0102	0,0080	0,0588	0,0295	0,0577	1,5610E-16	750,0000	50,7342	-27,7997
0,0565	0,0098	0,0080	0,0600	0,0495	0,0605	1,2920E-26	750,0000	65,6273	-72,1637
0,0565	0,0128	0,0093	0,0591	0,0494	0,0597	8,1110E-06	750,0001	69,9604	-71,3997
0,0565	0,0113	0,0089	0,0597	0,0356	0,0575	2,0000E-20	750,0000	56,5068	-54,8695
0,0565	0,0135	0,0129	0,0599	0,0325	0,0598	8,9040E-23	750,0000	66,3880	-51,2234
0,0565	0,0107	0,0080	0,0600	0,0495	0,0587	2,0680E-25	750,0000	66,3108	-71,5383
0,0554	0,0125	0,0118	0,0600	0,0282	0,0598	5,9190E-22	750,0000	38,2520	-1,1320
0,0565	0,0124	0,0112	0,0600	0,0368	0,0597	1,3650E-21	750,0000	53,1603	-51,1974
0,0565	0,0130	0,0133	0,0592	0,0280	0,0579	3,2310E-25	750,0000	62,7701	-19,4776
0,0565	0,0135	0,0083	0,0575	0,0495	0,0605	1,2920E-26	750,0000	65,0129	-66,5530
0,0565	0,0121	0,0118	0,0600	0,0301	0,0582	5,7746E-15	750,0000	44,6834	-21,0918
0,0564	0,0135	0,0080	0,0575	0,0495	0,0605	2,3900E-23	750,0000	63,5481	-65,4593
0,0563	0,0135	0,0130	0,0575	0,0280	0,0605	1,2920E-26	750,0000	50,8936	-6,2392
0,0565	0,0135	0,0086	0,0575	0,0363	0,0575	3,2000E-19	750,0000	59,2573	-55,9086
0,0565	0,0135	0,0080	0,0575	0,0495	0,0598	0,0000E+00	750,0000	64,4459	-66,0583
0,0565	0,0127	0,0121	0,0584	0,0280	0,0575	0,0000E+00	750,0000	34,5591	4,6223
0,0564	0,0135	0,0083	0,0575	0,0474	0,0585	1,4053E-06	750,0000	59,2446	-56,8276
0,0565	0,0118	0,0110	0,0575	0,0280	0,0605	2,0000E-20	750,0000	23,4198	13,6767
0,0553	0,0135	0,0080	0,0600	0,0406	0,0575	3,3090E-24	750,0000	61,0125	-61,1110
0,0565	0,0135	0,0080	0,0575	0,0475	0,0575	0,0000E+00	750,0000	59,5932	-57,8037
0,0565	0,0135	0,0099	0,0600	0,0495	0,0582	1,2920E-26	750,0000	72,3974	-76,1572
0,0556	0,0135	0,0106	0,0575	0,0280	0,0604	2,0000E-20	750,0000	25,9478	13,2576
0,0565	0,0126	0,0126	0,0594	0,0284	0,0575	1,0373E-08	750,0001	46,4906	-9,2756
0,0565	0,0085	0,0080	0,0600	0,0429	0,0605	0,0000E+00	750,0000	52,2045	-52,7111
0,0565	0,0085	0,0080	0,0600	0,0431	0,0605	3,4950E-23	750,0000	52,2624	-52,7459
0,0565	0,0132	0,0080	0,0575	0,0495	0,0605	1,2920E-26	750,0000	64,0117	-66,1275
0,0553	0,0135	0,0080	0,0577	0,0280	0,0575	3,0000E-20	750,0000	57,3522	-19,8824
0,0552	0,0115	0,0080	0,0585	0,0280	0,0603	1,0570E-21	750,0000	52,4904	-18,4868
0,0554	0,0135	0,0081	0,0575	0,0280	0,0578	0,0000E+00	750,0000	55,2504	-17,2690
0,0558	0,0129	0,0083	0,0600	0,0495	0,0602	1,2920E-26	750,0000	65,3466	-70,8747
0,0565	0,0135	0,0099	0,0575	0,0344	0,0600	1,5290E-17	750,0000	47,6651	-40,6725
