



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CONVEXIDADE EM FIGURAS GEOMÉTRICAS
PLANAS.**

LUCIANO DO NASCIMENTO ANDRÉ

JOINVILLE, 2018

LUCIANO DO NASCIMENTO ANDRÉ

CONVEXIDADE EM FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas–CCT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério de Aguiar

JOINVILLE

2018

André, Luciano do Nascimento
CONVEXIDADE EM FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS /
Luciano do Nascimento André. - Joinville , 2018.
166 p.

Orientador: Rogério de Aguiar
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática
em Rede Nacional, Joinville, 2018.

1. Convexidade. 2. Curvas Convexas. 3. Figuras
Convexas. 4. Polígonos Simples. I. Aguiar, Rogério
de. II. Universidade do Estado de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação. III. Título.

Convexidade em Figuras Geométricas Planas

por

Luciano do Nascimento André

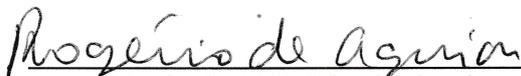
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM MATEMÁTICA

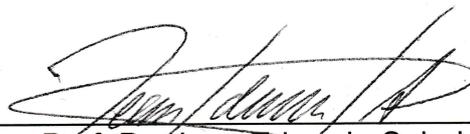
Área de concentração em “Matemática”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)



Prof. Dr. Jean Eduardo Sebold
IFC - Araquari



Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto
CCT/UDESC

Joinville, SC, 17 de maio de 2018.

Dedico esse trabalho a minha esposa Andreia e a minha filha Bianca, pelo apoio e compreensão nos constantes momentos de "presença ausente" na elaboração dessa dissertação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores do programa PROFMAT, do Centro de Ciências Tecnológicas da UDESC, em especial ao meu Orientador Professor Dr. Rogério de Aguiar pela dedicação, ensinamentos e incentivo ao longo dessa trajetória.

Agradeço aos professores Dr. Jose Rafael Santos Furlanetto, Dr. Jean Eduardo Sebold e a Dra. Elisandra Bar de Figueiredo por aceitarem ser componentes da Banca Examinadora dessa dissertação e por terem compartilhado esse momento tão importante na minha trajetória.

Sou grato também à minha família e aos meus amigos por suas palavras de apoio e incentivo nos momentos difíceis.

A Matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Embora diferentes tradições possam enfatizar diferentes aspectos, é somente a influência recíproca destas forças antitéticas e a luta por sua síntese que constituem a vida, a utilidade, e o supremo valor da Ciência Matemática. (Richard Courant)

RESUMO

Nesse estudo apresentamos a teoria da convexidade para figuras geométricas e curvas no plano. Iniciamos demonstrando os resultados fundamentais da geometria dedutiva, seguindo uma axiomática criada para uso nas salas de aula do Ensino Médio. A axiomática que adotaremos será aquela proposta por Rezende e Queiroz (2008), que adota os axiomas do School Mathematics Study Groups (SMSG). Os principais resultados sobre figuras convexas e estreladas serão fornecidos e uma sequência de resultados sobre polígonos convexas será demonstrada para depois abordar os mesmos resultados e outros generalizados para polígonos não convexas. Nesse último caso será apresentada uma demonstração do Teorema da Curva de Jordan para polígonos. Comparações entre os casos convexas e não convexas serão feitas. Após os resultados sobre polígonos, aplica-se a teoria no cálculo de áreas, centro de massa, problemas combinatórios e o problema da galeria de arte. Na sequência estuda-se as principais propriedades das figuras e curvas convexas em geral, comparando novamente com figuras e curvas não convexas. Uma demonstração de um teorema que encerra a discussão sobre o problema da galeria de arte será apresentada. Para finalizar estudaremos as curvas de largura constante e suas aplicações práticas.

Palavras-chave: Convexidade, Curvas Convexas, Figuras Convexas, Polígonos Simples.

ABSTRACT

In this study we present the convexity theory for geometric figures and curves in the plane. We begin by demonstrating the fundamental results of deductive geometry, following an axiomatic created for use in the high school classrooms. The axiomatic we will adopt will be that proposed by Rezende and Queiroz (2008), who adopts the axioms of the School Mathematics Study Groups (SMSG). The main results on convex and star-shaped figures will be provided and a sequence of results on convex polygons will be demonstrated to then address the same and other results generalized to non convex polygons. In the latter case a demonstration of the Jordan Curve Theorem for polygons will be presented. Comparisons between convex and non convex cases will be done. After the results on polygons, the theory applies in the calculation of areas, center of mass, combinatorial problems and the problem of the art gallery. The main properties of the convex figures and curves in general are studied, comparing again with figures and non convex curves. A demonstration of a theorem concluding discussion on the art gallery problem will be presented. Finally, we will study the constant width curves and their practical applications.

Keywords: Convexity, Convex curves, Convex figures, Simple Polygons.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Semiplano fechado e faixa	32
2.2	Ângulo e interior do ângulo	33
2.3	Triângulo e interior de triângulo.	33
2.4	Feixes de raios convexos.	35
2.5	Ilustração do Teorema 2.2	36
2.6	Ilustração do Teorema de Pasch.	37
2.7	Ilustração do Teorema do Travessão.	37
2.8	Ilustração do Teorema 2.6	39
2.9	Convexidade do Disco	41
2.10	Convexidade do Triângulo contido em uma Figura plana convexa.	42
2.11	Pontos interiores, exteriores e de fronteira.	42
3.1	Conjuntos formados por uma quantidade finita de segmentos.	47
3.2	Floco de neve de Koch até a 5ª iteração.	48
3.3	Conjuntos Estrelados.	49
3.4	Poligonais não fechadas	50
3.5	Poligonais fechadas	51
3.6	Polígono Simples	51
3.7	Polígonos Simples equiláteros e equiângulos.	52
3.8	Poligonal fechada e ordem dos vértices	52
3.9	Retas de Apoio	53
3.10	Ilustração do Teorema 3.1	54
3.11	Ângulo interno de um polígono	55
3.12	Tipos de quadriláteros	56
3.13	Ilustração do Teorema 3.3	57
3.14	Quadrilátero não convexo.	58
3.15	Triangularização de um quadrilátero.	59
3.16	Ilustração do Teorema 3.5	60
3.17	Demonstração do Teorema 3.7	61
3.18	Triangularização do hexágono regular.	62
3.19	Ângulo externo	63
3.20	Ilustração do Teorema 3.10	64
3.21	Poligonais convexas.	65
3.22	Varredura de vértices	67

3.23	Ilustração do Teorema 3.12: Conexidade.	68
3.24	Paridade de pontos próximos ao lado de um polígono.	68
3.25	Ilustração do Lema 3.2.	69
3.26	Vértices principais: orelha e boca	71
3.27	Vértices salientes.	71
3.28	Vértices reentrantes.	72
3.29	Fecho convexo de um polígono.	73
3.30	Ilustração do Teorema 3.15.	74
3.31	Diagrama de circulação do polígono.	75
3.32	Vetores normais a um polígono.	76
3.33	Circulação no polígono convexo.	76
3.34	Circulação no quadrilátero não convexo.	77
4.1	Máquina de perspectiva de Albert Dürer.	82
4.2	Copiando um polígono por triangularização.	83
4.3	Ampliando ou reduzindo uma figura	84
4.4	Teorema de Pitágoras	87
4.5	Demonstrando o Teorema de Pitágoras por equicomplementação.	87
4.6	Decomposições de um polígono por triângulos.	88
4.7	Calculando a área de um polígono.	88
4.8	Cálculo da área do polígono usando uma rede retangular.	89
4.9	Um polígono reticular.	90
4.10	Aplicação da Fórmula de Pick.	91
4.11	Triângulos Primitivos	91
4.12	Triângulos Primitivo: demonstrando o Teorema de Pick	92
4.13	Triangularização de um polígono simples com vértices virtuais.	94
4.14	Triangularização de um polígono simples com pontos internos.	95
4.15	Triangularizando um polígono reticular.	96
4.16	Geoplano virtual	97
4.17	Princípio de equilíbrio de Arquimedes	98
4.18	Centro de massa do triângulo.	100
4.19	Centro de massa do quadrilátero: caso convexo	100
4.20	Paralelogramo de Wittenbauer	101
4.21	Baricentro e o hexágono	102
4.22	Centro de massa de um polígono de cartolina	102
4.23	Localização do centro de massa de um polígono.	104
4.24	Ilustração do problema 4.1	105

4.25	Pentágonos que admitem apenas uma triangularização	106
4.26	Ilustração do Problema de Euler.	107
4.27	Problema da galeria de arte	110
4.28	Teorema das três cores	111
5.1	Transformações do disco via homeomorfismo.	114
5.2	Curva fechada simples sobre a superfície toroidal.	115
5.3	Ilustração do Teorema 5.1, itens 1 e 2.	116
5.4	Ilustração do Teorema 5.1, item 3.	117
5.5	Ilustração do Teorema 5.2.	117
5.6	Ilustração do Teorema 5.3.	118
5.7	Ilustração do Exemplo 5.2	120
5.8	Ilustração do Teorema 5.4	120
5.9	Largura e diâmetro: alguns exemplos	121
5.10	Ilustração do Teorema 5.5	122
5.11	Ilustração do Teorema 5.6	123
5.12	Feixes de raios convexos	124
5.13	Ponto regular e tangente a curva convexa.	125
5.14	Ponto singular e semi tangentes a uma curva convexa.	125
5.15	Pontos regulares e singulares no polígono convexo.	126
5.16	Orientação de percurso em uma curva	128
5.17	Polígono inscrito a uma curva convexa	128
5.18	Ilustração do Teorema 5.9	129
5.19	Vértices virtuais no polígono inscrito a uma curva convexa.	129
5.20	Ilustração do Teorema 5.10.	130
5.21	Ilustração do Teorema 5.11	131
5.22	Polígono circunscrito a uma curva convexa.	132
5.23	Lados no polígono circunscrito a uma curva convexa.	132
5.24	Aproximações poligonais a uma curva convexa \mathcal{K}	133
5.25	Ilustração do Exemplo 5.4	134
5.26	Ilustração do Teorema de Jung	135
5.27	Retas de apoio e tangentes.	136
5.28	Fecho convexo de uma figura não convexa.	136
5.29	Fecho convexo e retas suportes.	137
5.30	Largura de uma figura a uma dada direção.	137
5.31	Polígono estrelado relativamente a um ponto.	139
5.32	Sentido de orientação: lados e retas suportes de \mathcal{K}	140

5.33	Teorema de Krasnoselskii: Ponto M comum a \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_3 .	140
5.34	Teorema de Krasnoselskii: O Ponto O é interno a \mathcal{K} .	141
5.35	Teorema de Krasnoselskii: O segmento OC está dentro de \mathcal{K} .	142
5.36	Teorema de Krasnoselskii: O ponto P é um vértice de \mathcal{K} .	142
5.37	Usando cilindros para transporte de cargas.	143
5.38	Ilustração do Teorema 5.15.	144
5.39	O triângulo de Reuleaux.	145
5.40	Triângulo de Reuleaux girando dentro de um quadrado.	145
5.41	Movimento dos vértices e do centroide do triângulo de Reuleaux dentro do quadrado.	146
5.42	Broca capaz de perfurar furos quadrados.	147
5.43	Pentágono de Reuleaux.	147
5.44	Curva de largura constante a partir do heptágono estrelado regular.	148
5.45	Curva de largura constante a partir do heptágono estrelado equilátero.	148
5.46	Eneágono curvilíneo de largura constante.	149
5.47	Curvas de largura constante: arredondando os cantos.	150
5.48	Método das retas cruzadas.	150
5.49	Curva de largura constante regular.	151
5.50	Moedas da Inglaterra.	152
5.51	Comprimento de arco para um polígono curvilíneo de largura constante.	153
5.52	Intersecção de diâmetros nas curvas de largura constante.	155
5.53	Ilustração do Teorema 5.53.	156
5.54	Ilustração do Teorema 5.19.	157
5.55	Ilustração do Teorema 5.20.	158
5.56	Triângulo de Reuleaux e as senoidais.	159

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRELIMINARES	27
2.1	Resultados Preliminares	29
2.2	Figuras convexas no plano	41
3	POLÍGONOS	47
3.1	Resultados gerais sobre polígonos convexos e figuras estreladas.	49
3.2	Polígonos simples convexos.	59
3.3	Polígonos simples convexos e não convexos.	66
4	APLICAÇÕES E APROXIMAÇÕES À SALA DE AULA	81
4.1	Área, congruências e semelhanças.	81
4.2	Centro de massa	97
4.3	Problemas combinatórios e o Teorema da Galeria de arte.	104
5	CONVEXIDADE REVISITADA	113
5.1	Propriedades gerais das curvas convexas.	113
5.2	Teorema de Helly e suas aplicações.	133
5.3	Curvas de largura constante.	143
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	161
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	163

1 INTRODUÇÃO

Um dos desafios da educação matemática atual é apresentar essa importante área do saber como um corpo de conhecimentos útil e em constante desenvolvimento. Na dimensão da utilidade, quase sempre imediatista, corre-se o risco de reduzi-la a meras repetições com intuito de obter-se uma formação técnica, porém sem conduzir ao pensamento crítico e a autonomia. Por outro lado, o desenvolvimento constante está quase sempre associado a descobertas científicas, das quais sem o avanço da matemática também não progrediriam. Embora seja inquestionável a importância dessas duas nuances do esforço matemático atual, essa ciência não depende desses aspectos para o seu desenvolvimento. Outros tempos já houveram em que as descobertas matemáticas eram impulsionadas por mera contemplação a sua beleza, síntese e pelo desejo de obtenção da perfeição estética, como Courant e Robbins (2000) nos deixa a pista na epígrafe dessa dissertação. Acreditamos que o incentivo a uma cultura que contemple mais da beleza da matemática possa, de forma voluntária, impulsionar o interesse de nossos jovens ao seu aprendizado. O lugar ideal para isso é a escola e uma área da matemática que pode possibilitar essa transformação é a geometria. Apresentaremos nesse trabalho os aspectos mais importantes da Teoria de Convexidade de Figuras Geométricas Planas, com intuito de contribuir na formação do professor do ensino básico na tarefa de apresentação da geometria de forma mais bonita e interessante.

A teoria da convexidade das figuras planas e dos sólidos, com métodos gerais de resolução, teve seu início no final do século XIX, embora as figuras e poliedros já tenham sido estudadas, do ponto de vista geométrico, há milênios. O problema clássico da duplicação do cubo, por exemplo, é anterior a Euclides de Alexandria, datado por volta de 427 A.E.C., conforme podemos pesquisar em Roque (2012, p.155). Com formulações simples e um forte apelo a intuição a teoria da convexidade das figuras planas e dos sólidos pode ser apresentada junto com a geometria euclidiana. Embora os resultados dessa teoria sejam, quase sempre, de formulação acessível e de rico significado geométrico, muitos só foram solucionados recentemente e outros continuam ainda em aberto. Neste trabalho, de caráter introdutório, apresentaremos os aspectos principais dessa teoria no contexto das figuras convexas, que são subconjuntos de pontos do plano.

A noção intuitiva de convexidade, como algo relacionado a curvatura, está presente em várias situações da natureza. O assunto surge em diversos fenômenos naturais com inúmeras aplicações a ciência e a tecnologia. Na matemática, os conjuntos convexos têm um caráter unificador, tendo forte presença em geometria, análise, álgebra linear e fazendo conexões com outras áreas mais avançadas da matemática como a topologia. As definições matemáticas de conjuntos

convexos quase sempre são apresentadas usando a noção primitiva “entre” para segmentos de retas, presentes nas teorias geométricas. Portanto, o conceito matemático de convexidade tem sua fundamentação na geometria. A primeira teoria axiomática da geometria, do ponto de vista do formalismo moderno, foi proposta por David Hilbert (1862-1943) na obra *Grundlagen der Geometrie* de 1899. Na axiomática de Hilbert, um dos seus cinco grupos de axiomas fora desenvolvido para dar sentido a essa noção: os axiomas de ordem. A noção de medida não surge na Geometria de Hilbert. Porém, existem modelos aritméticos de geometria, tendo como base os axiomas de Hilbert, nos quais os entes primitivos têm uma interpretação específica ligada a noção de número. Os modelos aritméticos do plano (\mathbb{R}^2) e do espaço (\mathbb{R}^3), são exemplos de modelos que satisfazem os axiomas geométricos da Geometria Formal euclidiana, via formalismo de Hilbert. Essa ligação entre geometria e número faz com que a noção de convexidade esteja com frequência na análise matemática. A axiomática de Hilbert apresenta um desenvolvimento da geometria extenso e difícil, útil para uso na ciência. Embora as dificuldades, a abordagem sintética, isto é, sem uso de coordenadas, oportuniza ao estudante a necessidade de introduzir a noção de continuidade. Em Zeitler (1990) vemos um desenvolvimento histórico de várias teorias de geometria como alternativa a axiomática de Hilbert. Uma dessas numerosas possibilidades a axiomática de Hilbert apresentada na primeira metade do século XX, foi proposta por Birkhoff em 1932. Este matemático propôs uma formalização da geometria que permite o uso de números reais como ferramenta de medida. Aproveitando, com isso, a formalização dos números reais que já havia sido desenvolvido por Richard Dedekind em 1872. Birkhoff formalizou as noções de medida de segmento e ângulo, o que equivale ao uso da régua (graduada) e do transferidor. Com essa abordagem os numerosos axiomas de Hilbert foram reduzidos a quatro, sendo que a desvantagem desse minimalismo é o longo trabalho de demonstração de resultados. Para maiores detalhes o leitor pode consultar Birkhoff (1932).

Conforme Gelfand, Glagolieva e Kirillov (1981), a tradução dos conceitos geométricos para linguagem numérica, especialmente saber determinar numericamente a posição de um ponto no espaço, já havia permitido que os soviéticos, nos anos 50 do século XX, lançassem satélites artificiais na órbita terrestre no programa Sputnik. A geometria analítica, isto é, àquela que faz uso de sistemas de coordenadas, permite que computadores sejam utilizados para a resolução de problemas geométricos e para a investigação de relações entre elementos geométricos de qualquer natureza. Portanto, a abordagem analítica, por estar ligada a aplicações científicas, e por sua vez, aos interesses políticos das nações desenvolvidas, era prioridade da maioria dos pesquisadores em matemática na época da “guerra fria” período que durou de 1946 a 1980 aproximadamente.

Segundo Zeitler (1990), o ponto de partida das deliberações dos escritores de livros didáticos escolares são condensações e simplificações das versões universitárias do assunto. A forte

influência do formalismo matemático, levaram os círculos universitários das nações desenvolvidas a apresentarem a geometria escolar utilizando o método axiomático com axiomáticas equivalentes as de Hilbert. Por outro lado, a geometria analítica, fortemente ligada as pesquisas de ponta, trazia consigo para as salas de aula o formalismo dos vetores, espaços vetoriais, etc. Essa ênfase excessiva em estruturas e na formalização expulsara a geometria visual e intuitiva da escola. Levava consigo, a criatividade, inspiração e a beleza das formas geométricas simples, porque os professores não tinham treino em geometria: conheciam apenas espaços vetoriais abstratos. O *School Mathematics Study Group* (SMSG) foi criado para desenvolver e implementar um currículo matemático para a educação primária e secundária. Esse grupo fazia parte dos esforços do governo americano para reformulação da educação em ciências, uma vez que os soviéticos haviam saído na frente na corrida espacial na época da guerra fria. Um dos resultados do SMSG foi a proposta de um sistema axiomático, tendo como base a axiomática de Birkhoff (1932), porém com uma quantidade abundante de axiomas. Para os objetivos educacionais, isso evitaria provar fatos óbvios da geometria. Os 22 axiomas do SMSG tornaram-se o sistema de axiomas predominantemente usado pelos professores dos EUA a partir dos anos 1960. Desenvolvimento semelhante fora feito pelo geômetra russo A.V. Pogorelov em seu livro “Geometría elemental”, uma tradução para o espanhol do original russo, Pogorelov (1974).

Dentre as várias axiomáticas existentes optamos por utilizar, no desenvolvimento de nosso trabalho, os axiomas apresentados por Rezende e Queiroz (2008), que tem como base a axiomática do SMSG sendo que a representação brasileira de peso da axiomática de Pogorelov é mostrada em Barbosa (2006).

Nos anos setenta do século XX, com o avanço da Ciência da Computação, houve a necessidade de discretização da geometria para o uso de conjuntos finitos tais como pontos, segmentos, triângulos, tetraedros, em cálculos a serem implementados por rotinas computacionais. Os polígonos, por exemplo, estão para a geometria discreta como os números estão para a aritmética. Segundo O’Rourke e Devadoss (2011), a triangularização (decomposição de um polígono por triângulos) funciona como a fatoração de um número inteiro em primos, porém sem a unicidade. Nasce dessa necessidade, a Geometria Computacional, que junto com a Geometria Discreta une dois ramos: o primeiro ligado as aplicações e o segundo as pesquisas teóricas em matemática. A Geometria Discreta nessa época estava se desenvolvendo de forma impetuosa, com aplicações em várias áreas teóricas da matemática como Teoria dos Grafos, por exemplo. A união desses dois ramos novos fez a ligação ideal entre matemática e a computação. Os algoritmos computacionais da geometria computacional discreta geralmente enfatizam os aspectos geométricos de um problema prático e estão fortemente ligados a intuição. Por essa razão, apresentam várias proposições acessíveis ao leitor não especializado em matemática, muitos desses problemas ainda em aberto. Os aspectos matemáticos teóricos da Geometria Discreta têm li-

gação com a teoria das figuras e corpos. Por isso, muitos resultados atuais sobre polígonos e poliedros foram descobertos por pesquisadores desse ramo.

A influência do movimento de formalização da geometria e a ênfase na geometria analítica discutida anteriormente, ainda reverbera nos nossos dias e influencia a educação. Uma das ações desenvolvidas no Brasil é a capacitação de professores em programas de aperfeiçoamento como o PROFMAT. Na filosofia do PROFMAT faz-se mister que o futuro mestre possa ter a capacidade de apresentar temas com aproximações aos assuntos do ensino básico, que extrapole a sala de aula e instigue a curiosidade. Que seja bonito, interessante e desafiador. Zeitler (1990), elabora uma lista dos temas em Geometria que podem ser usados em sala de aula com esse intuito: geometria diferencial elementar, curvas de rolamento (como a cicloide, hipocicloide, etc.), hélices, caustica (óptica), mosaicos, tesselações, topologia elementar, conjuntos convexos, faixa de Mobius, Geometria de Minkowski, computadores em geometria, otimização linear, elementos de teoria da relatividade, etc. Para que a escola cumpra seu papel, deve, de vez enquanto, desviar-se do caminho sistemático do currículo. Nesses desvios, abrem-se novas portas. Motivam-se alguns alunos para estudo do tema, despertam-se curiosidades em outros. O estudo das figuras geométricas planas, em particular os polígonos simples, está ligado a fundamentação da geometria. Por essa razão, os resultados apresentados nesse trabalho podem auxiliar os educadores em uma melhor compreensão dos temas ensinados e que fazem parte do currículo da educação básica. Para além do currículo existem aplicações da teoria das figuras convexas no cálculo de áreas e comprimento de curvas, centro de massa, tesselações e também em problemas de análise combinatória, que fazem uso dos resultados básicos sobre convexidade e triangularização de polígonos.

Em resumo, a apresentação da convexidade sobre essa ótica permite que se observe as variadas aplicações da teoria das figuras e corpos convexas em outros ramos do conhecimento e suas conexões com outros conteúdos vistos no ensino médio. A proposta de discussão sobre a convexidade de figuras amplia os horizontes do ensino e também apresenta assuntos poucos abordados no ensino médio, mas que podem ser apresentados nesse nível por meio de suas aplicações de maneira informal.

O objetivo principal desse trabalho é propor uma sequência de resultados formais da noção de convexidade para figuras geométricas planas e buscar aproximações desses resultados obtidos com o ensino de geometria na educação básica. O presente trabalho tem como objetivo geral expor uma formalização do conceito de convexidade plana para polígonos simples e para figuras geométricas planas em geral e como objetivos específicos:

a) Efetuar uma revisão teórica sobre convexidade plana;

- b) Apresentar uma axiomática para a geometria e, em particular, para o tratamento da convexidade que se diferencia da apresentação dada em livros do ensino médio;
- c) Apresentar conexões entre convexidade e análise combinatória;
- d) Aplicar resultados de convexidade ao cálculo de áreas e centro de massa.

Os principais textos dedicados a teoria da convexidade de figuras e sólidos são:

- *Convex Figures and Polyhedra*, Lyusternik (1966). Esse texto faz um desenvolvimento introdutório da teoria das figuras convexas. O objetivo principal do texto é a obtenção de resultados da teoria dos poliedros. O texto apresenta conexões da teoria com a topologia.
- *Convex Figures*, Yaglom e Boltyanskii (1961). O livro, em forma de problemas com respostas no final, traz um desenvolvimento extensivo da teoria das figuras convexas no plano.
- *Combinatorial Geometry in the Plane*, Hadwiger e Debrunner (2015). Esse livro é uma extensão do segundo e segue a mesma linha. Novos e importantes resultados são apresentados.
- *Convex Polyhedra*, Alexandrov (2005). A primeira edição desse texto é de 1950 e é referência no assunto. O texto é formal e sua leitura é difícil a leitores sem formação específica em matemática.
- *Regular polytopes*, Coxeter (1973). O autor faz uma apresentação extensiva sobre os poliedros regulares incluindo, além dos resultados milenares outros recentes sobre o assunto. Os polítopos no plano são os polígonos e no espaço os poliedros. Esse livro apresenta uma generalização das ideias geométricas para espaços de dimensão maior do que três.

Os dois primeiros textos são as referências principais dessa dissertação no tratamento geral das figuras no plano.

A axiomática que adotaremos será a adotada no livro: *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*, Rezende e Queiroz (2008), que adota os axiomas do SMSG.

A metodologia de nosso trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica, que segundo Gil (2008, p.50):

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim

como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo. A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente.

O trabalho terá a seguinte organização: O Capítulo 1 é composto por essa introdução. No Capítulo 2 apresentaremos os axiomas de Rezende e Queiroz (2008), que serão usados nas demonstrações dos resultados principais da geometria. Resultados esses, que servirão como base para as demonstrações subsequentes. Uma discussão sobre a convexidade em ângulos, triângulos, e figuras obtidas por uma intersecção infinita de semiplanos será apresentada. Esses resultados serão úteis em todo o trabalho.

No Capítulo 3 apresentaremos os resultados sobre convexidade para polígonos simples, em duas etapas: Primeiro demonstrando os resultados, comumente obtidos nos textos de geometria, sobre polígonos convexos (essa parte terá como base uma sequência de teoremas sobre convexidade apresentados em Pogorelov (1974)). Depois obteremos resultados análogos para polígonos simples não convexos, levando em consideração os resultados já existentes. Estudaremos as dificuldades de obtenção dos resultados dessa classe de polígonos e usaremos ferramentas mais sofisticadas, como o *Teorema Poligonal da Curva de Jordan*.

No Capítulo 4 discutiremos a noção de área em geometria, no contexto axiomático, e aplicaremos os resultados do Capítulo 3 para calcular áreas limitadas por polígonos e centro de massa. Discutiremos aproximações das áreas dos polígonos por uma rede formada por quadrados e apresentaremos o caso especial dos polígonos reticulares, no qual o cálculo da área reduz-se a um problema de contagem. Na demonstração do Teorema de Pick utilizaremos uma forma generalizada de triangularização na qual podem ser considerados pontos sobre os lados ou no interior do polígono. Para finalizar serão aplicados os resultados obtidos na resolução de problemas combinatórios, os quais exigiriam um esforço muito maior em sua resolução caso não aplicássemos o que fora discutido no Capítulo 3.

No Capítulo 5 serão apresentados alguns resultados fundamentais sobre convexidade em figuras geométricas planas em geral. Alguns resultados obtidos, nesse contexto, servirão como um novo olhar sobre os que obtemos nos capítulos anteriores. Outros serão resultados gerais que servirão para compreensão e relação da convexidade em conexão com outros temas importantes da matemática. Discutiremos o *Teorema de Krasnoselskii*, que expandirá a discussão iniciada no Capítulo 3 sobre o problema da galeria de arte para polígonos. Para finalizar esse Capítulo tendo como base os resultados anteriores, discutiremos as curvas de largura constante, que têm uma enorme aplicabilidade em situações práticas.

Nas Considerações Finais apresentamos os resultados de nossa pesquisa, se os objetivos foram alcançados e quais caminhos podem ser seguidos em trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Apresentaremos neste capítulo os primeiros resultados sobre convexidade envolvendo as figuras geométricas elementares: triângulos, feixes de semirretas, faixas, semiplanos, etc. A partir de um resultado fundamental sobre intersecções de conjuntos convexos, obtemos uma classe maior de figuras, que podem ser obtidas como intersecções de semiplanos, mesmo que tenhamos uma quantidade infinita deles. Assim podemos mostrar que um disco, uma figura limitada por uma elipse e outras tantas figuras com fronteira curvilínea, são conjuntos convexos do plano. Para tal objetivo, teremos que desenvolver a infraestrutura básica da geometria dentro da axiomática que escolhemos. Inicialmente exporemos as notações que utilizaremos no trabalho e apresentaremos alguns resultados iniciais. A seguir apresentaremos os axiomas que utilizaremos para desenvolver a teoria de convexidade e na Seção 2.2 abordaremos as figuras convexas planas e apresentaremos o *Teorema da Curva de Jordan*.

Antes de iniciarmos com os primeiros axiomas e resultados expomos uma pequena revisão de literatura para situar o leitor no tema convexidade.

A predominância de trabalhos acadêmicos que falem sobre figuras convexas está ligada principalmente a problemas de algoritmos de otimização em geometria computacional. No contexto pedagógico os principais trabalhos sobre o assunto em Língua portuguesa são os artigos de Lima, colecionados em Lima (2007). Nesses artigos Lima fala sobre as propriedades compartilhadas por polígonos convexos e não convexos. Desenvolve as noções de reentrância e saliência de vértices nos polígonos simples e o autor obtém conclusões a respeito da importância do assunto e as conexões com outras áreas mais avançadas da matemática. No artigo *Teorema da Galeria de Arte e Triangularização de Polígonos*, Correa e Ferreira (2009), é apresentado o *Teorema da Galeria de Arte* e no problema da triangularização é utilizada a teoria dos grafos para a resolução do problema como em O'Rourke (1987). Em Figueiredo e Carvalho (1991), no que se relaciona ao nosso trabalho existe um desenvolvimento da teoria do fecho convexo e a teoria da triangularização, tudo visto analiticamente. O objetivo desse texto nas palavras do próprio autor é apresentar uma introdução aos aspectos teóricos dos algoritmos geométricos sem perder de vista a necessidade de implementá-los na prática. O livro de Barbosa (2006) traz alguns exercícios interessantes envolvendo a noção de convexidade; alguns deles aparecerão em exemplos do nosso trabalho. Tem sido mais comum que o tema convexidade seja desenvolvido teoricamente no contexto das funções convexas. No repositório do PROFMAT a maioria dos trabalhos ligados a convexidade foram escritos sobre esse ponto de vista. Esses trabalhos não serão tratados aqui porque estão fora do escopo de nossa discussão.

Em O'Rourke e Devadoss (2011) discute-se sobre os problemas clássicos da geometria computacional: *O Teorema da Galeria de Arte* e o problema da triangulação de polígonos. Esses problemas, resolvidos no contexto particular para o tratamento de algoritmos de otimização de rotinas computacionais, trazem ideias importantes sobre a compreensão da noção de convexidade para polígonos. Na sequência há um desenvolvimento da noção de fecho convexo, que será usada na demonstração de um resultado importante deste trabalho. Relações com a noção de área e o *Teorema de Pick* são também feitas. Há um estudo detalhado sobre um tipo de tesselação do plano conhecida como *Diagramas de Voronoi*. Esses diagramas têm inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento. Em Courant e Robbins (2000) há uma demonstração elementar do *Teorema da Curva de Jordan Poligonal*, que terá papel central no desenvolvimento da dissertação. No artigo de Meisters (1975), *Polygons have ears*, fala-se sobre os vértices salientes que são pontas, identificados como orelha nesse trabalho, que é a notação tradicional da geometria computacional. Nesse mesmo contexto os vértices reentrantes são identificados como boca. Essa é uma tradução livre dos termos utilizados na língua inglesa. Em Shashkin (1989), no que tange a nossa pesquisa, noções topológicas básicas são apresentadas com intuito de explicar a *característica euleriana no plano*. Aplicações a convexidade de polígonos simples e a noção de área são desenvolvidas. Há uma demonstração do *Teorema de Pick*, relacionado a cálculo de áreas de polígonos cujos vértices estão sobre uma rede de pontos no plano. Nos referenciais que pesquisamos, a apresentação de uma sequência maior de resultados sobre convexidade para polígonos é encontrada em Pogorelov (1974). O matemático e educador russo, A. M. Yaglom fez contribuições ao tema convexidade em polígonos no contexto das olimpíadas matemáticas em que problemas combinatórios diversos são propostos. O famoso problema da triangulação de um polígono, proposto pela primeira vez por Leonard Euler a Christian Goldbach em 1751, é resolvido em Yaglom e Yaglom (1987) de uma forma muito mais atrativa e acessível do que a resolução clássica dada pelo matemático francês Eugène Charles Catalan em 1838. Para a resolução de Catalan veja Dorrie (1965). Um estudo inicial a convexidade de figuras geométricas planas pode ser visto em Lyusternik (1966). Para um desenvolvimento mais aprofundado do tema os textos Yaglom e Boltyanskii (1961) e Hadwiger e Debrunner (2015) são as referências principais. Sobre as Curvas de Largura Constante o antigo texto Rademacher e Toeplitz (1957) traz um tratamento formal em um linguagem acessível ao tema, mostrando também resultados gerais sobre curvas convexas. O texto Gardner (1991), uma coletânea de publicações do autor em uma coluna da *Scientific American*, traz uma visão do assunto sobre o olhar da matemática recreativa. Em Honsberger (1970) há uma demonstração do *Teorema de Barbier* usando matemática acessível ao leitor do ensino médio.

2.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Conforme discutido na Introdução dessa dissertação, a axiomática da geometria que adotaremos será a de Rezende e Queiroz (2008), que tem como base os axiomas de Birkhoff. Nessa axiomática os números reais são introduzidos nos axiomas de medida. A noção de medida é desenvolvida, usando as propriedades dos números reais, nos axiomas de medição de segmentos, ângulos e áreas. Nessa seção apresentaremos os axiomas que serão mais usados, estabeleceremos notações, definições e demonstraremos os primeiros resultados de nosso trabalho.

Os três primeiros axiomas a seguir estão associados a noção primitiva de incidência.

Axioma 1. *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Axioma 2. *Em qualquer reta estão no mínimo dois pontos distintos.*

Axioma 3. *Existem pelo menos três pontos distintos não colineares.*

Os axiomas 4, 5 e 6 a seguir servem para caracterizar a medida de segmentos. Aqui usam-se as propriedades dos números reais.

Axioma 4 (Axioma da distância). *A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.*

Esse número obtido através do Axioma 4 é chamado de *distância* entre o par de pontos.

Axioma 5 (Axioma da régua). *Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números reais de modo que,*

1. *Cada ponto da reta corresponde a exatamente um número real.*
2. *Cada número real corresponde a exatamente um ponto da reta.*
3. *A distância entre dois pontos é o valor absoluto da diferença entre os números correspondentes.*

O número correspondente a qualquer ponto da reta é chamado coordenada do ponto.

Uma correspondência do tipo descrita no Axioma 5 é chamada de um sistema de coordenadas para a reta. O número correspondente a qualquer ponto da reta é chamado coordenada do ponto. Pelo item 3 do Axioma 5, a distância entre os pontos A e B , de coordenadas a e b é dada por $\overline{AB} = |a - b|$.

Axioma 6 (Axioma de colocação da régua). *Dados dois pontos A e B numa reta, pode ser escolhido um sistema de coordenadas, de modo que a coordenada de A seja zero e a coordenada de B seja positiva.*

Definição 2.1. *Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, dizemos que B está entre A e C , o que denotamos por $A * B * C$.*

Notamos que se $A * B * C$ então também é $C * B * A$.

Na axiomática de Hilbert a noção *entre* para pontos da reta é primitiva. Aqui ela é definida usando a noção de *distância*, constante no Axioma 4. O Axioma 5 relaciona a noção de distância com os números reais. Uma vez definida a ordem para pontos de uma reta, seria natural perguntar se essa ordem é compatível com a ordem de suas coordenadas, isto é, com a ordem dos números reais. Dizemos que o número real y está entre os números reais x e z quando $x < y < z$ ou $z < y < x$. Ambos os casos são denotados por $x * y * z$. Precisamente, queremos saber se dados três pontos A, B e C da reta r , com coordenadas x, y e z , será $A * B * C$ sempre quando $x * y * z$. Essa compatibilidade, de fato, ocorre. A demonstração dessa propriedade não será apresentada nesse trabalho, porém, poderá ser encontrada em Rezende e Queiroz (2008, p.17).

Definição 2.2. *Sejam A e B pontos distintos.*

1. *O segmento de reta AB , ou simplesmente segmento AB , é definido como sendo o conjunto dos pontos A e B , e dos pontos X tais que $A * X * B$.*
2. *A medida ou comprimento do segmento AB é definida como a distância entre os pontos A e B , isto é, por \overline{AB} .*
3. *A semirreta ou raio de origem A contendo o ponto B , a qual denotaremos por \overrightarrow{AB} , é definida como a união dos pontos do segmento AB com o conjunto dos pontos X tais que $A * B * X$. O ponto A é denominado a origem da semirreta.*

Segmentos que têm a mesma medida são chamados congruentes. Denotaremos a congruência entre dois segmentos AB e CD como $AB \cong CD$.

Seguindo nossa intuição, uma reta divide o plano em duas regiões bem definidas. Para passarmos de uma região para outra, teremos que interceptar a reta ou deveríamos passar por cima ou por baixo dela, usando a terceira dimensão. O conteúdo do próximo axioma depende de uma importante definição que enunciaremos a seguir.

Definição 2.3 (Subconjunto do plano convexo). *Um subconjunto do plano é dito convexo se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está totalmente nele contido.*

Axioma 7 (Axioma da separação do plano). *Dada uma reta, os pontos que não pertencem a reta formam dois conjuntos disjuntos tais que,*

1. *Cada um dos conjuntos é convexo.*

2. Se A pertence a um dos conjuntos e B ao outro, então o segmento AB intersecta a reta.

A seguir, na Definição 2.4, vamos nomear os conjuntos caracterizados no Axioma 7 da forma como estamos acostumados a ver nos livros de geometria. Também definimos o que significa *estar de um lado de uma reta* para retas no plano.

Definição 2.4. Os conjuntos determinados pelo Axioma 7 são chamados *semiplanos* e r é chamada *origem de cada um deles*. Dizemos que *reta r separa o plano em dois semiplanos*. Se dois pontos estão no mesmo semiplano de r dizemos que os pontos estão *do mesmo lado de r* . Se dois pontos estão em semiplanos distintos, dizemos que os pontos estão *em lados opostos de r* . Chamaremos de *semiplano fechado* a união de um dos dois semiplanos determinados por uma reta r , com os pontos dessa mesma reta. Denotaremos os semiplanos por \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 e os respectivos semiplanos fechados por $\overline{\mathcal{H}}_1$ e $\overline{\mathcal{H}}_2$.

Na sequência, mostraremos que os semiplanos fechados determinados por uma reta, também são conjuntos convexos do plano. Para tal, usaremos alguns resultados elementares envolvendo interposição de pontos e a noção de lados de uma reta caracterizada pelo Axioma 7. As demonstrações desses resultados serão omitidas, mas podem ser encontradas em Pogorelov (1974, p.20).

Exemplo 2.1. Considere uma reta r e uma semirreta, não contida em r , com origem em um ponto $O \in r$. Os pontos da semirreta, exceto O , estão no mesmo lado da reta r .

Exemplo 2.2. Considere uma reta r e um segmento, não contido em r , com origem em um ponto $O \in r$. Os pontos do segmento, exceto O , estão no mesmo lado da reta r .

Exemplo 2.3. Um semiplano fechado $\overline{\mathcal{H}}$ com origem em uma reta r é um conjunto convexo. Na Figura 2.1a pode ser vista uma representação de um semiplano fechado.

Com efeito, sejam dados dois pontos $A, B \in \overline{\mathcal{H}}$. Se A e B pertencem a \mathcal{H} , o Axioma 7 garante que $AB \subset \mathcal{H}$. Dado que, $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{H}}$, temos $AB \subset \overline{\mathcal{H}}$. Se $A, B \in r$, $AB \subset r$ e novamente como $r \subset \overline{\mathcal{H}}$, temos $AB \subset \overline{\mathcal{H}}$. Quando $A \in \mathcal{H}$ e $B \in r$, pelo Exemplo 2.2, o segmento AB , exceto por B , está do mesmo lado de A da reta r , ou seja, $AB \setminus \{B\} \subset \mathcal{H}$. Dado que $B \in r$, $\mathcal{H} \subset \overline{\mathcal{H}}$ e $r \subset \overline{\mathcal{H}}$, concluímos que também nesse caso, $AB \subset \overline{\mathcal{H}}$.

Para começarmos a apresentar exemplos de conjuntos convexos no plano, precisamos demonstrar o resultado abaixo.

Teorema 2.1. A intersecção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Demonstração. Com efeito, seja $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ a intersecção de uma família de conjuntos convexos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com índices em L . Sejam P e Q , pontos quaisquer dessa intersecção. Então P e Q

pertencem a A_λ para todo $\lambda \in L$. Logo, PQ está inteiramente contido em cada um dos A_λ , pois cada um deles é convexo. Logo PQ está inteiramente contido em $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ e o resultado está demonstrado. \square

Percebemos que a família pode conter uma quantidade infinita de índices, portanto a intersecção de infinitos semiplanos ainda é um conjunto convexo. Veremos no Capítulo 5, que em um sentido que será discutido, toda figura plana convexa é uma intersecção de finitos ou infinitos semiplanos.

Exemplo 2.4. *Duas retas paralelas determinam uma região do plano, intersecção de dois semiplanos, chamada faixa. A faixa entre as retas paralelas é um subconjunto convexo do plano. (Veja Figura 2.1b).*

Figura 2.1 – Semiplano fechado e faixa



(a) Semiplano Fechado



(b) Faixa

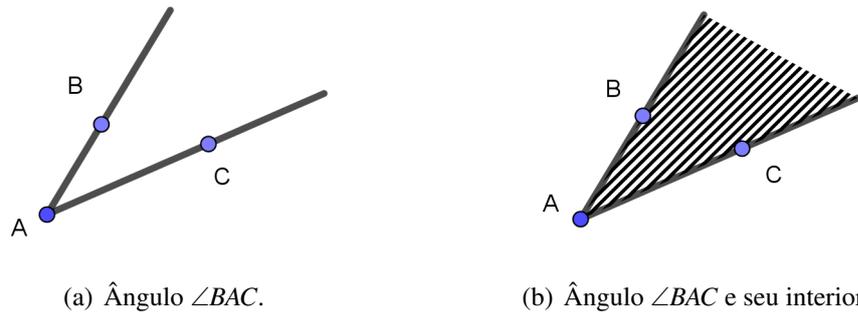
Fonte: produção do autor, 2018.

Antes de exibirmos os Axiomas de 8 à 11, de medição de ângulos, precisamos das seguintes definições.

Definição 2.5 (Ângulo). *Define-se ângulo a união de duas semirretas que têm a mesma origem e não estão contidas na mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas AB e AC então essas semirretas são chamadas lados do ângulo. O ponto A será chamado vértice do ângulo. Representaremos o ângulo BAC por $\angle BAC$ (Figura 2.2a).*

Definição 2.6 (Interior do ângulo). *Dizemos que o ponto P está no interior do ângulo $\angle BAC$ ou é um ponto interior de $\angle BAC$ se os pontos P e B estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AC} e os pontos P e C estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AB} . O interior do ângulo $\angle BAC$ é o conjunto formado pelos pontos interiores ao ângulo $\angle BAC$. O exterior de $\angle BAC$ é o conjunto dos pontos que não estão no ângulo $\angle BAC$ e nem no seu interior (Figura 2.2b).*

Figura 2.2 – Ângulo e interior do ângulo

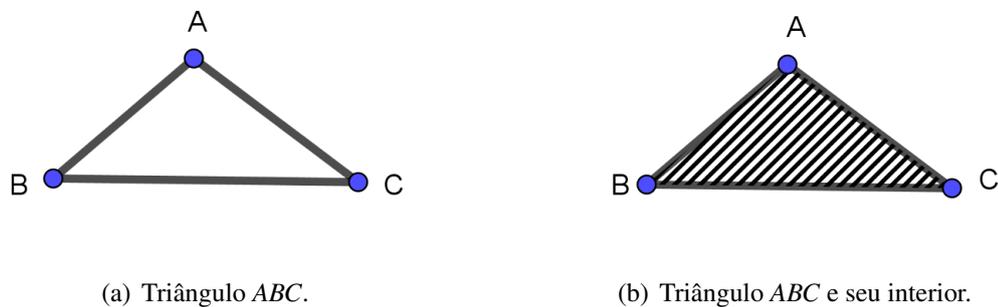


Fonte: produção do autor, 2018.

Definição 2.7 (Triângulo). *Dados três pontos não colineares A , B e C define-se o triângulo ABC como o conjunto formado pela união dos segmentos AB , AC e BC . Denotamos o triângulo ABC por ΔABC . Neste caso, diremos que A , B e C são os vértices do ΔABC e que AB , AC e BC são os lados do ΔABC (Figura 2.3a).*

Definição 2.8 (Interior e exterior de um triângulo). *Sejam o triângulo ABC e D um ponto não pertence ao ΔABC . Diremos que D é um ponto interior do ΔABC se é um ponto interior dos três ângulos do ΔABC . Se D não é um ponto interior, então é um ponto exterior do ΔABC . O interior do triângulo ABC é o conjunto formado pelos pontos interiores de ABC e o exterior, o conjunto formado pelos pontos exteriores ao triângulo ABC . Nos referiremos a região limitada pelo triângulo ABC como sendo a união do interior de ABC com o triângulo ABC (Figura 2.3b). O exterior do triângulo ABC é o complementar do plano da região limitada pelo triângulo.*

Figura 2.3 – Triângulo e interior de triângulo.



Fonte: produção do autor, 2018.

Axioma 8 (Axioma da medida de ângulos). *A cada ângulo $\angle ABC$ corresponde um número real entre 0 e 180.*

O número correspondente ao axioma anterior é chamado de medida do ângulo e será denotado por $\angle ABC$. Dois ângulos $\angle BAC$ e $\angle EDF$ que têm a mesma medida são chamados

congruentes. Denotaremos a congruência como $\angle BAC \cong \angle EDF$. Usaremos pela tradição, o símbolo " $^\circ$ " chamado grau, após o número que corresponde a medida para ser enfatizado que trata-se de medida angular. O grau é uma medida adimensional e o seu uso nas axiomáticas de régua-graduada e transferidor não é consensual: alguns autores utilizam outros suprimem o símbolo.

Axioma 9 (Axioma da construção do ângulo). *Seja \overrightarrow{AB} uma semirreta contida na reta origem de um semiplano \mathcal{H} . Para cada número α entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta \overrightarrow{AP} com P em \mathcal{H} , tal que $\angle PAB = \alpha$.*

Axioma 10 (Axioma da adição de ângulos). *Se D é um ponto interior do ângulo $\angle BAC$, então $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$.*

Definição 2.9 (Par linear). *Se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são semirretas opostas e \overrightarrow{AD} é uma outra semirreta, então $\angle BAD$ e $\angle DAC$ formam um par linear.*

Axioma 11 (Axioma do suplemento). *Se dois ângulos formam um par linear, então são suplementares¹.*

Exemplo 2.5. *O interior de um ângulo e o interior de um triângulo são conjuntos convexos. O exterior do ângulo e o exterior do triângulo não são conjuntos convexos. Com efeito, a convexidade dos conjuntos segue do Teorema 2.1, pois o interior em ambos os casos são intersecções de conjuntos convexos. Quanto ao exterior, em ambos os casos, é possível encontrar dois pontos tais que o segmento correspondente não esteja inteiramente contido no respectivo conjunto.*

Em algumas aplicações, por exemplo, em trigonometria e na teoria geral dos polígonos simples a ser desenvolvida no Capítulo 3, é importante estender a noção de ângulo para incluir o ângulo de medida zero, o de medida 180° (o ângulo raso), os ângulos com medida entre 180° e 360° e o ângulo de 360° . O ângulo nulo é uma semirreta, o ângulo raso é uma reta e seu interior é um semiplano. O interior do ângulo de medida $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ da Definição 2.6, é, como consequência da definição, convexo. O interior de um ângulo com medida $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ é o complementar no plano de algum ângulo com medida entre 0° e 180° e seu interior, portanto não é convexo.

Considerando um ponto P , interior a um ângulo $\angle AOB$ da Definição 2.6, a semirreta \overrightarrow{OP} estará inteiramente contida, exceto pelo vértice, no interior do ângulo (veja Exemplo 2.1). Diz-se que a semirreta \overrightarrow{OP} está entre as semirretas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} . Assim, as semirretas que emanam de O e estão no interior de $\angle AOB$ formam um feixe de raios que cobre todo o interior de $\angle AOB$

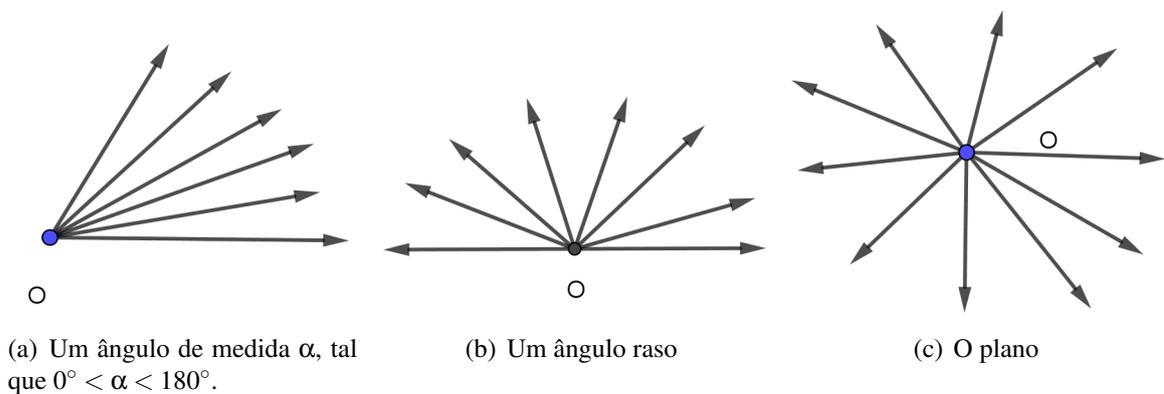
¹Dois ângulos são ditos suplementares quando a soma de suas medidas for igual a 180° .

(Figura 2.4a). Um ângulo raso, da mesma forma, é formado por um feixe de raios que cobre todo um semiplano (Figura 2.4b). O ângulo de 360° é formado por todas as semirretas que emanam do ponto O e, portanto, cobrem o plano todo (Figura 2.4c).

Essa discussão motiva a definição seguinte.

Definição 2.10 (Feixe convexo de raios). *Um conjunto de raios (semirretas) emanando de um ponto O é dito ser um feixe convexo de raios quando for uma semirreta, um par de semirretas opostas, um ângulo entre 0° e 180° , o ângulo raso ou o plano todo.*

Figura 2.4 – Feixes de raios convexos.



Fonte: produção do autor, 2018.

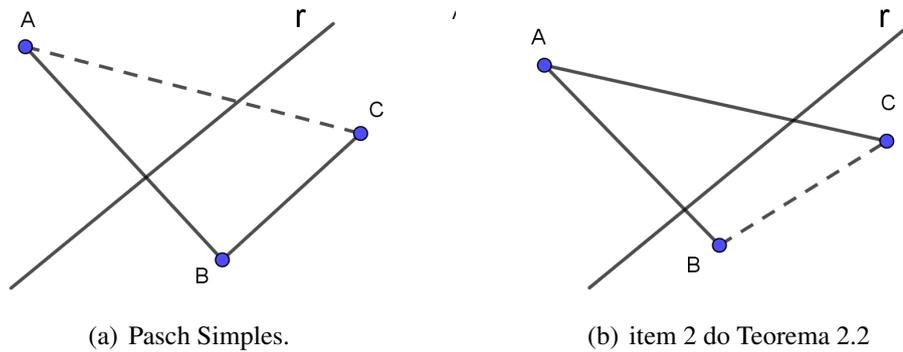
Na sequência serão demonstrados, alguns resultados importantes como consequência do Axioma 7, que serão utilizados no Capítulo 3.

