



UDESC

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA - PPGEM

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE SEMI-ANALÍTICA
COMPLEXA APLICADA A TRELIÇAS COM
NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E
COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO
ACOPLADO AO DANO**

GEOVANE AUGUSTO HAVEROTH

JOINVILLE, 2015

GEOVANE AUGUSTO HAVEROTH

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE SEMI-ANALÍTICA COMPLEXA
APLICADA A TRELIÇAS COM NÃO-LINEARIDADE
GEOMÉTRICA E COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO
ACOPLADO AO DANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador:

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas

**JOINVILLE, SC
2015**

H387a

Haveroth, Geovane Augusto

Análise de sensibilidade semi-analítica complexa aplicada a treliças com não-linearidade geométrica e comportamento elastoplástico acoplado ao dano / Geovane Augusto Haveroth. - 2015.

148 p. : il. ; 21cm

Orientador: Pablo Andrés Muñoz Rojas

Bibliografia: p. 121-129

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Mestrado em Engenharia Mecânica, Joinville, 2015.

1. Otimização estrutural. 2. Análise de sensibilidade. 3. Método de elementos finitos. 4. Análise não linear. I. Muñoz-Rojas, Pablo Andrés. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Mestrado em Engenharia Mecânica. III. Análise de sensibilidade semi-analítica complexa aplicada a treliças com não-linearidade geométrica e comportamento elastoplástico acoplado ao dano.

CDD: 620.1

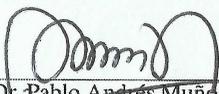
GEOVANE AUGUSTO HAVEROTH

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE SEMI-ANALÍTICA COMPLEXA
APLICADA A TRELIÇAS COM NÃO-LINEARIDADE
GEOMÉTRICA E COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO
ACOPLADO AO DANO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de concentração “Modelagem e Simulação Numérica”.

Banca Examinadora

Orientador:



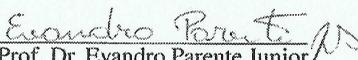
Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:



Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:



Prof. Dr. Evandro Parente Junior
Universidade Federal do Ceará

Joinville, 30/11/2015.

*Dedico este trabalho à minha esposa Thais,
Quem mais se não ela?*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por prover as competências necessárias para a realização desta dissertação;

Agradeço imensamente ao professor Pablo Andrés Muñoz Rojas por sua constante orientação, apoio, motivação e pela grande disposição nos momentos cruciais da elaboração deste estudo;

Agradeço aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pelos conhecimentos transmitidos, em especial ao Prof. Eduardo Lenz Cardoso pelo auxílio em diversas situações;

Agradeço à minha esposa Thais, por me compreender e me incentivar nas horas de desânimo, por me auxiliar no crescimento pessoal e intelectual sendo sempre meu chão firme;

Agradeço aos parceiros do LAMEC, pelas discussões em torno dos temas mais improváveis e polêmicos que se possa imaginar;

Agradeço à UDESC e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade de ingresso, pelo financiamento do autor e como consequência, deste estudo;

RESUMO

Neste trabalho realiza-se um abrangente estudo que visa a aplicação do método semi-analítico de análise de sensibilidade, utilizando variáveis complexas (SAC) em estruturas treliçadas, considerando o comportamento não linear geométrico e material. Tal pesquisa foca principalmente nos problemas dependentes da trajetória e no tratamento adequado para a atualização das variáveis internas, sendo este um aspecto não encontrado na revisão bibliográfica pelo autor e aplicável em problemas que envolvem plasticidade e dano. Estudos anteriores mostram que em problemas independentes da trajetória o método SAC apresenta grande eficiência e economia de armazenamento, uma vez que as operações são realizadas no nível do elemento. Verifica-se que este método quando aplicado em problemas dependentes da trajetória, apresenta a mesma eficiência detectada na contraparte independente com um custo de armazenamento um pouco mais elevado. Contudo, as operações ainda se mantêm no nível do elemento. Com a finalidade de realizar tal estudo, a formulação de elementos finitos e as diferentes metodologias para avaliar a sensibilidade de respostas estruturais, tanto para problemas dependentes quanto independentes da trajetória, são apresentadas em detalhes. Por fim, realiza-se um estudo comparativo entre os diferentes métodos de sensibilidade em problemas que sejam dominados por rotação de corpo rígido, que possuam descontinuidades nos coeficientes da sensibilidade e em estruturas celulares.

Palavras-chave: Otimização estrutural. Análise de sensibilidade. Método de elementos finitos. Análise não linear.

ABSTRACT

In this work, a comprehensive study is developed aiming to the application of the semianalytical sensitivity method using complex variables (SAC) at truss structures considering geometric and material nonlinear behavior. Special emphasis is given to path dependent problems and the appropriate treatment for internal variables updating, which is an aspect not found in the literature by the author and applicable to problems with plasticity and damage behavior. Previous studies show that in path independent problems the SAC method has great efficiency and storage economy, since the operations are performed at the element level. In this work it is verified that when applied to path dependent problems, the method has the same efficiency detected for the independent counterpart, but at the expense of a little higher storage cost, however, the operations remain at the element level. In order to perform the mentioned study, the finite element formulation and some sensitivity evaluation methodologies of structural responses are presented in detail, including the proposed by the author. Finally, a comparative study between the different sensitivity methods is made for problems dominated by rigid body rotation, problems involving discontinuities sensitivity coefficients and for cellular structures.

Key-words: Structural optimization. Sensitivity Analysis. Finite element method. Nonlinear Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Estrutura treliçada localizada na estação King’s Cross - Londres, Inglaterra.	33
Figura 2	– Elemento de barra parametrizado.	34
Figura 3	– Movimento discordante entre os átomos.	46
Figura 4	– EVR danificado.	46
Figura 5	– (a) Configuração danificada. (b) Configuração equivalente.	47
Figura 6	– Representação esquemática do algoritmo de integração no diagrama tensão-deformação considerando efeitos do dano.	50
Figura 7	– Estrutura celular modelada com elementos de barra. Produto final do processo de otimização onde empregou-se a sensibilidade analítica. Material impresso dos resultados apresentados por Guth (2012).	55
Figura 8	– (a) Aproximação da derivada via DFG. (b) Fonte de erro proveniente do procedimento iterativo.	60
Figura 9	– Fluxograma com detalhes da implementação do método DFGR.	61
Figura 10	– Fluxograma detalhando a implementação do método SA para a avaliação da sensibilidade do deslocamento. A particularização para variáveis reais ou complexas depende do procedimento para avaliar a variação do vetor força interna.	65
Figura 11	– Cálculo da perturbação da força interna associada ao e -ésimo elemento $\Delta \mathbf{f}_e^*$ utilizando variáveis reais via: (a) DFF e (b) DFC.	66
Figura 12	– Cálculo da perturbação da força interna associada ao e -ésimo elemento $\Delta \mathbf{f}_e^*$ utilizando variáveis complexas.	67
Figura 13	– Resposta estrutural com respeito ao parâmetro de projeto original e perturbado.	71
Figura 14	– Resposta estrutural com respeito ao parâmetro de projeto perturbado.	72
Figura 15	– Fluxograma com detalhes do cálculo da sensibilidade do deslocamento via método SA para problemas dependentes da trajetória. Detalhe para a etapa de atualizações das variáveis internas.	73
Figura 16	– Etapa adicional com uso de variáveis reais.	73
Figura 17	– Viga treliçada.	76
Figura 18	– Erro relativo para: (a) 5 células e (b) 60 células.	79

Figura 19 – Faixa de acurácia dos métodos SA.	79
Figura 20 – Número de células versus erro relativo. Valores obtidos considerando: (a) $\varphi = 10^{-16}$ e (b) $\varphi = 10^{-10}$	80
Figura 21 – Número de células versus erro relativo. (a) Resultados considerando $\varphi = 10^{-02}$. (b) Detalhe para os métodos SAR-DFC e SAC.	81
Figura 22 – Número de células versus a soma da sensibilidade S_L . Valores obtidos considerando: (a) 5 células e (b) 35 células.	82
Figura 23 – Erro relativo para: (a) 5 células e (b) 60 células.	83
Figura 24 – Faixa de acurácia dos métodos SA.	84
Figura 25 – Número de células versus erro relativo. Valores obtidos considerando: (a) $\varphi = 10^{-16}$ e (b) $\varphi = 10^{-10}$	84
Figura 26 – Número de células versus erro relativo. (a) Resultados considerando $\varphi = 10^{-02}$. (b) Detalhe para os métodos SAR-DFC e SAC.	85
Figura 27 – Região dominada por rotação rígida para uma viga modelada utilizando elementos de barra para 10, 30 e 60 células.	86
Figura 28 – Erros absolutos (a) e relativos (b) para nós sujeitos a muito, intermediária e pouca rotação rígida (nós 62, 38 e 14). Resultados utilizando o método SAR-DFC e $\varphi = 10^{-2}$	87
Figura 29 – Erros absolutos (a) e relativos (b) para nós sujeitos a muito, intermediária e pouca rotação rígida (nós 62, 38 e 14). Resultados utilizando o método SAC e $\varphi = 10^{-2}$	87
Figura 30 – Variação da sensibilidade do nó da extremidade livre mantendo tolerância fixa em $tol = 10^{-9}$ via: (a) SAC e (b) SAR-DFC.	88
Figura 31 – Variação da sensibilidade do nó da extremidade livre mantendo perturbação fixada em 10^{-7} via: (a) SAC e (b) SAR-DFC.	89
Figura 32 – (a) Barra sujeita a carregamento axial. (b) Relação material da respectiva barra.	90
Figura 33 – (a) Deslocamento da barra. (b) Sensibilidade do deslocamento com respeito a área da seção transversal.	92
Figura 34 – Detalhe do incremento da força aplicada.	94
Figura 35 – Procedimento idealizado para o cômputo da sensibilidade.	94
Figura 36 – (a) Coeficientes de sensibilidade analíticos. (b) Coeficientes de sensibilidade obtidos via método SAC desconsiderando a atualização das variáveis internas.	95
Figura 37 – (a) Sensibilidade do deslocamento S_{NL} . (b) Erro relativo considerando $\psi = 10^{-1}$	96

Figura 38 – (a) Sensibilidade do deslocamento S_{NL} . (b) Erro relativo considerando $\psi = 10^{-14}$	97
Figura 39 – Coeficientes de sensibilidade via: (a) Métodos SA. (b) Métodos DFG. Valores obtidos para $\psi = 10^{-7}$ e $\varphi = 10^{-4}$	97
Figura 40 – (a) Erro via método SAR-DFD para $\psi = 10^{-1}$. (b) Erro via métodos SAR-DFC e SAC para $\psi = 10^{-1}$ e $\varphi = 10^{-2}$	98
Figura 41 – Problema <i>snap-through</i>	98
Figura 42 – Método de solução por Newton-Raphson. (a) MCC e (b) MCD.	99
Figura 43 – (a) Estado da barra. (b) Posição no equilíbrio no caso elástico.	100
Figura 44 – Curvas de equilíbrio para diferentes valores de K	101
Figura 45 – Curvas de equilíbrio para diferentes valores de r	101
Figura 46 – (a) Coeficientes da sensibilidade obtidos ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação na coordenada. Caso elástico.	103
Figura 47 – (a) Coeficientes da sensibilidade obtidos ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação na coordenada. Caso elastoplástico.	104
Figura 48 – (a) Coeficientes da sensibilidade obtidos ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação na coordenada. Caso elastoplástico acoplado ao dano.	104
Figura 49 – Faixa de acurácia dos métodos SA. Perturbação nas coordenadas horizontais.	105
Figura 50 – (a) Coeficientes da sensibilidade ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação da área. Caso elástico.	105
Figura 51 – (a) Coeficientes da sensibilidade. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação da área. Caso elastoplástico.	106
Figura 52 – (a) Coeficientes da sensibilidade. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação da área. Caso elastoplástico acoplado ao dano.	106
Figura 53 – Faixa de acurácia dos métodos SA.	107
Figura 54 – Coeficientes de sensibilidade via método SA. Resultados para $\varphi = 10^{-15}$ considerando elastoplasticidade acoplada ao dano. Região não acurada para os métodos SAR.	108
Figura 55 – (a) Coeficientes da sensibilidade ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variável de dano r	108

Figura 56 – (a) Coeficientes da sensibilidade ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variável de dano s	109
Figura 57 – (a) Célula unitária composta por elementos de barra. (b) Material periódico obtido pela translação da célula unitária. (c) Material da Fig. 57b rotacionado em 45°	110
Figura 58 – (a) Carregamento e condições de contorno. (b) Configuração obtida após aplicação da força considerando formulação linear. Detalhe para os efeitos gerados em $\partial\Pi$ e $\partial\Gamma$	112
Figura 59 – (a) Sensibilidade do módulo volumétrico em relação à densidade relativa versus incremento. Valores de referência obtidos via método SAC considerando $\varphi = 10^{-300}$. (b) Módulo volumétrico versus incremento considerando diferentes formulações.	115
Figura 60 – (a) Soma das sensibilidades dos deslocamentos em relação ao volume das barras. (b) Norma ℓ_2 das sensibilidades dos deslocamentos. Valores obtidos via método SAC e $\varphi = 10^{-300}$	116
Figura 61 – Faixa de acurácia dos métodos.	116
Figura 62 – Decomposição polar.	134
Figura 63 – Vetor tensão e a normal.	137
Figura 64 – Características gerais de um sistema não linear.	139
Figura 65 – Comportamentos: (a) <i>snap-through</i> e (b) <i>snap-back</i>	140
Figura 66 – Método de controle por carregamento.	142
Figura 67 – Divergência no ponto limite.	143
Figura 68 – Método do Controle por Deslocamento.	144
Figura 69 – <i>Generalized Stiffness Parameter</i> utilizado em MCDG.	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Valores de referência obtidos via método SAC e fator de perturbação $\varphi = 10^{-30}$	77
Tabela 2	–	Valores de referência para o exemplo <i>snap-through</i>	102
Tabela 3	–	Áreas, conectividades e coordenadas nodais da célula unitária.	111
Tabela 4	–	Valores de referência para a sensibilidade.	114

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DFG	Diferenças Finitas Globais
DFGR	Diferenças Finitas Globais Real
DFGC	Diferenças Finitas Globais Complexo
DFF	Diferenças Finitas à Frente
DFA	Diferenças Finitas Atrás
DFC	Diferenças Finitas Centrais
EVR	Elemento de Volume Representativo
MEF	Método de Elementos Finitos
MCC	Método de NR baseado em Controle de Carga
MCD	Método de NR baseado em Controle de Deslocamento
MCDG	Método de Controle por Deslocamentos Generalizados
GDCM	<i>Generalized Displacement Control Method - MCDG</i>
MCCT	Materiais Constituídos de Células Treliçadas
NR	Newton-Raphson
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
PED	Princípio da Equivalência de Deformação
SA	Semi-Analítico
SAR	Semi-Analítico Real
SAC	Semi-Analítico Complexo

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS

A, A_o	Área da seção transversal da barra e área original;
\bar{A}, A_D	Área efetiva e danificada;
\mathbf{b}	Vetor de variáveis de projeto;
\mathbf{B}^*, \mathbf{B}	Matrizes das derivadas do vetor de interpolação;
\mathbf{c}	Vetor dos cossenos diretores;
\mathbf{C}	Tensor deformação de Cauchy-Green;
D, D_c	Variável dano e dano crítico;
$d\mathbf{X}, d\mathbf{x}$	Vetor elementar na configuração de referência e corrente;
\mathbf{E}	Tensor deformação de Green Lagrange;
E, \bar{E}	Módulo de elasticidade e módulo de elasticidade efetivo;
E_T	Módulo tangente;
\mathbf{F}	Gradiente de deformação;
\mathbf{f}	Vetor de força interna;
f	Função de escoamento;
\mathbf{G}, G	Restrição;
H, L_v	Parâmetros geométricos do problema da viga;
\mathbf{I}	Tensor identidade de segunda ordem;
\mathbf{J}	Jacobiano;
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana do sistema iterativo local do modelo material;
\mathbf{K}_T	Matriz de rigidez tangente global;
$\mathbf{k}_{T1}, \mathbf{k}_{T2}$	Primeiro e segundo termo de \mathbf{K}_T ;
K	Módulo de encruamento isotrópico;
L_o, L	Comprimento da barra na configuração original e corrente;
\mathbf{N}	Vetor das funções de interpolação linear;
\mathbf{n}	Vetor normal unitário;
\mathbf{p}	Vetor de força externa;
$\dot{\mathbf{p}}$	Deformação plástica equivalente;
P	Carregamento;
P_{max}	Carregamento associado ao u_{max} ;
\mathbf{R}	Tensor ortogonal de segunda ordem;

\mathbf{r}	Vetor resíduo;
$r_\sigma, r_\alpha, r_f, r_D$	Funções residuais;
r, s	Parâmetros materiais do modelo de dano de Lemaitre;
Ref	Valor de referência para o cômputo do erro;
\mathbf{S}	Tensor simétrico positivo de segunda ordem;
\mathbf{T}	Matriz de rotação para o elemento de barra;
\mathbf{t}	Tração;
t	Variável tempo;
tol	Tolerância do procedimento iterativo;
\mathbf{u}	Campo de deslocamento;
$\tilde{\mathbf{u}}$	Deslocamento não convergido;
u_y	Deslocamento referente ao ponto de escoamento;
u_{max}	Deslocamento máximo na região plástica;
\mathbf{U}, \mathbf{V}	Tensor alongamento simétrico de segunda ordem;
\mathbf{v}	Vetor associado ao sistema iterativo local do modelo material;
V_o	Volume original;
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Coordenada na configuração de referência e corrente;
W	Trabalho;
Y	Taxa de liberação de densidade de energia de deformação;
α	Variável interna de encruamento isotrópico;
β	Corpo;
γ	Multiplicador plástico;
ΔA	Elemento de área;
$\Delta \mathbf{q}$	Força interna resultante;
$\Delta \mathbf{s}_j$	Vetor perturbação das variáveis de projeto na j -componente;
ℓ_1	Norma L1;
ε^{pD}	Limiar de dano;
ε	Componente xx do tensor deformação de engenharia;
λ	Alongamento;
$\boldsymbol{\lambda}$	Multiplicador de Lagrange;
μ	Fator multiplicativo;
ξ	Coordenada paramétrica;
π	Plano;
ρ^*	Densidade relativa;

σ_y	Tensão de escoamento;
$\bar{\sigma}$	Tensão efetiva;
σ	Componente xx do tensor tensão de engenharia;
σ_∞	Valor crítico da tensão efetiva;
σ_u	Tensão limite em tração;
φ	Fator de perturbação;
χ	Vetor de variáveis internas;

OPERADORES E FUNÇÕES

δ	Operador virtual;
$\Delta(\cdot)$	Incremento de (\cdot) ;
$\frac{d^k}{dx^k}, \frac{\partial^k}{\partial x_k}$	Operadores diferenciais de ordem k ;
$\partial(\cdot)$	Fronteira de (\cdot) ;
$\text{Im}(z)$	Parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$;
$\text{sign}(a)$	Função sinal de $a \in \mathbb{R}$;
Λ	Operador montagem;
$\lim_{x \rightarrow a} F(x)$	Limite de $F(x)$ quando $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$;
$(\cdot)^T$	Transposto de (\cdot) ;
$(\cdot)^{-1}$	Inverso de (\cdot) ;
$ \cdot $	Valor absoluto de (\cdot) ;

SUBSCRITOS

j	j -ésima componente;
L	Linear;
ℓ	Referente ao sistema de coordenadas locais;
NL	Não linear;
n	Referente ao procedimento incremental;

SOBRESCRITOS

B	Referente à medida de deformação de Biot;
E	Referente à medida de deformação ou tensão de engenharia;
e	Referente à parcela elástica;

<i>ER</i>	Referente à medida de deformação ou tensão de engenharia rotacionado;
<i>GL</i>	Referente à medida de deformação Green-Lagrange;
<i>i</i>	Referente ao procedimento iterativo;
<i>L</i>	Referente à medida de deformação logarítmica;
<i>no</i>	Referente à avaliação do nó em questão;
<i>p</i>	Referente à parcela plástica;
<i>teste</i>	Referente ao estado teste elástico;
<i>ϑ</i>	Referente aos tensores de Hill;

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	JUSTIFICATIVA	30
1.2	OBJETIVO E METODOLOGIA	30
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	31
2	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA TRE- LIÇA	33
2.1	A PARAMETRIZAÇÃO DA BARRA	34
2.2	MEDIDAS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO	35
2.3	PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	36
2.4	FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	36
2.4.1	Vetor Força Interna	39
2.4.2	Matriz de Rigidez Tangente	40
2.5	FORMULAÇÃO LINEAR GEOMÉTRICA	45
2.6	FORMULAÇÃO NÃO LINEAR MATERIAL: MODELO ELASTOPLÁSTICO ACOPLADO AO DANO DÚCTIL	45
2.6.1	Critério de Ruptura e Limiar de Dano	49
2.6.2	Esquema de Solução do Problema Material	49
2.6.3	Módulo Tangente	53
3	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	55
3.1	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA PROBLEMAS INDEPENDENTES DA TRAJETÓRIA	55
3.1.1	Método Analítico	56
3.1.2	Método das Diferenças Finitas Globais	58
3.1.3	Método Semi-analítico	64
3.2	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA PROBLEMAS DEPENDENTES DA TRAJETÓRIA	68
3.2.1	Método SA Baseado em Variáveis Reais	69
3.2.2	Método SA Baseado em Variáveis Complexas	74
4	EXEMPLOS E APLICAÇÕES	75
4.1	VIGA MODELADA COM ELEMENTOS DE BARRA	75
4.1.1	Formulação Linear	78
4.1.2	Formulação Não Linear Geométrica	82
4.2	BARRA ELASTOPLÁSTICA	89
4.2.1	Aplicação dos Métodos Numéricos	93
4.3	SNAP THROUGH	98
4.3.1	Análise Inicial do Problema	99

4.3.2	Análise da Sensibilidade	100
4.4	MATERIAL CELULAR PERIÓDICO	109
4.4.1	Expressão da Sensibilidade do Módulo Volumétrico .	113
4.4.2	Análise da Sensibilidade	113
	CONCLUSÃO	117
	REFERÊNCIAS	121
	APÊNDICE A – ASPECTOS DA TEORIA DO CON- TÍNUO	131
A.1	DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO	131
A.1.1	Gradiente de Deformação	132
A.1.2	Decomposição Polar	133
A.2	MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO	133
A.2.1	Tensores de Hill	134
A.2.2	Tensor Deformação de Engenharia	136
A.3	MEDIDAS DE TENSÃO	136
A.3.1	Tensor Tensão de Cauchy	136
A.3.2	Tensor Tensão de Engenharia	138
A.4	PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	138
	APÊNDICE B – MÉTODOS DE SOLUÇÃO ITERA- TIVO INCREMENTAIS	139
B.1	FORMULAÇÃO ITERATIVA INCREMENTAL	140
B.2	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	141
B.2.1	Controle de Carga	141
B.2.2	Controle de Deslocamento	143
B.3	MÉTODO DO CONTROLE POR DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS (GDC)	144
	APÊNDICE C – PROPRIEDADES ELEMENTARES DOS NÚMEROS COMPLEXOS	147

1 INTRODUÇÃO

A melhoria ou otimização de uma estrutura requer a existência de alguma liberdade de mudança para um dado conjunto de parâmetros, geralmente denominados “variáveis de projeto” (HAFTKA; GÜRDAL, 1992). A avaliação das derivadas de respostas estruturais em relação aos parâmetros de projeto é conhecida na literatura como análise de sensibilidade e possui um papel de grande importância em estudos de análise de confiabilidade, modelagem de sistemas de controle, otimização estrutural, entre outros. O grande número de publicações com este tópico reflete o crescente interesse por este tipo de análise (BARTHELEMY; HAFTKA, 1990; VIDAL; HABER, 1993; BLETZINGER; FIRL; DAOUD, 2008; HABIBI; MOHARRAMI, 2010). Embora haja diversas metodologias para obter a sensibilidade, estas podem ser classificadas de acordo com a natureza de derivação envolvida. Esta classificação é composta por três grandes grupos, a saber: método das diferenças finitas globais (DFG), método semi-analítico (SA) e analítico (CHENG; GU; ZHOU, 1989). Entre estes grupos, o método SA é o mais atrativo por aliar a eficiência computacional do método analítico e a facilidade de implementação do método DFG (BLETZINGER; FIRL; DAOUD, 2008). Contudo, o problema de acurácia, devido ao emprego do tradicional método SA baseado em variáveis reais (SAR) em problemas dominados por rotação de corpo rígido, é reportado por uma série de autores (BARTHELEMY; CHON; HAFTKA, 1988; CHENG; GU; ZHOU, 1989; BARTHELEMY; HAFTKA, 1990; OLHOFF; RASMUSSEN; LUND, 1993). Devido a esta limitação, por cerca de 30 anos diversos métodos corretivos foram desenvolvidos tanto para problemas lineares quanto para geometricamente não lineares (HAFTKA; ADELMAN, 1989; CHENG; GU; WANG, 1991; MLEJNEK, 1992; PARENTE; VAZ, 2001).

Na análise estrutural não linear, duas situações diferentes podem ocorrer. A primeira diz respeito aos problemas em que a trajetória da deformação não afeta os pontos de equilíbrio. Estes problemas são denominados “independentes da trajetória” tendo, como exemplo, a hiperelasticidade. A segunda situação lida com problemas que dependem do histórico da deformação, conhecidos como “dependentes da trajetória”. Alguns exemplos são elastoplasticidade e plasticidade acoplada ao dano, os quais são passíveis de apresentar descontinuidade nos coeficientes da sensibilidade, como reportado por uma série de autores (TSAY; CARDOSO; ARORA, 1990b; BUGEDA; GIL, 1999; KATO, 2010). A causa desta descontinuidade se deve às comutações entre estados materiais (elástico ou plástico), ocorrendo para diferentes parâmetros no limite das transições (KLEIBER et al., 1997).

O método SA utilizando variáveis complexas (SAC) vem sendo empregado com sucesso na avaliação da sensibilidade de respostas estruturais, com relação aos parâmetros de forma em problemas independentes da trajetória e dominados por rotação de corpo rígido (STAHLSCHEMIDT, 2013; HAVEROTH; STAHLSCHEMIDT; MUÑOZ-ROJAS, 2015). Este método consiste no simples conceito de melhoria da acurácia dos métodos DFG e SA, reduzindo ou até mesmo eliminando os erros provenientes do arredondamento. Tratando-se de um método promissor, este conceito de melhoria é estendido neste trabalho para problemas dependentes da trajetória. Para que seja possível realizar esta transição, propõe-se uma etapa adicional responsável por atualizar as variáveis internas. Esta proposta é encontrada na literatura, porém não é detalhada (KLEIBER et al., 1997).

1.1 JUSTIFICATIVA

Em virtude do grande número de trabalhos reportando a patologia proveniente do cômputo da sensibilidade via SAR, quando aplicado a problemas dominados por rotação rígida, exploram-se as vantagens do método SAC, estendendo o estudo de Stahlschmidt (2013). Verifica-se que esta patologia pode ser reduzida ou até mesmo eliminada considerando fatores de perturbação suficientemente pequenos. Também, devido à escassez de trabalhos tratando das peculiaridades do método SA em problemas dependentes da trajetória, como o comportamento do mesmo em situações de descontinuidades dos coeficientes da sensibilidade. Além disso, salienta-se que nenhum trabalho envolvendo o método SAC para esta natureza de problemas é encontrado na literatura, fazendo deste uma proposta original.

1.2 OBJETIVO E METODOLOGIA

O principal objetivo deste estudo consiste em aplicar o método SAC para analisar a sensibilidade de problemas independentes e dependentes da trajetória, possibilitando levantar aspectos de implementação numérica.

Para atingir tal objetivo, os métodos de sensibilidade apresentados pelo autor são implementados no *software* ATENAS[©] (em FORTRAN) desenvolvido pelo professor Pablo Andrés Muñoz Rojas em conjunto com seus orientados. Para que haja uma comparação justa entre os diferentes procedimentos SA, ambos são implementados dentro do mesmo código com exatamente as mesmas operações algorítmicas. As comparações realizadas entre os métodos de sensibilidade são efetuadas por intermédio de problemas di-

tos “chave”, os quais envolvem rotação de corpo rígido, descontinuidade dos coeficientes de sensibilidade em situações com carga e descarga empregando diferentes formulações não lineares.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos complementares cuja disposição é descrita na sequência.

O Capítulo 2 apresenta de forma detalhada a formulação de elementos finitos para elementos de barra, incluindo não linearidade geométrica e material. A matriz de rigidez tangente é obtida via linearização exata do vetor de força interna, procedimento necessário para a correta avaliação da sensibilidade.

O Capítulo 3 descreve os principais métodos para avaliar a sensibilidade das respostas estruturais, bem como o procedimento de atualização das variáveis internas em problemas dependentes da trajetória. A implementação dos métodos no código de elementos finitos é descrita por intermédio de fluxogramas ao longo do texto.

O Capítulo 4 aborda uma série de exemplos que objetivam a aplicação e comparação dos diferentes métodos estudados. Estes exemplos são construídos de modo que possibilitem o surgimento das patologias e dificuldades descritas na literatura.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões relacionadas a este estudo e sugestões para futuros trabalhos.

2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA TRELIÇA

Segundo Bucalem e Bathe (2011), apud Muñoz-Rojas (2013), uma treliça pode ser definida como uma estrutura fina composta de membros prismáticos de seções transversais constantes, denominado barras. A barra¹ é um elemento estrutural simples e que pode ser utilizado na resolução de uma grande variedade de problemas de engenharia, motivo pela qual adota-se este elemento no presente estudo.

Figura 1 – Estrutura treliçada localizada na estação King's Cross - Londres, Inglaterra.



Fonte: Domínio público.

O objetivo deste capítulo consiste em apresentar o Método dos Elementos Finitos (MEF) para o elemento de barra considerando não linearidade geométrica e material (ou física). Inicialmente, a parametrização da barra é introduzida e as medidas de tensão e deformação de engenharia definidas no Apêndice A são particularizadas para o elemento em questão. Na sequência, obtém-se a expressão da matriz de rigidez tangente consistente via linearização exata do vetor de força interna. Por fim, a formulação não linear material é descrita através da plasticidade acoplada ao dano.

¹ Os elementos de barra diferenciam-se de eixos e vigas por estarem sujeitos apenas a carregamento de tração e compressão. Eixos e vigas são geometricamente iguais, mas sujeitos a torção e flexão, respectivamente.

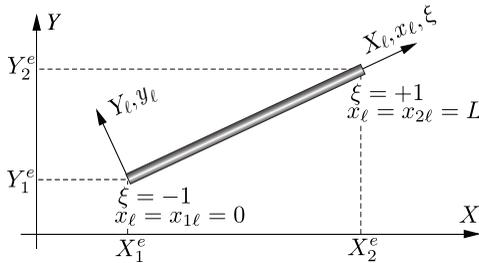
2.1 A PARAMETRIZAÇÃO DA BARRA

Considere o elemento de barra com 2 nós (um em cada extremidade) e os sistemas de referência global XY e corrotacional² local $x_\ell y_\ell$ associados, conforme ilustrado na Fig. 2. Note que X_ℓ e Y_ℓ referem-se às coordenadas iniciais no sistema corrotacional $x_\ell y_\ell$. A geometria e o deslocamento podem ser definidos através das funções de interpolação lineares

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{e} \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (2.1-2.2)$$

por meio da coordenada paramétrica $\xi \in [-1, 1]$ definida ao longo do elemento, onde $\xi = \pm 1$ relacionam-se aos extremos.

Figura 2 – Elemento de barra parametrizado.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Desta forma, a coordenada e o deslocamento de qualquer ponto do elemento no sistema de referência local, são descritos respectivamente por x_ℓ e u_ℓ como

$$[x_\ell \quad u_\ell] = [N_1(\xi) \quad 0 \quad 0 \quad N_2(\xi) \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 & u_1 \\ y_1 & v_1 \\ z_1 & w_1 \\ x_2 & u_2 \\ y_2 & v_2 \\ z_2 & w_2 \end{bmatrix}_\ell, \quad (2.3)$$

ou, semelhantemente, por

$$x_\ell = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{x}_\ell, \quad (2.4)$$

$$u_\ell = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{u}_\ell, \quad (2.5)$$

² Este sistema é chamado de corrotacional pois o mesmo rotaciona-se junto com o elemento (CRISFIELD, 1991).

onde $\mathbf{N}(\xi)$ é a matriz das funções de interpolação (matriz linha), enquanto \mathbf{x}_ℓ e \mathbf{u}_ℓ são os vetores de coordenadas e deslocamentos nodais, respectivamente.

2.2 MEDIDAS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Para o elemento de barra que sofre apenas deformação axial, os tensores de Hill, descritos no Apêndice A, são particularizados como

$$\varepsilon^\vartheta = \frac{1}{\vartheta} (\lambda^\vartheta - 1), \quad \vartheta > 0, \quad (2.6)$$

onde $\lambda = L/L_0$ refere-se ao alongamento relativo da barra, sendo L e L_0 os comprimentos da barra na configuração corrente e original, respectivamente. Assim, as medidas de deformação logarítmica, de Biot e de Green Lagrange são descritas, nesta ordem, por

$$\varepsilon^L = \ln(\lambda), \quad \varepsilon^B = \lambda - 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon^{GL} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1). \quad (2.7-2.9)$$

Também, entre todas as componentes do tensor deformação de engenharia, somente a primeira componente é não nula³

$$\boldsymbol{\varepsilon}^E = \begin{bmatrix} \varepsilon^E := \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

A medida escalar ε^E descrita no sistema corrotacional é conhecida como deformação de engenharia rotacionada, denotada por ε^{ER} (CRISFIELD, 1991). Neste contexto, verifica-se que esta medida é equivalente à deformação de Biot, ou seja, $\varepsilon^{ER} = \varepsilon^B$ (MUÑOZ-ROJAS, 2013).

De forma semelhante, de todas as componentes do tensor tensão somente a primeira é não nula

$$\boldsymbol{\sigma}^E = \begin{bmatrix} \sigma^E := \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

A medida escalar σ^E descrita no sistema corrotacional é conhecida como tensão de engenharia rotacionada e é denotada por σ^{ER} (CRISFIELD, 1991).

³ Ainda que se considere atualização da área da seção transversal pela imposição do coeficiente de Poisson, essas componentes não geram trabalho quando o estado de tensão é uniaxial.

Para dar prosseguimento ao estudo, adota-se o par energeticamente conjugado tensão e deformação de engenharia σ^{ER} e ε^{ER} . Deste ponto em diante, os sobrescritos $(\cdot)^{ER}$ serão omitidos visto que não há ambiguidade quanto às medidas utilizadas.

2.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O princípio dos trabalhos virtuais (PTV), com base nos tensores de tensão e deformação de engenharia rotacionados, é descrito a partir da Seção A.4 (Apêndice A) como

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \quad \Rightarrow \quad (\delta u_\ell)^T p_\ell &= (\delta u_\ell)^T f_\ell \\ &= \int_{V_0} (\delta \varepsilon)^T \sigma dV_0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde f_ℓ e p_ℓ referem-se à força interna e externa do sistema de referência local, respectivamente.