0,0565	0,0094	0,0080	0,0583	0,0297	0,0605	6,9000E-19	750,0000	45,7449	-24,1255
0,0563	0,0133	0,0080	0,0575	0,0464	0,0587	0,0000E+00	750,0000	56,1926	-53,3778
0,0565	0,0115	0,0080	0,0575	0,0454	0,0605	5,1700E-26	750,0000	54,2754	-52,2478

Tabela 19: Resultados encontrados com $C_1 = 2,0$, $C_2 = 2,0$, $w = 0,7$, $nit = 500$ e $objetivo = 810Hz$

A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
0,0565	0,0117	0,0080	0,0600	0,0280	0,0575	0,0000E+00	810,0000	51,6793	-16,7109
0,0565	0,0135	0,0080	0,0592	0,0430	0,0605	0,0000E+00	810,0000	53,5104	-49,4874
0,0557	0,0135	0,0080	0,0600	0,0280	0,0586	1,0297E-15	810,0000	58,0461	-19,9878
0,0565	0,0135	0,0097	0,0589	0,0285	0,0597	2,0680E-25	810,0000	29,6826	4,0570
0,0562	0,0125	0,0088	0,0594	0,0280	0,0603	1,0000E-19	810,0000	38,0915	-2,7870
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0377	0,0585	5,1700E-26	810,0000	62,9886	-61,4000
0,0565	0,0135	0,0080	0,0591	0,0329	0,0605	2,2520E-22	810,0000	61,7291	-52,1800
0,0565	0,0135	0,0080	0,0580	0,0280	0,0590	1,0000E-20	810,0000	50,1684	-12,2261
0,0565	0,0135	0,0080	0,0584	0,0280	0,0575	1,2920E-26	810,0000	50,6964	-14,0493
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0352	0,0585	1,2920E-26	810,0000	65,8327	-61,9788
0,0565	0,0135	0,0080	0,0596	0,0462	0,0605	0,0000E+00	810,0000	54,6473	-51,4121
0,0565	0,0125	0,0080	0,0593	0,0280	0,0575	0,0000E+00	810,0000	49,8445	-15,2431
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0351	0,0585	3,6538E-06	810,0000	65,8835	-61,9280
0,0565	0,0135	0,0080	0,0593	0,0342	0,0602	0,0000E+00	810,0000	62,7362	-56,7810
0,0565	0,0135	0,0105	0,0600	0,0280	0,0575	0,0000E+00	810,0000	27,5230	11,1523
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0362	0,0586	0,0000E+00	810,0000	64,9099	-62,2984
0,0565	0,0135	0,0080	0,0576	0,0280	0,0605	1,2920E-26	810,0000	49,3018	-10,6149
0,0565	0,0119	0,0080	0,0600	0,0284	0,0575	0,0000E+00	810,0000	54,1021	-22,1916
0,0565	0,0117	0,0080	0,0600	0,0280	0,0575	0,0000E+00	810,0000	51,7078	-16,7382
0,0565	0,0104	0,0080	0,0600	0,0280	0,0605	0,0000E+00	810,0000	45,4664	-11,3449
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0322	0,0575	0,0000E+00	810,0000	66,4593	-55,3172
0,0565	0,0135	0,0080	0,0576	0,0280	0,0605	1,2920E-26	810,0000	49,3018	-10,6149
0,0565	0,0108	0,0080	0,0600	0,0280	0,0596	1,5640E-24	810,0000	47,7557	-13,2629
0,0565	0,0127	0,0080	0,0600	0,0354	0,0605	3,7690E-23	810,0000	64,3536	-62,2826
0,0565	0,0135	0,0080	0,0597	0,0311	0,0575	0,0000E+00	810,0000	63,0520	-47,1642