Teorema 2.2. *Sejam A , B , e C pontos e r uma reta.*

1. (Pasch Simples). *Se A e B estão em lados opostos de r e B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão em lados opostos de r .*
2. *Se A e B estão em lados opostos de r e A e C estão em lados opostos de r , então B e C estão do mesmo lado de r .*

Demonstração. Vamos demonstrar o item 1. Vamos supor que A e C estejam do mesmo lado de r . Observe que, do Axioma 7, os pontos do plano que não estão em r estão em dois semiplanos distintos e disjuntos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Vamos admitir, sem perda de generalidade, que A está em \mathcal{H}_1 e B em \mathcal{H}_2 . Como A está em \mathcal{H}_1 , então pela nossa hipótese inicial C está em \mathcal{H}_1 . Logo, B está em \mathcal{H}_2 e C está em \mathcal{H}_2 . Assim, C está em \mathcal{H}_1 e em \mathcal{H}_2 , contrariando o fato de \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 serem disjuntos. A demonstração do item 2 é análoga a do item 1 e será deixada a cargo do leitor. Veja a Figura 2.5 para casos possíveis desse teorema. \square

Figura 2.5 – Ilustração do Teorema 2.2



(a) Pasch Simples.

(b) item 2 do Teorema 2.2

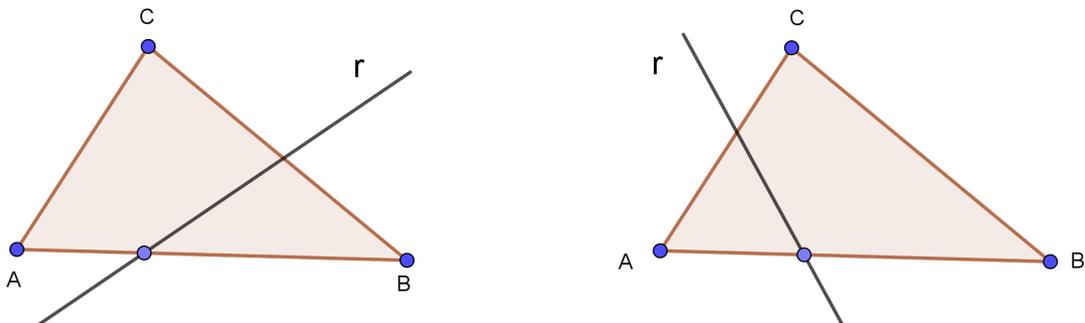
Fonte: produção do autor, 2018.

O Teorema abaixo, apresentado como axioma por Moritz Pasch em 1882, fora usado por Euclides, como observara Pasch, sem prova. Ele surge na teoria de Hilbert como axioma. Em tratamentos modernos da axiomática de Hilbert, como em Greenberg (2008), esse resultado é apresentado também como teorema, consequência de um axioma de separação do plano, com uma linguagem mais técnica.

Teorema 2.3 (Teorema de Pasch). *Se A , B e C são pontos distintos e r é uma reta tal que um ponto de AB pertence a r , então algum ponto de AC ou de BC pertence a r . Se, além disso, nem A , B ou C pertencem a r , então somente um dos segmentos AC ou BC contém pontos pertencentes a r .*

Demonstração. Notamos que existem vários casos particulares: os pontos A , B e C podem ser colineares; a reta r pode conter o lado AC ou BC ; a reta r pode passar pelo vértice A ou B e ser externa ao triângulo, etc. Em cada um dos casos as condições do Teorema já estão satisfeitas. Demonstraremos o caso mais interessante: os pontos A , B e C não são colineares e a reta r corta somente um ponto de AB entre A e B . Se r passa por C , o teorema está demonstrado. Supondo que r não corte C . Por hipótese, A e B estão em lados opostos de r . Se A e C estão do mesmo lado de r , pelo item 1 do Teorema 2.2, B e C estão em lados opostos de r . Portanto, r corta BC e não corta AC . Se A e C estão em lados opostos de r , pelo item 2 do Teorema 2.2, B e C estão do mesmo lado de r . Nesse caso r corta AC e não corta BC (Figura 2.6). \square

Figura 2.6 – Ilustração do Teorema de Pasch.

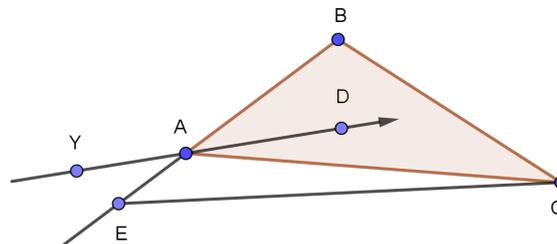


Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 2.4 (Teorema do Travessão). *Seja D um ponto interior ao ângulo $\angle BAC$. A semirreta \overrightarrow{AD} intersecciona o segmento BC .*

Demonstração. Nas condições do Teorema, dizemos que BC é um travessão do ângulo $\angle BAC$. Seja o ponto E tal que $E * A * B$. Pelo Teorema de Pasch no triângulo CEB , concluímos que \overleftrightarrow{AD} corta BC ou EC (Figura 2.7).

Figura 2.7 – Ilustração do Teorema do Travessão.



Fonte: produção do autor, 2018.

Mostraremos que \overleftrightarrow{AD} não corta EC . Primeiro mostraremos que \overrightarrow{AD} não corta EC . Para tal, notamos que E e B estão em lados opostos de \overleftrightarrow{AC} , logo D e E estão em lados opostos de \overleftrightarrow{AC} . Daqui temos que todos os pontos de EC , exceto C , estão do mesmo lado de \overleftrightarrow{AC} e esse lado é o oposto de D . A semirreta \overrightarrow{AD} exceto em A , está totalmente contida no mesmo lado de D de \overleftrightarrow{AC} . Isso mostra que \overrightarrow{AD} não corta EC . Agora mostraremos que \overrightarrow{AY} , a semirreta oposta a \overrightarrow{AD} , não corta EC nem BC . O ponto Y está do outro lado de C de \overleftrightarrow{AB} , portanto todos os pontos de EC , exceto E , e todos os pontos de BC , exceto B , estão do outro lado de \overleftrightarrow{AB} dos pontos de $\overrightarrow{AY} \setminus \{A\}$, impossibilitando que \overrightarrow{AY} corte EC ou corte BC . A única possibilidade que restou, para satisfazer o Teorema de Pasch, é que \overrightarrow{AD} corte o segmento BC em seu interior. Isso demonstra o teorema. \square

Na sequência estudaremos como os pontos do interior do ângulo e do triângulo se comportam por meio dos axiomas dados até agora. Os resultados que obtemos até o momento, por não incluírem o axioma das paralelas, são válidos em qualquer outra geometria. Diz-se que a

geometria, sem o axioma das paralelas, é neutral. Muito se pode concluir da nossa intuição geométrica (euclidiana) no contexto da geometria neutral. O primeiro exemplo em que a intuição geométrica poderia nos levar a um resultado errado está relacionado aos pontos interiores de um ângulo. Vamos começar com um resultado válido na geometria neutral.

Teorema 2.5. *Seja $\angle ABC$ um ângulo e D um ponto pertencente a reta \overleftrightarrow{AC} . O ponto D está no interior de $\angle ABC$ se, e somente se, D está entre A e C .*

A demonstração desse resultado é deixada ao leitor. Trata-se do uso adequado da noção *entre* para pontos de uma reta. Usa-se na demonstração os resultados dos Exemplos 2.1 e 2.2. Para maiores detalhes veja Greenberg (2008).

Não devemos cair na armadilha de achar que, por conta de nossos desenhos, com os axiomas expostos até o momento e os Teoremas já demonstrados, poderemos concluir que:

Todo ponto do interior do ângulo está em um segmento com extremos nos lados do ângulo.

Segundo Greenberg (2008, p.115) essa afirmação não é válida na geometria hiperbólica. Porém, sabemos que na geometria euclidiana a afirmação em questão é válida. Logo, de onde esse resultado provém? Em Andrade (2013, p.34) é dito que a referida proposição é um substituto ao quinto postulado de Euclides, ou suas formulações equivalentes, que enunciaremos na sequência.

Para encerrar a exposição dos axiomas, o Axioma 12 será enunciado para completar a lista até o Axioma 13. As definições e discussões referentes aos axiomas não enunciados e não discutidos devem ser consultados em Rezende e Queiroz (2008).

Axioma 12 (1º caso de congruência de triângulos). *Dados dois triângulos ABC e DEF , se $AB \cong DE$, $\angle B \cong \angle E$ e $BC \cong EF$, então $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Axioma 13 (Axioma das paralelas). *Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela a essa reta.*

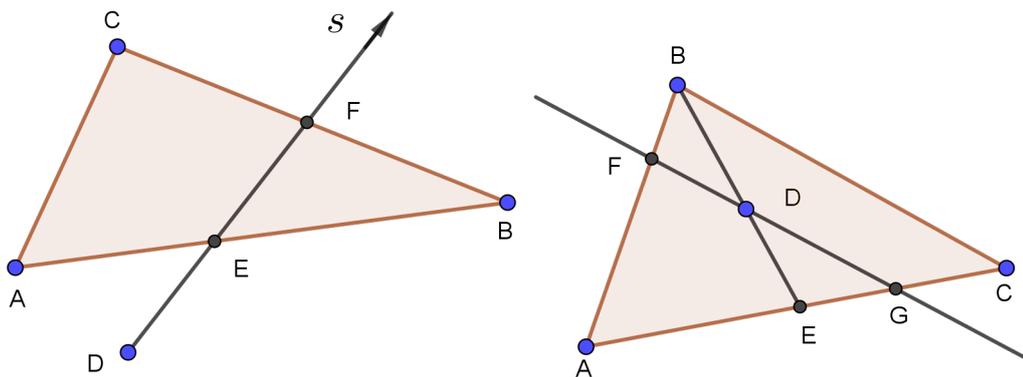
Portanto, ao aceitarmos o Axioma 13, nossos ângulos se parecerão com aqueles em que nossa intuição nos guia. Antes de terminarmos essa discussão apresentaremos mais um resultado que independe do Axioma 13.

Teorema 2.6. *Se uma semirreta s emanando de um ponto externo do triângulo $\triangle ABC$ intersecta o lado AB em um ponto entre A e B , então s intersecta um dos outros lados do triângulo. Se s emana de um ponto interno do triângulo ABC , então ela intersecta pelo menos um dos lados e, se não passa por um vértice, ela intersecta somente um lado.*

Demonstração. Supondo que a semirreta s tenha origem no ponto D , externo ao $\triangle ABC$ e que corte AB no ponto E , tal que $A * E * B$. Se s passa por A ou B , \overleftrightarrow{DE} coincide com \overleftrightarrow{AB} . Vamos supor que A e B não pertençam a \overleftrightarrow{DE} (Figura 2.8a). Pelo Teorema de Pasch a reta r , que contém o raio s , corta um dos outros lados do triângulo no ponto F ; sem perder em generalidade, supomos que corte o lado BC . Mostraremos que o ponto F está em s . Observamos que $s = \overrightarrow{DE}$, com D sendo ponto inicial de s e externo ao $\triangle ABC$, e o ponto E é a intersecção de s com o lado AB . Por isso, D é externo a $\angle ABC$. Levando em conta que E e F estão sobre os raios de $\angle ABC$, pelo Teorema 2.5 só há duas possibilidades para o ponto D : $D * E * F$ ou $D * F * E$. Em qualquer caso, F pertence a s e a primeira parte do Teorema está demonstrada.

Para segunda parte do teorema, sejam D um ponto interno do $\triangle ABC$ e s uma semirreta emanando do ponto D . Como D é interno a $\angle ABC$, pelo Teorema do Travessão, \overrightarrow{BD} corta AC em um ponto E tal que $A * E * C$. Se s estiver contida em \overleftrightarrow{BE} , como $\overleftrightarrow{DB} \cup \overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{BE}$, será $s = \overrightarrow{DB}$ ou $s = \overrightarrow{DE}$. Supondo que s não esteja contida em \overleftrightarrow{BE} (Figura 2.8b). No ângulo $\angle BAC = \angle BAE$, \overleftrightarrow{BE} corta os lados AB e AE . Pelo Teorema 2.5 todo ponto de \overleftrightarrow{BE} interno a $\angle BAC$ está entre B e E , logo $B * D * E$. Considerando os triângulos ABE e BEC , pelo Teorema de Pasch a reta que contém s corta AB ou AE no ponto F e corta CE ou CB no ponto G . Não pode ser $F = A$ e $G = C$, pois nesse caso a reta que contém s é igual a \overleftrightarrow{AC} . Supondo que $F \neq A$ e $G \neq C$. A reta \overleftrightarrow{FG} corta os lados de $\angle BAC = \angle FAG$ nos pontos F e G . Pelo Teorema 2.5 é $F * D * G$. Sabendo que $\overleftrightarrow{FG} = \overrightarrow{DF} \cup \overrightarrow{DG}$, temos que $s = \overrightarrow{DF}$ ou $s = \overrightarrow{DG}$. Em qualquer caso, s corta o $\triangle ABC$ somente em um ponto. Isso encerra a demonstração da segunda parte. \square

Figura 2.8 – Ilustração do Teorema 2.6



(a) 1ª parte da demonstração do Teorema 2.6 (b) 2ª parte da demonstração do Teorema 2.6

Fonte: produção do autor, 2018.

Corolário 2.1. Dado um triângulo ABC e uma reta r que passa por um ponto D interno ao $\triangle ABC$. A reta r intersecta dois lados de um triângulo e não passa por nenhum vértice ou intersecta um vértice e o seu lado oposto.

A demonstração do Corolário 2.1 é uma consequência direta das conclusões do Teorema 2.6. Com o Teorema 2.6 e seu corolário, demonstramos uma propriedade importante sobre os triângulos, que no Capítulo 5 demonstraremos que é válida para figuras convexas em geral:

Toda reta que passa por um ponto interior do triângulo corta o triângulo em exatamente dois pontos.

Usando a próxima definição, exibiremos o primeiro exemplo de conjunto convexo, intersecção de infinitos conjuntos, que já sabemos ser convexas.

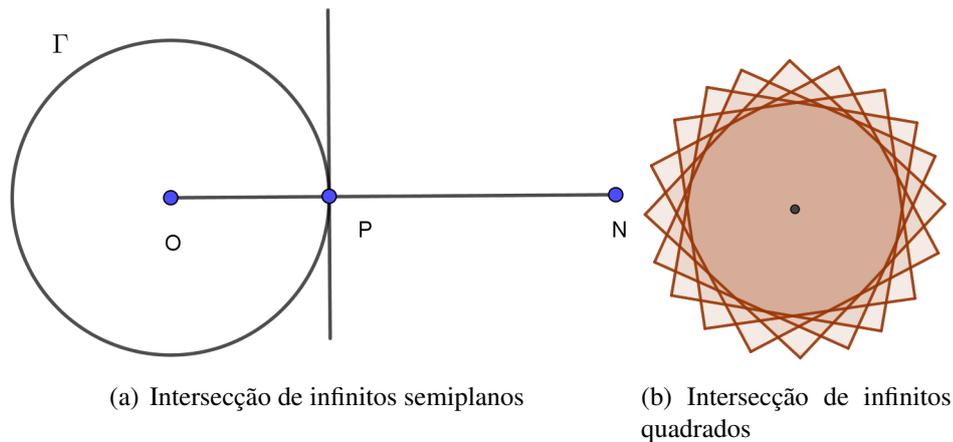
Definição 2.11 (Círculo e Disco). *Um círculo Γ com centro no ponto O e de raio r é definido como o conjunto dos pontos P do plano tais que $\overline{OP} = r$. O disco \mathcal{D} associado a Γ , de centro O e raio r , é o conjunto dos pontos tais que $\overline{OP} \leq r$. Os pontos de Γ são os pontos de fronteira de \mathcal{D} . O conjunto dos pontos P tais que $\overline{OP} < r$ são chamados de pontos interiores a Γ e o conjunto dos pontos P tais que $\overline{OP} > r$ são chamados de pontos exteriores a Γ . Quando for necessário enfatizar o raio e o centro do círculo ou do disco, escreveremos $\Gamma(O, r)$ e $\mathcal{D}(O, r)$.*

Exemplo 2.6. *O círculo limita uma região convexa do plano.*

Sejam $\Gamma(O, r)$ um círculo de centro O e raio r e $\mathcal{D}(O, r)$ o disco associado. Para cada $M \in \Gamma$, a reta tangente a M define um semiplano \mathcal{H}_M contendo o disco \mathcal{D} . Afirmamos que $\mathcal{D} = \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$. Primeiro notamos que da forma como fora definido, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_M$ para todo M , portanto $\mathcal{D} \subset \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$. Agora, seja $N \in \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$ e supomos temporariamente que $N \notin \mathcal{D}$. Consideremos o segmento ON ; da forma como definimos N , $\overline{ON} > r$. Pelos axiomas de medida, existe $P \in ON$, entre O e N , tal que $\overline{OP} = r$, portanto $P \in \Gamma$ (Figura 2.9a). A reta tangente a Γ por P deixa N em um semiplano e O em outro, de forma que $N \notin \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$, pois \mathcal{D} está no mesmo semiplano de O da reta tangente por P . Portanto, $N \notin \mathcal{D}$. Isso mostra que $\mathcal{D} \supset \bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$ e a igualdade é verificada. Para finalizar, é só notar que $\bigcap_{M \in \Gamma} \mathcal{H}_M$ é uma intersecção infinita de conjuntos convexas, e pelo Teorema 2.1, é um conjunto convexo. Isso encerra a demonstração.

Uma outra forma de mostrar a convexidade do disco, é perceber que a intersecção de todos os quadrados com lado de mesma medida, e que compartilham o mesmo centro, é um disco (Figura 2.9b).

Figura 2.9 – Convexidade do Disco

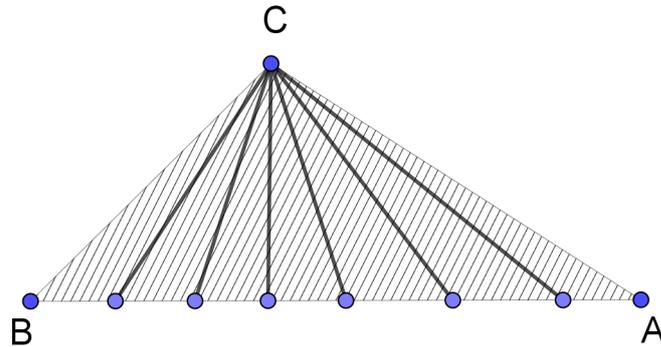


Fonte: produção do autor, 2018.

2.2 FIGURAS CONVEXAS NO PLANO

Na seção anterior apresentamos alguns exemplos de subconjuntos convexos do plano. De uma forma geral, na maioria dos livros de geometria, uma figura é definida como um subconjunto qualquer de pontos do plano. Em nosso trabalho, não adotaremos esse nível de generalidade. Atribuiremos o qualitativo “*figura*” a um tipo específico de subconjunto do plano que, selecionará dos subconjuntos gerais, aqueles de nosso interesse. Para determinarmos um conjunto de pontos, damos uma regra que possibilite decidir rigorosamente se um ponto arbitrário selecionado pertence ou não ao conjunto. Na reta, os exemplos de subconjuntos convexos são um único ponto, um segmento, incluindo ou não seus extremos, uma semirreta, incluindo ou não sua origem e a reta toda. Esses são os chamados **subconjuntos convexos unidimensionais**. No plano as situações são extremamente variadas. Primeiro notamos que se um subconjunto convexo do plano contém três pontos A , B e C não colineares, então conterá todo o triângulo formado por esses três pontos. Isso decorre do fato de que o triângulo contém todos os pontos do segmento AB e, portanto, todos os pontos dos segmentos conectando o ponto C com um ponto do segmento AB (Figura 2.10), e portanto, contém todos os pontos do triângulo ABC .

Figura 2.10 – Convexidade do Triângulo contido em uma Figura plana convexa.



Fonte: produção do autor, 2018.

Para o que segue, precisamos de uma definição.

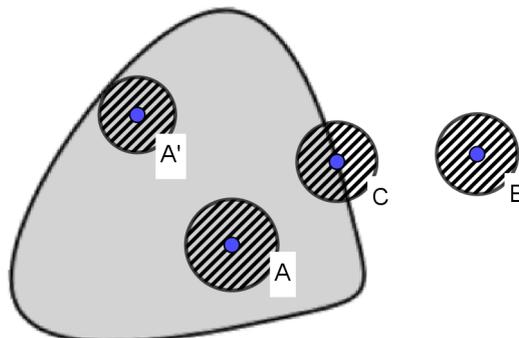
Definição 2.12 (Conjunto limitado). *Um subconjunto do plano é limitado quando existe um disco que o contém. Um subconjunto do plano que não é limitado é dito ser ilimitado.*

Exemplo 2.7. *Um triângulo, um disco são subconjuntos limitados do plano. O ângulo e as faixas são subconjuntos ilimitados do plano.*

Sobre nossas figuras planas, veremos que os pontos do plano poderão ser divididos em três classes: pontos interiores, pontos exteriores e pontos de fronteira. Vamos definir esses conceitos para subconjuntos arbitrários do plano.

Definição 2.13. *Um ponto de um subconjunto \mathcal{A} do plano é chamado de ponto interior de \mathcal{A} , se é o centro de um círculo, com raio suficientemente pequeno, inteiramente contido em \mathcal{A} . Pontos interiores são, por exemplo, os pontos A e A' da Figura 2.11. Um ponto é chamado ponto exterior de \mathcal{A} se é centro de um círculo que não contém nenhum ponto de \mathcal{A} . O ponto B da Figura 2.11 é um exemplo de um ponto exterior. Finalmente, um ponto é chamado ponto de fronteira de \mathcal{A} se todos os círculos sobre o ponto contêm pontos interiores e exteriores a \mathcal{A} . O ponto C da Figura 2.11 é um exemplo de ponto de fronteira.*

Figura 2.11 – Pontos interiores, exteriores e de fronteira.



Fonte: produção do autor, 2018.

Um ponto de fronteira pode pertencer ou não ao conjunto. Se desejássemos estudar conjuntos convexos arbitrários, que não contenham necessariamente todos os pontos de fronteira, então a formulação dos teoremas ficaria muito mais difícil, com exceções e qualificações diversas tornando a discussão pedante. Portanto, neste trabalho designaremos “figuras” aqueles conjuntos que têm, dentre outras que veremos, a seguinte propriedade:

Propriedade 1. *Se um conjunto Φ é uma figura, então todos os pontos de fronteira pertencem a Φ .*

Outra situação que será proibida em nossas figuras, é a existência de conjuntos com pontos isolados. Esse é o conteúdo da Propriedade 2. Antes, porém, vamos definir o que é ponto isolado.

Definição 2.14 (Ponto isolado). *Um ponto A pertencente a um subconjunto \mathcal{B} do plano, diz isolado do conjunto \mathcal{B} , se existe um disco centrado em A que não contenha nenhum outro ponto de \mathcal{B} , além de A .*

Propriedade 2. *Se A é um ponto de fronteira da figura Φ e \mathcal{D} é um disco com centro em A , que pode ser tomado com raio arbitrariamente pequeno, então existem pontos interiores e pontos exteriores de Φ em \mathcal{D} .*

Um conjunto formado pela união de um disco com um ponto A , fora dele, servem como exemplo de um conjunto tendo a Propriedade 1, mas não tendo a Propriedade 2: o ponto A é um ponto da fronteira deste conjunto; no entanto tem uma vizinhança não contendo pontos interiores do conjunto dado.

A Propriedade 3 abaixo, dentre outras situações, excluirá os conjuntos como os anéis: a parte do plano entre dois círculos concêntricos. Um anel tem sua fronteira consistindo de duas curvas diferentes. Para enunciarmos a Propriedade 3, precisamos da importante definição abaixo.

Definição 2.15 (Curva). *Um caminho ou curva de um ponto P a um ponto Q do plano é definido como uma transformação contínua $\mathcal{K} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{K}(0) = P$ e $\mathcal{K}(1) = Q$. Quando \mathcal{K} é injetiva o caminho é simples. Quando $P = Q$ e \mathcal{K} é injetiva no intervalo $(0, 1)$, dizemos que a curva é simples e fechada ou uma Curva de Jordan.*

Propriedade 3. *A fronteira de Φ consiste de uma curva simples, que é fechada quando Φ é limitada, e estende-se ilimitadamente quando Φ não for limitada.*

Intuitivamente, uma curva simples fechada pode ser representada como uma curva que resulta de um movimento contínuo do lápis em uma folha, e que não contenha auto-interseções.

Porém, em casos especiais essa noção intuitiva, pode não corresponder a nossas expectativas experimentais: algumas curvas fractais, como a curva do floco de neve de Koch, não têm um comprimento de arco finito. O que é mais estranho é que o comprimento de arco entre dois pontos quaisquer ainda assim é infinito. Curvas que não têm um comprimento de arco finito são chamadas de *curvas não retificáveis*. Para o leitor saber mais sobre essa curva acesse Newns (1956).

Diremos que a figura consiste do conjunto dos pontos interiores e dos pontos de fronteira. Assim, um disco, por exemplo, é uma figura limitada pelo seu círculo. Para curvas simples fechadas no plano segue o seguinte teorema

Teorema 2.7 (Teorema da Curva de Jordan). *Toda curva simples fechada \mathcal{K} divide o plano em duas regiões (uma região interior e outra exterior), das quais o interior é limitado e o exterior é ilimitado. Isso significa que os pontos do plano que não pertencem a \mathcal{K} formam dois conjuntos ou regiões R_i e R_e tendo as seguintes propriedades:*

1. *Dois pontos quaisquer que pertencem à mesma região podem ser unidos por um caminho que esteja inteiramente contido na região dada e, portanto, não intersecta \mathcal{K} .*
2. *Se A e B são dois pontos pertencentes a regiões diferentes, então cada caminho ligando esses pontos intersecta a curva \mathcal{K} .*

Este teorema justifica a expressão: um ponto está no interior ou no exterior de uma curva simples fechada. O Teorema da Curva de Jordan torna possível afirmar que toda figura fechada, no senso da nossa definição, isto é, que satisfazem as propriedades 1, 2 e 3, tem um conjunto de pontos situados no interior de uma certa curva simples fechada e um conjunto de pontos situados sobre essa curva. Nesses casos quando falamos em comprimento da curva ou a área da figura limitada pela curva, devemos restringir nossas curvas a curvas simples fechadas para as quais esses conceitos estejam assegurados. A prova do Teorema da Curva de Jordan é muito generalizada e difícil, no entanto, para polígonos pode ser demonstrada de forma relativamente simples. Essa demonstração será apresentada no Capítulo 3.

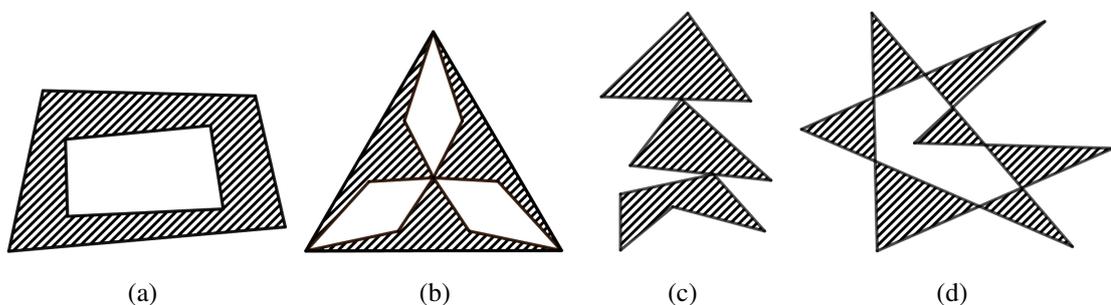
A propriedade de ligação dos pontos por caminho, que tem o interior e o exterior das Curvas de Jordan, é conhecida como *conexidade por caminhos*. Um subconjunto do plano é chamado *conexo* se não pode ser representado como uma união de dois conjuntos abertos e disjuntos. Demonstra-se em Topologia que todo subconjunto do plano conexo por caminhos é conexo. Percebemos que para satisfazer as condições do Teorema da Curva de Jordan, ambos, interior e exterior devem ser conexos. Um conjunto conexo que tem seu complementar no plano conexo é chamado *simplesmente conexo*. Portanto, o interior de uma Curva de Jordan é simplesmente conexo. Para uma consulta sobre o que discutimos nesse parágrafo o leitor pode pesquisar Janich (1983).

De acordo com as propriedades 1, 2 e 3, os pontos de fronteira formam uma reta, uma curva ou uma poligonal. Esta curva, como vimos, é a fronteira da figura. Se uma curva simples no plano é a fronteira de uma figura convexa, então esta curva é chamada de **curva convexa**. Se a curva em questão for fechada e formada por uma sucessão de segmentos de reta conectados, chamaremos a curva de **polígono convexo**. No Capítulo 3 daremos outras caracterizações para polígonos simples convexos ou não.

3 POLÍGONOS

Existe uma enorme variedade de subconjuntos limitados do plano, formados por uma quantidade finita de segmentos conectados e com fronteira definida, que permitem que seja possível distinguir o interior e o exterior. Alguns desses subconjuntos podem ser formados por mais de uma curva, nesse caso, poligonais (Figura 3.1a). Outros podem permitir que de um único vértice partam mais do que dois lados (Figura 3.1b), porém sempre partindo uma quantidade par de lados de cada vértice. Podemos ter, vértices partindo do interior de algum dos lados, como na Figura 3.1c. Ainda existe um outro grupo no qual os segmentos que formam a fronteira possam ter intersecções, que não sejam em suas extremidades (Figura 3.1d). Percebemos que com essas situações podemos perder a conexidade do exterior, uma das consequências do *Teorema da Curva de Jordan*, isto é, existem buracos. Para cumprirmos as exigências de uma figura, conforme o Capítulo 2, as figuras limitadas por poligonais precisam ser figuras simples. Além do mais, cada um dos exemplos da Figura 3.1 são decompostos em uma quantidade finita de figuras simples: essas figuras são limitadas por polígonos simples (esta definição será dada adiante), conforme podemos ver em Shashkin (1989). E ainda, cada uma das figuras limitadas por polígonos simples, podem ser decompostas em uma quantidade finita de figuras formadas por polígonos convexos e, conseqüentemente, podem ser decompostas por triângulos não superpostos, o que chamaremos de triangularização. Portanto, por mais complicada que seja a figura formada por uma quantidade finita de segmentos, ela pode ser triangularizada. Esse fato é geralmente usado na axiomatização do cálculo da área do polígono, em substituição a um Teorema mais profundo conhecido como *Teorema de Boyai-Gerwien*, que veremos no Capítulo 4 quando falarmos de área.

Figura 3.1 – Conjuntos formados por uma quantidade finita de segmentos.

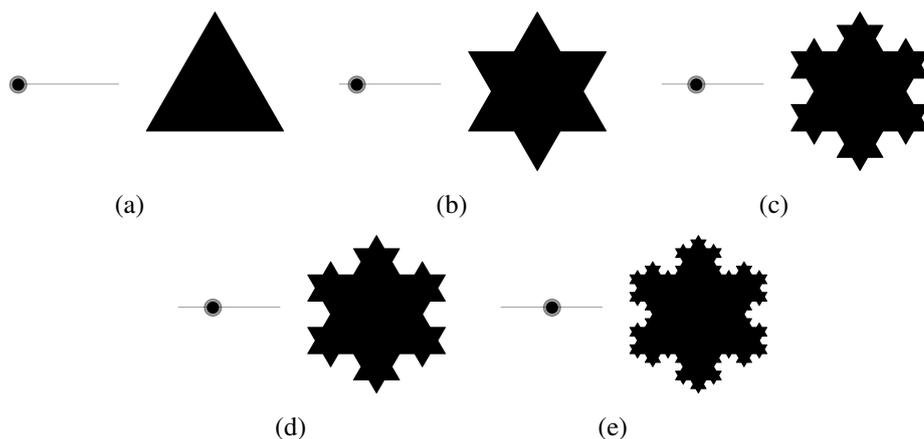


Fonte: produção do autor, 2018.

Podemos ter figuras limitadas por uma quantidade infinita de segmentos, por exemplo, as limitadas por curvas fractais. A curva do floco de neve de Koch é um dos casos. Veja Figura 3.2 para o desenvolvimento dessa curva até a quinta iteração. Essa curva não tem um comprimento

de curva finito e por isso é chamada de curva não retificável, embora possamos calcular a área limitada por ela. Essa curva satisfaz as condições discutidas no Capítulo 2 para que seja a fronteira de uma figura simples no plano, porém não será considerada por nós um polígono por conter uma quantidade infinita de segmentos. Em Yaglom e Boltyanskii (1961) vemos que curvas convexas são sempre retificáveis.

Figura 3.2 – Floco de neve de Koch até a 5ª iteração.



Fonte: Ortiz (2013).

Uma grande quantidade de figuras limitadas que passam no crivo das exigências discutidas no Capítulo 2, podem ter sua fronteira aproximada por polígonos. Até mesmo algumas figuras com exterior desconexo e fronteira curvilínea podem ser decompostas em partes conexas e aproximadas por poligonais. Assim, sua área e comprimento de curva podem ser obtidos por métodos do cálculo diferencial e integral usando polígonos no processo. Essa é uma das grandes utilidades dos polígonos na matemática.

O objetivo deste capítulo é mostrar uma sequência de resultados formais sobre polígonos simples, iniciando dos polígonos convexos, e estendendo depois para todos os tipos de polígonos simples. Nossa exposição fará comparações de resultados entre os dois grupos e mostrará as propriedades que se mantêm quando passamos do caso convexo para o caso mais amplo dos polígonos simples. Esse estudo é útil, pois no contexto da geometria ensinada para alunos da escola básica, é tradicionalmente comum a apresentação dos resultados sobre polígonos somente para os casos convexos e, às vezes, para os quadriláteros não convexos.

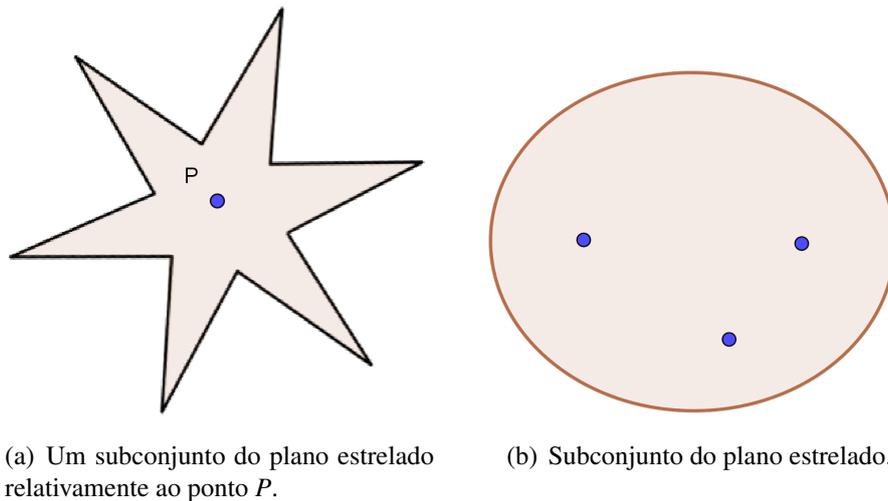
Os polígonos conforme definiremos na sequência, estão diretamente ligados aos fundamentos da geometria e relacionados a várias noções fundamentais da matemática em diversas áreas avançadas. Seu estudo aumenta a segurança dos professores em sala de aula e os faz entender os casos comumente omissos nos primeiros cursos de geometria. Evitando o excesso de formalismo, pode-se mostrar esses aspectos aos alunos das escolas e para alunos de um primeiro curso de geometria dedutiva de licenciatura em matemática, sem restrições.

3.1 RESULTADOS GERAIS SOBRE POLÍGONOS CONVEXOS E FIGURAS ESTRELADAS.

Iniciamos apresentando uma classe importante de subconjuntos do plano, que compartilham propriedades com os conjuntos convexos, são os subconjuntos estrelados do plano.

Definição 3.1 (Subconjunto do plano estrelado). *Um subconjunto \mathcal{U} do plano é dito estrelado relativamente a um ponto P quando, para todo ponto $A \in \mathcal{U}$, o segmento PA está inteiramente contido em \mathcal{U} . Quando \mathcal{U} for estrelado relativamente a todos os seus pontos, diremos simplesmente que \mathcal{U} é estrelado. O subconjunto do plano da Figura 3.3a é estrelado relativamente a P , mas não a todos os seus pontos e o da Figura 3.3b é estrelado relativamente a todos os seus pontos.*

Figura 3.3 – Conjuntos Estrelados.



Fonte: produção do autor, 2018.

Exemplo 3.1. *Um conjunto convexo \mathcal{U} é estrelado relativamente a qualquer um de seus pontos.*

Com efeito, seja $P \in \mathcal{U}$ arbitrário. Mostraremos que \mathcal{U} é estrelado relativamente a P . Para qualquer $A \in \mathcal{U}$, $AP \subset \mathcal{U}$, pois \mathcal{U} é convexo. Dado a escolha arbitrária de P , \mathcal{U} é estrelado relativamente a qualquer um dos seus pontos.

Exemplo 3.2. *Se um conjunto \mathcal{U} é estrelado relativamente a todos os seus pontos, então \mathcal{U} é convexo.*

Para demonstrar isso, sejam $A, B \in \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} é estrelado relativamente a todos os seus pontos, será em particular a A . Logo $AB \subset \mathcal{U}$ e \mathcal{U} é convexo.

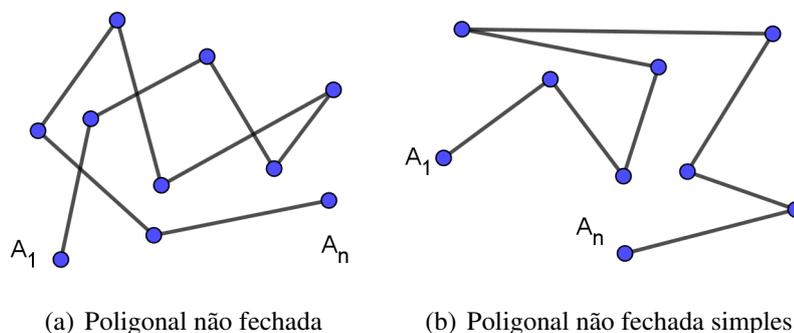
Problemas associados a visibilidade e iluminação estão ligados a conjuntos convexos e estrelados. Seja Φ uma figura plana e $A \in \Phi$ fixado. Dado $B \in \Phi$ se o segmento AB está contido

em Φ , o ponto A cobre o ponto B . Se Φ é estrelado relativamente a P , então P cobre todos os pontos de Φ , diremos que P cobre Φ . Se Φ for uma figura convexa, qualquer ponto $P \in \Phi$ cobre a referida figura. Logo, para problemas de visibilidade e iluminação os conjuntos convexos são preteridos aos que são estrelados relativamente a apenas alguns de seus pontos. Uma pergunta surge naturalmente, quando consideramos Φ uma figura arbitrária: Quantos pontos são suficientes para cobri-la? Quantos pontos são necessários para cobri-la? Responderemos algumas questões relacionadas para polígonos simples no Capítulo 4 e no Capítulo 5.

No final do Capítulo 2 iniciamos a caracterização de uma das noções mais importantes desse trabalho: a de polígono simples. Continuaremos aquela discussão.

Definição 3.2 (Poligonal). *Sejam A_1, \dots, A_n pontos distintos do plano tomados nessa ordem. A poligonal não fechada com vértices nesses pontos é definida como o conjunto dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, chamados lados da poligonal. Se $n \geq 3$ e A_nA_1 também é um lado, a poligonal é denominada fechada. A poligonal se denomina simples se seus lados não contíguos não possuem pontos em comuns. Veja as Figuras 3.4 e 3.5.*

Figura 3.4 – Poligonais não fechadas

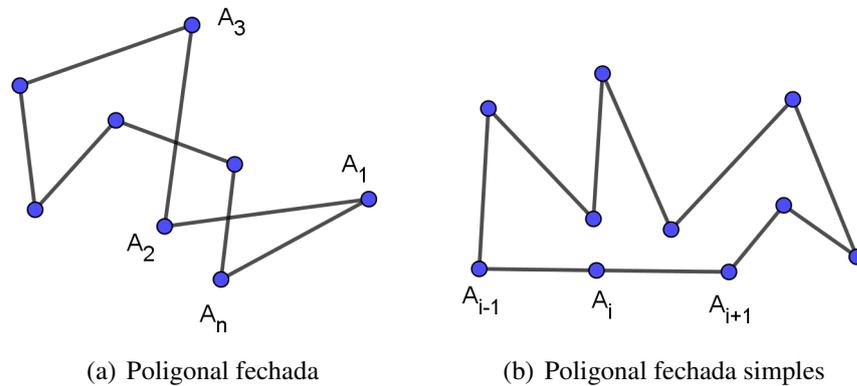


Fonte: produção do autor, 2018.

Percebemos que ao percorrer os lados da poligonal fechada de n pontos na ordem em que os pontos foram dados, a partir de qualquer um de seus pontos, voltaremos ao ponto original depois de percorrer n lados.

Queremos obter um tipo especial de poligonal simples fechada a qual daremos o qualitativo de polígono. A definição de poligonal não impede que tenhamos lados com a mesma extremidade contidos na mesma reta. Na Figura 3.5b os lados $A_{i-1}A_i$ e A_iA_{i+1} tem a mesma extremidade A_i e estão contidos na mesma reta, pois os três pontos são colineares.

Figura 3.5 – Poligonais fechadas



Fonte: produção do autor, 2018.

O item 2 da Definição 3.3 excluirá esse caso indesejado.

Definição 3.3 (Polígono). *Um polígono é uma poligonal fechada na qual:*

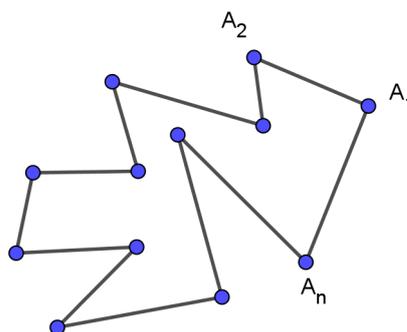
1. *Cada vértice é extremidade de dois lados;*
2. *Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.*

O polígono será chamado de polígono simples se satisfizer a seguinte condição:

3. *Nenhum par de lados se intersecta, exceto em seus vértices.*

A Figura 3.6 mostra um exemplo de um polígono simples arbitrário.

Figura 3.6 – Polígono Simples

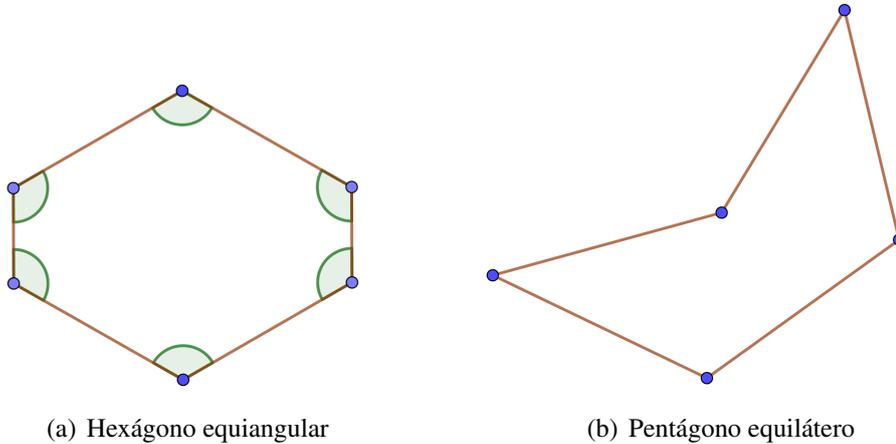


Fonte: produção do autor, 2018.

Atribuimos nomes aos polígonos de acordo com sua quantidade de lados. Uma lista inicial desses nomes contém o triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono e o heptágono, que são os polígonos com 3, 4, 5, 6, e 7 lados respectivamente. Uma lista maior pode ser consultada em Barbosa (2006, p.41). Os adjetivos equilátero ou equiângulo são atribuídos aos polígonos com todos os lados com mesma medida ou todos os ângulos com mesma medida. Quando todos os

lados forem congruentes e também todos os ângulos forem congruentes o polígono é dito regular. Na Figura 3.7 temos exemplos de polígonos equiláteros e equiângulos.

Figura 3.7 – Polígonos Simples equiláteros e equiângulos.



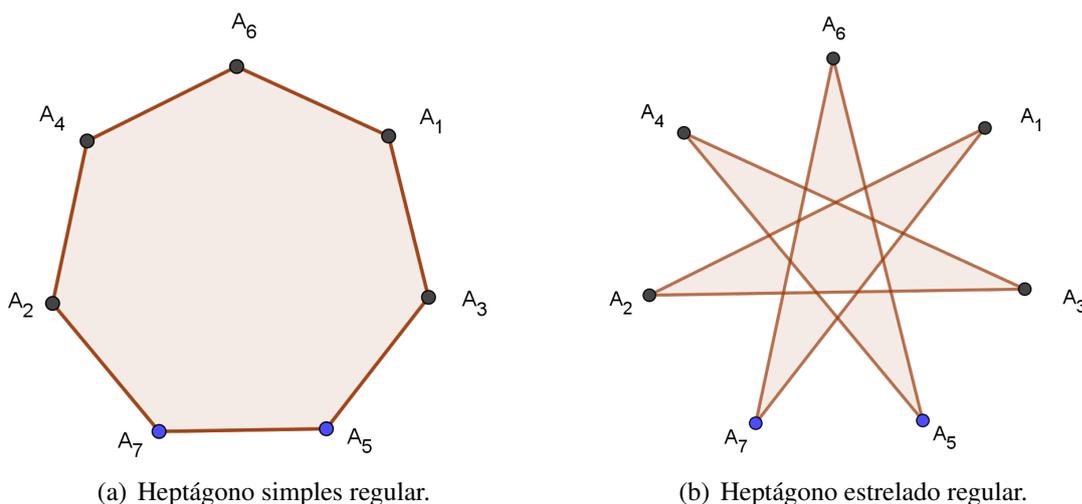
(a) Hexágono equiangular

(b) Pentágono equilátero

Fonte: produção do autor, 2018.

A ordem dos vértices na definição de polígono é importante no tipo de polígono que iremos obter. Um exemplo disso está dado na Figura 3.8 abaixo. A poligonal fechada $A_1A_6A_4A_2A_7A_5A_3$ forma um heptágono simples regular, ao passo que a poligonal $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ forma um heptágono estrelado regular, que não é simples, pois contém auto intersecções. Esses polígonos estrelados terão importância no Capítulo 5 quando estudarmos as figuras de largura constante.

Figura 3.8 – Poligonal fechada e ordem dos vértices



(a) Heptágono simples regular.

(b) Heptágono estrelado regular.

Fonte: produção do autor, 2018.

Concentraremos nosso estudo nos polígonos simples. Os polígonos simples são curvas simples no plano que satisfazem as três propriedades das figuras planas elencadas no Capítulo 2. Portanto, um polígono simples é a fronteira de uma figura plana e podemos sempre identificar os seus pontos interiores e exteriores. Uma figura plana é a união do conjunto dos pontos

interiores com o conjunto dos pontos de fronteira. Usaremos a notação geral Φ para a figura plana limitada pelo polígono simples \mathcal{P} .

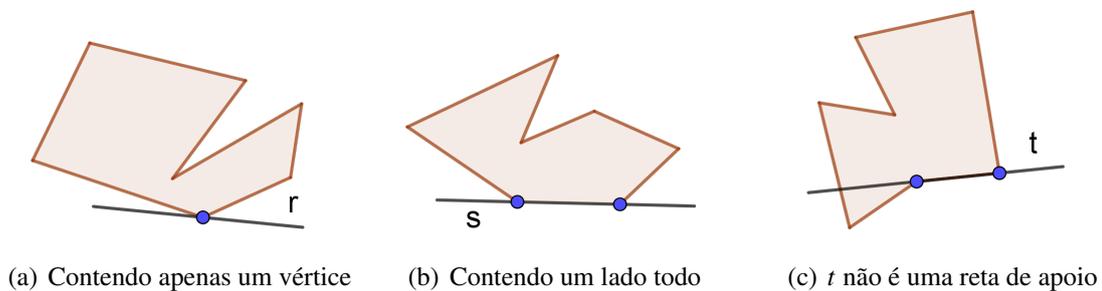
Lembrando da definição de curva convexa que damos no Capítulo 2, registraremos na sequência a importante definição de polígono convexo.

Definição 3.4 (1ª definição de Polígono Convexo). *Um polígono simples \mathcal{P} é convexo se limita uma figura convexa plana .*

Definição 3.5 (Reta de apoio). *Diz-se que r é uma reta de apoio do polígono \mathcal{P} quando \mathcal{P} tem pelo menos um ponto em comum com r e está contido inteiramente em um dos semiplanos fechados determinados por r .*

Exemplos de reta de apoio podem ser vistas na Figura 3.9a e 3.9b. Quando a reta de apoio contém uma quantidade finita de pontos, esses serão somente vértices. Quando tiver uma quantidade infinita de pontos, conterá pelo menos um lado (faça desenhos dos casos que não estão presentes na Figura 3.9). Um exemplo de uma reta que não é uma reta de apoio pode ser visto na Figura 3.9c.

Figura 3.9 – Retas de Apoio



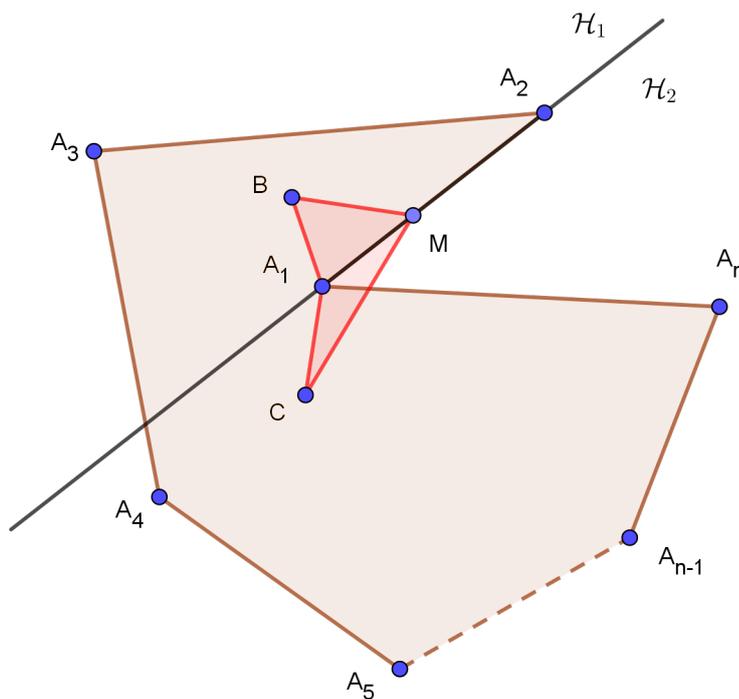
Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 3.1. *Toda figura plana limitada por um polígono convexo é uma intersecção de um número finito de semiplanos.*

Demonstração. Seja $A_1A_2 \dots A_n$ um polígono convexo. Mostraremos que a figura Φ , limitada pelo polígono convexo $A_1A_2 \dots A_n$ é uma intersecção de um número finito de semiplanos. Para tal, mostraremos que toda reta que contém um dos lados do polígono em questão é uma reta de apoio dele. De fato, vamos supor, sem perda de generalidade, que a reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, que contém o lado A_1A_2 , não é uma reta de apoio de $A_1A_2 \dots A_n$. Sejam M um ponto entre A_1 e A_2 e \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 os semiplanos determinados pela reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$. Escolhemos um ponto B pertencente a Φ em \mathcal{H}_1 e um ponto C pertencente a Φ em \mathcal{H}_2 (Figura 3.10). Pela convexidade de Φ todos os pontos da figura limitada pelo triângulo A_1MC pertencem a Φ , analogamente todos os pontos da figura limitada pelo triângulo A_1MD pertencem a Φ . Logo, A_1M está contido no interior de Φ

e assim os pontos entre A_1 e M não são pontos de fronteira de Φ , o que é uma contradição, pois $A_1M \subset A_1A_2$ e A_1A_2 é um lado do polígono $A_1A_2 \dots A_n$. Quando dizemos que os pontos entre A_1 e M são interiores a Φ vem do seguinte: A_1M é uma diagonal interna do quadrilátero A_1BMC e o interior de A_1BMC é composto pelos interiores dos triângulos A_1BM e A_1CM e pelos pontos de A_1M , exceto por A_1 e M . Logo, qualquer círculo suficientemente pequeno centrado no ponto P , entre A_1 e M encerrará pontos somente de Φ .¹ Dessa forma $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ é uma reta de apoio do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ e o mesmo resultado vale para todos os lados do polígono $A_1A_2 \dots A_n$. Portanto, a figura Φ está contida em cada um dos semiplanos, cuja fronteira contém um dado lado de $A_1A_2 \dots A_n$. A intersecção de todos os semiplanos é a figura Φ . Isso era o queríamos demonstrar. \square

Figura 3.10 – Ilustração do Teorema 3.1



Fonte: produção do autor, 2018.