2.4 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

A formulação de elementos finitos para o elemento de barra considerando o comportamento não linear geométrico é apresentada com base nos desenvolvimentos baseado em Crisfield (1991), apresentada por Stahlschmidt (2013) e Muñoz-Rojas (2013). Esta formulação é construída propositalmente sem realizar as integrações analíticas usuais para elementos de barra, de forma a obter expressões análogas àquelas encontradas em elementos mais complexos. O objetivo é facilitar a extensão do procedimento de sensibilidade descrito para elementos finitos do contínuo 2D, 3D, cascas, placas, etc.

Na formulação não linear de elementos finitos, deseja-se que o equilíbrio do sistema possa ser satisfeito a cada n -ésimo incremento de carga ou deslocamento. Desta forma, procura-se minimizar o resíduo r_n composto pela diferença entre os vetores de força externa e interna

$$r_n(\mathbf{u}_n) = \mu_n \mathbf{p} - \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n) \approx \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

onde \mathbf{f}_n representa o vetor de força interna global e μ_n o parâmetro que controla a percentagem aplicada do vetor força externa total \mathbf{p} , conhecido como fator de carga (*load factor*). A ausência do símbolo ℓ significa que a expressão é avaliada no sistema de referência global XY .

Tomando a linearização exata da Eq. (2.13) utilizando a expansão em série de Taylor com origem em $\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}$, obtém-se

$$\mathbf{r}_n^i(\tilde{\mathbf{u}}_n^i) = \mathbf{r}_n^i(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1} + \Delta \mathbf{u}_n^i) \approx \mathbf{r}_n^{i-1}(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}) + \frac{d\mathbf{r}_n^{i-1}(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1})}{d\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}} \Delta \mathbf{u}_n^i \approx \mathbf{0} \quad (2.14)$$

onde i representa a i -ésima iteração. Suponha, sem perda de generalidade, a utilização do método de solução incremental iterativo de Newton-Raphson (NR). A partir de um deslocamento arbitrário prescrito $\tilde{\mathbf{u}}_n^0$ que em geral não satisfaz o equilíbrio, a Eq. (2.14) deve ser iterativamente avaliada e a escolha inicial $\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}$ deve ser atualizada conforme a expressão $\tilde{\mathbf{u}}_n^i = \tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1} + \Delta \mathbf{u}_n^i$ até que seja satisfeita uma determinada tolerância. Para obter $\Delta \mathbf{u}_n^i$ é necessário avaliar a derivada do resíduo com respeito a $\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}$, a qual é conhecida como matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{T,n}^{i-1}$

$$\mathbf{K}_{T,n}^{i-1} = -\frac{d\mathbf{r}_n^{i-1}(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1})}{d\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}} = -\frac{d[\mu_n \mathbf{p} - \mathbf{f}_n(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1})]}{d\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}} = \frac{d\mathbf{f}_n(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1})}{d\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}}, \quad (2.15)$$

onde a última igualdade só é correta se for assumido que o vetor de força externa não possui dependência do deslocamento⁴. O subscrito til é utilizado para indicar que \mathbf{u}_n não se encontra convergido.

A deformação de engenharia pode ser expressa via Eq. (2.8) como

$$\varepsilon = \lambda - 1 = \frac{dx_\ell}{dX_\ell} - 1 = \frac{dx_\ell - dX_\ell}{dX_\ell}, \quad (2.16)$$

sendo

$$dx_\ell = \frac{dx_\ell}{d\xi} d\xi = J(x_\ell) d\xi \quad \text{e} \quad dX_\ell = \frac{dX_\ell}{d\xi} d\xi = J(X_\ell) d\xi, \quad (2.17-2.18)$$

onde J é o Jacobiano da transformação. A partir das Eqs. (2.17) e (2.18) na Eq. (2.16), a expressão da deformação adquire o formato dependente dos Jacobianos

$$\varepsilon = \frac{J(x_\ell) d\xi - J(X_\ell) d\xi}{J(X_\ell) d\xi} = \frac{J(x_\ell) - J(X_\ell)}{J(X_\ell)}. \quad (2.19)$$

⁴ A dependência da força externa no deslocamento ocorre, por exemplo, quando são consideradas cargas seguidoras.

Uma vez definida a deformação, determina-se a deformação virtual

$$\begin{aligned}
 \delta\varepsilon &= \frac{d\varepsilon}{du_\ell} \delta u_\ell \\
 &= \frac{d}{du_\ell} \left(\frac{J(x_\ell) - J(X_\ell)}{J(X_\ell)} \right) \delta u_\ell \\
 &= \frac{1}{J(X_\ell)} \frac{dJ(x_\ell)}{du_\ell} \delta u_\ell,
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

e utilizando as funções de interpolação Eqs. (2.1) e (2.2), a Eq. (2.20) pode ser expressa como uma deformação virtual associada ao deslocamento virtual cinematicamente admissível

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{J(X_\ell)} \frac{dJ(x_\ell)}{du_\ell} \delta \mathbf{u}_\ell. \tag{2.21}$$

Neste instante, o Jacobiano é reescrito utilizando as identidades já obtidas das Eqs. (2.3), (2.17) e (2.18), notando que

$$J(x_\ell) = J(x_\ell(\mathbf{x}_\ell)) = J(\mathbf{x}_\ell) \quad \text{e} \quad J(X_\ell) = J(\mathbf{X}_\ell), \tag{2.22-2.23}$$

sendo assim

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}_\ell) &= \frac{dx_\ell}{d\xi} \\
 &= \frac{d\mathbf{N}(\xi)}{d\xi} \mathbf{x}_\ell \\
 &= \frac{d}{d\xi} [N_1(\xi) \quad 0 \quad 0 \quad N_2(\xi) \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}_\ell \\
 &= \frac{1}{2} [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T \\
 &= \frac{x_{2\ell} - x_{1\ell}}{2} \\
 &= \frac{L}{2},
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

e similarmente

$$J(\mathbf{X}_\ell) = \frac{L_0}{2}. \tag{2.25}$$

Utiliza-se também o fato de que

$$x_{i\ell} = X_{i\ell} + u_{i\ell}, \quad y_{i\ell} = Y_{i\ell} + v_{i\ell} \quad \text{e} \quad z_{i\ell} = Z_{i\ell} + w_{i\ell}, \quad i = 1, 2 \tag{2.26}$$

para substituir e derivar a Eq. (2.24)

$$\frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{d\mathbf{u}_\ell} = \frac{1}{2} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \frac{d}{d\mathbf{u}_\ell} \begin{bmatrix} X_1 + u_1 \\ Y_1 + v_1 \\ Z_1 + w_1 \\ X_2 + u_2 \\ Y_2 + v_2 \\ Z_2 + w_2 \end{bmatrix}_\ell, \quad (2.27)$$

onde

$$\frac{d}{d\mathbf{u}_\ell} \begin{bmatrix} X_1 + u_1 \\ Y_1 + v_1 \\ Z_1 + w_1 \\ X_2 + u_2 \\ Y_2 + v_2 \\ Z_2 + w_2 \end{bmatrix}_\ell = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

resultando em

$$\frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{d\mathbf{u}_\ell} = \frac{1}{2} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]. \quad (2.29)$$

Substituindo a igualdade acima na Eq. (2.21) obtém-se uma nova expressão da deformação virtual, agora não mais dependente da derivada do Jacobiano

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon &= \frac{1}{2J(\mathbf{X}_\ell)} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \delta\mathbf{u}_\ell \\ &= \mathbf{B}^*(\mathbf{X}_\ell) \delta\mathbf{u}_\ell, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{X}_\ell) = \frac{1}{2J(\mathbf{X}_\ell)} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]. \quad (2.31)$$

2.4.1 Vetor Força Interna

Para determinar o vetor força interna utiliza-se a expressão do trabalho virtual descrita na Seção 2.3. Substituindo as Eqs. (2.18) e (2.30) na Eq.

(2.12) obtém-se a igualdade

$$\begin{aligned}
 (\delta \mathbf{u}_\ell)^T \mathbf{f}_\ell &= \int_{V_0} (\delta \varepsilon)^T \sigma dV_0 \\
 &= \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}^*(\mathbf{X}_\ell) \delta \mathbf{u}_\ell]^T \sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi \\
 &= (\delta \mathbf{u}_\ell)^T \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^{*T}(\mathbf{X}_\ell) \sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi, \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

que implica no vetor força interna local

$$\mathbf{f}_\ell = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^{*T}(\mathbf{X}_\ell) \sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi. \quad (2.33)$$

Para obter o vetor força interna associado ao sistema de referência global de coordenadas \mathbf{f} , aplica-se uma matriz de transformação \mathbf{T} no vetor força interna local \mathbf{f}_ℓ , ou seja

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f} &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_\ell \\
 &= \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1} \\ 0 \\ 0 \\ f_{x2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\ell, \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

onde c_i^j representa o cosseno diretor que relaciona o eixo i do sistema local de referência com o eixo j do sistema global de referência, avaliado na configuração deformada do elemento.

2.4.2 Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente global \mathbf{K}_T é obtida aplicando o operador montagem Λ , que mapeia os graus de liberdade locais para os globais e soma a contribuição da rigidez de cada elemento e para toda a estrutura (HUGHES; HINTON, 1986),

$$\mathbf{K}_T = \bigwedge_{e=1}^{nel} \mathbf{k}_T^e, \quad (2.35)$$

onde nel corresponde ao número total de elementos que constituem a treliça em questão. As matrizes de rigidez dos elementos, por sua vez, são obtidas

derivando o resíduo em relação ao vetor deslocamento no sistema de referência global, resultando em

$$\mathbf{k}_T^e = -\frac{d\mathbf{r}^e}{d\mathbf{u}^e} = \frac{d\mathbf{f}^e}{d\mathbf{u}^e} = \frac{d}{d\mathbf{u}^e} (\mathbf{T}^T \mathbf{f}_\ell^e) = \underbrace{\frac{d\mathbf{T}^T}{d\mathbf{u}^e} \mathbf{f}_\ell^e}_{\mathbf{k}_{T1}^e} + \underbrace{\mathbf{T}^T \frac{d\mathbf{f}_\ell^e}{d\mathbf{u}^e}}_{\mathbf{k}_{T2}^e}, \quad (2.36)$$

assumindo que a força externa não possui dependência do campo de deslocamentos. Portanto, a partir das Eqs. (2.35) e (2.36), a matriz de rigidez global é descrita por

$$\mathbf{K}_T = \bigwedge_{e=1}^{nel} (\mathbf{k}_{T1}^e + \mathbf{k}_{T2}^e), \quad (2.37)$$

sendo os termos \mathbf{k}_{T1}^e e \mathbf{k}_{T2}^e obtidos⁵ nas próximas seções. Para propósitos de simplificação de notação, o sobrescrito e será omitido na sequência.

2.4.2.1 Termo \mathbf{k}_{T1}

Para obter a expressão do primeiro termo da matriz de rigidez \mathbf{k}_{T1} , considere o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{T1} &= \frac{d\mathbf{T}^T}{d\mathbf{u}} \mathbf{f}_\ell \\ &= \frac{d\mathbf{T}^T}{d\mathbf{u}} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^{*T}(\mathbf{X}_\ell) \sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi \\ &= \begin{bmatrix} \frac{dc_1^1}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_2^1}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_3^1}{d\mathbf{u}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dc_1^2}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_2^2}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_3^2}{d\mathbf{u}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dc_1^3}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_2^3}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_3^3}{d\mathbf{u}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dc_1^1}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_2^1}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_3^1}{d\mathbf{u}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dc_1^2}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_2^2}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_3^2}{d\mathbf{u}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dc_1^3}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_2^3}{d\mathbf{u}} & \frac{dc_3^3}{d\mathbf{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0}{2J(\mathbf{X}_\ell)} d\xi \\ &= \left[-\frac{dc_1^1}{d\mathbf{u}} \quad -\frac{dc_1^2}{d\mathbf{u}} \quad -\frac{dc_1^3}{d\mathbf{u}} \quad \frac{dc_1^1}{d\mathbf{u}} \quad \frac{dc_2^1}{d\mathbf{u}} \quad \frac{dc_3^1}{d\mathbf{u}} \right]^T \int_{-1}^{+1} \frac{\sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0}{2J(\mathbf{X}_\ell)} d\xi, \end{aligned} \quad (2.38)$$

⁵ Estas expressões estão particularizadas para o par energeticamente conjugado adotado.

e manipulando algebricamente, tem-se

$$\mathbf{k}_{T1} = \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_\ell) \frac{d\mathbf{c}_1}{du} \int_{-1}^{+1} \sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi, \quad (2.39)$$

onde

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell) = \frac{1}{2J(\mathbf{X}_\ell)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{c}_1}{du} = \begin{bmatrix} \frac{dc_1^1}{du} \\ \frac{du_2}{dc_1^1} \\ \frac{du_3}{dc_1^1} \\ \frac{du}{du} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

sendo \mathbf{c}_1 o vetor dos cossenos diretores entre o eixo x do sistema de referência local e os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, o qual pode ser expresso por

$$\mathbf{c}_1 = \frac{(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)}{2J(\mathbf{x}_\ell)} = \frac{\mathbf{X}_{21} + \mathbf{u}_{21}}{2J(\mathbf{x}_\ell)} = \frac{\mathbf{x}_{21}}{2J(\mathbf{x}_\ell)}, \quad (2.41)$$

com todos os vetores definidos com respeito ao sistema de referência global, com exceção de \mathbf{x}_ℓ . Derivando \mathbf{c}_1 em relação a \mathbf{u} tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{c}_1}{du} &= \frac{d}{du} \left(\frac{\mathbf{X}_{21} + \mathbf{u}_{21}}{2J(\mathbf{x}_\ell)} \right) \\ &= -\frac{\mathbf{X}_{21}}{2J^2(\mathbf{x}_\ell)} \frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{du} + \frac{1}{2J(\mathbf{x}_\ell)} \frac{d\mathbf{u}_{21}}{du} - \frac{\mathbf{u}_{21}}{2J^2(\mathbf{x}_\ell)} \frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{du} \\ &= \frac{1}{2J(\mathbf{x}_\ell)} \frac{d\mathbf{u}_{21}}{du} - \frac{1}{J(\mathbf{x}_\ell)} \left(\frac{\mathbf{X}_{21} + \mathbf{u}_{21}}{2J(\mathbf{x}_\ell)} \right) \frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{du} \\ &= \frac{1}{2J(\mathbf{x}_\ell)} \frac{d\mathbf{u}_{21}}{du} - \frac{\mathbf{c}_1}{J(\mathbf{x}_\ell)} \frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{du}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

e com auxílio da Eq. (2.29), escreve-se

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{d\mathbf{u}} &= \frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{d\mathbf{u}_\ell} \frac{d\mathbf{u}_\ell}{d\mathbf{u}} \\
 &= \frac{1}{2} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \mathbf{T} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} [-c_1^1 \quad -c_1^2 \quad -c_1^3 \quad c_1^1 \quad c_1^2 \quad c_1^3], \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

e utilizando-se da Eq. (2.41), a Eq. (2.43) resulta em

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ(\mathbf{x}_\ell)}{d\mathbf{u}} &= \frac{1}{4J(\mathbf{x}_\ell)} [-x_{21} \quad -y_{21} \quad -z_{21} \quad x_{21} \quad y_{21} \quad z_{21}] \\
 &= \frac{1}{J(\mathbf{x}_\ell)} J^2(\mathbf{X}_\ell) \mathbf{x}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_\ell) \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell), \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

com

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T. \tag{2.45}$$

Também, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{u}_{21}}{d\mathbf{u}} &= \frac{d}{d\mathbf{u}} [(u_2 - u_1) \quad (v_2 - v_1) \quad (w_2 - w_1)]^T \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 2J(\mathbf{X}_\ell) \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell), \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

sendo

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2]^T, \tag{2.47}$$

e a seguinte identidade

$$\mathbf{c}_1 = \frac{J(\mathbf{X}_\ell)}{J(\mathbf{x}_\ell)} \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell) \mathbf{x} = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell) \mathbf{x}. \tag{2.48}$$

Substituindo as Eqs. (2.44), (2.46) e (2.48) na Eq. (2.42) obtém-se

$$\frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{u}} = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{I} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell) \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_\ell) \right] \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell) \quad (2.49)$$

Agora, substituindo Eq. (2.49) na Eq. (2.39) finalmente chega-se numa expressão final para \mathbf{k}_{T1} dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{T1} &= \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_\ell) \frac{d\mathbf{c}_1}{d\mathbf{u}} \int_{-1}^{+1} \sigma J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_\ell) \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell) J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde,

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\lambda} \left[\mathbf{I} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \mathbf{B}(\mathbf{X}_\ell) \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_\ell) \right]. \quad (2.51)$$

2.4.2.2 Termo \mathbf{k}_{T2}

Para obter o segundo termo da rigidez tangente \mathbf{k}_{T2} , considere o desenvolvimento

$$\mathbf{k}_{T2} = \mathbf{T}^T \frac{d\mathbf{f}_\ell}{d\mathbf{u}} = \mathbf{T}^T \frac{d\mathbf{f}_\ell}{d\mathbf{u}_\ell} \frac{d\mathbf{u}_\ell}{d\mathbf{u}} = \mathbf{T}^T \frac{d\mathbf{f}_\ell}{d\mathbf{u}_\ell} \mathbf{T}, \quad (2.52)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}_\ell}{d\mathbf{u}_\ell} &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^{*T}(\mathbf{X}_\ell) \frac{d\sigma}{d\mathbf{u}_\ell} J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi \\ &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^{*T}(\mathbf{X}_\ell) \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{u}_\ell} J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi, \end{aligned} \quad (2.53)$$

é a parcela referente a derivada do vetor força interna local com respeito ao deslocamento nodal local, que pode ser reescrita com auxílio da Eq. (2.30) da forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}_\ell}{d\mathbf{u}_\ell} &= \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^{*T}(\mathbf{X}_\ell) \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \mathbf{B}^*(\mathbf{X}_\ell) J(\mathbf{X}_\ell) A_0 d\xi \\ &= \mathbf{k}'_{T2}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Portanto,

$$\mathbf{k}_{T2} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}'_{T2} \mathbf{T} \quad (2.55)$$

representa a expressão final da segunda parcela da matriz de rigidez global.

2.5 FORMULAÇÃO LINEAR GEOMÉTRICA

A formulação linear geométrica pode ser vista como uma particularização da formulação não linear apresentada na Seção 2.4. Neste caso, o termo \mathbf{k}_{T1} se anula e a equação linear Eq. (2.14) torna-se exata. Desta forma, toda a carga pode ser aplicada em um único incremento, i.e., $\mu_1 = 1$, $\tilde{\mathbf{u}}_1^0 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{r}_1^0(\tilde{\mathbf{u}}_1^0) = \mathbf{0}$, obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^1(\mathbf{u}_1^1 = \mathbf{u}) &= \mathbf{p} - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}_1^0) \\ &= \mathbf{r}_1^0(\tilde{\mathbf{u}}_1^0) + \frac{d\mathbf{r}_1^0(\tilde{\mathbf{u}}_1^0)}{d\tilde{\mathbf{u}}_1^0} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.56)$$

reescrito da forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_T \mathbf{u}, \quad (2.57)$$

onde

$$\mathbf{K}_T = \bigwedge_{e=1}^{nel} \mathbf{k}_{T2}^e \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \bigwedge_{e=1}^{nel} \mathbf{f}^e. \quad (2.58)$$

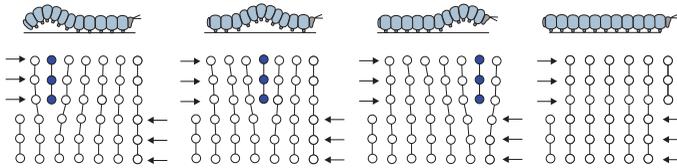
2.6 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR MATERIAL: MODELO ELASTO-PLÁSTICO ACOPLADO AO DANO DÚCTIL

O modelamento numérico apresentado até o momento possui como característica marcante o tratamento desacoplado das descrições cinemática e material. O comportamento não linear material é inserido na formulação por meio da relação entre tensão e deformação, que já não é mais linear. A partir do procedimento para o cálculo de \mathbf{k}_{T2} na Eq. (2.53), somente o termo $d\sigma/d\varepsilon$ conhecido por módulo tangente deve ser modificado.

O dano é um processo físico progressivo responsável pela degradação dos materiais, sendo ocasionado por diferentes fatores que dependem do tipo de carregamento, da temperatura, da natureza do material, entre outros.

O processo de dano tem origem quando ocorre a separação dos átomos na micro-escala (associado às deformações irreversíveis ou plásticas), pois os deslocamentos relativos entre os átomos, os desprendimentos e formações de discordâncias geram micro-defeitos (ver Fig. 3).

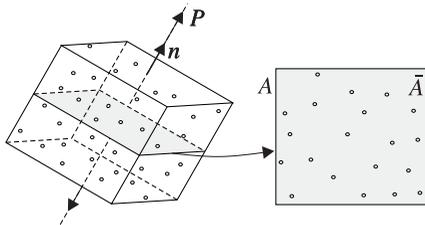
Figura 3 – Movimento discordante entre os átomos.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Palmgreen (1924), Miner (1945) e Robinson (1952), são os pioneiros em relacionar uma variável à deterioração progressiva antes da falha, entretanto o ponto de partida da mecânica do dano contínuo se deve a Kachanov (1958), que desenvolveu um modelo de dano para materiais carregados uniaxialmente com a introdução de uma variável escalar. Uma década após, Rabotnov (1969) introduz o conceito de tensão efetiva. Nos anos 70 e 80 houve o desenvolvimento da mecânica do dano com uma base matemática mais rigorosa, utilizando os conceitos físicos da termodinâmica e micromecânica (LEMAITRE, 1996).

Figura 4 – EVR danificado.



Fonte: Produção do autor, 2015.

A mecânica do contínuo trata com quantidades definidas matematicamente como pontos materiais, que do ponto de vista físico representam um elemento de volume representativo (EVR). A Fig. 4 representa um EVR danificado orientado pelo vetor normal \mathbf{n} , submetido a um carregamento \mathbf{P} .

A variável de dano pode ser definida fisicamente como sendo a densidade de trincas e vazios sobre a superfície do plano com normal \mathbf{n} (onde a densidade é máxima) de seção transversal A que corta o EVR (LEMAITRE;

DESMORAT, 2005). Sob a hipótese de isotropia, a variável dano torna-se independente da direção, podendo ser definida pelo escalar

$$D = \frac{A - \bar{A}}{A} = \frac{A_D}{A}, \quad (2.59)$$

onde A_D corresponde à área danificada e \bar{A} a área que efetivamente resiste ao carregamento. Esta variável limita-se aos valores

$$0 \leq D \leq 1 \quad D \in \mathbb{R}, \quad (2.60)$$

onde $D = 0$ corresponde ao material sem dano, $D = 1$ corresponde ao valor crítico implicando na ruptura do material e $0 < D < 1$ um estado danificado.

De acordo com Lemaitre (1996), qualquer equação constitutiva para um material danificado pode ser derivada da mesma maneira que para um material virgem, exceto que a tensão usual σ é substituída pela tensão efetiva $\bar{\sigma}$. Com base no plano do EVR, a tensão efetiva é definida a partir da Eq. (2.59) como

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{\bar{A}} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (2.61)$$

A Fig. 5 ilustra uma barra cilíndrica sujeita à tração uniaxial na configuração danificada (área A e tensão σ) e em seu estado equivalente obtido com a remoção dos defeitos (área \bar{A} e tensão $\bar{\sigma}$).

Figura 5 – (a) Configuração danificada. (b) Configuração equivalente.



Fonte: Produção do autor, 2015, baseado em Freitas (2010, p.55).

Para modelar o comportamento material considerando a plasticidade acoplada ao dano, o princípio da equivalência de deformação (PED) é um dos mais aplicados. Este princípio determina que: “[...] o estado de deformação do meio danificado é o mesmo da parte íntegra do meio danificado, cada qual

com seu módulo de elasticidade” (FREITAS, 2010). Assim, baseado no PED obtém-se a relação

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{\bar{E}} = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1-D)}, \quad (2.62)$$

sendo

$$\bar{E} = E(1-D) \quad \text{e} \quad D = \frac{E - \bar{E}}{E} = 1 - \frac{\bar{E}}{E}. \quad (2.63-2.64)$$

A partir da teoria clássica da plasticidade descrita por Simo e Hughes (1998), a função de escoamento pode ser expressa considerando o conceito de tensão efetiva como

$$f(\sigma, \alpha, D) = \frac{|\sigma|}{1-D} - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0, \quad (2.65)$$

sendo α a variável escalar conhecida como deformação plástica acumulada, utilizada como um parâmetro associado ao encruamento isotrópico, K o módulo de encruamento isotrópico e σ_y a tensão de escoamento inicial. A evolução da deformação plástica e a lei de encruamento são dadas respectivamente por

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \gamma \frac{\text{sign}(\sigma)}{1-D} \quad \text{e} \quad \dot{\alpha} = \gamma, \quad (2.66-2.67)$$

onde γ é o multiplicador plástico e sign refere-se a função sinal que retorna ± 1 . A Eq. (2.66) evidencia o acoplamento do dano à plasticidade. O módulo da tensão, expressa na Eq. (2.65), baseia-se na hipótese de que o comportamento do material em regime de compressão e tração são idênticos.

A lei de evolução do dano de Lemaitre, Lemaitre e Chaboche (1990), particularizada para o caso unidimensional por Esmacili e Öchsner (2011), é descrita como

$$\dot{D} = \dot{p} \left(\frac{-Y}{r} \right)^s, \quad (2.68)$$

sendo \dot{D} a taxa de evolução do dano, r e s os parâmetros materiais obtidos mediante ensaios experimentais, Y a taxa de liberação da densidade de energia de deformação pelo dano e \dot{p} a deformação plástica equivalente, definidas respectivamente por

$$Y = -\frac{\sigma^2}{2E(1-D)^2} \quad \text{e} \quad \dot{p} = \sqrt{\dot{\varepsilon}^p \varepsilon^p} = \frac{\gamma}{1-D}. \quad (2.69-2.70)$$

Este modelo apresentado é não linear, uma vez que a variação do dano no tempo é dependente além de outros fatores, do próprio dano, uma vez que $\dot{Y} = Y(D)$. Para recuperar a formulação puramente elasto-plástica assume-se $r \rightarrow \infty$, resultando em $\dot{D} = 0$ pela Eq. (2.68).

2.6.1 Critério de Ruptura e Limiar de Dano

Por meio do EVR, verifica-se que a ruptura em nível da mesoescala ocorre quando as trincas e vazios ocupam toda a região, ou seja, quando $D = 1$. Em casos reais, esta ruptura é causada por um processo de instabilidade que induz a decoesão dos átomos na área remanescente (LEMAITRE, 1996). Isto corresponde ao valor de dano crítico D_c , sendo este um parâmetro a ser determinado experimentalmente. A decoesão final dos átomos é caracterizado pelo valor crítico da tensão efetiva σ_∞ , definida por

$$\sigma_\infty = \frac{\sigma}{1 - D_c}, \quad (2.71)$$

sendo a máxima tensão que poderia ser aplicada no material. Este valor pode ser aproximado pela tensão limite σ_u de tração. O valor crítico de dano, ocorrendo para a tensão unidimensional σ , é descrito como

$$D_c \approx 1 - \frac{\sigma}{\sigma_u}, \quad (2.72)$$

que assume $D_c \approx 0$ para dano frágil puro e $D_c \approx 1$ para dano dúctil puro, porém usualmente D_c varia entre 0.2 e 0.5.

Além disso, o surgimento de trincas e vazios têm início somente quando a deformação plástica atinge uma certa quantidade ε^{pD} , denominada limiar de dano, i.e.,

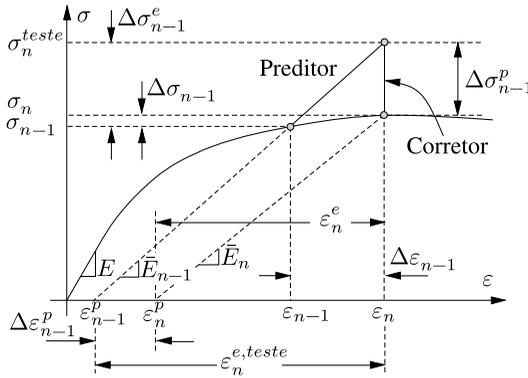
$$\dot{D} = 0 \quad \text{se} \quad \varepsilon^p < \varepsilon^{pD}. \quad (2.73)$$

2.6.2 Esquema de Solução do Problema Material

Nesta seção, as equações constitutivas do contínuo são substituídas por seus homólogos incrementais. Suponha que no $(n - 1)$ -ésimo passo incremental o estado do corpo esteja definido. Para um dado incremento de deformação deseja-se atualizar as informações no passo corrente n . O esquema numérico adotado baseia-se na estratégia de predição linear⁶ e correção não linear esquematicamente representado na Fig. 6.

⁶ A predição linear é realizada considerando um passo (teste) puramente elástico, que não necessita corresponder ao estado atual a não ser que o estado atual seja elástico.

Figura 6 – Representação esquemática do algoritmo de integração no diagrama tensão-deformação considerando efeitos do dano.



Fonte: Produção do autor, 2015, baseado em Esmaili e Öchsner (2011, p.446).

De acordo com a Fig. 6, a deformação elástica teste pode ser obtida através das seguintes expressões

$$\varepsilon_n^{e, teste} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-1}^p + \Delta\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}^p, \quad (2.74)$$

$$\varepsilon_n^{e, teste} = \varepsilon_n - \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon_{n-1}^p = \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon_{n-1}^p. \quad (2.75)$$

Com auxílio da lei de Hooke e do PED, a deformação elástica no estado n pode ser descrita como

$$\varepsilon_n^e = \frac{\sigma_n}{(1 - D_n)E}, \quad (2.76)$$

que em conjunto com a Eq. (2.75), retorna a expressão para a tensão

$$\sigma_n = (1 - D_n)E\varepsilon_n^{e, teste} - (1 - D_n)E\Delta\varepsilon_{n-1}^p, \quad (2.77)$$

onde $\varepsilon_n^{e, teste}$ é calculado com auxílio da Eq. (2.74), enquanto que $\Delta\varepsilon_{n-1}^p$ pode ser substituída pela relação

$$\Delta\varepsilon_{n-1}^p = \Delta\gamma_n \frac{\text{sign}(\sigma_n^{teste})}{(1 - D_n)}, \quad (2.78)$$

obtendo

$$\sigma_n = (1 - D_n)E\varepsilon_n^{e, teste} - \Delta\gamma_n E \text{sign}(\sigma_n^{teste}). \quad (2.79)$$

A fase de predição consiste em avaliar a tensão teste, descrita por

$$\sigma_n^{teste} = \bar{E}_{n-1}\varepsilon_n^{e, teste} = E(1 - D_{n-1})\varepsilon_n^{e, teste}. \quad (2.80)$$

Com a finalidade de verificar se o estado teste da tensão é coerente com a suposição de um estado puramente elástico, utiliza-se a condição

$$f(\sigma_n^{teste}, \alpha_{n-1}, D_{n-1}) = \frac{|\sigma_n^{teste}|}{(1 - D_{n-1})} - (\sigma_y + K\alpha_{n-1}). \quad (2.81)$$

Se $f \leq 0$, então o passo atual é elástico e a hipótese de que as variáveis α_{n-1} , D_{n-1} e ε_{n-1}^p estão congeladas está correta ($\alpha_n = \alpha_{n-1}$, $D_n = D_{n-1}$ e $\varepsilon_n^p = \varepsilon_{n-1}^p$). Caso contrário se $f > 0$, a fase de correção deve ser realizada. De modo geral, no final do estado n as seguintes quatro Eqs. (2.82-2.85) devem ser totalmente satisfeitas

$$\sigma_n = (1 - D_n)E\varepsilon_n^{e, teste} - \Delta\gamma_n \text{Esigin}(\sigma_n^{teste}), \quad (2.82)$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \Delta\gamma, \quad (2.83)$$

$$f_n = \frac{|\sigma_n|}{1 - D_n} - (\sigma_y + K\alpha_{n-1}), \quad (2.84)$$

$$D_n = D_{n-1} + \frac{\Delta\gamma_n}{1 - D_n} \left(\frac{-Y(\sigma_n, D_n)}{r} \right)^s, \quad (2.85)$$

Fora deste estado, obtém-se o resíduo r de cada uma destas equações

$$r_\sigma(\sigma, \Delta\lambda, D) = \frac{\sigma}{E} - (1 - D)\varepsilon_n^{e, teste} + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma), \quad (2.86)$$

$$r_\alpha(\alpha, \Delta\lambda) = -\alpha + \alpha_{n-1} + \Delta\gamma, \quad (2.87)$$

$$r_f(\sigma, \alpha, D) = \frac{|\sigma|}{1 - D} - (\sigma_y + K\alpha), \quad (2.88)$$

$$r_D(\sigma, \Delta\lambda, D) = -D + D_{n-1} + \frac{\Delta\gamma}{1 - D} \left(\frac{-Y(\sigma, D)}{r} \right)^s. \quad (2.89)$$

O estado final refere-se à raiz da aplicação $\mathbf{m} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\mathbf{m}(\mathbf{v}) = [r_\sigma(\mathbf{v}) \quad r_\alpha(\mathbf{v}) \quad r_f(\mathbf{v}) \quad r_D(\mathbf{v})]^T, \quad (2.90)$$

com

$$\mathbf{v} = [\sigma \quad \alpha \quad \Delta\gamma \quad D]^T. \quad (2.91)$$

Esta raiz é obtida utilizando um método de solução de equações não lineares. No presente trabalho, emprega-se o método de NR (iteração i)

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{v}^{i-1} - [\mathbf{J}(\mathbf{v}^{i-1})]^{-1} \mathbf{m}(\mathbf{v}^{i-1}), \quad (2.92)$$

onde

$$\mathbf{v}^0 = \begin{bmatrix} \sigma^0 \\ \alpha^0 \\ \Delta\gamma^0 \\ D^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_n^{teste} \\ \alpha_{n-1} \\ 0 \\ D_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

pode ser utilizado como valor inicial para o argumento. A matriz Jacobiana das funções residuais é obtida a partir das derivadas parciais de primeira ordem das Eqs. (2.86 - 2.89). Para este problema específico, é descrita como

$$\mathbf{J}(\sigma, \alpha, \Delta\gamma, D) = \begin{bmatrix} E^{-1} & 0 & sign(\sigma) & \varepsilon_n^{e, teste} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{sign(\sigma)}{1-D} & -K & 0 & \frac{|\sigma|}{(1-D)^2} \\ J_{41} & 0 & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix}, \quad (2.94)$$

onde

$$J_{41} = \frac{2sign(\sigma) s\Delta\gamma|\sigma|^{2s-1}}{(1-D)^{2s+1}(2Er)^s}, \quad (2.95)$$

$$J_{43} = \frac{1}{(1-D)^{2s+1}} \left(\frac{\sigma^2}{2Er} \right)^s, \quad (2.96)$$

$$J_{44} = -1 + \frac{(2s+1)\Delta\gamma}{(1-D)^{2(s+1)}} \left(\frac{\sigma^2}{2Er} \right)^s. \quad (2.97)$$

A inversão de \mathbf{J} deve ser computada no estado convergido da iteração precedente do procedimento de NR, sendo \mathbf{J}^{-1} definida conforme

$$\mathbf{J}_{n+1}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} J_{34}J_{43} - J_{32}J_{44} & J_{32}(J_{13}J_{44} - J_{14}J_{43}) & \dots \\ J_{31}J_{44} - J_{34}J_{41} & \bar{m}_{22} & \dots \\ J_{31}J_{44} - J_{34}J_{41} & J_{32}(J_{14}J_{41} - J_{11}J_{44}) & \dots \\ J_{32}J_{41} - J_{31}J_{43} & J_{32}(J_{11}J_{43} - J_{13}J_{41}) & \dots \\ \dots & J_{13}J_{44} - J_{14}J_{43} & J_{14}J_{32} - J_{13}J_{34} \\ \dots & J_{14}J_{41} - J_{11}J_{44} & J_{11}J_{34} - J_{14}J_{31} \\ \dots & J_{14}J_{41} - J_{11}J_{44} & J_{11}J_{34} - J_{14}J_{31} \\ \dots & J_{11}J_{43} - J_{13}J_{41} & J_{13}J_{31} - J_{11}J_{32} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

onde

$$\bar{m}_{22} = J_{13}(J_{34}J_{41} - J_{31}J_{44}) + J_{43}(J_{14}J_{31} - J_{11}J_{34}) \quad (2.99)$$

$$det(\mathbf{J}) = J_{44}(J_{13}J_{31} - J_{11}J_{32}) + J_{41}(J_{14}J_{32} - J_{13}J_{34}) + J_{43}(J_{11}J_{34} - J_{14}J_{31}). \quad (2.100)$$

Vale ressaltar aqui que Esmaeili e Öchsner (2011) apresentam além deste esquema matricial, uma simplificação nas Eqs. (2.82 - 2.85) que resulta em uma única equação residual, tendo como consequência um esquema numérico mais compacto e computacionalmente barato.