0,0565	0,0135	0,0080	0,0584	0,0280	0,0575	8,0000E-20	810,0000	50,4668	-13,8080
0,0565	0,0134	0,0080	0,0577	0,0280	0,0605	0,0000E+00	810,0000	49,3434	-10,9737
0,0565	0,0117	0,0080	0,0600	0,0280	0,0575	0,0000E+00	810,0000	51,7078	-16,7382
0,0565	0,0135	0,0083	0,0586	0,0280	0,0575	3,3090E-24	810,0000	45,3302	-8,6444
0,0565	0,0131	0,0080	0,0600	0,0349	0,0594	8,7370E-24	810,0000	65,5028	-61,7589
0,0565	0,0124	0,0080	0,0584	0,0280	0,0603	2,0680E-25	810,0000	48,3866	-13,7203
0,0565	0,0135	0,0108	0,0590	0,0280	0,0605	1,2920E-24	810,0000	20,2955	18,2141
0,0565	0,0132	0,0080	0,0600	0,0471	0,0605	1,8000E-19	810,0000	56,9106	-55,8728
0,0565	0,0135	0,0080	0,0599	0,0340	0,0585	8,0140E-16	810,0000	65,7295	-59,5914
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0328	0,0578	1,2920E-26	810,0000	66,6174	-57,3644
0,0565	0,0135	0,0080	0,0592	0,0336	0,0605	0,0000E+00	810,0000	62,1589	-54,6954
0,0565	0,0135	0,0120	0,0600	0,0280	0,0605	0,0000E+00	810,0000	31,2655	9,9463
0,0565	0,0135	0,0080	0,0596	0,0354	0,0597	1,1100E-17	810,0000	63,1328	-59,3278
0,0565	0,0105	0,0081	0,0600	0,0280	0,0605	3,9687E-06	810,0000	44,7028	-10,5241
0,0565	0,0104	0,0080	0,0600	0,0280	0,0605	0,0000E+00	810,0000	45,4664	-11,3449
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0363	0,0586	0,0000E+00	810,0000	64,7631	-62,2824
0,0565	0,0135	0,0080	0,0576	0,0280	0,0605	1,2920E-26	810,0000	49,3018	-10,6149
0,0565	0,0135	0,0080	0,0593	0,0378	0,0605	0,0000E+00	810,0000	59,5891	-57,4523
0,0565	0,0135	0,0088	0,0600	0,0417	0,0600	0,0000E+00	810,0000	54,3785	-51,3390
0,0565	0,0135	0,0080	0,0584	0,0280	0,0575	1,2920E-26	810,0000	50,6964	-14,0493
0,0565	0,0122	0,0080	0,0585	0,0280	0,0605	1,2920E-26	810,0000	47,8061	-13,6498
0,0565	0,0135	0,0080	0,0593	0,0381	0,0605	4,8090E-23	810,0000	59,0778	-56,9177
0,0561	0,0115	0,0080	0,0600	0,0280	0,0605	3,7350E-24	810,0000	52,4468	-17,9546
0,0565	0,0135	0,0080	0,0598	0,0380	0,0591	0,0000E+00	810,0000	61,2027	-59,3950
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0384	0,0585	0,0000E+00	810,0000	62,0903	-60,6549

Tabela 20: Resultados encontrados com $C_1 = 2,0$, $C_2 = 2,0$, $w = 0,7$, $nit = 500$ e $objetivo = 810Hz$ (continuação)

A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
0,0565	0,0135	0,0080	0,0576	0,0280	0,0605	1,2920E-26	810,0000	49,3018	-10,6149
0,0565	0,0107	0,0080	0,0597	0,0280	0,0605	2,0680E-25	810,0000	44,9299	-11,4482
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0360	0,0585	0,0000E+00	810,0000	65,0589	-62,3006