Tendo como base a demonstração do Teorema 3.1, podemos formular uma nova definição de polígono convexo, que concorda com a maioria dos textos de geometria e é equivalente àquela dada na Definição 3.4.

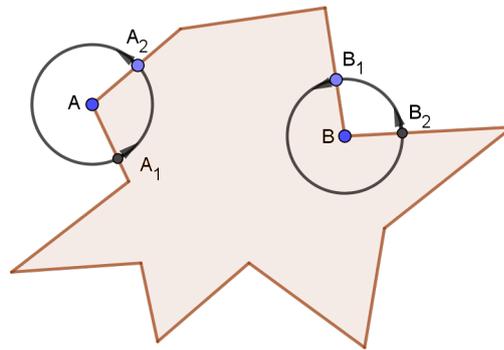
Definição 3.6 (*2ª* definição de Polígono Convexo). *Um polígono \mathcal{P} é convexo se cada reta que contém um de seus lados é uma reta de apoio de \mathcal{P} .*

¹Esses detalhes fazem parte do conteúdo do Lema 3.1 que veremos na sequência.

Nota. Nem toda intersecção de semiplanos é limitada, embora seja sempre convexa. De outra forma, toda região limitada que for a intersecção de semiplanos tem um polígono como fronteira.

No Capítulo 2 apresentamos os primeiros exemplos de figuras convexas planas. Dentre os quais o primeiro exemplo de polígono simples: o triângulo. Estudaremos na sequência o quadrilátero simples. Antes precisaremos definir precisamente o que é um ângulo interno de um polígono. Seja A um vértice de um polígono simples \mathcal{P} . Pela Definição 3.3, partem desse vértice dois lados. Tracemos um círculo suficientemente pequeno em A (resp. B) de tal forma que esse círculo intersekte somente os lados que partam de A (resp. B) nos pontos A_1 e A_2 (resp. B_1 e B_2), conforme Figura 3.11. Consideraremos um percurso de um ponto móvel P no referido círculo no sentido anti-horário a partir do ponto A_1 (resp. B_1). Sem perder em generalidade, vamos supor que P comece o percurso entrando no interior do polígono. O ponto móvel permanecerá no interior do polígono até alcançar o ponto A_2 (resp. B_2), quando mudará de região, passando a estar agora no exterior. O conjunto dos pontos percorridos por P no interior do polígono determina um arco. O ângulo correspondente a esse arco é o ângulo interno. Na Figura 3.11 temos duas situações a distinguir: o ângulo no vértice A é menor do que 180° e o ângulo no vértice B é maior do 180° .

Figura 3.11 – Ângulo interno de um polígono



Fonte: produção do autor, 2018.

Devemos notar que nos vértices de um polígono simples convexo não podemos ter, de acordo com a Definição 2.10, ângulos internos maiores do que 180° . Pelo item 2 da Definição 3.3 também não podemos ter um ângulo interno de 180° , pois nesse caso teríamos lados contíguos contidos na mesma reta. Para finalizar, não poderíamos ter um vértice com um ângulo interno de 360° , pois dessa forma esse vértice seria um ponto interior a \mathcal{P} . Com base nessa discussão, apresentamos a importante Definição 3.7.

Definição 3.7 (Vértices convexos e reflexos). *Um vértice de um polígono simples, com o ângulo interno medindo α , é convexo quando seu ângulo interno mede $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Quando $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ o vértice é chamado de reflexo.*

Portanto, um polígono convexo não pode ter um vértice reflexo. Porém, se um polígono simples tiver todos os seus vértices convexos, o mesmo será convexo? A resposta é sim, mas não é trivial. Veremos isso na Seção 3.3 quando demonstrarmos o Teorema 3.15.

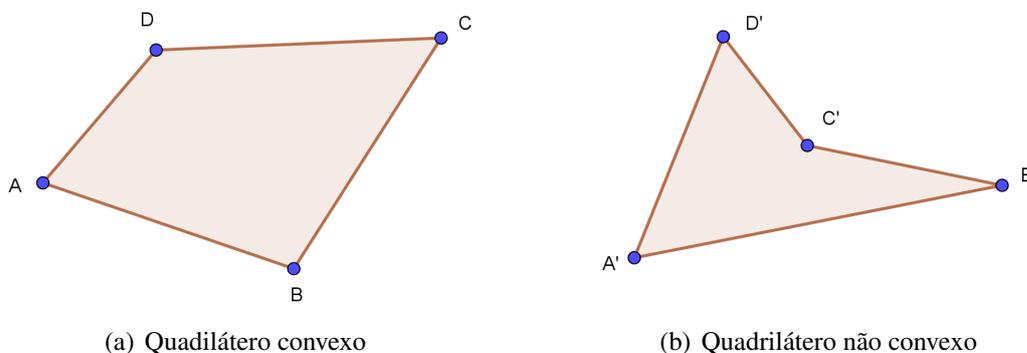
Os quadriláteros que nos interessam são os quadriláteros simples, aos quais identificaremos até o fim dessa discussão simplesmente como quadriláteros. Podemos distinguir os quadriláteros em duas classes: aqueles que suas diagonais tem um ponto comum e os que isso não acontece (Figura 3.12a e 3.12b, respectivamente). Vamos estudar esses casos. Antes vamos a uma definição.

Definição 3.8 (Diagonal de um polígono). *Uma diagonal de um polígono simples é um segmento que une dois vértices não consecutivos. Quando uma diagonal está totalmente contida na figura limitada pelo polígono, a diagonal é dita interna.*

Teorema 3.2. *Cada vértice de um quadrilátero convexo está no interior do ângulo oposto.*

Demonstração. Um ângulo é oposto a outro em um quadrilátero convexo quando seus vértices não são adjacentes. Considere o vértice D do quadrilátero convexo $ABCD$ da Figura 3.12a. Mostraremos que D está no interior de $\angle ABC$. Como $ABCD$ é convexo, sabemos que CD está contido no mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} ; em particular C e D estão do mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} . Analogamente, AD está do mesmo lado de \overleftrightarrow{BC} e em particular os pontos A e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{BC} . As duas conclusões particulares mostram que D está no interior do $\angle ABC$ como queríamos. A demonstração para os outros vértices é análoga. \square

Figura 3.12 – Tipos de quadriláteros

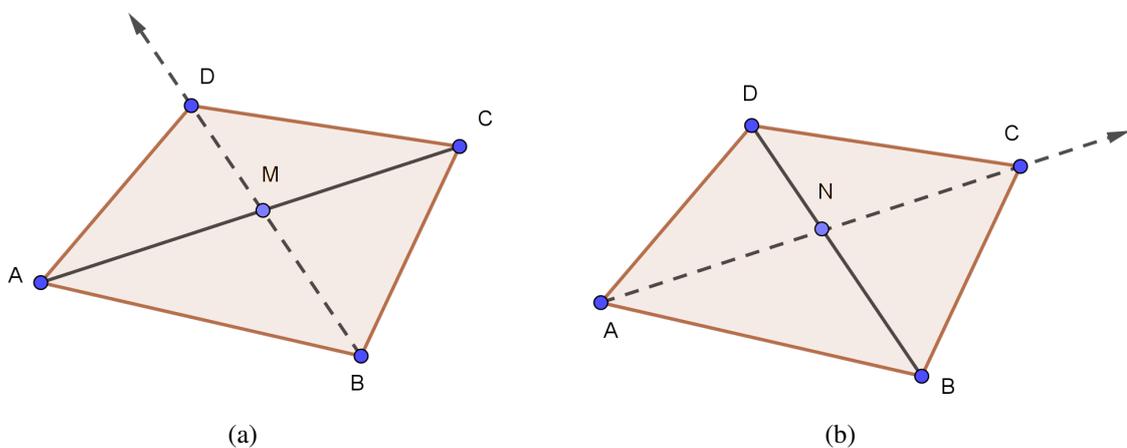


Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 3.3. *As diagonais de um quadrilátero convexo têm um ponto em comum. Em outras palavras, se um quadrilátero $ABCD$ é convexo então suas diagonais se cortam.*

Demonstração. Suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo. Pelo Teorema 3.2, o ponto D está no interior do $\angle ABC$. Portanto, pelo Teorema do Travessão, a semirreta \overrightarrow{BD} corta o segmento AC em um ponto M (Figura 3.13a). Outra aplicação do Teorema do travessão no vértice C , que está no interior do $\angle DAB$, mostra que a semirreta \overrightarrow{AC} corta o segmento BD em um ponto N . Supomos que M e N não sejam o mesmo ponto. Então M e N seriam dois pontos distintos pertencentes a reta \overleftrightarrow{AC} e a reta \overleftrightarrow{BD} . Pelo Axioma 1 (Capítulo 2), as retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BD} seriam a mesma e os pontos A, B, C e D seriam colineares. Isso é impossível, pois $ABCD$ é um quadrilátero. Portanto, $M = N$. Como M pertence a diagonal BD e a diagonal AC , as diagonais se intersectam, como queríamos demonstrar. \square

Figura 3.13 – Ilustração do Teorema 3.3



Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 3.4. *Se as diagonais de um quadrilátero têm um ponto em comum, então o quadrilátero é convexo.*

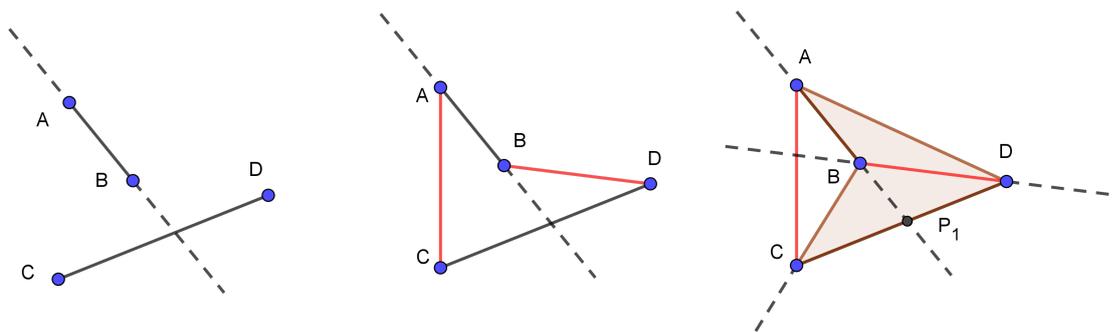
Demonstração. Consideramos as diagonais AC e BD do quadrilátero $ABCD$ que tem em comum o ponto M (Figura 3.13a); ambas as diagonais estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AB} , (com exceção dos pontos A e B), pois compartilham o mesmo ponto M . Logo, pelo Exemplo 2.2, os pontos C e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AB} . Da mesma forma, a reta \overleftrightarrow{AD} deixa os pontos B e C do mesmo lado, \overleftrightarrow{DC} , os pontos A e B e \overleftrightarrow{BC} , os pontos A e D . Portanto, pela Definição 3.6, o quadrilátero $ABCD$ é convexo, como queríamos demonstrar. \square

Os Teoremas 3.3 e 3.4 são recíprocos, portanto, podemos concluir que: *um quadrilátero é convexo se, e somente se, suas diagonais se cortam.*

Continuando nossa discussão, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Escolhendo uma das diagonais, por exemplo, BD , o interior de $ABCD$ ficará dividido em dois triângulos que compartilham a diagonal BD . O interior de $ABCD$ está contido no interior de cada um de seus ângulos, que por sua vez são todos convexos. Veja a Figura 3.13. Vamos supor que $ABCD$ não seja

convexo. Para tal, é suficiente termos apenas uma reta suporte de um dos lados deixando os dois vértices restantes em lados opostos, conforme a segunda definição de polígono convexo (Definição 3.6). Vamos supor que \overleftrightarrow{AB} deixe os pontos C e D em lados opostos. O segmento CD deve cortar \overleftrightarrow{AB} em um ponto P em um dos prolongamentos de AB . Vamos supor que $A * B * P$, conforme sugere a Figura 3.14.

Figura 3.14 – Quadrilátero não convexo.



Fonte: produção do autor, 2018.

Pelo Exemplo 2.2 os segmentos AC , exceto o ponto A , e o segmento BD , exceto o ponto B , estão em semiplanos distintos da reta \overleftrightarrow{AB} , confirmando o que já demonstramos: as diagonais não se cruzam. O ponto B é interno ao triângulo ACD . O segmento AC é um travessão do ângulo $\angle ADC$, portanto a semirreta \overrightarrow{DB} corta o segmento AC em um ponto Q , tal que $D * B * Q$. Com isso concluímos que:

1. Os pontos A e C estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{BD} .
2. Os pontos B e D estão do mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AC} .

Continuando nossa análise, o segmento AD é um travessão do ângulo $\angle ACD$. Portanto, pelo Teorema do Travessão, a semirreta \overrightarrow{CB} corta AD em um ponto R , tal que $C * B * R$. Disso temos que,

3. Os pontos A e D estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{BC} .

Do que foi exposto, também se conclui que,

4. Os pontos B e C estão do mesmo lado de \overleftrightarrow{AD} e os pontos A e B estão do mesmo lado de \overleftrightarrow{CD} .

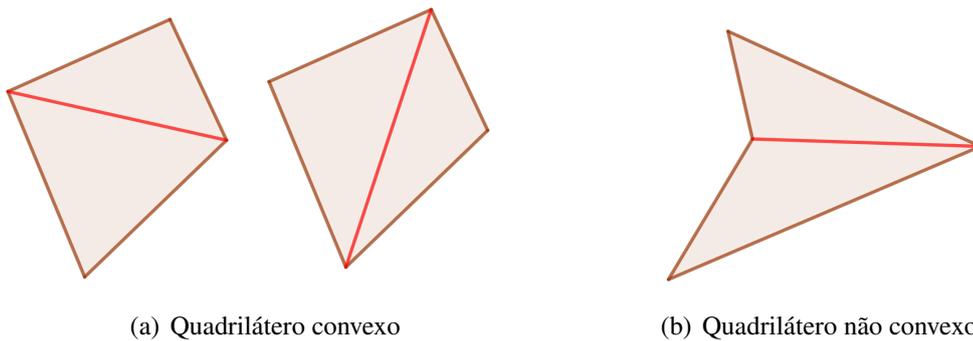
Pelo *Teorema da Curva de Jordan*, o quadrilátero simples separa os pontos do plano em duas regiões, o interior, que é limitado e o exterior ilimitado. Pelo item 4 o interior do polígono deve estar no interior do ângulo $\angle ADC$. O vértice B é comum aos lados que “quebram” a convexidade do polígono. O ângulo convexo em B , não contém o vértice D , portanto a região

do interior desse ângulo é ilimitada, não podendo ser o interior do quadrilátero. Assim sendo, o ângulo $\angle ABC$, interno ao quadrilátero, é maior do que 180° , portanto é reflexo. A união das figuras limitadas pelos triângulos ABD e CBD , formam o interior do quadrilátero $ABCD$ e a diagonal interna BD divide o interior em dois triângulos disjuntos justapostos. Desta forma estabelecemos o seguinte resultado que usaremos com frequência nas demonstrações por indução desse Capítulo:

Lema 3.1. *O interior de um quadrilátero simples sempre pode ser decomposto em dois triângulos não justapostos por uma diagonal interna.*

Como vimos, no caso convexo, quaisquer uma das diagonais pode ser usada para fazer a decomposição, logo há duas decomposições diferentes. Quando o quadrilátero não for convexo existirá apenas uma decomposição, pois apenas uma diagonal é interna (Figura 3.15). Adiantando o conteúdo da Definição 3.9, chamaremos esse tipo de decomposição de *triangularização*.

Figura 3.15 – Triangularização de um quadrilátero.



(a) Quadrilátero convexo

(b) Quadrilátero não convexo

Fonte: produção do autor, 2018.

3.2 POLÍGONOS SIMPLES CONVEXOS.

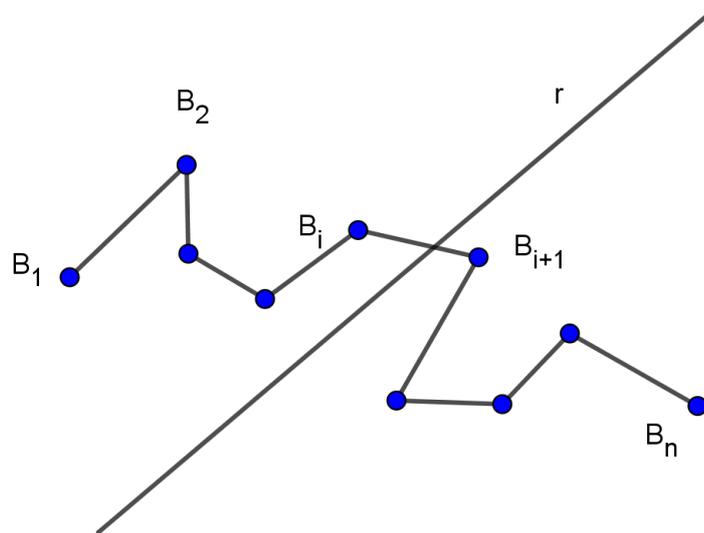
Nesta seção demonstraremos uma sequência de resultados clássicos sobre polígonos convexos da forma como são apresentados nos cursos de geometria. Esses teoremas têm como principal referência a exposição de Pogorelov (1974). Começamos com um teorema útil que será usado na demonstração de alguns resultados.

Teorema 3.5. *Se os extremos de uma poligonal se acham em diferentes semiplanos de uma reta r , então a poligonal corta a reta r .*

Demonstração. Deslocando-se ao longo da poligonal do ponto inicial até o final, encontramos dois vértices consecutivos que estão em semiplanos diferentes da reta r ou um vértice não extremo sobre a reta, pois se assim não fosse, toda a poligonal estaria de um único lado da reta r (Figura 3.16). No primeiro caso o lado da poligonal que contém os vértices consecutivos

corta a reta r e no segundo caso a poligonal corta r no vértice não extremo. Isso demonstra o teorema. \square

Figura 3.16 – Ilustração do Teorema 3.5



Fonte: produção do autor, 2018.

O próximo Teorema limita o número de intersecções de uma reta com um polígono. A caracterização completa das intersecções de retas e figuras convexas planas quaisquer será estudada no Capítulo 5.

Teorema 3.6. *Se uma reta tem três pontos em comum com um polígono convexo, então essa reta contém um dos lados. Em outras palavras, se uma reta tem três pontos em comum com um polígono convexo, então essa reta é uma reta de apoio do polígono.*

Demonstração. Sejam A , B e C três pontos que pertencem a uma reta r e a um polígono convexo. Suporemos, sem perder em generalidade, que B esteja entre A e C . O ponto B pertence a um dos lados do polígono. Afirmamos que esse lado pertence a reta r . Pois se assim não fosse, a reta de apoio do lado que contém o ponto B , separaria os pontos A e C , contrariando a convexidade do polígono. Logo, o lado do polígono que contém o ponto B , está contido na reta r . Isso encerra a demonstração. \square

Uma conclusão que obtemos do Teorema 3.6 é a seguinte:

*Se uma reta r não é uma reta de apoio do polígono, então r pode cortar o polígono em:
nenhum ponto, um ponto ou dois pontos.*

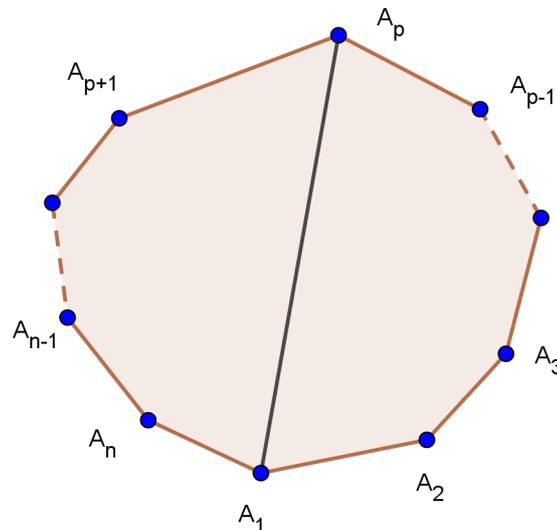
Definição 3.9 (Decomposição Poligonal e Triangularização). *Uma decomposição poligonal de um polígono \mathcal{P} é uma coleção finita de polígonos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$, cuja união é \mathcal{P} , de modo que*

a intersecção de dois tais polígonos ou é vazia, ou é um vértice comum ou um lado comum a ambos. Uma decomposição triangular, chamada de triangularização, é uma decomposição poligonal do polígono \mathcal{P} formada por triângulos com diagonais internas que não se cortam.

Teorema 3.7. *Uma diagonal de um polígono convexo o decompõe em outros dois polígonos convexos menores que estão em diferentes semiplanos da reta de apoio da diagonal.*

Demonstração. Seja o polígono convexo $\mathcal{P} : A_1A_2 \dots A_n$ e a diagonal A_1A_p . Segundo o Teorema 3.6, a reta de apoio da diagonal A_1A_p não tem mais pontos em comum com o polígono do que os pontos A_1 e A_p , pois essa reta não é uma reta de apoio de \mathcal{P} . Por consequência, em virtude do Teorema 3.5, a poligonal $A_1A_2 \dots A_p$ está inteiramente contida em um dos semiplanos determinados pela reta A_1A_p (Figura 3.17). Posto que, o polígono inicial se encontra em cada um dos lados das retas de apoio A_1A_2, A_2A_3, \dots , o polígono de p lados $\mathcal{P}_1 : A_1A_2 \dots A_p$ possui a mesma propriedade. Portanto, \mathcal{P}_1 é convexo. Analogamente demonstra-se que o polígono de $n - p + 2$ lados $\mathcal{P}_2 : A_pA_{p+1} \dots A_nA_1$ é também convexo.

Figura 3.17 – Demonstração do Teorema 3.7



Fonte: produção do autor, 2018.

Na sequência notamos que a semirreta $\overrightarrow{A_1A_p}$:

- Está no mesmo semiplano da reta $\overleftrightarrow{A_1A_n}$ que contém a semirreta $\overrightarrow{A_1A_2}$;
- Está no mesmo semiplano da reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ que contém a semirreta $\overrightarrow{A_1A_n}$.

Isso significa que a semirreta $\overrightarrow{A_1A_p}$ é interna ao ângulo $\angle A_nA_1A_2$. Pelo Teorema do Travessão a diagonal A_2A_n corta a semirreta $\overrightarrow{A_1A_p}$. Portanto, os pontos A_2 e A_n estão em diferentes semiplanos da reta $\overleftrightarrow{A_1A_p}$. Concluímos com essa discussão que os polígonos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 estão em diferentes semiplanos da reta A_1A_p . Para concluir basta percebermos que \mathcal{P}_1 tem p lados com

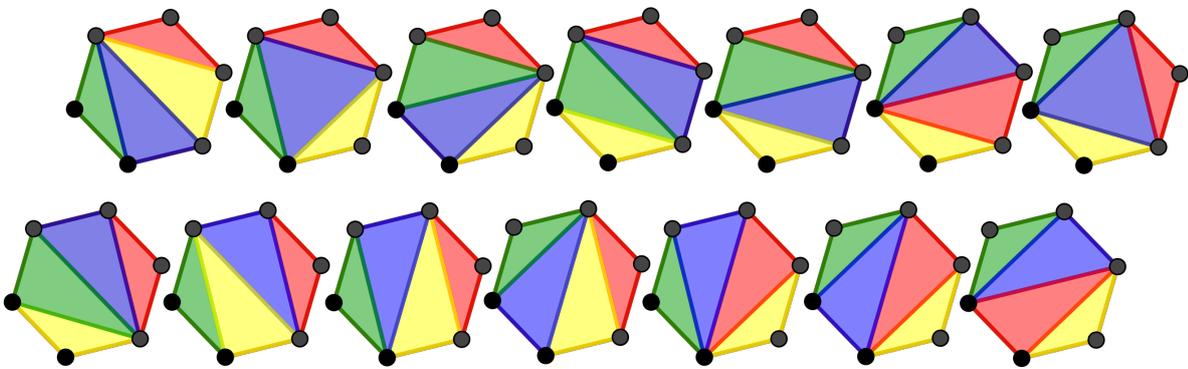
$3 \leq p \leq n - 1$. O polígono \mathcal{P}_2 tem $n - p + 2$ lados com $3 \leq n - p + 2 \leq n - 1$. Portanto, $p < n$ e $n - p < n$ e os dois polígonos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 da decomposição tem quantidade de lados menores do que \mathcal{P} . \square

Teorema 3.8 (Triangularização dos Polígonos Convexos). *Todo polígono convexo de n lados, com $n \geq 4$, pode ser triangularizado em $n - 2$ triângulos. O número de diagonais de cada decomposição é $n - 3$.*

Demonstração. Usaremos o princípio de indução matemática sobre o número n de lados. Quando $n = 4$, já vimos que a decomposição é possível no final da Seção 3.1 (Lema 3.1). Supondo que o teorema seja válido para todos os polígonos com um número de lados menor do que n . Devemos mostrar que o teorema é válido para todos os polígonos com n lados. Para tal, seja \mathcal{P} um polígono convexo com n lados. Sejam A e B dois vértices quaisquer não consecutivos de \mathcal{P} . Pelo Teorema 3.7 a diagonal AB decompõe \mathcal{P} em dois polígonos convexos contíguos e disjuntos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 de n_1 e n_2 lados respectivamente, tal que $n_1 < n$, $n_2 < n$ e $n_1 + n_2 = n + 2$. Pela hipótese de indução \mathcal{P}_1 fica decomposto em $n_1 - 2$ triângulos e \mathcal{P}_2 em $n_2 - 2$ triângulos. Logo, \mathcal{P} fica dividido em $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = n - 2$ triângulos. O número de diagonais da decomposição de \mathcal{P}_1 é $n_1 - 3$ e o número de diagonais da decomposição de \mathcal{P}_2 é $n_2 - 3$. Portanto, o número total de diagonais de \mathcal{P} é $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = (n_1 + n_2) - 5 = (n + 2) - 5 = n - 3$. Acrescentamos 1, porque AB é lado de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 e diagonal de \mathcal{P} . Com isso encerramos a demonstração. \square

Na Figura 3.18 vemos as 14 formas de triangularizar o hexágono regular (convexo). No Capítulo 4 aprenderemos a calcular o número de triangularizações para um polígono convexo com um número qualquer de lados.

Figura 3.18 – Triangularização do hexágono regular.

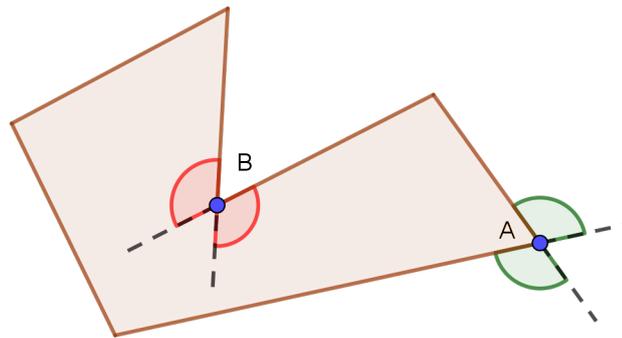


Fonte: produção do autor, 2018.

Definição 3.10 (Ângulo externo). *Um ângulo externo de um polígono \mathcal{P} é um ângulo formado por um dos lados do polígono e pelo prolongamento de um lado adjacente. Cada vértice da*

origem a dois ângulos externos, dependendo da escolha do lado que será prolongado. Os dois ângulos externos de um dado vértice são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Conforme podemos ver para os vértices A, convexo, e B, reflexo, do polígono da Figura 3.19.

Figura 3.19 – Ângulo externo



Fonte: produção do autor, 2018.

Nos vértices convexos, o ângulo externo fica no exterior do polígono. Já nos vértices reflexos, no interior. Veremos na próxima seção que a medida do ângulo externo em um vértice reflexo é negativa em um sentido que elucidaremos mais adiante.

Teorema 3.9. *A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $S_i = (n - 2)180^\circ$ e a soma dos ângulos externos independe de n e é igual a $S_e = 360^\circ$.*

Demonstração. Do Teorema 3.8 é possível triangularizar um polígono convexo em $n - 2$ triângulos. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Cada ângulo interno $\angle A$ do polígono convexo é a soma dos ângulos dos triângulos da decomposição que têm o vértice A. Por outro lado, cada ângulo de um triângulo é parte (ou o ângulo todo) de um ângulo do polígono. Portanto, a soma dos ângulos internos do polígono é igual a $(n - 2)180^\circ$; denominaremos este número por S_i , ou seja $S_i = (n - 2)180^\circ$. Quanto a segunda parte, a soma do ângulo interno com um dos externos, em cada vértice, é $a_i + e_i = 180^\circ$. Notando que os dois ângulos externos em um dado vértice são congruentes, pois são opostos pelo vértice, podemos escolher qualquer um deles. Somando todos os vértices obtemos $\sum_{i=1}^n (a_i + e_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n e_i$. O primeiro somatório, da primeira parte da demonstração, é $(n - 2)180^\circ$. Substituindo obtemos $\sum_{i=1}^n e_i = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$, como queríamos. \square

Exemplo 3.3 (Ângulos no polígono regular). *Podemos concluir do Teorema 3.9 que o polígono convexo regular tem seus ângulos internos iguais a $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$ e os ângulos externos, iguais a $\frac{360^\circ}{n}$.*

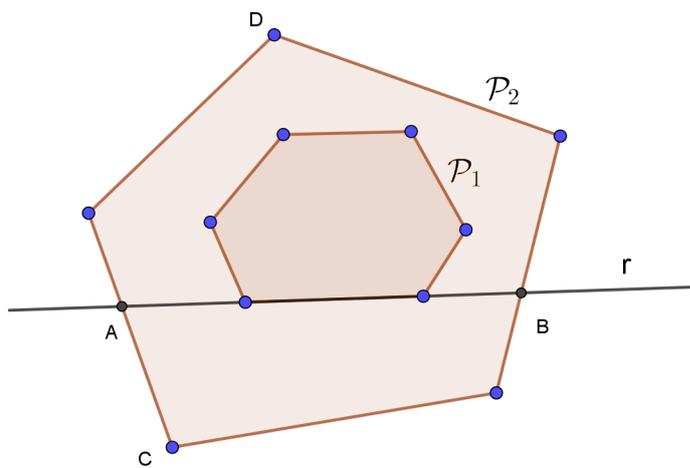
Os dois teoremas seguintes justificam alguns resultados que são obtidos pelo processo de cálculo de limites na obtenção de comprimento de curvas aproximadas por polígonos, cálculo de áreas de figuras convexas e outras aplicações.

Definição 3.11. *Sejam \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 dois polígonos convexas e Φ_1 e Φ_2 , respectivamente, as figuras convexas limitadas por esses polígonos. Diremos que o polígono \mathcal{P}_1 se encontra no interior do polígono \mathcal{P}_2 se $\Phi_1 \subset \Phi_2$.*

Teorema 3.10. *Se um polígono convexo \mathcal{P}_1 pertence ao interior de outro polígono convexo \mathcal{P}_2 , o perímetro de \mathcal{P}_1 não é maior do que o perímetro de \mathcal{P}_2 . Se o polígono \mathcal{P}_1 não coincide com \mathcal{P}_2 , seu perímetro é menor do que o de \mathcal{P}_2 .*

Demonstração. Traçamos uma reta r que contenha um dos lados de \mathcal{P}_1 (Figura 3.20). O polígono \mathcal{P}_1 está de um lado da reta. Podem acontecer duas situações. O polígono \mathcal{P}_2 está em um lado da reta r ou existem pontos do polígono \mathcal{P}_2 que estão em lados diferentes da reta r . No primeiro caso, escolhemos outro lado de \mathcal{P}_1 . Se o polígono \mathcal{P}_2 estiver novamente em um lado de r , escolhemos o terceiro lado. Se essa situação acontecer em todos os lados de \mathcal{P}_1 , então $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$. No segundo caso, a reta r corta o polígono \mathcal{P}_2 em dois pontos A e B . Com efeito, sejam C e D dois pontos de \mathcal{P}_2 que se encontram em lados opostos da reta r . Os pontos C e D dividem \mathcal{P}_2 em duas poligonais. Pelo Teorema 3.5 cada uma dessas poligonais corta a reta r . A reta r divide \mathcal{P}_2 em dois polígonos. Seja \mathcal{Q}_2 aquele que está no mesmo semiplano de r do polígono \mathcal{P}_1 .

Figura 3.20 – Ilustração do Teorema 3.10



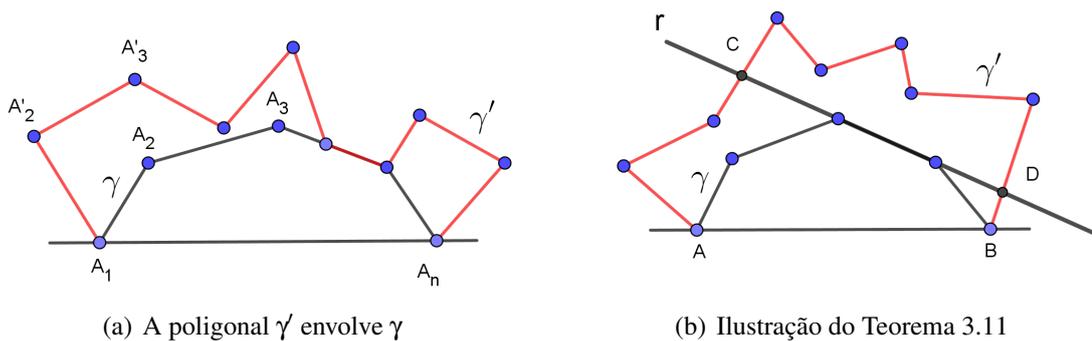
Fonte: produção do autor, 2018.

O polígono \mathcal{Q}_2 contém em seu interior o polígono \mathcal{P}_1 . Mostraremos agora que o perímetro de \mathcal{Q}_2 é menor do que o perímetro \mathcal{P}_2 . Com efeito, para passar do polígono \mathcal{P}_2 para o polígono \mathcal{Q}_2 devemos substituir a poligonal sobre \mathcal{P}_2 , do mesmo lado de C da reta r , pelo segmento

AB que une seus extremos. A soma das medidas dos lados da poligonal é maior do que o comprimento do lado, como consequência da desigualdade triangular. Esse último resultado pode ser visto em Pogorelov (1974, p.42). Escolhendo um outro lado de Q_2 , obtemos um outro polígono Q_3 que contém P_1 e tem perímetro menor do que Q_2 . Como Q_2 tem perímetro menor do que P_2 , o polígono Q_3 tem perímetro menor do que P_2 . Em n etapas obtemos o polígono $Q_{n+1} = P_1$, contido no interior de P_2 , e com perímetro menor do que P_2 . Portanto, se o polígono P_1 não coincide com P_2 , seu perímetro é menor do que o de P_2 . Isso demonstra o teorema. \square

Definição 3.12. A poligonal simples aberta $\gamma : A_1A_2 \dots A_n$ se chama convexa se existe o polígono simples $\mathcal{P} : A_1A_2 \dots A_n$ e este for convexo. Uma poligonal $\gamma' : A_1A'_2A'_3 \dots A_n$ envolve a poligonal convexa γ se ambas as poligonais estão situadas no mesmo semiplano da reta A_1A_n e a poligonal γ' não contém pontos interiores do polígono \mathcal{P} (Figura 3.21a).

Figura 3.21 – Poligonais convexas.



(a) A poligonal γ' envolve γ

(b) Ilustração do Teorema 3.11

Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 3.11. O comprimento da poligonal γ' que envolve a poligonal convexa γ é maior ou igual do que ao comprimento da poligonal γ . Se as poligonais não coincidem, γ' tem comprimento maior.

Demonstração. Tracemos a reta r por um dos lados da poligonal γ . Deslocando-se ao longo da poligonal γ' de seu ponto inicial A a seu ponto final B , marquemos o primeiro e o último ponto da poligonal γ' pertencentes a reta r (Figura 3.21b). Sejam C e D estes pontos. Substituímos a parte de C a D da poligonal γ' pelo segmento CD . A poligonal assim obtida também envolve a poligonal γ e seu comprimento é menor que ou igual ao de γ' . Se o comprimento da poligonal obtida for menor do que o de γ' , ela possuirá pontos situados a diferentes lados da reta r . Realizando esta operação em todos os lados da poligonal γ , obtemos, no fim desse processo, a poligonal γ . Resulta disso, como no Teorema 3.10, que o comprimento da poligonal γ' é maior que ou igual ao de γ . Se a poligonal γ' não coincide com γ , seu comprimento é maior. Isso encerra a demonstração. \square

3.3 POLÍGONOS SIMPLES CONVEXOS E NÃO CONVEXOS.

Nessa seção apresentaremos alguns resultados que generalizam os que desenvolvemos na Seção 3.2 somente para polígonos convexos. Sempre que possível faremos comparações entre casos convexos e não convexos. O objetivo principal dessa apresentação é destacar as propriedades que se mantêm em ambos os casos e demonstrar resultados altamente intuitivos que os professores frequentemente utilizam como exemplos em suas aulas, geralmente recorrendo para os desenhos. O Teorema da boca (Teorema 3.15), é um exemplo, que desde muito cedo na escola é ensinado como sinônimo de polígono convexo. Iniciamos com uma demonstração do *Teorema da Curva de Jordan* para polígonos. Esse teorema é conhecido por ser um dos teoremas fundamentais da matemática e por ser altamente intuitivo. A sua demonstração é bastante elaborada em sua forma geral, no entanto, para polígonos a prova é elementar. Fundamental na matemática, esse teorema foi formulado e provado pelo matemático francês Camille Jordan em 1882. Apresentaremos a demonstração que consta em Courant e Robbins (2000, p.306), porém com mais detalhes e comentários.

Teorema 3.12 (Teorema da Curva de Jordan Poligonal). *Qualquer polígono simples \mathcal{P} divide o plano Π em duas classes disjuntas de pontos, não situadas em \mathcal{P} , dos quais \mathcal{P} é a fronteira comum. As duas componentes de Π são o interior de \mathcal{P} , que é limitado e o exterior ilimitado. Qualquer poligonal ligando um ponto do interior a um ponto do exterior de \mathcal{P} , corta \mathcal{P} em pelo menos um ponto. Dois pontos quaisquer da mesma classe podem ser unidos por uma poligonal que não corta \mathcal{P} .*

Nota. A última afirmação do Teorema 3.12, conforme discutimos no Capítulo 2, é uma propriedade topológica chamada de conexidade por caminhos. Se estivéssemos considerando polígonos com “furos”, haveriam pontos da mesma componente (interior ou exterior) que não poderiam ser ligados por uma poligonal, ou qualquer outra curva contínua. Para uma introdução a esses aspectos, no contexto dos polígonos, o leitor pode ler Shashkin (1989).

Demonstração. Seja uma reta r no plano não paralela a qualquer dos lados de \mathcal{P} . Desde que \mathcal{P} tem uma quantidade finita de lados, isso é sempre possível. Definimos duas classes \mathcal{A} e \mathcal{B} de pontos do plano tais que:

- Um ponto $A \in \mathcal{A}$ se um raio com ponto inicial em A , paralelo a r , corta \mathcal{P} um número par de vezes;
- Um ponto $B \in \mathcal{B}$ se um raio com ponto inicial em B , paralelo a r , corta \mathcal{P} um número ímpar de vezes;

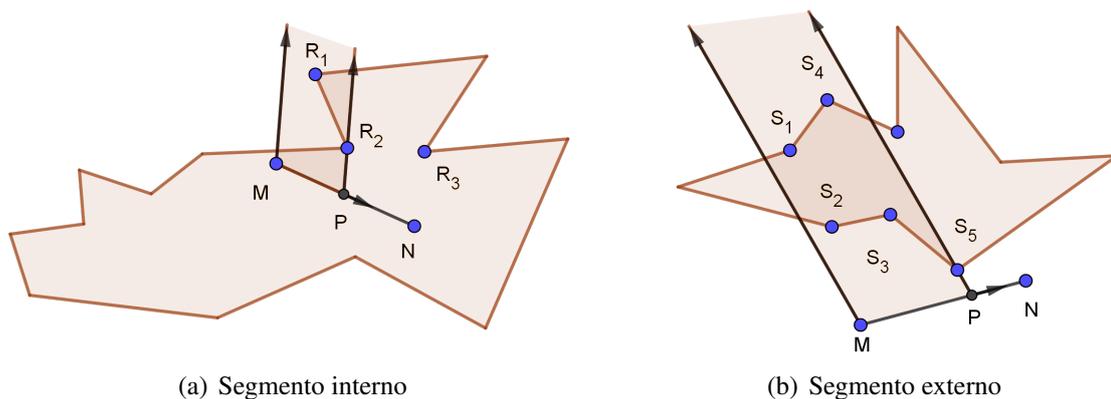
Dois pontos tem a mesma paridade quando pertencem a mesma classe.

Quando o raio passa pelos vértices temos duas situações especiais a considerar:

1. Quando os lados do polígono no vértice que o raio passa estão do mesmo lado do raio, não contamos essa situação como um corte (veja os vértices R_i na Figura 3.22a);
2. Quando os lados do polígono no vértice que o raio passa estão em lados opostos do raio, contamos essa situação como um corte (veja os vértices S_j na Figura 3.22b).

Mostraremos inicialmente que todos os pontos de um segmento de reta que não corta \mathcal{P} tem a mesma paridade. Imagine o ponto P deslocando-se de M para N no segmento MN . Conforme o ponto P move-se no segmento MN os raios que emanam de P na direção escolhida vão varrendo dois conjuntos contidos em uma faixa no plano nos dois semiplanos determinados pela reta MN . Como o segmento MN não corta \mathcal{P} , a quantidade de cortes somente pode mudar quando um raio passar por um vértice. Então vamos analisar essa passagem pelos vértices com cuidado.

Figura 3.22 – Varredura de vértices



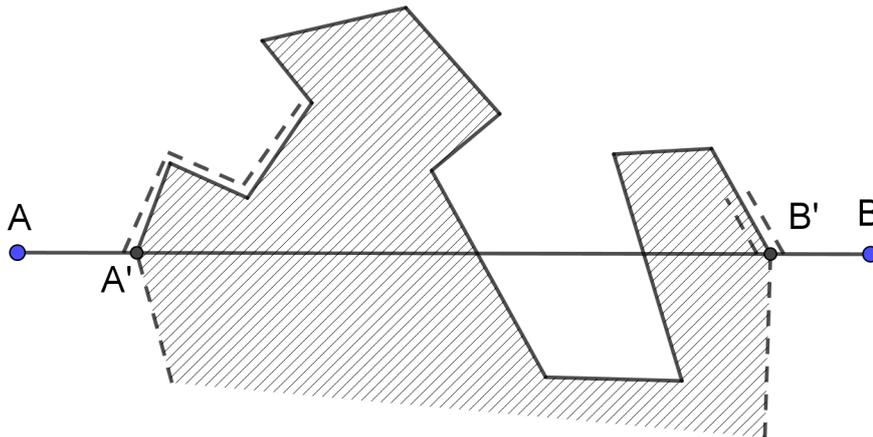
Fonte: produção do autor, 2018.

Quando um raio passa por um vértice do tipo 1, logo após a varredura passar pelo vértice, a quantidade de cortes aumenta ou diminui em dois. Na Figura 3.22a nos vértices R_1 e R_3 acrescenta-se dois cortes e no vértice R_2 a quantidade de cortes diminui dois. Quando um raio passa por um vértice do tipo 2 a quantidade de cortes não é alterada (são os vértices S_i da Figura 3.22b). Isso mostra que a paridade não muda quando a varredura passa pelos vértices. Portanto, se o ponto $M \in \mathcal{A}$ (respectivamente \mathcal{B}), então todos os pontos do segmento também pertencerão a \mathcal{A} (respectivamente \mathcal{B}). Como consequência do que fora demonstrado, qualquer poligonal ligando um ponto $A \in \mathcal{A}$ a um ponto $B \in \mathcal{B}$ deve cortar \mathcal{P} . Porque se assim não fosse a paridade de todos os pontos do caminho e, em particular, de A e B seriam a mesma.

Mostraremos agora que dois pontos quaisquer da mesma classe podem ser unidos por um caminho poligonal que não corta \mathcal{P} . Sejam A e B os dois pontos. Se o segmento AB não corta \mathcal{P} , esse segmento é o caminho que queríamos. De outro modo, sejam A' e B' o primeiro e o último

ponto de intersecção de AB com \mathcal{P} , respectivamente. Construimos o caminho começando em A ao longo do segmento AA' , em seguida, desviando um pouco antes de A' e seguindo bem próximo ao longo de \mathcal{P} até que \mathcal{P} retorne a AB em B' . A poligonal volta, então ao segmento AB e está bem próxima de B' , conforme Figura 3.23.

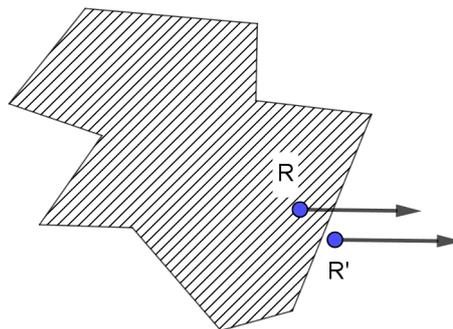
Figura 3.23 – Ilustração do Teorema 3.12: Conexidade.



Fonte: produção do autor, 2018.

A poligonal obtida volta a AB entre B' e B . Com efeito, percebemos que para dois pontos R e R' suficientemente próximos um do outro, mas em lados opostos de algum lado de \mathcal{P} tem paridade diferente, porque o raio partindo de R cortará \mathcal{P} em um ponto a mais do que o raio passando por R' (Figura 3.24).

Figura 3.24 – Paridade de pontos próximos ao lado de um polígono.



Fonte: produção do autor, 2018.

Como a poligonal construída volta ao segmento AB em algum ponto muito próximo de B' sem cortar o polígono \mathcal{P} , para que a paridade seja mantida ela deverá voltar ao segmento AB entre os pontos B' e B . Isso conclui a demonstração do teorema. \square

Notamos que o lado externo do polígono pode agora ser identificado com a classe \mathcal{A} , uma vez que, se percorrermos uma distância suficiente ao longo de qualquer raio na direção fixada

chegaremos em um ponto C no qual além dele não haverá nenhuma intersecção com \mathcal{A} , de modo que todos os pontos além de C tem paridade zero. O lado interno de \mathcal{P} é a classe \mathcal{B} .

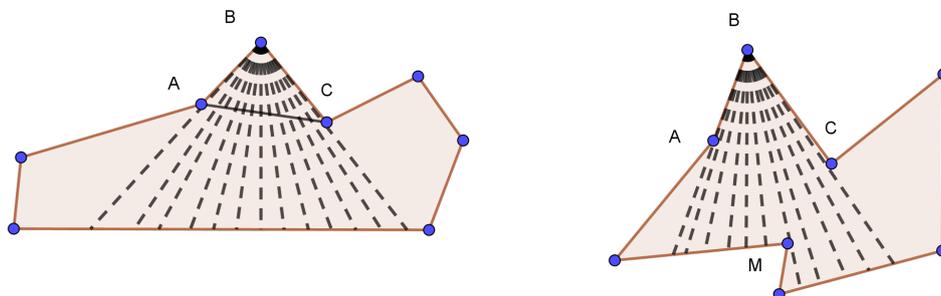
Na sequência demonstraremos que todo polígono simples, a exemplo dos convexos, podem ser triangularizados. Esse resultado tem importantes consequências e inúmeras aplicações. Apesar de a demonstração ser relativamente fácil, normalmente não é apresentada nos livros de geometria escolar. Com esse objetivo em mente, demonstraremos o resultado seguinte.

Lema 3.2. *Todo polígono simples com mais de três lados tem pelo menos uma diagonal interna.*

Apresentaremos a demonstração de Goloviná e Yaglom (1981) que é bastante direta, intuitiva e que pode ser aplicada no Ensino médio. O leitor pode obter outra demonstração em O'Rourke e Devadoss (2011, p.4).

Demonstração. Sejam A , B e C três vértices consecutivos do polígono simples \mathcal{P} . Do vértice B tracemos na parte interna de \mathcal{P} , até cortar o polígono pela primeira vez, todos os raios possíveis de modo que o ângulo interno $\angle ABC$ esteja coberto pelos raios. Enfatizamos que estamos considerando a parte dos raios até encontrar o primeiro obstáculo, como se fossem raios de luz que encontram uma parede (Figura 3.25).

Figura 3.25 – Ilustração do Lema 3.2.



(a) Os raios terminam no mesmo lado do polígono. (b) Os raios não terminam no mesmo lado do polígono.

Fonte: Produzido tendo como base Goloviná e Yaglom (1981, p.20).

Isso garante que estamos considerando somente segmentos internos ao polígono. Podemos ter duas situações:

1. Todas os raios terminam no mesmo lado do polígono. Nesse caso a diagonal AC divide nosso n -ágono em um polígono simples de $n - 1$ lados e um triângulo (Figura 3.25a).
2. Nem todos raios terminam em um mesmo lado. Neste caso um dos raios termina em um vértice M do polígono e a diagonal BM o dividirá em dois polígonos de menor número de lados (Figura 3.25b).

Com o discutido, o lema está assim demonstrado. □

Teorema 3.13 (Triangularização de um polígono simples). *Todo polígono simples com mais de três lados pode ser triangularizado em $n - 2$ triângulos. O número de diagonais da divisão é $n - 3$.*

Lembrando da Definição 3.9, uma triangularização de um polígono simples é uma decomposição desse polígono em triângulos por diagonais internas que não se cortam. Note que este é um resultado mais geral que o fornecido no Teorema 3.8, pois aquele é válido para polígonos convexos e este para quaisquer polígonos simples.

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Para os quadriláteros já vimos que o teorema é válido no Lema 3.1. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os polígonos com número de lados menor do que n . Seja \mathcal{P} um polígono com n lados. Pelo Lema 3.2, esse polígono tem uma diagonal interna. Essa diagonal interna divide \mathcal{P} em outros dois polígonos Q_1 e Q_2 com menor quantidade de lados do que \mathcal{P} . Pela hipótese de indução, os polígonos Q_i satisfazem o teorema. Agora procedendo como no Teorema 3.8 podemos concluir a demonstração. \square

Antes do próximo resultado, apresentaremos algumas definições importantes sobre a classificação dos tipos de vértices de um polígono simples qualquer.

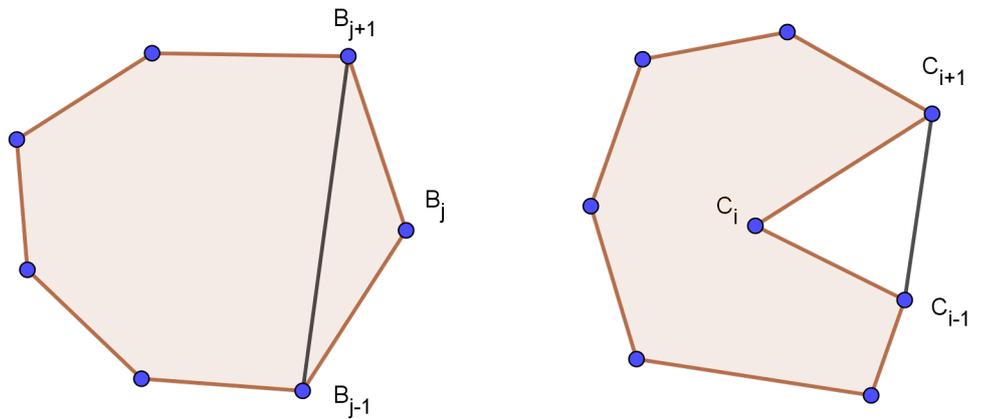
Definição 3.13 (Vértice e diagonal principal). *Diz-se que um vértice A_i de um polígono simples \mathcal{P} é um vértice principal quando a diagonal $A_{i-1}A_{i+1}$ intersecta \mathcal{P} somente em seus extremos. A diagonal em questão é chamada de diagonal principal.*

Definição 3.14 (Ponta e orelha). *O vértice principal B_j do polígono simples \mathcal{P} é chamado de ponta ² quando a diagonal $B_{j-1}B_{j+1}$ está inteiramente contida na figura limitada por \mathcal{P} . O triângulo $B_{j-1}B_jB_{j+1}$, contido na região limitada por \mathcal{P} , é chamado de orelha do polígono \mathcal{P} (Figura 3.26a).*

Definição 3.15 (Boca). *O vértice principal C_i do polígono simples \mathcal{P} forma uma boca, quando a diagonal $C_{i-1}C_{i+1}$, exceto pelos seus pontos extremos, está inteiramente contida no exterior de \mathcal{P} . O triângulo $C_{i-1}C_iC_{i+1}$ é a referida boca (Figura 3.26b).*

²ou ponta da orelha, do inglês "tip ear".