2.6.3 Módulo Tangente

O módulo tangente depende diretamente da relação constitutiva em questão. Assim, para generalizar esta avaliação, adota-se um procedimento de diferenças finitas baseado em variáveis complexas (TANAKA et al., 2014).

O módulo tangente é obtido numericamente através de uma perturbação na parte imaginária da tensão

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \approx \frac{\text{Im} [\sigma_n (\varepsilon_n + i\Delta\varepsilon_n)]}{\Delta\varepsilon_n}, \quad (2.101)$$

onde

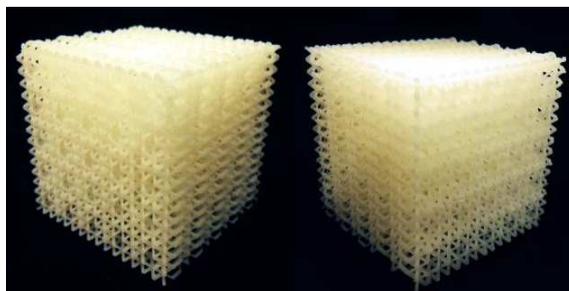
$$\Delta\varepsilon_n = \varphi \varepsilon_n, \quad (2.102)$$

refere-se a uma perturbação na deformação e φ o fator de perturbação proporcional, que pode assumir valores tão baixos quanto 10^{-300} resultando em valores estáveis e acurados. Na Seção 3.1.2 o leitor poderá encontrar maiores detalhes acerca deste procedimento baseado em variáveis complexas. Além disso, tal estratégia possui um baixo custo computacional e de armazenamento, uma vez que o mesmo é avaliado no nível do elemento (local), em cada ponto de Gauss no algoritmo de elementos finitos.

3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Este Capítulo apresenta uma revisão dos métodos analíticos, semi-analítico (SA) e diferenças finitas globais (DFG) para o tratamento da sensibilidade em problemas estáticos não lineares, tanto independentes quanto dependentes da trajetória. Tais métodos são facilmente particularizados para o caso linear, bastando considerar um único passo incremental. As implementações numéricas no código de elementos finitos são descritas por intermédio de fluxogramas apresentadas ao longo do texto. A Fig. 7 ilustra uma aplicação da sensibilidade na otimização estrutural.

Figura 7 – Estrutura celular modelada com elementos de barra. Produto final do processo de otimização onde empregou-se a sensibilidade analítica. Material impresso dos resultados apresentados por Guth (2012).



Fonte: Produção do autor, 2015.

3.1 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA PROBLEMAS INDEPENDENTES DA TRAJETÓRIA

A primeira vertente trata de problemas independentes da trajetória. Para esta natureza de problemas, a sensibilidade pode ser avaliada baseada apenas na informação da configuração corrente. De acordo com Habibi e Moharrami (2010), o primeiro estudo que lida com esta proposta de análise se deve à Ryu et al. (1985). Outros trabalhos com aplicações e discussões sobre o tema são dados por Choi e Santos (1987), Santos e Choi (1988), Park e Choi (1990), Santos e Choi (1992) e Kleiber (1993).

Em problemas independentes da trajetória, o resíduo \mathbf{r}_n pode ser definido diretamente como uma função do deslocamento total \mathbf{u}_n por

$$\mathbf{r}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b}) = \mu_n \mathbf{p}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b}) \approx \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_k)$ refere-se ao vetor de variáveis de projeto, \mathbf{f}_n o vetor força interna nodal e $\mu_n \mathbf{p}$ o carregamento externo aplicado no n -ésimo passo incremental. Na presente formulação, o mesmo procedimento de equilíbrio apresentado na Seção 2.4 é adotado, agora considerando a nova linearização do resíduo em torno de $\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n^i(\tilde{\mathbf{u}}_n^i, \mathbf{b}) &= \mathbf{r}_n^i(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1} + \Delta \mathbf{u}_n^i, \mathbf{b}) \\ &\approx \mathbf{r}_n^{i-1}(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}, \mathbf{b}) + \frac{\partial \mathbf{r}_n^{i-1}(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}, \mathbf{b})}{\partial \tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}} \Delta \mathbf{u}_n^i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Após recursivas atualizações do deslocamento utilizando a Eq. (3.2), a convergência $\tilde{\mathbf{u}}_n^i \rightarrow \mathbf{u}_n$ é assumida, isto é, $\mathbf{r}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b}) \approx \mathbf{0}$. A derivada do resíduo com respeito a \mathbf{u}_n refere-se à matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{T,n}$, descrita na Seção 2.4.2.

Considere a restrição do problema de otimização dada pela função

$$G(\mathbf{b}) = G(\mathbf{u}_n(\mathbf{b}), \mathbf{b}). \quad (3.3)$$

Esta restrição geralmente possui dependência explícita das variáveis de projeto \mathbf{b} e dos deslocamentos nodais \mathbf{u}_n (o qual depende implicitamente de \mathbf{b}). A sensibilidade desta restrição é obtida derivando a Eq. (3.3) em relação a variável de projeto $b_j \in \mathbf{b}$

$$\frac{dG}{db_j} = \frac{\partial G}{\partial b_j} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}_n} \frac{d\mathbf{u}_n}{db_j}, \quad (3.4)$$

cuja dificuldade de avaliação se manifesta em $d\mathbf{u}_n/db_j$, devido a dependência implícita de \mathbf{u}_n em \mathbf{b} . Desta forma, as seções seguintes apresentam métodos que objetivam o cômputo deste termo.

3.1.1 Método Analítico

O método analítico é conhecido devido a sua eficiência e acurácia, pois a derivada da resposta estrutural com respeito ao parâmetro de projeto é avaliada analiticamente. Contudo, este método geralmente possui difícil implementação e se torna particular ao problema. Duas abordagens distintas surgem ao utilizar este método, a direta e a adjunta, apresentadas na sequência.

3.1.1.1 Abordagem Direta

A sensibilidade do deslocamento em relação à variável de projeto $b_j \in \mathbf{b}$ utilizando a abordagem direta é obtida derivando o resíduo, sob a hipótese de que \mathbf{r}_n não depende explicitamente de \mathbf{b}

$$\frac{\partial \mathbf{r}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b})}{\partial b_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{u}_n} \frac{d\mathbf{u}_n}{db_j}. \quad (3.5)$$

Uma vez que a derivada do resíduo em relação ao deslocamento é expressa pela matriz de rigidez tangente, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{r}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b})}{\partial b_j} = \mathbf{K}_{T,n} \frac{d\mathbf{u}_n}{db_j}, \quad (3.6)$$

obtendo a relação onde \mathbf{p} e \mathbf{f} são explicitamente dependentes de \mathbf{b}

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_n}{db_j} &= \mathbf{K}_{T,n}^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b})}{\partial b_j} \\ &= \mathbf{K}_{T,n}^{-1} \left[\mu_n \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{b})}{db_j} - \frac{\partial \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b})}{\partial b_j} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A avaliação da sensibilidade do deslocamento é diretamente afetada pelo cômputo da matriz de rigidez tangente, conforme visto na Eq. (3.7). Esta expressão representa um sistema de equações lineares cuja solução é direta (não requer iterações). Este fato justifica a atenção despendida pelo autor para o procedimento de linearização descrito no Cap. 2.

Nesta abordagem, verifica-se que cada variável de projeto b_j define um novo vetor $d\mathbf{u}_n/db_j$, o que implica na resolução de um novo sistema de equações¹. Contudo, o cômputo da sensibilidade do deslocamento não é influenciado pelo número de restrições do problema, tornando-o interessante para aplicações com muitas restrições e poucas variáveis de projeto.

3.1.1.2 Abordagem Adjunta

Outra alternativa para avaliar a sensibilidade é a utilização da abordagem adjunta. Nesta formulação, considera-se o multiplicador de Lagrange

¹ Normalmente emprega-se um procedimento de solução de sistemas lineares que numa primeira etapa fatora a matriz e depois soluciona o sistema por retro-substituição. Ainda assim, o custo computacional para muitas variáveis de projeto se torna alto.

λ a partir da igualdade

$$\begin{aligned} G(\mathbf{b}) &= G + 0 \\ &= G + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{r}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde \mathbf{r}_n é o resíduo determinado após a convergência.

A expressão para a sensibilidade da restrição é obtida derivando a Eq. (3.8) em relação à variável de projeto $b_j \in \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \frac{dG(\mathbf{b})}{db_j} &= \frac{\partial G}{\partial b_j} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}_n} \frac{d\mathbf{u}_n}{db_j} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial b_j} + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \mathbf{u}_n} \frac{d\mathbf{u}_n}{db_j} \right) \\ &= \frac{\partial G}{\partial b_j} + \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}_n} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \mathbf{u}_n} \right) \frac{d\mathbf{u}_n}{db_j} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial b_j}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é determinado de modo que a parcela que multiplica $d\mathbf{u}_n/db_j$ se anule

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}_n} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial \mathbf{u}_n} = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

e uma vez que $\mathbf{K}_{T,n}$ é simétrica, obtém-se

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}_{T,n}^{-1} \left(-\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}_n} \right)^T. \quad (3.11)$$

Enfim, a Eq. (3.9) pode ser reescrita utilizando a Eq. (3.11) por

$$\frac{dG(\mathbf{b})}{db_j} = \frac{\partial G}{\partial b_j} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial b_j}. \quad (3.12)$$

Verifica-se que a Eq. (3.11) deve ser avaliada para cada restrição imposta e uma vez substituída na Eq. (3.12), o número de sistemas que deve ser resolvido torna-se independente do número de variáveis de projeto. Desta forma, a abordagem adjunta é mais vantajosa para problemas onde há poucas restrições e muitas variáveis de projeto.

3.1.2 Método das Diferenças Finitas Globais

Esta seção apresenta os métodos DFG baseados em variáveis reais (DFGR) e em variáveis complexas (DFGC).

3.1.2.1 Método DFG Baseado em Variáveis Reais

A simplicidade e a facilidade de implementação do método DFGR faz dele o mais utilizado em códigos numéricos comerciais. Entretanto, esta abordagem sofre de ineficiência computacional e possíveis erros numéricos (TORTORELLI; MICHALERIS, 1994).

Para desenvolvê-lo, o procedimento adotado para solucionar o equilíbrio do sistema deve ser empregado levando em conta a perturbação nas variáveis de projeto. Seja Δb_j uma perturbação na j -ésima variável de projeto, definida vetorialmente por

$$\Delta \mathbf{b}_j = [0 \quad \dots \quad \Delta b_j \quad \dots \quad 0]. \quad (3.13)$$

Sem perda de generalidade, considerando uma perturbação positiva em $b_j \in \mathbf{b}$ e resolvendo iterativamente a expressão

$$\mathbf{r}_n^i(\tilde{\mathbf{u}}_n^i, \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j) \approx \mathbf{r}_n^{i-1}(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}, \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j) + \frac{\partial \mathbf{r}_n^{i-1}(\tilde{\mathbf{u}}_n^{i-1}, \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j)}{\partial \mathbf{u}_n^{i-1}} \Delta \mathbf{u}_n^i, \quad (3.14)$$

em substituição à Eq. (3.2), obtém-se o deslocamento convergido no n -ésimo incremento, denotado por $\mathbf{u}_n(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j)$. De modo análogo, considerando uma perturbação negativa o deslocamento convergido passa a ser $\mathbf{u}_n(\mathbf{b} - \Delta \mathbf{b}_j)$.

Este método possui três vertentes que dependem do sentido de perturbação. Se a perturbação positiva for utilizada, a aproximação da sensibilidade do deslocamento em relação a b_j , é conhecida por diferenças finitas à frente (DFF)

$$\frac{d\mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{db_j} \approx \left[\frac{\Delta \mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{\Delta b_j} \right]_{\text{DFF}} = \frac{\mathbf{u}_n(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j) - \mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{\Delta b_j}. \quad (3.15)$$

De outro modo, se empregada uma perturbação negativa, obtém-se a aproximação denominada diferenças finitas atrás (DFA)

$$\frac{d\mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{db_j} \approx \left[\frac{\Delta \mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{\Delta b_j} \right]_{\text{DFA}} = \frac{\mathbf{u}_n(\mathbf{b}) - \mathbf{u}_n(\mathbf{b} - \Delta \mathbf{b}_j)}{\Delta b_j}. \quad (3.16)$$

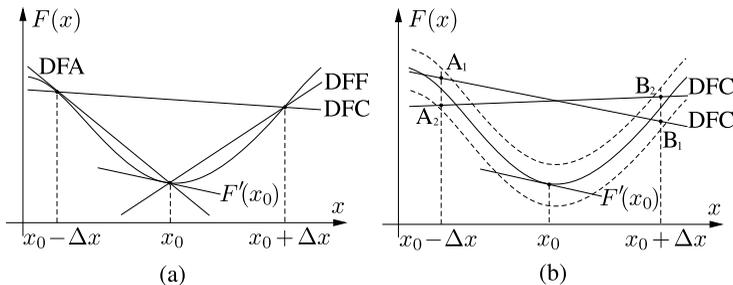
Por último, através da combinação de perturbações positivas e negativas obtém-se a aproximação conhecida por diferenças finitas centrais (DFC)

$$\frac{d\mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{db_j} \approx \left[\frac{\Delta \mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{\Delta b_j} \right]_{\text{DFC}} = \frac{\mathbf{u}_n(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j) - \mathbf{u}_n(\mathbf{b} - \Delta \mathbf{b}_j)}{2\Delta b_j}. \quad (3.17)$$

Este método possui duas desvantagens de grande relevância, às quais Muñoz-Rojas (2003) faz referência:

- i. A baixa eficiência computacional, pois em cada perturbação a matriz de rigidez deve ser calculada, montada e triangularizada, principalmente no caso das diferenças finitas centrais onde ocorrem duas perturbações;
- ii. O problema da precisão, relacionado à escolha da magnitude da perturbação. Caso a perturbação seja muito elevada, o surgimento de erros de truncamento torna-se inevitável. Enquanto que uma perturbação muito pequena levará a problemas de arredondamento em virtude da precisão finita do computador.

Figura 8 – (a) Aproximação da derivada via DFG. (b) Fonte de erro proveniente do procedimento iterativo.



Fonte: Produção do autor, 2015.

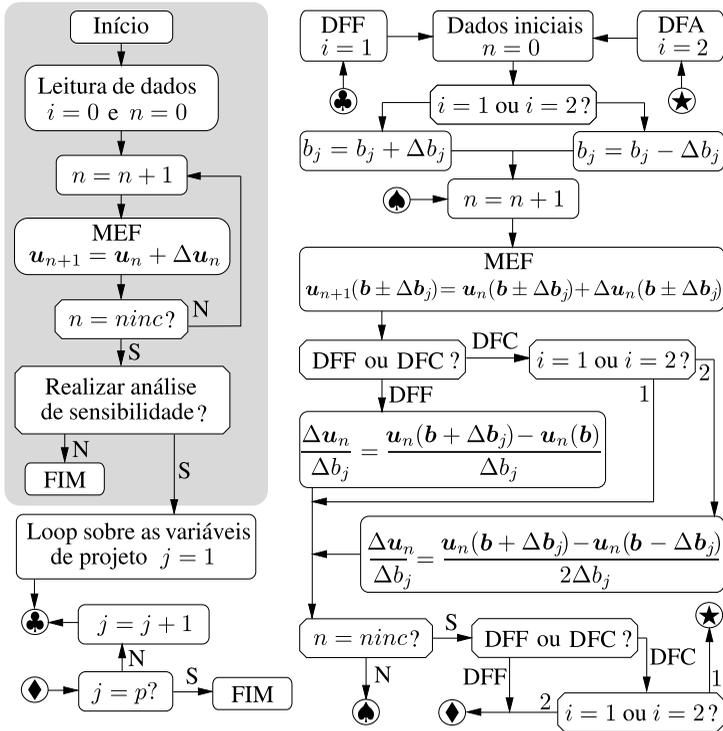
baseado em Stahlschmidt (2013, p.53) e Muñoz-Rojas (2003, p.69).

A Fig. 8 ilustra o comportamento da derivada analítica e das diferenças finitas da função diferenciável $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analisada em x_0 . Na Fig. 8a verifica-se que a estimativa pode ser grosseira para uma perturbação Δx relativamente grande. Ao reduzi-la, as retas secantes tendem à reta tangente (solução analítica). Desta forma, se $\Delta x \rightarrow 0$ obtém-se a própria definição de derivada. Todavia, neste caso o erro proveniente da precisão da máquina tende a sobressair. A Fig. 8b ilustra uma fonte adicional de erro proveniente da natureza iterativa do procedimento de solução. A região delimitada pelas linhas tracejadas correspondem aos valores admissíveis resultantes do processo iterativo. Verifica-se neste caso que a aproximação via DFG pode apresentar grande variação, inclusive sentido de crescimento oposto.

A implementação do método DFGR no *software* ATENAS[©] é descrita pelo fluxograma da Fig. 9. Este método possui como característica marcante a facilidade de implementação, visto que não há necessidade de alterar o código original do MEF. Entretanto, é impreterível executar o código com as devidas perturbações mais de uma vez, o que pode tornar a avaliação amplamente custosa. Salienta-se que o DFG não deve ser utilizado em métodos de

soluções de sistemas não lineares com incrementos automáticos assim como o MCDG (ver Apêndice B), uma vez que a avaliação no sistema perturbado e no original podem não ocorrer em pontos correspondentes, salvo quando impostas pelo analista. Trentin (2009) mostra, por intermédio de gráficos, que a análise de sensibilidade utilizando o DFGR é fortemente afetada pela não uniformidade do tamanho dos incrementos.

Figura 9 – Fluxograma com detalhes da implementação do método DFGR.



Fonte: Produção do autor, 2015.

3.1.2.2 Método DFG Baseado em Variáveis Complexas

O uso de variáveis complexas com o objetivo de estimar aproximações das derivadas é originalmente introduzido com o trabalho de Lyness e Moler (1967) e Lyness (1967). A partir desta teoria, Squire e Trapp (1998) apresentam uma expressão que tem sido desde então empregada em diversas áreas da engenharia (NEWMAN-III; ANDERSON; WHITFIELD,

1998; BURG; NEWMAN-III, 2001; KAWAMOTO, 2005; MUNDSTOCK; MARCZAK, 2009; MONTOYA et al., 2015). Este método apresenta acurácia, robustez e facilidade na implementação, enquanto mantém o custo computacional razoável (MARTINS; STURDZA; ALONSO, 2003). Contudo, devido à natureza das variáveis complexas, o custo de armazenamento é superior² quando comparado com a contraparte real.

Na sequência, apresentam-se duas formulações distintas, as quais definem a expressão para a aproximação da derivada via DFGC.

3.1.2.2.1 Formulação A

A primeira formulação refere-se a um desenvolvimento mais intuitivo descrito por Lyness e Moler (1967) apud Mundstock (2006), onde a primeira derivada de uma função $F(x)$ pode ser calculada avaliando a parte imaginária da função perturbada em um dado ponto. Para apresentá-la, considere a seguinte expansão de $F(x)$ em série de Taylor em torno do ponto x

$$F(x+h) = F(x) + \frac{dF(x)}{dx}h + \frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \dots, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Neste momento, adota-se uma perturbação imaginária ih ao invés de utilizar uma perturbação real h como de costume

$$F(x+ih) = F(x) + \frac{dF(x)}{dx}(ih) + \frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{(ih)^2}{2!} + \dots, \quad ih \in \mathbb{C}. \quad (3.19)$$

Usando o fato que $i^2 = -1$ (ver Apêndice C), a parte imaginária da Eq. (3.19) é expressa por

$$\text{Im}[F(x+ih)] = \frac{dF(x)}{dx}h - \frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots \quad (3.20)$$

Por fim, a primeira derivada é obtida reescrevendo a Eq. (3.20) como

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\text{Im}[F(x+ih)]}{h} + \mathcal{O}. \quad (3.21)$$

Assumindo pequenas perturbações, a Eq. (3.21) é reescrita ignorando os termos de alta ordem \mathcal{O} obtendo, enfim, a expressão

$$\frac{dF(x)}{dx} \approx \frac{\text{Im}[F(x+ih)]}{h}. \quad (3.22)$$

² O custo de armazenamento de uma variável complexa corresponde ao dobro de uma variável real, devido às duas partes reais das quais é composta.

3.1.2.2.2 Formulação B

Para a segunda formulação, considere uma aplicação $F : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $F(z = x + iy) = u + iv$ tal que $u = u(x + iy)$ e $v = v(x + iy)$ sejam diferenciáveis e satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann. Segue do Teorema C.1 (Apêndice C) que F é analítica e da Definição C.1 que F é diferenciável em U . A partir da Eq. (C.7) e da definição de derivada obtém-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + i(y + h)) - v(x + iy)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Uma vez que a função de interesse é real de uma variável real, tais componentes se restringem ao eixo real, ou seja, $y = 0$, $u(x) = F(x)$ e $v(x) = 0$ como apresentado por Martins, Kroo e Alonso (2000). Desta forma, a Eq. (3.23) é reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\stackrel{y=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + ih) - v(x)}{h} \\ &\stackrel{v(x)=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + ih)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Im}[F(x + ih)]}{h}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

e sabendo que $u(x) = F(x)$,

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Im}[F(x + ih)]}{h}. \quad (3.25)$$

Para pequenos valores de h , a Eq. (3.25) pode ser aproximadamente descrita como sendo

$$\frac{dF(x)}{dx} \approx \frac{\text{Im}[F(x + ih)]}{h}. \quad (3.26)$$

Nota-se que as Eqs. (3.22) e (3.26) são análogas, ambas obtidas considerando perturbações positivas. Observa-se que esta expressão não envolve subtração entre dois valores, um fato que produz erros de arredondamento nos métodos de diferenças finitas tradicionais. Além disso, vale ressaltar que esta aproximação é de ordem 2, enquanto que a contraparte das diferenças finitas convencional é de ordem 1, ou seja, a análise de sensibilidade utilizando o método complexo possui convergência quadrática com o decréscimo da perturbação, enquanto que no caso real este decréscimo é linear (MONTOYA et al., 2015). Estes aspectos fazem com que o método complexo seja

extremamente acurado e possua um comportamento muito estável sempre que pequenas perturbações são aplicadas.

A partir da Eq. (3.22), a sensibilidade do deslocamento em relação à variável de projeto $b_j \in \mathbf{b}$ via DFGC pode ser definida como

$$\frac{d\mathbf{u}_n(\mathbf{b})}{db_j} \approx \frac{\text{Im}[\mathbf{u}_n(\mathbf{b} + i\Delta b_j)]}{\Delta b_j}. \quad (3.27)$$

Este mesmo procedimento é também utilizado para calcular o módulo tangente descrito na Seção 2.6.3.

3.1.2.2.3 Aspectos Numéricos do Método DFGC

Numericamente, a dupla precisão fornece uma precisão relativa de 16 dígitos decimais onde é possível representar valores entre 10^{-308} e 10^{308} , tanto para variáveis reais quanto para complexas. Desta forma, o fato de não possuir diferença entre dois valores na expressão do método DFGC faz com que haja a possibilidade de utilizar fatores de perturbação tão pequenos quanto 10^{-308} , motivo pelo qual não é considerado neste trabalho o método DFGC via DFC. O mesmo não acontece para os métodos reais, uma vez que para perturbações da ordem de 10^{-16} o numerador se anula³ devido a diferença entre dois valores numericamente iguais. Ressalta-se que o método DFGC utilizando fatores de perturbação da ordem de 10^{-300} pode ser confundido com a própria definição de derivada analítica, uma vez que a diferença entre a derivada analítica e a aproximação via diferenças finitas refere-se puramente à magnitude da perturbação empregada, conforme discussão envolvida em torno da Fig. 8a.

3.1.3 Método Semi-analítico

A avaliação analítica da sensibilidade pode exigir cálculos e desenvolvimentos extremamente elaborados. Esta dificuldade pode ser contornada utilizando o método SA. Tal procedimento é baseado na aproximação via método DFG dos termos dentro dos colchetes na Eq. (3.7) seguido pela avaliação analítica da resposta da sensibilidade, combinando facilidade de implementação, eficiência e acurácia.

³ Na prática, constata-se que para perturbações menores que 10^{-16} , o método SAR efetivamente detém valores nulos. Isto nem sempre ocorre para o método DFGC que, neste caso, apresenta resíduo numérico. Este fato decorre de uma série de fatores, entre eles: a quantidade de operações envolvidas e a magnitude da tolerância associadas ao MEF.

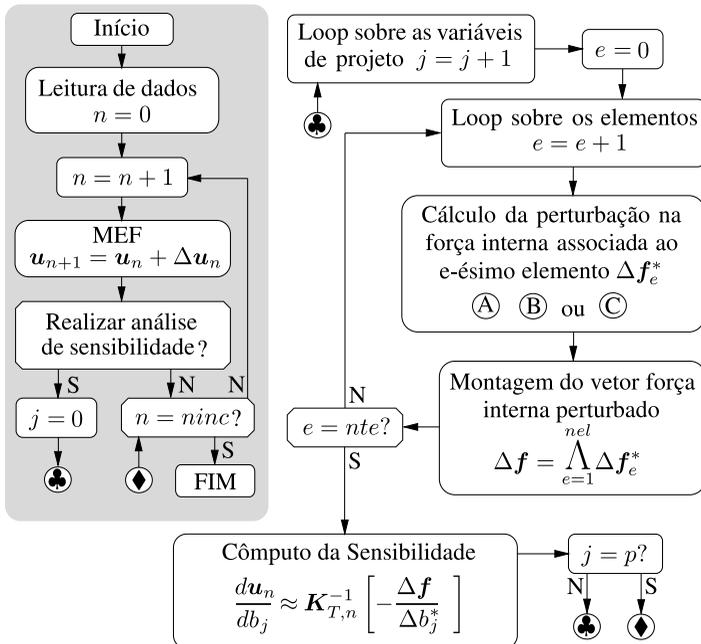
3.1.3.1 Método SA Baseado em Variáveis Reais

O método SAR é obtido avaliando a expressão analítica via abordagem direta Eq. (3.7) utilizando as aproximações oriundas do método DFGR

$$\frac{du_n}{db_j} \approx \mathbf{K}_{T,n}^{-1} \left[\mu_n \frac{\Delta p(\mathbf{b})}{\Delta b_j} - \frac{\Delta \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b})}{\Delta b_j} \right]. \quad (3.28)$$

Esta avaliação resulta em um procedimento rápido e barato. Entretanto, as desvantagens relacionados com o método DFGR, conforme Seção 3.1.2, ainda encontram-se presentes.

Figura 10 – Fluxograma detalhando a implementação do método SA para a avaliação da sensibilidade do deslocamento. A particularização para variáveis reais ou complexas depende do procedimento para avaliar a variação do vetor força interna.

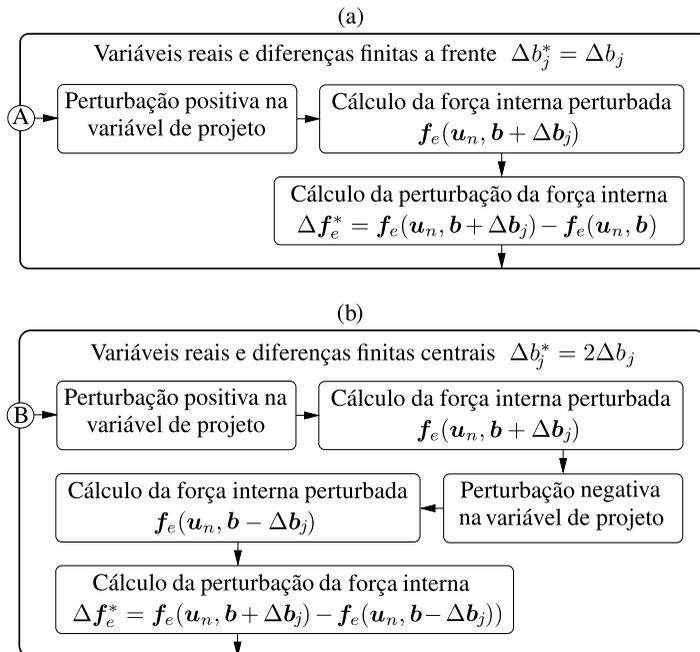


Fonte: Produção do autor, 2015.

A avaliação da sensibilidade dos deslocamentos em relação a variáveis de forma utilizando o método SAR apresenta sérios problemas de acurácia. Estes problemas têm sido relatados para estruturas compostas de elementos de viga, treliça, placa e casca, sendo portanto a maior desvantagem deste

método (BARTHELEMY; CHON; HAFTKA, 1988; PEDERSEN; CHENG; RASMUSSEN, 1989; CHENG; GU; ZHOU, 1989; BARTHELEMY; HAFTKA, 1990). Diversos autores associam este problema à presença de rotação de corpo rígido dos elementos finitos (CHENG; OLHOFF, 1991; MLEJNEK, 1992). A fonte desta inexatidão tem origem na derivada numérica da matriz de rigidez dos elementos finitos, decorrente das características do método das diferenças finitas baseado em variáveis reais (JIN; DENNIS; WANG, 2010). Na tentativa de sanar esta patologia, diversos métodos corretivos foram desenvolvidos tanto para problemas lineares quanto para geometricamente não lineares (HAFTKA; ADELMAN, 1989; CHENG; GU; WANG, 1991; MLEJNEK, 1992; PARENTE; VAZ, 2001). A solução definitiva para esta fonte de erro em problemas lineares é descrita através do método conhecido por “diferenciação numérica exata” (OLHOFF; RASMUSSEN; LUND, 1993). Uma peculiaridade interessante desta patologia em problemas lineares, segue do fato que o erro cresce quadraticamente com o refinamento da malha (BARTHELEMY; CHON; HAFTKA, 1988).

Figura 11 – Cálculo da perturbação da força interna associada ao e -ésimo elemento Δf_e^* utilizando variáveis reais via: (a) DFF e (b) DFC.



Fonte: Produção do autor, 2015.

A implementação do método SA no *software* ATENAS[©] é ilustrada através do fluxograma na Fig. 10. A particularização do método SAR é descrita na Fig. 11a para DFF e na Fig. 11b para DFC. Verifica-se que o método SA possui um enorme ganho de eficiência comparado ao DFGR, pois o algoritmo de elementos finitos é executado uma única vez, considerando as variáveis de projeto não perturbadas. Além disso, a sensibilidade é avaliada utilizando a matriz de rigidez tangente previamente fatorada.

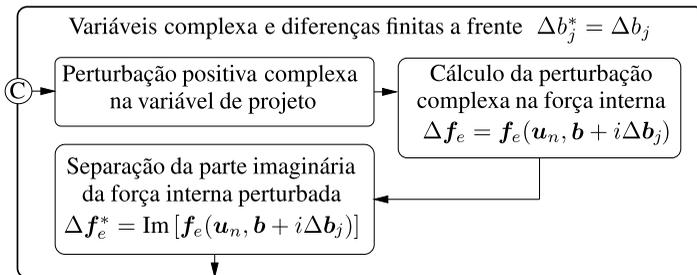
3.1.3.2 Método SA Baseado em Variáveis Complexas

O método SA baseado em variáveis complexas é obtido avaliando a expressão analítica da Eq. (3.7), utilizando a aproximação via DFGC

$$\frac{d\mathbf{u}_n}{db_j} \approx \mathbf{K}_{T,n}^{-1} \left[\mu_n \frac{\text{Im} [\mathbf{p}(\mathbf{b} + i\Delta\mathbf{b}_j)]}{\Delta b_j} - \frac{\text{Im} [\mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{b} + i\Delta\mathbf{b}_j)]}{\Delta b_j} \right]. \quad (3.29)$$

Este método é promissor, uma vez que une a eficiência e acurácia do método analítico com as considerações positivas relacionadas ao método DFGC apresentadas na Seção 3.1.2. Adicionalmente, o custo computacional e de armazenamento são drasticamente reduzidos quando comparados ao método DFGC, pois as operações complexas são realizadas em nível elemento e não há necessidade em alocar vetores globais complexos. A implementação do método SA é descrita na Fig. 10, com particularização para o método complexo dada na Fig. 12.

Figura 12 – Cálculo da perturbação da força interna associada ao e -ésimo elemento $\Delta\mathbf{f}_e^*$ utilizando variáveis complexas.



3.2 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE PARA PROBLEMAS DEPENDENTES DA TRAJETÓRIA

Os problemas ditos dependentes da trajetória são aqueles que requerem o conhecimento do histórico do corpo até a configuração atual, a fim de prever a configuração no próximo passo. Isto inclui o histórico das deformações, das sensibilidades prévias das tensões, deslocamentos e variáveis internas (KATO, 2010).

O procedimento analítico da sensibilidade dependente da trajetória é descrito por Tsay, Cardoso e Arora (1990a). Esta teoria é aplicada por Tsay, Cardoso e Arora (1990b) em problemas específicos utilizando elementos de barra e viga, realizando um estudo referente às descontinuidades dos coeficientes das sensibilidades. Ohsaki e Arora (1994), Chen (1994), Lee e Arora (1995) apresentam o algoritmo incremental baseado no método analítico para a análise de sensibilidade estrutural de sistemas não lineares. A análise de sensibilidade considerando a elastoplasticidade e elastoviscoplasticidade no plano são propostos por Vidal, Lee e Haber (1991), Vidal e Haber (1993), Kleiber, Hien e Postek (1994), Kleiber e Kowalczyk (1995), Kleiber e Kowalczyk (1996). Bugeda e Gil (1999) introduzem a variável dano, usando a teoria de Lemaitre, no estudo da sensibilidade. Wisniewski, Kowalczyk e Turska (2003) apresentam dois algoritmos incrementais baseados no método analítico. Chen et al. (2000) apresentam o método SAR baseado na abordagem direta e analisam sua aplicação em problemas de fluência e tensão térmica. Ressalta-se que não foi identificado nenhum trabalho aplicando o SAC em problemas dependentes da trajetória.