0,0565	0,0127	0,0080	0,0600	0,0358	0,0605	1,2920E-26	810,0000	63,9727	-62,4722
0,0565	0,0111	0,0080	0,0600	0,0280	0,0590	1,0130E-23	810,0000	49,1318	-14,4198
0,0565	0,0135	0,0080	0,0576	0,0280	0,0605	1,2920E-26	810,0000	49,3018	-10,6149
0,0565	0,0135	0,0080	0,0592	0,0400	0,0605	0,0000E+00	810,0000	56,5155	-53,9298
0,0565	0,0135	0,0080	0,0599	0,0441	0,0586	2,8120E-17	810,0000	55,4167	-52,4346
0,0565	0,0134	0,0080	0,0578	0,0280	0,0600	7,0000E-20	810,0000	49,7701	-11,6314
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0418	0,0582	7,0000E-20	810,0000	57,5167	-55,4029
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0460	0,0591	1,6210E-22	810,0000	56,1691	-53,7232
0,0565	0,0135	0,0080	0,0598	0,0350	0,0589	2,0680E-25	810,0000	64,8001	-60,5809
0,0565	0,0135	0,0092	0,0600	0,0334	0,0605	0,0000E+00	810,0000	53,2840	-44,6625
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0324	0,0576	0,0000E+00	810,0000	66,5098	-55,8525
0,0565	0,0124	0,0105	0,0600	0,0280	0,0605	3,2900E-18	810,0000	25,7804	11,2468
0,0565	0,0135	0,0094	0,0591	0,0280	0,0576	6,6000E-19	810,0000	30,5880	6,4805
0,0565	0,0135	0,0105	0,0600	0,0280	0,0575	0,0000E+00	810,0000	27,5230	11,1523
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0408	0,0582	0,0000E+00	810,0000	58,7278	-56,9659
0,0565	0,0128	0,0080	0,0600	0,0353	0,0601	2,3900E-23	810,0000	64,7755	-62,1769
0,0558	0,0135	0,0080	0,0600	0,0280	0,0575	1,2920E-26	810,0000	58,2083	-20,7984
0,0565	0,0135	0,0089	0,0600	0,0419	0,0605	0,0000E+00	810,0000	53,3581	-50,2645
0,0565	0,0135	0,0081	0,0594	0,0343	0,0603	9,2830E-22	810,0000	61,6632	-55,7666
0,0565	0,0135	0,0113	0,0600	0,0280	0,0589	3,0910E-21	810,0000	27,0463	12,9798
0,0565	0,0135	0,0087	0,0600	0,0367	0,0601	0,0000E+00	810,0000	58,1722	-55,2827
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0438	0,0583	0,0000E+00	810,0000	55,9473	-53,2453
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0385	0,0584	0,0000E+00	810,0000	61,9053	-60,4850
0,0565	0,0135	0,0080	0,0593	0,0386	0,0605	1,2020E-21	810,0000	58,3418	-56,1547
0,0565	0,0135	0,0080	0,0599	0,0440	0,0586	1,2920E-26	810,0000	55,4427	-52,4707
0,0565	0,0135	0,0080	0,0592	0,0423	0,0605	3,7663E-06	810,0000	53,9539	-50,2061
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0371	0,0585	1,0000E-20	810,0000	63,8543	-61,9573
0,0559	0,0135	0,0080	0,0592	0,0280	0,0597	1,2365E-14	810,0000	52,9628	-15,6783
0,0565	0,0135	0,0080	0,0592	0,0415	0,0605	0,0000E+00	810,0000	54,7064	-51,3686