Figura 3.26 – Vértices principais: orelha e boca



(a) O $\triangle B_{j-1}B_jB_{j+1}$ é uma ponta.

(b) O $\triangle C_{i-1}C_iC_{i+1}$ é uma boca.

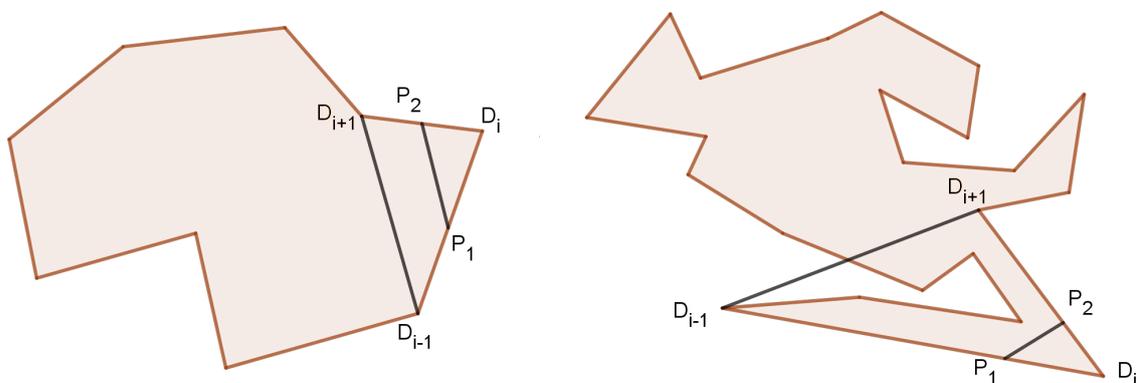
Fonte: produção do autor, 2018.

A próxima definição englobará os vértices de \mathcal{P} que não são principais. Isso significa dizer que no interior do triângulo formado por três vértices consecutivos de \mathcal{P} , podem ter vértices de \mathcal{P} .

Definição 3.16 (Vértice saliente). *Um vértice D_i de um polígono simples \mathcal{P} diz-se um vértice saliente quando é possível escolher um ponto P_1 no interior do segmento $D_{i-1}D_i$ e outro ponto P_2 no interior do segmento D_iD_{i+1} de modo que o segmento P_1P_2 esteja contido na figura limitada por \mathcal{P} (Figura 3.27).*

Se o vértice D_i for uma ponta, então é um vértice saliente e os pontos D_{i-1} e D_{i+1} já satisfazem as condições da Definição 3.16. Quando o vértice saliente não for ponta, P_1 e P_2 devem ser suficientemente próximos a D_i ³. A Figura 3.27b mostra um exemplo deste fato.

Figura 3.27 – Vértices salientes.



(a) Vértice saliente que é uma ponta.

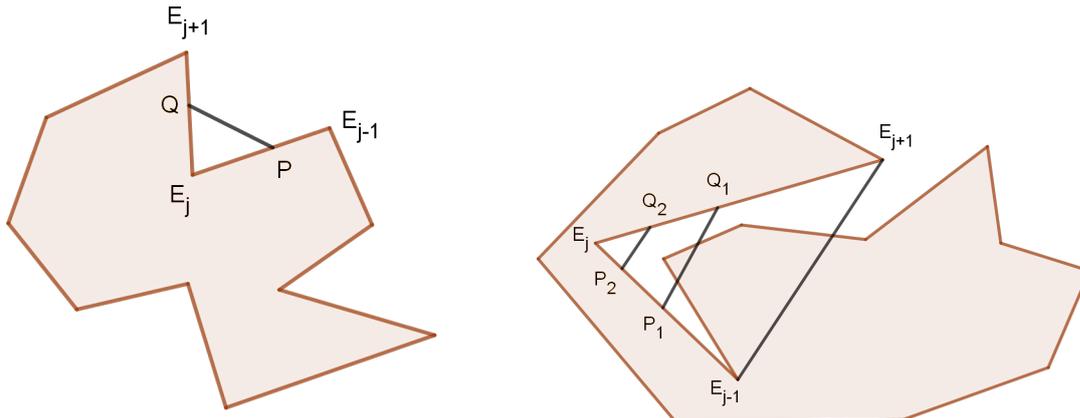
(b) Vértice saliente que não é uma ponta.

Fonte: produção do autor, 2018.

³O que queremos dizer com suficientemente próximo nesse caso é que os pontos P_1 e P_2 devem estar tão próximos de D_i de tal forma que o $\triangle D_iP_1P_2$ não contenha nenhum vértice de \mathcal{P} .

Definição 3.17 (Vértice reentrante). *Um vértice E_j de um polígono simples \mathcal{P} que não é saliente é dito ser um vértice reentrante. Isto significa que para qualquer pontos P no interior de $E_{j-1}E_j$ e qualquer ponto Q no interior de E_jE_{j+1} , o segmento PQ não está inteiramente contido na figura limitada por \mathcal{P} . Exemplos de vértices reentrantes são mostrados na Figura 3.28.*

Figura 3.28 – Vértices reentrantes.



(a) Vértice reentrante que forma uma boca.

(b) Vértice reentrante que não forma uma boca.

Fonte: produção do autor, 2018.

Os triângulos de uma triangularização podem ter 1, 2 ou 3 diagonais internas de \mathcal{P} como lados. Os triângulos que têm uma diagonal interna e dois lados, concordando com a Definição 3.14, são orelhas. O próximo teorema garante a existência de orelhas em todos os polígonos. Intuitivamente, isso significa que podemos montar ou desmontar um polígono qualquer incluindo ou retirando “orelhas” em cada etapa e obtendo um polígono novo.

Teorema 3.14 (Teorema das duas orelhas⁴). *Todo polígono simples tem pelo menos duas orelhas disjuntas.*

Demonstração. Dado um polígono \mathcal{P} de n lados, pelo Teorema 3.13 existe uma triangularização de \mathcal{P} em $n - 2$ triângulos. Cada um dos n lados de \mathcal{P} pertence a um desses triângulos. Usando o princípio das casas dos pombos interpretando os “triângulos como casas” e os “lados como pombos” há dois triângulos com dois lados de \mathcal{P} cada um. Os vértices comuns a esses dois lados são, cada um, uma ponta distinta de \mathcal{P} . \square

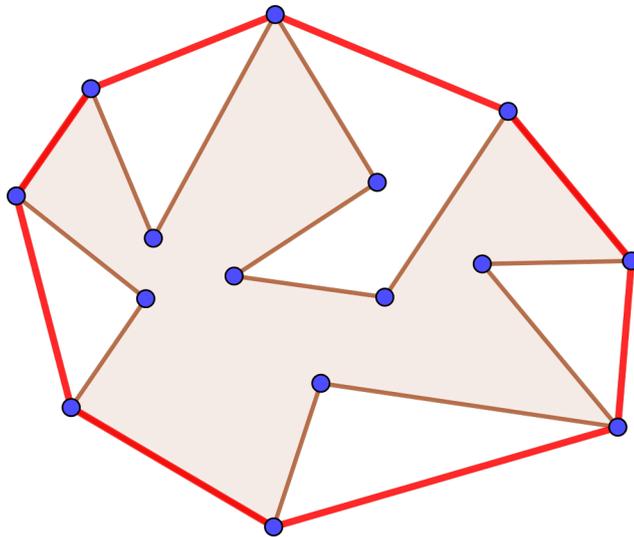
Quando um polígono \mathcal{P} não é convexo, em várias situações é útil obter, caso exista, a menor figura convexa que contenha a região Φ limitada por \mathcal{P} . Com menor figura convexa que contém Φ , queremos nos referir a figura convexa $\text{conv}(\Phi)$ que contém Φ e está contida em qualquer outra figura convexa Φ' que contenha Φ . De outra forma, a figura $\text{conv}(\Phi)$, é a

⁴Em inglês “Two ears theorem”.

intersecção de todas as figuras convexas que contenham Φ . No Capítulo 5 mostraremos que, para toda figura Φ , limitada por uma curva simples fechada \mathcal{K} , é possível obter essa figura, chamada de *Fecho Convexo*. De uma forma geral, sempre é possível obter o fecho convexo de qualquer conjunto limitado, finito ou infinito, de pontos. Concentraremos nossa atenção nas figuras, que são os conjuntos de pontos de interesse nessa dissertação.

Denotaremos o fecho convexo de um conjunto qualquer de pontos do plano S por $conv(S)$. A obtenção do fecho convexo para um conjunto de pontos, oferece várias aplicações, conforme podemos ler em O’Rourke e Devadoss (2011, p.33, tradução nossa) “*Existem inúmeras aplicações práticas na obtenção do fecho convexo, incluindo detecção de colisões, Sistemas de Informação Geográfica (SIG) e padrões de reconhecimento.*” Para polígonos, é suficiente considerar o fecho convexo do conjunto formado pelos seus vértices. Dessa forma, podemos visualizar o fecho convexo com um experimento. Imagine que os vértices sejam tachinhas fixas em um plano. Envolvemos toda a região com um elástico de látex fino e soltemos esse elástico (Figura 3.29). Ele ficará esticado em algumas tachinhas, minimizando a distância entre elas. A região interna delimitada pelo elástico mais o contorno que ele forma, é o fecho convexo do polígono.

Figura 3.29 – Fecho convexo de um polígono.



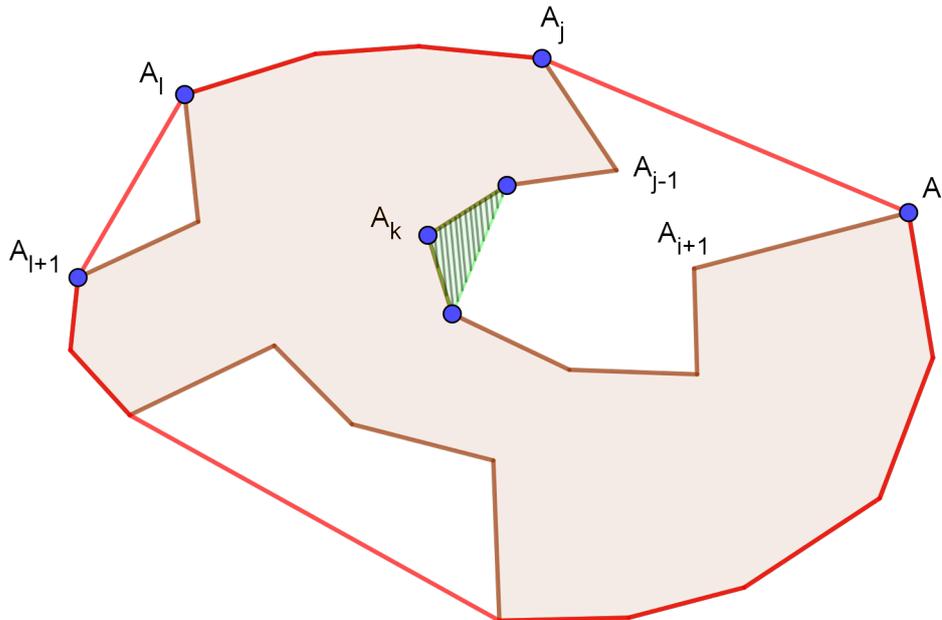
Fonte: produção do autor, 2018.

É possível mostrar que o fecho convexo de um polígono \mathcal{P} é o polígono de menor área que contém \mathcal{P} . Esse polígono coincide com o polígono convexo de menor perímetro que contém \mathcal{P} . A demonstração desse fato será omitida e o caminho para tal pode ser obtido nos exercícios de O’Rourke e Devadoss (2011, p.36).

Teorema 3.15 (Teorema da boca ⁵). *Exceto para polígonos convexos, todo polígono simples tem pelo menos uma boca, ou seja, um vértice reentrante principal.*

Demonstração. Consideremos o fecho convexo do conjunto \mathcal{V} dos vértices de \mathcal{P} . Sendo que \mathcal{P} não é convexo, existem lados de $\text{conv}(\mathcal{V})$ que não são lados de \mathcal{P} .

Figura 3.30 – Ilustração do Teorema 3.15.



Fonte: produção do autor, 2018.

Pode acontecer duas situações: O lado de $\text{conv}(\mathcal{V})$ que não está em \mathcal{P} cobre uma boca de \mathcal{P} e o teorema está demonstrado, como $A_l A_{l+1}$ na Figura 3.30. A outra situação acontece quando o lado de $\text{conv}(\mathcal{V})$ que não pertence a \mathcal{P} cobre um “bolso” que se fecha nesse lado de $\text{conv}(\mathcal{V})$. Esse bolso é outro polígono que se fecha no lado de $\text{conv}(\mathcal{V})$ ⁶. Vamos provar que cada um desses polígonos formados tem pelo menos uma boca. Considere o bolso fechado no lado de $\text{conv}(\mathcal{V})$ de vértices A_i e A_j conforme Figura 3.30. Forma-se o polígono simples $\mathcal{K}_{ij} : A_i A_{i+1} \dots A_{j-1} A_j$. Pelo Teorema 3.14, há pelo menos duas orelhas não sobrepostas em \mathcal{K}_{ij} . Por não haver sobreposição, não ocorrem pontas simultaneamente em A_i e A_j . Portanto, pelo menos uma orelha deve ocorrer em A_k com $i < k < j$. Obviamente uma orelha de \mathcal{K}_{ij} é uma boca de \mathcal{P} . Isso demonstra o teorema. \square

Para o que segue, discutiremos a noção de circulação. As ideias que apresentaremos foram baseadas em Lyusternik (1966), para isto vamos necessitar da noção de vetor ⁷. Dado um

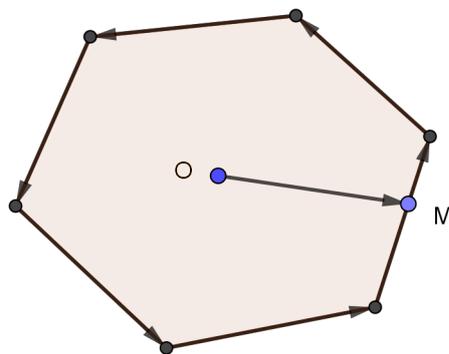
⁵Em inglês “One mouth Theorem”

⁶Dado que o fecho $\text{conv}(\Phi)$ da região Φ limitada por \mathcal{P} não coincide com Φ , parte da fronteira de Φ estará no interior de $\text{conv}(\Phi)$.

⁷Vamos admitir que o leitor já possui um conhecimento básico sobre vetores do plano.

ponto interno O do polígono convexo \mathcal{P} , todos os pontos de \mathcal{P} podem ser conectados por um vetor contido em seu interior⁸. Um ponto móvel M sobre o polígono pode mover-se em dois sentidos. O vetor \overrightarrow{OM} muda de posição quando M varre o polígono. O sentido anti-horário é aquele que corresponde ao sentido de rotação positivo do vetor \overrightarrow{OM} . Representando cada lado do polígono por um vetor que preserva o sentido de percurso do ponto M ao varrer o polígono, obtemos um diagrama de circulação do polígono, conforme Figura 3.31.

Figura 3.31 – Diagrama de circulação do polígono.



Fonte: produção do autor, 2018.

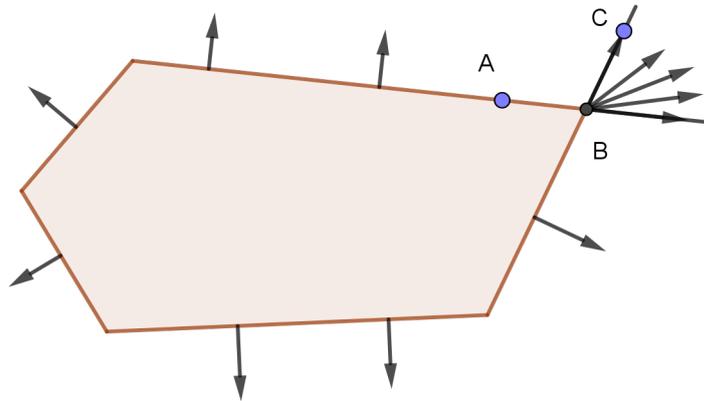
Continuando nossa discussão, já vimos que todos os lados de \mathcal{P} estão sobre uma reta de apoio de \mathcal{P} . Podemos distinguir nessa reta o lado em que se encontra o interior de \mathcal{P} . Antes vamos a uma definição.

Definição 3.18. *Um vetor é chamado de normal externo ao polígono \mathcal{P} em um ponto A de um dos lados se for perpendicular a reta suporte do lado e for dirigido para fora de \mathcal{P} .*

Nos pontos de \mathcal{P} que não são vértices, há somente uma direção e sentido para a normal externa, portanto existe apenas um vetor normal externo unitário. Nos vértices podemos ter uma infinidade de vetores normais externos, pois o ângulo externo a $\angle B$, o $\angle ABC$ da Figura 3.32, contém todas as semirretas que geram todas as retas suportes pelo ponto B . Os vetores normais externos estão todos contidos no ângulo oposto a B , conforme Figura 3.32.

⁸Dois pontos A e B estão conectados por um vetor no plano, quando, geometricamente, A é a origem do vetor e B é a extremidade do vetor.

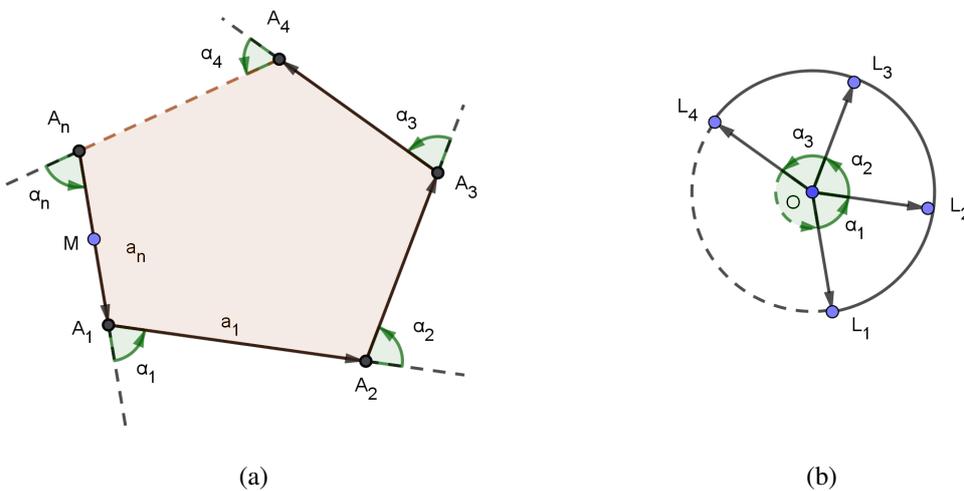
Figura 3.32 – Vetores normais a um polígono.



Fonte: produção do autor, 2018.

Quando o percurso for no sentido anti-horário, em cada ponto M do percurso, identificamos o lado esquerdo de M como aquele contrário ao sentido do vetor normal externo no ponto M . Logo, o interior do polígono \mathcal{P} estará sempre a esquerda de M . Quando M atinge o vértice A_1 , sua orientação gira por um ângulo α_1 para a esquerda de sua trajetória anterior. Pois, caso girasse à direita o vértice A_1 seria um vértice reflexo (Figura 3.33a).

Figura 3.33 – Circulação no polígono convexo.



(a)

(b)

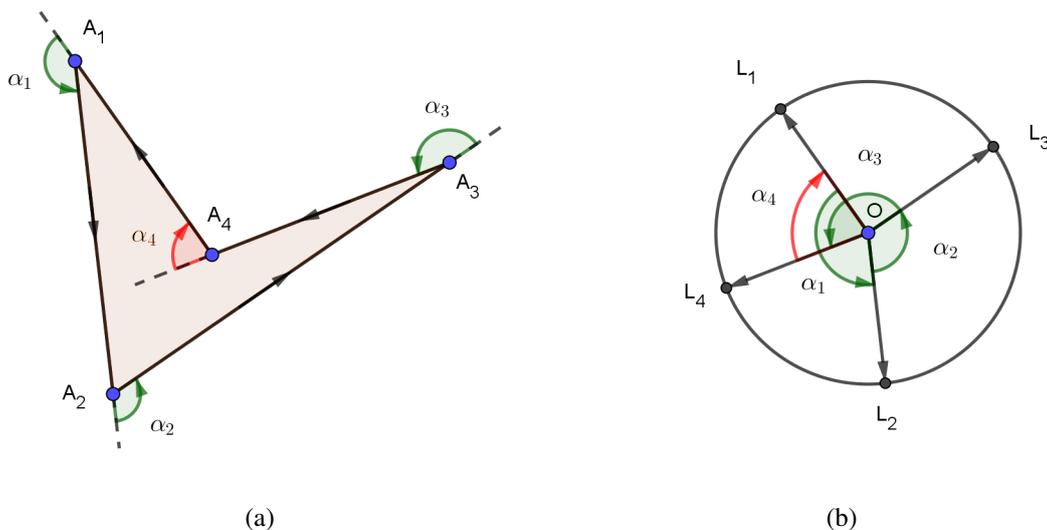
Fonte: produção do autor, 2018.

Continuando o percurso, em cada vértice o ponto móvel M muda a sua trajetória à esquerda por um ângulo menor do que 180° . Finalmente, no vértice A_n o ponto móvel gira para esquerda por um ângulo α_n e retorna ao lado que havia começado. Os ângulos de giro $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os ângulos externos e correspondem aos giros da reta suporte sobre os lados de a_1 até a_n (Figura 3.33a). Quando o ponto móvel volta ao lado original, a reta suporte completará uma revolução inteira, portanto, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 360^\circ$. Para vermos esse aspecto de outra forma, imagine um ponto O do qual parta todos os vetores unitários $\overrightarrow{OL_1}, \overrightarrow{OL_2}, \dots, \overrightarrow{OL_n}$, paralelos aos

vetores suportes dos lados. Percorrendo o círculo unitário obtido no sentido anti-horário, iniciando do ponto L_1 , passa-se pelos pontos L_2, L_3, \dots, L_n nessa ordem até retornar ao ponto L_1 . No final do processo terá sido feito exatamente um percurso ao longo do círculo unitário (Figura 3.33b). Notamos que cada giro à esquerda no polígono corresponde a um giro no sentido anti-horário no círculo unitário.

Uma construção análoga pode ser feita para polígonos não convexos. Escolhemos um sentido de percurso do ponto móvel M no polígono e analisamos o giro de um lado, visto como um vetor, para estar na direção do outro. O sentido escolhido será aquele em que no ponto móvel M localiza-se o interior à esquerda. Na Figura 3.34a temos um quadrilátero não convexo com vértices A_1, A_2, A_3 e A_4 e um percurso no sentido anti-horário. Correspondendo a esses pontos no círculo unitário estão os pontos L_1, L_2, L_3 e L_4 . Os vetores $\overrightarrow{OL_1}, \overrightarrow{OL_2}, \overrightarrow{OL_3}$ e $\overrightarrow{OL_4}$ são paralelos aos vetores dos lados A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3 e A_3A_4 respectivamente. Ao circuito do ponto M sobre o quadrilátero corresponderá um circuito ao longo do círculo unitário associado.

Figura 3.34 – Circulação no quadrilátero não convexo.



Fonte: produção do autor, 2018.

Assim como no caso convexo, cada giro à esquerda corresponde a um giro no sentido anti-horário no círculo unitário. Quando o ponto móvel M chega no vértice A_4 , esse experimenta um giro à direita, correspondendo um giro no sentido horário no círculo unitário. Algebricamente, cada giro no sentido horário corresponde a um ângulo de medida negativa. No final do circuito, como o ponto móvel retorna a posição original, a soma das contribuições é novamente igual a 360° . Diferente do caso convexo, no caso não convexo o ponto móvel percorreu mais do que uma volta até voltar a posição original. Intuitivamente, nos polígonos convexos os giros nos vértices não são muito acentuados. No final cada pequeno giro contribui para no final somar-se a exatamente uma revolução completa. Nos polígonos não convexos (pelo menos naqueles com

uma quantidade pequena de lados), haverá vértices com mudanças fortes de direção, como os vértices A_1 e A_3 da Figura 3.34a. Essas contribuições forçarão o ponto móvel a mover-se à direita em algum outro vértice.

Depois dessa discussão vamos demonstrar o último teorema desse capítulo.

Teorema 3.16. *A soma dos ângulos internos de um polígono simples qualquer de n lados é $(n - 2)180^\circ$ graus e a soma dos ângulos externos não depende de n e é igual a 360° graus.*

Demonstração. Do Teorema 3.13 é possível triangularizar um polígono em $n - 2$ triângulos. Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° graus, demonstra-se a primeira parte. Quanto à segunda, a soma dos ângulos interno e externo, percorrendo os vértices no sentido anti-horário, é $\alpha_i + \alpha_e = 180^\circ$ para todo vértice do polígono. Para os vértices reflexos, $\alpha_e < 0^\circ$ e $\alpha_i > 180^\circ$, mas ainda se tem $\alpha_i + \alpha_e = 180^\circ$ (Veja a Figura 3.34). Somando todos os vértices, obtemos $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \alpha_e = n \cdot 180^\circ$. O primeiro somatório, da primeira parte da demonstração, é igual a $(n - 2)180^\circ$. Substituindo, obtemos $\sum_{i=1}^n \alpha_e = 2 \cdot 180^\circ$, como queríamos demonstrar. \square

Finalizamos esse capítulo resumindo algumas propriedades obtidas compartilhadas por polígonos simples convexos ou não.

- Todo polígono simples, seja convexo ou não, pode ser triangularizado;
- O número de diagonais de uma triangularização não muda e é sempre igual a $n - 2$;
- A soma dos ângulos internos de um polígono é sempre $(n - 2) \cdot 180^\circ$;
- A soma dos ângulos externos de um polígono é sempre igual a 360° ;
- Em um circuito no sentido anti-horário, sempre se vê o interior do lado esquerdo (essa é uma propriedade das figuras em geral);
- Um polígono convexo não tem vértices reflexos. Reciprocamente, se podemos concluir que um polígono simples não tenha vértices reflexos, o mesmo é convexo;
- Em um circuito no sentido anti-horário, em um polígono convexo, sempre se gira à esquerda nos vértices. Reciprocamente, quando se gira à direita pelo menos uma vez em um vértice, podemos concluir que o polígono não é convexo;
- Um polígono qualquer sempre tem, pelo menos, duas orelhas (que podemos pensar como folhas de uma árvore). Isso significa que podemos desmontar um polígono, começando a retirar os triângulos externos em cada etapa. Isso deixa claro que os triângulos de uma triangularização são as unidades mínimas de formação dos polígonos e, em um certo sentido, de todas as figuras planas;

- Fixando um ponto qualquer de uma figura limitada por um polígono convexo, todos os outros pontos da figura são visíveis. Logo, toda figura limitada por um polígono convexo é estrelada.

Algumas perguntas não respondidas:

- Qual a quantidade de triangularizações que podem ser obtidas em um polígono convexo? (Veja Figura 3.18 para o caso do hexágono).
- Qual o menor número de pontos de uma figura limitada por um polígono simples não convexo para cobri-lo por completo? Esse resultado depende da “geometria” do polígono simples não convexo?
- Nos casos em que há mais do que uma triangularização, existem algumas melhores do que outras para algum objetivo?

Essa e outras questões serão discutidas nos Capítulos 4 e 5.

4 APLICAÇÕES E APROXIMAÇÕES À SALA DE AULA

Nesse capítulo iremos em um primeiro momento discutir a formalização do conceito de área na geometria e sua relação com a triangularização de um polígono. O conceito de área é um dos mais importantes da matemática e é discutido com toda sua generalidade em um campo da matemática chamada de *Teoria da Medida e Integração*. Pretendemos discutir somente as ideias relacionadas ao nosso tema, sem muito detalhamento, pois o tema é vasto. O foco, além da discussão formal, é propor atividades interessantes que possam ser aproveitadas por professores nas escolas. Com igual propósito discutiremos a noção de centro de massa. O conceito de triangularização, mais uma vez, se tornará importante no desenvolvimento das ideias. Aplicaremos os resultados do Capítulo 3 na resolução de problemas combinatórios, que sem as ideias discutidas se tornariam extremamente laboriosos. Por fim, estenderemos a discussão sobre o *Problema da Galeria de Arte*.

4.1 ÁREA, CONGRUÊNCIAS E SEMELHANÇAS.

São das civilizações da antiguidade os primeiros registros do uso da geometria para o cálculo de áreas. A importância da demarcação de terras pelos egípcios é o registro tradicional difundido dessa primeira utilidade. É razoável dizer que figuras congruentes tenham mesma área, isto é, são equivalentes. Também é razoável dizer que duas figuras são equivalentes quando pudermos cortar uma delas em um número finito de partes de tal forma que possamos reagrupar essas partes para obter a segunda. As figuras obtidas por cortes, conforme discutimos, são chamadas *equidecomponíveis*. Essa razoabilidade vem do fato de as figuras serem formadas por partes respectivamente congruentes. Portanto, figuras equidecomponíveis têm iguais áreas, significando intuitivamente que ocupam uma mesma porção do plano. Esse método de decomposição, que já constava nos Elementos de Euclides (300 A.E.C), era usado para reagrupar as partes decompostas de uma figura para que resultasse em outra figura mais simples, da qual já se conhecia a área. Euclides não mensurava a área através de uma medida. Por essas razões, percebemos que as figuras congruentes estão no centro da discussão sobre áreas. Em um sentido intuitivo, figuras congruentes no plano podem ser obtidas uma da outra por superposição. O infortúnio dessa noção é que figuras planas congruentes obtidas por reflexão necessitam da terceira dimensão para que o movimento, sem deformação, leve uma figura a outra. No formalismo geométrico tradicional e nos livros básicos de geometria, na maioria dos casos a congruência é apresentada somente para os triângulos estudando os casos de congruência. Uma

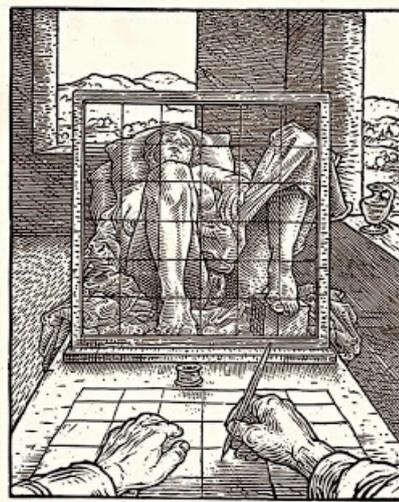
vez estabelecido os critérios de congruência de triângulos, em alguns desses livros didáticos a congruência é generalizada para os polígonos, como em Baldor (2004).

Os pintores medievais, preocupados em aumentar o realismo de suas pinturas, desenvolveram técnicas e máquinas capazes de captar a essência de uma imagem tridimensional em uma tela. Pintores como Leonardo da Vinci (1452-1519) e Albrecht Dürer (1471-1528) conheciam técnicas de perspectiva e usavam máquinas na elaboração de algumas de suas telas. Uma curiosa máquina usada por Dürer, conhecida como máquina de perspectiva, era composta de uma moldura de vidro quadriculada na qual o artista via o que iria pintar em perspectiva (Figura 4.1).

Figura 4.1 – Máquina de perspectiva de Albert Dürer.



(a) Técnica de pintura por quadriculação.



(b) Visão do artista.

Fonte: Orosz (2009).

A ideia de congruência está presente nesse método de pintura. Na Figura 4.1b, o artista vê uma imagem congruente da sua modelo em perspectiva. O uso dos quadros ajudava a manter as proporções da modelo, segundo o ponto de vista do artista.

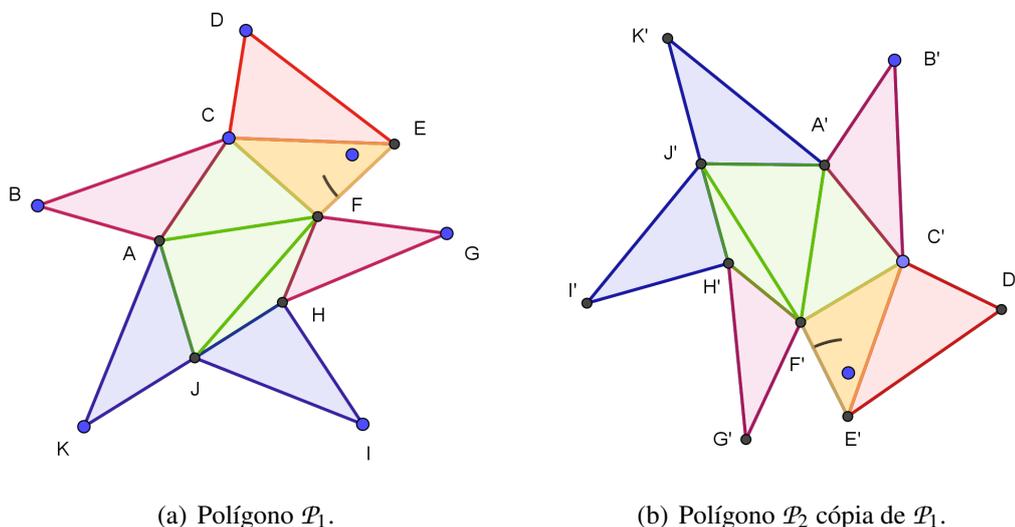
Na sequência apresentaremos as definições formais de semelhança e congruência para podermos continuar nossa discussão.

Definição 4.1 (Semelhança e Isometria). *Sejam Φ e Φ' figuras planas e r um número real positivo. Diz-se que Φ e Φ' são semelhantes, com razão de semelhança r , quando existe uma correspondência biunívoca $\sigma : \Phi \rightarrow \Phi'$, de pontos de Φ em pontos de Φ' , com a seguinte propriedade: Se X e Y são pontos quaisquer de Φ e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$, então $\overline{X'Y'} = r\overline{XY}$. Uma semelhança entre duas figuras planas de razão 1 é dita ser uma isometria ou congruência.*

Uma isometria é sempre uma composição de reflexões, rotações e translações. Uma semelhança é sempre uma composição de uma homotetia com uma isometria.

Para nossa figura mais simples, o triângulo, do ponto de vista particular da geometria elementar, dois triângulos são ditos serem semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de tal forma que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais. Os triângulos serão congruentes se os lados e os ângulos correspondentes forem congruentes. Pode ser mostrado que as definições gerais e particulares de semelhança e congruência para os triângulos concordam. Veja Lima (2009). Também é possível mostrar que se pudermos estabelecer uma correspondência entre os vértices $A_i \leftrightarrow B_i$ dos polígonos $\mathcal{P}_1 : A_1A_2 \dots A_n$ e $\mathcal{P}_2 : B_1B_2 \dots B_n$ com seus vértices dispostos no sentido anti-horário, de tal forma que ângulos e segmentos correspondentes sejam congruentes, então os polígonos são congruentes. Portanto, considerando uma triangularização de \mathcal{P}_1 e a mesma triangularização com os pontos homólogos em \mathcal{P}_2 , os triângulos da decomposição serão congruentes. Intuitivamente, um polígono pode ser desmontado pelos triângulos de uma triangularização arbitrária e montado em outra posição como peças de um quebra cabeça. O número de quebra-cabeças como esses é igual ao número de triangulações possíveis do polígono. Na Figura 4.2a, o lado AB do polígono \mathcal{P}_1 foi transportado para a posição $A'B'$ da Figura 4.2b.

Figura 4.2 – Copiando um polígono por triangularização.



Fonte: produção do autor, 2018.

Sobre $A'B'$ fora construído o triângulo $A'B'C'$ congruente ao triângulo ABC . Repete-se a operação ao triângulo ACF obtendo o triângulo $A'C'F'$ congruente a ACF . Continua-se transportando os triângulos, um a um, e no final do processo o polígono obtido é congruente ao original da Figura 4.2.

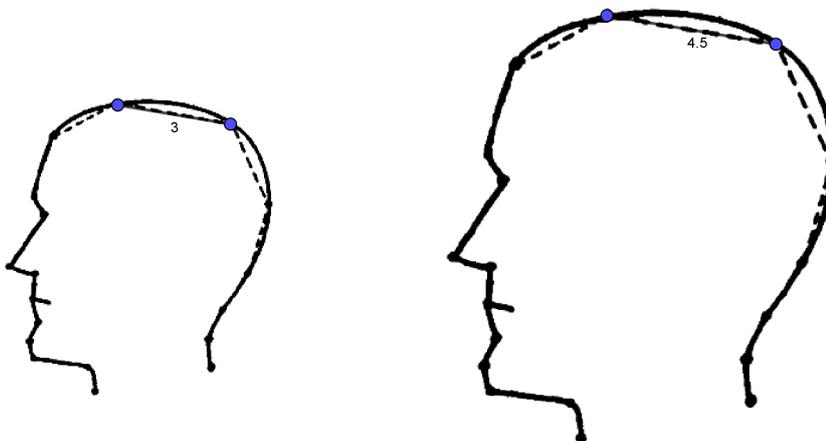
Em alguns livros de geometria elementar a congruência dos triângulos de uma decomposição, dispostos da mesma maneira, é usada como definição de congruência de polígonos. Em Baldor (2004, p.78, tradução nossa) o autor define:

Definição 4.2 (Polígonos congruentes - Baldor). *Dois polígonos são congruentes se podem decompor-se em igual número de triângulos respectivamente iguais e dispostos do mesmo modo.*

Para o propósito do livro, estudantes da escola básica, uma definição como essas, além de ser de fácil compreensão, é altamente intuitiva. No citado texto, polígonos são definidos de forma equivalente a definição dessa dissertação, incluindo polígonos simples não convexos.

Tratamento análogo podemos dar a semelhança de polígonos. Com os ângulos em correspondência cíclica conforme discutimos, se cada triângulo da decomposição de \mathcal{P}_1 é semelhante ao correspondente triângulo em \mathcal{P}_2 , podemos concluir que os polígonos são semelhantes, conforme podemos pesquisar a demonstração em Birkhoff e Beatley (2001, p.62). Isso inspira um método para ampliar ou reduzir uma figura usando polígonos, conforme Figura 4.3. Desenhamos uma poligonal contornando a figura que queremos ampliar. Quanto maior a quantidade de pontos, maior a precisão. Agora, com o polígono resultante e uma triangularização, dispomos os triângulos semelhantes da mesma forma e todos com a mesma razão de semelhança. Uma vez obtido o polígono semelhante ampliado, os contornos curvilíneos da figura modificada, são preenchidos. Na Figura 4.3 ampliamos o original a uma escala de 1,5 usando poligonais e triangularização.

Figura 4.3 – Ampliando ou reduzindo uma figura



Fonte: Adaptado de Birkhoff e Beatley (2001, p. 63).

Voltando a discussão sobre áreas, conforme vimos anteriormente, dois polígonos equidecomponíveis tem mesma área. A recíproca dessa afirmação é conhecida como o *Teorema de Boyai-Gerwien*, que apresentaremos na sequência.

Teorema 4.1 (Boyai-Gerwien). *Dois polígonos que têm mesma área são equidecomponíveis.*

Uma demonstração desse resultado pode ser vista em Boltyanskii (1981). No Teorema de Boyai-Gerwien, entende-se como polígono, não somente aqueles formados por poligonais simples fechadas, mas também a união de figuras justapostas e disjuntas limitadas por poligonais fechadas. Portanto, qualquer figura que seja equidecomposta por triângulos justapostos e disjuntos. Isso inclui figuras com exterior desconexo como àquelas da Figura 3.1.

Mas, afinal o que é área de uma figura plana? Primeiro vale à pena salientar que só faz sentido calcular a área de figuras geométricas ou união dessas, no sentido que damos nessa dissertação: figuras limitadas por uma curva fechada simples. Para Euclides, conforme já discutimos, a área entre duas figuras era dita ser igual se as figuras fossem equidecomponíveis. No nosso sistema axiomático, a situação não é muito diferente, exceto pelo fato de associarmos um número real a toda figura mensurável: a área é formalizada com axiomas de medida. Postula-se a medida da área do quadrado e a igualdade de áreas de triângulos congruentes. A área é, pois, sempre uma comparação com a área do quadrado unitário, intuitivamente: quantas vezes o quadrado unitário cabe na figura em questão. Embora tenhamos definido implicitamente uma unidade de área, o quadrado unitário, axiomatizar a área para um quadrado qualquer, como em Rezende e Queiroz (2008), evita as discussões sobre comensurabilidade e incomensurabilidade do lado do quadrado com a unidade de medida de segmentos. Uma discussão completa da comensurabilidade e incomensurabilidade do lado do quadrado com a unidade pode ser vista em Lima (2009). Com intuito de esclarecer o conceito matemático de área, definiremos conforme Batista (2004).

Definição 4.3 (Definição de área.). *A área de uma região Φ delimitada por uma ou várias curvas fechadas simples é um número real positivo $A(\Phi)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Dois regiões congruentes possuem a mesma área.*
2. *Se duas regiões Φ_1 e Φ_2 se intersectarem no máximo por pontos em sua fronteira, isto é, sua intersecção não possui pontos interiores, então $A(\Phi_1 + \Phi_2) = A(\Phi_1) + A(\Phi_2)$.*
3. *A área de um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento é igual a uma unidade de área.*

Assumindo por meio de um axioma a validade da área do quadrado como sendo o quadrado da medida de um lado, para todas as outras figuras deve ser demonstrado por equidecomposição a equivalência a área de um quadrado, que já sabemos calcular. Para figuras curvilíneas,

um processo limite deve ser considerado: fazendo aproximações sucessivas por áreas que já conhecemos, quase sempre polígonos.

Algo importante a ser notado é que em Rezende e Queiroz (2008, p.106), nosso livro base para axiomática da geometria, as regiões poligonais convexas são assumidas como decompostas por regiões triangulares e as regiões poligonais não convexas são assumidas como decompostas por uma ou mais regiões convexas. Esse mesmo aspecto do nosso modelo de geometria pode ser visto em outra axiomática semelhante à nossa. Em Barbosa (2006, p.175) o autor afirma que “*Uma região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não têm pontos interiores em comum.*”. Portanto, para ambos os autores, uma região poligonal, isto é, a região limitada por um polígono, é a mesma considerada no *Teorema de Boyai-Gerwien*. Implicitamente, esse importante teorema é usado na formalização da noção de área em geometria elementar. Nos dois textos a triangularização é usada sem maiores observações. As definições de polígono e região poligonal discordam: o conceito de região poligonal inclui figuras com fronteiras diferentes de polígonos simples, podendo até ter exterior desconexo, em outras palavras, conter furos.

Uma consequência do Teorema de Bolyai-Gerwien é a *equicomplementação* de polígonos (polígonos no sentido mais amplo, conforme discutido depois do Teorema de Boyai-Gerwien).

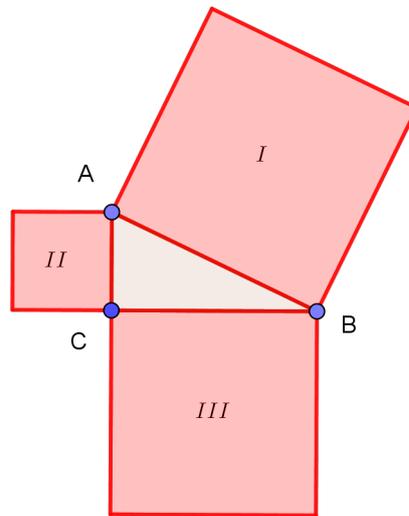
Definição 4.4 (Equicomplementação). *Dois polígonos são ditos equicomplementáveis se existir um conjunto de polígonos congruentes que justapostos as figuras originais resultam em polígonos congruentes.*

Usando o Teorema de Boyai-Gerwien demonstra-se que “*dois polígonos de áreas iguais são equicomplementáveis.*” Veja uma demonstração desse resultado em Boltyanskii (1981, p.20).

Como exemplo de aplicação da equicomplementação, demonstraremos o famoso Teorema de Pitágoras:

Teorema 4.2 (Pitágoras). *A soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo ABC , com o ângulo $\angle ACB$ reto, é igual a área do quadrado sobre a hipotenusa. Na Figura 4.4: $A(I) = A(II) + A(III)$.*

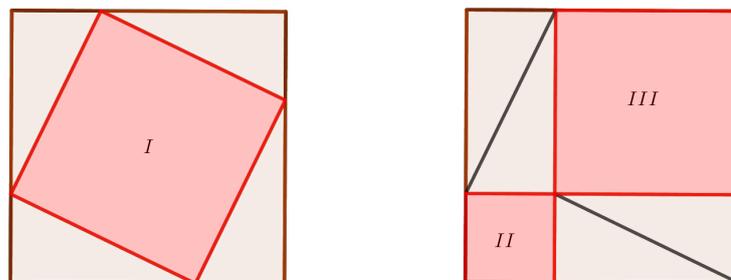
Figura 4.4 – Teorema de Pitágoras



Fonte: produção do autor, 2018.

Demonstração. Os quadrados I e os quadrados II e III tomados conjuntamente podem ser complementados com quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo ABC . O resultado dessa equicomplementação vemos na Figura 4.5. Em ambos os casos obtemos um quadrado com lados medindo a soma dos catetos do triângulo ABC .

Figura 4.5 – Demonstrando o Teorema de Pitágoras por equicomplementação.

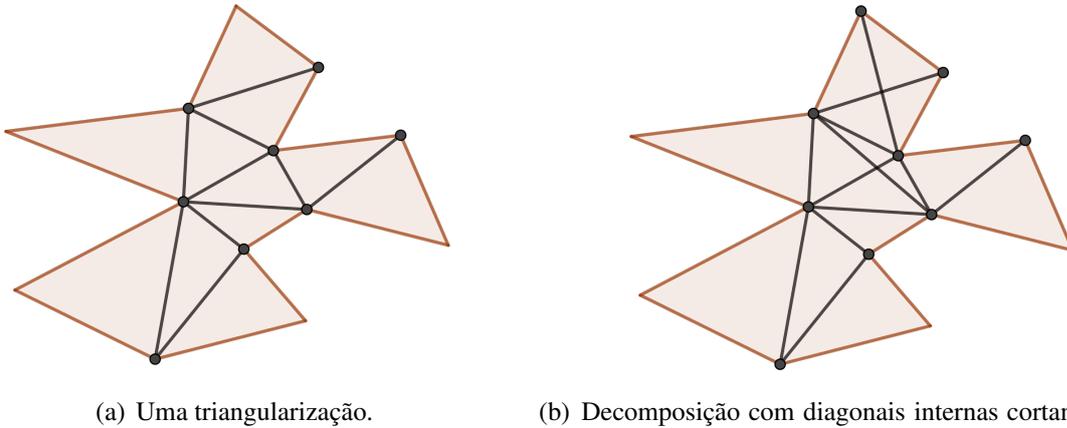


Fonte: produção do autor, 2018.

Como a equicomplementariedade resulta em equivalência, $A(I) = A(II) + A(III)$ e o Teorema de Pitágoras está demonstrado. □

Traçando diagonais internas a um polígono, podemos decompor o seu interior em triângulos. Caso as diagonais da decomposição não se interseccionam no interior do polígono, tem-se, conforme já definimos no Capítulo 3, uma triangularização. A triangularização é a decomposição em triângulos por diagonais internas que minimiza a quantidade de triângulos (Figura 4.6).

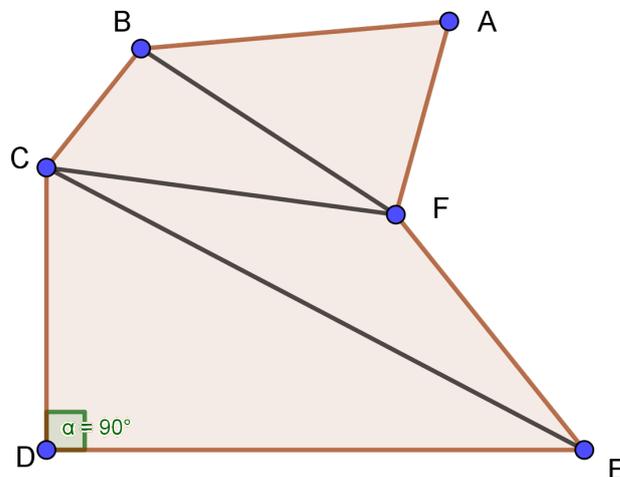
Figura 4.6 – Decomposições de um polígono por triângulos.



Fonte: produção do autor, 2018.

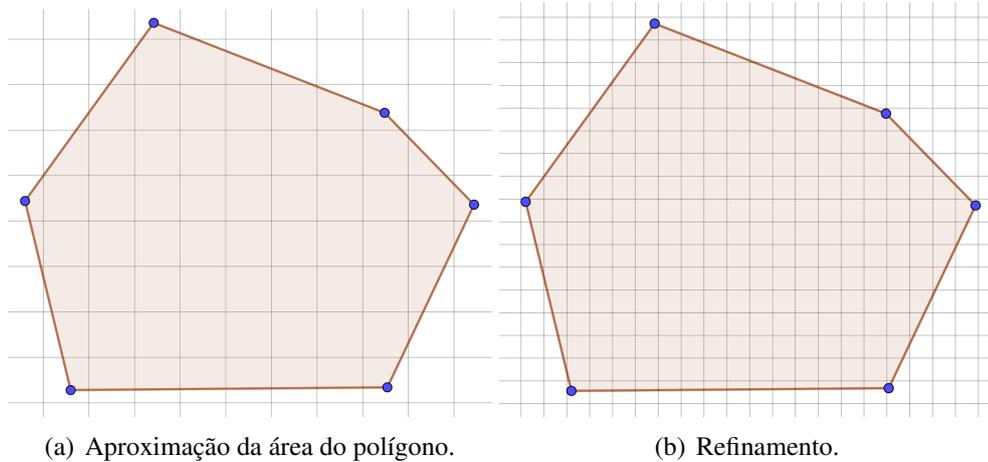
Pelo fato de minimizar a quantidade de triângulos, a triangularização é a decomposição mais usada para o cálculo da área do polígono, do centro de massa, etc. Por não haver intersecções no interior do polígono, a triangularização foi útil na demonstração da soma dos ângulos internos de um polígono nos Teoremas 3.9 e 3.16. No capítulo anterior mostramos que todo polígono admite, pelo menos, uma triangularização. Para calcular a área de um polígono, por mais complicado que seja, escolhemos uma triangularização e calculamos as áreas dos triângulos individuais. Caso o polígono tenha algum ângulo reto, podemos aproveitá-lo em algum triângulo para facilitar o cálculo da área (Figura 4.7).

Figura 4.7 – Calculando a área de um polígono.



Fonte: produção do autor, 2018.

Figura 4.8 – Cálculo da área do polígono usando uma rede retangular.



Fonte: produção do autor, 2018.

Nos casos discutidos conheceremos as medidas de todos os lados dos triângulos. O cálculo da área em função dos lados do triângulo é um resultado milenar conhecido como “Fórmula de Heron”, atribuída ao matemático grego Heron de Alexandria (10 – 80 E.C.).

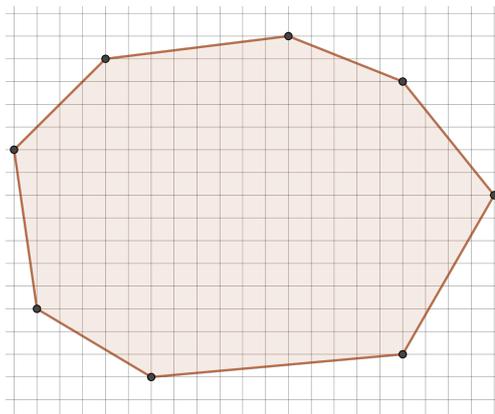
Teorema 4.3 (Fórmula de Heron). *A área de um triângulo ABC em função das medidas de seus respectivos lados a , b e c é dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o seu perímetro.*

Para demonstrações das expressões da área do triângulo, consulte Dolce e Pompeo (2005, p.329).

A área de um polígono pode ser aproximada incluindo no plano uma rede retangular formada por quadrados unitários. Conta-se a quantidade de quadrados inteiramente contidos no interior do polígono. O erro cometido será igual a soma das áreas das partes internas dos quadrados que estão parcialmente contidos no interior do polígono. Podemos refinar esse procedimento dividindo cada quadrado da rede em quadrados menores. O erro no cálculo da área diminui com os refinamentos. Veja a Figura 4.8.

Um caso importante acontece quando todos os vértices do polígono simples estão sobre pontos da rede. Um polígono como esses é chamado de *polígono reticular* (Figura 4.9).

Figura 4.9 – Um polígono reticular.



Fonte: produção do autor, 2018.