Os métodos de sensibilidade direcionados para esta natureza de problemas são ligeiramente mais complexos se comparados à contraparte independente, pois a força interna torna-se uma função do deslocamento e do histórico da deformação. Assim, a derivada do vetor força interna com respeito ao parâmetro de projeto em particular, deve ser avaliado de forma consistente. O método DFG para este tipo de problema é obtido analogamente ao apresentado para problemas independentes da trajetória (ver Seção 3.1.2), descartando a necessidade de defini-lo novamente. Este método fornece resultados pouco acurados em casos onde exige-se o remalhamento (TRENTIN, 2009). Para esta natureza de problemas, o método analítico via abordagem adjunta não é uma alternativa inteligente para o cômputo da sensibilidade, uma vez que o mesmo utiliza da própria abordagem direta para efetuar a avaliação (KLEIBER et al., 1997; MUÑOZ-ROJAS, 2003). Portanto, todo o desenvolvimento do método SA apresentado na sequência é baseado na abordagem direta.

3.2.1 Método SA Baseado em Variáveis Reais

Problemas independentes da trajetória podem ser consideradas como um caso particular dos problemas dependentes, onde as variáveis internas χ são mantidas nulas e a tensão σ pode ser facilmente avaliada. Por outro lado, em problemas dependentes da trajetória as variáveis internas não são nulas e mudam de acordo com o carregamento aplicado. O histórico destas variáveis devem ser consideradas para incrementalmente avaliar as novas deformações.

A fim de considerar o histórico das variáveis internas, adota-se uma pequena modificação no procedimento da Seção 3.1, incluindo um passo adicional de atualizações. Objetivando a avaliação da sensibilidade do deslocamento em relação à variável de projeto $b_j \in \mathbf{b}$, a Eq. (3.2) é derivada utilizando a regra da cadeia e, após algumas manipulações, a expressão da sensibilidade analítica via abordagem direta é obtida

$$\frac{d\mathbf{u}_n}{db_j} = \mathbf{K}_{T,n}^{-1} \left[\mu_n \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{b})}{db_j} - \left. \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial b_j} \right|_{\mathbf{u}} \right]. \quad (3.30)$$

A força interna \mathbf{f}_n deve ser descrita agora em função das variáveis internas χ_{n-1} , da tensão σ_{n-1} , do deslocamento \mathbf{u}_n e das variáveis de projeto \mathbf{b} , como segue

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_n(\sigma_{n-1}(\mathbf{b}), \chi_{n-1}(\mathbf{b}), \mathbf{u}_n(\mathbf{b}), \mathbf{b}). \quad (3.31)$$

A maior dificuldade em solucionar a Eq. (3.30) segue da avaliação efetiva do termo $\partial \mathbf{f}_n / \partial b_j$ em \mathbf{u} mantido constante, conhecida como derivada condicional. Desta forma, o método SA é visto como uma alternativa simples e geral. Tal método substitui a derivada condicional do vetor força interna por uma expressão baseada em diferenças finitas

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial b_j} \right|_{\mathbf{u}} \approx \frac{\Delta_b \mathbf{f}_n}{\Delta b_j} \Big|_{\mathbf{u}}. \quad (3.32)$$

Sem perda de generalidade, é possível utilizar DFF para obter

$$\begin{aligned} \Delta_b \mathbf{f}_n &= \mathbf{f}_n(\sigma_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j), \chi_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j), \mathbf{u}_n(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j), \dots \\ &\quad \dots, \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j) - \mathbf{f}_n(\sigma_{n-1}(\mathbf{b}), \chi_{n-1}(\mathbf{b}), \mathbf{u}_n(\mathbf{b}), \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

e mantendo \mathbf{u}_n fixo

$$\begin{aligned} \Delta_b \mathbf{f}_n \Big|_{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}_n(\sigma_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j), \chi_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j), \mathbf{u}_n(\mathbf{b}), \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}_j) + \\ &\quad - \mathbf{f}_n(\sigma_{n-1}(\mathbf{b}), \chi_{n-1}(\mathbf{b}), \mathbf{u}_n(\mathbf{b}), \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $\sigma_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}_j)$ e $\chi_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}_j)$ são aproximados linearmente por

$$\sigma_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}_j) \approx \sigma_{n-1}(\mathbf{b}) + \frac{d\sigma_{n-1}(\mathbf{b})}{db_j} \Delta\mathbf{b}_j, \quad (3.35)$$

$$\chi_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}_j) \approx \chi_{n-1}(\mathbf{b}) + \frac{d\chi_{n-1}(\mathbf{b})}{db_j} \Delta\mathbf{b}_j, \quad (3.36)$$

obtidas a partir de uma etapa adicional prévia conhecida por avaliar $\partial\mathbf{f}_{n-1}/\partial b_j$ de forma incondicional (considerando a perturbação nos deslocamentos decorrente da perturbação na variável de projeto). Esta etapa é realizada após obter a sensibilidade dos deslocamentos no $(n - 1)$ -ésimo incremento, via Eq. (3.30), possibilitando aproximar o deslocamento da configuração perturbada por

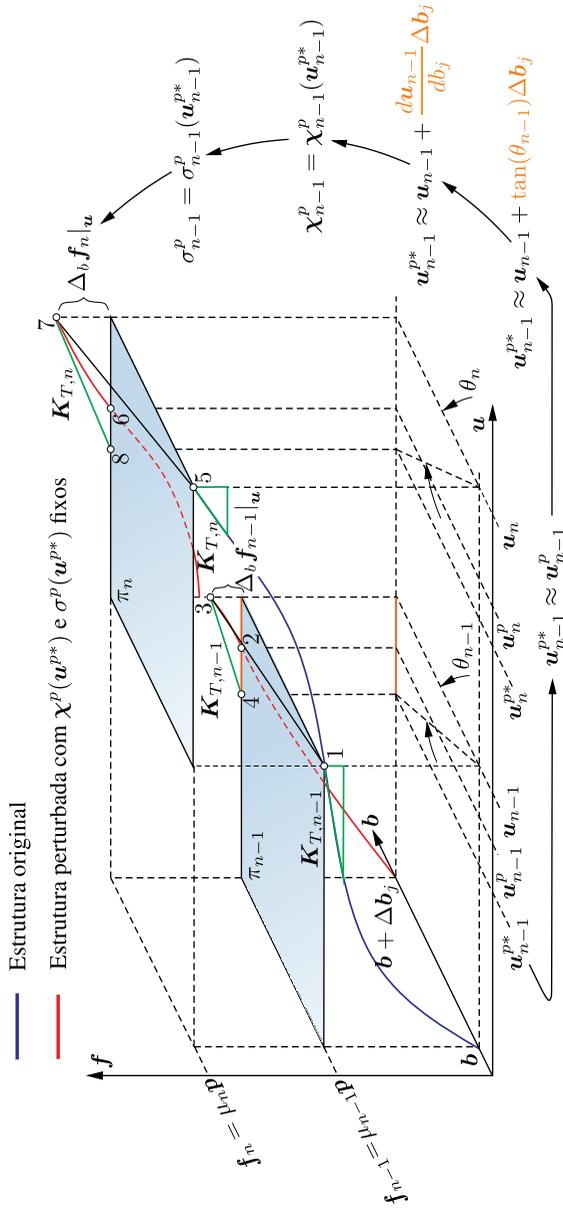
$$\mathbf{u}_{n-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}_j) \approx \mathbf{u}_{n-1}(\mathbf{b}) + \frac{d\mathbf{u}_{n-1}}{db_j} \Delta\mathbf{b}_j. \quad (3.37)$$

O procedimento de atualização das variáveis internas é apresentado geometricamente pelas Figs. 13 e 14 a fim de esclarecer o funcionamento do mesmo. Para propósitos ilustrativos, assume-se que o vetor força externa não possui qualquer dependência das variáveis de projeto. O sobrescrito $(.)^P$ é adotado para indicar que a variável $(.)$ é avaliada na configuração perturbada, e na omissão de tal símbolo, $(.)$ é avaliada na configuração original.

Os estados de equilíbrio dos incrementos $n - 1$ e n são representados pelos planos π_{n-1} e π_n , respectivamente. Nestes estados, as respostas estruturais tais como deslocamento, tensão e força interna são dependentes das variáveis de projeto. Aplicando uma força externa equivalente a $\mu_{n-1}\mathbf{p}$ observa-se que o estado de equilíbrio da estrutura original é expressa pelo ponto 1. Este ponto é obtido a partir da convergência do procedimento iterativo. Portanto, a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{T,n-1}$ e o deslocamento \mathbf{u}_{n-1} são conhecidos. O objetivo é determinar o equilíbrio da estrutura perturbada, que é alcançada no ponto 2. Como o deslocamento da estrutura perturbada é fixa, a resposta estrutural leva ao ponto 3, causando o desbalanceamento de forças $\Delta_b\mathbf{f}_{n-1}|_{\mathbf{u}}$ dado pela Eq. (3.34). A partir do ponto 3, a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{T,n-1}$ é utilizada para estimar \mathbf{u}_{n-1}^P dado por \mathbf{u}_{n-1}^{P*} , localizado no ponto 4 ao invés do ponto 2. Esta abordagem é responsável por uma fonte adicional de erro, além daquelas já relatadas na Seção 3.1.

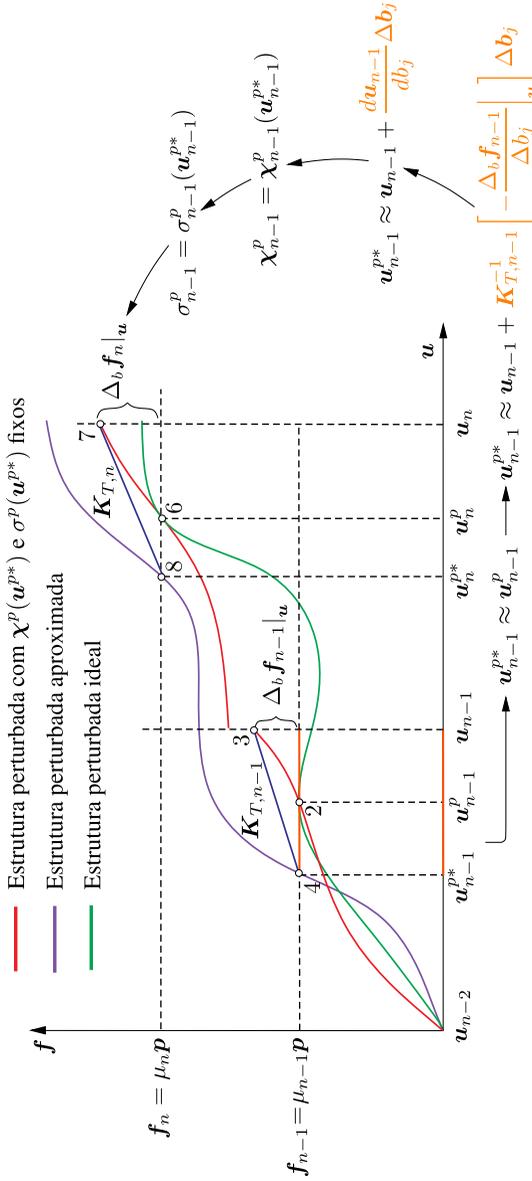
Graficamente, verifica-se que esta aproximação é consistente quando as perturbações e os incrementos de carga são pequenos, uma vez que a sensibilidade do deslocamento é obtido pela tangente de θ_{n-1} . Esta afirmação pode ser vista com mais clareza a partir da Fig. 14.

Figura 13 – Resposta estrutural com respeito ao parâmetro de projeto original e perturbado.



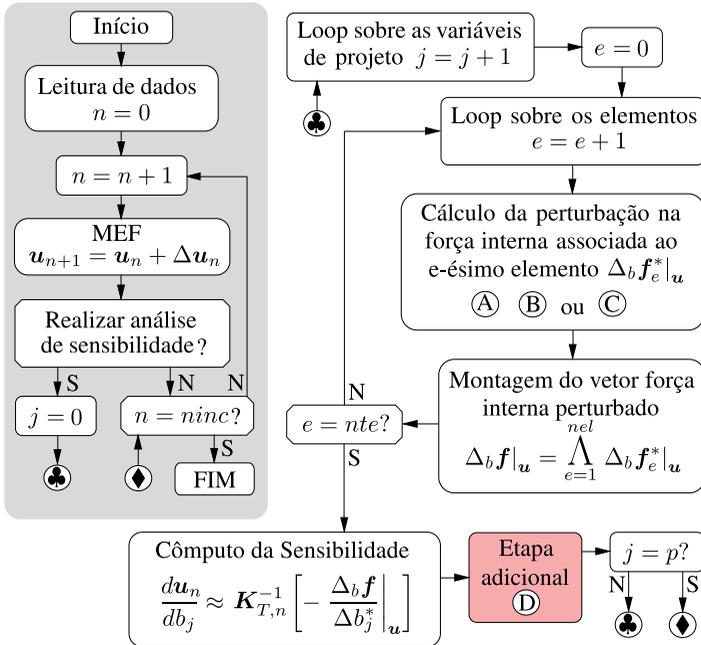
Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 14 – Resposta estrutural com respeito ao parâmetro de projeto perturbado.



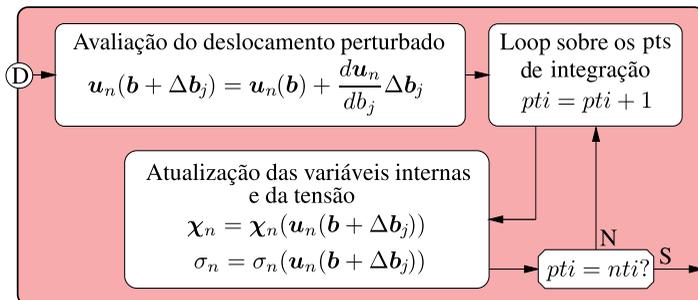
Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 15 – Fluxograma com detalhes do cálculo da sensibilidade do deslocamento via método SA para problemas dependentes da trajetória. Detalhe para a etapa de atualizações das variáveis internas.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 16 – Etapa adicional com uso de variáveis reais.



Fonte: Produção do autor, 2015.

A avaliação da aproximação do deslocamento \mathbf{u}_{n-1}^{p*} possui grande importância, pois a partir dela as variáveis internas do respectivo passo são atualizadas, i.e., $(\sigma_{n-1}$ e $\chi_{n-1})$ utilizando as Eqs. (3.35) e (3.36). Na prática, estas variáveis são atualizadas com o mesmo algoritmo material considerando o deslocamento perturbado. Este procedimento se repete a cada novo incremento.

O fluxograma com detalhes referentes à implementação do método SA para problemas dependentes da trajetória no *software* ATENAS[©] é descrito na Fig. 15. Note no acréscimo de apenas uma etapa apresentada pela Fig. 16, quando comparado ao mesmo método para problemas independentes da trajetória. A particularização para variáveis reais ou complexas depende do procedimento adotado para calcular a variação do vetor força interna no nível do elemento. Para o caso real, o procedimento descrito deve ser utilizado em conjunto com a Fig. 11.

3.2.2 Método SA Baseado em Variáveis Complexas

O método SAC para esta natureza de problemas é obtido substituindo a aproximação via DFGC na expressão analítica Eq. (3.30), isto é

$$\frac{d\mathbf{u}_n}{db_j} \approx \mathbf{K}_{T,n}^{-1} \left[\mu_n \frac{\text{Im}[\mathbf{p}(\mathbf{b} + i\Delta b_j)]}{\Delta b_j} - \frac{\text{Im}[\Delta_b \mathbf{f}_n|_{\mathbf{u}}]}{\Delta b_j} \right], \quad (3.38)$$

onde

$$\Delta_b \mathbf{f}_n|_{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_n(\sigma_{n-1}(\mathbf{b} + i\Delta b_j), \chi_{n-1}(\mathbf{b} + i\Delta b_j), \mathbf{u}_n(\mathbf{b}), \mathbf{b} + i\Delta b_j) \quad (3.39)$$

seguido pelo mesmo procedimento previamente apresentado na Seção 3.2.1.

Comparado ao método SAC para problemas independentes da trajetória na Seção 3.1.3, o custo de armazenamento neste caso é um pouco maior, pois é necessário alocar um vetor complexo global para cada variável interna para salvar o histórico da mesma. Contudo, as operações realizadas sob as variáveis complexas ainda se restringem ao nível local. A implementação deste método no *software* ATENAS[©] é descrita pelos fluxogramas das Figs. 12, 15 e 16, substituindo as devidas perturbações reais por complexas na Fig. 16.

4 EXEMPLOS E APLICAÇÕES

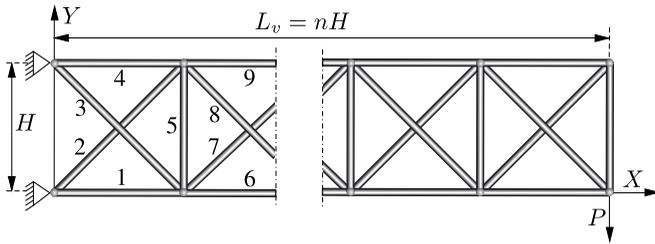
Este capítulo visa aplicar e comparar os diferentes métodos de avaliação da sensibilidade apresentados no Capítulo 3. Com a finalidade de realizar uma comparação justa entre os diferentes procedimentos SA, ambos são implementados dentro do mesmo código de elementos finitos com exatamente as mesmas operações algorítmicas. Isto possibilita levantar os aspectos positivos e negativos relacionados a cada um. Os exemplos abordados na sequência são construídos para que possibilitem o surgimento de patologias e dificuldades descritas na literatura. Como referência futura, o termo “faixa de acurácia” é utilizado para intervalos de perturbação onde o erro é continuamente igual ou inferior a 0.1%.

A Seção 4.1 trata do exemplo de uma viga modelada com elementos de barra construído de forma que a estrutura seja dominada por rotação de corpo rígido. Isto cria uma situação adequada para avaliar a patologia presente nos métodos SAR. Uma proposta similar a esta é dada por Stahlschmidt (2013). Contudo, o presente estudo visa aprofundar as discussões já feitas e levantar novos aspectos dos procedimentos SA que até o momento não foram abordados. A Seção 4.2 investiga o problema de uma barra elastoplástica linear sujeita a um carregamento axial. Este exemplo é escolhido para dois propósitos bem definidos. Validar o procedimento SA para problemas dependentes da trajetória e investigar o comportamento em situações com descontinuidade dos coeficientes de sensibilidade. A Seção 4.3 tem como objetivo verificar a generalidade do procedimento de atualizações das variáveis internas através de um exemplo considerando plasticidade e dano. A Seção 4.4 tem como propósito realizar o estudo de uma estrutura composta de células treliçadas além do regime linear, para o qual foi projetada. Para tal, a sensibilidade do módulo volumétrico em relação à densidade relativa é avaliada considerando diferentes formulações.

4.1 VIGA MODELADA COM ELEMENTOS DE BARRA

Barthelemy e Haftka (1990) analisaram o comportamento da sensibilidade da energia de deformação com respeito a parâmetros geométricos em uma viga modelada por células quadradas, cada uma contendo 5 barras conforme ilustrado na Fig. 17. O número de células considerados em seu trabalho varia entre 1 e 20 sendo a sensibilidade analisada pelos métodos DFGR e SAR.

Figura 17 – Viga treliçada.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Nesta Seção, realiza-se um estudo semelhante analisando a sensibilidade do deslocamento em relação às variáveis de projeto geométricas e materiais. O número de células adotado neste problema varia entre 1 a 60 e possui altura de $H = 100\text{mm}$. Ainda, de acordo com Barthelemy e Haftka (1990), a área dos elementos do interior da viga $\{2 + 5n \text{ e } 3 + 5n; n \in \mathbb{N}\}$ são tomados 125 \times maiores do que as demais áreas $A = 7\text{mm}^2$. Esta condição reforça a deformação ser dominada por rotações de corpo rígido, criando uma situação adequada para avaliar a patologia presente nos métodos SAR. Os valores adotados para o módulo elástico e para o carregamento vertical são dados respectivamente por $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ e $P = -2.0 \times 10^{-5} \text{N}$. Vale enfatizar que para este estudo considera-se tanto a análise linear quanto a análise não linear geométrica. Como método de solução para o problema não linear, utiliza-se o método de NR por controle de carregamento (MCC) (ver Apêndice B) com tolerância $tol = 10^{-9}$.

Para o cômputo da sensibilidade do deslocamento, adota-se o comprimento da viga L_v como parâmetro geométrico. Dada uma perturbação, as coordenadas nodais horizontais são atualizadas proporcionalmente conforme as expressões

$$\Delta \mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{x}}{L_v} \Delta b_1 \quad \text{e} \quad \Delta b_1 = \varphi L_v, \quad (4.1-4.2)$$

onde \mathbf{x} representa as coordenadas horizontais dos nós e φ o fator de perturbação variando entre 10^{-30} e 10^{-1} , correspondendo a uma perturbação efetiva de $[10^{-28}, 10^2] \text{mm}$ em 60 células. O parâmetro material considerado para

Tabela 1 – Valores de referência obtidos via método SAC e fator de perturbação $\varphi = 10^{-30}$.

Número de células	Valores de referência <i>Ref</i> para variável de forma		Valores de referência <i>Ref</i> para variável material	
	Linear	Não Linear	Linear	Não Linear
1	0.68488994904720	15.5802088815197	8.60628275 $\times 10^{-5}$	1.79882800 $\times 10^{-3}$
5	37.4288195070117	421.829947620554	8.74794646 $\times 10^{-3}$	5.59049766 $\times 10^{-2}$
10	250.705670225946	976.875382196364	6.77032642 $\times 10^{-2}$	0.14957637708156
15	792.780706818079	1506.91861071136	0.22546161321802	0.25155622564377
20	1816.71515440133	2028.33519556715	0.53061224499675	0.35660847504594
25	3475.57023696911	2543.65887025360	1.03174603202345	0.46278020025880
30	5922.31643772276	3054.97736673712	1.77745383906433	0.56944973932719
35	9305.58180211248	3563.67821297505	2.81632653340653	0.67640253586098
40	13770.8071289674	4070.51451568051	4.19695496460214	0.78357005455474
45	19466.4871126662	4576.23176110257	5.96793002241570	0.89089084673126
50	26542.9427280356	5081.06219110005	8.17784257766088	0.99830477076644
55	35151.4911692424	5585.31781074625	10.8752834405527	1.10585057564113
60	45444.0315380609	6088.95385961914	14.1088435927454	1.21342245357349

Fonte: Produção do autor, 2015.

esta análise refere-se ao módulo elástico do elemento 1, E_1 . A expressão da perturbação neste caso é descrita por

$$\Delta b_2 = \varphi E_1, \quad (4.3)$$

considerando os mesmos valores de perturbação φ , implicando na perturbação efetiva de $[10^{-25}, 10^4]MPa$.

Os resultados obtidos em ambas as perturbações, geométrica e material, são apresentadas primeiramente para a formulação linear na Seção 4.1.1, seguido pela formulação não linear geométrica na Seção 4.1.2.

4.1.1 Formulação Linear

Na análise linear considera-se apenas um incremento de força. Desta forma, a norma ℓ_1 do vetor sensibilidade definida por

$$S_L = \sum_{i=1}^{ntn} \left(\left| \frac{du_i}{db_j} \right| + \left| \frac{dv_i}{db_j} \right| \right), \quad (4.4)$$

é utilizada como medida global, uma vez que inclui todas as componentes da sensibilidade do deslocamento. Outra medida utilizada ao longo desta Seção é o erro relativo associado, cuja expressão

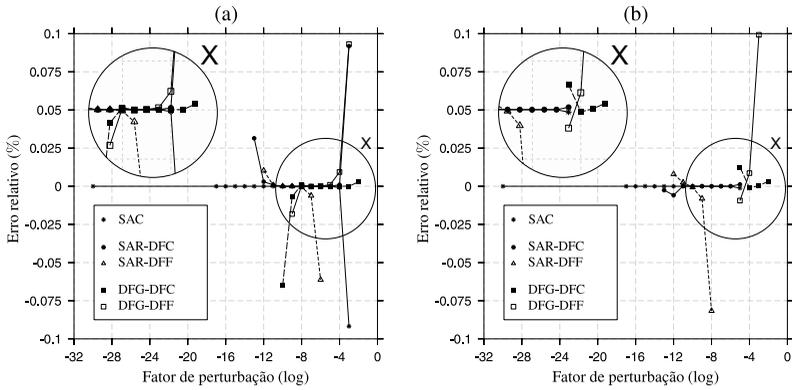
$$E_L = 100 \times \frac{S_L - Ref}{Ref}, \quad (4.5)$$

depende dos valores Ref , obtidos via análise de sensibilidade utilizando o método SAC com $\varphi = 10^{-30}$ e cujos valores são apresentados na Tab. 1.

4.1.1.1 Perturbação na Variável de Forma ($j = 1; b_1 = L_v$)

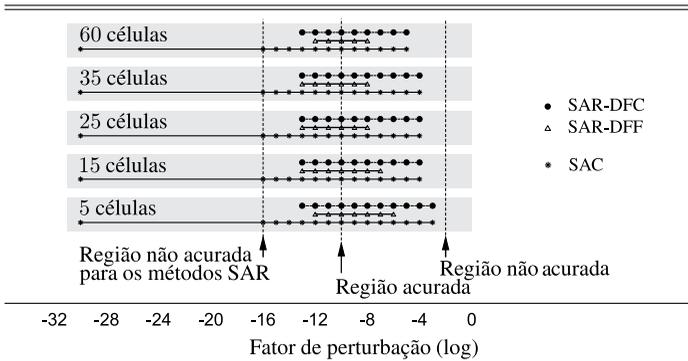
Para 5 células, a Fig. 18a mostra que a utilização do método SAR-DFE apresenta valores acurados para fatores de perturbação variando entre $\varphi = 10^{-12}$ e 10^{-6} , enquanto que o SAR-DFC apresenta este mesmo comportamento para fatores entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-3} . O método DFG apresenta uma faixa de acurácia distinta quando comparado aos métodos SA, de $\varphi = 10^{-10}$ até 10^{-2} para DFG-DFC e de $\varphi = 10^{-9}$ até 10^{-3} para DFG-DFE. O procedimento complexo SAC mostra resultados não exatos somente para perturbações maiores que $\varphi = 10^{-3}$, onde a aproximação da sensibilidade corresponde não à derivada, mas à secante.

Figura 18 – Erro relativo para: (a) 5 células e (b) 60 células.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 19 – Faixa de acurácia dos métodos SA.



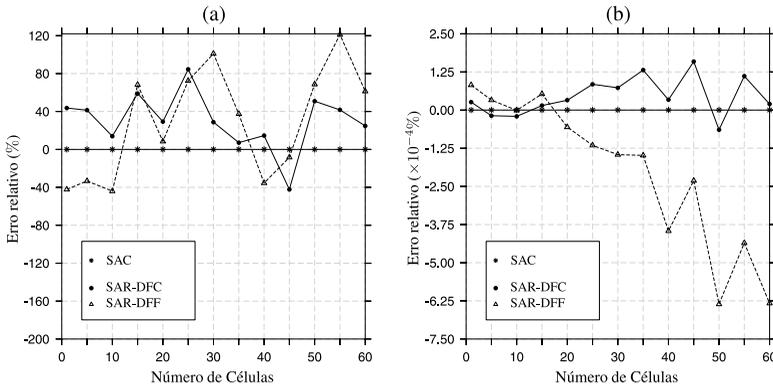
Fonte: Produção do autor, 2015.

Para 60 células, a Fig. 18b mostra que a faixa de acurácia de todos os métodos são reduzidos quando comparado à situação de 5 células. O método SAR apresenta valores acurados para fatores de perturbação variando de $\varphi = 10^{-13}$ até 10^{-5} para SAR-DFC e de $\varphi = 10^{-12}$ até 10^{-8} para SAR-DFE. O procedimento DFG apresenta boa qualidade nos resultados para grandes perturbações, contudo a faixa de acurácia é menor do que qualquer método SA, entre $\varphi = 10^{-5}$ e 10^{-2} para DFG-DFC e de $\varphi = 10^{-5}$ até 10^{-3} para DFG-DFE. O método SAC mostra resultados não acurados somente para fatores de perturbação maiores que $\varphi = 10^{-5}$. De fato, este método perma-

nece acurado para pequenas perturbações incluindo $\varphi = 10^{-300}$ (mínimo testado), onde possui uma diferença relativa de $3.56 \times 10^{-9}\%$ com referência em $\varphi = 10^{-30}$.

Conforme discussão em torno da Fig. 18, verifica-se que a faixa de acurácia é dependente do método empregado e do número de células em questão. O resumo dos resultados obtidos para o método SA são apresentados na Fig. 19 e os casos particulares considerando $\varphi = 10^{-16}$ (região não acurada para os métodos SAR), 10^{-10} (região acurada) e 10^{-2} (região não acurada) são estudados com maiores detalhes através das Figs. 20 e 21.

Figura 20 – Número de células versus erro relativo. Valores obtidos considerando: (a) $\varphi = 10^{-16}$ e (b) $\varphi = 10^{-10}$.

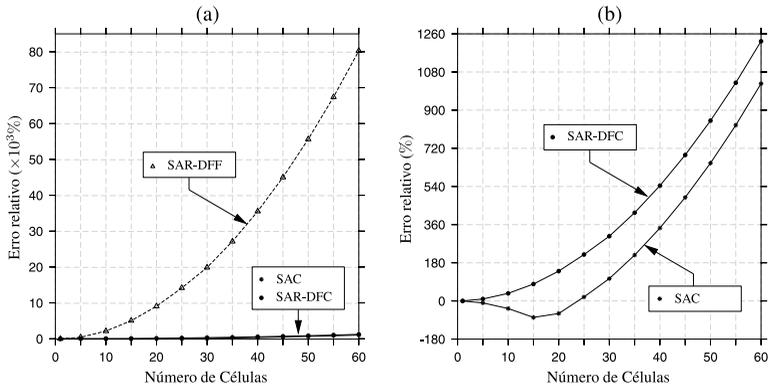


Fonte: Produção do autor, 2015.

A Fig. 20a mostra o comportamento do erro relativo em relação ao número de células considerando o fator de perturbação $\varphi = 10^{-16}$, cuja região não é acurada para os métodos SAR. Verifica-se que a curva do erro de ambos os métodos SAR-DFC e SAR-DFF oscilam em torno do valor de referência e altos valores de erros estão envolvidos. Entretanto, os valores obtidos via método SAC mantêm-se acurados e aproximadamente exatos em todo o domínio de análise. A Fig. 20b mostra o comportamento do erro relativo considerando $\varphi = 10^{-10}$. Para este fator, verifica-se com auxílio da Fig. 19 que trata-se de uma região onde todos os métodos SA são acurados. De fato, o erro máximo obtido pelos métodos SA não ultrapassa $6.35 \times 10^{-4}\%$. Enquanto que o método SAC apresenta erro máximo de $1.04 \times 10^{-8}\%$. Note que a escala do eixo vertical compreende uma faixa de valores muito baixos.

Conforme citado no início desta seção, este problema é construído de modo que apresente a patologia devido a presença da rotação de corpo rígido. A Fig. 21 mostra o crescimento do erro conforme o aumento do número de células considerando uma perturbação de $\varphi = 10^{-2}$, ou seja, uma perturbação efetiva de 1% no comprimento da viga. De acordo com a Fig. 19, para este fator todos os métodos SA não apresentam valores acurados.

Figura 21 – Número de células versus erro relativo. (a) Resultados considerando $\varphi = 10^{-02}$. (b) Detalhe para os métodos SAR-DFF e SAC.



Fonte: Produção do autor, 2015.

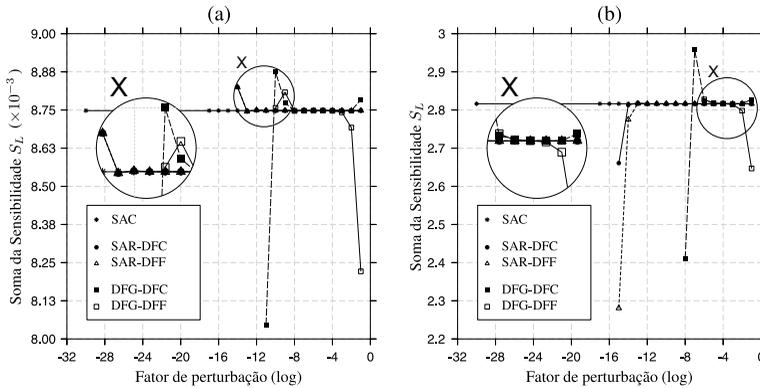
Nota-se que o método SAR-DFF apresenta erros de magnitude muito mais elevados do que os demais métodos analisados, chegando a valores de $8.0 \times 10^4\%$ para 60 células. Este erro passa a ser de $1.0 \times 10^3\%$ ao utilizar o método SAC e $1.2 \times 10^3\%$ ao utilizar o método SAR-DFC, valores relativamente mais baixos se comparado ao SAR-DFF. Contudo, a taxa de crescimento da curva via SAC é dada por um fator de $1.25 \times$ maior do que a taxa de crescimento da curva via SAR-DFF, a qual apresenta um crescimento quadrático (2.0), conforme indicado na literatura. O mesmo crescimento quadrático também é verificado para a curva via SAR-DFC. Percebe-se ainda que o SAC detêm erros menores, daqueles obtidos via SAR-DFC, em todo o domínio analisado.

4.1.1.2 Perturbação na Variável Material ($j = 2; b_2 = E_1$)

Verifica-se através da Fig. 22 que a perturbação do parâmetro material resulta em pouca variação da faixa de acurácia em todos os casos analisados. Em geral, os métodos SAR apresentam valores acurados para fatores de

perturbação entre $\varphi = 10^{-12}$ e 10^{-1} . Ambas variações do método DFG mostram um decréscimo na faixa de acurácia em relação ao crescimento do número de células, passando de $\varphi = 10^{-8}$ e 10^{-2} em 5 células para $\varphi = 10^{-5}$ e 10^{-2} em 35 células. Os valores via método complexo SAC detêm resultados aproximadamente exatos com erro máximo de $6.9 \times 10^{-12}\%$ para todos os fatores de perturbação analisados, inclusive para pequenos valores tais como $\varphi = 10^{-300}$ (mínimo testado).

Figura 22 – Número de células versus a soma da sensibilidade S_L . Valores obtidos considerando: (a) 5 células e (b) 35 células.



Fonte: Produção do autor, 2015.

4.1.2 Formulação Não Linear Geométrica

A mesma análise realizada no caso linear é refeita, agora considerando a formulação não linear geométrica. Nesta formulação considera-se grandes deslocamentos e rotações, e desta forma uma análise incremental se faz necessária. São aplicados 50 passos de carga em todos os casos e a sensibilidade do deslocamento com respeito aos parâmetros de forma e materiais são calculadas tendo como base a norma ℓ_1 da sensibilidade, cuja expressão

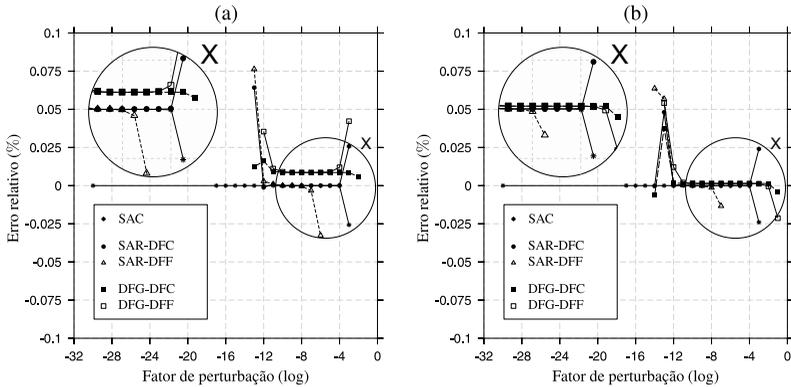
$$S_{NL} = \sum_{k=1}^{ninc} \sum_{i=1}^{ntn} \left(\left| \frac{du_i}{db_j} \right| + \left| \frac{dv_i}{db_j} \right| \right), \quad (4.6)$$

é utilizada para o cômputo do erro relativo

$$E_{NL} = 100 \times \frac{S_{NL} - Ref}{Ref}, \quad (4.7)$$

que depende dos valores Ref , obtidos via método SAC utilizando $\varphi = 10^{-30}$, cujos valores estão apresentados na Tab. 1. As Eqs. (4.6) e (4.7) podem ser interpretadas como uma extensão das Eqs. (4.4) e (4.5), respectivamente. Nesta extensão inclui-se a soma sobre todos os passos incrementais, considerando desta forma o histórico da sensibilidade ao longo da aplicação da carga.