0,0565	0,0135	0,0080	0,0584	0,0280	0,0575	1,2920E-26	810,0000	50,6964	-14,0493
0,0565	0,0109	0,0081	0,0599	0,0280	0,0595	0,0000E+00	810,0000	46,9419	-12,4650
0,0565	0,0135	0,0080	0,0582	0,0280	0,0581	0,0000E+00	810,0000	50,3903	-13,1282
0,0565	0,0125	0,0080	0,0600	0,0335	0,0605	0,0000E+00	810,0000	64,8221	-59,3448
0,0565	0,0135	0,0080	0,0592	0,0412	0,0604	0,0000E+00	810,0000	55,1433	-51,9725
0,0565	0,0104	0,0080	0,0600	0,0280	0,0605	0,0000E+00	810,0000	45,4664	-11,3449
0,0565	0,0128	0,0108	0,0598	0,0280	0,0605	5,1700E-24	810,0000	23,9603	13,6361
0,0565	0,0135	0,0108	0,0594	0,0280	0,0593	8,7370E-24	810,0000	22,3105	16,3330
0,0565	0,0135	0,0081	0,0580	0,0280	0,0592	0,0000E+00	810,0000	48,0685	-9,9865
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0435	0,0583	0,0000E+00	810,0000	56,1022	-53,4624
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0405	0,0582	0,0000E+00	810,0000	59,1899	-57,5347
0,0565	0,0121	0,0080	0,0586	0,0280	0,0601	2,5020E-23	810,0000	47,9353	-13,7093
0,0565	0,0129	0,0080	0,0598	0,0389	0,0605	8,6100E-14	810,0000	59,1100	-58,4689
0,0565	0,0135	0,0080	0,0600	0,0357	0,0585	1,2920E-26	810,0000	65,3854	-62,2459
0,0565	0,0135	0,0080	0,0594	0,0456	0,0605	0,0000E+00	810,0000	53,8719	-50,0685
0,0565	0,0129	0,0080	0,0598	0,0375	0,0605	4,0000E-20	810,0000	61,2132	-60,4268
0,0565	0,0108	0,0080	0,0600	0,0286	0,0605	9,0000E-20	810,0000	49,9849	-20,8779
0,0565	0,0135	0,0116	0,0596	0,0280	0,0605	2,3000E-19	810,0000	24,8649	14,9807

Tabela 21: Resultados encontrados com $C_1 = 2,0$, $C_2 = 2,0$, $w = 0,7$, $nit = 500$ e $objetivo = 460Hz$

A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
0,0500	0,0128	0,0150	0,0600	0,0336	0,0575	1,0000E-07	459,9996	157,9720	-141,6563
0,0500	0,0108	0,0127	0,0584	0,0362	0,0597	2,0250E-09	460,0000	76,5951	-74,3256
0,0500	0,0135	0,0104	0,0575	0,0408	0,0577	4,8560E-10	460,0000	50,9709	-51,2819
0,0527	0,0135	0,0150	0,0600	0,0495	0,0589	1,4330E-08	459,9999	134,8191	-140,3485
0,0502	0,0135	0,0080	0,0575	0,0452	0,0575	1,5000E-06	459,9988	54,5801	-53,5064
0,0502	0,0122	0,0121	0,0589	0,0434	0,0604	1,3700E-05	459,9963	68,2264	-67,5414
0,0507	0,0099	0,0128	0,0581	0,0419	0,0582	1,2880E-04	460,0114	89,5557	-87,2361
0,0500	0,0093	0,0120	0,0600	0,0354	0,0584	1,7000E-06	460,0013	70,4621	-67,5002
0,0509	0,0096	0,0150	0,0600	0,0358	0,0605	1,8000E-06	459,9987	168,4097	-155,4990
0,0500	0,0085	0,0100	0,0581	0,0374	0,0597	6,3510E-08	460,0003	55,0836	-54,6273