O cálculo da área do polígono reticular pode ser reduzido a contagem de pontos da malha sobre o polígono e no seu interior. Um problema de cálculo de área é, então, reduzido a um problema de contagem. Para apresentarmos esse resultado designaremos por i a quantidade de pontos da malha no interior do polígono simples \mathcal{P} e por b o número de pontos da rede em \mathcal{P} (na fronteira) ¹. O teorema seguinte atribuído a Georg Alexander Pick (1859-1943) nos ensina como calcular a área nesse caso particular.

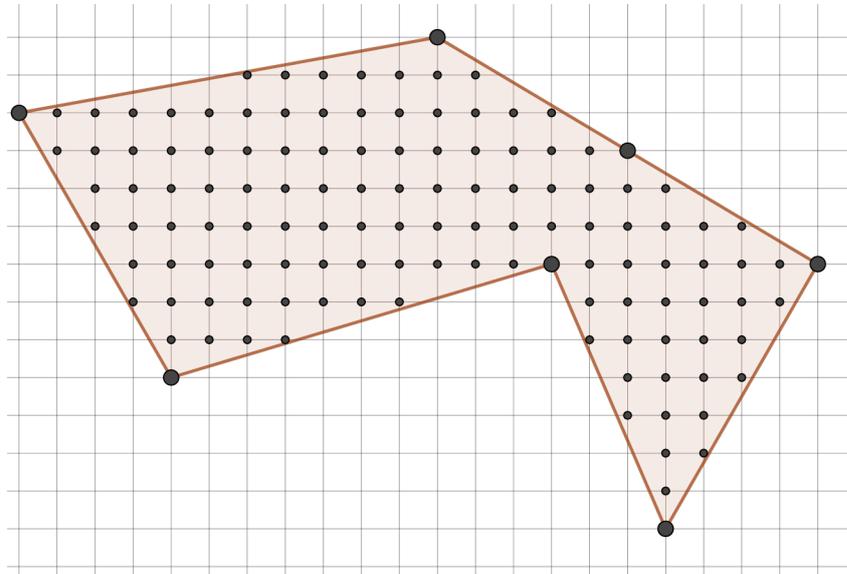
Teorema 4.4 (Teorema de Pick). *A área limitada por um polígono \mathcal{P} cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão $i + b/2 - 1$, em que i é o número de pontos da rede no interior de \mathcal{P} e b é o número de pontos sobre \mathcal{P} .*

Pick fez contribuições importantes a Análise e a Geometria Diferencial. Foi morto por volta de 1943 no campo de concentração nazista de *Theresienstadt*, localizado atualmente na República Tcheca. O Teorema que leva seu nome foi publicado em 1899.

Na Figura 4.10 temos uma rede retangular com quadrados unitários de 1cm . Há 120 pontos no interior do polígono \mathcal{P} e 7 pontos de fronteira, portanto a área de \mathcal{P} é $A(\mathcal{P}) = 120 + 7/2 - 1 = 122,5\text{cm}^2$.

¹ b do inglês boundary.

Figura 4.10 – Aplicação da Fórmula de Pick.

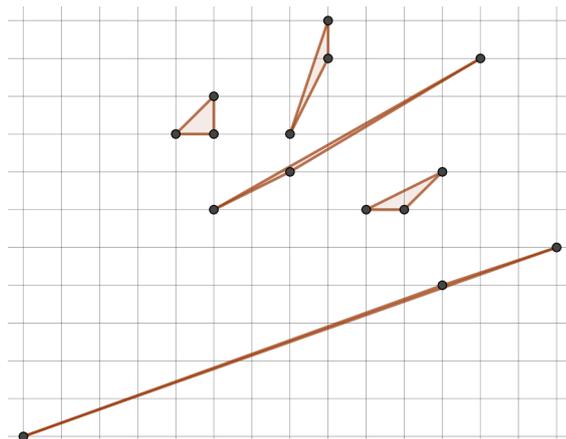


Fonte: produção do autor, 2018.

Para continuarmos a discussão, precisamos de uma definição.

Definição 4.5 (Triângulos primitivos). *Um triângulo em uma malha retangular diz-se primitivo quando não contém nenhum ponto da malha em seu interior e os únicos pontos de fronteira do triângulo são seus vértices (Figura 4.11).*

Figura 4.11 – Triângulos Primitivos



Fonte: produção do autor, 2018.

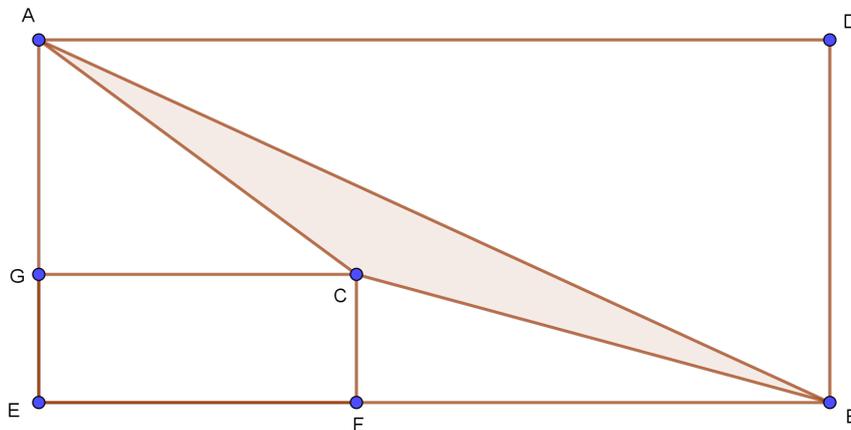
Demonstraremos o Teorema de Pick em duas etapas:

1. Demonstraremos que todo triângulo primitivo tem área $1/2$;
2. Demonstraremos que todo polígono simples pode ser decomposto em $2i + b - 2$ triângulos primitivos.

A primeira parte terá como base o que fora discutido em Liu (1979).

Seja ABC um triângulo primitivo e $ADBE$ o menor retângulo que o contém. Como o retângulo é minimal, cada um dos seus quatro lados devem passar por um vértice de ABC . Logo, *o princípio das casas dos pombos* força as figuras a compartilharem pelo menos um vértice. Além do mais, um dos lados do triângulo deve ser uma diagonal do retângulo, pois caso não fosse haveriam pontos da rede, diferentes de A , B e C na fronteira de ABC ou pontos da rede no interior de ABC , contrariando o fato de ABC ser primitivo (faça desenhos para visualizar essa situação). Obtemos a configuração da Figura 4.12 na situação mais geral o possível, onde AB é a diagonal do retângulo $EBDA$.

Figura 4.12 – Triângulos Primitivo: demonstrando o Teorema de Pick



Fonte: produção do autor, 2018.

Traçamos perpendiculares a BE e AE por C , respectivamente. Consideremos um sistema de coordenadas perpendiculares com origem no ponto E . Sejam p e q as coordenadas de F e B nesse sistema e r e s as coordenadas de G e A respectivamente. Teremos,

$$i(EBDA) = (q-1)(s-1)$$

Como ABC não contém outros pontos além de A e B temos,

$$i(EBA) = \frac{i(EBDA)}{2} = \frac{(q-1)(s-1)}{2}.$$

Temos também,

$$i(BCF) = \frac{(q-p-1)(r-1)}{2},$$

$$i(ACG) = \frac{(p-1)(s-r-1)}{2}.$$

Logo, $i(EBA) - i(BCF) - i(ACG) = pr$, pois ABC não contém pontos de rede em seu interior. Obtemos, com isso,

$$\frac{(q-1)(s-1)}{2} - \frac{(q-p-1)(r-1)}{2} - \frac{(p-1)(s-r-1)}{2} = pr.$$

Simplificando essa última equação obtemos,

$$qs - ps - qr = 1. \quad (4.1)$$

Finalmente, podemos calcular a área de ABC ,

$$A(ABC) = A(EBA) - A(BCF) - A(ACG) - A(EFCG) = \frac{qs}{2} - \frac{(q-p)r}{2} - \frac{p(s-r)}{2} - pr.$$

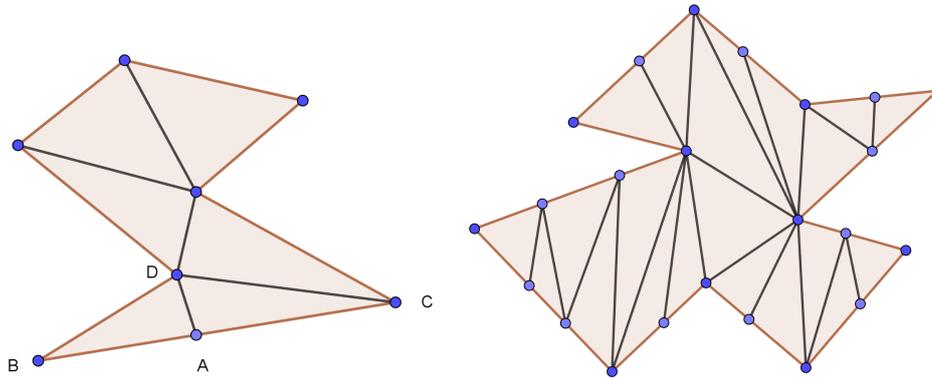
Simplificando e usando 4.1, obtemos,

$$A(ABC) = \frac{qs - ps - qr}{2} = \frac{1}{2}.$$

Isso completa a parte 1 da demonstração do Teorema de Pick.

Para a parte 2 teremos que, em um certo sentido, generalizar a noção de triangularização dos polígonos simples. Primeiro consideraremos vértices virtuais, isto é, pontos no interior dos lados do polígono considerados também como vértices. Seja um polígono \mathcal{P} com k_1 vértices e k_2 vértices virtuais. Vimos no Capítulo 3 que cada triangularização de \mathcal{P} o decompõe em $k_1 - 2$ triângulos. Cada vértice virtual transforma um triângulo da triangularização em dois outros, aumentando em 1 a quantidade de triângulos. Na Figura 4.13a o vértice virtual A decompõe o triângulo BCD da triangularização em dois outros. Considerando todos os vértices virtuais, a triangularização terá $(k_1 - 2) + k_2 = (k_1 + k_2) - 2 = b - 2$, onde b é a quantidade total de vértices, virtuais ou não, sobre os lados de \mathcal{P} (Figura 4.13b).

Figura 4.13 – Triangularização de um polígono simples com vértices virtuais.



(a) Um vértice virtual sobre o lado BC . (b) Exemplo de triangularização com vértices virtuais.

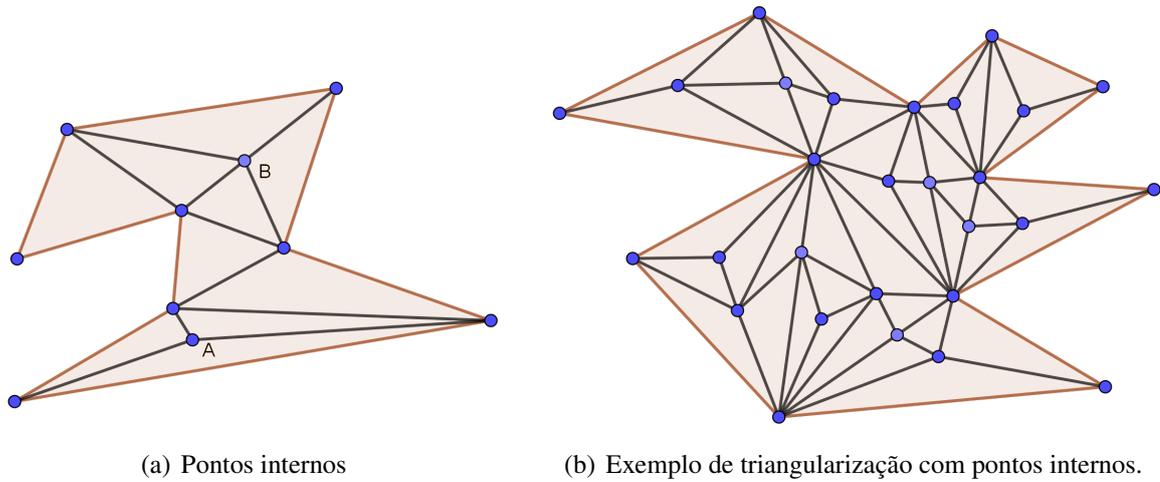
Fonte: produção do autor, 2018.

Consideraremos na sequência que existam pontos no interior do polígono \mathcal{P} , que serão também usados para obter uma triangularização. Teremos duas situações: quando os pontos estão no interior dos triângulos da triangularização considerada, ou quando estão sobre o interior das diagonais da triangularização. Na Figura 4.14a o ponto A está no interior de um triângulo da triangularização e o ponto B está sobre uma diagonal.

Quando acontece a primeira situação, o ponto interno é ligado aos vértices do triângulo em que o ponto se encontra. O triângulo original será decomposto em três triângulos menores e serão acrescentados dois triângulos a mais na contagem. Na Figura 4.14a o ponto A , decompõe o respectivo triângulo em três triângulos menores.

Quando acontece a segunda situação, ligamos o ponto em questão aos vértices opostos dos dois triângulos da triangularização que tem a referida diagonal como lado (o ponto B da Figura 4.14a). Cada triângulo será decomposto em dois triângulos. Serão acrescentados 2 triângulos no número total de triangularizações para cada ponto no interior das diagonais.

Figura 4.14 – Triangularização de um polígono simples com pontos internos.



Fonte: produção do autor, 2018.

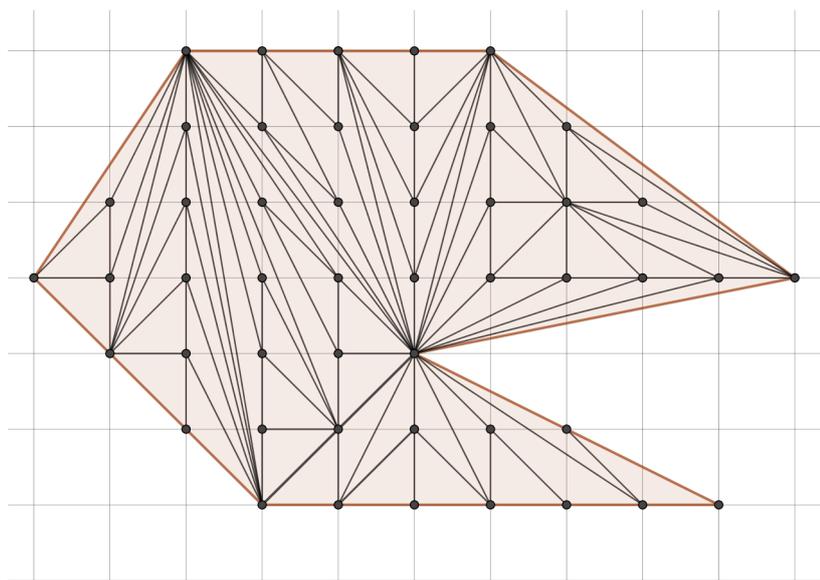
Portanto, os pontos internos acrescentarão mais $2i$ triângulos na triangularização inicial, onde i é a quantidade de pontos internos ao polígono \mathcal{P} .

Considerando as contribuições dos vértices virtuais e dos pontos internos, teremos nessa triangularização generalizada o resultado a seguir.

Teorema 4.5 (Generalização da Triangularização). *Um polígono simples com b vértices, virtuais ou não, e i pontos internos, pode ser triangularizado em $2i + b - 2$ triângulos.*

Voltando aos polígonos reticulares, notamos que sempre é possível triangularizar o polígono simples da forma como discutimos. Para tal, consideremos os pontos da malha no interior de \mathcal{P} e os pontos da malha sobre o polígono, que não são vértices. Esses últimos serão os vértices virtuais. Veja a Figura 4.15 para um exemplo.

Figura 4.15 – Triangularizando um polígono reticular.

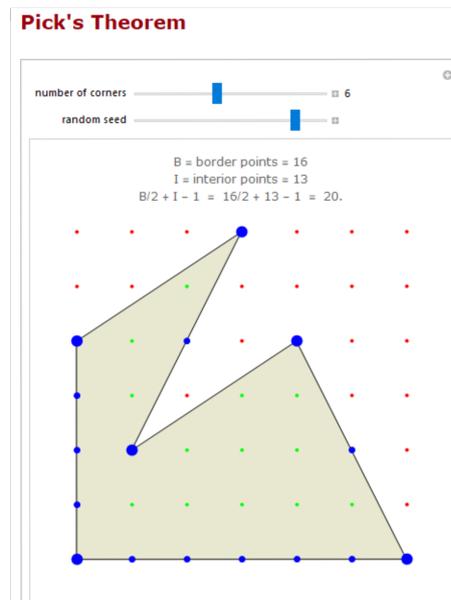


Fonte: produção do autor, 2018.

Usando o Teorema 4.5, teremos $2i + b - 2$ triângulos primitivos. Logo, a área limitada pelo polígono reticular é dada por $A(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}(2i + b - 2) = i + \frac{b}{2} - 1$. Com isso demonstramos a segunda parte do Teorema de Pick e finalizamos sua demonstração.

Atividades em sala de aula com o Geoplano podem ser mediadas para exemplificar o Teorema de Pick. O Geoplano é um tabuleiro, feito geralmente de madeira, consistindo de uma malha de quadrados de mesma dimensão. Sobre os vértices dos quadrados são feitos furos nos quais inserem-se pinos, que ficam com um sobressalto de aproximadamente 2cm quando colocados nos furos. Sobre os pinos são colocados elásticos tensionados que formam polígonos. Uma alternativa ao geoplano tradicional é o geoplano virtual. A Figura 4.16 mostra um exemplo de utilização de um projeto de um software de código aberto chamado *Wolfram CDF*. Esses projetos usam dinâmica computacional para clarificar conceitos em ciências, tecnologias, arte, matemática, finanças e vários outros campos do saber. O *Wolfram Demonstrations Projects* contém em sua página na internet uma plataforma com uma quantidade expressiva de projetos, criados por especialistas em diversas áreas, com grande aplicabilidade em salas de aula. Aconselhamos os professores de ensino médio o uso dessa ferramenta em suas aulas de matemática.

Figura 4.16 – Geoplano virtual



Fonte: Jr (2018).

Analisando a Figura 4.16, podemos fazer uma estimativa da área contando os quadrados que estão completamente contidos na região poligonal. Na sequência, devem ser feitas comparações entre o valor aproximado da área e o obtido pela Fórmula de Pick. Formas de justificar a fórmula devem ser incentivadas pelo professor. Dessa forma, trabalhando com uma rede de quadrados, podemos apresentar o conceito de área para polígonos. Usando o Teorema de Pick, podemos exemplificar mais casos até que fique claro as principais propriedades da noção de área.

4.2 CENTRO DE MASSA

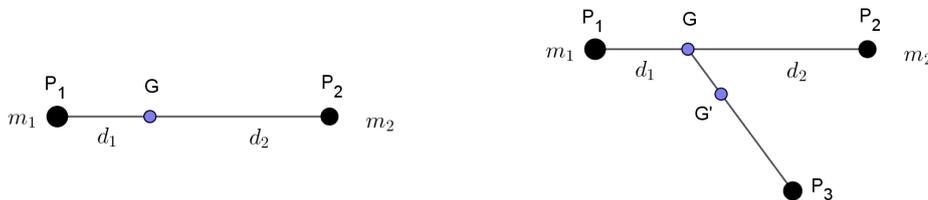
Uma importante noção física com várias aplicações práticas é a de centro de massa de uma figura. Por exemplo, na mecânica, o movimento de um sistema de duas partículas pontuais de massas m_1 e m_2 pode ser analisado como um movimento de uma partícula de massa $m_1 + m_2$ que segue a trajetória do centro de massa das partículas. Embora a complexidade do sistema das duas partículas possa ser grande, olhando para o centro de massa, tudo se passa como se o movimento fosse somente de uma partícula. Aprendemos desde cedo que uma criança maior em uma gangorra deve deslocar-se em direção ao fulcro, enquanto a criança menor se afasta para que a gangorra se mantenha em equilíbrio. A situação de equilíbrio estático é logo atingida pelas crianças e é aquela em que o fulcro é o centro de massa do sistema. Mantemos esse experimento em mente, porém desprezando a gangorra e considerando apenas as partículas com massas m_1 e m_2 ocupando as posições P_1 e P_2 . O centro de massa localiza-se no ponto G , entre os pontos P_1 e

P_2 , dado pelo *Princípio de Equilíbrio de Arquimedes*, que é a seguinte condição: $m_1 d_1 = m_2 d_2$, onde d_1 e d_2 são as distâncias dos pontos P_1 e P_2 a G (veja Figura 4.17a). Considerando um sistema de coordenadas para a reta por P_1 e P_2 , do qual P_1 tem coordenada x_1 , P_2 coordenada x_2 e G coordenada x_G , teremos $m_1(x_G - x_1) = m_2(x_2 - x_G)$ e

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Essa equação mostra que a coordenada do centro de massa é a média ponderada das coordenadas das partículas, em que os “pesos” são as massas de cada partícula.

Figura 4.17 – Princípio de equilíbrio de Arquimedes



(a) Princípio de equilíbrio com duas partículas. (b) Princípio de equilíbrio com três partículas.

Fonte: produção do autor, 2018.

Interpretando o Princípio de equilíbrio por meio de um sistema de coordenadas para o plano, em uma linguagem vetorial, temos $m_1 \overrightarrow{GP_1} + m_2 \overrightarrow{GP_2} = \vec{0}$, em que $G = \frac{m_1 P_1 + m_2 P_2}{m_1 + m_2}$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Substituindo em G uma partícula de massa $m_1 + m_2$, poderemos considerar uma terceira partícula, conforme Figura 4.17b na qual aplicaremos novamente o Princípio de equilíbrio de Arquimedes para obter

$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{G'G} + m_3 \overrightarrow{GP_3} = \vec{0},$$

$$(m_1 + m_2)(G - G') + m_3(P_3 - G) = \vec{0},$$

Substituindo o valor de G e resolvendo a equação vetorial, obtemos o centro de massa G' para o sistema de três partículas,

$$G' = \frac{m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Não é difícil perceber que a ordem de escolha das partículas não importa. Generalizando para n partículas no plano, procedendo da mesma forma obtemos as equações para as coordenadas do centro de massa G ,

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (4.2)$$

Se as massas forem iguais as equações acima tornam-se,

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n n}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n n}. \quad (4.3)$$

Consideramos na sequência, uma figura Φ feita de uma chapa delgada (de espessura desprezível), na qual queremos calcular o centro de massa. Da forma como fizemos anteriormente, fixamos um sistema de coordenadas e dividimos o interior em pequenos retângulos R_i com pontos em seu interior de coordenadas (x_i, y_i) . A massa de cada retângulo pode ser aproximada pela função de densidade como $\rho(x_i, y_i)A(R_i)$, em que $A(R_i)$ é a área do retângulo R_i . Portanto, uma aproximação para o centro de massa, baseando-se nas equações 4.2 seria dada pelas coordenadas,

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i, y_i) A(R_i)}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) A(R_i)}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i, y_i) A(R_i)}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) A(R_i)}. \quad (4.4)$$

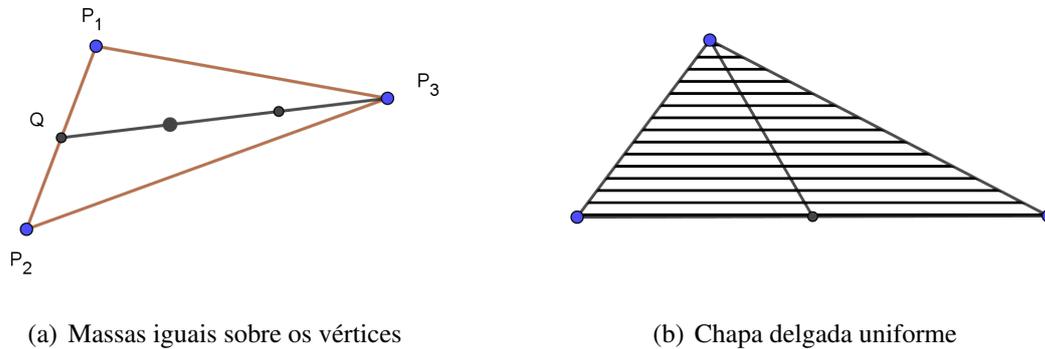
Se a chapa for uniforme, isto é, a densidade for constante, obtemos uma aproximação para o centro de massa dada por

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i A(R_i)}{\sum_{i=1}^n A(R_i)}, \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i A(R_i)}{\sum_{i=1}^n A(R_i)}. \quad (4.5)$$

Tomando o limite nessas aproximações obtemos, quando as integrais existem, as conhecidas fórmulas para o cálculo das coordenadas do centro de massa. O leitor pode ver em Guidorizzi (2008, p.101) uma apresentação desses resultados.

Na sequência iremos discutir como calcular o centro de massa de uma chapa delgada homogênea que tem a forma de um polígono. Faremos comparações com o cálculo do centro de massa de um sistema composto por massas iguais localizadas sobre os vértices do polígono. Para o triângulo $P_1P_2P_3$ da Figura 4.18a, o centro de massa das partículas sobre os pontos P_1 e P_2 é o ponto médio Q de P_1P_2 . Considerando agora o centro de massa de uma partícula de massa $2m$ posicionada em Q e a terceira partícula de massa m em P_3 . O centro de massa estará, portanto, a $2/3$ de P_3 e a $1/3$ de M (Figura 4.18a). Considerando uma chapa triangular delgada e uniforme, podemos imaginá-la como composta de pequenas fatias retangulares paralelas a um dos lados, conforme podemos ver na Figura 4.18b. Os centros de massa das fatias estão sobre a mediana do lado correspondente, de onde podemos concluir que o centro de massa do triângulo está sobre essa linha. Imaginando o mesmo processo considerando outro lado, percebemos que o ponto também estará sobre a outra mediana.

Figura 4.18 – Centro de massa do triângulo.



(a) Massas iguais sobre os vértices

(b) Chapa delgada uniforme

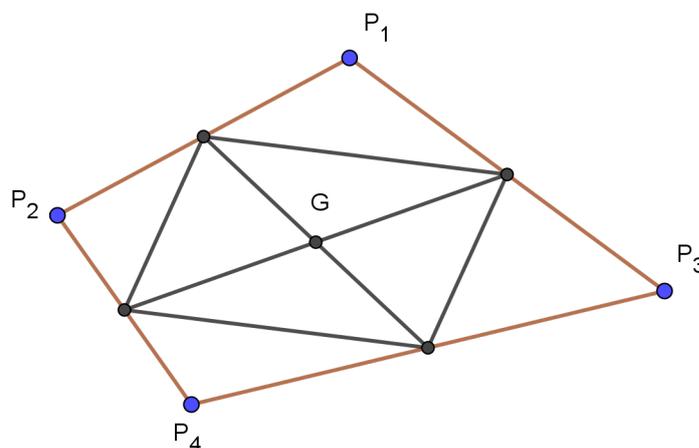
Fonte: produção do autor, 2018.

Portanto, o ponto de encontro das medianas é o centro de massa da chapa delgada uniforme triangular. Da geometria elementar sabemos que esse ponto é o baricentro e, novamente, está em cada mediana a $2/3$ do vértice e a $1/3$ do lado oposto. Isso quer dizer que o centro de massa do sistema de partículas de mesma massa sobre os vértices de um triângulo é o mesmo de uma chapa uniforme feita sobre o mesmo triângulo.

Questionamos se para os polígonos com um número maior de lados, a determinação do centro de massa do sistema de massas iguais sobre o vértice, continuará sendo igual ao da chapa delgada homogênea formada pelo mesmo polígono. Vamos estudar o quadrilátero.

Para o caso das partículas, consideraremos o quadrilátero simples $P_1P_2P_3P_4$ e os pontos médios de seus lados. Constitui um exercício fácil para o leitor mostrar que os pontos médios formarão um paralelogramo. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Varignon*, devido ao matemático Francês Pierre Varignon (1654-1722). O ponto de encontro das diagonais do paralelogramo de Varignon, pela simetria do problema, é o centro de massa do sistema (Figura 4.19).

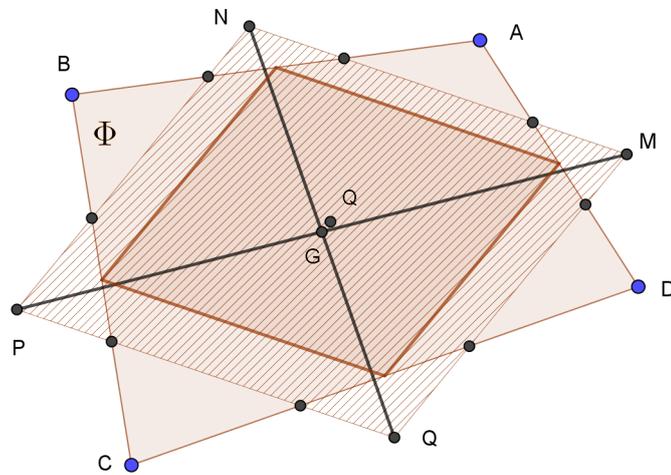
Figura 4.19 – Centro de massa do quadrilátero: caso convexo



Fonte: produção do autor, 2018.

Para a chapa delgada homogênea, um Teorema devido a Ferdinand Wittenbauer (1857-1922), diz que o centro de gravidade da figura Φ , limitada pelo quadrilátero $ABCD$, é obtido trisseccionando cada lado e prolongando os segmentos formados pelos pontos obtidos que estão mais próximos do vértice. Com essa construção obtemos o paralelogramo de Wittenbauer $MNPQ$, conforme Figura 4.20. O ponto de encontro das diagonais do paralelogramo de Wittenbauer é o centro de massa da chapa. Na mesma Figura 4.20 mostramos o ponto Q , centro do paralelogramo formado pelos pontos médios dos lados de $ABCD$. Vemos que os pontos não coincidem.

Figura 4.20 – Paralelogramo de Wittenbauer

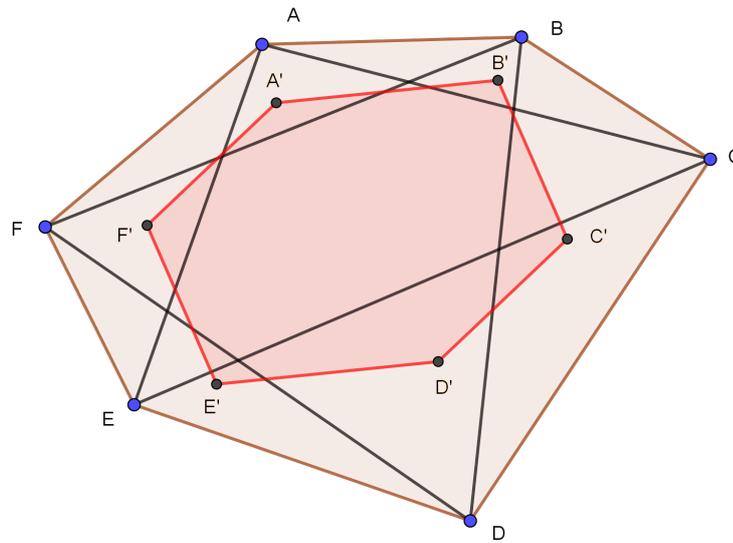


Fonte: produção do autor, 2018.

Portanto, para o quadrilátero, os centros em questão não são obtidos da mesma forma. As dificuldades apresentadas mostram que não é tão fácil obter matematicamente o centro de massa de uma região homogênea qualquer limitada por um polígono. Uma alternativa é usar uma triangularização do polígono. Esse processo passaremos a descrever na sequência. Antes, porém, mostraremos um exemplo de uso do centro de massa na obtenção de uma propriedade interessante dos hexágonos.

Exemplo 4.1. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo qualquer, podendo ser irregular. Consideremos os baricentros A' , B' , C' , D' , E' , F' dos triângulos FAB , ABC , BCD , CDE , DEF , EFA , respectivamente. Forma-se um outro hexágono convexo $A'B'C'D'E'F'$ tal que $A'B' \parallel E'D'$, $B'C' \parallel E'F'$ e $C'D' \parallel F'A'$. Além disso, $\overline{A'B'} = \overline{E'D'}$, $\overline{B'C'} = \overline{E'F'}$, $\overline{C'D'} = \overline{F'A'}$. Por analogia as propriedades do paralelogramo, $A'B'C'D'E'F'$ é chamado de parexágono ou parhexágono (Figura 4.21). Os resultados apresentados nesse exemplo podem ser consultados em Kasner e Newman (1994).*

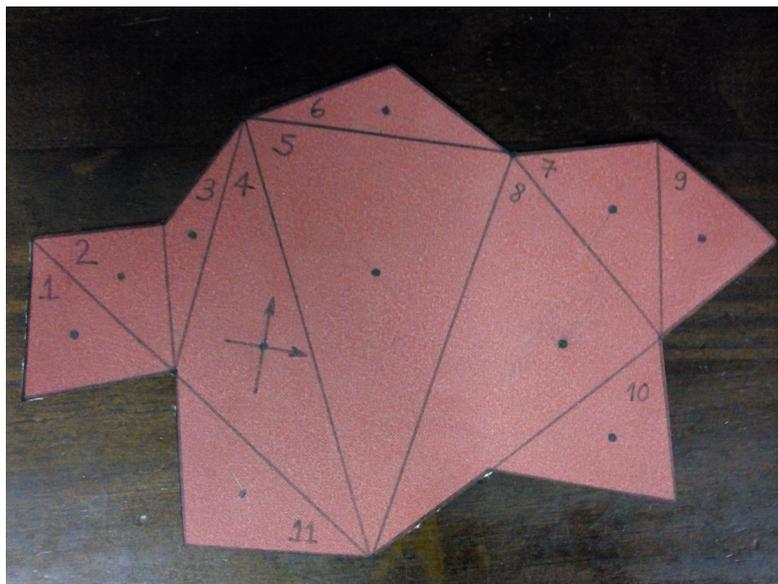
Figura 4.21 – Baricentro e o parexágono



Fonte: produção do autor, 2018.

Aplicaremos o que discutimos para obter o centro de massa de um polígono de cartolina. A Figura 4.22 mostra um tal polígono e uma de suas triangularizações. Escolhemos uma triangularização que tenha triângulos com lados maiores e numeramos cada um deles. Localizamos o baricentro de cada triângulo e consideraremos um sistema de coordenadas ortogonais com centro no baricentro do triângulo número 4, conforme Figura 4.22.

Figura 4.22 – Centro de massa de um polígono de cartolina



Fonte: produção do autor, 2018.

A Tabela 4.1 mostra as coordenadas dos baricentros juntamente com as medidas dos lados e a área de cada um dos triângulos.

Tabela 4.1 – Dados dos triângulos do polígono da Figura 4.22

	$l_1(cm)$	$l_2(cm)$	$l_3(cm)$	Área(cm^2)	Coordenadas do centro de massa
T_1	5,30	4,40	4,10	8,79	(-5,00; -0,65)
T_2	3,60	4,00	5,30	7,20	(-4,15; 1,20)
T_3	7,20	4,00	3,70	4,91	(-2,50; 2,70)
T_4	12,50	7,20	7,25	22,65	(0;0)
T_5	12,50	7,40	11,70	42,38	(2,60; 2,60)
T_6	7,40	4,35	4,10	7,54	(2,00; 7,00)
T_7	6,55	4,05	5,50	11,10	(8,70; 5,50)
T_8	11,70	9,90	6,55	32,41	(8,00; 1,6)
T_9	5,50	4,50	4,40	9,62	(11,40; 5,15)
T_{10}	5,95	5,25	4,60	11,61	(9,80; -0,70)
T_{11}	7,20	4,90	4,55	11,00	(0,2; -3,90)

Fonte: Produção do autor.

O cálculo do centro de massa do polígono recai no cálculo do centro de massas pontuais localizadas nos baricentros de cada triângulo e com massa igual a massa de cada triângulo, de acordo com as equações 4.5. Portanto, cada coordenada do centro de massa do polígono é dada pela média ponderada das coordenadas dos baricentros com “pesos” iguais a área de cada triângulo. Usando os dados da Tabela 4.1, obtemos

$$\sum_{i=1} A(T_i) = 8,79 + 7,20 + 4,91 + 22,65 + 42,38 + 7,54 + 11,10 + 32,41 + 9,62 + 11,61 + 11,0 = 169,21.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} x_i A(T_i) &= (-5,0) \cdot (8,79) + (-4,15) \cdot (7,20) + (-2,50) \cdot (4,91) + (0) \cdot (22,65) + \\ &+ (2,60) \cdot (42,38) + (2,00) \cdot (7,54) + (8,70) \cdot (11,10) + (8,00) \cdot (32,41) + (11,40) \cdot (9,62) + (9,80) \cdot \\ &+ (11,61) + (0,20) \cdot (11,00) = -43,95 - 29,88 - 12,28 + 0 + 110,19 + 15,08 + 96,57 + 259,28 + \\ &+ 109,67 + 113,78 + 2,20 = 520,66. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} y_i A(T_i) &= (-0,65) \cdot (8,79) + (1,20) \cdot (7,20) + (2,70) \cdot (4,91) + (0) \cdot (22,65) + (2,60) \cdot \\ &+ (42,38) + (7,00) \cdot (7,54) + (5,50) \cdot (11,10) + (1,6) \cdot (32,41) + (5,15) \cdot (9,62) + (-0,70) \cdot (11,61) + \\ &+ (-3,90) \cdot (11,0) = -5,71 + 8,64 + 13,26 + 0 + 110,19 + 52,78 + 61,05 + 51,86 + 49,54 - \\ &- 8,13 - 42,90 = 290,58 \end{aligned}$$

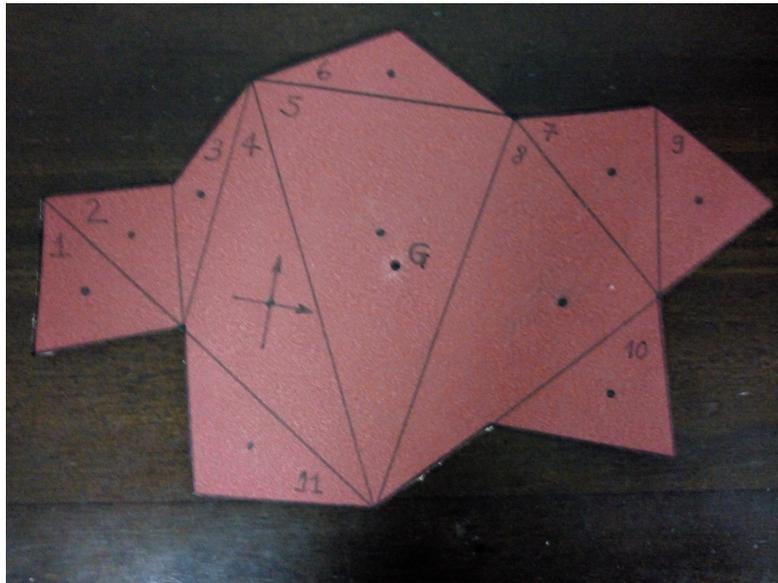
Portanto,

$$x_G = \frac{520,66}{169,21} = 3,10$$

$$y_G = \frac{290,58}{169,21} = 1,72$$

O centro de massa $G(3,10; 1,72)$ está marcado na Figura 4.23 no interior do triângulo número 5, o que é bastante intuitivo.

Figura 4.23 – Localização do centro de massa de um polígono.



Fonte: produção do autor, 2018.

Com essa técnica podemos obter uma aproximação do centro de massa de uma figura qualquer usando uma aproximação poligonal. Uma situação interessante sobre centro de massas com aplicabilidade em salas de aula de Ensino Médio é a obtenção do centro demográfico de um estado ou país. Tecnicamente, o centro de massa da distribuição do sistema de pontos constituídos por todos os habitantes do território. A massa de cada habitante é considerada igual, para que o problema se torne geométrico, e as pessoas estarão concentradas na sede de cada prefeitura. Obviamente, o centro demográfico irá diferir do centro de massa do mapa (Portanto, os experimentos com fios de prumo, comumente feitos nas salas de aula, não poderiam ser usados! Somente as técnicas matemáticas que discutimos). Obtendo dados de recenseamento ao longo de décadas, e calculando o centro demográfico para cada conjunto de dados, seríamos capazes de tirar conclusões interessantes relacionadas a migrações, condições sócio econômicas, densidade populacional, etc. Os dados levantariam questões a serem verificadas, que poderiam nos revelar situações anteriormente despercebidas em uma análise preliminar. Sugerimos esse tipo de atividade pela riqueza de informações que geraria e por seu caráter interdisciplinar. Para ter uma ideia de como executar essa tarefa, o leitor pode ler Sá e Rocha (2012, p.92).

4.3 PROBLEMAS COMBINATÓRIOS E O TEOREMA DA GALERIA DE ARTE.

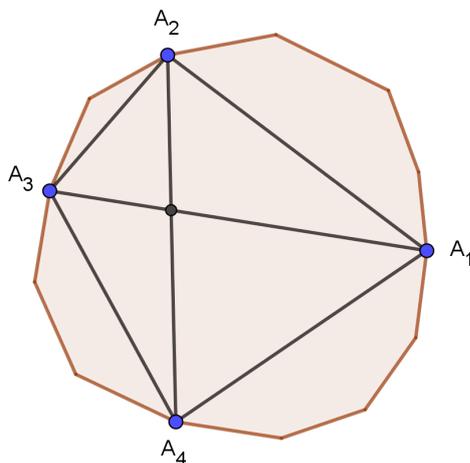
Nessa seção iremos apresentar problemas de geometria combinatória que serão resolvidos usando o conhecimento que adquirimos no Capítulo 3. Discutiremos o número possível de triangularizações de um polígono convexo e estimaremos o número de triangularizações de um polígono qualquer. Fecharemos a seção com a demonstração do Teorema das Três Cores, um

belo Teorema de Geometria Combinatória que facilitará significativamente a demonstração do Teorema da Galeria de Arte. O Teorema da Galeria de Arte nos dará uma condição suficiente sobre a quantidade mínima de guardas para cobrir uma Galeria de Arte, conforme discutiremos. No Capítulo 5 estudaremos um tipo de polígono, não necessariamente convexo, que é estrelado relativamente a um ponto. Para esse tipo de polígono é necessário apenas um guarda para cobrir uma galeria de arte. Iniciamos com um problema de contagem dos pontos de encontro de diagonais de um polígono convexo.

Problema 4.1. *Em quantos pontos as diagonais de um polígono convexo \mathcal{P} de n lados se encontram se não há três delas intersectando-se dentro de \mathcal{P} ?*

Sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 quaisquer vértices de \mathcal{P} enumerados, com ordem de enumeração de acordo com o sentido de percurso anti-horário e Φ a região limitada por \mathcal{P} . As retas A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 e A_4A_1 ou são lados de \mathcal{P} ou são diagonais. A reta A_1A_2 divide o plano em dois semiplanos, um dos quais, \mathcal{H}_1 , contém os vértices A_3 e A_4 . A intersecção de Φ e \mathcal{H}_1 é convexa, por serem ambos os conjuntos convexos. Repetindo o processo com os outros três lados, concluímos que $A_1A_2A_3A_4$ é um quadrilátero convexo com diagonais A_1A_3 e A_2A_4 . A diagonal A_1A_3 irá intersectar a diagonal A_2A_4 , (Teorema 3.3), e não há outros pares de diagonais de \mathcal{P} unindo esses quatro pontos do n -ágono, por causa da convexidade de $A_1A_2A_3A_4$ (Figura 4.24).

Figura 4.24 – Ilustração do problema 4.1



Fonte: produção do autor, 2018.

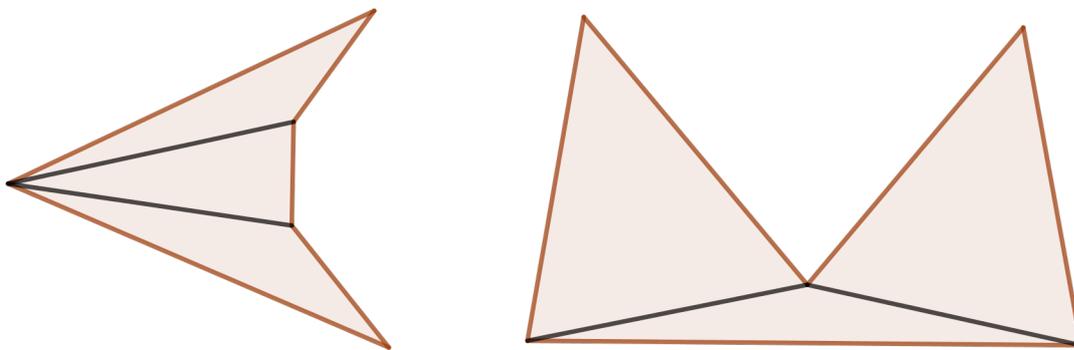
Ao associar cada conjunto de quatro vértices de \mathcal{P} ao ponto de encontro das diagonais do quadrilátero convexo formado, obteremos uma correspondência biunívoca entre os pontos da intersecção de diagonais de \mathcal{P} e o conjunto formado por cada grupo de quatro vértices de \mathcal{P} . Portanto, o número de pontos de intersecção das diagonais de \mathcal{P} é igual ao número de formas que podemos escolher quatro dos n vértices de \mathcal{P} , isto é, o número de combinações de n elementos tomados quatro a quatro, que é igual a

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Isso era o que queríamos resolver.

No capítulo 3 mostramos que todos os polígonos simples podem ser triangularizados. A pergunta que segue ao problema da triangularização é a seguinte: *Dado um polígono simples qualquer, de quantas formas podemos triangularizá-lo?* Para um quadrilátero convexo o Lema 3.1 nos informa que há duas triangularizações e para um não convexo apenas uma. Na Figura 4.25 apresentamos dois tipos de pentágonos que admitem apenas uma triangularização. O hexágono convexo tem 14 tipos diferentes de triangularizações, conforme Figura 3.18. Com esses exemplos, podemos perceber que o número de triangularizações não depende da quantidade de vértices reflexos. Veremos que para um polígono convexo de n lados há uma fórmula fechada para o número de triangularizações em função de n . Porém, para polígonos não convexos, segundo O'Rourke e Devados (2011), é ainda um problema em aberto para a matemática identificar polígonos com determinadas características que levam a fórmulas fechadas para o número de triangularizações em função dessas características.

Figura 4.25 – Pentágonos que admitem apenas uma triangularização



Fonte: produção do autor, 2018.

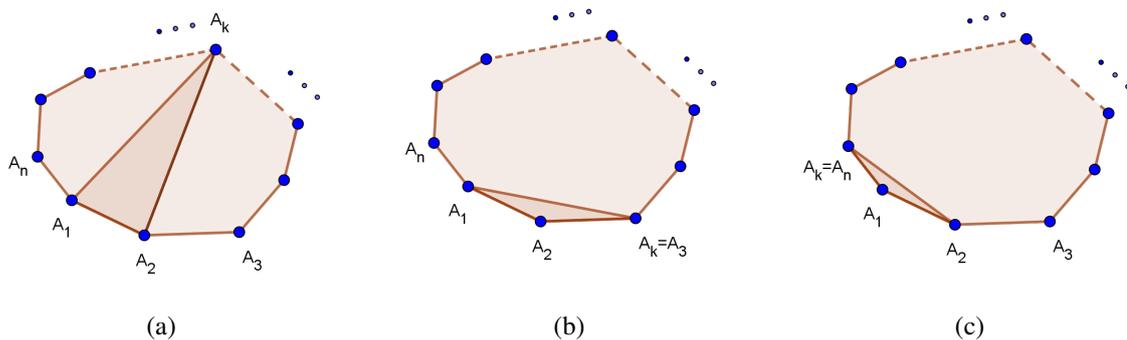
No próximo problema resolveremos o problema mais fácil de calcular a quantidade de triangularizações em função do número de lados para os polígonos convexos.

Problema 4.2 (Problema de Euler da triangularização). *De quantas formas um polígono convexo de n lados pode ser triangularizado?*

Leonhard Euler propôs esse problema em 1751 para o matemático Christian Goldbach. Segundo Dorrie (1965, p.21), Euler afirmou que em sua resolução empregara um processo de indução que se tornara muito laborioso. Mostrando que, apesar da aparência, esse problema apresenta dificuldades significantes em sua resolução quando aplica-se indução diretamente.

Mostraremos como obter uma equação de recorrência para o caso e a resolveremos de uma forma mais simples do que a clássica, utilizando os números de Catalan (veja essa demonstração em Dorrie (1965)). A resolução que apresentaremos consta em Yaglom e Yaglom (1987). Denotaremos por T_n o número possível de triangularizações do polígono convexo \mathcal{P} de n lados. Nos casos mais simples $n = 4, 5$ e 6 obtemos os números de divisões $T_4 = 2$, $T_5 = 5$ e $T_6 = 14$. Mesmo não havendo triangularização no sentido de nossa definição, convencionaremos que $T_2 = T_3 = 1$ (essa escolha evita discussões de casos particulares como os que aparecem na Figura 4.26b e Figura 4.26c). Deduziremos uma equação de recorrência para T_n em função de T_2 , T_3, \dots, T_{n-1} . Seleccionamos um lado de \mathcal{P} , por exemplo, A_1A_2 . Quando \mathcal{P} é decomposto em triângulos, este lado ocorre em um dos triângulos e os vértices restantes podem ser um dos A_k , $3 \leq k \leq n$. Na Figura 4.26 mostramos as possibilidades como A_1A_2 pode estar em um triângulo da decomposição, dependendo da escolha de k .

Figura 4.26 – Ilustração do Problema de Euler.



Fonte: produção do autor, 2018.

A diagonal A_2A_k , quando existe (veja Figura 4.26a), divide \mathcal{P} em dois polígonos convexos um dos quais é o polígono $A_2A_3 \cdots A_k$. Este polígono pode ser dividido em triângulos de T_{k-1} formas, pois tem $k - 1$ vértices. Similarmente a diagonal A_1A_k divide \mathcal{P} em dois polígonos convexos menores um dos quais é o $A_kA_{k+1} \cdots A_nA_1$, que pode ser dividido em T_{n-k+2} formas. Claramente essa é uma decomposição de \mathcal{P} no qual ocorre o triângulo $A_1A_2A_k$. Portanto, o número de decomposições de \mathcal{P} nas quais esse triângulo ocorre é $T_{k-1} \cdot T_{n-k+2}$. Atribuindo a k os valores de 3 até n e somando, obtemos

$$T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + \cdots + T_{n-2}T_3 + T_{n-1}T_2. \quad (4.6)$$

Considerando um polígono convexo de $n + 1$ lados, obtemos de forma análoga,

$$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} \cdots + T_{n-1}T_3 + T_nT_2,$$

$$T_{n+1} - 2T_n = T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3. \quad (4.7)$$

Agora, calculamos o número de decomposições de \mathcal{P} nas quais a diagonal A_1A_k aparece. Essa diagonal divide \mathcal{P} no k -ágono $A_1A_2 \cdots A_k$ e no $(n - k + 2)$ -ágono $A_kA_{k+1} \cdots A_nA_1$. O primeiro desses dois polígonos pode ser decomposto em triângulos de T_k formas e o segundo de T_{n-k+2} formas. Logo, o número de decomposições de \mathcal{P} que tem a diagonal A_1A_k é igual a T_kT_{n-k+2} e a soma das decomposições que tem todas as $n - 2$ diagonais que partem de A_1 é

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3. \quad (4.8)$$

Fazendo os mesmos cálculos para cada um dos outros vértices, obtemos o mesmo valor da equação 4.8. Como cada diagonal aparece em duas dessas somas, uma em cada um dos vértices da diagonal, a soma do número de decomposições que envolve cada uma das diagonais, vistas separadamente, é

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3). \quad (4.9)$$

Nessa soma contamos mais do que o número total de decomposições do n -ágono. No Teorema 3.8 o número de diagonais que figuram em cada decomposição é $n - 3$, portanto em 4.9, cada decomposição foi contada $n - 3$ vezes. Assim sendo,

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3) = (n - 3)T_n. \quad (4.10)$$

Substituindo a equação 4.6 em 4.10 obtemos, $\frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n) = (n - 3)T_n$, de onde chegamos na equação de recorrência,

$$T_{n+1} = \frac{2(2n - 3)}{n}T_n, \quad (4.11)$$

para todo $n \geq 3$ e $T_3 = 1$. Vemos que $T_3 = 1$, $T_4 = \frac{2 \cdot 3}{3}$, $T_5 = \frac{2 \cdot 5}{4}T_4$, \cdots , $T_n = \frac{2(2n-5)}{n-1}T_{n-1}$.

Multiplicando as equações e simplificando, obtemos a solução do problema de Euler,

$$T_n = \frac{2^{n-2} \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 5)}{(n - 1)!}. \quad (4.12)$$

Como primeiro exemplo, confirmamos o número de triangularizações do hexágono regular, $T_6 = 14$, que comentamos no Capítulo 3 e mostramos na Figura 3.18.

Agora que sabemos que os polígonos convexos de n lados têm uma quantidade de triangularizações T_n que depende do número n de lados, mostraremos que os polígonos não convexos de n lados tem sempre uma quantidade menor de triangularizações.