Figura 23 – Erro relativo para: (a) 5 células e (b) 60 células.



Fonte: Produção do autor, 2015.

4.1.2.1 Perturbação na Variável de Forma ($j = 1; b_1 = L_v$)

Conforme a Fig. 23, o método SAR-DFC apresenta valores acurados para fatores de perturbação entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-3} para 5 células e de $\varphi = 10^{-14}$ até 10^{-3} para 60 células. A contraparte SAR-DFP apresenta uma estreita faixa de acurácia para qualquer número de células. Esta faixa compreende os fatores de $\varphi = 10^{-13}$ até 10^{-6} para 5 células e de $\varphi = 10^{-14}$ até 10^{-7} para 60 células. De modo geral, os métodos DFG proporcionam faixas de acurácia maiores e erros relativos menores quando comparados aos procedimentos SAR. Os valores obtidos via método DFG-DFC apresentam acurácia para fatores entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-2} no caso de 5 células e entre $\varphi = 10^{-14}$ e 10^{-1} para 60 células. A contraparte DFG-DFP apresenta valores acurados para fatores entre $\varphi = 10^{-12}$ e 10^{-3} e entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-1} para 5 e 60 células respectivamente. Esta figura ilustra claramente que o método SAC detém valores acurados para todos os fatores de perturbações menores do que $\varphi = 10^{-2}$ com erro máximo de $3.16 \times 10^{-8}\%$ para fatores abaixo de $\varphi = 10^{-5}$. Embora não seja mostrado, esta característica é observada para os fatores de perturbação tão pequenos quanto $\varphi = 10^{-300}$. A

diferença relativa entre os valores obtidos para $\varphi = 10^{-30}$ e $\varphi = 10^{-300}$ é de $-1.02 \times 10^{-10}\%$.

De modo similar a formulação linear, a faixa de acurácia depende do método empregado e do número de células. Desta forma, o resumo dos resultados obtidos via métodos SA são apresentados pela Fig. 24 e os casos particulares para $\varphi = 10^{-16}$ (região não acurada para o método SAR), 10^{-10} (região acurada) e 10^{-2} (região não acurada) são estudados com maiores detalhes através das Figs. 25 e 26.

Figura 24 – Faixa de acurácia dos métodos SA.

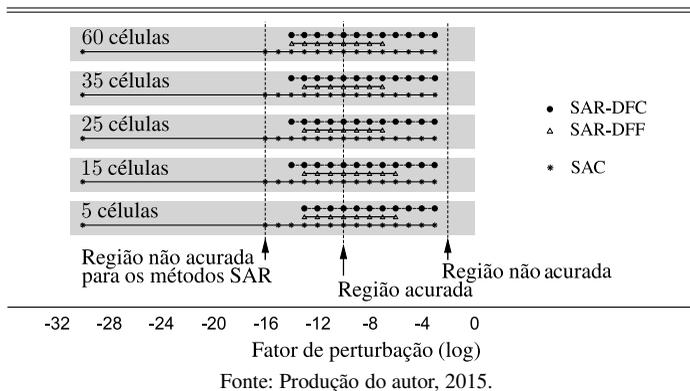
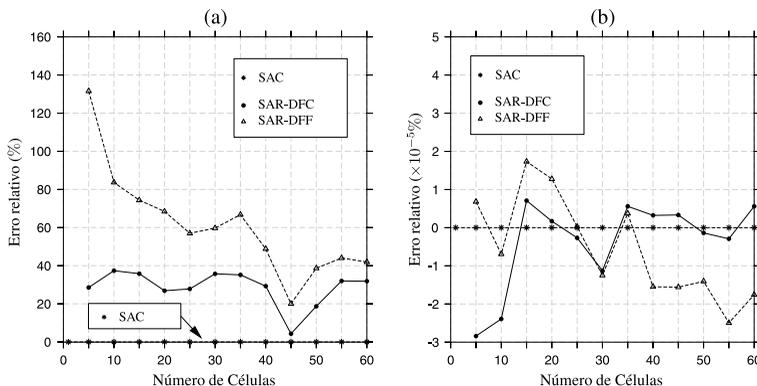
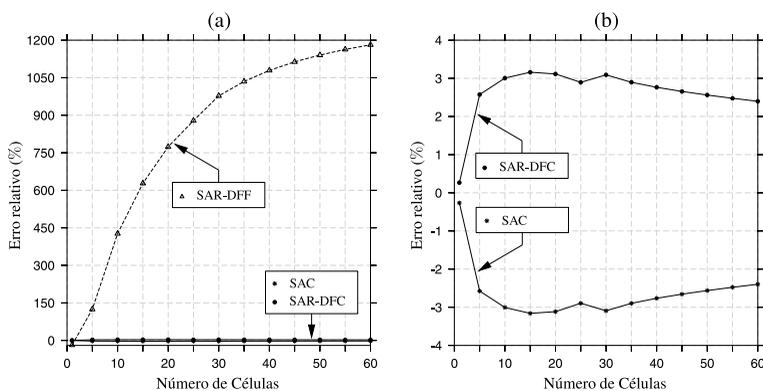


Figura 25 – Número de células versus erro relativo. Valores obtidos considerando: (a) $\varphi = 10^{-16}$ e (b) $\varphi = 10^{-10}$.



A Fig. 25a mostra a evolução do erro para $\varphi = 10^{-16}$. Enquanto que o método SAR possui erros de grande magnitude, a alternativa via SAC apresenta erros abaixo de $7.12 \times 10^{-11}\%$. A Fig. 25b mostra o comportamento do erro para $\varphi = 10^{-10}$. Neste caso, todos os métodos SA são acurados. Ambos os procedimentos SAR oscilam em torno do valor de referência, apresentando erro máximo de $1.72 \times 10^{-4}\%$ (para 1 célula). Novamente o método SAC detém resultados acurados com erros abaixo de $7.59 \times 10^{-11}\%$.

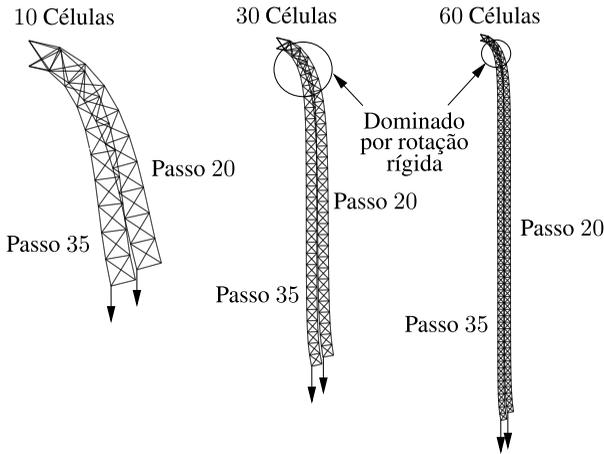
Figura 26 – Número de células versus erro relativo. (a) Resultados considerando $\varphi = 10^{-02}$. (b) Detalhe para os métodos SAR-DFC e SAC.



Fonte: Produção do autor, 2015.

A patologia associada com a rotação de corpo rígido também se faz presente na formulação não linear. A Fig. 26 mostra o comportamento do erro em relação ao crescimento do número de células considerando o fator de perturbação de $\varphi = 10^{-2}$. Nota-se que, diferente daquele apresentado anteriormente considerando a formulação linear, o erro não atinge magnitude tão elevada e o crescimento não é tão acentuado. Em 60 células, o método SAR-DFC atinge erros de $1.18 \times 10^3\%$, enquanto que o erro da contraparte complexa passa a ser de -2.40% . Além disso, verifica-se que em oposição ao que acontece no caso linear, a taxa de crescimento do erro reduz com o aumento do número de células. Este comportamento pode ser explicado pelo fato de que acima de aproximadamente 30 células um número considerável de células sofrem rotações rígidas, conforme visualizado na Fig. 27. Logo após, a flexão começa a perder importância e a deformação torna-se dominada pelo alongamento e o erro da patologia se aproxima de um limite constante. Esse fenômeno não é verificado tão fortemente para o método SAC e reduz a medida que o fator de perturbação diminui.

Figura 27 – Região dominada por rotação rígida para uma viga modelada utilizando elementos de barra para 10, 30 e 60 células.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Com a finalidade de tornar este ponto ainda mais claro, as Figs. 28 e 29 mostram a evolução do erro da sensibilidade incremental para SAR e SAC com $\varphi = 10^{-2}$, agora definidos nodalmente (sobrescrito “no”) por

$$EA_n^{\text{no}} = |S_n^{\text{no}} - Ref^{\text{no}}| \quad \text{e} \quad ER_n^{\text{no}} = 100 \times \frac{S_n^{\text{no}} - Ref^{\text{no}}}{Ref^{\text{no}}}, \quad (4.8-4.9)$$

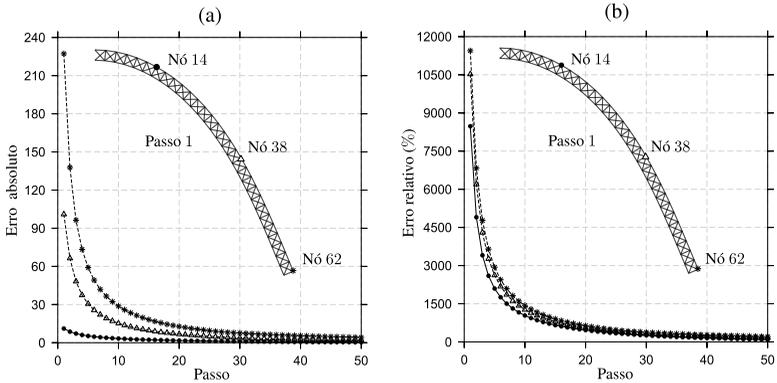
onde

$$S_n^{\text{no}} = \left(\left| \frac{du_n^{\text{no}}}{db_1} \right| + \left| \frac{dv_n^{\text{no}}}{db_1} \right| \right), \quad (4.10)$$

e Ref^{no} os valores obtidos via método SAC considerando $\varphi = 10^{-30}$.

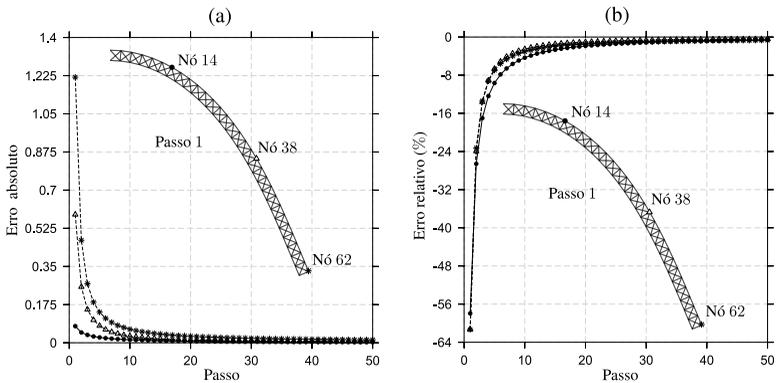
Nota-se que a região do nó 14 é sujeita a deformações e rotações, enquanto o nó 62 sofre somente rotação rígida e alongamento. Pelo fato do método SAC admitir pequenos fatores de perturbação de uma maneira muito estável, não é problema aplicar por exemplo $\varphi = 10^{-29}$, sendo este um valor não suportado pelo SAR. Nesta situação, os erros absolutos e relativos máximos no nó 62 são aproximadamente $5.9 \times 10^{-12}\%$ e $3.0 \times 10^{-10}\%$, respectivamente. Em outras palavras, a patologia é eliminada.

Figura 28 – Erros absolutos (a) e relativos (b) para nós sujeitos a muito, intermediária e pouca rotação rígida (nós 62, 38 e 14). Resultados utilizando o método SAR-DFF e $\varphi = 10^{-2}$.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 29 – Erros absolutos (a) e relativos (b) para nós sujeitos a muito, intermediária e pouca rotação rígida (nós 62, 38 e 14). Resultados utilizando o método SAC e $\varphi = 10^{-2}$.



Fonte: Produção do autor, 2015.

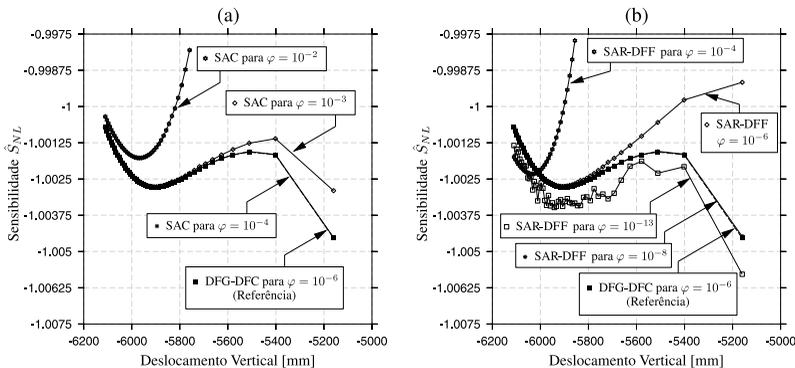
4.1.2.1.1 Efeitos da Tolerância e do Fator de Perturbação na Sensibilidade

Verifica-se que a tolerância utilizada para a solução do processo iterativo afeta fortemente a acurácia da sensibilidade do deslocamento. O mesmo é verificado para o tamanho do fator de perturbação. De modo a mos-

trar este efeito, uma viga de 60 células é tomada como referência. O estudo é realizado para os métodos SAR-DFE e SAC, e os resultados são comparados ao DFG-DFC. Nas análises realizadas, S_{NL} é particularizado para o nó do carregamento (nó inferior na extremidade livre) e para a carga corrente (incremento), assim renomeado \hat{S}_{NL} .

A Fig. 30 mostra a evolução da sensibilidade \hat{S}_{NL} versus o deslocamento vertical do nó de carga enquanto a viga se deforma. Cada curva refere-se a um fator de perturbação diferente, mantendo a tolerância fixa em 10^{-9} no procedimento iterativo. Na Fig. 30a é possível verificar que para $\varphi = 10^{-2}$ a curva do via método SAC se distancia do comportamento ideal, ao passo que para $\varphi \leq 10^{-4}$ a curva se assemelha com a de referência. A Fig. 30b apresenta a influência do fator de perturbação nos resultados via método SAR-DFE considerando a mesma tolerância fixa. Neste caso, somente para fatores entre $10^{-12} \leq \varphi \leq 10^{-8}$ a curva de sensibilidade reproduz o comportamento de referência. Claramente, todas as curvas apresentam grandes erros nos primeiros passos de carga (deslocamentos inferiores, do lado direito dos gráficos), onde a rotação rígida afeta mais elementos e a patologia contamina os resultados.

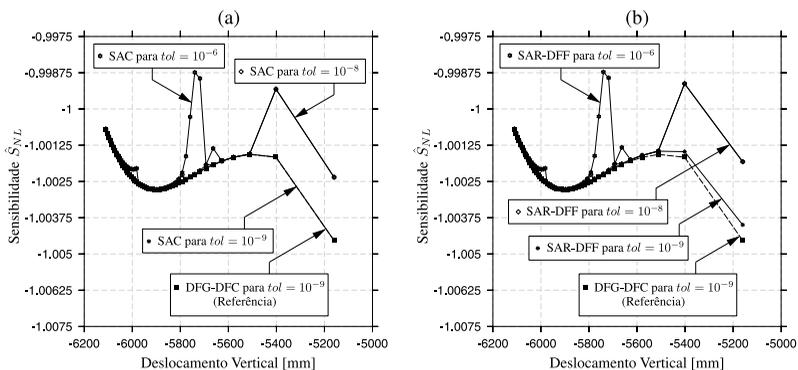
Figura 30 – Variação da sensibilidade do nó da extremidade livre mantendo tolerância fixa em $tol = 10^{-9}$ via: (a) SAC e (b) SAR-DFE.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Como $\varphi = 10^{-7}$ mostrou levar a pequenos erros em ambos os métodos SA, este valor é tomado constante para diferentes tolerâncias no processo iterativo. A Fig. 31 mostra as curvas resultantes para os métodos SAC e SAR-DFE, correspondendo às Figs. 31a e 31b respectivamente. As curvas de sensibilidade obtidas via método SAC utilizando as tolerâncias 10^{-8} e 10^{-9} são praticamente indistinguíveis, exceto para os dois primeiros incrementos.

Figura 31 – Variação da sensibilidade do nó da extremidade livre mantendo perturbação fixada em 10^{-7} via: (a) SAC e (b) SAR-DFF.



Fonte: Produção do autor, 2015.

O método SAR-DFF mostra um comportamento similar, contudo as curvas obtidas para as tolerâncias 10^{-8} e 10^{-9} diferem visualmente uma da outra nos primeiros 8 incrementos.

4.1.2.2 Perturbação na Variável Material ($j = 2; b_2 = E$)

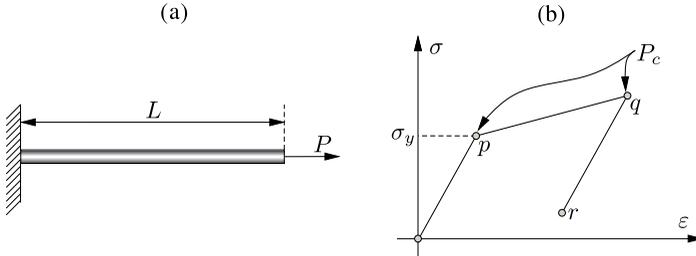
Assim como no caso linear, a perturbação no parâmetro material proporciona grandes faixas de acurácia nos casos analisados. Resumidamente, verifica-se que todos os métodos SAR apresentam valores acurados para perturbações variando entre $\varphi = 10^{-14}$ e 10^{-1} . Os métodos DFG apresentam faixas de acurácia ligeiramente reduzidos se comparado com os métodos SA, entre $\varphi = 10^{-11}$ e 10^{-3} . O método complexo SAC mostrou mais uma vez ser praticamente exato (erros da ordem $10^{-12}\%$) em todos os valores de perturbação do domínio analisado, inclusive para pequenos fatores tal como $\varphi = 10^{-300}$ (mínimo testado).

4.2 BARRA ELASTOPLÁSTICA

A análise da sensibilidade de problemas que possuem comportamento elastoplástico necessita de atenção especial por tratar de um problema típico de dependência da trajetória. Para esta natureza de problemas, o estudo das descontinuidades dos coeficientes da sensibilidade aparecem em destaque em diversos trabalhos da literatura (TSAY; CARDOSO; ARORA, 1990b;

LEE; ARORA, 1995; KLEIBER; KOWALCZYK, 1996; CONTE; VIJALAPURA; MEGHELLA, 2003).

Figura 32 – (a) Barra sujeita a carregamento axial. (b) Relação material da respectiva barra.



Fonte: Produção do autor, 2015.

A descontinuidade da sensibilidade tem origem devido a um número finito de comutações entre estados materiais, ou seja, entre estado elástico e plástico ou vice-versa (KLEIBER et al., 1997). Ela pode ocorrer para diferentes parâmetros nos pontos limites dos estados materiais. Com o objetivo de investigá-la, considere uma barra elastoplástica geometricamente linear sujeita a um carregamento axial, conforme ilustrado na Fig. 32a, cuja relação tensão-deformação é representada na Fig. 32b. Nesta figura, P_c indica os pontos de comutação onde as descontinuidades podem ocorrer. Suponha também que a barra está sujeita tanto a carregamento quanto descarregamento. A partir de destas considerações, Tsay, Cardoso e Arora (1990b) e Lee e Arora (1995) apresentam a expressão analítica da sensibilidade, descrita na sequência.

1. Se a carga aplicada P encontra-se no regime elástico (região entre os pontos o e p na Fig. 32b), o deslocamento da barra é descrito pela expressão

$$u = \frac{PL}{EA}, \quad (4.11)$$

e diferenciando-o com respeito às variáveis de projeto E , A , L e P , obtém-se

$$du = \frac{LdP + PdL}{EA} - \frac{PL}{EA} \left(\frac{dE}{E} + \frac{dA}{A} \right). \quad (4.12)$$

2. Se a carga aplicada P situa-se no regime plástico (região entre os pontos p e q da Fig. 32b), o deslocamento é então descrito por

$$u = u_y - \frac{Eu_y}{E_T} + \frac{LP}{AE_T} \quad (4.13)$$

onde E_T refere-se ao módulo tangente elasto-plástico e $u_y = \sigma_y L / E$ ao deslocamento do ponto de escoamento. Diferenciando a Eq. (4.13) com respeito às variáveis de projeto E , E_T , L , u_y , P e A , obtém-se

$$\begin{aligned} du = & \left(1 - \frac{E}{E_T}\right) du_y - \frac{u_y dE}{E_T} + \frac{LdP}{AE_T} + \frac{PdL}{AE_T} + \\ & - \frac{LPdA}{A^2 E_T} + \left(Eu_y - \frac{LP}{A}\right) \frac{dE_T}{E_T^2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$du_y = \frac{\sigma_y dL}{E} - \frac{\sigma_y L dE}{E^2}. \quad (4.15)$$

3. A carga no caso anterior atinge seu valor máximo em P_{\max} , com deslocamento correspondente u_{\max} . O descarregamento segue trazendo a barra para o estado de descarga elástico (região entre os pontos p e r da Fig. 32b). Desta forma, o deslocamento é dado através de algumas manipulações por

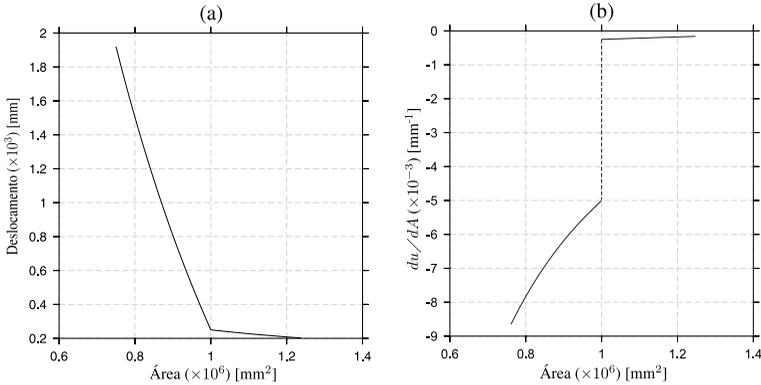
$$u = \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) (u_{\max} - u_y) + \frac{LP}{AE}. \quad (4.16)$$

Então, a variação do deslocamento em relação às variáveis de projeto E , E_T , P , L , E , u_{\max} , u_y e A , é obtida diferenciando a Eq. (4.16),

$$\begin{aligned} du = & \left(\frac{E_T dE}{E^2} - \frac{dE_T}{E}\right) (u_{\max} - u_y) + \\ & + \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) (du_{\max} - du_y) + \\ & + \frac{LdP + PdL}{EA} - \frac{PL}{EA} \left(\frac{dE}{E} + \frac{dA}{A}\right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

As Eqs. (4.12), (4.14) e (4.17) referem-se às expressões da sensibilidade do deslocamento obtidas analiticamente. Os termos dependentes do histórico na análise de sensibilidade estão presentes em du_{\max} e du_y .

Figura 33 – (a) Deslocamento da barra. (b) Sensibilidade do deslocamento com respeito a área da seção transversal.



Fonte: Produção do autor, 2015, baseado em Lee e Arora (1995, p. 34).

Com o intuito de mostrar graficamente a descontinuidade da sensibilidade, as expressões da sensibilidade anteriormente descritas são particularizadas para a variação na área da seção transversal. O deslocamento u no ponto de escoamento é obtido substituindo a expressão da carga correspondente $P_y = \sigma_y A$ na Eq. (4.11) ou na Eq. (4.13)

$$u^- = u^+ = \frac{P_y L}{EA}, \quad (4.18)$$

onde $-$ e $+$ indicam a direção negativa e positiva de mudança, respectivamente. Neste caso, o deslocamento é C^0 contínuo como ilustrado na Fig. 33a. Esta figura é obtida considerando os valores: $E = 2000Pa$, $K = 105Pa$, $\sigma_y = 50Pa$, $L = 1 \times 10^4 mm$ e $P_y = 50N$. Por outro lado, os coeficientes da sensibilidade apresentam descontinuidade no ponto de escoamento, uma vez que

$$\frac{du^-}{dA} = -\frac{P_y L}{EA^2} \neq -\frac{P_y L}{E_T A^2} = \frac{du^+}{dA}, \quad (4.19)$$

conforme Fig. 33b. Esta descontinuidade segue do fato de que neste ponto não existe derivada definida¹. Vale ressaltar que se a relação constitutiva apresentar comportamento suave (sem picos) entre as transições de estados materiais esta descontinuidade é eliminada.

¹ Da propriedade de limite, uma função terá uma derivada em um ponto se, e somente se, houver derivadas à direita e à esquerda neste ponto e se essas derivadas laterais forem iguais (THOMAS, 2009, p.150).

A sensibilidade na vizinhança de P_c é facilmente obtida quando a expressão analítica é conhecida, porém como discutido anteriormente tal expressão torna-se particular ao problema e por vezes, de difícil obtenção. O apelo natural nesta situação é a utilização de métodos numéricos, os quais devem ser capazes de descrever a descontinuidade adequadamente. A próxima seção tem por objetivo a aplicação dos métodos DFG e SA comparando-os com a solução obtida de forma analítica.

4.2.1 Aplicação dos Métodos Numéricos

Considere novamente a barra elastoplástica linear sujeita ao carregamento axial ilustrado na Fig. 32, agora adotando as seguintes dimensões e propriedades materiais: $A = 1 \times 10^6 \text{mm}^2$, $L = 1 \times 10^4 \text{mm}$, $P^* = 100 \text{N}$, $E = 2000 \text{Pa}$, $\sigma_y = 30 \text{Pa}$ e $K = 4000 \text{Pa}$. A sensibilidade do deslocamento é avaliada utilizando os métodos DFG, SAR e SAC juntamente com o método analítico. Como método de solução, opta-se por utilizar o método de NR por controle de carregamento (MCC) (ver Apêndice B) com $tol = 10^{-14}$ e $ninc = 100$ incrementos de carga. Os incrementos de carga são definidos como

$$\Delta P = \begin{cases} \Delta P^* + \psi & , \text{ se } n = 30 \\ -\Delta P^* & , \text{ se } n \geq 61 \\ \Delta P^* & , \text{ demais casos} \end{cases} \quad \text{e} \quad \Delta P^* = \frac{P^*}{ninc}, \quad (4.20-4.21)$$

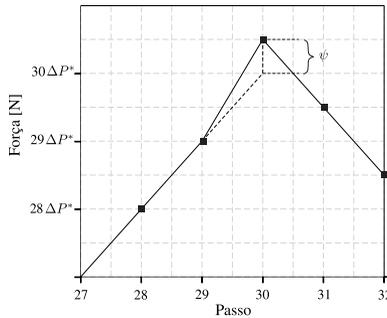
onde ψ refere-se ao fator utilizado para aproximar a carga aplicada do ponto de escoamento, ilustrado na Fig. 34. Assumindo por exemplo, $\psi = 10^{-1}$ e $\psi = 10^{-2}$ obtêm-se no passo $n = 30$ as cargas $P = 30.1 \text{N}$ e $P = 30.01 \text{N}$, respectivamente. A definição do incremento de carga adotada é utilizada para aproximar-se tanto quanto possível do ponto de escoamento, criando uma “situação limite”. Isto possibilita avaliar as derivadas laterais tão próximas quanto possível².

4.2.1.1 O Método Ideal

O método “idealizado” deve ser capaz de avaliar o coeficiente da sensibilidade no extremo de um mesmo estado material. A Fig. 35a mostra que o deslocamento perturbado se mantém no mesmo estado material do deslocamento original u (Estado A), enquanto que na Fig. 35b o deslocamento perturbado invade outro estado (Estado B), ocasionando erros na avaliação

² Esta aproximação é limitada pela precisão, conforme discussão na seção 3.1.2

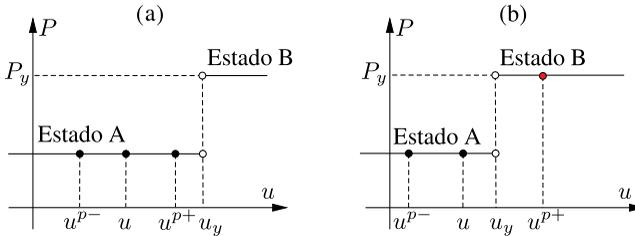
Figura 34 – Detalhe do incremento da força aplicada.



Fonte: Produção do autor, 2015.

da sensibilidade. Para que isto não ocorra, o fator de perturbação empregado deve ser pequeno de tal forma que mantenha a estrutura perturbada no estado original. Nesta figura, adota-se o sobrescrito $(.)^{p\pm}$ para indicar que $(.)$ encontra-se perturbado e u_y refere-se ao deslocamento da transição do estado.

Figura 35 – Procedimento idealizado para o cômputo da sensibilidade.



Fonte: Produção do autor, 2015.

4.2.1.2 Perturbação na Área da Seção Transversal ($j = 1; b_1 = A$)

A área da seção transversal da barra A é considerada como variável de projeto para o cômputo da sensibilidade do deslocamento. A perturbação desta variável é dada conforme

$$\Delta b_1 = \varphi A, \tag{4.22}$$

onde φ varia no intervalo $[10^{-300}, 10^{-1}]$. Adota-se como medida de erro a expressão da Eq. (4.7), baseada na norma ℓ_1 da sensibilidade do deslocamento

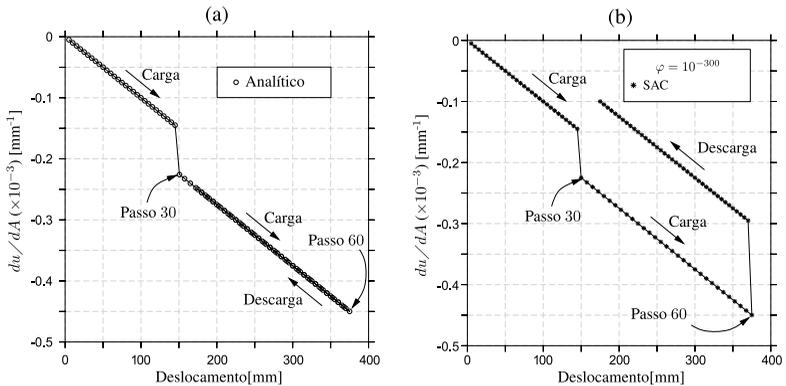
na direção horizontal do nó da extremidade livre

$$S_{NL} = \sum_{k=1}^{ninc} \left| \frac{du}{db_1} \right|, \quad (4.23)$$

sendo $Ref = 26.5382500$ o valor de referência obtido via método analítico.

A Fig. 36a mostra a curva da sensibilidade do deslocamento em relação à área da seção transversal utilizando a expressão analítica e $\psi = 10^{-15}$. Em analogia à Fig. 32, a região anterior ao passo $n = 29$ refere-se à região elástica localizada entre os pontos o e p , a região entre os passos $n = 29$ e $n = 60$ faz referência à região entre os pontos p e q , e a região entre os passos $n = 61$ e $n = 100$ à região entre os pontos q e r . Verifica-se a ocorrência da descontinuidade dos coeficientes na transição do regime elástico para o plástico (entre os passos $n = 29$ e $n = 30$). Não há indícios deste comportamento na transição do regime plástico para o elástico (entre os passos $n = 60$ e $n = 61$). Vale ressaltar que sob carga monotônica, não há necessidade de utilizar o procedimento de atualizações das variáveis internas para os métodos SA, pois neste caso o problema torna-se independente da trajetória (LEE; ARORA, 1995). Na Fig. 36b verifica-se que até o passo 60 (região de carregamento) os coeficientes obtidos correspondem ao obtido analiticamente.

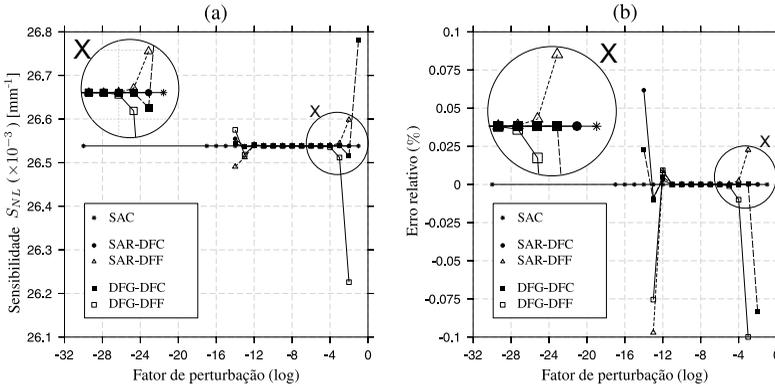
Figura 36 – (a) Coeficientes de sensibilidade analíticos. (b) Coeficientes de sensibilidade obtidos via método SAC desconsiderando a atualização das variáveis internas.



Fonte: Produção do autor, 2015.

As Figs. 37 e 38 mostram o comportamento da sensibilidade S_{NL} obtida ao longo dos fatores de perturbação utilizando $\psi = 10^{-1}$ e $\psi = 10^{-14}$.

Figura 37 – (a) Sensibilidade do deslocamento S_{NL} . (b) Erro relativo considerando $\psi = 10^{-1}$.

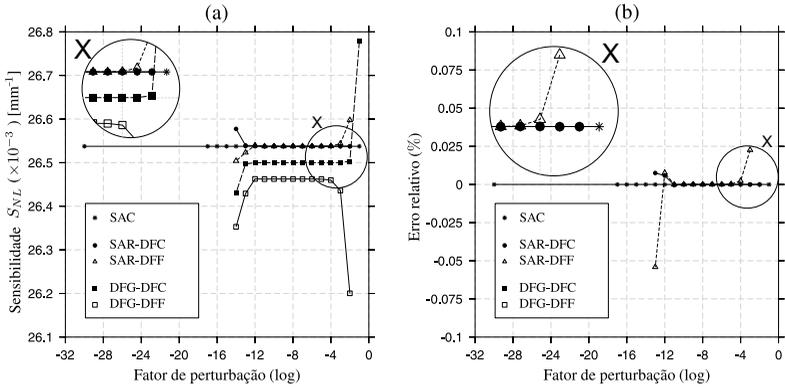


Fonte: Produção do autor, 2015.