0,0504	0,0118	0,0141	0,0600	0,0375	0,0575	8,9000E-06	460,0030	118,3056	-113,0872
0,0500	0,0126	0,0080	0,0580	0,0433	0,0575	3,0000E-07	459,9994	53,8708	-52,4702
0,0500	0,0085	0,0082	0,0576	0,0398	0,0600	3,0000E-07	460,0006	53,4535	-53,0475
0,0500	0,0135	0,0112	0,0588	0,0429	0,0588	6,1620E-12	460,0000	57,2577	-56,3517
0,0500	0,0107	0,0116	0,0585	0,0392	0,0604	2,0000E-07	460,0004	62,7468	-63,4279
0,0500	0,0101	0,0111	0,0588	0,0408	0,0590	1,0000E-07	459,9996	62,0686	-61,7985
0,0500	0,0089	0,0080	0,0575	0,0336	0,0575	1,5790E-08	459,9999	51,7292	-46,1718
0,0500	0,0123	0,0086	0,0594	0,0463	0,0575	6,9470E-08	459,9997	59,5366	-58,7178
0,0529	0,0135	0,0150	0,0575	0,0495	0,0575	1,7700E-10	460,0000	138,7419	-142,7982
0,0500	0,0124	0,0150	0,0575	0,0332	0,0602	8,2500E-09	459,9999	157,1381	-137,5363
0,0515	0,0085	0,0115	0,0600	0,0495	0,0575	2,6700E-08	459,9998	104,6296	-114,5598
0,0500	0,0135	0,0080	0,0585	0,0388	0,0605	1,0270E-09	460,0000	54,1784	-53,1830
0,0500	0,0135	0,0150	0,0590	0,0344	0,0575	8,0060E-10	460,0000	153,7921	-139,9569
0,0500	0,0135	0,0138	0,0589	0,0366	0,0605	4,0250E-08	460,0002	95,8099	-90,9182
0,0507	0,0126	0,0110	0,0598	0,0495	0,0583	1,2440E-08	460,0001	80,2778	-87,2428
0,0500	0,0135	0,0137	0,0597	0,0369	0,0605	8,6000E-06	460,0029	94,7552	-90,5809
0,0500	0,0091	0,0104	0,0586	0,0393	0,0588	9,0120E-08	459,9997	59,3792	-59,4628
0,0512	0,0129	0,0125	0,0585	0,0489	0,0605	4,1400E-05	459,9936	85,7916	-90,8128
0,0508	0,0132	0,0080	0,0575	0,0495	0,0602	4,4070E-09	460,0001	65,6618	-70,9121
0,0565	0,0085	0,0150	0,0600	0,0495	0,0579	5,0360E-13	460,0000	183,5767	-185,5888
0,0512	0,0128	0,0148	0,0589	0,0436	0,0600	3,2200E-05	459,9943	129,2981	-122,3815
0,0500	0,0108	0,0135	0,0581	0,0342	0,0588	1,6980E-09	460,0000	98,5109	-89,7684
0,0519	0,0085	0,0129	0,0600	0,0477	0,0575	5,1000E-06	459,9978	113,8691	-118,9955
0,0500	0,0110	0,0122	0,0585	0,0373	0,0575	1,8000E-06	460,0014	68,1386	-67,4219
0,0500	0,0135	0,0124	0,0584	0,0397	0,0590	2,6020E-08	459,9998	65,4227	-64,9118
0,0500	0,0135	0,0090	0,0581	0,0388	0,0605	1,7000E-06	460,0013	50,7667	-49,8439
0,0500	0,0135	0,0111	0,0575	0,0402	0,0575	2,7740E-10	460,0000	53,1825	-53,9969
0,0500	0,0135	0,0080	0,0587	0,0413	0,0605	1,0000E-07	459,9997	52,8186	-50,9788
0,0538	0,0093	0,0150	0,0600	0,0495	0,0604	4,4100E-05	459,9934	157,6371	-161,6378
0,0514	0,0112	0,0127	0,0600	0,0494	0,0590	3,0000E-07	459,9995	96,8230	-104,2523
0,0500	0,0135	0,0128	0,0600	0,0393	0,0605	3,2440E-09	460,0001	71,7827	-71,2108