Problema 4.3. *Seja \mathcal{P} um polígono com n vértices. O número T'_n de triangulações de \mathcal{P} satisfaz a $1 \leq T'_n \leq T_n$, em que T_n é o número de triangulações de um polígono convexo com n vértices.*

Na discussão que antecedeu o Problema 4.2, vimos que existem polígonos com exatamente uma triangulação, portanto $1 \leq T_n$. Para o limite superior, seja \mathcal{P} um polígono qualquer com n vértices rotulados em ordem. Seja Q um polígono convexo também com n vértices rotulados similarmente. Cada diagonal interna de \mathcal{P} está em correspondência com uma diagonal (interna) de Q . Se duas diagonais de \mathcal{P} não se cruzam, então dado que Q é convexo, também não se cruzarão em Q . Portanto, cada triangulação de \mathcal{P} determina uma triangulação em Q , ambas com $n - 3$ diagonais. Portanto \mathcal{P} não pode ter mais triangulações do que Q , que pelo problema 4.2 é T_n . Isso era o que queríamos.

O seguinte problema, conhecido como *Problema da Galeria de Arte*, foi proposto por Victor Klee em 1973:

Problema 4.4 (Problema da Galeria de Arte.). *Qual o número mínimo de guardas **suficientes** para cobrir o interior de uma Galeria de Arte com n paredes?*

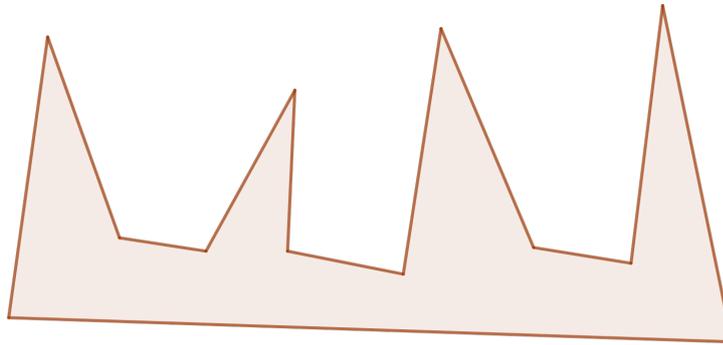
Nesse problema um guarda é considerado um ponto (guardas considerados estacionários) e uma planta de uma Galeria de Arte um polígono simples. Qualquer ponto P , da região Φ limitada por um polígono \mathcal{P} , cobre um ponto Q , quando o segmento PQ está inteiramente contido na região, conforme discussão da introdução do Capítulo 3. Esse problema pode ter uma formulação equivalente em termos de iluminação:

Problema 4.5 (Problema da Iluminação.). *Qual a quantidade mínima de lâmpadas **suficientes** para iluminar o interior de um museu com n paredes?*

O Problema da Galeria de Arte foi resolvido por Václav Chvátal em 1975. Chvátal provou que são **suficientes** $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas para cobrir um polígono simples qualquer de n lados. Notando que a condição não é **necessária**, pois para um polígono convexo um guarda cobre toda a região limitada pelo polígono.

Na Figura 4.27 temos um polígono simples com 12 lados e cada ponto que cobre uma orelha do polígono não cobre a outra. Nesse caso particular é necessário ter $\lfloor 12/3 \rfloor = 4$ pontos para cobrir o polígono. Pelo resultado de Chvátal, concluímos que esse número é suficiente.

Figura 4.27 – Problema da galeria de arte



Fonte: produção do autor, 2018.

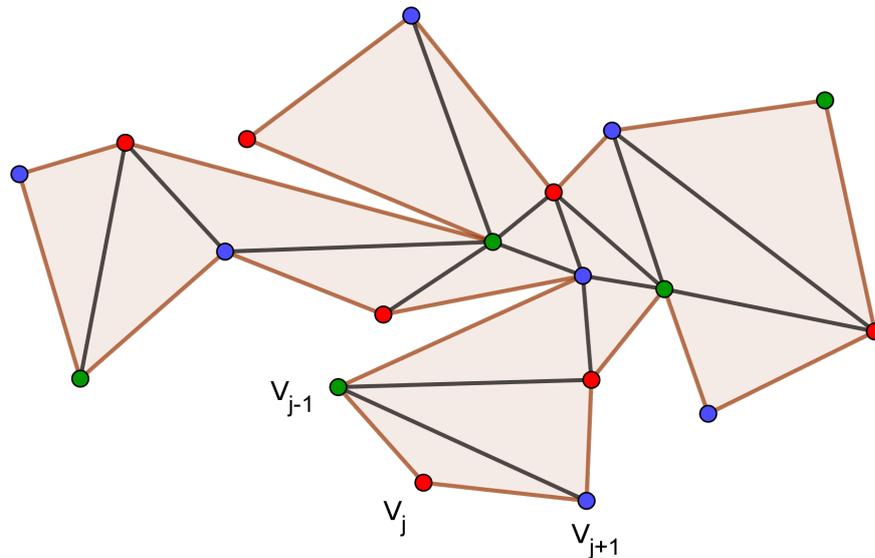
A resolução que faremos para o *Problema da Galeria de Arte* não será a mesma proposta por Chvátal. Será apresentada uma atribuída a Steve Fisk, proposta em 1978 e considerada uma das mais simples e elegantes. Ela usa o *Teorema da Três Cores* que apresentaremos na sequência.

Teorema 4.6 (Teorema das três cores.). *Para cada polígono simples e cada uma das suas triangulações, os vértices do polígono podem ser coloridos por três cores para que cada triângulo da triangulação tenha os vértices coloridos por cores diferentes.*

Demonstração. Provaremos o teorema por indução sobre o número n de vértices do polígono. Para $n = 3$, o teorema é trivialmente válido. Supomos que o teorema seja válido para qualquer polígono com $n - 1$ vértices. Considere um n -ágono \mathcal{P} qualquer com uma triangulação qualquer. Pelo Teorema 3.14, essa triangulação tem uma orelha com uma ponta no vértice V_j . Ao removermos esse triângulo do polígono \mathcal{P} , obtemos um polígono \mathcal{P}' com $n - 1$ vértices $V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_n$, com sua triangulação induzida pela triangulação de \mathcal{P} . Pela hipótese de indução, os vértices de \mathcal{P}' podem ser coloridos por três cores diferentes. Se considerarmos agora o polígono \mathcal{P} , vemos que todos os seus vértices estão coloridos, exceto o vértice V_j . O vértice V_j é um vértice de apenas um triângulo da triangulação de \mathcal{P} , o triângulo-orelha $V_{j-1}V_jV_{j+1}$. Os dois vértices restantes V_{j-1} e V_{j+1} já estão coloridos por duas cores, portanto podemos atribuir a terceira cor ao vértice V_j e obtemos assim a coloração adequada para \mathcal{P} (Figura 4.28). Isso demonstra o Teorema.

□

Figura 4.28 – Teorema das três cores



Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 4.7 (Teorema da Galeria de arte.). *São suficientes $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas para cobrir qualquer polígono simples de n lados, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ é a função menor inteiro.*

Demonstração. Sejam dados um polígono \mathcal{P} simples de n lados e uma de suas triangulações. Pelo *Teorema das Três Cores* os vértices de \mathcal{P} podem ser coloridos por três cores de forma que cada triângulo da triangulação tenham vértices com cores diferentes. Certamente, vértices de uma única cor guardam todos os triângulos, portanto guardam todo o polígono \mathcal{P} . Se associarmos a cor escolhida ao menor número de vértices necessários para guardar todo o polígono, precisamos de não mais do que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas para cobrir todo o polígono. Isso demonstra o teorema. \square

Uma condição necessária para a resolução do *Problema da Galeria de Arte* não é tão simples quanto a suficiência. Resolveremos no Capítulo 5 para um caso não trivial uma condição necessária para esse problema.

Abordamos aqui, apenas algumas aplicações da convexidade que podem ser utilizadas na educação básica, porém existem várias outras que podem ser utilizadas como, por exemplo, as curvas de largura constante que serão vistas no próximo Capítulo. No Capítulo 5 ampliaremos mais um pouco o estudo do tema convexidade, revisitando, de certa forma, a convexidade em figuras geométricas planas.

5 CONVEXIDADE REVISITADA

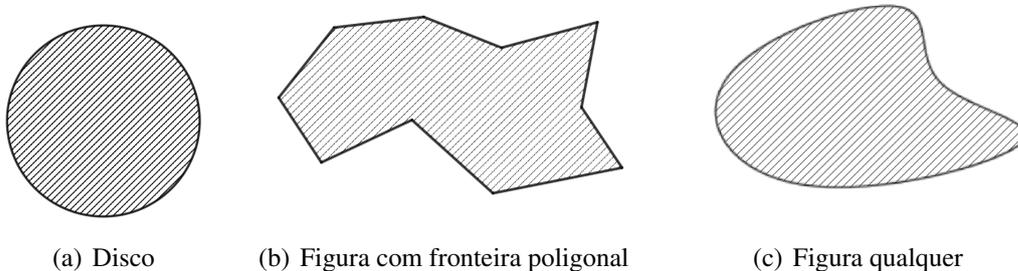
Nesse Capítulo estudaremos a convexidade em qualquer figura geométrica plana que caracterizamos no Capítulo 2: figuras limitadas por uma curva fechada simples. Nossa exposição terá como referência principal o livro *Convex Figures* de Yaglom e Boltyanskii (1961). Na Seção 5.1 encerraremos a caracterização das figuras planas iniciadas no Capítulo 2, de forma qualitativa, dentro do contexto da *Topologia Geométrica*, que é um dos ramos avançados da matemática que trata desse assunto. Depois apresentaremos as principais propriedades das figuras e curvas convexas. Na Seção 5.2 apresentaremos o importante *Teorema de Helly*, com várias aplicações em diversos ramos da matemática. O *Teorema de Helly* será usado para demonstrar o *Teorema de Krasnoselskii*, que encerrará a discussão sobre o problema da galeria de arte. Na discussão sobre o *Teorema de Helly*, mostraremos alguns resultados interessantes para exemplificar seu uso e exporemos alguns problemas relacionados em aberto para a matemática. A apresentação de resultados da matemática ainda não resolvidos envolvendo linguagem e teorias simples como a que estamos desenvolvendo, ajuda a mostrar o quão viva a matemática é, que resultados de fácil exposição podem resistir ao tempo. Encerraremos o capítulo com uma aplicação importante na Seção 5.3: as curvas de largura constante. Essas curvas além de serem exemplos interessantes da matemática, têm inúmeras aplicações práticas. Nossa intuição a respeito dessas curvas, acostumados que somos com o exemplo mais comum na prática, o círculo, pode nos levar a conclusões equivocadas. Discutiremos esses aspectos nessa última seção desse capítulo.

5.1 PROPRIEDADES GERAIS DAS CURVAS CONVEXAS.

No Capítulo 2 apelamos a intuição do leitor, sugerindo um movimento contínuo de um lápis em uma folha de papel, para explicar o que é uma curva simples. Pretendemos aqui aprofundar essa noção e terminarmos a caracterização das curvas no plano. Na geometria euclidiana estamos interessados em transformações de figuras que mantêm propriedades métricas invariáveis, tais como, as congruências, semelhanças, homotetias, que mantêm medidas de segmentos ou ângulos invariáveis. No contexto da geometria projetiva, segundo Courant e Robbins (2000, p.278), um grupo ainda maior de propriedades são invariantes sobre transformações projetivas. Percebemos que de uma forma geral, as figuras com que lidamos nesse trabalho, quando comparadas umas com as outras, não mantêm propriedades como essas invariáveis. Mas, então, existem algumas propriedades que persistem a transformações tão drásticas como aquelas que

transformam um disco em uma figura limitada por um polígono (Figura 5.1b) ou em uma figura limitada por uma curva simples fechada qualquer (Figura 5.1c)? A resposta é sim!

Figura 5.1 – Transformações do disco via homeomorfismo.



Fonte: produção do autor, 2018.

Para motivarmos uma definição formal, apelaremos novamente a intuição. Imagine que o disco da Figura 5.1 seja feito de borracha, que possa ser esticado sem se romper e que não seja possível colar nenhum ponto sobre outro. Uma transformação desse tipo é chamada de *deformação contínua*. As deformações contínuas estabelecem uma relação biunívoca entre pontos de duas figuras. Percebemos que não rasgar e não colar significam que os pontos que estão próximos na figura inicial manter-se-ão próximos na figura final. Isso motiva a seguinte definição formal.

Definição 5.1 (Homeomorfismos). *Uma transformação $f : A \rightarrow B$ é chamada de homeomorfismo se for bijetiva e bicontínua, i. e., tanto f quanto f^{-1} são funções contínuas. Se existe um homeomorfismo entre dois conjuntos A e B eles são ditos homeomórficos.*

A condição de continuidade está associada a ideia intuitiva de não rompimento e a condição de bijetividade a não possibilidade de um ponto ser colado sobre o outro.

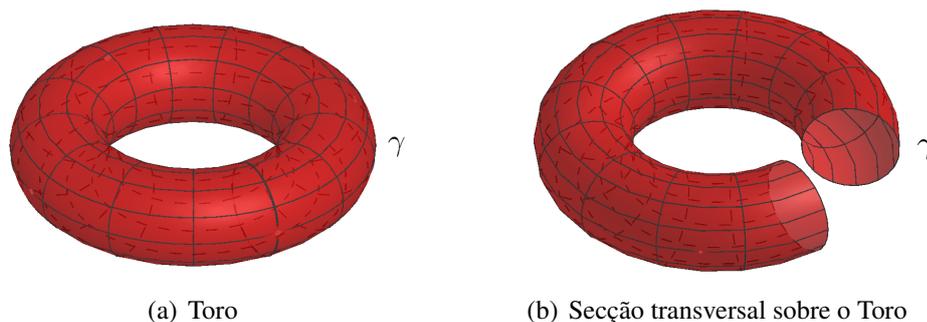
Pode ser demonstrado que uma curva simples fechada \mathcal{K} , no sentido da Definição 2.15, é um subconjunto do plano homeomórfico ao círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Da mesma forma, toda figura plana limitada por uma curva fechada simples é homeomórfica ao disco unitário associado a S^1 .

Exemplo 5.1. *Um anel, isto é, a região limitada entre dois círculos concêntricos é homeomórfico ao subconjunto do plano da Figura 3.1a. No espaço, todo poliedro é homeomórfico a esfera. Os corpos são definidos como quaisquer figuras homeomórficas a esfera. Mais exemplos de corpos: um elipsoide, um cilindro limitado com suas bases, etc. Em outra classe homeomórfica no espaço está o toro. Intuitivamente, é a superfície de uma câmara de ar de pneu de carro (Figura 5.2).*

A Figura 5.2a mostra um círculo, isto é, uma curva fechada simples γ sobre a superfície do toro que não a separa em duas regiões conexas, como no *Teorema da Curva de Jordan*, que

vale para o plano euclidiano. Para facilitar a interpretação, imagine o corte transversal sobre o toro na Figura 5.2b. A curva obtida no corte transversal é o círculo em questão.

Figura 5.2 – Curva fechada simples sobre a superfície toroidal.



Fonte: produção do autor, 2018.

A topologia é um ramo da matemática dedicado ao estudo das propriedades invariantes via homeomorfismos. Duas figuras homeomórficas são cópias uma da outra do ponto de vista topológico. Para o que segue em nosso trabalho, essa discussão é suficiente. Para o leitor que quer iniciar-se nesse ramo, que unifica várias ideias e técnicas da matemática avançada, sugerimos os livros: *Intuitive Combinatorial Topology*, Boltyanskii e Efremovich (2001) e *From Geometry to Topology*, Flegg (2001). Esses livros apresentam uma visão intuitiva e introdutória as ideias topológicas via geometria.

Agora que discutimos os aspectos relevantes sobre curvas e figuras no plano, no que segue, apresentaremos uma sequência de resultados sobre as figuras convexas. No final dessa seção saberemos caracterizar as figuras convexas de várias formas diferentes daquela apresentada na Definição 2.3.

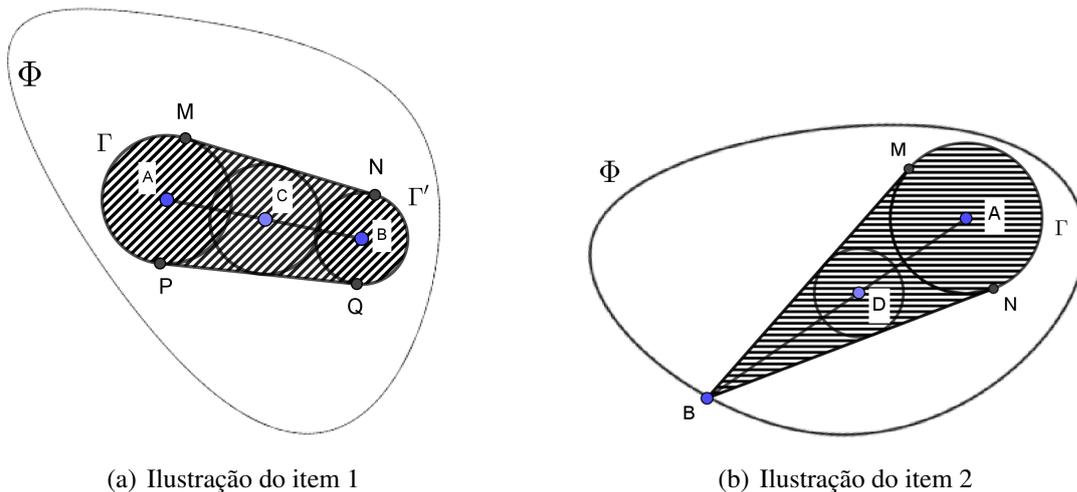
- Teorema 5.1.**
1. Se A e B são pontos interiores de uma figura convexa Φ , então todos os pontos do segmento AB são pontos interiores a Φ .
 2. Se A é um ponto interior e B é um ponto de fronteira de uma figura convexa Φ , então todos os pontos do segmento AB , exceto B , são pontos interiores de Φ .
 3. Se A e B são pontos de fronteira de uma figura convexa Φ , então um dos casos acontece exclusivamente: todos os pontos do segmento AB são pontos de fronteira de Φ , ou todos os pontos de AB , exceto A e B , são pontos interiores de Φ .

Demonstração. 1. Sejam A e B pontos interiores a Φ . Da definição de pontos interiores, há dois círculos Γ e Γ' , inteiramente contidos em Φ , cujos centros são respectivamente

os pontos A e B . Sejam MN e PQ as tangentes exteriores comuns a Γ e Γ' . Como Φ é convexa, toda a figura “curvilinear” $MNQP$ pertence a Φ ¹. Consequentemente, todo ponto C do segmento AB é centro de um certo círculo em que todos os seus pontos pertencem a Φ . Este círculo está inscrito na figura $MNQP$, conforme podemos ver na Figura 5.3a.

2. Substituindo o círculo Γ pelo ponto B , a prova é análoga a fornecida no item 1 e será omitida (Figura 5.3b).

Figura 5.3 – Ilustração do Teorema 5.1, itens 1 e 2.



(a) Ilustração do item 1

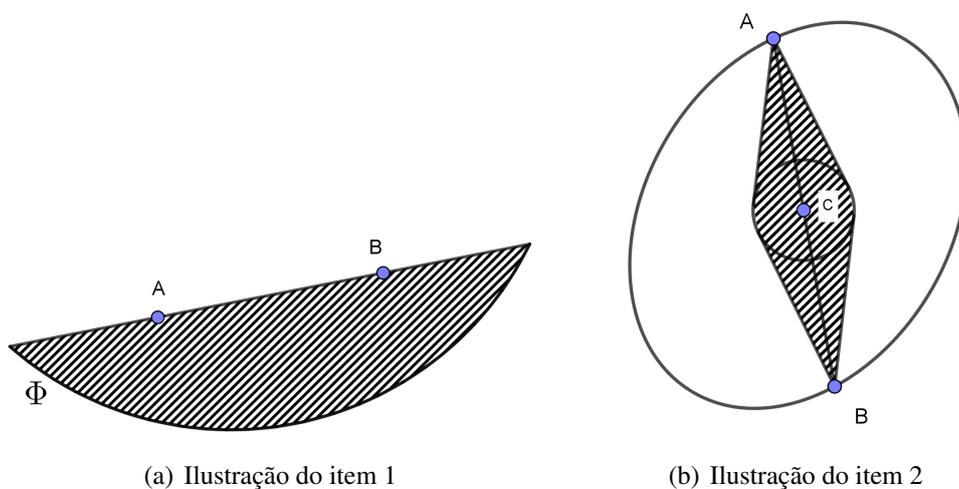
(b) Ilustração do item 2

Fonte: produção do autor, 2018.

3. Sejam A e B dois pontos de fronteira de uma figura convexa Φ . Se o segmento AB pode consistir inteiramente de pontos de fronteira de Φ (Figura 5.4a) então acontece o primeiro caso deste item do teorema. Vamos supor que exista um ponto $C \in AB$ tal que C é interior a Φ , então, de acordo com o item 2, todos os pontos dos segmentos CA e CB , exceto por A e B são pontos interiores a Φ (Figura 5.4b). Isso demonstra o segundo caso desse item do Teorema.

¹A figura curvilinear a qual nos referimos é uma intersecção de quatro figuras convexas: dois discos e dois semiplanos, de acordo com a Figura 5.3a. Portanto é uma figura convexa que contém o segmento AB .

Figura 5.4 – Ilustração do Teorema 5.1, item 3.



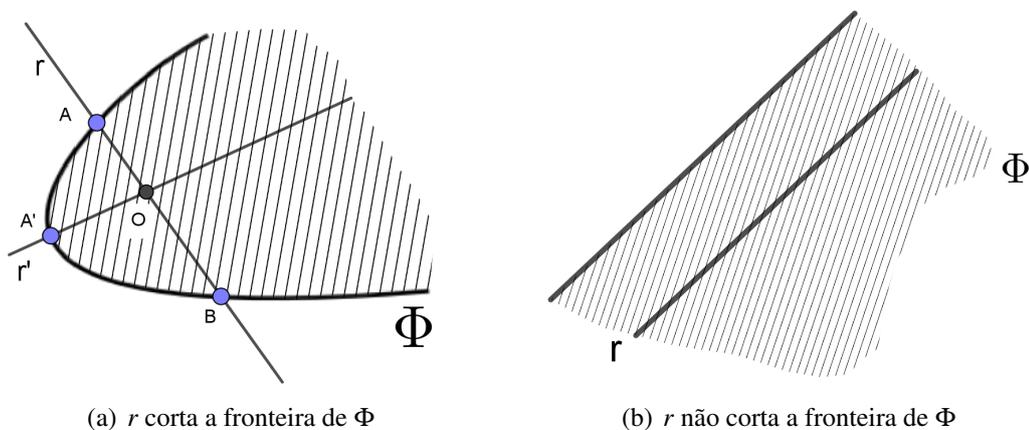
Fonte: produção do autor, 2018.

□

Teorema 5.2. *Toda reta passando por um ponto interior de uma figura convexa Φ corta a fronteira de Φ em não mais do que dois pontos. Se Φ for limitada, então toda reta passando por pontos interiores da figura Φ , corta a figura em exatamente dois pontos.*

Demonstração. Seja Φ uma figura convexa, O um ponto interior de Φ e r uma reta passando por O . Desde que a reta r é um conjunto convexo, sua intersecção com Φ é um segmento, uma semirreta, ou toda a reta r . Se a intersecção é um segmento de extremidades A e B , então A e B são pontos de fronteira de Φ (Figura 5.5a); portanto, a reta r contém dois pontos de fronteira de Φ .

Figura 5.5 – Ilustração do Teorema 5.2.



Fonte: produção do autor, 2018.

Se a intersecção de uma reta r' passando por O for uma semirreta de origem A' , então o seu ponto inicial A' é o único ponto de fronteira da figura Φ na reta (pela convexidade de Φ).

Finalmente, se toda a reta r está contida na figura (Figura 5.5b) então não há nenhum ponto da fronteira de Φ na reta r . Portanto Φ é uma faixa, um semiplano ou o plano todo. Se a figura Φ é limitada, então a intersecção com a reta r é limitada, e, portanto, é um segmento. Logo, toda reta r que passa por um ponto interior da figura limitada Φ contém exatamente dois pontos de fronteira dessa figura. Mostramos que em qualquer caso, se a reta r passa por um ponto interior de Φ , então a reta r corta a fronteira de Φ em no máximo dois pontos. \square

Teorema 5.3 (Recíproco do Teorema 5.2). *Se toda reta passando por um ponto interior de uma figura limitada corta a fronteira da figura em dois pontos, então a figura é convexa.*

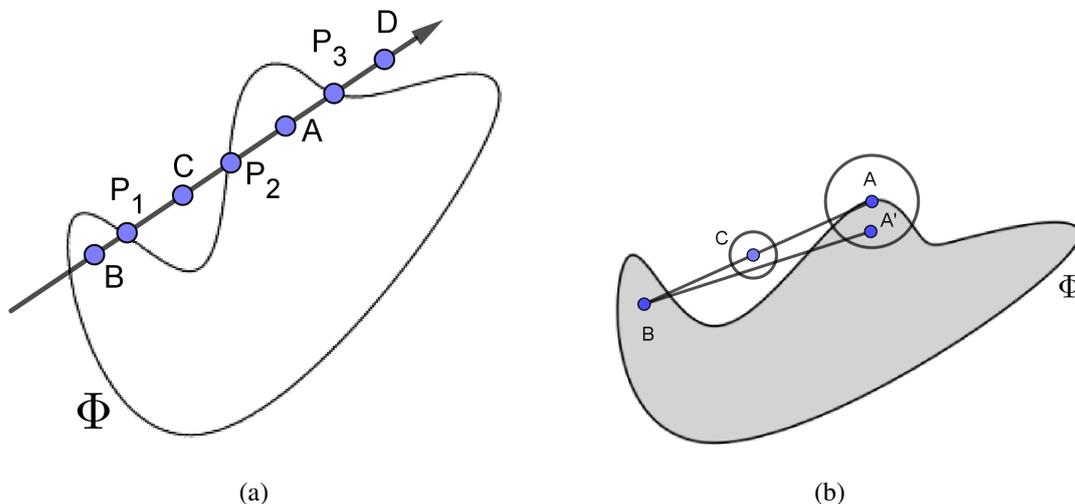
Demonstração. Nosso Teorema é equivalente à sua versão contrapositiva:

Para toda figura não convexa limitada Φ , existe uma reta que corta a fronteira da figura em mais do que dois pontos.

Faremos uma demonstração direta da formulação contrapositiva do teorema.

Seja Φ uma figura não convexa limitada. Nesse caso, pode-se encontrar dois pontos A e B da figura Φ , tal que o segmento AB não esteja inteiramente contido em Φ . Seja C um ponto do segmento AB não pertencente a Φ (Figura 5.6a).

Figura 5.6 – Ilustração do Teorema 5.3.



Fonte: produção do autor, 2018.

Podemos sempre assumir que A é um ponto interior a Φ . De fato, se A fosse ponto de fronteira de Φ e se A' fosse um ponto suficientemente próximo de A , então o segmento $A'B$ também conteria pontos exteriores a figura Φ (Figura 5.6b). Assim sendo, assumimos que A seja um ponto interior a Φ . No segmento BC há um ponto de fronteira P_1 da figura Φ (que pode coincidir com B), já que B pertence a Φ e C não pertence a Φ . No segmento AC há, da mesma forma, um ponto de fronteira P_2 da figura Φ , pois A pertence a Φ e C não pertence a Φ .

Finalmente, se prolongarmos o segmento AB além de A , obtemos uma semirreta \overrightarrow{AD} que emana do ponto interior A da figura Φ . Nessa semirreta há também um ponto de fronteira P_3 da figura Φ , pois Φ é uma figura limitada. Então, na reta pelo ponto interior A da figura Φ há pelo menos os três pontos de fronteira P_1 , P_2 e P_3 de Φ . Isso era o que desejávamos demonstrar. \square

Como consequência do que fora demonstrado nos Teoremas 5.2 e 5.3, podemos formular uma nova definição de figuras convexas válida para figuras limitadas.

Definição 5.2 (2ª definição de figuras convexas limitadas). *Uma figura limitada é chamada convexa, se toda reta passando por um ponto interior da figura corta a fronteira da figura em dois pontos.*

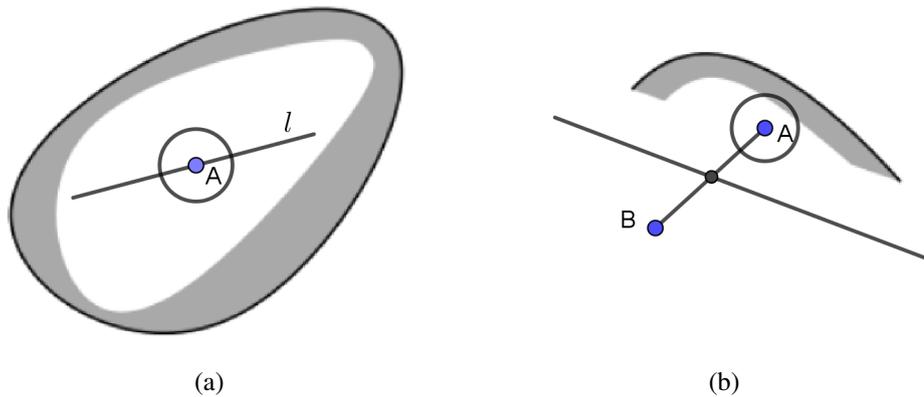
Na sequência iremos generalizar para figuras convexas em geral a definição de reta de apoio, que definimos para polígonos no Capítulo 3.

Definição 5.3 (Reta de apoio). *Seja Φ uma figura plana. Uma reta l é chamada de reta de apoio de Φ se l contiver pelo menos um ponto de fronteira de Φ e se toda a figura Φ está em um dos lados determinados por l .*

Conforme vimos, a reta que contém um lado de um polígono convexo é uma reta de apoio do polígono. Uma tangente a um círculo também é uma reta apoio. Uma reta de apoio pode ter um único ponto ou um segmento inteiro em comum com uma figura convexa limitada. Se a figura convexa é ilimitada, a reta de apoio inteira pode pertencer a figura.

Exemplo 5.2. *Uma reta de apoio l de uma figura convexa Φ , deve conter pontos de fronteira e nunca pode conter pontos interiores. Pois, se tivesse um ponto interior A da figura, um círculo pequeno centrado em A conteria pontos interiores em ambos os lados de l (Figura 5.7a). Reciprocamente, se uma reta não contém pontos interiores da figura convexa Φ , então toda a figura deve estar do mesmo lado de l . Pois se assim não fosse, bastaria tomar um ponto interior qualquer A de Φ e se algum ponto B (ponto interior ou ponto de fronteira) da figura estivesse do outro lado de l , então o ponto A e também o ponto de intersecção da reta l com o segmento AB seriam ambos pontos interiores a Φ , contrariando o fato de a reta não conter pontos interiores da figura Φ (Figura 5.7b).*

Figura 5.7 – Ilustração do Exemplo 5.2

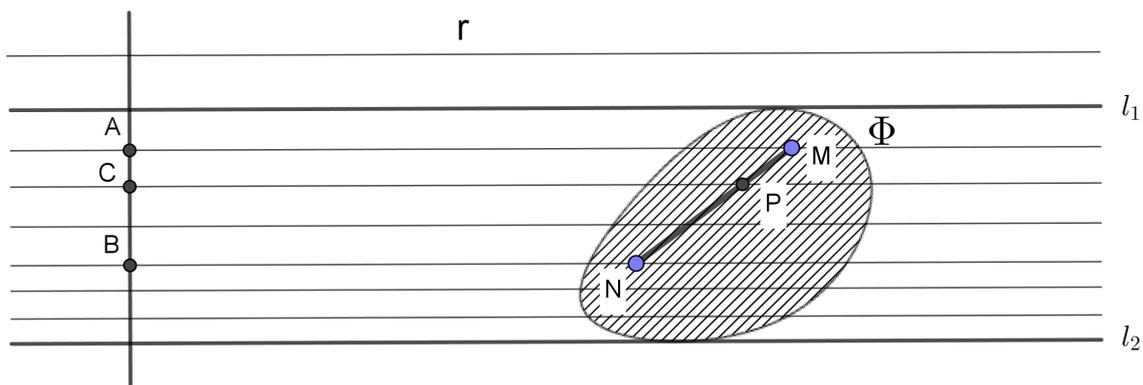


Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 5.4. *Para cada direção dada por uma reta podemos traçar exatamente duas retas paralelas, que são retas de apoio de uma figura convexa limitada.*

Demonstração. Seja Φ uma figura convexa limitada e r uma reta, que fixará uma direção no plano. Seja \mathcal{A} o conjunto formado por todas as retas paralelas a r que passam por um ponto da figura convexa limitada Φ . Todas essas retas cortam uma perpendicular arbitrária à direção dada em um conjunto convexo unidimensional (Figura 5.8). Com efeito, sejam A e B dois pontos quaisquer da intersecção de \mathcal{A} com a reta perpendicular e C um ponto entre A e B . As paralelas por A e B cortam Φ nos pontos M e N respectivamente.

Figura 5.8 – Ilustração do Teorema 5.4



Fonte: produção do autor, 2018.

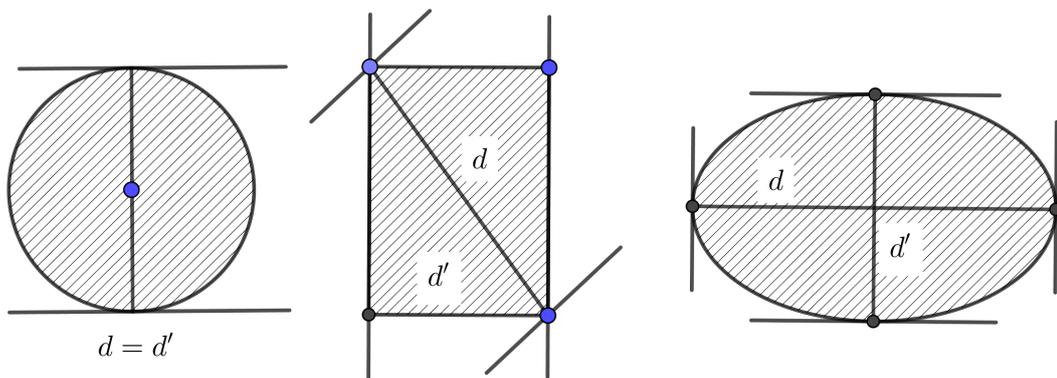
Da geometria elementar, sabemos que a paralela por C cortará o segmento MN em um ponto P entre M e N . Da convexidade de Φ , P pertence a Φ . Isso mostra que C pertence também a intersecção de \mathcal{A} com a perpendicular. Portanto, essa intersecção é um conjunto unidimensional convexo limitado, pois Φ é limitado e, por isso, é um segmento. Logo, o conjunto de todas as retas paralelas a uma dada direção, passando pelos pontos de Φ é uma faixa. As

retas extremas l_1 e l_2 dessa faixa, que são intersecções com pontos de fronteira, são duas retas de apoio paralelas a direção dada (Figura 5.8). Isso demonstra o teorema. \square

O Teorema 5.4 é válido para qualquer figura limitada, convexa ou não. Sua demonstração depende do *Teorema da Curva Limite* e pode ser consultado em Yaglom e Boltyanskii (1961, p.100).

Para uma figura convexa ou não, existe uma direção em que a distância d entre o par de retas de apoio paralelas, perpendiculares aquela direção, é máxima dentre todas as outras direções. Há também outra na qual a distância d' é mínima. Para o círculo essa distância é constante. Para um retângulo, a direção de máxima distância é a perpendicular a uma das diagonais e a de mínima é a direção paralela ao par de lados maiores. Para uma elipse a direção de máxima distância é a do eixo maior e a de mínima, a do eixo menor (Figura 5.9).

Figura 5.9 – Largura e diâmetro: alguns exemplos



Fonte: produção do autor, 2018.

Definiremos na sequência alguns termos importantes que serão usados com frequência na dissertação.

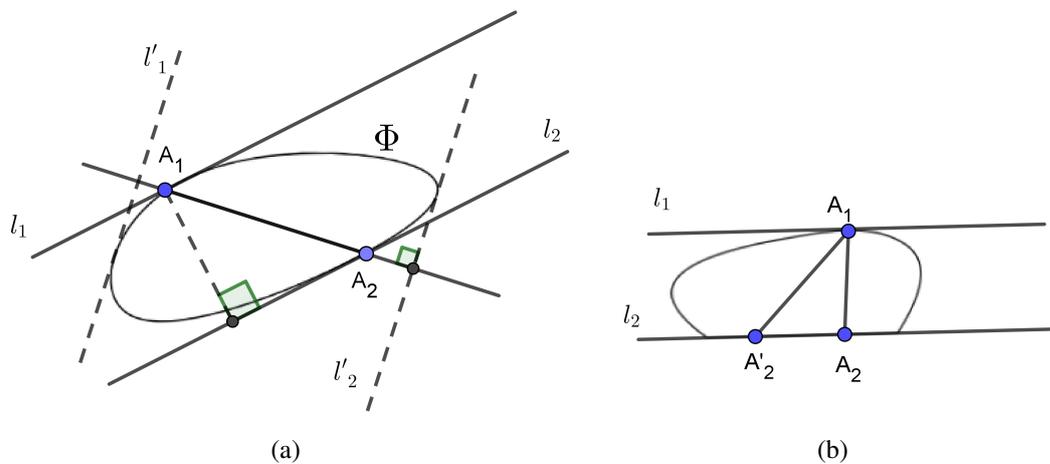
Definição 5.4 (Diâmetro e largura). *Chama-se diâmetro de uma figura limitada Ψ a distância máxima entre os pontos da figura. Chama-se largura de Ψ em uma dada direção a distância entre as retas de apoio perpendiculares a referida direção. Chama-se largura de Ψ a menor distância entre retas de apoio paralelas.*

Observação. No Apêndice 1 de Yaglom e Boltyanskii (1961, p.100) demonstra-se a existência de dois pontos em Ψ com distância máxima em uma figura limitada. Também demonstra-se a existência de duas retas de apoio de Ψ com menor distância, dentre todos os outros pares de retas de apoio.

Teorema 5.5. *Duas retas de apoio paralelas de uma figura limitada convexa que estão a máxima distância uma da outra contém, cada uma, um único ponto de fronteira da figura. Nessas condições, o segmento sobre esses dois pontos de fronteira é perpendicular as retas de apoio.*

Demonstração. Sejam l_1 e l_2 duas retas de apoio paralelas a Φ em que a distância entre ambas tem um valor máximo entre todos os pares de retas paralelas de apoio a Φ . Sejam A_1 e A_2 dois pontos de fronteira de Φ pertencentes a l_1 e l_2 respectivamente. Afirmamos que o segmento A_1A_2 é perpendicular às retas l_1 e l_2 . Pois se assim não fosse, a distância entre l_1 e l_2 seria menor do que o comprimento do segmento A_1A_2 (Figura 5.10a) e, assim sendo, menor do que a distância entre duas retas de apoio l'_1 e l'_2 de Φ que são perpendiculares a A_1A_2 . Isso contraria a hipótese.

Figura 5.10 – Ilustração do Teorema 5.5



Fonte: produção do autor, 2018.

Desde que A_1 e A_2 são pontos arbitrários da fronteira de Φ , pertencentes a l_1 e l_2 respectivamente, segue da perpendicularidade de A_1A_2 a l_1 e l_2 que nem l_1 ou l_2 podem ter um segmento em comum a Φ . Na Figura 5.10b, por exemplo, $A_1A'_2$ somente será perpendicular a l_2 se $A'_2 = A_2$. Em outras palavras, cada uma das retas contém exatamente um ponto de fronteira de Φ .

□

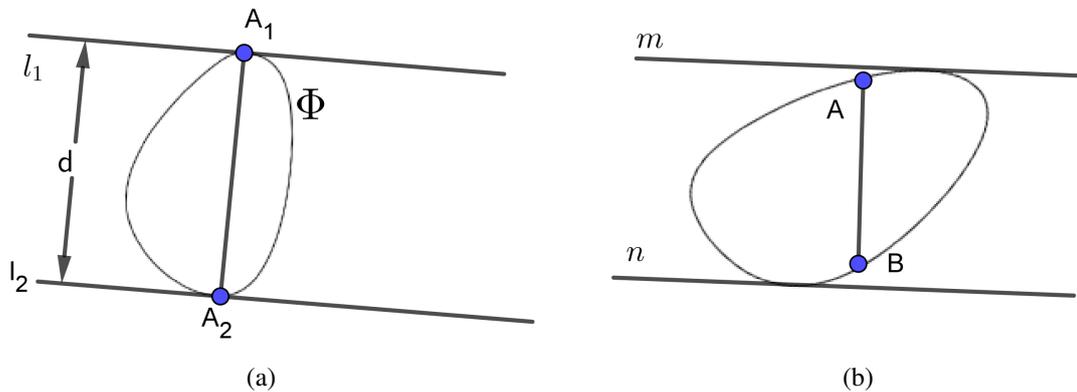
Agora, relacionamos o diâmetro com a distância máxima entre retas paralelas nas figuras convexas.

Teorema 5.6. *A maior distância entre dois pontos de uma figura convexa é igual a maior distância entre duas retas de apoio paralelas.*

Demonstração. Sejam Φ uma figura convexa e l_1 e l_2 duas retas de apoio paralelas em que a distância entre ambas atinge um valor máximo d . Consideremos os pontos A_1 e A_2 comuns a Φ e a l_1 e l_2 respectivamente. Do Teorema 5.5, A_1A_2 é perpendicular às retas l_1 e l_2 . O comprimento de A_1A_2 é igual a d (Figura 5.11a). Assim sendo, temos que mostrar que a distância entre quaisquer dois pontos de Φ não pode exceder o valor d . Se A e B são dois pontos de Φ e

se m e n são as retas de apoio perpendiculares a AB (Figura 5.11b), então o comprimento do segmento AB não excede a distância entre m e n , que, por sua vez, não é maior do que d . Consequentemente, o comprimento de AB não pode ser maior do que d . \square

Figura 5.11 – Ilustração do Teorema 5.6



Fonte: produção do autor, 2018.

Finalizamos a caracterização do diâmetro de uma figura convexa com o teorema seguinte.

Teorema 5.7. *Se A e B são dois pontos de uma figura convexa Φ , cuja distância d entre ambos atinge um valor máximo, então as retas por A e B perpendiculares a AB , são retas de apoio de Φ .*

Demonstração. Construimos duas retas de apoio n e m a figura convexa Φ , perpendiculares ao segmento AB . Toda a figura Φ está contida na faixa entre n e m (podemos nos basear na Figura 5.11b novamente). Portanto, o segmento AB de comprimento d e perpendicular a n e m está inteiramente contido na faixa. Pelo Teorema 5.6, a distância entre n e m não pode exceder d , portanto as retas n e m devem passar pelos pontos finais A e B do segmento. Isso encerra a demonstração. \square

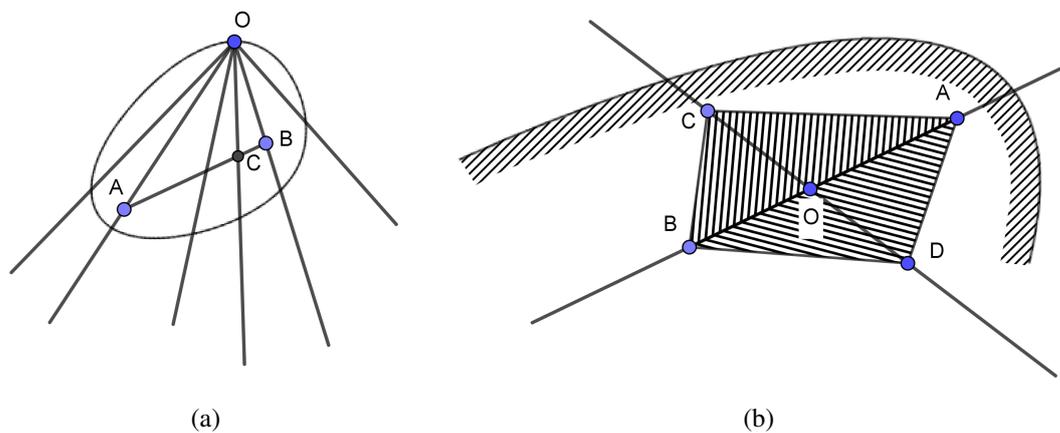
Observação. O Teorema 5.5, 5.6 e 5.7 são válidos para quaisquer figuras limitadas, convexas ou não. A demonstração desses resultados pode ser consultadas em Lay (1982).

Vimos no Capítulo 2 que *um feixe convexo de raios* pode ser um raio, um par de raios formando uma reta, um ângulo (menor do que 180°), um semiplano, ou o plano inteiro. Seja Φ uma figura convexa e seja O um ponto de fronteira de Φ . A partir de O consideramos todos os possíveis raios que passam por qualquer outro ponto de Φ . Obtemos um feixe de raios partindo do ponto O . Vamos mostrar que esse feixe de raios é um feixe de raios convexas.

Com efeito, sejam \vec{OA} e \vec{OB} dois raios, com A e B pertencentes a Φ . Como todos os pontos C entre A e B são também pontos pertencentes a Φ , o raio \vec{OC} também pertence ao feixe.

Então, todos os raios do ângulo $\angle AOB$ cortam o segmento AB . Isso mostra que o feixe de raios é convexo (Figura 5.12a). O feixe de raios obtidos desta forma não pode ser um único raio nem um único par de raios formando um ângulo de 180, pois assumimos no Capítulo 2 que uma figura não é um conjunto unidimensional. Agora, mostraremos que o feixe não pode preencher o plano todo. Se, de fato, os raios preenchessem todo o plano, então poderíamos escolher entre eles dois pares de raios opostos, OA, OB , e OC, OD , tais que os pontos A, B, C e D fossem pontos da figura convexa Φ (Figura 5.12b).

Figura 5.12 – Feixes de raios convexos

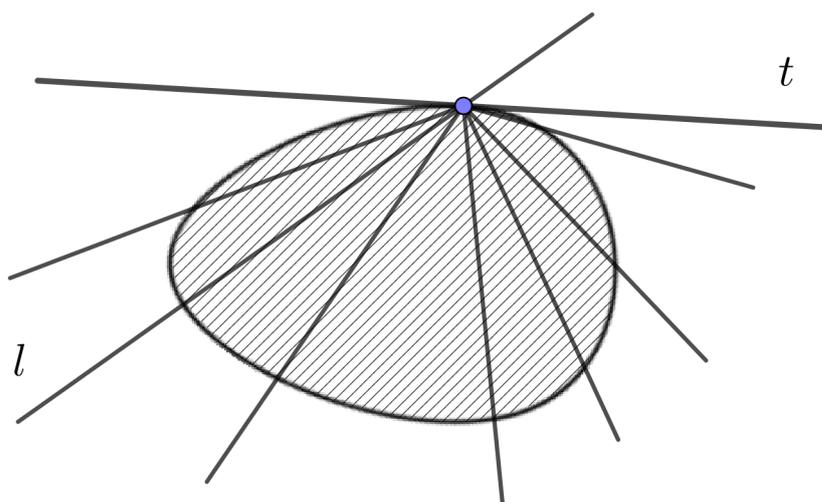


Fonte: produção do autor, 2018.

Então Φ conteria todo o triângulo ABC , pois contém os pontos não colineares A, B e C . Conteria o quadrilátero convexo $ACBD$ no qual o ponto O é o ponto de encontro das diagonais. Logo, O seria um ponto interno de Φ , não podendo ser um ponto de fronteira de Φ . O feixe de raios considerado, portanto, forma ou um semiplano ou um ângulo menor do que 180° . Analisaremos cada um dos casos.

Quando o feixe forma um ângulo de 180° (Figura 5.13), o ponto O é chamado um ponto regular da curva convexa \mathcal{K} que limita a figura Φ . A reta t que limita o semiplano é uma reta de apoio da figura Φ , pois todos os pontos de Φ estão nos raios do nosso feixe e, assim sendo, estão em um dos lados de t . A reta t é a única reta suporte de Φ no ponto O , uma vez que, qualquer outra reta l por O contém raios de nosso feixe e, portanto, pontos de Φ (Veja Figura 5.12a). A reta t é chamada a tangente a curva convexa \mathcal{K} no ponto O .

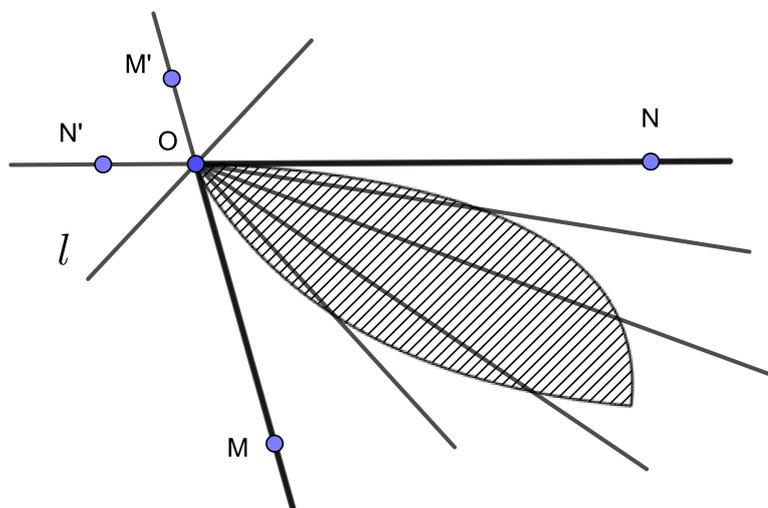
Figura 5.13 – Ponto regular e tangente a curva convexa.



Fonte: produção do autor, 2018.

Quando o feixe de raios forma um ângulo menor do que 180° , o ponto O é chamado um ponto singular da curva convexa \mathcal{K} que limita Φ . Na Figura 5.14, todos os pontos de Φ estão no interior do ângulo MON ; portanto toda reta l passando pelo vértice do ângulo MON' , adjacente a MON , é uma reta de apoio Φ . Os raios OM e ON são chamados as semi tangentes, ou tangentes de um lado, a curva convexa \mathcal{K} no ponto O . As semi tangentes estão contidas nas retas de apoio limites da figura, no sentido que qualquer outra além delas terão um de seus raios no interior do ângulo MON' .

Figura 5.14 – Ponto singular e semi tangentes a uma curva convexa.



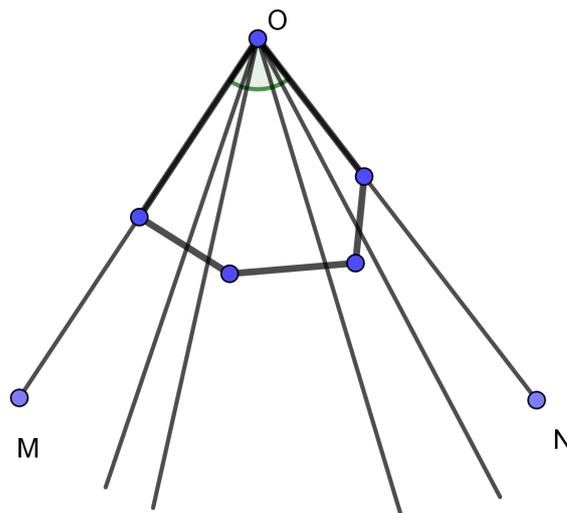
Fonte: produção do autor, 2018.

Os pontos singulares, intuitivamente formam cantos no interior da figura, por essa razão também são chamados de pontos de canto ². Podemos, dessa forma, definir ângulo interno a curva convexa \mathcal{K} , nos pontos singulares.

Definição 5.5 (Ângulo interno e ângulo externo a uma curva convexa). *Com a mesma notação dos parágrafos precedentes, chamamos o ângulo $\angle MON$, de medida $\angle MON = \alpha$, de ângulo interno ou simplesmente ângulo, da curva convexa \mathcal{K} , ou da figura Φ , no ponto O . O ângulo $\angle MON'$ de medida $\angle MON' = 180 - \alpha$ é chamado ângulo externo a curva \mathcal{K} , ou da figura Φ , no ponto O .*

Exemplo 5.3. *Todos os pontos de um polígono convexo, exceto os vértices, são regulares. As tangentes desses pontos são as retas de apoio dos lados do polígono. Os vértices de um polígono convexo são pontos singulares e, para cada vértice O , as retas de apoio dos lados correspondentes, são semi tangentes do polígono no ponto O (Figura 5.15).*

Figura 5.15 – Pontos regulares e singulares no polígono convexo.



Fonte: produção do autor, 2018.

Com essa discussão, podemos concluir que através de cada ponto de uma curva convexa \mathcal{K} , que limita uma figura convexa Φ , passa pelo menos uma reta de apoio. A recíproca desta proposição está no teorema seguinte.