Verifica-se que os métodos SAR apresentam larga faixa de acurácia, cujos valores permanecem quase que inalterados quanto à diminuição dos fatores de aproximação. Esta faixa se estende para fatores entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-2} para SAR-DFC e entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-3} para SAR-DFD, com erro mínimo de $-4.34 \times 10^{-7}\%$ em $\psi = 10^{-14}$. O método SAC detém resultados praticamente exatos, com erro máximo da ordem de $10^{-14}\%$ em todo o domínio de análise. O comportamento verificado para o método SA não se mantém para o método DFG. Neste caso, a faixa de acurácia é reduzida gradativamente, passando de acurado para fatores entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-3} em $\psi = 10^{-1}$, para fatores entre $\varphi = 10^{-12}$ e 10^{-8} em $\psi = 10^{-7}$. Em $\psi = 10^{-14}$ o método DFG não possui valores acurados, com erro mínimo de -0.14% para DFG-DFC e de -0.28% para a contraparte DFG-DFD.

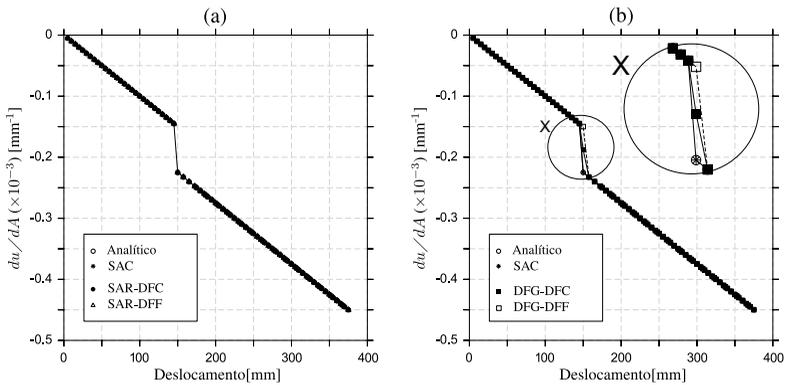
A fonte de erro do método DFG se deve àquela anteriormente discutida na seção 4.2.1. As Figs. 39a e 39b mostram respectivamente os coeficientes da sensibilidade obtidos mediante utilização dos métodos SA e DFG, considerando, sem perda de generalidade, $\psi = 10^{-7}$ e $\varphi = 10^{-4}$. Através da região em destaque da Fig. 39b nota-se que o método DFG não descreve adequadamente a descontinuidade. Neste caso, os erros passam a ser de -16.66% e de -33.33% no passo $n = 30$ para DFG-DFC e DFG-DFD, respectivamente.

Figura 38 – (a) Sensibilidade do deslocamento S_{NL} . (b) Erro relativo considerando $\psi = 10^{-14}$.



Fonte: Produção do autor, 2015.

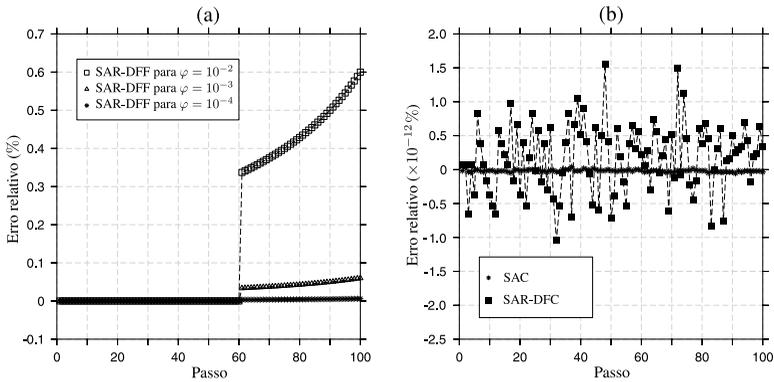
Figura 39 – Coeficientes de sensibilidade via: (a) Métodos SA. (b) Métodos DFG. Valores obtidos para $\psi = 10^{-7}$ e $\varphi = 10^{-4}$.



Fonte: Produção do autor, 2015.

A Fig. 40a mostra o erro relativo do método SAR-DFD avaliado em cada passo incremental. Quando a barra é submetida ao descarregamento o erro cresce rapidamente e nos passos seguintes este erro é acumulado. Este erro está associado com a etapa de atualizações das variáveis internas. Contudo, vale ressaltar que a medida que o fator de perturbação é reduzido o erro decresce rapidamente. Nos demais métodos SA, este comportamento não é identificado conforme ilustrado na Fig. 40b.

Figura 40 – (a) Erro via método SAR-DFF para $\psi = 10^{-1}$. (b) Erro via métodos SAR-DFC e SAC para $\psi = 10^{-1}$ e $\varphi = 10^{-2}$.

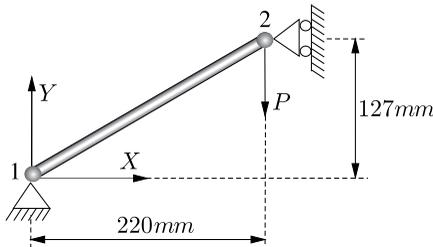


Fonte: Produção do autor, 2015.

4.3 SNAP THROUGH

O *snap-through* é um típico exemplo que envolve não linearidade geométrica. Este problema tem sido objeto de estudo de diversos autores, entre eles Crisfield (1991), Stahlschmidt (2013), Suzuki e Muñoz-Rojas (2014). A Fig. 41 ilustra a geometria da estrutura em questão munida das seguintes dimensões e propriedades materiais: $E = 21GPa$, $\sigma_y = 150MPa$, $A = 7mm^2$. O enfoque deste exemplo consiste em analisar a sensibilidade do deslocamento do nó 2 em relação a diversas variáveis de projeto, incluindo os parâmetros de dano. Para melhor visualização dos resultados, todos os dados nas figuras que envolvem deslocamento, força e sensibilidade são multiplicados pelo fator -1 .

Figura 41 – Problema *snap-through*.

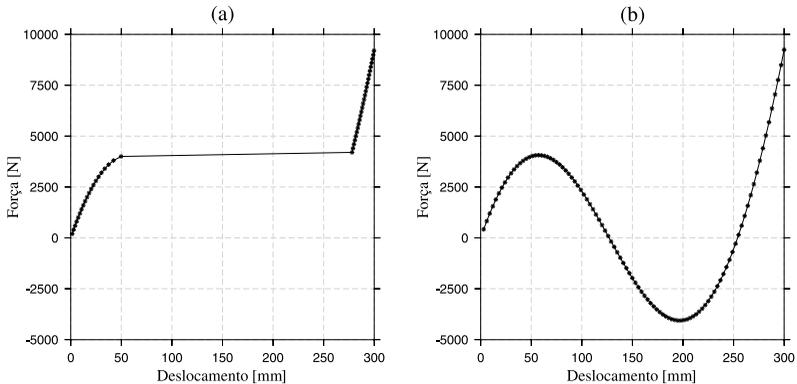


Fonte: Produção do autor, 2015.

4.3.1 Análise Inicial do Problema

Os métodos de solução para problemas não lineares baseados em controle de força como por exemplo o MCC, não descrevem a região instável da curva deslocamento versus carregamento (ver Apêndice B). Assim, é necessário utilizar um método de solução alternativo. O *software* ATENAS[©] 2.0 possui implementado o método do controle de deslocamentos generalizados (GDCM) para solução de problemas não lineares. Contudo, sua utilização apresenta dificuldades ao comparar os métodos de sensibilidade, visto que o passo utilizado pelo método é automático implicando em pontos distintos na análise. Desta forma, implementa-se no *software* ATENAS[©] 1.0 o método de NR baseado em controle de deslocamento (MCD). Porém, por tratar de um método com deslocamento prescrito não são empregados os métodos DFG, uma vez que a sensibilidade do deslocamento torna-se nulo. Isto não afeta os métodos SA, pois a perturbação na força interna ocorre após a convergência³.

Figura 42 – Método de solução por Newton-Raphson. (a) MCC e (b) MCD.

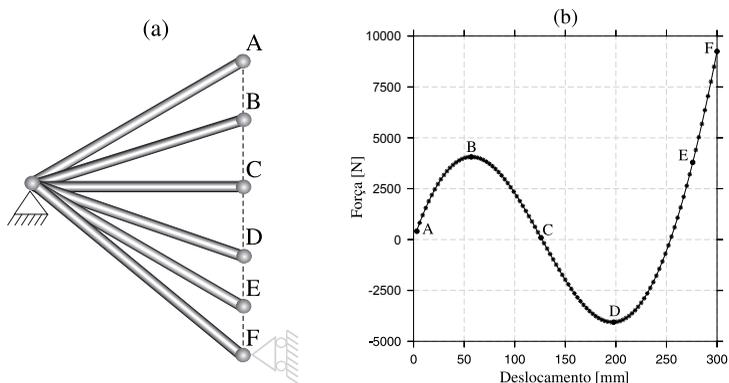


Fonte: Produção do autor, 2015.

Para fins ilustrativos, a Fig. 42 apresenta a curva de equilíbrio da estrutura utilizando o método de solução de NR baseado em controle de força e deslocamento para o caso elástico. Ressalta-se que ambas as curvas fazem sentido fisicamente. Na Fig. 42a, o salto do *snap-through* representa que há uma região em que um pequeno acréscimo de força resulta num grande deslocamento, um “solavanco” na estrutura. Para obter a curva da Fig. 42b aplica-se uma força com sentido oposto na região instável, em outras palavras, é

³ O deslocamento é imposto até a convergência, e uma vez convergido, a força interna é perturbada mantendo as demais variáveis constantes. A partir disto, verifica-se o quanto o deslocamento é afetado por esta perturbação.

Figura 43 – (a) Estado da barra. (b) Posição no equilíbrio no caso elástico.



Fonte: Produção do autor, 2015.

necessário segurar a estrutura para que não ocorra o “solavanco”. A Fig. 43 associa o estado da barra com sua posição na curva de equilíbrio estático.

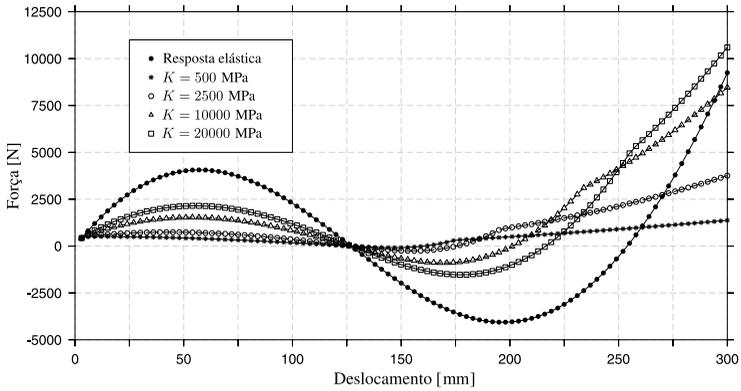
A Fig. 44 ilustra as curvas de equilíbrio para diferentes módulos de encruamento K . Nestas curvas, o comportamento plástico está presente desde o primeiro passo, com a barra no regime de compressão. Verifica-se a forte influência deste fator no equilíbrio, pois à medida que o mesmo diminui, menores são as forças necessárias para que ocorra o *snap-through*. Além disso, a posição horizontal dos pontos limites da curva também se alteram, isso será útil para futuras discussões. O mesmo ocorre considerando o dano, conforme ilustrado pela Fig. 45 para diferentes parâmetros r com $s = 1.0$, $K = 10GPa$, $D_c = 0.9$ e $\varepsilon^{pD} = 0.0$ fixos⁴.

Deste ponto em diante, adota-se por conveniência e puro teor acadêmico, os parâmetros: $K = 10GPa$, $s = 1.0$, $r = 2.5MPa$, $\varepsilon^{pD} = 0.07$ e $D_c = 0.5$.

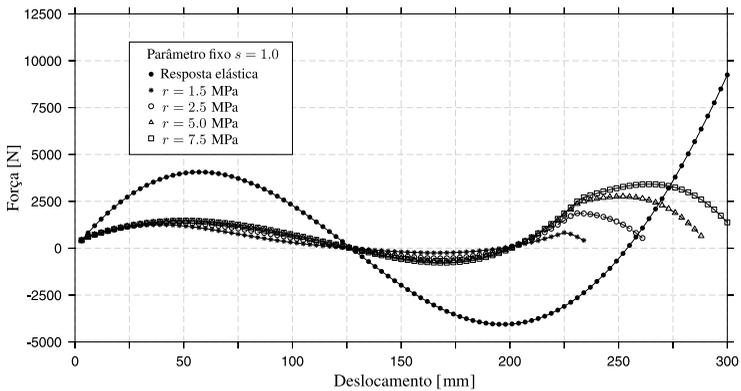
4.3.2 Análise da Sensibilidade

O estudo da sensibilidade do deslocamento é realizado considerando a formulação não linear geométrica com grandes deslocamentos e rotações, plasticidade e dano. Isto evidencia a dependência da trajetória. São aplicados $ninc = 100$ passos de deslocamento no intervalo entre 0 e 300mm, onde fazem-se presentes situações com carga e descarga. A medida global da sen-

⁴ Parâmetros adotados para finalidade acadêmica.

Figura 44 – Curvas de equilíbrio para diferentes valores de K .

Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 45 – Curvas de equilíbrio para diferentes valores de r .

Fonte: Produção do autor, 2015.

sibilidade do deslocamento do nó 2 é obtida com base na norma ℓ_1 vide Eq. (4.6), utilizada para o cômputo do erro relativo via Eq. (4.7). Os valores de referência Ref são obtidos pelo método SAC com $\varphi = 10^{-300}$ e $tol = 10^{-14}$, conforme Tab. 2. Os fatores de perturbação φ considerados neste problema variam no intervalo $[10^{-300}, 10^{-1}]$.

Tabela 2 – Valores de referência para o exemplo *snap-through*.

Variável de projeto	Elástico	Elastoplástico	Elastoplástico com dano
Coordenada	201.54736704324	120.29973974402	131.43811404184
Área	2556003.1794126	1678991.3259102	2139699.8532485
r	-	-	$4.26354686 \times 10^{-7}$
s	-	-	2.3183533059041

Fonte: Produção do autor, 2015.

4.3.2.1 Perturbação na Coordenada ($j = 1; b_1 = x_2$)

Nesta seção, adota-se a coordenada horizontal da barra como parâmetro para o cômputo da sensibilidade do deslocamento. As coordenadas horizontais são perturbadas conforme as expressões

$$\Delta b_1 = \varphi \mathbf{x}, \quad (4.24)$$

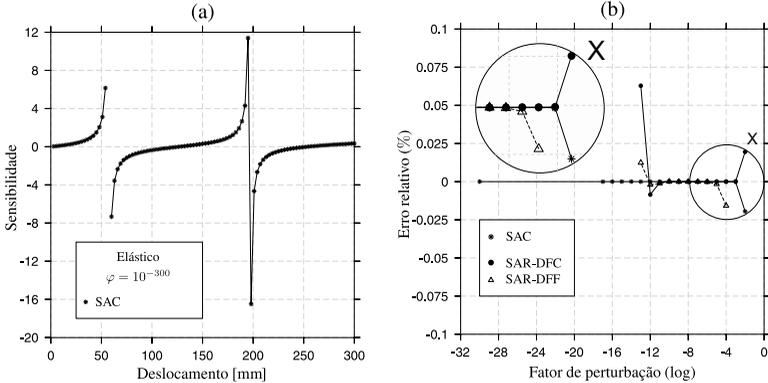
onde \mathbf{x} representa as coordenadas horizontais e φ o fator de perturbação variando entre $[10^{-300}, 10^{-1}]$.

No caso elástico, a Fig. 46a mostra os coeficientes da sensibilidade do deslocamento utilizando o método SAC e fator $\varphi = 10^{-300}$. Os picos que ocorrem em aproximadamente $60mm$ e $200mm$ referem-se aos pontos limites da curva de equilíbrio (pontos B e D da Fig. 43). Vale ressaltar que a origem destes picos se deve à singularidade da matriz de rigidez⁵. O erro relativo dos métodos SA ao longo dos fatores de perturbação são apresentados na Fig. 46b. Verifica-se que os métodos SAR apresentam acurácia para fatores entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-2} para SAR-DFC com erro mínimo de $-2.53 \times 10^{-9}\%$ em $\varphi = 10^{-6}$, e entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-4} para a contraparte SAR-DFF com erro mínimo de $-2.99 \times 10^{-6}\%$ em $\varphi = 10^{-8}$. O método complexo SAC possui uma larga faixa de acurácia, compreendida entre $\varphi = 10^{-300}$ e 10^{-2} com erro máximo da ordem de $10^{-14}\%$ para fatores de perturbação menores que $\varphi = 10^{-7}$.

O comportamento dos coeficientes da sensibilidade considerando a plasticidade são apresentados na Fig. 47a. Os picos que ocorrem em aproximadamente $60mm$ e $170mm$, estão relacionados com os novos pontos limites da curva de equilíbrio conforme Fig. 44. A plastificação por compressão tem início logo no primeiro passo e em aproximadamente $235mm$ há

⁵ Efetivamente, a matriz de rigidez não é singular nestes pontos analisados, entretanto a proximidade do ponto limite exato faz com que a rigidez tenda a ser singular

Figura 46 – (a) Coeficientes da sensibilidade obtidos ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação na coordenada. Caso elástico.



Fonte: Produção do autor, 2015.

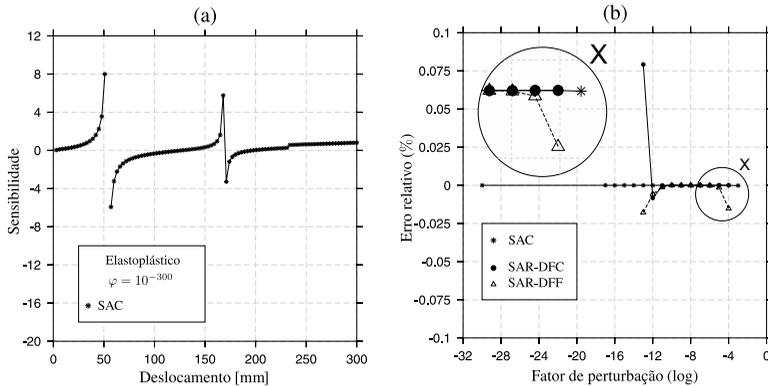
uma pequena mudança nos coeficientes da sensibilidade devido ao início da tração. Os erros dos métodos SA são mostrados na Fig. 47b. Note que há redução na faixa de acurácia dos métodos quando comparado ao caso puramente elástico. Os métodos SAR apresentam valores acurados para os fatores entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-4} , com erro mínimo de $-3.25 \times 10^{-6}\%$ em $\varphi = 10^{-8}$ para SAR-DFE. Novamente, o método complexo SAC mostra-se praticamente exato em quase todo domínio de análise com erro máximo da ordem de $10^{-14}\%$ para fatores abaixo de $\varphi = 10^{-8}$.

A Fig. 48 ilustra o comportamento da sensibilidade do deslocamento considerando o dano. O limiar de dano $\varepsilon^{pD} = 0.07$ é atingido no passo $n = 26$ com deslocamento aproximado 78mm , i.e., até este patamar os coeficientes das Figs. 47 e 48 coincidem. Diferentemente do caso elastoplástico, há também o surgimento de uma descontinuidade em aproximadamente 235mm devido à transição do regime de compressão para tração. Tratando das faixas de acurácia, nota-se uma pequena diminuição quando comparado aos casos anteriores, passando a ser de $\varphi = 10^{-12}$ e 10^{-4} e entre $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-6} para SAR-DFC e SAR-DFE, respectivamente. O método SAC detém valores acurados para fatores entre $\varphi = 10^{-300}$ e 10^{-4} , com erros da ordem de $10^{-13}\%$ para $\varphi \leq 10^{-9}$.

A Fig 49 mostra o resumo das faixas de acurácia dos métodos SA obtidos no decorrer desta seção. Ressalta-se que na avaliação da sensibilidade via SAR considerando os fatores de perturbação $\varphi = 10^{-1}$ e $\varphi = 10^{-2}$,

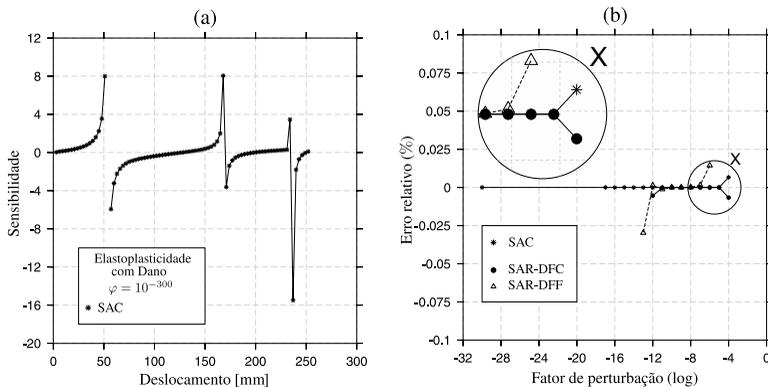
houve o surgimento de valores não definidos NaN, advindos do processo iterativo material. No caso complexo, este comportamento não foi identificado.

Figura 47 – (a) Coeficientes da sensibilidade obtidos ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação na coordenada. Caso elastoplástico.



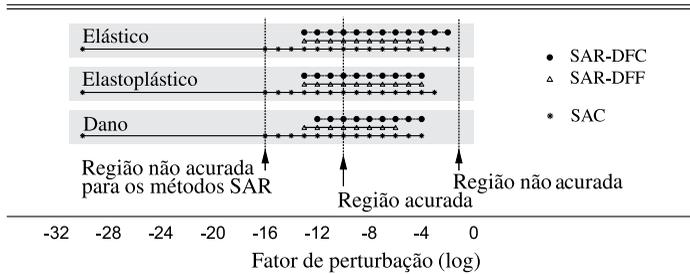
Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 48 – (a) Coeficientes da sensibilidade obtidos ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação na coordenada. Caso elastoplástico acoplado ao dano.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Figura 49 – Faixa de acurácia dos métodos SA. Perturbação nas coordenadas horizontais.

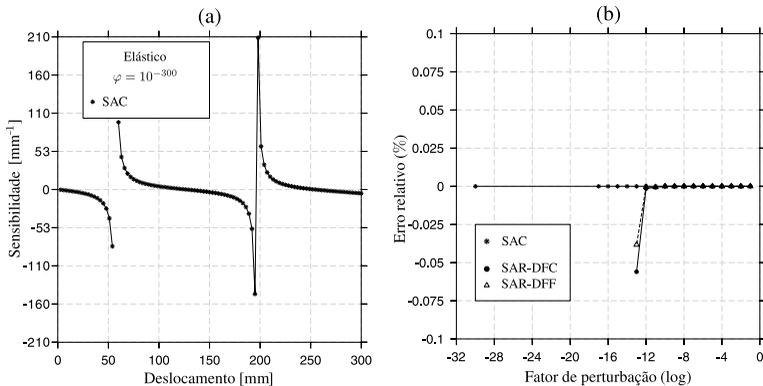


Fonte: Produção do autor, 2015.

4.3.2.2 Perturbação na Área da Seção Transversal ($j = 2; b_2 = A$)

Nesta seção, a área da seção transversal da barra é utilizada como parâmetro para o cálculo da sensibilidade do deslocamento, atualizada conforme Eq. (4.22). O estudo aqui realizado é semelhante ao descrito na seção 4.3.2. A formação de picos, devido aos pontos limites da curva de equilíbrio, se mantiveram em todos os casos analisados. Contudo, houve alteração na magnitude, no sentido de crescimento da curva da sensibilidade e na região de acurácia apresentada por cada método.

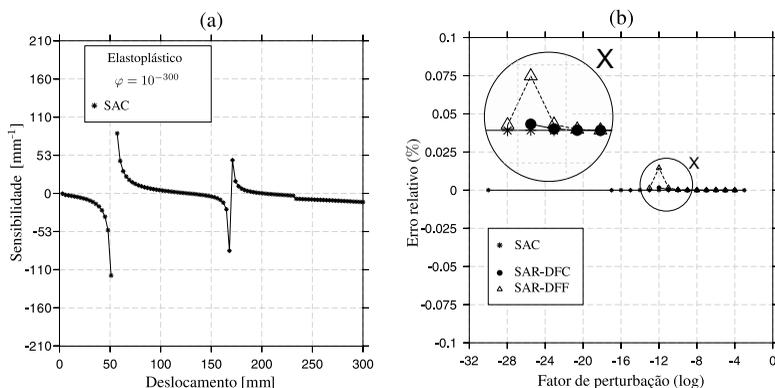
Figura 50 – (a) Coeficientes da sensibilidade ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação da área. Caso elástico.



Fonte: Produção do autor, 2015.

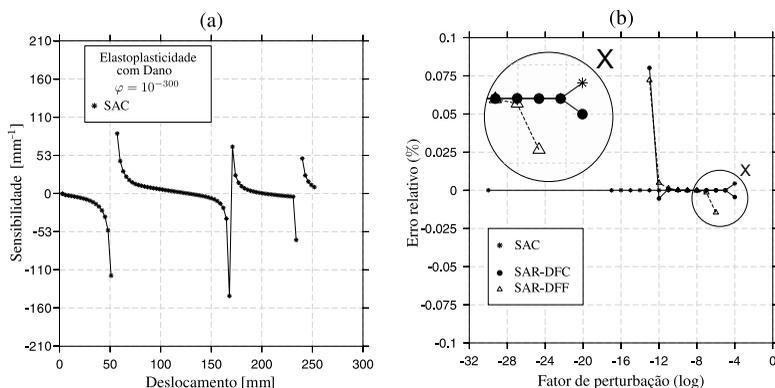
As Figs. 50, 51 e 52 mostram a sensibilidade obtida ao longo do deslocamento, bem como o erro em cada fator de perturbação considerando a formulação elástica, elastoplástica e elastoplástica com dano, respectivamente. De modo geral, o método SAC detém resultados acurados com erros da ordem de $10^{-14}\%$ em quase todo domínio analisado. Os métodos SAR apresentam erros mais elevados, com mínimo de $-1.10 \times 10^{-5}\%$ em $\varphi = 10^{-9}$ para SAR-DFC na formulação com dano.

Figura 51 – (a) Coeficientes da sensibilidade. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação da área. Caso elastoplástico.



Fonte: Produção do autor, 2015.

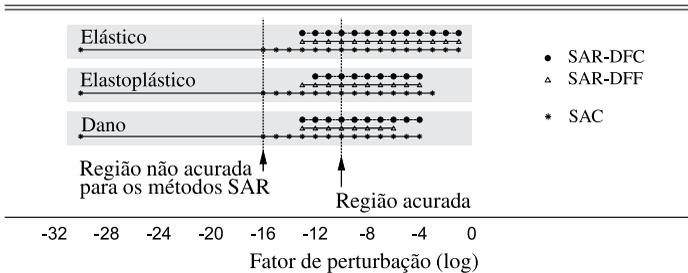
Figura 52 – (a) Coeficientes da sensibilidade. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variação da área. Caso elastoplástico acoplado ao dano.



Fonte: Produção do autor, 2015.

O resumo das faixas de acurácia dos métodos SA é descrito na Fig. 53. Verifica-se a redução dos intervalos ao considerar elastoplasticidade e elastoplasticidade acoplada ao dano, quando comparado apenas com a elasticidade. O caso particular para a formulação com dano e $\varphi = 10^{-15}$ (região não acurada para o SAR) é apresentada pela Fig. 54. O detalhe X mostra que os coeficientes obtidos via método SAR não reproduzem corretamente o comportamento da curva de referência.

Figura 53 – Faixa de acurácia dos métodos SA.



Vale ressaltar que todos os métodos SA apresentam valores indefinidos NaN para fatores de perturbação mais elevados. Para os métodos SAC e SAR-DFC, este comportamento surge para $\varphi = 10^{-1}$, enquanto que para SAR-DFE este valor passa a ser $\varphi = 10^{-2}$.

4.3.2.3 Perturbação nos Parâmetros de Dano ($b_3 = r; b_4 = s$)

As variáveis de projeto considerados nesta seção referem-se aos parâmetros do dano. As expressões das perturbações r e s são dadas respectivamente por

$$\Delta b_3 = \varphi r \quad \text{e} \quad \Delta b_4 = \varphi s, \quad (4.25-4.26)$$

com φ variando no intervalo $[10^{-300}, 10^{-1}]$.

A Fig. 55a mostra a curva dos coeficientes de sensibilidade do deslocamento com relação à variação do parâmetro de dano r , obtidos via método SAC com $\varphi = 10^{-300}$. Devido ao limiar de dano adotado, a sensibilidade do parâmetro r é nulo até aproximadamente 78mm . A mudança do comportamento na transição do estado de compressão para a tração também é evidente em 235mm . A partir da Fig. 55b verifica-se que o método SAR apresenta acurácia entre os fatores $\varphi = 10^{-13}$ e 10^{-7} com erro mínimo de $-1.08 \times 10^{-5}\%$

em $\varphi = 10^{-10}$. O método SAC apresenta valores acurados entre $\varphi = 10^{-300}$ e 10^{-5} , com erros abaixo de $10^{-13}\%$ para $\varphi \leq 10^{-10}$.

Figura 54 – Coeficientes de sensibilidade via método SA. Resultados para $\varphi = 10^{-15}$ considerando elastoplasticidade acoplada ao dano. Região não acurada para os métodos SAR.

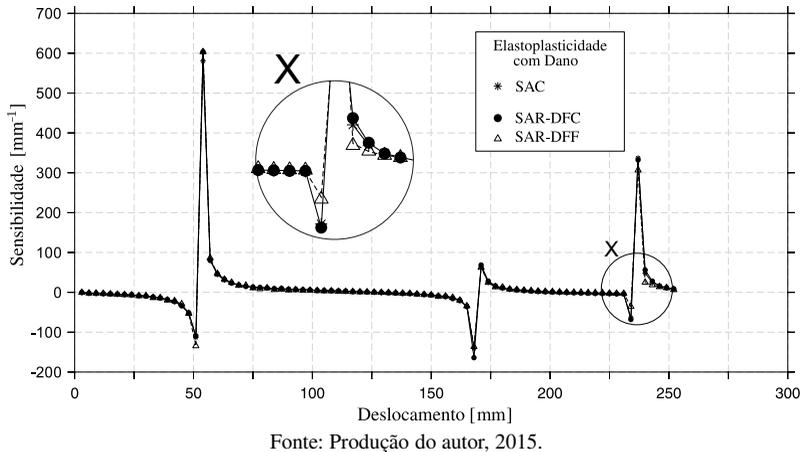
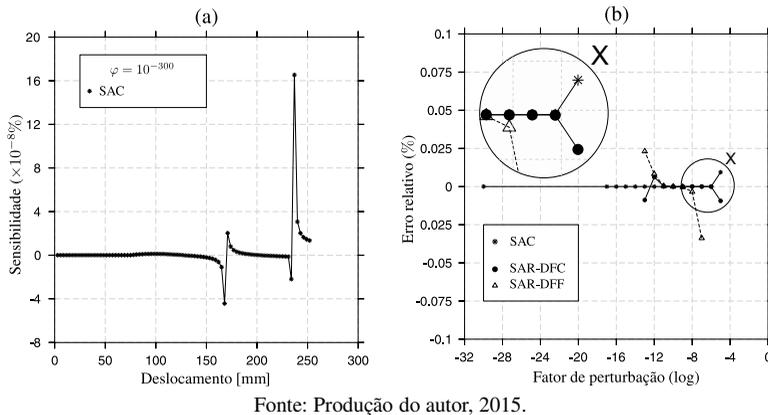
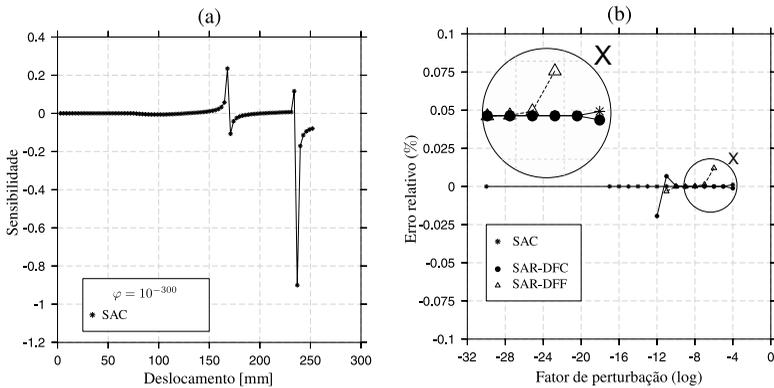


Figura 55 – (a) Coeficientes da sensibilidade ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variável de dano r .



A magnitude dos coeficientes obtidos para o parâmetro s de projeto é da ordem de $10^6 \times$ maior do que o obtido com a variação do parâmetro r , conforme Fig. 56a. O sentido de crescimento também é alterado, embora o

Figura 56 – (a) Coeficientes da sensibilidade ao longo do deslocamento vertical. (b) Erro relativo dos métodos SA. Variável de dano s .



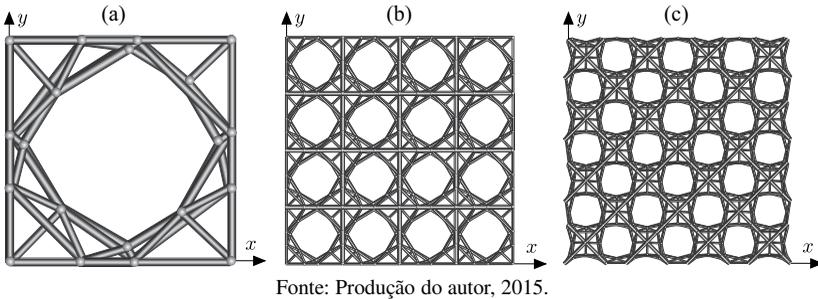
Fonte: Produção do autor, 2015.

comportamento seja semelhante. A partir da Fig. 56b, o método SAR-DFC detém valores acurados para fatores entre $\varphi = 10^{-12}$ e 10^{-4} com erro mínimo de $-1.88 \times 10^{-7}\%$ em $\varphi = 10^{-6}$, enquanto que para a contraparte SAR-DFF, este comportamento é verificado para fatores entre $\varphi = 10^{-11}$ e 10^{-6} com erro mínimo de $-1.04 \times 10^{-4}\%$ em $\varphi = 10^{-9}$. Novamente, o método complexo mostra-se acurado para fatores abaixo de $\varphi = 10^{-4}$ e com erro máximo da ordem de $10^{-13}\%$ para $\varphi \leq 10^{-9}$.

4.4 MATERIAL CELULAR PERIÓDICO

Materiais porosos constituídos de células treliçadas (MCCT) pertencem a uma família de estruturas celulares ultra-leves compostas por barras distribuídas por um padrão periódico. Estes materiais possuem interessantes propriedades termofísicas e mecânicas, tal como grande razão rigidez/peso e elevada capacidade de absorção de energia de deformação no impacto, as quais são ajustadas modificando a arquitetura da célula de repetição. Devido à periodicidade, os MCCT exibem baixa dispersão em suas propriedades físicas, o que em várias situações garante larga vantagem sobre os materiais celulares tradicionais como a espuma metálica (GUTH, 2012; GUTH; LUERSEN; MUÑOZ-ROJAS, 2012; GUTH; LUERSEN; MUÑOZ-ROJAS, 2015).

Figura 57 – (a) Célula unitária composta por elementos de barra. (b) Material periódico obtido pela translação da célula unitária. (c) Material da Fig. 57b rotacionado em 45° .