0,0524	0,0135	0,0146	0,0584	0,0495	0,0582	1,0700E-05	459,9967	124,5934	-129,3263
0,0519	0,0134	0,0150	0,0584	0,0463	0,0575	3,0700E-05	460,0055	136,7083	-132,1644
0,0500	0,0089	0,0081	0,0575	0,0391	0,0599	8,4490E-08	459,9997	52,9870	-52,9495
0,0500	0,0085	0,0080	0,0575	0,0417	0,0605	1,3780E-15	460,0000	52,6663	-51,9878
0,0500	0,0107	0,0125	0,0595	0,0369	0,0583	7,0300E-05	459,9916	75,0488	-73,5716
0,0536	0,0103	0,0150	0,0575	0,0495	0,0605	7,1040E-09	459,9999	150,2210	-151,7309
0,0500	0,0124	0,0122	0,0600	0,0409	0,0577	1,3230E-08	459,9999	68,8419	-69,1138
0,0514	0,0134	0,0130	0,0598	0,0495	0,0605	4,9000E-06	459,9978	91,3790	-99,6710
0,0500	0,0135	0,0080	0,0600	0,0451	0,0600	1,0360E-10	460,0000	55,2826	-53,7996

Tabela 22: Resultados encontrados com $C_1 = 2,0$, $C_2 = 2,0$, $w = 0,7$, $nit = 500$ e $objetivo = 460Hz$ (continuação)

A	B	C	D	E	F	Função	$\omega[Hz]$	$\sigma_1[MPa]$	$\sigma_3[MPa]$
0,0500	0,0091	0,0098	0,0584	0,0379	0,0575	6,4670E-08	460,0003	55,5872	-55,8645
0,0504	0,0132	0,0080	0,0587	0,0488	0,0585	4,6700E-05	459,9932	64,0374	-66,2286
0,0500	0,0122	0,0134	0,0579	0,0356	0,0583	2,5000E-05	459,9950	91,0728	-85,9261
0,0500	0,0135	0,0086	0,0582	0,0384	0,0605	3,1000E-06	459,9982	51,9948	-50,9885
0,0500	0,0100	0,0080	0,0575	0,0386	0,0581	3,6530E-08	459,9998	54,2052	-54,6061
0,0527	0,0118	0,0146	0,0599	0,0495	0,0594	5,9000E-06	460,0024	129,2282	-134,1254
0,0536	0,0105	0,0149	0,0575	0,0495	0,0593	8,6750E-09	459,9999	146,1465	-147,7165
0,0500	0,0116	0,0150	0,0595	0,0332	0,0605	2,0680E-08	459,9999	157,6383	-139,5887
0,0514	0,0085	0,0135	0,0600	0,0418	0,0579	1,0000E-06	460,0010	115,9952	-114,3722
0,0505	0,0135	0,0150	0,0575	0,0371	0,0588	6,0000E-07	459,9992	151,3851	-140,2833
0,0500	0,0109	0,0080	0,0575	0,0405	0,0589	1,2710E-10	460,0000	53,8596	-53,9969
0,0538	0,0085	0,0150	0,0595	0,0483	0,0605	7,0000E-07	459,9991	164,3243	-164,2675
0,0500	0,0120	0,0150	0,0600	0,0334	0,0605	1,9720E-10	460,0000	156,9474	-139,5628
0,0500	0,0085	0,0098	0,0581	0,0413	0,0605	1,5610E-09	460,0000	59,7355	-59,1210
0,0537	0,0111	0,0150	0,0578	0,0495	0,0579	2,1320E-08	460,0001	148,3756	-148,6106
0,0500	0,0085	0,0150	0,0575	0,0306	0,0605	7,8050E-14	460,0000	175,4182	-141,0666
0,0500	0,0087	0,0150	0,0585	0,0302	0,0585	1,0090E-08	459,9999	174,8907	-140,0595
0,0501	0,0085	0,0080	0,0575	0,0340	0,0575	7,5320E-09	460,0001	52,4553	-47,5043
0,0500	0,0091	0,0108	0,0597	0,0371	0,0575	2,7120E-10	460,0000	60,1290	-60,2338