Teorema 5.8. *Se através de cada ponto de fronteira de uma figura limitada passar pelo menos uma reta de apoio, então a figura é convexa.*

Demonstração. Tal como fora feito no Teorema 5.3, demonstraremos a versão contrapositiva do Teorema 5.8. Mostraremos que toda figura não convexa tem um ponto de fronteira no qual

²do inglês "corner points"

não pode passar uma reta de apoio. Seja Φ uma figura não convexa limitada e dois pontos A e B pertencentes a Φ tal que AB não esteja inteiramente contido em Φ . Isso quer dizer que existe um ponto C , entre A e B , tal que $C \notin \Phi$. Assim como justificamos na demonstração do Teorema 5.3, podemos sempre assumir que A seja um ponto interior a Φ . Usando os mesmos passos da demonstração do Teorema 5.3, obtemos a Figura 5.4a. Demonstraremos que o ponto P_2 daquela construção é um ponto da fronteira de Φ que não pode passar uma reta de apoio. Com efeito, a reta \overleftrightarrow{AB} por P_2 não é uma reta de apoio, pois passa pelo ponto interior A . Nenhuma outra reta por P_2 é uma reta de apoio, uma vez que os pontos A e B de Φ estão em diferentes lados da reta AB . Isso encerra a demonstração. \square

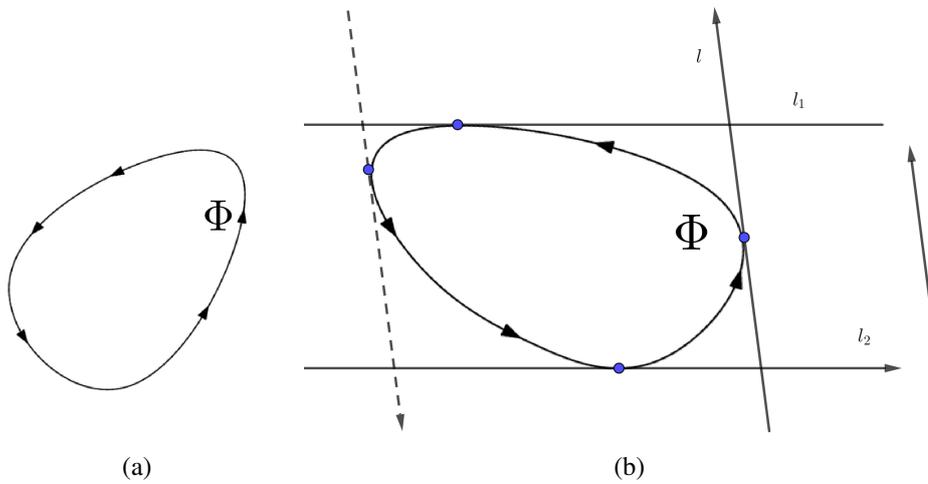
O Teorema 5.8 também é válido para figuras convexas ilimitadas. Como o foco de nossas discussões são as figuras convexas limitadas, o referido teorema não será estendido a esses casos.

Das discussões precedentes podemos formular uma nova definição de figuras convexas limitadas.

Definição 5.6 (2^a definição de figuras convexas limitadas). *Uma figura limitada é chamada convexa se através de cada ponto de fronteira passa pelo menos uma reta de apoio.*

Seja Φ uma figura convexa limitada e \mathcal{K} sua fronteira. Escolhemos na curva \mathcal{K} o sentido de orientação anti-horário, conforme fizemos para polígonos convexos no Capítulo 3. A exemplo do que discutimos naquele capítulo, movendo-se na curva neste sentido, a figura Φ sempre fica à esquerda (Figura 5.16a). Concordando com esse aspecto, devemos escolher sentidos nas retas suportes, como por exemplo a reta suporte l da Figura 5.16b, tais que o interior da figura esteja sempre a esquerda. Neste caso, duas retas suportes paralelas l_1 e l_2 da figura convexa Φ tem sentidos opostos e cada vetor do plano corresponde a uma direção de um par de retas paralelas.

Figura 5.16 – Orientação de percurso em uma curva

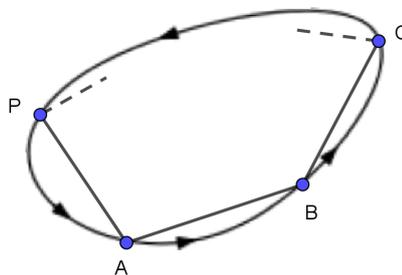


Fonte: produção do autor, 2018.

Se \mathcal{K} é um polígono, esta definição de orientação permite-nos falar de sentido de orientação dos lados do polígono, conforme discutimos no Capítulo 3. Se um vetor do plano não corresponde a direção de um lado do polígono, corresponderá a um par de retas de apoio paralelas sobre dois vértices do polígono e, ainda assim, cada direção corresponde a um par de retas de apoio paralelas.

Definição 5.7. Dizemos que n pontos A, B, C, \dots, P de uma figura Φ estão arranjados em ordem cíclica se, quando a fronteira \mathcal{K} da figura Φ é percorrida no sentido anti-horário, esses pontos estão na ordem dada. Veja Figura 5.17. Se os pontos A, B, C, \dots, P da curva \mathcal{K} são arranjados ciclicamente, então o polígono $ABC \dots P$ é dito ser inscrito na curva \mathcal{K} .

Figura 5.17 – Polígono inscrito a uma curva convexa



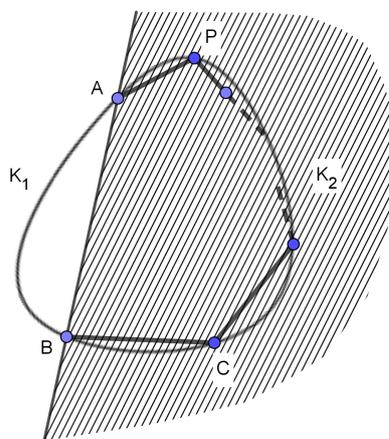
Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 5.9. *Todo polígono inscrito em uma curva convexa limitada é convexo.*

Demonstração. Consideremos um lado qualquer AB do polígono $ABC \dots P$ inscrito na curva \mathcal{K} fronteira da figura convexa Φ . Os pontos A e B dividem a curva \mathcal{K} em dois arcos \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_2 (Figura 5.18). De acordo com a Definição 5.7, de polígono inscrito, todos os vértices restantes

C, \dots, P estão em um desses dois arcos; digamos que seja \mathcal{K}_2 . O segmento AB forma com o arco \mathcal{K}_2 uma curva convexa \mathcal{K}^* . A referida curva é a fronteira de uma das duas figuras convexas em que Φ foi dividida pela reta AB (essas figuras são convexas, pois são intersecções de Φ com um semiplano em que a reta AB divide o plano). A reta AB é uma reta de apoio da curva convexa \mathcal{K}^* ; logo o arco \mathcal{K}_2 e com isso todos os pontos C, \dots, P estão do mesmo lado de AB . Segue deste fato que toda reta suporte do polígono $ABC \dots P$ é uma reta de apoio e este polígono é convexo, como queríamos demonstrar. \square

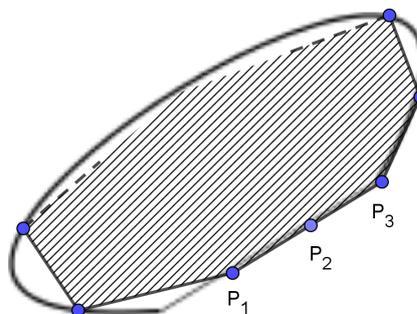
Figura 5.18 – Ilustração do Teorema 5.9



Fonte: produção do autor, 2018.

Para o teorema seguinte poderemos considerar “vértices virtuais” em um polígono. Essa ideia já fora discutida no Capítulo 4. Para entendermos o que isso quer dizer, considere a curva convexa da Figura 5.19 e o polígono inscrito $P_1P_2 \dots P_n$. O ponto P_2 não é, efetivamente um vértice de um polígono, pois está contido no segmento P_1P_3 que é um lado. Considerando vértices desse tipo, a formulação e solução do Teorema 5.10 e de outros resultados serão simplificadas.

Figura 5.19 – Vértices virtuais no polígono inscrito a uma curva convexa.

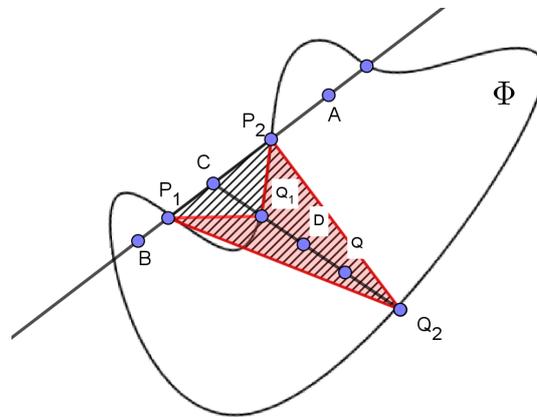


Fonte: produção do autor, 2018.

Teorema 5.10 (Recíproco do Teorema 5.9). *Se todo conjunto de n pontos de uma curva limitada \mathcal{K} compreende os vértices de um polígono convexo, então a curva é convexa.*

Demonstração. Supondo que a figura Φ , limitada pela curva \mathcal{K} , satisfazendo as hipóteses do Teorema, não seja convexa. Usaremos uma vez mais a construção do Teorema 5.3. Seja a reta CD , que passa pelo ponto C e por um ponto D , interior a Φ , não pertencente a reta AB (Figura 5.20). Consideremos todos os pontos Q da referida reta que tem a propriedade de o segmento DQ pertencer inteiramente a Φ . Esses pontos formam um conjunto convexo, a saber o segmento Q_1Q_2 , que não intersecta a reta AB . Então um dos dois pontos Q_1 ou Q_2 , digamos Q_1 , tem a menor distância da reta AB e está no interior do triângulo $P_1P_2Q_2$. Consequentemente, os pontos P_1, P_2, Q_1, Q_2 não são vértices de um quadrilátero convexo, contrariando a hipótese. Isso é suficiente para demonstrar o teorema. \square

Figura 5.20 – Ilustração do Teorema 5.10.



Fonte: produção do autor, 2018.

Percebemos que da demonstração do Teorema 5.10, precisamos unicamente requerer que dado quaisquer quatro pontos da curva \mathcal{K} , esses sejam os vértices que formam um quadrilátero convexo, (no sentido discutido na discussão que precede o referido teorema), para garantirmos a convexidade da curva \mathcal{K} .

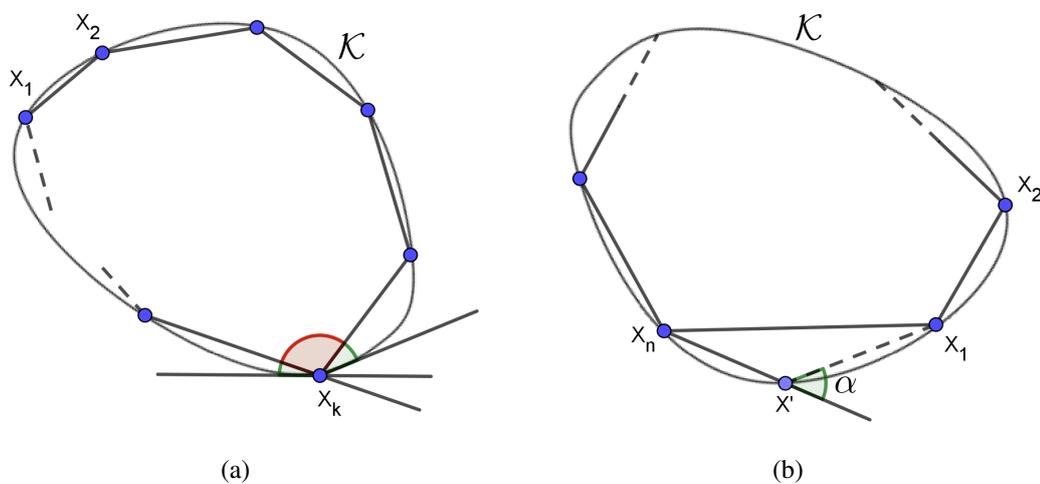
Apresentaremos um belo resultado sobre a soma de ângulos nos pontos irregulares em uma curva convexa, que generaliza o estudo que fizemos para os polígonos simples no Capítulo 3.

Teorema 5.11. *Se uma curva convexa limitada tem um número finito de pontos irregulares, então a soma dos ângulos externos é no máximo igual a 360° . Se a soma de todos os ângulos externos é exatamente 360° , então a curva é um polígono convexo.*

Demonstração. Sejam X_1, X_2, \dots, X_n todos os pontos irregulares da curva \mathcal{K} , escritos em ordem cíclica. Então o polígono $X_1X_2 \dots X_n$ está inscrito na curva \mathcal{K} . A medida do ângulo interior no ponto X_k da curva \mathcal{K} é no mínimo igual a medida do ângulo no vértice X_k do polígono $X_1X_2 \dots X_n$ (Figura 5.21a). Isto significa que o ângulo exterior no ponto X_k da curva \mathcal{K} é no

máximo igual ao ângulo exterior no vértice X_k do polígono $X_1X_2 \cdots X_n$. Então a soma de todos os ângulos exteriores dos pontos irregulares da curva \mathcal{K} não excede a soma dos ângulos exteriores do polígono convexo $X_1X_2 \cdots X_n$. Como vimos no Capítulo 3, esta soma é igual a 360° . Consideremos, agora, que a curva \mathcal{K} seja diferente do polígono convexo $X_1X_2 \cdots X_n$. Nessa condição, existe um ponto X' da curva que não pertence ao polígono (Figura 5.21b). Numeramos os pontos irregulares da curva \mathcal{K} junto com X' para que tenhamos X_1, X_2, \dots, X_n, X' nesta ordem. Consideraremos o polígono inscrito $X_1X_2 \cdots X_nX'$. A soma dos ângulos exteriores dos pontos irregulares da curva \mathcal{K} não é maior do que a soma dos ângulos exteriores nos vértices X_1, X_2, \dots, X_n do polígono $X_1X_2 \cdots X_nX'$. Como a soma dos ângulos nos pontos irregulares de $X_1X_2 \cdots X_nX'$ é igual a $360^\circ - \alpha$, onde α é o ângulo exterior no ponto X' , a soma dos ângulos exteriores de \mathcal{K} nos pontos irregulares não excede $360^\circ - \alpha$. Portanto, se a curva \mathcal{K} não é um polígono convexo, então a soma dos ângulos exteriores nos pontos irregulares é menor do que 360° e o teorema está demonstrado. \square

Figura 5.21 – Ilustração do Teorema 5.11

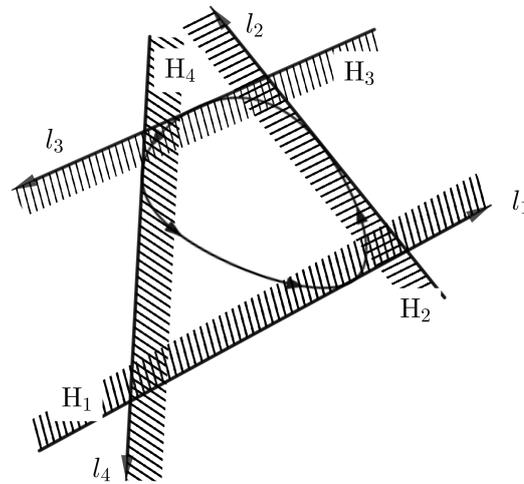


Fonte: produção do autor, 2018.

Podemos estender a primeira proposição do Teorema 5.11 quando a figura convexa tem um número infinito de pontos irregulares. No entanto, a prova desta proposição requer conhecimentos de análise matemática e não será feita aqui. Maiores detalhes podem ser vistos em Yaglom e Boltyanskii (1961).

Se n retas suportes direcionadas l_1, l_2, \dots, l_n da figura convexa Φ são dadas e se $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ são os correspondentes semiplanos à esquerda dessas retas (Figura 5.22), então Φ está contido em cada um desses semiplanos e está, portanto, contido na intersecção deles. Se esta intersecção é limitada, então será um polígono, que está circunscrito a figura Φ (ou a curva de fronteira \mathcal{K}).

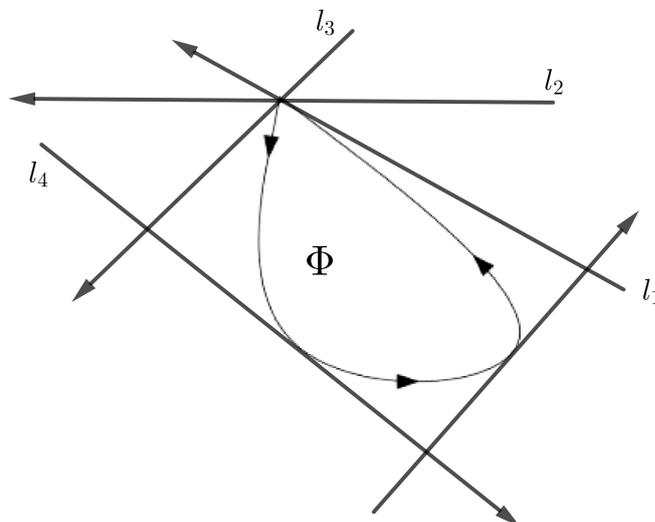
Figura 5.22 – Polígono circunscrito a uma curva convexa.



Fonte: produção do autor, 2018.

Segue que um polígono circunscrito a uma figura convexa é sempre convexo. Os lados do polígono circunscrito são segmentos contidos nas retas l_1, l_2, \dots, l_n . No entanto, pode acontecer que três ou mais dessas n retas suportes passem por um único ponto P da fronteira de Φ . Nesse caso P é certamente um ponto irregular (Figura 5.23). Nessa situação, o polígono circunscrito tem menos do que n lados. **Vamos, no entanto, considerar um tal polígono como tendo um ou mais lados de comprimento nulo, que são lados que se degeneram em um único ponto, e tendo n lados.** Esses lados de comprimento nulo têm direções definidas: as direções das correspondentes retas de apoio. Assim sendo, podemos falar de n ângulos interiores ou n ângulos exteriores do polígono circunscrito, independentemente de ter ou não lados de comprimento nulo.

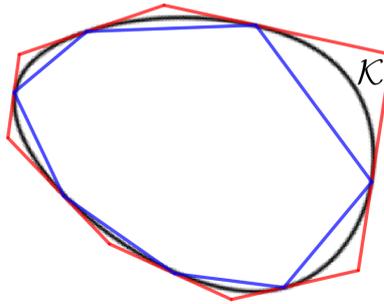
Figura 5.23 – Lados no polígono circunscrito a uma curva convexa.



Fonte: produção do autor, 2018.

Por comprimento de uma curva convexa \mathcal{K} e área da figura Φ das quais \mathcal{K} é a fronteira, entendem-se como o valor limite dos perímetros, ou das áreas, dos polígonos inscritos em Φ cujos lados se tornam indefinidamente pequenos. De outra forma, podemos usar os polígonos circunscritos em que os ângulos exteriores se tornam indefinidamente pequenos (Figura 5.24).

Figura 5.24 – Aproximações poligonais a uma curva convexa \mathcal{K}



Fonte: produção do autor, 2018.

Da forma como foi definido, percebemos que cada polígono inscrito pertence ao interior de um polígono circunscrito fixo escolhido arbitrariamente. Como os polígonos são todos convexos, de acordo como o Teorema 3.10, cada polígono inscrito tem perímetro menor do que um polígono circunscrito escolhido arbitrariamente. Da mesma forma, escolhendo arbitrariamente um polígono inscrito, todo polígono circunscrito tem perímetro maior do que o polígono inscrito escolhido.

Aumentando o número de lados dos polígonos, obtemos uma sequência de polígonos p_1, p_2, \dots, p_n , inscritos e com perímetro crescente e outra sequência de polígonos P_1, P_2, \dots, P_n circunscritos e com perímetro decrescente. Seja $A = \{s_i; s_i \text{ é o perímetro do polígono } p_i\}$ e $B = \{S_i; S_i \text{ é o perímetro do polígono } P_i\}$. Da conclusão do parágrafo anterior, $\inf B \leq \sup A$ e $\sup A \leq \inf B$. Logo, $\inf A = \sup B$. Esse número é o perímetro da curva \mathcal{K} . Basta mostrar que esse limite realmente existe. Não faremos essa demonstração aqui.

Discussão análoga pode ser feita para a definição da área de uma figura Φ limitada por uma curva convexa \mathcal{K} .

5.2 TEOREMA DE HELLY E SUAS APLICAÇÕES.

O objetivo principal desta seção é obter uma condição necessária e suficiente para o *Problema da Galeria de Arte* para um tipo de polígono, não necessariamente convexo, que satisfaz determinada condição. O *Teorema de M. A. Krasnoselskii* será demonstrado usando o *Teorema de Helly*, um resultado interessante com aplicações em vários ramos da matemática.

Teorema 5.12 (Teorema de Helly). *Se um número finito ou infinito enumerável de figuras convexas planas, limitadas são dadas tal que cada três delas tenham um ponto em comum, então existe um ponto que pertence a todas as figuras.*

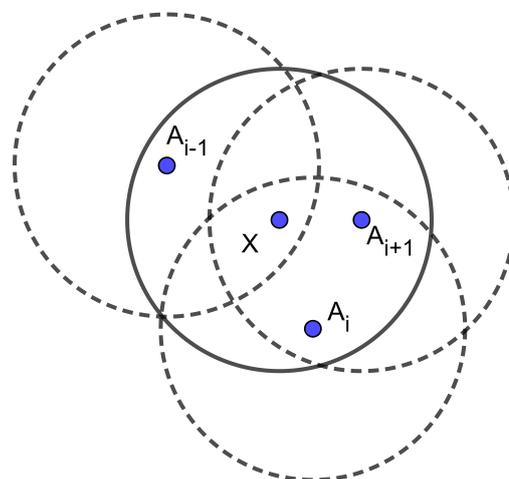
A demonstração desse resultado para uma quantidade finita e infinita de figuras convexas pode ser vista em Yaglom e Boltyanskii (1961). Somente é necessário exigir a limitação das figuras convexas no caso de haver uma quantidade infinita de conjuntos convexos. Diversas variações do teorema para dimensões maiores do que dois podem ser consultados em Kelly e Weiss (2009).

Para ganharmos familiaridade com o *Teorema de Helly*, apresentaremos alguns exemplos de sua aplicação.

Exemplo 5.4. *Sejam n pontos dados no plano tal que cada três deles podem ser encerrados em um círculo de raio 1. Nessas condições, todos os n pontos podem ser encerrados em um círculo de raio 1.*

De fato, temos que mostrar que existe um ponto O do plano, que será o centro do círculo desejado, cuja distância de todos os dados pontos não é maior do que 1. Em outras palavras, existe um ponto O do plano que pertence a todos os círculos de raio 1 sobre os pontos dados. Sejam A_1, A_2, \dots, A_n pontos nas condições do enunciado do Exemplo 5.4. De acordo com o *Teorema de Helly*, é suficiente mostrar que quaisquer três desses círculos em questão intersectam-se. Em virtude da hipótese do exercício, quaisquer três pontos podem ser encerrados em um círculo de raio 1 (Figura 5.25). O centro X desse círculo é um ponto que pertence aos três círculos unitários centrados nos pontos A_{i-1}, A_i, A_{i+1} e, dessa forma contém esses pontos. Isso demonstra o resultado.

Figura 5.25 – Ilustração do Exemplo 5.4



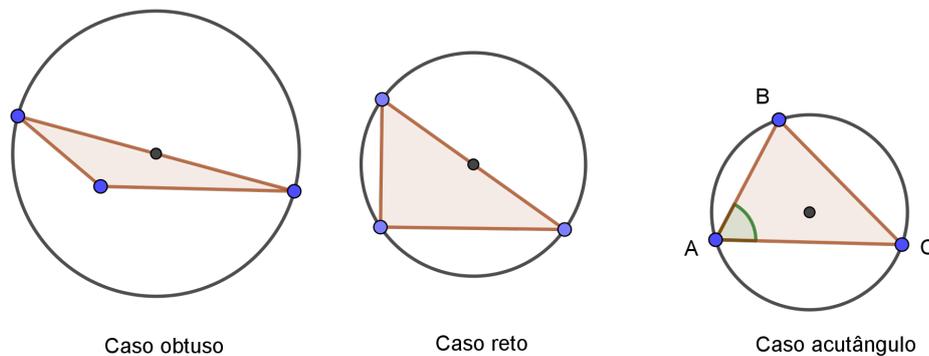
Fonte: produção do autor, 2018.

Exemplo 5.5 (Teorema de Jung para n pontos). *Sejam dados n pontos no plano tal que cada par desses pontos estão a uma distância de no máximo 1, um do outro. Nessas condições todos os pontos podem ser encerrados em um círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Para resolução será suficiente mostrar que quaisquer três dos pontos dados podem ser encerrados em um círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Daí usando o Exemplo 5.4, seguirá imediatamente, que todos os pontos podem ser encerrados em um círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vemos que nenhum lado do triângulo ABC , formado por quaisquer três dos n pontos, é maior do que 1. Se este triângulo é obtuso ou reto, então ele estará completamente encerrado pelo círculo, que é construído sobre o maior lado do triângulo como um diâmetro (Figura 5.26). O raio deste círculo não é maior do que $1/2$ e é, portanto, menor do que $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Se o triângulo ABC é acutângulo, então o raio r da circunferência circunscrita não pode ser, da mesma forma, maior do que $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Com efeito, pelo menos um dos ângulos deste triângulo, digamos A , é maior do que ou igual a 60° . Portanto, o lado BC , é uma corda de um arco com medida $120^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ na circunferência circunscrita do triângulo ABC . Aplicando a lei dos senos, a corda de um arco de 120° tem comprimento $r\sqrt{3}$. Assim sendo, $\overline{BC} \geq r \cdot \sqrt{3}$, e desde que $\overline{BC} \leq 1$, segue que $r\sqrt{3} \leq 1$ e disso $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Figura 5.26 – Ilustração do Teorema de Jung

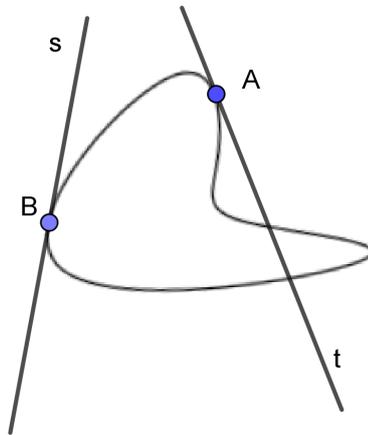


Fonte: produção do autor, 2018.

Voltaremos a discussão sobre retas de apoio, diâmetro e largura que iniciamos na Seção 5.1. Embora não possamos obter retas de apoio em todos os pontos de uma figura limitada Ψ qualquer, existem em Ψ retas de apoio em infinitos pontos da fronteira. Outro aspecto importante é que nas figuras convexas limitadas, em pontos regulares, as retas de apoio sempre coincidem com as tangentes à figura naquele ponto, conforme vimos na Seção 5.1. Em figuras não convexas a existência da tangente não é garantia de existência da reta de apoio, como podemos ver na Figura 5.27. A reta tangente t , pelo ponto de fronteira A , não é uma reta de apoio.

A reta s é uma reta tangente no ponto B e, também é uma reta de apoio. Ambos os pontos são pontos regulares da figura.

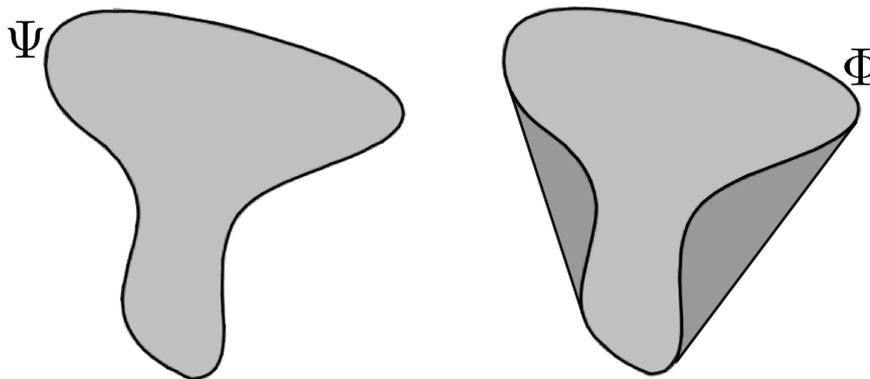
Figura 5.27 – Retas de apoio e tangentes.



Fonte: produção do autor, 2018.

Definição 5.8 (Fecho convexo de uma figura limitada). *O conjunto de todas as retas de apoio de uma figura Ψ , convexa ou não, forma uma figura convexa Φ , pois é uma intersecção de semiplanos (Figura 5.28). Essa figura é chamada de fecho convexo de Ψ .*

Figura 5.28 – Fecho convexo de uma figura não convexa.



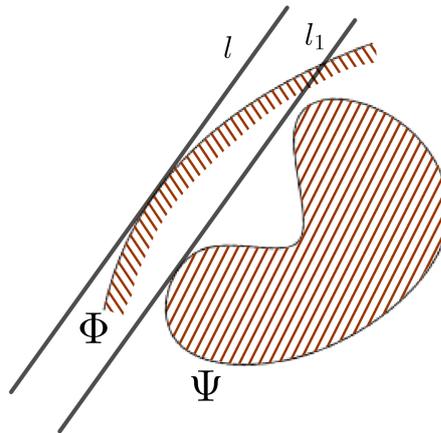
(a) figura não convexa Ψ .

(b) figura Φ : Fecho convexo de Ψ .

Fonte: produção do autor, 2018.

A figura Φ é a menor figura convexa que contém Ψ . Para provar isso, primeiro notamos que toda reta de apoio do fecho convexo Φ é também uma reta de apoio da figura não convexa Ψ . De fato, se uma reta de apoio l da figura Φ não for uma reta de apoio de Ψ (Figura 5.29), então movendo l paralelamente a si própria até tocar a fronteira de Ψ obteríamos uma reta de apoio l_1 da figura Ψ . A reta l_1 estaria inteiramente contida no semiplano limitado pela reta l no qual Ψ está; portanto, pela definição de fecho convexo, a reta l não poderia ser uma reta de apoio de Φ .

Figura 5.29 – Fecho convexo e retas suportes.



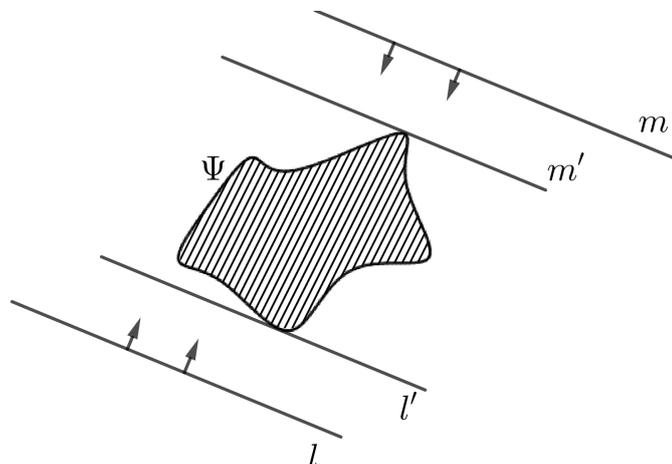
Fonte: produção do autor, 2018.

Por outro lado, dada uma figura convexa Φ' que contenha Ψ , uma reta de apoio qualquer dessa figura ou é uma reta de apoio de Φ , ou contém, no mesmo semiplano de Ψ a reta de apoio a Φ paralela àquela de Φ' (deslizando a reta de apoio de Φ' , até tocar Ψ , como fizemos anteriormente). Portanto, $\Phi' \subset \Phi$.

Notamos na Figura 5.28 que as partes que foram preenchidas para formar o fecho, tem uma fronteira formada por segmentos de retas. Pois, se fosse uma outra curva, Φ não seria a menor figura convexa que contém Ψ .

Dada uma direção, imagine duas retas móveis paralelas m e l , perpendiculares a direção dada, suficientemente afastadas para que a faixa que elas determinam contenham a figura. Aproximando essas retas até que cada uma delas apenas toquem a figura, encontramos o par de retas de apoio paralelas m' e l' a essa direção. A largura nessa direção é a distância entre essas retas de apoio paralelas. A Figura 5.30 ilustra o que foi discutido.

Figura 5.30 – Largura de uma figura a uma dada direção.



Fonte: produção do autor, 2018.

Para finalizar, relembremos o Teorema 5.6, válido para uma figura simples qualquer, que o diâmetro de uma figura coincide com a maior distância entre pares de retas de apoio paralelas.

Depois dessa digressão, voltamos ao nosso assunto. O *Teorema de Jung* pode ser demonstrado para um conjunto infinito de pontos. Se o conjunto de pontos for uma figura, não necessariamente convexa, então o *Teorema Jung* pode ser formulado como segue:

Teorema 5.13 (Teorema de Jung). *Toda figura plana, não necessariamente convexa, de diâmetro 1 pode ser encerrada em um círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Pode-se mostrar também que essa aproximação do *Teorema de Jung* não pode ser melhorada. Com isso queremos dizer que existem figuras convexas de diâmetro 1 nas quais não podem ser cobertas por um círculo de raio menor do que $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Porém, mostra-se que toda figura de diâmetro 1 pode ser coberta por uma hexágono regular inscrito em um círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{3}}$, para tal leia o Capítulo 3 de Yaglom e Boltyanskii (1961).

Nesse contexto, seria natural perguntar-se sobre a existência da figura de menor área possível que possa cobrir uma figura de diâmetro unitário. Adiantamos que existe e ainda não é o hexágono descrito acima. Esse interessante problema derivado do *Teorema de Jung*, proposto por Lebesgue em 1914, segue com sua solução desconhecida.

Problema em aberto 1. *Encontre uma figura de menor área que cubra toda figura de diâmetro 1 (isto é, a menor figura Φ , dentro da qual, toda figura de diâmetro 1 podem ser colocadas).*

O problema consiste, portanto, em encontrar a menor área e qual a forma da figura. A existência de tal figura é demonstrada, usando o “*Teorema da Curva Limite*”, constante em Yaglom e Boltyanskii (1961, p.100). Desse mesmo teorema também se demonstra que existe a figura de maior área que possa ser encerrada em toda figura convexa de largura unitária. Essa questão também segue em aberto.

Problema em aberto 2. *Encontre a figura de maior área que possa ser encerrada em toda figura convexa de largura 1.*

Uma aproximação ao Problema em aberto 2, é conhecida como o *Teorema de Blaschke*, o qual afirma que toda figura convexa de largura unitária contém um círculo de raio $\frac{1}{3}$.

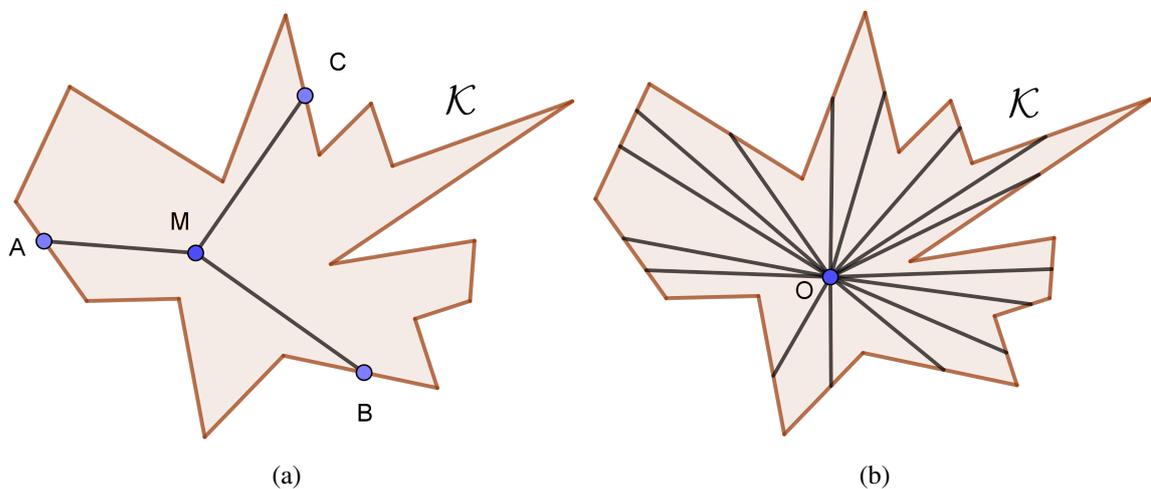
Agora que ganhamos experiência com o uso do *Teorema de Helly*, esse teorema será usado para resolver o problema mais importante dessa seção: O *Teorema de M. A. Krasnoselskii*. Esse teorema nos dá uma condição necessária para o *Problema da Galeria de Arte* discutido no Capítulo 3 para um tipo especial de polígonos que satisfaz uma determinada condição.

Teorema 5.14 (Teorema de Krasnoselskii). *Se para cada três pontos A, B, C de um polígono arbitrário \mathcal{K} existe um ponto M tal que todos os três segmentos MA, MB, MC estão inteiramente contidos no polígono, então existe no interior de \mathcal{K} um ponto O tal que todo segmento*

conectando O a um ponto do polígono \mathcal{K} também está inteiramente contido no interior do polígono.

A Figura 5.31 ilustra a situação. O teorema diz que se ao escolher arbitrariamente três pontos do polígono, existir um ponto interno ao polígono do qual os três pontos da fronteira são visíveis, então existirá um ponto interno ao polígono do qual todos os pontos do polígono, são visíveis.

Figura 5.31 – Polígono estrelado relativamente a um ponto.

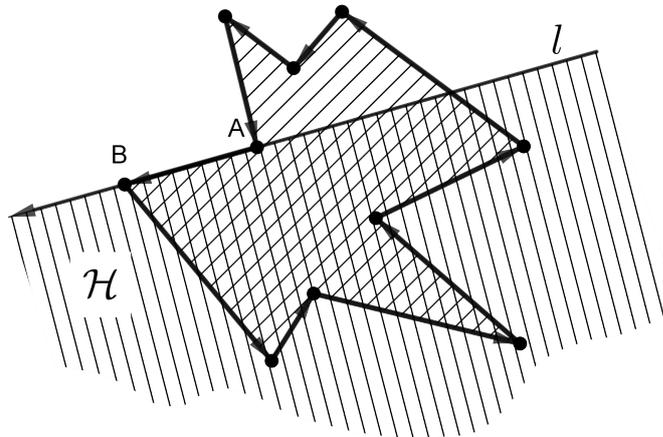


Fonte: produção do autor, 2018.

Portanto, nas condições desse teorema, sempre podemos encontrar um ponto O , no qual o polígono seja estrelado relativamente a O .

Demonstração. Seja \mathcal{K} um polígono qualquer com o sentido de orientação anti-horário, isto é, a orientação em que ao percorrer \mathcal{K} nesse sentido, na vizinhança de cada lado, os pontos exteriores de \mathcal{K} estão à direita e os pontos interiores à esquerda. Seja AB um lado do polígono que se encontra sobre a reta de apoio l . Assumimos que l tem o mesmo sentido de orientação do lado AB do polígono \mathcal{K} e denotamos por \mathcal{H} o semiplano à esquerda de l . Devido a concordância dos sentidos de orientações do lado AB e de l , \mathcal{H} também é o semiplano esquerdo do lado AB do polígono \mathcal{K} (Figura 5.32).

Figura 5.32 – Sentido de orientação: lados e retas suportes de \mathcal{K} .

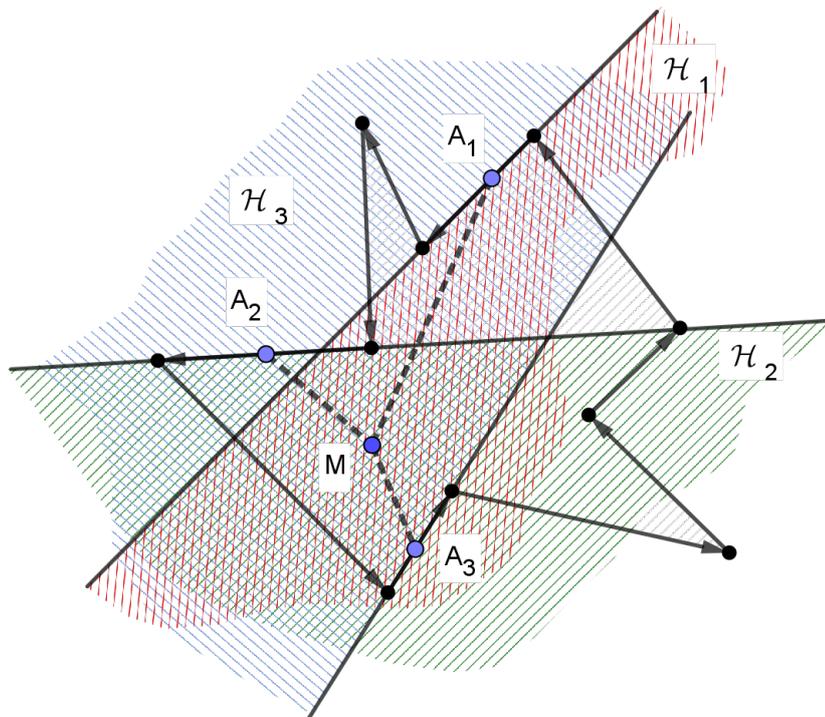


Fonte: produção do autor, 2018.

Provaremos que existe um ponto O comum a todos os semiplanos esquerdos dos lados do polígono \mathcal{K} . Considerando o *Teorema de Helly*, será suficiente mostrar que quaisquer três dos semiplanos esquerdos têm um ponto em comum.

Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ três semiplanos esquerdos a três lados arbitrários do polígono \mathcal{K} e A_1, A_2, A_3 pontos nos correspondentes lados (Figura 5.33).

Figura 5.33 – Teorema de Krasnoselskii: Ponto M comum a $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ e \mathcal{H}_3 .



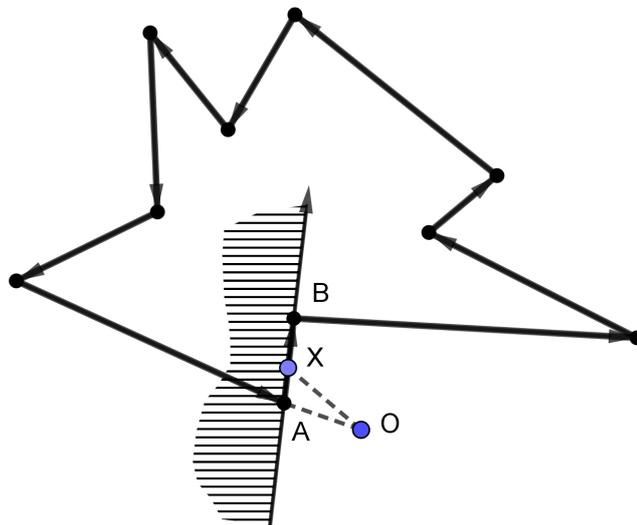
Fonte: produção do autor, 2018.

Pela hipótese do teorema, existe um ponto M tal que os segmentos A_1M, A_2M e A_3M encontram-se dentro do polígono \mathcal{K} . Disso segue que quando os três lados mencionados são

percorridos, o ponto M está do mesmo lado dos pontos interiores de \mathcal{K} , ou seja, à esquerda. Assim, o ponto M está em todos os três semiplanos esquerdos \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_3 .

Pelo *Teorema de Helly* existe um ponto O comum a todos os semiplanos esquerdos dos lados do polígono \mathcal{K} . Provaremos que O é um ponto que satisfaz a tese do nosso Teorema, isto é, o polígono \mathcal{K} é estrelado relativamente ao ponto O . Primeiro mostraremos que O está no interior de \mathcal{K} . Supondo que O esteja no exterior do polígono \mathcal{K} e que X é o ponto de fronteira de \mathcal{K} que está mais próximo de O (o ponto X pode ser um de vários pontos que estão a menor distância de O). Assim, exceto por X , o segmento OX encontra-se inteiramente no exterior de \mathcal{K} . Se o ponto X fosse um vértice do polígono \mathcal{K} (podendo coincidir com A), então poderia ser escolhido um ponto (suficientemente próximo a X) em um dos dois lados desse vértice do polígono (Figura 5.34). Assim sendo, se O está no exterior de \mathcal{K} , então pode ser encontrado um ponto X de \mathcal{K} , que não seja um vértice, tal que exceto por X , o segmento OX esteja no exterior de \mathcal{K} . Se AB é o lado em que o ponto X está, então O está do mesmo lado de AB dos pontos exteriores do polígono, isto é, à direita. Isso contraria o fato de O pertencer a todos os semiplanos esquerdos do polígono \mathcal{K} e, particularmente, ao semiplano esquerdo \mathcal{H} do lado AB . Portanto, o ponto O está no interior de \mathcal{K} .

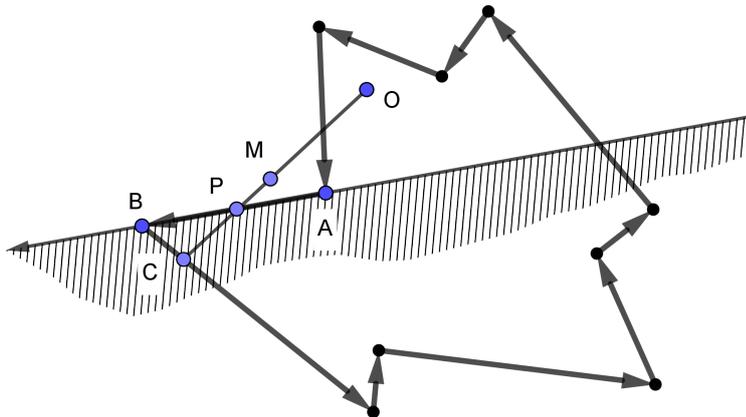
Figura 5.34 – Teorema de Krasnoselskii: O Ponto O é interno a \mathcal{K}



Fonte: produção do autor, 2018.

Falta mostrar que o segmento inteiro OC está dentro de \mathcal{K} , para qualquer ponto C do polígono \mathcal{K} . Supondo que isso não aconteça, isto é, que exista um ponto C do polígono \mathcal{K} tal que no segmento OC exista um ponto M fora do polígono \mathcal{K} . Seja P o ponto de intersecção do segmento CM , mais próximo de M , com a fronteira do polígono \mathcal{K} (Figura 5.35).

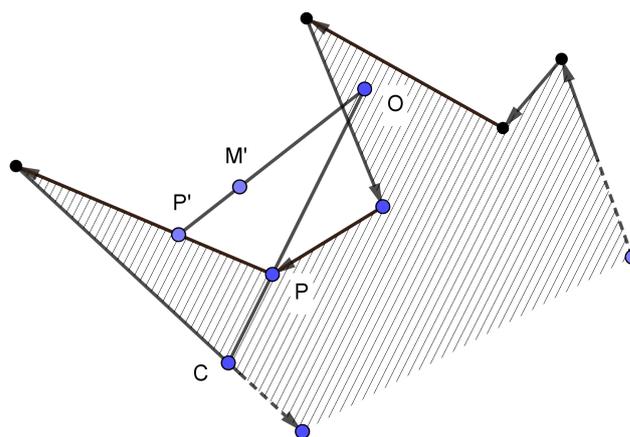
Figura 5.35 – Teorema de Krasnoselskii: O segmento OC está dentro de \mathcal{K}



Fonte: produção do autor, 2018.

Se P não for um vértice do polígono \mathcal{K} e AB for o lado em que o ponto P está, então o ponto O está do mesmo lado de AB de M , isto é, no mesmo lado do ponto exterior M do polígono \mathcal{K} , ou seja, à direita do lado AB . Isso contradiz o fato de o ponto O pertencer a todos os semiplanos esquerdos do polígono \mathcal{K} . Se P é um vértice de \mathcal{K} , então em cada um dos lados ligados ao vértice P , um ponto P' pode ser encontrado (suficientemente próximo de P) que não é um vértice do polígono \mathcal{K} e tal que no segmento OP' existe um ponto M' fora do polígono \mathcal{K} (Figura 5.36). Seguindo os mesmos passos da demonstração da primeira parte (quando P não é um vértice do polígono \mathcal{K}) para P' , concluiríamos novamente que O está em um semiplano direito de um dos lados de \mathcal{K} .

Figura 5.36 – Teorema de Krasnoselskii: O ponto P é um vértice de \mathcal{K}



Fonte: produção do autor, 2018.

Portanto, o segmento unindo um ponto C do polígono \mathcal{K} com o ponto O está dentro de \mathcal{K} e o teorema está demonstrado. \square

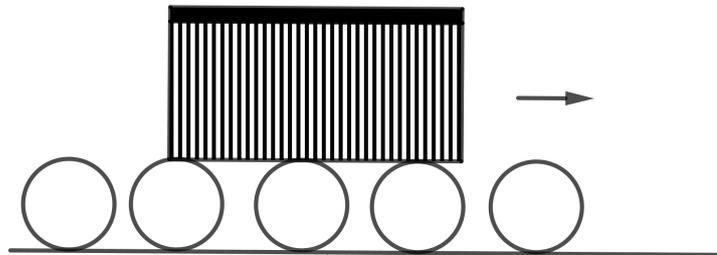
Observação. O Teorema de Krasnoselskii é válido também para figuras planas quaisquer. A prova no caso geral é basicamente a mesma, exceto pelo fato de para uma quantidade infinita

de semiplanos o *Teorema de Helly* pode não valer. Mas se limitarmos a figura com um círculo suficientemente grande, a intersecção entre os semiplanos e o círculo geram figuras convexas limitadas. Assim, para uma quantidade infinita de figuras convexas limitadas pode-se aplicar o *Teorema de Helly*.

5.3 CURVAS DE LARGURA CONSTANTE.

A roda é umas das máquinas simples que esteve presente nas civilizações, desde épocas remotas. Existem evidências de sua aparição há mais de 4 mil anos antes da Era Comum. O segredo do sucesso é a eficiência na transmissão do movimento, transmitindo para o eixo a força aplicada em sua borda, em contato com o chão. Para que a altura do eixo não mude, enquanto o movimento acontece, é necessário que o eixo esteja acoplado no centro da roda. Assim, a carga permanece na horizontal. Portanto, a simetria central é essencial para o funcionamento da roda. Quando a carga for muito grande os eixos das rodas podem deformar-se ou quebrar-se. Para esses trabalhos mais pesados, rolos cilíndricos podem ser úteis. Os cilindros que ficam para trás são trazidos para frente para que a carga tenha um movimento horizontal contínuo. A carga não se move nem para cima e nem para baixo (Figura 5.37).

Figura 5.37 – Usando cilindros para transporte de cargas



Fonte: produção do autor, 2018.

Perguntamos o que realmente é necessário para que a carga não se mova para cima e para baixo enquanto se desloca? A maioria das pessoas responderam que é o diâmetro da secção transversal do cilindro. Todos os cilindros devem ter a mesma secção. Continuando, perguntamos se dá para construir cilindros para esse tipo de trabalho com secções diferentes do círculo. A resposta é, quase sempre, não. Olhando um pouco melhor para os cilindros, vemos que o que não muda é a largura da secção transversal. Como vimos na secção anterior, a largura de uma figura numa dada direção é a distância entre as duas retas suportes paralelas, perpendiculares àquela direção. Uma figura que tenha a mesma largura, qualquer que seja a direção, pode ser a secção transversal de um cilindro a ser utilizado no trabalho descrito.

Veremos que existe uma infinidade dessas curvas. Temos aqui um bom exemplo de como a intuição pode nos levar a conclusões precipitadas.

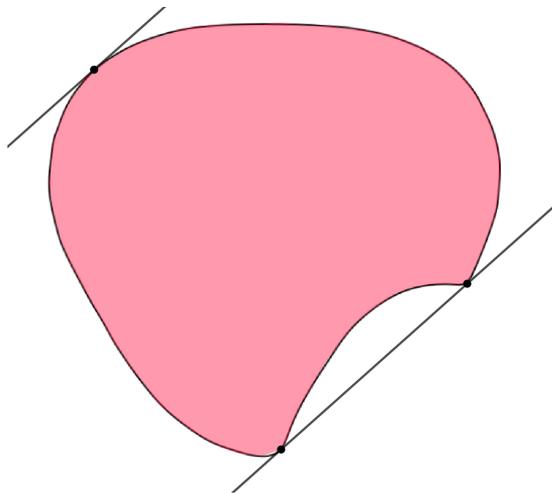
Definição 5.9 (Definição de Curva de Largura Constante.). *Uma curva \mathcal{K} será uma curva de largura constante h , se a largura da curva (ou da figura que a curva limita) for a mesma em todas as direções.*

Demonstraremos na sequência o importante fato.