O propósito desta seção consiste em estudar um MCCT projetado para operar dentro do regime linear, quando sujeito a condições de não linearidade geométrica ou material. Para esta finalidade, utiliza-se o material celular ilustrado na Fig. 57a projetado para maximizar o módulo volumétrico mantendo a isotropia mecânica (GUTH, 2012). Esta célula possui as seguintes dimensões e parâmetros materiais⁶: $E = 210GPa$, $K = 150GPa$, $\sigma_y = 1500MPa$, $s = 1.0$, $r = 80MPa$ e ambos os lados medindo $100mm$ ⁷. As áreas, conectividades e coordenadas nodais são descritas na Tab. 3. A Fig. 57b apresenta a estrutura periódica gerada a partir da célula inicial utilizando translação, enquanto que a Fig. 57c a apresenta rotacionada em 45° . Nesta configuração verifica-se visualmente que há simetria geométrica. Ressalta-se que a sobreposição das barras resultam na soma das respectivas áreas.

O material periódico Π adotado para realizar este estudo é composto de 10×10 células (semelhante Fig. 57b). Considere a sub-região Γ gerada pelo arranjo de 4×4 células situada ao centro de Π . O carregamento P e as condições de contorno são ilustradas na Fig. 58a. A Fig. 58b descreve a configuração da estrutura após a aplicação da força obtida considerado a formulação linear. Com o intuito de minimizar o efeito de borda, os deslocamentos e deformações (necessários para estudos posteriores) são obtidos pela média dos valores avaliados na fronteira de Γ ($\partial\Gamma$). Esta escolha reduz as oscilações destas medidas quando comparado às avaliadas na fronteira de Π ($\partial\Pi$) (HAVOROTH, 2015). Os detalhes X e W na Fig. 58b mostram graficamente os efeitos gerados em $\partial\Pi$ e em $\partial\Gamma$, respectivamente. A partir deste momento,

⁶ Os parâmetros adotados correspondem a propósitos puramente acadêmicos.

⁷ As dimensões utilizadas para a célula são irrelevantes desde que a densidade relativa seja mantida, visto que rigorosamente a dimensão da célula deve tender a zero quando comparada com a escala macroscópica (HASSANI; HINTON, 1998).

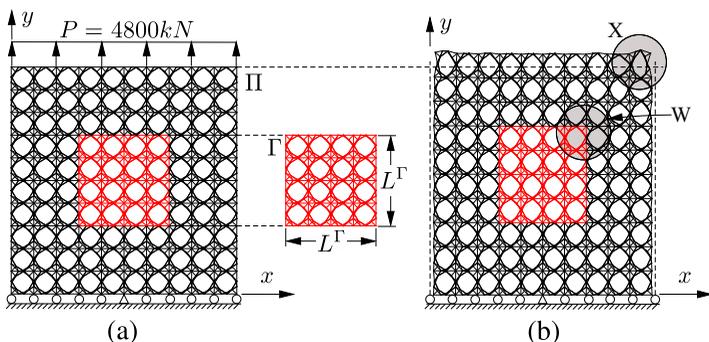
Tabela 3 – Áreas, conectividades e coordenadas nodais da célula unitária.

Elemento	Área mm^2	Conect.		Elemento	Área mm^2	Conect.	
1	9.669613	1	2	29	9.272591	8	5
2	7.722314	2	4	30	8.175303	10	16
3	7.851381	4	3	31	9.669613	16	14
4	9.691293	3	1	32	9.132902	14	5
5	7.652776	1	4	33	10.971773	5	16
6	11.463591	2	3	34	8.329162	10	14
7	10.730236	2	6	35	10.673757	15	18
8	7.723244	6	7	36	8.598719	18	12
9	15.681691	7	4	37	14.323816	12	9
10	9.443370	2	7	38	12.153701	9	18
11	12.153224	6	4	39	10.634020	15	12
12	8.664491	6	9	40	8.876196	18	17
13	14.114726	9	7	41	12.295989	17	12
14	11.518608	6	9	42	9.367847	12	18
15	9.313528	6	7	43	12.041171	18	17
16	9.144346	6	13	44	9.132902	18	20
17	9.691293	13	15	45	9.144346	20	19
18	8.102212	15	9	46	8.840667	19	17
19	10.943938	6	15	47	8.322829	17	20
20	8.304048	13	9	48	10.021312	18	19
21	15.679358	4	8	49	14.203331	10	11
22	7.708146	8	5	50	8.735145	11	19
23	10.673757	5	3	51	10.730236	19	16
24	9.481101	3	8	52	12.132112	10	19
25	12.061977	4	5	53	10.647780	11	16
26	14.104930	8	10	54	12.305260	11	17
27	8.674716	10	5	55	9.439316	11	19
28	11.557651	5	10	56	12.026649	17	19

Nó	Coord. x	Coord. y	Nó	Coord. x	Coord. y
1	0.0	0.0	11	53.3311	97.6912
2	32.3640	0.0	12	97.4020	53.2407
3	0.0	32.3341	13	100.0	0.0
4	21.9762	22.0174	14	0.0	100.0
5	0.0	55.8038	15	100.0	32.3341
6	55.5658	0.0	16	32.3640	100.0
7	52.0023	4.4080	17	79.7751	79.7404
8	4.3940	52.2151	18	100.0	55.8038
9	77.7629	20.1496	19	55.5658	100.0
10	19.9704	77.8184	20	100.0	100.0

adota-se o sobrescrito ($\bar{\cdot}$) para indicar que a variável (\cdot) é avaliada pela média das contribuições ao longo da fronteira.

Figura 58 – (a) Carregamento e condições de contorno. (b) Configuração obtida após aplicação da força considerando formulação linear. Detalhe para os efeitos gerados em $\partial\Pi$ e $\partial\Gamma$.



Fonte: Produção do autor, 2015.

Para realizar este estudo, a sensibilidade do módulo volumétrico em relação à densidade relativa ρ^* é avaliada considerando diferentes formulações. O módulo volumétrico K_V é o parâmetro definido como a razão entre a tensão hidrostática σ_H e a deformação volumétrica ε_V ⁸ (CHAVES, 2013). Estas medidas são definidas respectivamente por

$$\sigma_H = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \quad (4.27-4.28)$$

Para este problema em particular, K_V pode ser descrito como

$$K_V = \frac{\sigma_H}{\varepsilon_V} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\varepsilon_V} = \frac{\sigma_y}{2\varepsilon_V} = \frac{P}{2L\varepsilon_V} = \frac{P}{2\varepsilon_V}, \quad (4.29)$$

onde P é o carregamento distribuído ao longo de $L = 1\text{ m}$ (10 células de 100 mm cada) de Π . Note que $\sigma_x = 0$, pois existe somente tensão na direção y do corpo. Para fins de comparação, fazendo uso da Eq. (4.29) juntamente com uma análise linear, obtém-se $K_V = 89.9\text{ MPa}$, correspondendo a -2.19% de erro quando comparado ao valor $K_V = 91.8\text{ MPa}$ obtido por Guth (2012). Contudo, este erro passa a ser de -7.12% quando avaliado em $\partial\Pi$. Isto justifica o fato de obter as medidas em $\partial\Gamma$.

⁸ Na análise linear o módulo volumétrico é constante, o que não ocorre ao considerar comportamento não linear (PENN, 1970).

4.4.1 Expressão da Sensibilidade do Módulo Volumétrico

A densidade relativa ρ^* é definida como a razão entre o volume ocupado pelas barras V_b e o volume da célula V , isto é

$$\rho^* = \frac{V_b}{V}, \quad (4.30)$$

onde, adotando $\rho^* = 49\%$ e $V = 35.684248 \text{ mm}^3$, obtêm-se

$$V_b = 17.485281 \text{ mm}^3 \quad (4.31)$$

Estes valores são os mesmos da célula estudada por Guth (2012). A variação do módulo volumétrico em relação à ρ^* é descrita por

$$\frac{dK_V}{d\rho^*} = \frac{dK_V}{dV_b} \frac{dV_b}{d\rho^*}, \quad (4.32)$$

onde

$$\frac{dV_b}{d\rho^*} = V \quad \text{e} \quad \frac{dK_V}{dV_b} = \frac{dK_V}{d\bar{u}_x} \frac{d\bar{u}_x}{dV_b} + \frac{dK_V}{d\bar{u}_y} \frac{d\bar{u}_y}{dV_b}. \quad (4.33-4.34)$$

A partir das Eqs. (4.28) e (4.29), a Eq. (4.32) é reescrita como

$$\frac{dK_V}{d\rho^*} = \frac{-PV}{5(\bar{u}_x + \bar{u}_y)^2} \left[\frac{d\bar{u}_x}{dV_b} + \frac{d\bar{u}_y}{dV_b} \right]. \quad (4.35)$$

uma vez que $L^\Gamma = 400 \text{ mm}$. As grandezas $d\bar{u}_x/dV_b$ e $d\bar{u}_y/dV_b$ são avaliadas utilizando os métodos previamente descritos no Capítulo 3.

4.4.2 Análise da Sensibilidade

Variar ρ^* consiste basicamente em variar V_b , uma vez que V é fixo. Assim, para uma dada perturbação φ , o volume V_b é atualizado por

$$\Delta V_b = \varphi V_b = \varphi \sum_{e=1}^{nelem} A_e L_e = \sum_{e=1}^{nelem} (\varphi A_e) L_e \quad (4.36)$$

onde $nelem$ é o número total de elementos, A_e a área e L_e o comprimento do elemento e^9 . Nesta análise, φ varia no intervalo $[10^{-300}, 10^{-1}]$.

⁹ Note que a formulação de elementos de barra desenvolvida no capítulo anterior mantém a área da seção transversal constante, o que rigorosamente não ocorre.

As medidas globais adotadas para analisar a sensibilidade e o erro são definidas respectivamente como

$$S = \sum_{k=1}^{ninc} \left| \frac{dK_V}{d\rho^*} \right| \quad \text{e} \quad E = 100 \times \frac{S - Ref}{Ref}. \quad (4.37-4.38)$$

O valor de referência Ref é obtido via método SAC utilizando $\varphi = 10^{-300}$ cujos valores são apresentados na Tab. 4 para diferentes análises. A aplicação desta soma sobre os passos incrementais permite considerar o histórico da sensibilidade ao longo da aplicação da carga. Vale ressaltar que na formulação linear é necessário apenas um incremento de carga ($ninc = 1$). Para as demais análises considera-se $ninc = 50$. Devido aos problemas de borda envolvidos na análise, somente as barras cujos nós estão compreendidos entre $100mm \leq x \leq 900mm$ e $0 \leq y \leq 800mm$ são academicamente consideradas sujeitos ao dano.

Tabela 4 – Valores de referência para a sensibilidade.

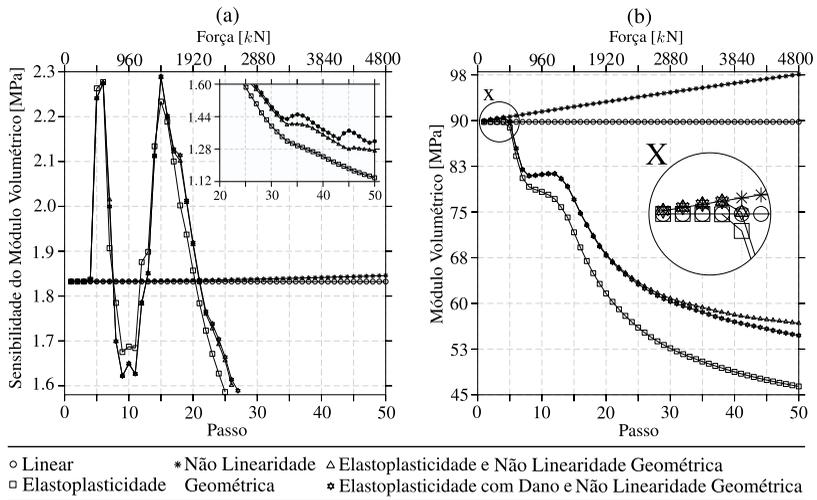
Análise	Valores de referência Ref
Linear	1832272.53108342
Não Linear Geométrica	91866961.0561386
Elastoplástica	79334910.8080563
Elastoplástica e Não Linear Geométrica	82082439.7992495
Elastoplastica com Dano e Não Linear Geométrica	83049902.3622271

Fonte: Produção do autor, 2015.

A Fig. 59a mostra o comportamento da sensibilidade do módulo volumétrico em relação à densidade relativa avaliada sobre os incrementos, considerando diferentes comportamentos geométricos e materiais. Estas curvas são obtidas via método SAC e fator de perturbação $\varphi = 10^{-300}$, cuja norma ℓ_1 refere-se aos valores da Tab. 4. Na análise não linear geométrica verifica-se um pequeno acréscimo da sensibilidade no decorrer dos incrementos quando comparado ao caso linear. Este acréscimo se deve à mudança da geometria das barras resultando numa configuração mais propensa à variação positiva do módulo volumétrico. A partir da Fig. 59b é possível notar que neste caso o módulo volumétrico passa a ser de $K_V = 97.6MPa$ no passo 50. A adição do comportamento não linear material resulta em grandes variações da sensibilidade ao longo dos incrementos. Em ambos os casos há uma notável diminuição do módulo volumétrico passando a ser $K_V = 46.4MPa$, $K_V = 54.7MPa$ e $K_V = 56.7MPa$ no passo 50, considerando plástici-

dade, não linearidade geométrica e plasticidade com e sem dano, respectivamente. O comportamento oscilatório entre os passos 6 e 15 deve-se à sequência com que a plastificação ocorre na estrutura, manifestada em grande parte pela soma das sensibilidades dos deslocamentos em relação ao volume das barras (termo entre colchetes na Eq. (4.35)), ilustrado pela Fig. 60a.

Figura 59 – (a) Sensibilidade do módulo volumétrico em relação à densidade relativa versus incremento. Valores de referência obtidos via método SAC considerando $\varphi = 10^{-300}$. (b) Módulo volumétrico versus incremento considerando diferentes formulações.

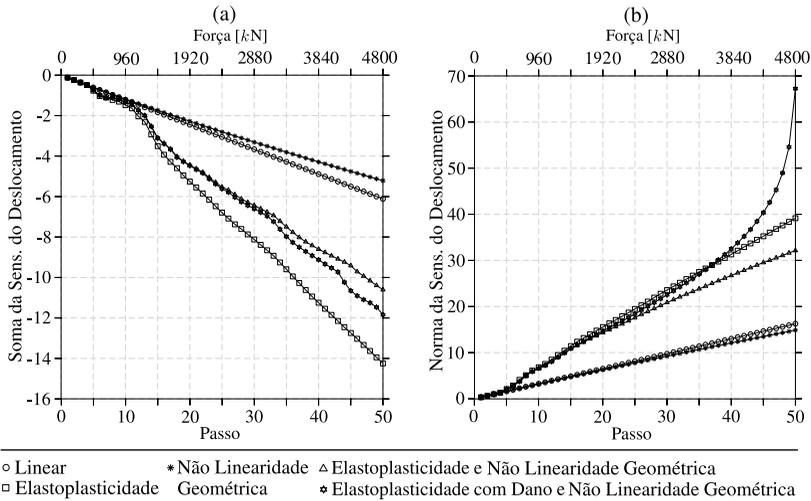


Fonte: Produção do autor, 2015.

Através da Fig. 60a, verifica-se a sobreposição das sensibilidades do deslocamento nas direções horizontal e vertical, devido a soma entre as partes (sem módulo). A Fig. 60b mostra a norma ℓ_2 da sensibilidade destas componentes. Neste caso, nota-se um crescimento acentuado da curva de sensibilidade na formulação com dano. Assim, uma grande variação na sensibilidade do deslocamento são significa, necessariamente, que outras sensibilidades (dependentes desta) possam comportamento semelhante.

Um resumo da faixa de acurácia dos métodos de sensibilidade considerando os vários tipos de análise é apresentado na Fig 61. Em geral, todos os casos analisados mostram que os métodos SA detêm faixas de acurácia maiores do que os métodos DFG. Em especial o método SAC, que apresenta resultados acurados para todos os fatores do domínio analisado com erro abaixo de $10^{-11}\%$ desconsiderando o dano e abaixo de $10^{-6}\%$ considerando o dano

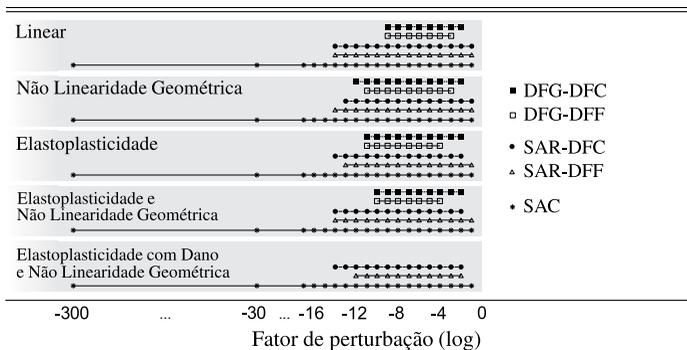
Figura 60 – (a)Soma das sensibilidades dos deslocamentos em relação ao volume das barras. (b)Norma ℓ_2 das sensibilidades dos deslocamentos. Valores obtidos via método SAC e $\varphi = 10^{-300}$.



Fonte: Produção do autor, 2015.

na formulação. Vale enfatizar que o método SAR apresenta, no caso da formulação com dano, erro mínimo da ordem de $10^{-6}\%$. Verifica-se, assim, a superioridade do SAC sobre o SAR, e conseqüentemente, sobre o DFG.

Figura 61 – Faixa de acurácia dos métodos.



Fonte: Produção do autor, 2015.

CONCLUSÃO

A premissa deste trabalho consiste na aplicação e comparação de vários métodos para avaliação da sensibilidade. Dentro do conhecimento do autor, pela primeira vez foi implementado e estudado o SAC para problemas dependentes da trajetória. O estudo comparativo foi realizado por intermédio de problemas construídos para que patologias e dificuldades numéricas fossem manifestadas.

Tratando de aspectos computacionais, evidenciou-se um ganho considerável em tempo e armazenamento dos métodos SA quando comparado às contrapartes globais, pois estes procedimentos dispensam efetuar um novo sistema global de equações para cada variável de projeto. No método SAC em particular, não houve necessidade de definir qualquer vetor global como complexo, salvo quando aplicado em problemas dependentes da trajetória, devido ao armazenamento do histórico das variáveis internas. Contudo, em ambos os casos as operações envolvendo variáveis complexas se restringiram ao nível elemento ou pontos de Gauss.

Em todos os exemplos estudados, o método SAC mostrou-se superior ao SAR e DFGR em termos de estabilidade e faixa de acurácia devido à possibilidade de emprego de perturbações ínfimas. De modo geral, o SAC apresentou resultados acurados desde fatores de perturbação muito pequenos, tal como $\varphi = 10^{-300}$ até fatores moderados. Por outro lado, a acurácia dos métodos baseados em variáveis reais se limitaram a pequenas faixas de perturbação com fator mínimo de $\varphi = 10^{-14}$.

A partir do exemplo da viga modelada com elementos de barra apresentada na seção 4.1, é possível levantar as seguintes conclusões:

- i. A presença de rotações de corpo rígido afeta negativamente a acurácia das medidas de sensibilidade com respeito às variáveis de forma. Este fenômeno está relacionado com a patologia dos métodos SA e está presente apenas para fatores de perturbação grandes e moderados;
- ii. Neste exemplo, a sensibilidade foi monitorada de acordo com o crescimento do número de células. Disto, verificou-se que para um fator de perturbação moderado ($\varphi = 10^{-2}$), as análises linear e não linear geométrica apresentaram comportamentos distintos. No caso linear, os métodos SAC e SAR-DFC mostraram um padrão de crescimento e níveis de erros semelhantes, menores que a abordagem SAR-DFE, contudo ainda inaceitáveis. No caso não linear, o SAC apresentou erros aproximadamente constantes na faixa de 3% acima de 60 células. Por

outro lado, o SAR-DFF mostrou um crescimento de erro acentuado, tendendo a um limiar constante de 1200% à medida que o número de células é incrementado. Verifica-se que à medida que o número de células cresce, o problema torna-se dominado pelo alongamento e o número de elementos sujeitos à rotação de corpo rígido fica menor, reduzindo a influência relativa da patologia associada;

- iii. Na análise não linear, verificou-se que a tolerância imposta para solucionar as equações de equilíbrio desempenha um papel fundamental na qualidade dos resultados, devendo ser o mais estreito possível;
- iv. A patologia associada com a rotação de corpo rígido manifesta-se independentemente do tipo da análise e em ambos os métodos SAR e SAC. Contudo, para fatores de perturbação suficientemente pequenos esta patologia é contornada.

Do problema da barra elastoplástica na seção 4.2 conclui-se que:

- v. O procedimento de atualização das variáveis internas utilizada, para a avaliação da sensibilidade via método SA apresentou êxito. Devido ao seu emprego, o método SAC apresentou valores aproximadamente exatos (erro da ordem de $10^{-14}\%$) para todos os fatores de perturbação analisados. Apesar de uma faixa de perturbação mais estreita e de erros mais elevados, o mesmo comportamento também foi identificado para os métodos SAR;
- vi. De modo geral, os métodos SA descreveram corretamente a descontinuidade dos coeficientes da sensibilidade independentemente dos fatores de aproximação empregados. Isto não ocorreu para a abordagem DFG, pois o mesmo mostrou ser limitado pela relação entre aproximação da descontinuidade e a magnitude da perturbação.

Do problema *snap-through* na seção 4.3, constatou-se que:

- vii. Devido às condições aleatórias envolvidas no problema (como o comportamento não linear e situações com carga e descarga), e pelos baixos níveis de erros apresentados, conclui-se que o procedimento de atualização do método SA é válido e genérico, visto que as variáveis internas adotadas neste exemplo englobam tanto a deformação plástica acumulada quanto o dano;
- viii. O método SA mostrou superioridade sobre o DFG na formulação com dano. Neste caso, verificou-se que pela forma com que a perturbação

é efetuada e pelo dano crítico ser atingido em diferentes incrementos, a sensibilidade via DFG torna-se de difícil avaliação. Esta dificuldade é minimizada no método SA, visto que o procedimento de retorno não linear material (original) parte de um ponto muito próximo do objetivo (estado perturbado). Além disso, é possível avaliar a sensibilidade via SA desde que haja convergência do procedimento original e sejam assumidos fatores de perturbação suficientemente pequenos. Isto se deve à capacidade de avaliar a sensibilidade em um mesmo estado (antes que ocorra o dano crítico), conforme discussão na seção 4.2.1.

Do problema do material celular periódico tratado na seção 4.4 ratifica-se, num problema prático e de interesse atual de pesquisa, todas as vantagens do procedimento de sensibilidade semi-analítico complexo.

Devido a possibilidade de emprego de fatores de perturbação ínfimos e pelos excelentes resultados obtidos, o procedimento SA seja para problemas independente ou dependente da trajetória, é indicado a ser empregado como um *black-box* em *softwares* de simulação.

O relatório de pesquisa desenvolvido pelo autor ao longo do mestrado (HAVEROTH, 2015), apresenta a validação da formulação não linear geométrica com o *software* ANSYS[©] e da formulação não linear material com o trabalho de Esmaeili e Öchsner (2011). Também, inicia-se um estudo referente à síntese de trajetória por Kawamoto (2005), tendo como objetivo dar início ao item [i.] das sugestões para trabalhos futuros.

4.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apresentam-se na sequência, algumas sugestões para trabalhos futuros.

- i. Síntese de trajetória de mecanismos articulados. Neste caso, propõe-se a realização da síntese semelhante ao apresentado em Kawamoto (2005) com adição do comportamento elastoplástico e dano. O algoritmo desenvolvido pelo autor possibilita o desenvolvimento deste estudo, visto que possui implementado além dos métodos de sensibilidade, o método de solução MCD com deslocamento prescrito em mais de um grau de liberdade, que em conjunto com algum algoritmo de otimização propicia a realização do mesmo. Este estudo possui interessantes aplicações como visto em Coros et al. (2013);

- ii. Estender este estudo para o estado plano de tensão e deformação. A partir disto, verificar se as considerações positivas relacionadas ao método SAC se mantêm;
- iii. Estudar o comportamento do SAC na avaliação da sensibilidade em problemas sujeitos a remalhamento, onde o método DFG notadamente falha (MUÑOZ-ROJAS; FONSECA; CREUS, 2004);
- iv. Estender a metodologia apresentada para avaliação da sensibilidade empregando números hiper-duais ao invés de números complexos. Esta alternativa fornece resultados exatos para derivadas de primeira ordem e permite o cálculo de derivadas segundas com custo computacional aceitável (FIKE; ALONSO, 2011). Cabe ressaltar que a utilização de números complexos para avaliação de sensibilidade só é eficiente numericamente para obtenção de derivadas primeiras, devido a ausência da subtração no numerador.

REFERÊNCIAS

- ARGYRIS, J. H. Continua and discontinua. *Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Peterson Air Force Base, Ohio, p. 11–89, 1986. Citado na página 143.
- BARTHELEMY, B.; CHON, C. T.; HAFTKA, R. T. Accuracy problems associated with semi-analytical derivatives of static response. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 4, n. 3, p. 249–265, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 66.
- BARTHELEMY, B.; HAFTKA, R. T. Accuracy analysis of the semi-analytical method for shape sensitivity calculation. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 18, n. 3, p. 407 – 432, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 29, 66, 75 e 76.
- BATOZ, J. L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *Numerical Methods in Engineering*, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 141 e 143.
- BELYTSCHKO, T. *Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures*. [S.l.]: Northwestern University, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 139 e 141.
- BITTENCOURT, E. *Tratamento de Problemas não Lineares na Mecânica dos Sólidos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, 1999. Citado na página 138.
- BLETZINGER, K.-U.; FURL, M.; DAOUD, F. Approximation of derivatives in semi-analytical structural optimization. *Computers & Structures*, v. 86, p. 1404–1416, 2008. Citado na página 29.
- BONET, J.; WOOD, R. D. *Nonlinear Mechanics for Finite Element Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 132, 133, 134 e 137.
- BUCALEM, M. L.; BATHE, K. J. *The Mechanics of Solids and Structures – Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*. [S.l.]: Springer, 2011. Citado na página 33.
- BUGEDA, G.; GIL, L. Shape sensitivity analysis for structural problems with non-linear material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 46, n. 9, p. 1385–1404, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 68.

BURG, C. O.; NEWMAN-III, J. C. Numerically exact design space derivative via the complex Taylor's series expansion method. *Computers & Fluids*, v. 32, n. 3, p. 373–383, 2001. Citado na página 62.

CHAVES, E. W. V. *Notes on Continuum Mechanics*. [S.l.]: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2013. Citado 4 vezes nas páginas 112, 131, 133 e 137.

CHEN, X. *Nonlinear finite element sensitivity analysis for large deformation elastoplastic and contact problems*. Tese (Doutorado) — University of Tokyo, 1994. Citado na página 68.

CHEN, X.; NAKAMURA, K.; MORI, M.; HISADA, T. Sensitivity analysis for thermal stress and creep problems. *JSME International Journal*, v. 43, n. 3, p. 252–258, 2000. Citado na página 68.

CHENG, G.; GU, Y.; WANG, X. Improvement of semi-analytic sensitivity analysis and mcads. *Engineering optimization in design processes*, v. 63, p. 211–223, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 66.

CHENG, G.; GU, Y.; ZHOU, Y. Accuracy of semi-analytic sensitivity analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 6, n. 2, p. 113–128, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 66.

CHENG, G.; OLHOFF, N. New method of error analysis and detection in semi-analytical sensitivity analysis. *Institute of Mechanical Engineering*, Dinamarca - Holanda, n. 36, 1991. Citado na página 66.

CHOI, K. K.; SANTOS, J. L. T. Design sensitivity analysis of nonlinear structural systems part i: Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, n. 11, p. 2039–2055, 1987. Citado na página 55.

CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. [S.l.]: McGraw-Hill do Brasil, 1975. Citado na página 147.

CONTE, J. P.; VIJALAPURA, P. K.; MEGHELLA, M. Consistent finite-element response sensitivity analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 129, n. 12, p. 1380–1393, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. Citado na página 138.

COROS, S.; THOMASZEWSKI, B.; SUMNER, R. W.; NORIS, G.; MATUSIK, W.; SUEDA, S.; BICKEL, B.; FORBERG, M. Computational design

of mechanical characters. *ACM SIGGRAPH*, 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DfznnKUwywQ>>. Citado na página 119.

CRISFIELD, M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. Citado 7 vezes nas páginas 34, 35, 36, 98, 133, 134 e 139.

ESMAEILI, M.; ÖCHSNER, A. A one-dimensional implementation of a coupled elasto-plastic model for ductile damage. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, v. 42, n. 5, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 48, 50, 53 e 119.

FIKE, J. A.; ALONSO, J. J. The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. *AIAA*, v. 886, p. 124, 2011. Citado na página 120.

FREITAS, A. *Modelagem da Evolução do Dano Ortotrópico Acoplado à Elastoplasticidade em Metais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

GREENE, S. G. K. and R. E. *Function Theory of one Complex Variable*. 3. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 2006. Citado na página 147.

GUTH, D. C. *Otimização de materiais constituídos de células treliçadas com restrições de isotropia para aplicações termodinâmicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 15, 55, 109, 110, 112 e 113.

GUTH, D. C.; LUERSEN, M. A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Optimization of periodic truss materials including constitutive symmetry constraints. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, v. 43, n. 5, p. 447–457, 2012. Citado na página 109.

GUTH, D. C.; LUERSEN, M. A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Optimization of three-dimensional truss-like periodic materials considering isotropy constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 1, p. 1–13, 2015. Citado na página 109.

HABIBI, A.; MOHARRAMI, H. Nonlinear sensitivity analysis of reinforced concrete frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, p. 571–584, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 55.

HAFTKA, R. T.; ADELMAN, H. M. Recent developments in structural sensitivity analysis. *Structural Optimization*, v. 1, n. 3, p. 137–151, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 66.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. *Elements of Structural Optimization*. 3. ed. [S.l.]: Springer Netherlands, 1992. Citado na página 29.

HASSANI, B.; HINTON, E. A review of homogenization and topology optimization i-homogenization theory for media with periodic structure. *Computers & Structures*, v. 69, p. 707 – 717, 1998. Citado na página 110.

HAVEROTH, G. A. *Relatório de Pesquisa do Mestrado: Análise de Sensibilidade de Problemas Não Lineares*. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 110 e 119.

HAVEROTH, G. A.; STAHLSCHEMIDT, J.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Application of the complex variable semi-analytical method for improved sensitivity evaluation in geometrically nonlinear truss problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, n. 5, p. 980–1005, 2015. Citado na página 30.

HUGHES, T. J. R.; HINTON, E. *Finite element methods for plate and shell structures: Formulation and algorithms*. [S.l.]: Pineridge Press Ltd., 1986. Citado na página 40.

JIN, W.; DENNIS, B. H.; WANG, B. P. Improved sensitivity analysis using a complex variable semi-analytical method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 3, p. 433–439, 2010. Citado na página 66.

KACHANOV, L. M. *Time to rupture process under creep conditions*. [S.l.]: Izv. Akad. Nauk SSR, 1958. Citado na página 46.

KATO, v. J. *Material optimization for fiber reinforced composites applying a damage formulation*. Tese (Doutorado) — Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 68.

KAWAMOTO, A. Path-generation of articulated mechanisms by shape and topology variations in non-linear truss representation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 64, n. 12, p. 1557–1574, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 119.

KLEIBER, M. Shape and non-shape structural sensitivity analysis for problems with any material and kinematic nonlinearity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 108, n. 1, p. 73–97, 1993. Citado na página 55.

KLEIBER, M.; HIEN, T. D.; ANTÚNEZ, H.; KOWALCZYK, P. *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics: Theory and finite element computations*. [S.l.]: John Wiley, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 68 e 90.

- KLEIBER, M.; HIEN, T. D.; POSTEK, E. Incremental finite element sensitivity analysis for non-linear mechanics applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, n. 19, p. 3291–3308, 1994. Citado na página 68.
- KLEIBER, M.; KOWALCZYK, P. Constitutive parameter sensitivity in elasto-plasticity. *Computational Mechanics*, v. 17, p. 36–48, 1995. Citado na página 68.
- KLEIBER, M.; KOWALCZYK, P. Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 137, p. 395–409, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 68, 89 e 90.
- LEE, T. H.; ARORA, J. S. A computational method for design sensitivity analysis of elastoplastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 122, n. 1, p. 27–50, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 68, 89, 90, 92 e 95.
- LEMAITRE, J. *A Course on Damage Mechanics*. [S.l.]: Springer, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 49.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. *Mechanics of Solid Materials*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. Citado na página 48.
- LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. Citado na página 47.
- LEON, S. E.; LAGES, E. N.; ARAÚJO, C. N. de; PAULINO, G. H. On the effect of constraint parameters on the generalized displacement control method. *Mechanics Research Communications*, v. 56, p. 123–129, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 140, 141 e 144.
- LEON, S. E.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.; LAGES, E. N. A unified library of nonlinear solution schemes. *American Society of Mechanical Engineers*, v. 64, n. 4, p. 1–24, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 140 e 145.
- LYNESS, J. N. Numerical algorithms based on the theory of complex variable. *Proceedings of the ACM National Meeting*, p. 125–133, 1967. Citado na página 61.
- LYNESS, J. N.; MOLER, C. B. Numerical differentiation of analytic functions. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 4, n. 2, p. 202–210, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

MARTINS, J. R. R. A.; KROO, I. M.; ALONSO, J. J. An automated method for sensitivity analysis using complex variables. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, v. 689, 2000. Citado na página 63.

MARTINS, J. R. R. A.; STURDZA, P.; ALONSO, J. J. The complex-step derivative approximation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 29, n. 3, p. 245–262, 2003. Citado na página 62.

MINER, M. A. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, v. 12, p. A159–A164, 1945. Citado na página 46.

MLEJNEK, H. P. Accuracy of semi-analytical sensitivities and its improvement by the “natural method”. *Structural Optimization*, v. 4, p. 128–131, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 66.

MONTOYA, A.; FIELDER, R.; GOMEZ-FARIAS, A.; MILLWATER, H. Finite-element sensitivity for plasticity using complex variable methods. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 141, n. 2, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.

MUNDSTOCK, D. C. *Otimização de Forma Utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Cálculo de Sensibilidade por Variáveis Complexas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, 2006. Citado na página 62.

MUNDSTOCK, D. C.; MARCZAK, R. J. Boundary element sensitivity evaluation for elasticity problems using complex variable method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 38, p. 423–428, 2009. Citado na página 62.

MUÑOZ-ROJAS, P. A. *Otimização de Pré-formas e Matrizes em Problemas Bidimensionais de Forjamento*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 59, 60, 68 e 138.

MUÑOZ-ROJAS, P. A. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis and Linear Optimization of Trusses*. [S.l.]: Trabalho não publicado, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 33, 35, 36, 131, 134 e 136.

MUÑOZ-ROJAS, P. A.; FONSECA, J. S. O.; CREUS, G. J. A modified finite difference sensitivity analysis method allowing remeshing in large strain path-dependent problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 61, p. 1049–1071, 2004. Citado na página 120.

NEWMAN-III, J. C.; ANDERSON, W. K.; WHITFIELD, D. L. Multidisciplinary sensitivity derivatives using complex variables. *Computational Fluid Dynamics Laboratory NSF Engineering Research Center for Computational Field Simulation*, 1998. Citado na página 62.

OHSAKI, M.; ARORA, J. S. Design sensitivity analysis of elastoplastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, n. 5, p. 737–762, 1994. Citado na página 68.

OLHOFF, N.; RASMUSSEN, J.; LUND, E. A method of “exact” numerical differentiation for error elimination in finite element based semi-analytical shape sensitivity analysis. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 21, p. 1–66, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 66.