0,0528	0,0135	0,0150	0,0600	0,0495	0,0575	5,4490E-13	460,0000	136,8824	-143,1815
0,0500	0,0110	0,0144	0,0600	0,0336	0,0605	8,2350E-08	459,9997	129,3741	-116,4523
0,0500	0,0103	0,0081	0,0575	0,0391	0,0575	2,5410E-09	459,9999	54,3025	-54,7582
0,0500	0,0098	0,0101	0,0584	0,0412	0,0577	1,0000E-07	459,9997	59,2102	-58,6140
0,0500	0,0095	0,0093	0,0575	0,0393	0,0603	3,5810E-08	460,0002	53,5176	-53,9738
0,0500	0,0086	0,0084	0,0575	0,0397	0,0604	4,7000E-09	460,0001	52,8929	-52,6671
0,0500	0,0116	0,0080	0,0593	0,0464	0,0575	6,7420E-08	460,0003	57,5847	-56,9329
0,0500	0,0113	0,0080	0,0600	0,0466	0,0603	2,0000E-07	459,9995	59,4655	-60,3908
0,0500	0,0099	0,0080	0,0600	0,0470	0,0605	4,7200E-09	459,9999	61,3606	-62,9961
0,0500	0,0103	0,0083	0,0580	0,0444	0,0594	1,0000E-07	459,9997	57,0370	-55,2959
0,0500	0,0096	0,0150	0,0575	0,0314	0,0605	6,0000E-07	460,0008	169,6286	-141,1747
0,0537	0,0101	0,0148	0,0575	0,0494	0,0595	3,3500E-05	459,9942	148,2379	-149,7333
0,0500	0,0135	0,0150	0,0597	0,0344	0,0582	8,8000E-05	459,9906	153,0331	-139,0501
0,0500	0,0104	0,0080	0,0575	0,0399	0,0605	3,4610E-10	460,0000	53,6222	-54,5136
0,0504	0,0106	0,0150	0,0598	0,0339	0,0591	7,3000E-06	459,9973	165,2772	-148,0786
0,0500	0,0135	0,0150	0,0575	0,0339	0,0587	3,7580E-09	460,0001	154,7825	-137,3675
0,0500	0,0120	0,0101	0,0575	0,0404	0,0587	3,3930E-08	459,9998	52,3599	-52,6323
0,0506	0,0098	0,0080	0,0575	0,0495	0,0585	1,6000E-06	459,9987	69,7644	-75,4943
0,0500	0,0085	0,0093	0,0591	0,0373	0,0575	1,5000E-06	460,0012	55,5754	-55,9107
0,0519	0,0132	0,0150	0,0575	0,0463	0,0601	2,3180E-08	459,9998	133,4770	-128,3616
0,0500	0,0124	0,0080	0,0600	0,0458	0,0605	2,4880E-09	460,0000	57,3960	-57,4243
0,0500	0,0090	0,0085	0,0584	0,0449	0,0598	1,9940E-08	460,0001	60,9617	-59,2348
0,0500	0,0097	0,0150	0,0600	0,0317	0,0605	2,4090E-08	459,9998	167,7077	-141,9865
0,0508	0,0135	0,0103	0,0582	0,0495	0,0588	3,0000E-06	459,9983	76,1839	-81,7321
0,0500	0,0135	0,0103	0,0599	0,0449	0,0593	9,0000E-07	459,9990	58,8028	-57,9654
0,0500	0,0085	0,0080	0,0600	0,0459	0,0589	4,6820E-09	459,9999	62,1060	-62,9429
0,0524	0,0131	0,0143	0,0575	0,0495	0,0575	7,0000E-07	460,0008	119,5949	-125,6162
0,0500	0,0131	0,0120	0,0587	0,0409	0,0594	2,4000E-06	459,9984	61,3695	-61,0291
0,0513	0,0110	0,0144	0,0576	0,0418	0,0578	3,9820E-04	460,0200	128,2489	-121,3295
0,0518	0,0085	0,0123	0,0596	0,0495	0,0582	1,8300E-05	459,9957	110,8235	-120,0620
0,0500	0,0135	0,0147	0,0600	0,0348	0,0582	1,0240E-08	460,0001	140,3979	-128,9427