Teorema 5.15. *Toda curva de largura constante é convexa.*

Demonstração. Primeiro notamos que dado que a largura da curva \mathcal{K} , que limita a figura Φ é constante, a largura é máxima em todas as direções. Pelo Teoremas 5.5, que é válido para todas as figuras, convexas ou não, toda reta de apoio tocará a curva em apenas um ponto. Demonstraremos que Φ coincide com o seu fecho convexo e é, portanto, uma figura convexa. Supondo que a figura Φ não coincida com o seu fecho convexo. Chamaremos de \mathcal{K}' a curva que limita o fecho. Existirá em \mathcal{K}' , conforme discutimos na seção anterior, um intervalo de reta que fechará um *bolsa* limitado por uma parte de \mathcal{K} , conforme Figura 5.38.

Figura 5.38 – Ilustração do Teorema 5.15.



Fonte: produção do autor, 2018.

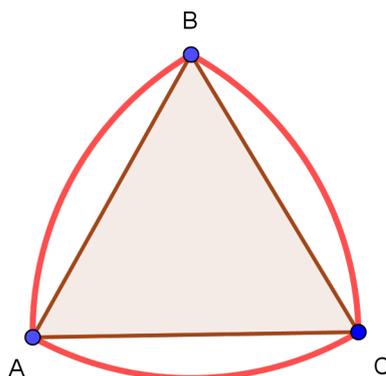
Contido nesse intervalo está uma reta de apoio do fecho convexo, e por sua vez, da figura Φ . Essa reta de apoio tocará Φ em pelo menos dois pontos, contrariando o Teorema 5.5. Portanto, Φ coincide com o seu fecho convexo.

□

Para começarmos, iremos construir a curva de largura constante mais simples, nomeada de *Triângulo de Reuleaux* em homenagem a Franz Reuleaux (1829- 1905). Reuleaux foi um respeitado engenheiro mecânico e professor. Filho de industriais, ajudou a desenvolver uma

série de mecanismos simples. Devido a suas contribuições nessa área, é considerado o pai da cinemática moderna. O Triângulo de Reuleaux era uma curva já conhecida dos matemáticos, mas foi Reuleaux o primeiro a demonstrar suas propriedades de largura constante. A construção desse triângulo curvilíneo é fácil. De um triângulo equilátero ABC , traçamos um arco \widehat{BC} centrado em A e raio AB . Construimos, analogamente, mais três arcos \widehat{AC} e \widehat{AB} (Figura 5.39).

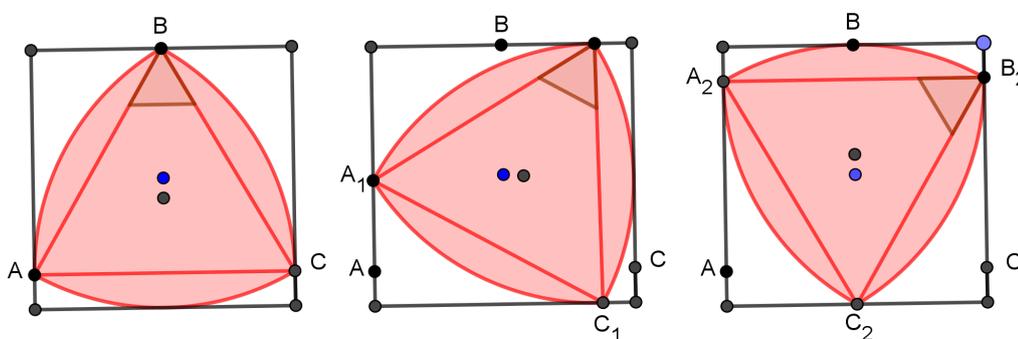
Figura 5.39 – O triângulo de Reuleaux.



Fonte: produção do autor, 2018.

No triângulo de Reuleaux, todo par de retas de apoio paralelas tem um ponto em contato com um dos vértices e outro com o arco oposto. A largura é, dessa forma, igual ao comprimento dos lados do triângulo equilátero. Escolhemos dois pares de retas de apoio paralelas, perpendiculares. Suas intersecções formam um quadrado que circunscreve a curva. Como a largura é constante, conseguimos girar confortavelmente o triângulo curvilíneo dentro do quadrado (Figura 5.40). Essa é uma propriedade que todas as curvas de largura constante compartilham. E de forma recíproca, toda curva que tenha essa propriedade é uma curva de largura constante.

Figura 5.40 – Triângulo de Reuleaux girando dentro de um quadrado.

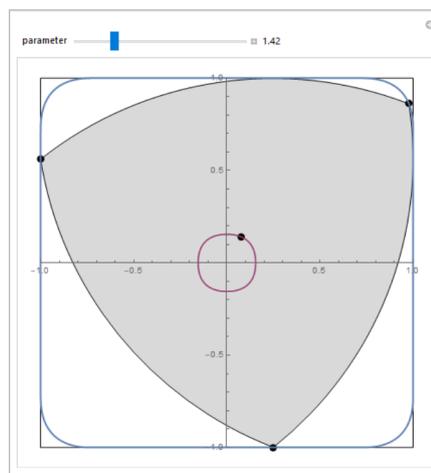


Fonte: produção do autor, 2018.

Embora o triângulo de Reuleaux limite uma figura com alto grau de simetria, ele não tem simetria central. O centro do triângulo ABC (ponto preto na Figura 5.40) é o centroide

da figura limitada pela curva (ou centro de gravidade de uma chapa homogênea que tem a forma dessa figura, conforme discutimos no Capítulo 4). O centroide gira em torno do centro do quadrado (ponto azul na Figura 5.40) percorrendo uma curva. Percebemos também que os cantos do triângulo de Reuleaux traçam um caminho que passa bem próximo de cada vértice. Intuitivamente, cada um dos vértices parece percorrer um arco circular nos cantos e o centroide um círculo em torno do centro do quadrado. Pode ser demonstrado que não é isso que ocorre. Os vértices percorrem um quadrado com cantos arredondados formados por arcos elípticos. O centroide também percorre um quadrado com cantos arredondados por arcos elípticos (Figura 5.41). Para uma demonstração desses fatos o leitor pode ler Gleiftner e Zeitler (2000).

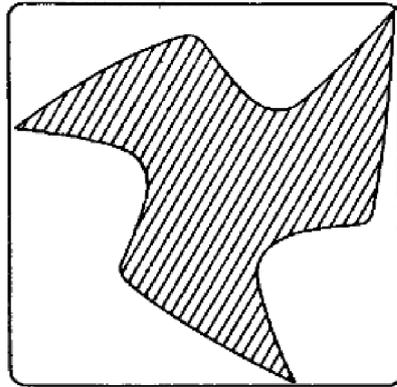
Figura 5.41 – Movimento dos vértices e do centroide do triângulo de Reuleaux dentro do quadrado.



Fonte: Boucher (2018).

Em 1914 um engenheiro inglês chamado Harry James Watts inventou uma broca rotativa capaz de fazer furos quadrados arredondados nos cantos, usando a propriedade descrita acima. A broca foi produzida a partir de um triângulo de Reuleaux. As partes côncavas fornecem os cortes nas bordas e a saída das aparas (Figura 5.42).

Figura 5.42 – Broca capaz de perfurar furos quadrados.

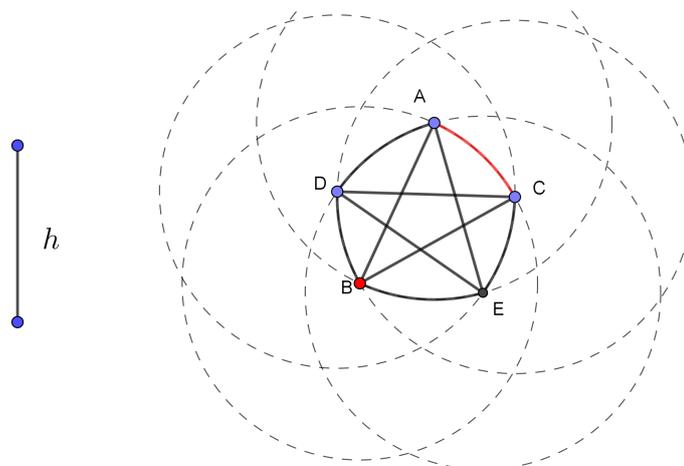


Fonte: Gardner (1991, p.214).

A dificuldade técnica da confecção dessa broca fora a construção de um mandril com um movimento excêntrico capaz de acompanhar a variação do centro da broca (o centroide da figura limitada pelo triângulo de Reuleaux). Watts criou o mandril excêntrico e patenteou a invenção em 1917. Discutiremos sobre o centro das curvas de largura constante nessa seção.

Com o mesmo princípio de construção do triângulo de Reuleaux, obtemos outras curvas de largura constante, tendo como partes arcos de círculos. Começamos com o pentágono de largura h . Com centro no ponto B , traçamos um arco de raio h e marcando os pontos A e C . Agora, do ponto C , traçamos um arco de raio h que passará por B , e marcamos o ponto D (Figura 5.43). Para encermos o ciclo, o ponto E será escolhido para que esteja simultaneamente nos arcos centrados em D e em A , ambos também com raio h .

Figura 5.43 – Pentágono de Reuleaux.

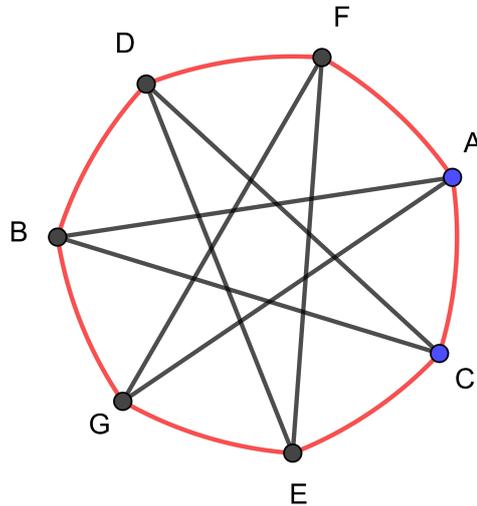


Fonte: produção do autor, 2018.

Agora notamos que a partir de todo polígono regular com quantidade de lados ímpares, pode-se construir um polígono estrelado com as diagonais que ligam um vértice as extremidades

de seu lado oposto. Como o polígono é regular, cada uma dessas diagonais é congruente. Na Figura 5.44, do heptágono regular $ABCDEFG$ estrelado forma-se a curva de largura constante com os mesmos vértices. Todos os arcos dessa curva são congruentes.

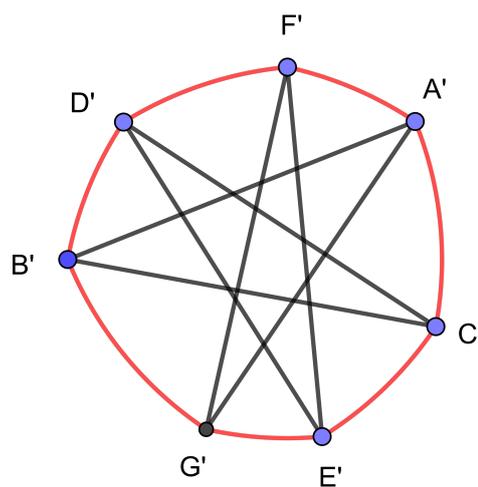
Figura 5.44 – Curva de largura constante a partir do heptágono estrelado regular.



Fonte: produção do autor, 2018.

Agora, o heptágono $A'B'C'D'E'F'G'$ não é regular, mas forma um heptágono estrelado equilátero. A curva formada pelos respectivos arcos também é de largura constante (Figura 5.45).

Figura 5.45 – Curva de largura constante a partir do heptágono estrelado equilátero.

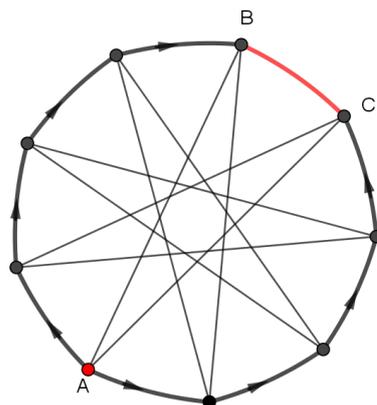


Fonte: produção do autor, 2018.

Isso sugere que qualquer polígono convexo com quantidade ímpar de lados, que gere um polígono estrelado equilátero, é a base para a construção de curvas de largura constante formadas por arcos de circunferência. De fato, é isso que ocorre. Para podermos concluir

isso, mostraremos que esse tipo de polígono curvilíneo de largura constante tem um lado ímpar de lados. Em uma curva qualquer de largura constante formada por arcos de circunferência, marcamos um canto e o seu correspondente lado oposto. Na Figura 5.46 o canto A corresponde ao lado (arco) oposto BC em um eneágono curvilíneo.

Figura 5.46 – Eneágono curvilíneo de largura constante



Fonte: produção do autor, 2018.

Para uma curva qualquer formada, percorrendo a curva no sentido horário, a partir de A , passaremos por um lado, depois por um canto, e assim por diante, alternativamente até que possamos passar por um canto antes de chegar ao lado oposto BC . Ao todo, teremos passado o mesmo número, digamos n , de lados e cantos para ir do canto inicial A para o seu lado oposto BC (sem contar A e BC). Agora, se começarmos novamente de A e percorrermos a curva no sentido anti-horário, passaremos novamente por n lados e n cantos antes de alcançar o lado BC , uma vez que, oposto a cada canto no primeiro caminho, há um lado no segundo caminho, e em frente a cada lado do primeiro caminho, há um canto no segundo (Figura 5.46). Juntando o vértice e o arco oposto a contagem haverá $2n + 1$ cantos e $2n + 1$ arcos no polígono curvilíneo.

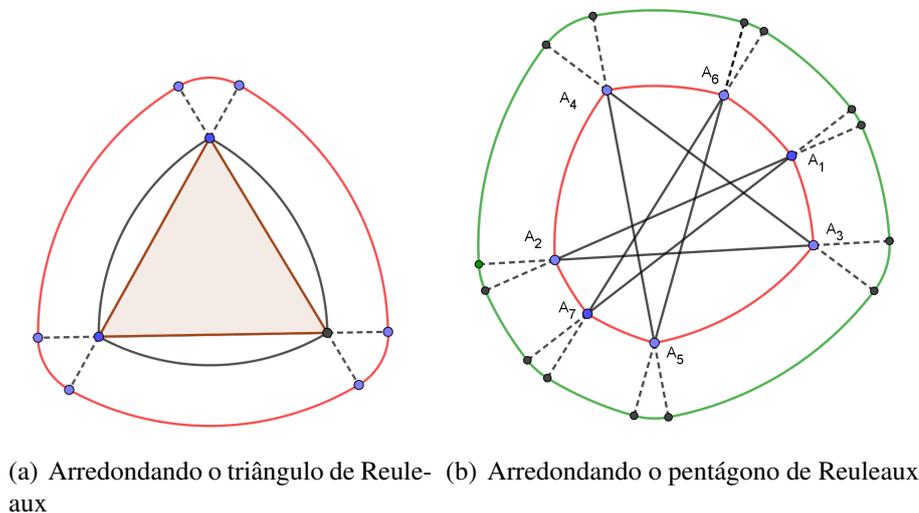
As curvas obtidas dessa forma, quando formadas por polígonos estrelados regulares, são chamadas sugestivamente de **Polígonos de Reuleaux**, pois são uma generalização do triângulo de Reuleaux. Notamos que essas curvas têm pontos de canto (pontos irregulares).

Vamos, a partir de cada uma delas obter outra curva com pontos de canto menos apontados. Embora, intuitivamente elas parecerão serem *curvas regulares* de largura constante ³, ainda assim os pontos de encontro dos arcos são pontos irregulares (Figura 5.47). Para obtermos essas figuras, em cada vértice de um polígono curvilíneo prolongamos as diagonais por uma medida constante. Depois, em cada vértice traçamos arcos com raio igual a soma da largura

³As curvas regulares nessa dissertação são aquelas que não contém pontos de cantos (pontos irregulares). Do ponto de vista da Análise Matemática as curvas de classe C^1 , isto é, curvas nas quais a sua parametrização tem derivada em todos os pontos.

da figura anterior com a medida do prolongamento. Na Figura 5.47, temos esse procedimento no triângulo de Reuleaux e no heptágono curvilíneo.

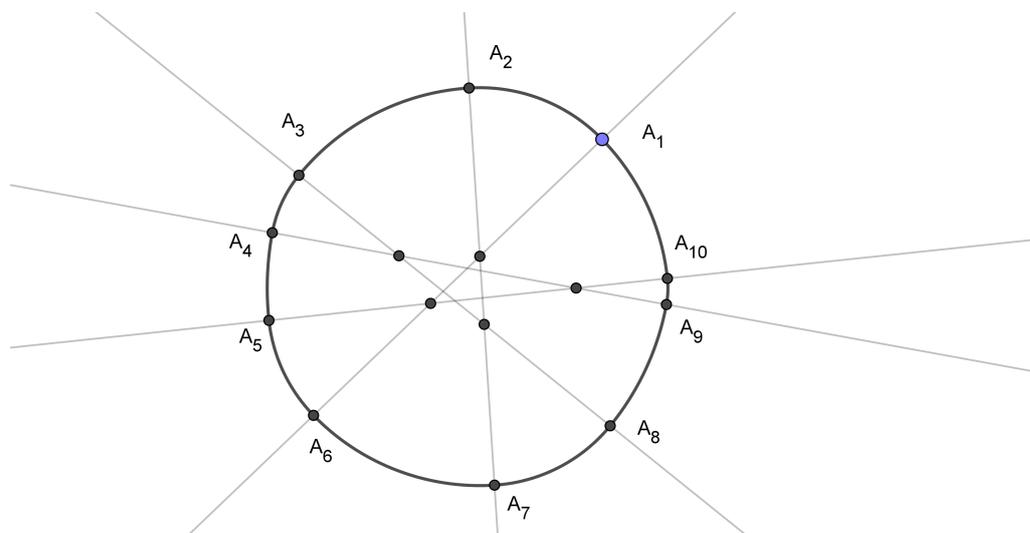
Figura 5.47 – Curvas de largura constante: arredondando os cantos.



Fonte: produção do autor, 2018.

Essa nova construção sugere uma generalização. Com uma quantidade qualquer de retas em posição geral ⁴, começamos traçando um arco $\widehat{A_1A_2}$ com centro no ponto de encontro das respectivas retas. Na reta que contém o ponto A_2 , trace o próximo arco, e assim por diante. Se estiver correto a curva se fechará no final. Deixamos para o leitor mostrar que a curva obtida dessa forma também é de largura constante. Na Figura 5.48 um exemplo de figura de largura constante construída pelo “Método das retas cruzadas”, maiores detalhes em Gardner (1991).

Figura 5.48 – Método das retas cruzadas.

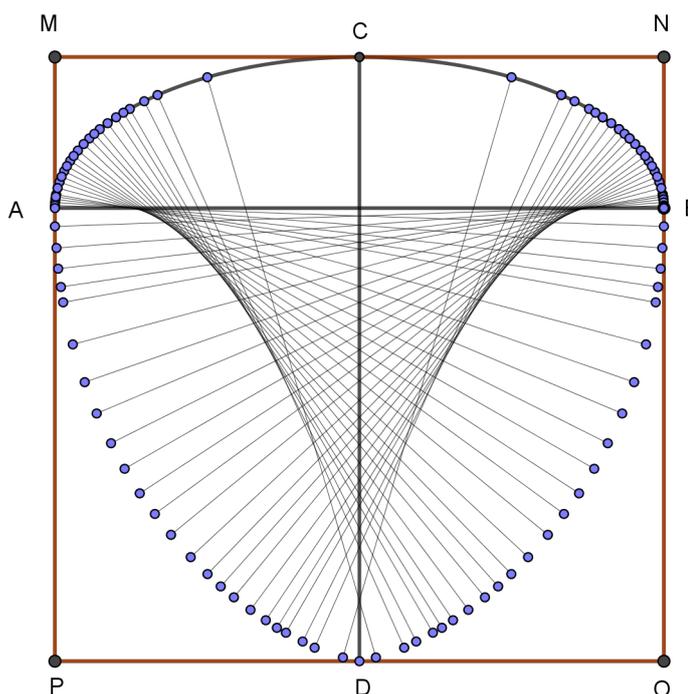


Fonte: produção do autor, 2018.

⁴Diz-se que um conjunto de retas no plano estão em posição geral se quaisquer três delas não tenham um ponto em comum.

Até o momento construímos curvas de largura constante formadas apenas por arcos de circunferência: e todas tinham pontos de cantos. Construiremos uma curva de largura constante a partir de um arco de elipse. Seja a semi elipse de eixo maior medindo $\overline{AB} = 8\text{cm}$ e eixo menor 4cm (Figura 5.49). Considerando que a largura da elipse na direção do eixo maior é 8cm , inscrevamos o arco elíptico ACB no quadrado $MNOP$, tal que C seja ponto médio de MN . O ponto D , médio de PO , é perpendicular a normal CD ao arco elíptico no ponto C . A reta PO é a tangente no ponto D a curva que iremos obter. Analogamente, para todos os pontos Q do arco ACB , marcamos o ponto Q' a 8cm na direção da normal, no sentido do interior da elipse. O ponto Q' pertence a curva e a reta perpendicular a normal no ponto Q' será a tangente a curva no ponto Q' . Assim obtemos **uma curva regular** em todos os pontos e de largura constante. A Figura 5.49 mostra uma plotagem de vários pontos da curva. Se confeccionarmos uma régua de 8cm , usando os dois lados dela, desenhemos várias tangentes a curva na parte inferior. Depois desenhemos a envoltória dessas tangentes: ela será um esboço da nossa curva.

Figura 5.49 – Curva de largura constante regular.



Fonte: produção do autor, 2018.

Como construímos, a curva da Figura 5.49 não tem pontos irregulares: todos os pontos têm uma única tangente. O leitor pode pesquisar em Gardner (1991) ou Rademacher e Toeplitz (1957) para saber mais sobre o método que usamos acima para obtenção de curvas de largura constante a partir de um pedaço de curva convexa aberta.

Para encerrar a apresentação e demonstrarmos alguns teoremas, mostraremos outras aplicações interessantes das curvas de largura constante. As moedas da Inglaterra de 20 e 50 pence

são um belo exemplo, com seus contornos em forma de polígonos de Reuleaux. As máquinas de moedas identificam qual moeda foi inserida pela largura. Sendo que os polígonos de Reuleaux tem área menor do que o círculo de mesma largura, moedas com essa forma economizam material (Figura 5.50). Os motores Wankel, que ao invés de pistões usam um rotor em forma de um triângulo de Reuleaux. Um motor de quatro tempos com uma mecânica bastante simplificada. Para mais informações sobre o motor Wankel veja Cole (1972).

Figura 5.50 – Moedas da Inglaterra.



Fonte: produção do autor, 2018.

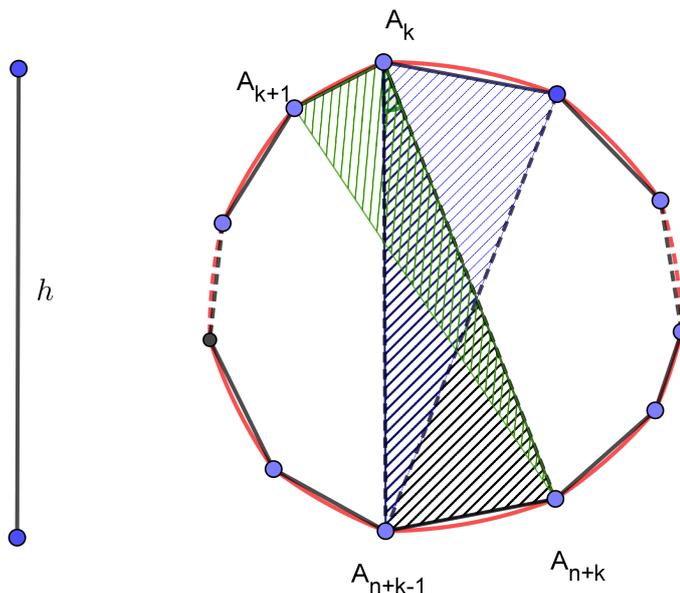
Essa motivação suscitou várias perguntas interessantes. Qual a curva com canto mais pontiagudo? Além do círculo existem outras curvas de largura constante com simetria central? Existe alguma relação geral para o cálculo do comprimento de arco de uma curva de largura constante? Qual curva de largura constante limita a menor área? E qual limita a maior? Iniciaremos agora com alguns resultados formais.

Deixamos como desafio ao leitor, a comprovação de que o comprimento de arco do triângulo de Reuleaux é $\pi \cdot h$, onde h é o diâmetro da curva. Os ângulos, em cada canto da curva, são de 120° e a área limitada pela curva é de $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \cdot h^2 \approx 0,7048 \cdot h^2$. Comparando com o círculo de mesma largura, o comprimento de arco é o mesmo e a área é de $\frac{\pi h^2}{4} \approx 0,7854 \cdot h^2$, portanto maior do que a do triângulo de Reuleaux.

Vamos calcular o comprimento de arco para um polígono curvilíneo de largura constante qualquer. Suporemos que o referido polígono tenha $2n - 1$ lados. Denotamos os ângulos $A_{n+k-1}A_kA_{n+k}$ por φ_k , onde A_{n+k-1} e A_{n+k} são os vértices opostos do vértice A_k (Figura 5.51). Dessa forma, o ângulo central correspondente ao arco unindo os pontos A_{n+k-1} e A_{n+k} é φ_k . Como a curva é de largura constante, ela é formada por $2n - 1$ arcos de raio h , equivalente a um arco central total medindo $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1}$.

Se pudermos provar que $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1} = 180^\circ$, então seguirá que o comprimento de nossa curva é igual ao comprimento de um semicírculo de raio h , a saber πh .

Figura 5.51 – Comprimento de arco para um polígono curvilíneo de largura constante.



Fonte: produção do autor, 2018.

Agora, vejamos que na soma dos ângulos de todos esses triângulos os ângulos $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n-1}$ foram contados, cada um, três vezes. Além do mais, teremos incluído na soma todos os ângulos internos do polígono $A_1A_2 \cdots A_{2n-1}$ (veja a Figura 5.51). Então, a soma dos ângulos de todos esses triângulos é igual à soma dos ângulos de um polígono de $(2n - 1)$ lados mais duas vezes $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{2n-1}$. Assim sendo,

$$(2n - 1) \cdot 180^\circ = [(2n - 1) - 2] \cdot 180^\circ + 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{2n-1}),$$

de onde,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{2n-1} = 180^\circ.$$

Portanto, podemos concluir que o comprimento de arco de qualquer polígono curvilíneo de largura constante h é πh .

Esse resultado nos dá uma pista de que possa valer para toda curva de largura constante. De fato, é válido.

Teorema 5.16 (Teorema de Barbier). *Toda curva de largura constante tem comprimento $\pi \cdot h$.*

Não faremos uma demonstração desse resultado. Na referência Honsberger (1970) consta uma demonstração elementar desse Teorema, que segue a filosofia dessa dissertação: demonstrações elementares à moda sintética. Para quem busca algo mais aprofundado, encontrará em Voloch (1987) uma demonstração usando “os elementos” da Geometria Diferencial clássica. Em Yaglom e Boltyanskii (1961) é apresentada outra demonstração elementar.

Sejam dois pontos quaisquer A e B de uma curva de largura constante h . Considerando as retas de apoio perpendiculares ao segmento AB , percebemos que AB não pode exceder h . Conforme já discutimos, uma reta de apoio de uma curva de largura constante não pode ter mais do que um ponto de contato com a curva e uma corda que une os pontos de contato de duas retas de apoio paralelas é perpendicular a essas retas e tem comprimento h . Esses resultados serão usados nas demonstrações dos teoremas que seguirão.

Definição 5.10 (Curvas de diâmetro constante). *Curvas planas com a propriedade de a distância entre quaisquer dois pontos da curva não excede uma certa quantidade h , e tais que para cada ponto da curva existe outro ponto da curva a uma distância h dessa curva, são chamadas de curvas de diâmetro constante.*

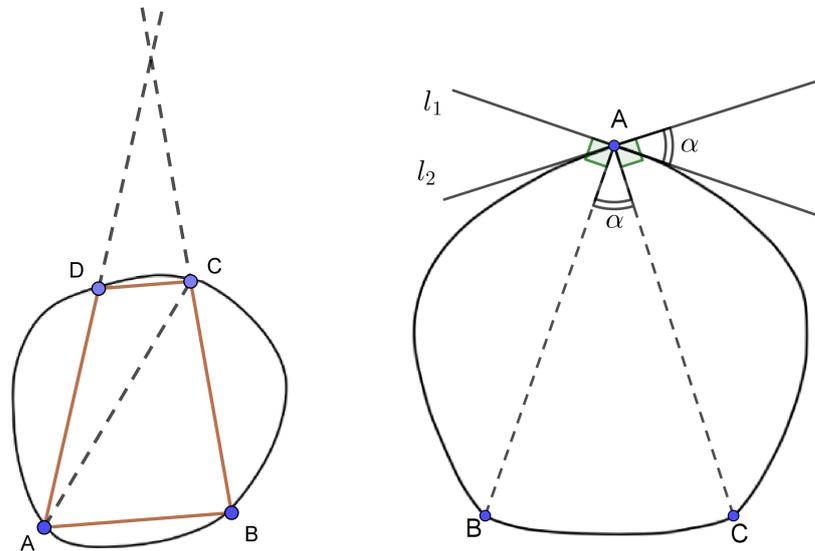
Do que fora discutido, toda curva de largura constante é também uma curva de diâmetro constante. Reciprocamente, toda curva de diâmetro constante é também uma curva de largura constante. Para mostrar isso, consideremos uma direção arbitrária e uma reta, perpendicular a essa direção, que deixe a figura Φ , de diâmetro constante h , inteiramente em um de seus lados. Movemos a reta, aproximando da figura até que apenas a toque em um ponto A . Pela definição de curva de diâmetro constante, existe um outro ponto B da curva distante d de A . Como d é a distância máxima entre os pontos da figura, nessas retas não pode haver outros pontos da figura cuja distância seja d . Logo, cada par de retas de apoio paralelas toca a curva em apenas um ponto, AB é perpendicular as correspondentes retas de apoio paralelas. Portanto, em qualquer direção, a largura é igual ao diâmetro da curva e Φ é de largura constante. Assim sendo, não precisamos estudar curvas de diâmetro constante; elas são idênticas as curvas de largura constante. Por essa razão, chamamos de diâmetro da curva de largura constante o segmento que une os pontos de contato A e B as duas retas de apoio paralelas perpendiculares a uma dada direção.

Teorema 5.17. *Quaisquer dois diâmetros de uma curva \mathcal{K} de largura constante devem intersectar-se no interior ou na curva. Se eles se intersectam na curva, então o ponto de intersecção A é um ponto de canto da curva, e o ângulo exterior da curva em A é maior do que ou igual ao ângulo entre os dois diâmetros.*

Demonstração. Supondo que os diâmetros AD e BC intersectam-se no exterior da curva ou são paralelos (Figura 5.52a). Então eles são os lados de um quadrilátero inscrito $ABCD$. Como a soma dos ângulos de um quadrilátero é 360° , pelo menos um dos ângulos, A, B, C, D é maior do que ou igual a 90° ; suponha que seja D . Então $\overline{AC} > h$, pois $\overline{AD} = h$ e $\overline{AC} > \overline{AD}$ (opõe-se ao maior ângulo no triângulo ACD). Isso contradiz o fato de \mathcal{K} ser de largura constante. Se dois diâmetros AB e AC se intersectam no ponto A da curva \mathcal{K} , (Figura 5.52b), então as retas l_1 e l_2 pelo ponto A , e perpendiculares a AB e AC respectivamente, são retas suportes da curva

conforme discussões que precedem esse teorema. Assim, passa por A mais do que uma reta suporte e, assim sendo, A é um ponto de canto.

Figura 5.52 – Intersecção de diâmetros nas curvas de largura constante.



(a) Hipótese provisória na Dem.: Diâmetros interseccionando-se no exterior da curva \mathcal{K}

(b) Diâmetros com intersecção na curva

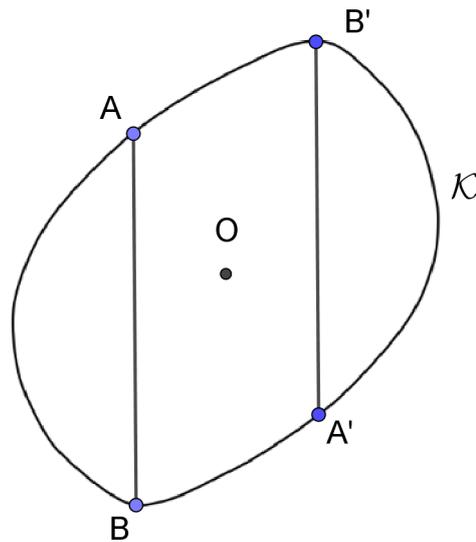
Fonte: produção do autor, 2018.

Por último, se o ângulo BAC é α , então o ângulo entre as retas l_1 e l_2 é também α . O ângulo exterior em A é, portanto, maior do que ou igual a α , como queríamos demonstrar. \square

Teorema 5.18. *O círculo é a única curva de largura constante com um centro de simetria.*

Demonstração. Seja \mathcal{K} uma curva de largura constante com centro de simetria O . É fácil ver que todos os diâmetros de \mathcal{K} passam por O . Supondo que o diâmetro AB de \mathcal{K} não passasse por O . Consideremos os pontos A' e B' pertencentes a \mathcal{K} , simétricos em relação a O (Figura 5.53). Os triângulos AOB e $A'OB'$ seriam congruentes e disso, AB e $A'B'$ seriam congruentes e paralelos. Como nenhum par de pontos da curva de largura constante é maior do que AB , da convexidade de \mathcal{K} e do Teorema 5.6, o segmento $A'B'$ simétrico a AB com respeito a O também seria um diâmetro de \mathcal{K} . Então os diâmetros AB e $A'B'$ seriam paralelos, contrariando o Teorema 5.17.

Figura 5.53 – Ilustração do Teorema 5.53.



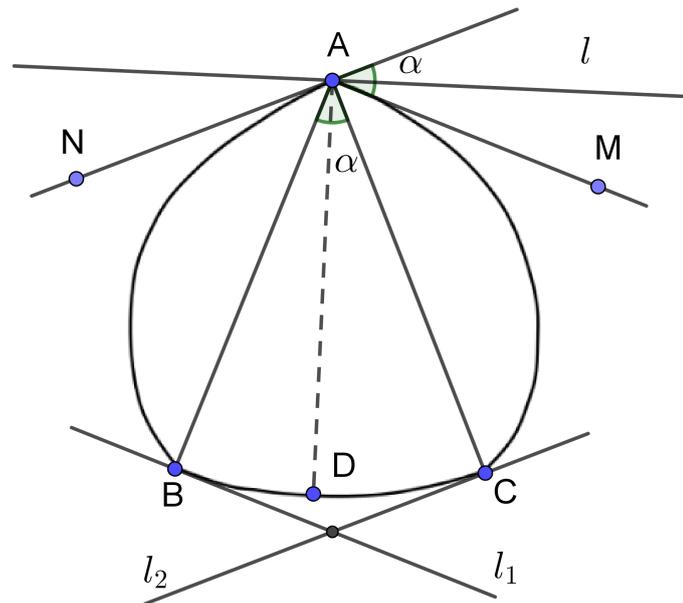
Fonte: produção do autor, 2018.

Assim sendo, todos os diâmetros de \mathcal{K} passam por O . Por causa da simetria de \mathcal{K} , cada diâmetro deve se bissectado por O . Portanto \mathcal{K} é um círculo de raio $\frac{h}{2}$ e centro O e isso encerra a demonstração do teorema. \square

Teorema 5.19 (Curvas de largura constante e pontos irregulares). *Se uma curva de largura constante h tem um ponto de canto, então um dos arcos da curva é um arco circular de raio h . Reciprocamente, se algum arco da curva de largura constante h é um arco de um círculo de raio h então a curva tem um ponto de canto.*

Demonstração. Sejam A um ponto de canto de uma curva \mathcal{K} de largura constante h , e AM e AN os raios tangentes a \mathcal{K} por A (Figura 5.54). Traçamos os segmentos AB e AC , perpendiculares aos raios AM e AN , respectivamente, cada um de largura h . Finalmente, traçamos um arco BC de raio h sobre o ponto A . Provaremos que todos os pontos do arco BC pertencem a \mathcal{K} . Seja D um ponto qualquer do arco BC . Traçamos o segmento AD e denotamos por l a reta por A perpendicular a AD . A reta l é uma reta suporte da curva dada, uma vez que ambos os raios AM e AN estão do mesmo lado de l . Como l é uma reta suporte, e A é seu ponto de contato com a curva, o segmento AD de comprimento h deve ser um diâmetro da curva. Assim, o ponto D está na curva e, pelo mesmo argumento, todos os pontos do arco BC pertencem a curva. Se o ângulo exterior no ponto de canto A é α , então o arco BC corresponde ao ângulo central α (Figura 5.54).

Figura 5.54 – Ilustração do Teorema 5.19



Fonte: produção do autor, 2018.

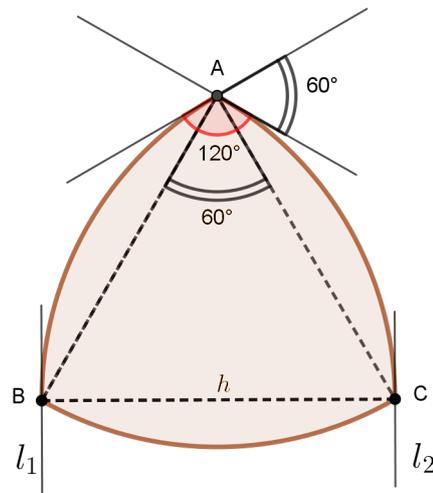
Reciprocamente, supondo que um arco BC de uma curva de largura constante h é um arco circular de raio h (Figura 5.54) e centro A . Traçamos as tangentes l_1 e l_2 ao arco BC em B e C respectivamente. Então, l_1 e l_2 são retas suportes da curva com pontos de contato B e C . Os segmentos AB e AC são perpendiculares a l_1 e l_2 e têm comprimento h ; isto é, AB e AC são diâmetros da curva. Assim, A é um ponto comum a dois diâmetros e pertence a \mathcal{K} e pelo Teorema 5.17, A é um ponto de canto de \mathcal{K} . \square

Teorema 5.20. *O ângulo interior em um ponto de canto A de uma curva de largura constante é maior do que ou igual a 120° . A única curva de largura constante em que um ponto de canto tem um ângulo interior de 120° é o triângulo de Reuleaux.*

Demonstração. Seja A um ponto de canto de uma curva de largura constante h . Se o ângulo no ponto de canto A fosse menor do que 120° , o ângulo exterior em A seria maior do que 60° . Então a curva de largura constante teria um arco de raio h que corresponde a um ângulo maior do que 60° (Figura 5.55). Assim, o comprimento da corda unindo os pontos finais deste arco seria maior do que h , o que é impossível. Portanto, o ângulo interior em A não pode ser menor do que 120° .

Agora supondo que o ângulo interior no ponto de canto A da curva de largura constante h seja 120° . Então a curva tem um arco de raio h cujo ângulo central BAC é 60° (Figura 5.55), e o triângulo ABC é equilátero.

Figura 5.55 – Ilustração do Teorema 5.20



Fonte: produção do autor, 2018.

Uma vez que $BC = h$, BC é um diâmetro. As retas l_1 e l_2 por B e C perpendiculares a BC são retas suportes, desde que a distância entre elas é h . Uma vez que, AB e BC também são diâmetros com o ponto de fronteira B em comum, pelo Teorema 5.17 o ponto B também é um ponto de canto. Isso significa que o arco AC de raio h sobre B , unindo A e C , pertence inteiramente a curva. Da mesma forma o arco de raio h sobre C , unindo A e B , também pertence a curva. Os três pontos dados assim formam um Triângulo de Reuleaux, como queríamos demonstrar. \square

Para finalizar, apresentaremos o teorema abaixo também sem demonstração.

Teorema 5.21. *Dentre todas as curvas de largura constante o círculo tem a maior e o triângulo de Reuleaux a menor área.*

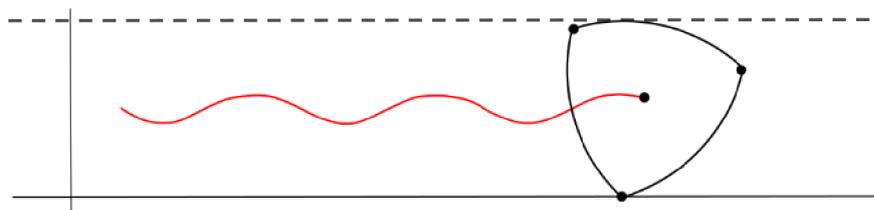
A demonstração desse Teorema pode ser vista em Yaglom e Boltyanskii (1961).

Concluimos essa seção resumindo os fatos mais importantes sobre curvas de largura constante:

- A “*ponta mais aguda*” dentre todas as curvas de largura constante são as do triângulo de Reuleaux e só aparecem nele: os ângulos de canto medindo 120° ;
- Para uma largura fixa, todas as curvas têm o mesmo comprimento de arco;
- A única curva de largura constante com simetria central é o círculo. Por isso o círculo é a única solução para transporte de carga acoplado pelo eixo. A roda é insubstituível!

Deixamos as seguintes propriedades para o leitor pesquisar: Seja um triângulo de Reuleaux visto como uma figura de rolamento. Ao rolar, o centroide da figura percorre uma curva senoidal, conforme podemos ver na Figura 5.56.

Figura 5.56 – Triângulo de Reuleaux e as senoidais



Fonte: produção do autor, 2018.

Se criarmos uma bicicleta com “rodas” em forma de triângulo de Reuleaux, para que o eixo acoplado no centro não se movimente para cima e para baixo, como nas bicicletas comuns, que forma deve ter o piso?

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos nesse trabalho resultados sobre convexidade no plano dentro do contexto da geometria dedutiva escolar. Embora muitos dos resultados discutidos são apresentados normalmente no contexto de disciplinas mais avançadas, conseguimos apresentar resultados não triviais usando linguagem que não exija tantos pré-requisitos. Alguns dos resultados pertencem a áreas técnicas da matemática, como o “Teorema da boca” (Teorema 3.15) que surge na Geometria Computacional. Levando em conta seu alto valor pedagógico, não identificamos nos referenciais teóricos pesquisados, textos pedagógicos que apresentem esse resultado. Para esse e outros poucos resultados apresentados nessa dissertação, tentamos fazer a transposição didática, da linguagem técnica do qual esses resultados pertencem, para a linguagem pedagógica escolar. Os outros tantos resultados pertencem naturalmente a exposição escolar a muito tempo. Como podemos ler, por exemplo, na recente tradução para o inglês do antigo clássico da geometria francesa “Lessons in Geometry: Plane Geometry” de Jacques Hadamard (Hadamard (2008)) que contém muitos dos resultados expostos no Capítulo 3. Sobre as propriedades gerais das figuras e curvas convexas, resgatamos um pouco da prodigiosa escola russa e seu sucesso na apresentação da matemática. Copiados e reinventados por outras nações mundo à fora, o modelo de apresentação dos matemáticos-pedagogos russos nos tem muito a ensinar. Sobre nosso tema, podemos continuar pesquisas em vários caminhos. No contexto das figuras e curvas planas, a exploração de problemas isoperimétricos, as Δ -curvas e outras curvas que podem “rolar” dentro de outras. A aplicação “intuitiva” do Teorema do Valor Médio (clássico teorema apresentado nas disciplinas de cálculo diferencial e integral) a teoria das curvas proporciona resultados interessantes. A apresentação das propriedades geométricas das cônicas obtidas pela geometria dedutiva, conforme fizemos nessa dissertação, descortinam propriedades surpreendentes dessas curvas. Curvas essas que são expostas nos nossos livros, em quase sua totalidade, utilizando o método de coordenadas, resumindo a meras apresentações de equações sem mostrar suas propriedades geométricas. Alguns resultados sobre as curvas de largura constante, que não foram demonstrados, abrem mais um caminho de continuidade desse estudo. A apresentação da geometria no nível que expomos, acreditamos que possa ser utilizado as noções qualitativas da topologia geométrica. Estudos feitos por Jean Piaget mostram que os desenhos geométricos das crianças começam por construir relações primitivas de proximidade, separação, ordem e fronteira, típicos da topologia, ao invés de relações métricas e projetivas como normalmente poderíamos imaginar (Veja Piaget e Inhelder (1956)). A forma como apresentar esses temas na geometria elementar é um caminho de estudo interessante. O estudo de propriedades análogas para o espaço é, dentre todas, o mais natural dos caminhos. Muitos dos resultados apresentados

não têm seus análogos a três dimensões. Como principal exemplo a triangularização. Não é possível, em todos os casos fazer uma decomposição de um poliedro por meio de tetraedros. O estudo das possibilidades de decomposição de poliedros por meio de tetraedros é ainda um problema em aberto para a matemática. Pelos motivos explanados, achamos que a pesquisa apresentou resultados favoráveis e abriu ideias para novas pesquisas originais, que possam futuramente representar algum progresso na forma como a matemática vem sendo apresentada e ensinada no âmbito da geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXANDROV, A. **Convex Polyhedra**. Berlim: Springer-Verlag, 2005.
- ANDRADE, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de Poincaré**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Textos Universitários).
- BALDOR, J. A. **Geometria plana y del espacio: Con una intróduccion a la trigonometria**. México: Publicaciones cultural, 2004.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).
- BATISTA, E. **Áreas, volumes e equidecomponibilidade**. SBM, 2004. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M51.pdf>>. Acesso em: 20 abr. 2018.
- BIRKHOFF, G. D. A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. **Annals of Mathematics**, 1932. JSTOR, p. 329–345, 1932.
- BIRKHOFF, G. D.; BEATLEY, R. **Basic geometry**. 3. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 2001.
- BOLTYANSKII, V. G. **Figuras equivalentes y equicompuestas**. Moscou: Editorial Mir, 1981. (Lecciones populares de matemáticas).
- BOLTYANSKII, V. G.; EFREMOVICH, V. **Intuitive Combinatorial Topology**. New York: Springer-Verlag, 2001.
- BOUCHER, C. **A Rotating Reuleaux Triangle**. Wolfram Demonstrations Project, 2018. Disponível em: <<http://demonstrations.wolfram.com/ARotatingReuleauxTriangle/>>. Acesso em: 20 abr. 2018.
- COLE, D. E. The wankel engine. **Scientific American**, 1972. Scientific American, a division of Nature America, Inc., v. 227, n. 2, p. 14–23, 1972. ISSN 00368733, 19467087. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/24927402>>.
- CORREA, L. P. R.; FERREIRA, C. E. Teorema da galeria de arte e triangularização de polígonos. 2009. São Paulo, 2009. Disponível em: <<https://www.linux.ime.usp.br/~piva/mac499/>>. Acesso em: 01 dez. 2017.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?: Uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- COXETER, H. S. M. **Regular polytopes**. 3. ed. New York: Dover Publications, INC., 1973.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Geometria Plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005. (Fundamentos de Matemática Elementar).
- DORRIE, H. **100 Great problems of elementar mathematics: Their history and solution**. New York: Dover Publications Inc, 1965.

FIGUEIREDO, L. H. de; CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Computacional**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

FLEGG, H. G. **From Geometry to Topology**. New York: Dover Publications Inc, 2001.

GARDNER, M. **The Unexpected Hanging**: And other mathematical diversions. Chicago: The University of Chicago Press, 1991.

GELFAND, I.; GLAGOLIEVA, E.; KIRILLOV, A. **El metodo de coordenadas**. Moscou: Editorial Mir, 1981.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GLEIFTNER, W.; ZEITLER, H. The reuleaux triangle and its center of mass. 2000. v. 37, p. 335–344, 05 2000.

GOLOVINÁ, L. I.; YAGLOM, I. M. **Inducción en la geometría**. Moscou: Editorial Mir, 1981. (Lecciones populares de matemáticas).

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history**. 4. ed. New York: Macmillan, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HADAMARD, J. **Lessons in geometry**: Translated by mark saul. Providence: AMS, 2008.

HADWIGER, H.; DEBRUNNER, H. **Combinatorial Geometry in the Plane**: Translated by victor klee. New York: Dover Publications Inc, 2015.

HONSBERGER, R. **Ingenuity in mathematics**. Washington: Mathematical Association of America, 1970. (New Mathematical Library).

JANICH, K. **Topology**. New York: Springer-Verlag, 1983. (Undergraduate Texts in Mathematics).

JR, E. P. **Pick's Theorem**. Wolfram Demonstrations Project, 2018. Disponível em: <<http://demonstrations.wolfram.com/PicksTheorem/>>. Acesso em: 20 abr. 2018.

KASNER, E.; NEWMAN james. **Matemáticas e Imaginación**. Barcelona: Salvat Editores S.A., 1994.

KELLY, P. J.; WEISS, M. L. **The geometry and convexity**: A study in mathematical methods. New York: Dover Publications Inc, 2009.

LAY, S. R. **Convex sets and their applications**. New York: Wiley-Interscience publication, 1982. (Pure and applied mathematics).

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do professor de matemática).

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**: Comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 2009. (Coleção do professor de matemática).

LIU, A. C. F. Lattice points and pick's theorem. **Mathematics Magazine**, 1979. Mathematical Association of America, v. 52, n. 4, p. 232–235, 1979. ISSN 0025570X, 19300980. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2689416>>.

LYUSTERNIK, L. A. **Convex Figures and Polyhedra**. Boston: D. C. Heath and Company, 1966.

MEISTERS, G. H. Polygons have ears. **The American Mathematical Monthly**, 1975. Mathematical Association of America, v. 82, n. 6, p. 648–651, 1975.

NEWS, W. F. A note on rectifiable curves. **Edinburgh Mathematical Notes**, 1956. Cambridge University Press, v. 40, p. 12–14, 1956.

OROSZ, I. **Perspective machine**. 2009. Disponível em: <<http://utisz.blogspot.com.br/2009/03/perspective-machine.html>>. Acesso em: 09 abr. 2018.

O'ROURKE, J. **Art gallery theorem and algorithms**. New York: Oxford University Press Inc., 1987. (International Series of Monographs on Computer Science).

O'ROURKE, J.; DEVADOSS, S. L. **Discrete and Computational Geometry**. New Jersey: Princeton university press, 2011.

ORTIZ, M. **Koch Snowflake**. Geogebra Institute, 2013. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/material/show/id/bsxMrfPR#download-popup>>. Acesso em: 22 abr. 2018.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **The child's conceptions of space**. London: Routledge & Kegan Paul, 1956.

POGORELOV, A. V. **Geometria Elemental**. Moscou: Editorial Mir, 1974.

RADEMACHER, H.; TOEPLITZ, O. **The Enjoyment of Mathematics: Selections from mathematics for the amateur**. New Jersey: Princeton University Press, 1957.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Sá, C. C. de; ROCHA, J. **Treze viagens pelo mundo da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do professor de matemática).

SHASHKIN, Y. **Característica euleriana**. Moscou: Editorial Mir, 1989. (Lecciones populares de matemáticas).

VOLOCH, J. Curvas de largura constante. **Matemática Universitária**, 1987. n. 5, p. 69–75, 1987.

YAGLOM, A. M.; BOLTYANSKII, V. G. **Convex Figures**. New York: Holt Rinehart and Winston, 1961.

YAGLOM, A. M.; YAGLOM, I. M. **Challenging mathematical problems with elementary solutions: Combinatorial analysis and probability theory**. New York: Dover Publications Inc, 1987.

ZEITLER, H. Axiomatics of geometry in school and in science. **For the Learning of Mathematics**, 1990. FLM Publishing Association, Montreal, v. 10, n. 2, p. 17–24, 1990.

Nesse estudo apresentamos a teoria da convexidade para figuras geométricas e curvas no plano. Iniciamos demonstrando os resultados fundamentais da geometria dedutiva, seguindo uma axiomática criada para uso nas salas de aula do Ensino Médio. A axiomática que adotaremos será aquela proposta por Rezende e Queiroz (2008), que adota os axiomas do School Mathematics Study Groups (SMSG). Os principais resultados sobre figuras convexas e estreladas serão fornecidos e uma sequência de resultados sobre polígonos convexos será demonstrada para depois abordar os mesmos resultados e outros generalizados para polígonos não convexos.

Nesse último caso será apresentada uma demonstração do Teorema da Curva de Jordan para polígonos. Comparações entre os casos convexos e não convexos serão feitas. Após os resultados sobre polígonos, aplica-se a teoria no cálculo de áreas, centro de massa, problemas combinatórios e o problema da galeria de arte. Na sequência estuda-se as principais propriedades das figuras e curvas convexas em geral, comparando novamente com figuras e curvas não convexas. Uma demonstração de um teorema que encerra a discussão sobre o problema da galeria de arte será apresentada. Para finalizar estudaremos as curvas de largura constante e suas aplicações práticas.

Orientador: Dr. Rogério de Aguiar

Joinville, 2018