PALMGREEN, A. The service life of ball bearings. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, v. 68, n. 14, p. 339–341, 1924. Citado na página 46.

PARENTE, E. J.; VAZ, L. E. Improvement of semi-analytical design sensitivities of non-linear structures using equilibrium relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, p. 2127–2142, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 66.

PARK, J. S.; CHOI, K. K. Design sensitivity analysis of critical load factor for nonlinear structural systems. *Computers & Structures*, v. 36, n. 5, p. 823–838, 1990. Citado na página 55.

PEDERSEN, P.; CHENG, G.; RASMUSSEN, J. On accuracy problems for semi-analytical sensitivity analyses. *Journal of Structural Mechanics*, v. 17, n. 3, p. 373 – 384, 1989. Citado na página 66.

PENN, R. W. Volume changes accompanying the extension of rubber. *Transactions of the society of Rheology*, v. 14, p. 509–517, 1970. Citado na página 112.

RABOTNOV, Y. N. *Creep Problems In Structural Elements*. [S.l.]: North Holland, 1969. Citado na página 46.

ROBINSON, E. L. Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels. *Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers*, v. 7A, p. 777–781, 1952. Citado na página 46.

RYU, Y. S.; HARIRIAN, M.; WU, C. C.; ARORA, J. S. Structural design sensitivity analysis of nonlinear response. *Computers & Structures*, v. 21, n. 1, p. 245–255, 1985. Citado na página 55.

SANTOS, J. L. T.; CHOI, K. K. Design sensitivity analysis of nonlinear structural systems part ii: Numerical method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 26, p. 2097–2114, 1988. Citado na página 55.

SANTOS, J. L. T.; CHOI, K. K. Shape design sensitivity analysis of nonlinear structural systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 4, n. 1, p. 23–35, 1992. Citado na página 55.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. *Computational Inelasticity*. [S.l.]: Springer, 1998. Citado na página 48.

SQUIRE, W.; TRAPP, G. Using complex variables to estimate derivatives of real functions. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 40, n. 1, p. 110–112, 1998. Citado na página 61.

STAHLSCHMIDT, J. *Análise de sensibilidade em problemas não lineares via método semi analítico utilizando variáveis complexas: Aplicação em parâmetros materiais e geométricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 30, 36, 60, 75, 98 e 135.

SUZUKI, J. L.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Transient analysis of geometrically non-linear trusses considering coupled plasticity and damage. *Tenth World Congress on Computational Mechanics*, v. 1, n. 1, 2014. Citado na página 98.

TANAKA, M.; FUJIKAWA, M.; BALZANI, D.; SCHRÖDER, J. Robust numerical calculation of tangent moduli at finite strains based on complex-step derivative approximation and its application to localization analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 269, p. 454–470, 2014. Citado na página 53.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. [S.l.]: Addison Wesley, 2009. ISBN 9788588639119. Citado na página 92.

TORTORELLI, D. A.; MICHALERIS, P. Design sensitivity analysis: Overview and review. *Inverse Problems in Engineering*, v. 1, p. 71–105, 1994. Citado na página 59.

TRENTIN, R. G. *Identificação de Parâmetros Materiais Através da Simulação Numérica de um Processo de Estampagem Profunda*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 68.

- TSAY, J. J.; CARDOSO, J. E. B.; ARORA, J. S. Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. part 1: General theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n. 81, p. 183–208, 1990. Citado na página 68.
- TSAY, J. J.; CARDOSO, J. E. B.; ARORA, J. S. Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. part 2: Analytical examples. n. 81, p. 209–228, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 29, 68, 89 e 90.
- VIDAL, C. A.; HABER, R. B. Design sensitivity analysis for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 107, n. 3, p. 393–431, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 68.
- VIDAL, C. A.; LEE, H. S.; HABER, R. B. The consistent tangent operator for design sensitivity analysis of history-dependent response. *Computing Systems in Engineering*, v. 2, n. 5, p. 509–523, 1991. Citado na página 68.
- WISNIEWSKI, K.; KOWALCZYK, P.; TURSKA, E. On the computation of design derivatives for huber-mises plasticity with non-linear hardening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, p. 271–300, 2003. Citado na página 68.
- YANG, Y.-B.; KUO, S.-R. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994. Citado 6 vezes nas páginas 139, 140, 141, 142, 143 e 144.
- YANG, Y.-B.; SHIEH, M. S. *Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics, 1990. Citado na página 144.
- YANG, Y. B.; YAU, J. D. Recent development on geometric nonlinear analysis of space frames. *Lightweight Structures in Civil Engineering*, p. 301–307, 2002. Citado na página 139.

APÊNDICE A – ASPECTOS DA TEORIA DO CONTÍNUO

Este apêndice apresenta uma breve revisão dos conceitos da mecânica do contínuo pertinentes ao trabalho, iniciando com as abordagens das formulações utilizadas para descrever o movimento de um corpo no meio contínuo, como também a definição do deslocamento de uma partícula. Entre os conceitos listados, também incluem-se o gradiente de deformação, a relação com o gradiente de deslocamento e a decomposição polar. Na sequência, algumas medidas de tensão e deformação serão introduzidas, tais como tensor deformação de Cauchy-Green, Green-Lagrange, os tensores de deformação da família de tensores de Hill, tensor deformação de engenharia, tensor tensão de Cauchy e o tensor tensão de engenharia. Para finalizar, o princípio dos trabalhos virtuais é introduzido.

A.1 DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

Partindo-se do princípio físico de que diferentes corpos ocupam regiões distintas e em tempos distintos no espaço Euclidiano, adotam-se duas formulações básicas que têm por finalidade descrever o comportamento de um corpo em um meio contínuo: a descrição Euleriana e a descrição Lagrangeana.

Em particular, a descrição Lagrangeana possui três formulações que dependem do sistema de referência adotado. De acordo com Muñoz-Rojas (2013), estas formulações são:

- a. descrição Lagrangeana total. Em qualquer passo incremental a configuração inicial t_0 é adotada como referência;
- b. descrição Lagrangeana atualizada. No n -ésimo passo incremental t_n , a referência é a configuração do estado em equilíbrio anterior t_{n-1} ;
- c. descrição Lagrangeana corrente. No n -ésimo passo incremental t_n , a referência adotada é a mesma n -ésima configuração t_n .

Nesta seção, as partículas localizadas na configuração de referência são representadas por símbolos maiúsculos \mathbf{X} , enquanto as localizadas na configuração corrente por símbolos minúsculos \mathbf{x} . Desta forma, de acordo com Chaves (2013), a partícula em movimento pode ser matematicamente descrita através do mapeamento φ , na descrição Lagrangeana total em termos

de \mathbf{X} e do tempo como

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t), \quad (\text{A.1})$$

retornando a posição atual \mathbf{x} , no tempo t , de uma partícula que ocupava a posição \mathbf{X} na configuração de referência t_0 .

A fim de quantificar o movimento, o vetor deslocamento de uma partícula é definido como sendo a diferença entre o vetor posição na configuração corrente e o vetor posição na configuração de referência, isto é

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (\text{A.2})$$

A.1.1 Gradiente de Deformação

O gradiente de deformação \mathbf{F} , é uma medida fundamental de deformação de um corpo e está envolvida em todas as equações que relacionam quantidades antes da deformação com as quantidades correspondentes durante, ou após a deformação. Seu principal objetivo é avaliar o comportamento da transformação em torno de um ponto, sendo portanto fundamental na descrição da deformação (BONET; WOOD, 1997). O gradiente de deformação \mathbf{F} é definido como

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3-A.4})$$

por vezes denominada matriz Jacobiana, cujo determinante conhecido por Jacobiano J , representa fisicamente a variação do volume da transformação.

Deste modo, o vetor $d\mathbf{x}$ na configuração corrente pode ser obtido a partir do vetor $d\mathbf{X}$ na configuração inicial através do operador \mathbf{F} ,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (\text{A.5})$$

Note que a condição necessária para a existência da inversa \mathbf{F}^{-1} está associada ao fato da matriz Eq. (A.4) não ser singular, isto é,

$$J \neq 0. \quad (\text{A.6})$$

Existe também a possibilidade de relacionar o gradiente de deslocamento com \mathbf{F} através da expressão

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] \\ &= \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \\ &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t),\end{aligned}\tag{A.7}$$

onde \mathbf{I} corresponde ao tensor identidade de segunda ordem e $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ ao gradiente do deslocamento.

A.1.2 Decomposição Polar

Todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto no produto de um tensor ortogonal \mathbf{R} e um tensor simétrico positivo definido \mathbf{S} . Assim, é possível decompor o gradiente de deformação \mathbf{F} no produto do tensor rotação \mathbf{R} e um tensor alongamento simétrico positivo definido \mathbf{U} ou \mathbf{V} , isto é,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U},\tag{A.8}$$

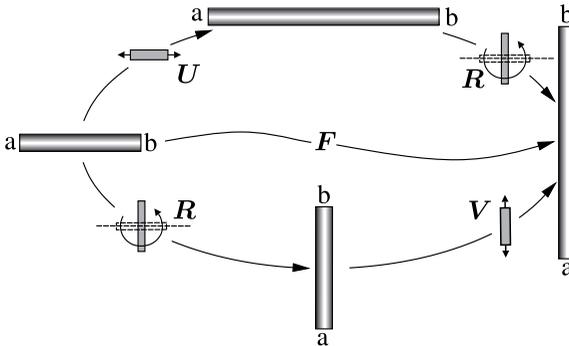
$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}.\tag{A.9}$$

As equações acima diferem apenas na ordem entre rotação e alongamento. Na Eq. (A.8), aplica-se inicialmente o alongamento na configuração inicial seguido pela rotação, enquanto na Eq. (A.9) inicialmente é realizada a rotação e posteriormente o alongamento conforme visualizado na Fig. 62.

A.2 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

Conforme visto na seção A.1, o gradiente de deformação \mathbf{F} pode ser considerado como uma medida de deformação. No entanto, a aplicação de \mathbf{F} em relações constitutivas torna-se complicado, uma vez que este carrega tanto as informações de rotação quanto de deformação e a mesma deve ser construída de modo a não haver tensões devido ao movimento de corpo rígido. Desta forma, quando se trata de deformações finitas, diversas definições são possíveis (CRISFIELD, 1991; BONET; WOOD, 1997; CHAVES, 2013). Neste contexto definem-se os tensores de Hill.

Figura 62 – Decomposição polar.



Fonte: Produção do autor, 2015,

baseado em Crisfield (1991, p.126) e Muñoz-Rojas (2013, p.18).

A.2.1 Tensores de Hill

Antes de propriamente apresentar os tensores de Hill, define-se algumas deformações adicionais, entre eles o tensor deformação de Cauchy-Green e o tensor deformação de Green-Lagrange.

Considere $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{X}$ os vetores elementares na configuração corrente e de referência, respectivamente. A partir da Eq. (A.5) obtém-se a relação

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= (\mathbf{F}d\mathbf{X})^T \mathbf{F}d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F}d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^T \mathbf{C}d\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde \mathbf{C} é conhecido como tensor deformação de Cauchy-Green.¹

De acordo com Bonet e Wood (1997), a mudança no produto escalar pode ser expressa utilizando Eq. (A.10),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) &= \frac{1}{2} (d\mathbf{X}^T \mathbf{C}d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}) \\ &= \frac{1}{2} [d\mathbf{X}^T (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}] \\ &= d\mathbf{X}^T \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}^T \mathbf{E}d\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

¹ Este tensor foi originalmente definido por Cauchy em 1827.

sendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (\text{A.12})$$

o tensor de deformação de Green Lagrange.

A partir das Eqs. (A.8), (A.10) e (A.12), obtém-se a relação entre a deformação de Green Lagrange e o alongamento \mathbf{U} apresentado na seção A.1.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

que de forma generalizada são apresentadas como tensores de Hill. De acordo com Stahlschmidt (2013), estes tensores são genericamente definidos como sendo

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta = \frac{1}{\vartheta} (\mathbf{U}^\vartheta - \mathbf{I}), \quad \vartheta > 0, \quad (\text{A.14})$$

onde dependendo da escolha de ϑ , diferentes medidas de deformação são obtidas. Algumas destas medidas de deformação são apresentadas por:

- ($\vartheta = 0$) Tensor de deformação Logarítmico ou de *Hencky*,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^L &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{U}^\vartheta - \mathbf{I})}{\vartheta} \\ &\stackrel{L'H}{=} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}^\vartheta \ln(\mathbf{U})}{1} \\ &= \ln(\mathbf{U}), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

- ($\vartheta = 1$) Tensor de deformação de Biot,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^B = (\mathbf{U} - \mathbf{I}), \quad (\text{A.16})$$

- ($\vartheta = 2$) Tensor de deformação de Green Lagrange,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{GL} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}). \quad (\text{A.17})$$

A.2.2 Tensor Deformação de Engenharia

No regime de pequenas deformações, a configuração instantânea confunde-se com a inicial e o gradiente de deslocamento se torna relativamente pequeno. Como consequência, as deformações apresentadas convergem para uma mesma medida, que é obtida negligenciando a consideração não linear (MUÑOZ-ROJAS, 2013). Desta forma, através das Eqs. (A.7) e (A.12) obtém-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\
 &= \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{I}] \\
 &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T) \\
 &\approx \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \tag{A.18}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^E &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\
 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \tag{A.19}
 \end{aligned}$$

é conhecido como o tensor deformação utilizado no regime de pequenas deformações, denominado tensor deformação de engenharia.

A.3 MEDIDAS DE TENSÃO

Esta seção tem por objetivo realizar uma breve apresentação do tensor tensão de Cauchy e em seguida, as devidas modificações para obter o tensor tensão de engenharia, o qual é utilizado no decorrer deste trabalho.

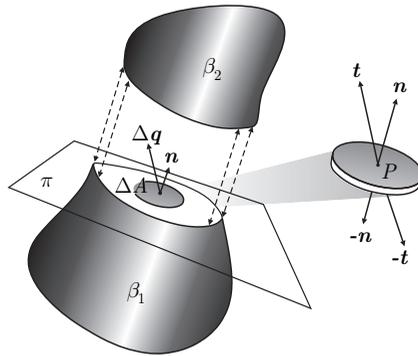
A.3.1 Tensor Tensão de Cauchy

Considere um corpo β na configuração corrente cortado em duas partes β_1 e β_2 por um plano π passando através de um ponto arbitrário $P \in \beta$,

considere também um elemento de área ΔA na vizinhança de P com vetor unitário normal \mathbf{n} conforme Fig. 63. Se a força interna resultante em ΔA é $\Delta \mathbf{q}$, então define-se o vetor tensão de Cauchy como o limite de $\Delta \mathbf{q}/\Delta A$ quando $\Delta A \rightarrow 0$, isto é

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{q}}{dA}. \quad (\text{A.20})$$

Figura 63 – Vetor tensão e a normal.



Fonte: Produção do autor, 2015, baseado em Bonet e Wood (1997, p.98).

Segundo Chaves (2013), a definição de \mathbf{t} em três planos perpendiculares entre si passando por P , descreve o estado de tensão neste referido ponto. Desta forma, adotam-se três planos perpendiculares, gerados pelos vetores unitários \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z , e então determinam-se três vetores de tensão que estão associados com cada direção

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_x) = t_{xx}\mathbf{e}_x + t_{yx}\mathbf{e}_y + t_{zx}\mathbf{e}_z \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_y) = t_{xy}\mathbf{e}_x + t_{yy}\mathbf{e}_y + t_{zy}\mathbf{e}_z \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{e}_z) = t_{xz}\mathbf{e}_x + t_{yz}\mathbf{e}_y + t_{zz}\mathbf{e}_z \quad (\text{A.23})$$

ou equivalentemente,

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{A.24})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é um tensor simétrico de segunda ordem denominado tensor tensão de Cauchy denotado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

O tensor tensão de Cauchy, por vezes é chamado de tensor verdadeiro pois é definido na configuração instantânea do corpo (BITTENCOURT, 1999).

A.3.2 Tensor Tensão de Engenharia

Para pequenos deslocamentos e deformações, a área na configuração inicial A_0 confunde-se com a área deformada A , isto é $A_0 \approx A$, o mesmo ocorre para $\mathbf{q}_0 \approx \mathbf{q}$. Desta forma, o vetor tensão de engenharia \mathbf{t}^E , é definido semelhantemente a Eq. (A.20),

$$\mathbf{t}^E(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta A_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{q}_0}{\Delta A_0} = \frac{d\mathbf{q}_0}{dA_0}. \quad (\text{A.26})$$

e

$$\mathbf{t}^E(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^E \mathbf{n} \quad (\text{A.27})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^E$ é conhecido como tensor tensão de engenharia.

A.4 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O PTV é uma relação básica utilizada na formulação de elementos finitos no intuito de desenvolver as equações de equilíbrio em termos do trabalho W . O termo virtual ² encontra-se intimamente relacionado com o deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}$, que de acordo com Cook et al. (2001), é uma mudança imaginária e muito pequena na configuração do sistema, não violando a compatibilidade ou as condições de contorno.

Na configuração quase estática, este princípio afirma que o trabalho realizado por uma força real externa aplicada num ponto do corpo, sobre um deslocamento virtual e arbitrário do ponto, deve ser igual ao trabalho realizado pelas forças internas em equilíbrio com a força real aplicada, sobre o campo de deslocamentos em equilíbrio com o deslocamento virtual externo prescrito (MUÑOZ-ROJAS, 2003). Resumidamente, quando o corpo encontra-se em equilíbrio a igualdade

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}, \quad (\text{A.28})$$

é satisfeita. O trabalho virtual interno δW_{int} pode ser expresso utilizando diferentes medidas de tensão e deformação energeticamente conjugadas.

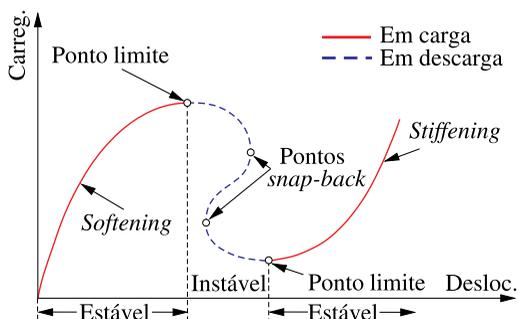
² O operador virtual δ , possui o mesmo significado de d para diferencial, entretanto por convenção, este símbolo é designado quando os deslocamentos são virtuais.

APÊNDICE B – MÉTODOS DE SOLUÇÃO ITERATIVO INCREMENTAIS

Para a solução de problemas com algum tipo de não linearidade é necessária a utilização de métodos iterativos incrementais. Na literatura são propostos diversos destes procedimentos baseados nos mais variados tipos de incrementos, tais como: Método de NR baseado em controle de carga (MCC) ou por controle de deslocamentos (MCD), método de controle por deslocamentos generalizados (MCDG), método do comprimento do arco, método de controle do trabalho, entre outros (CRISFIELD, 1991; YANG; KUO, 1994; BELYTSCHKO, 1998; YANG; YAU, 2002). Este apêndice apresenta os métodos MCC, MCD e MCDG, por serem os métodos implementados no *software* ATENAS[©], utilizado para o desenvolvimento deste trabalho.

A condição para definir o método a ser utilizado está relacionada ao tipo de pontos críticos que a curva de equilíbrio apresenta, pois o procedimento deve ser capaz de contornar as dificuldades numéricas que estão associadas com cada tipo. Desta forma, a escolha do método leva em consideração suas características de estabilidade. Para fins ilustrativos, considere a representação das características gerais de um sistema não linear através da Fig. 64.

Figura 64 – Características gerais de um sistema não linear.



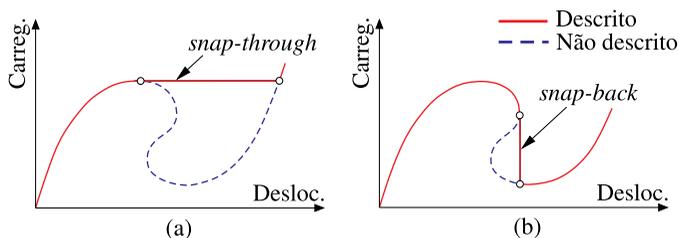
Fonte: Produção do autor, 2015, baseado em Yang e Kuo (1994, p.495).

Dependendo do histórico do carregamento, a rigidez da estrutura pode ser amolecida (*softening*) ou enrijecida (*stiffness*), o caminho do equilíbrio pode ser instável ou estável, e a estrutura pode estar num estágio de carregamento ou descarregamento (YANG; KUO, 1994). Estes fenômenos estão caracterizados pela ocorrência de pontos críticos denominados pontos limites

(ou pontos *snap-through*) e pontos *snap-back* nas curvas de deslocamento-carregamento, sendo os principais responsáveis por apresentar dificuldades numéricas associadas ao processo de solução. Conforme Fig. 64, os pontos *snap-through* ocorrem quando um máximo ou um mínimo local é atingido na curva de equilíbrio, ou seja, quando a tangente nestes pontos é horizontal. Os pontos *snap-back*, também conhecidos na literatura como *turning points* ou pontos limites de deslocamento, ocorrem quando a tangente à curva é vertical.

Leon et al. (2011) afirma que muitos dos métodos baseados em incrementos de carga não são capazes de capturar o comportamento da curva além dos pontos limites, produzindo um comportamento *snap-through*, conforme ilustrado na Fig. 65a. Similarmente, muitos dos baseados no incremento de deslocamento não capturam o comportamento *snap-back*, ilustrado na Fig. 65b. Estas regiões onde o método “não chega” podem ser de grande importância para o analista. Assim, é necessário o uso de um método adequando para cada situação ou um método capaz de sanar estas dificuldades, como será visto mais adiante.

Figura 65 – Comportamentos: (a) *snap-through* e (b) *snap-back*.



Fonte: Produção do autor, 2015.

A seção B.1 apresenta o método iterativo incremental que servirá de base para introduzir os métodos MCC, MCD e MCDG nas Seções B.2 e B.3. Para um estudo mais aprofundado sobre os métodos aconselha-se a leitura dos trabalhos de Yang e Kuo (1994), Leon et al. (2011) e Leon et al. (2014).

B.1 FORMULAÇÃO ITERATIVA INCREMENTAL

Considere que o carregamento seja proporcional um fator de carga μ

$$\mathbf{p}(\mu) = \mu \mathbf{p}, \quad (\text{B.1})$$

desta forma é possível descrever a equação de equilíbrio na forma matricial do problema não linear por

$$\mathbf{K}_n^{T,i-1} \Delta \mathbf{u}_n^i = \mu_n^i \mathbf{p} + \mathbf{r}_n^{i-1} \quad (\text{B.2})$$

onde \mathbf{K}^T refere-se a matriz de rigidez da estrutura, $\Delta \mathbf{u}$ o vetor incremento do deslocamento, \mathbf{p} o vetor de cargas nodais de referência, \mathbf{f} o vetor força interna global e \mathbf{r} o resíduo definido conforme Eq. (2.13) no Cap. 2.

Os deslocamentos e os fatores de carga são calculados através das contribuições aditivas de cada iteração

$$\mathbf{u}_n^i = \mathbf{u}_n^{i-1} + \Delta \mathbf{u}_n^i, \quad (\text{B.3})$$

$$\mu_n^i = \mu_n^{i-1} + \Delta \mu_n^i. \quad (\text{B.4})$$

Na i -ésima iteração do n -ésimo incremento o fator de carga é incrementado por $\Delta \mu_n^i$ e o deslocamento resultante $\Delta \mathbf{u}_n^i$ é determinado seguindo a estratégia apresentada por Batoz e Dhatt (1979) apud Leon et al. (2014), no qual o vetor incremento de deslocamento é decomposto em duas parcelas

$$\Delta \mathbf{u}_n^i = \Delta \mu_n^i \Delta \mathbf{u}_{1n}^i + \Delta \mathbf{u}_{2n}^i, \quad (\text{B.5})$$

obtidas a partir da solução das seguintes equações

$$\mathbf{K}_n^{T,i-1} \Delta \mathbf{u}_{1n}^i = \mathbf{p}, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{K}_n^{T,i-1} \Delta \mathbf{u}_{2n}^i = \mathbf{r}_n^{i-1}, \quad (\text{B.7})$$

e adicionalmente a estas, outras equações específicas são estabelecidas pelos diversos métodos existentes para avaliar a incógnita adicional $\Delta \mu_n^i$.

B.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de NR é baseado no simples conceito de aproximação linear. Este método é provavelmente um dos mais antigos (YANG; KUO, 1994). Ainda, de acordo com Belytschko (1998), é o mais utilizado e o mais robusto para a solução de equações algébricas não lineares.

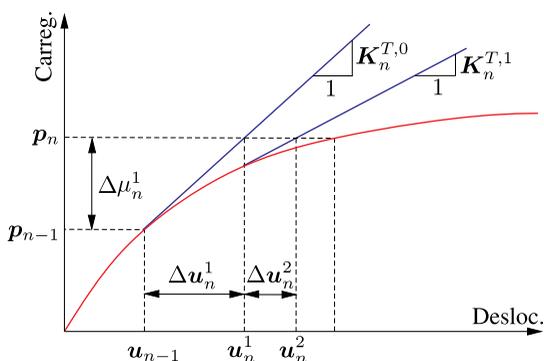
B.2.1 Controle de Carga

No MCC usual (ver Fig. 66) realiza-se o incremento de carga por um valor constante apenas na primeira iteração $i = 1$, enquanto nas iterações

seguintes $i > 1$ os incrementos de carga são nulos, ou seja, os carregamentos restantes são mantidos constantes¹. Em termos do fator de carregamento $\Delta\mu_n^i$, define-se

$$\Delta\mu_n^i = \begin{cases} cte & , \text{ se } i = 1 \\ 0 & , \text{ se } i > 1 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Figura 66 – Método de controle por carregamento.

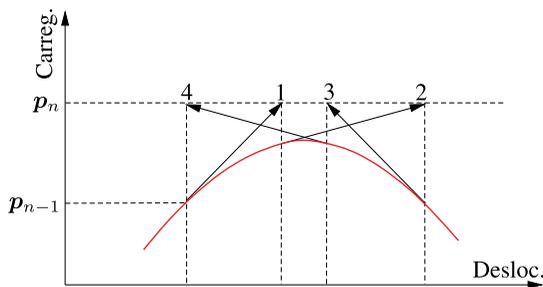


Fonte: Produzido pelo autor, 2015, baseado em Yang e Kuo (1994, p.524).

Ressalta-se que este método possui algumas limitações. Yang e Kuo (1994) afirmam que este procedimento é unicamente indicado para estruturas em que a matriz de rigidez é positivo definida, pois torna-se instável na ocorrência de singularidade na matriz de rigidez ou na ocorrência de pontos limites na curva de carregamento-deslocamento, apresentando divergência no processo incremental do método conforme ilustrado na Fig. 67. Neste caso é possível verificar que a divergência ocorre pois o incremento de carga ultrapassa o ponto limite concebendo um ciclo fechado de tangentes. A divergência devido a existência de pontos limites, é em geral, um problema relacionado com os métodos que compreendem o controle de carga. Similarmente, os métodos que envolvem controle de deslocamento, por exemplo o MCD, também podem sofrer divergência nos pontos *snap-back*.

¹ O MCC é caracterizado por um acréscimo constante de carga aplicado em cada passo incremental, motivo pelo qual este procedimento recebe tal nomenclatura.

Figura 67 – Divergência no ponto limite.



Fonte: Produzido pelo autor, 2015, baseado em Yang e Kuo (1994, p.525).

B.2.2 Controle de Deslocamento

A técnica do método de NR com controle de deslocamento MCD (ver Fig. 68) foi desenvolvida originalmente por Argyris (1986) e depois modificada por outros, assim como Batoz e Dhatt (1979). Este método difere do MCC pelo fato de que suas iterações são realizadas com deslocamento constante. Com este método, deve-se prescrever uma componente do vetor deslocamento em particular, por exemplo a q -ésima componente. Seja Δu^{qi} o incremento do deslocamento na q -ésima componente associado com a i -ésima iteração. Esta condição de restrição imposta pelo MCD pode ser expressa como segue

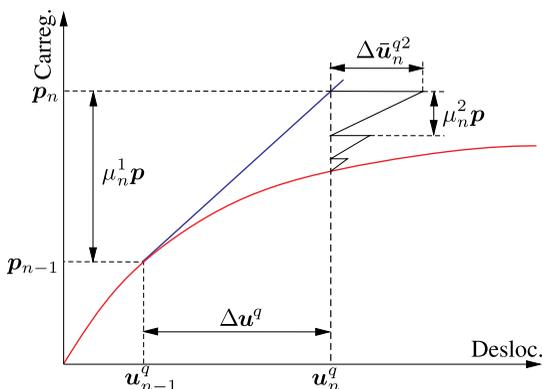
$$\Delta u^{qi} = \begin{cases} cte & , \text{se } i = 1 \\ 0 & , \text{se } i > 1 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

A partir da Eq. (B.5), a q -ésima componente do deslocamento pode ser separada em duas partes onde μ passa a ser uma incógnita adicional variando ao longo das iterações. Em termos do fator de carga $\Delta \mu_n^i$, tem-se

$$\Delta \mu_n^i = \begin{cases} \Delta u^q & , \text{se } i = 1 \\ \frac{\Delta u_{1n}^{q1}}{\Delta u_{2n}^{qi}} & , \text{se } i > 1 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Este método é bastante útil quando deseja-se passar por pontos limites na trajetória de equilíbrio. Contudo, este método não captura completamente a trajetória de equilíbrio se o mesmo apresentar pontos *snap-back* como visto na Fig. 65b.

Figura 68 – Método do Controle por Deslocamento.



Fonte: Produzido pelo autor, 2015, baseado em Yang e Kuo (1994, p.527).

Devido as deficiências de solução descritas anteriormente, apresenta-se na próxima seção o MCDG, que é conhecido por contornar os problemas envolvendo pontos críticos.

B.3 MÉTODO DO CONTROLE POR DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS (GDC)

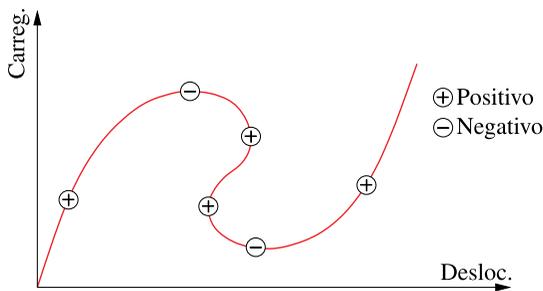
O MCDG foi proposto inicialmente por Yang e Shieh (1990) e de acordo com Leon et al. (2014), ele tem sido amplamente utilizado para aplicações na mecânica estrutural, incluindo a análise não linear do aço, concreto e armações compostas de estruturas finas. Yang e Kuo (1994) descrevem ainda fatores relevantes pelos quais garantem a superioridade deste sobre os demais métodos iterativos incrementais.

No MCDG utiliza-se o parâmetro conhecido por *Generalized Stiffness Parameter* (GSP), definido por

$$GSP = \frac{\Delta \mathbf{u}_{11}^{T1} \cdot \Delta \mathbf{u}_{11}^1}{\Delta \mathbf{u}_{11}^{T(i-1)} \cdot \Delta \mathbf{u}_{11}^i} \quad (\text{B.11})$$

para ajustar o sinal do parâmetro de carregamento com base na rigidez do sistema. O GSP será positivo para sistemas em *stiffening* e negativo para *softening*, conforme Fig. 69.

Figura 69 – *Generalized Stiffness Parameter* utilizado em MCDG.



Fonte: Produção do autor, 2015, baseado em Leon et al. (2011).

Deste modo, o incremento de carga na primeira iteração do n -ésimo passo incremental é obtido por

$$\Delta\mu_n^1 = \pm\Delta\mu_1^1(|GSP|)^{0,5}, \quad (B.12)$$

sendo $\Delta\mu_1^1$ o incremento inicial ($i = 1$ e $n = 1$). Enquanto para as iterações e incrementos subsequentes ($i > 1$ e $n \geq 1$) tem-se

$$\Delta\mu_n^i = -\frac{\Delta\mathbf{u}_{1\ n-1}^{T1} \cdot \Delta\mathbf{u}_{2\ n}^i}{\Delta\mathbf{u}_{1\ n-1}^{Ti} \cdot \Delta\mathbf{u}_{1\ n}^i}, \quad (B.13)$$

onde $\Delta\mathbf{u}_{p\ 0}^{T1} = \Delta\mathbf{u}_{p\ 1}^{T1}$ em $n = 1$.

O MCDG é um método de grande eficiência computacional e que tem a capacidade de capturar o comportamento não linear de uma estrutura contendo pontos limites ou pontos *snap-back*.

APÊNDICE C – PROPRIEDADES ELEMENTARES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Este apêndice apresenta sucintamente as propriedades das funções de uma variável complexa necessárias para esta pesquisa. O autor sugere os trabalhos de Churchill (1975) e Greene (2006) para um estudo mais aprofundado sobre o tema.

Inicia-se esta revisão tendo como conhecido o conjunto dos números reais, denotado por \mathbb{R} . Considere o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Os números complexos \mathbb{C} consistem do conjunto \mathbb{R}^2 equipado com algumas operações algébricas especiais definidas por

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad (\text{C.1})$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx'). \quad (\text{C.2})$$

Também, adota-se por convenção que se $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha, 0) \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y). \quad (\text{C.3})$$

Todo número complexo $z = (x, y)$ também pode ser escrito na forma $z = x \cdot 1 + y \cdot i$ com $x, y \in \mathbb{R}$, ou $z = x + iy$. Assim, das leis da adição e multiplicação vide Eqs. (C.1) e (C.2) obtêm-se,

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \quad (\text{C.4})$$

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx'), \quad (\text{C.5})$$

observe que $i \cdot i = -1$. Além disso, esta lei de multiplicação é consistente com a multiplicação real introduzida pela Eq. (C.3). O número real x é conhecido por parte real de z , denotado por $x = \text{Re } z$ e, de forma semelhante, y é chamado de parte imaginária de z denotado por $y = \text{Im } z$.

Nesta etapa torna-se importante introduzir o conceito de conjugado complexo. O número complexo $\bar{z} = x - iy$ é por definição o conjugado do número complexo $z = x + iy$. A distância Euclidiana de (x, y) a $(0, 0)$ é $\sqrt{x^2 + y^2}$ conhecida por módulo (ou valor absoluto) do número complexo z é denotada por $|z|$. Note que,

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (\text{C.6})$$

A seguinte Definição e, na sequência, o Teorema, têm como objetivo relacionar os conceitos de analicidade (holomorfismo) com as equações tão conhecidas de Cauchy-Riemann.

Definição C.1. Uma função complexa $F : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita ser analítica em U se ela é definida e diferenciável para todo $z \in U$.

Teorema C.1. Para todos os pontos em que as funções reais $u = u(x + iy)$ e $v = v(x + iy)$ possuam derivadas parciais de primeira ordem contínuas e satisfaçam as equações

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (\text{C.7})$$

a função complexa $F : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $F(z) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ é analítica. Estas equações são conhecidas por equações de Cauchy-Riemann.

Neste trabalho realiza-se um abrangente estudo visando a aplicação do método semi-analítico de análise de sensibilidade, utilizando variáveis complexas, em estruturas treliçadas considerando o comportamento não linear geométrico e material. Tal pesquisa foca principalmente nos problemas dependentes da trajetória e no tratamento adequado para a atualização das variáveis internas

Orientador: Pablo Andrés Muñoz Rojas

Joinville, 2015