



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**FUNÇÃO QUADRÁTICA: uma proposta
para o Ensino Médio**

CAROLINE KOSLOSKI

JOINVILLE, SC
2018

CAROLINE KOSLOSKI

FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas –CCT, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

JOINVILLE, SC

2018

Kosloski, Caroline

Função quadrática: uma proposta para o Ensino
Médio / Caroline Kosloski. - Joinville , 2018.
82 p.

Orientadora: Elisandra Bar de Figueiredo
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática
em Rede Nacional, Joinville, 2018.

1. Função quadrática. 2. Sequência didática. 3.
Parábola. 4. Ensino. I. Bar de Figueiredo,
Elisandra. II. Universidade do Estado de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

Função Quadrática: Uma Proposta para o Ensino Médio

por

Caroline Kosloski

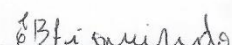
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

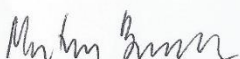
MESTRA EM MATEMÁTICA

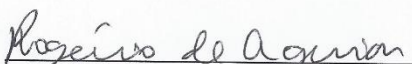
Área de concentração em "Ensino de Matemática"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:


Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)


Prof. Dr. Mateus Bernardes
UTFPR/Curitiba


Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC

Joinville, SC, 31 de julho de 2018.

RESUMO

O conteúdo de funções quadráticas está na grade curricular do nono ano do Ensino Fundamental e no primeiro do Ensino Médio e geralmente é trabalhado de modo mecânico com apresentação de fórmulas e resultados com poucas justificativas. Buscando uma alternativa a essa apresentação, temos como objetivo desse trabalho propor uma sequência didática que possa ser utilizada no ensino da função quadrática no Ensino Médio e que vise explorar esse conteúdo num contexto histórico, resgatando o método babilônico para determinar as raízes, utilizando a forma canônica para obter raízes e extremos, relacionando o seu gráfico com a cônica parábola, ilustrando e simulando a propriedade refletiva da parábola num contexto de aplicação física, falando da determinação da parábola a partir de três pontos e explorando seus pontos de máximo e mínimo em problemas. Essa sequência foi aplicada em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Jaraguá do Sul, Santa Catarina, e pudemos vivenciar uma prática diferente da usual que de modo geral mostrou pontos positivos na receptividade e envolvimento dos alunos.

Palavras-chave: Função quadrática. Sequência Didática. Parábola. Ensino.

ABSTRACT

The subject of quadratic functions is part of the curriculum of the ninth year of Elementary School and the first year of High School, and is usually taught mechanically with the presentation of formulas and results with few justifications. Seeking an alternative to such presentation, we aim to propose a didactic sequence that can be used to teach the quadratic function in High School and to explore the quadratic function in a historical context, bringing back the Babylonian method to determine the roots, using the canonical form to find roots and extremes, relating its graphic to the conic parabola, illustrating and simulating the reflective property of the parabola with an application in physics, addressing the determination of the parabola from three points and exploring problems about the maximum and minimum points. This sequence was applied to a first-year High School class from a State School in Jaraguá do Sul, Santa Catarina, and we were able to experience a practice that was out of the ordinary which, in general, yielded positive aspects regarding the receptivity and involvement of students.

Keywords: Quadratic function. Didactic Sequence. Parabola. Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Solução da propriedade de Menaecmus	13
Figura 2 – Obtenção das cônicas antes de Apolônio	16
Figura 3 – Seções de cone acutângulo, retângulo e obtusângulo	17
Figura 4 – Nomenclatura das cônicas através da aplicação de áreas	17
Figura 5 – Cortes do cone pela construção de Apolônio	18
Figura 6 – Esferas de Dandelin: Parábola.....	21
Figura 7 – Parábola.....	30
Figura 8 – Parábola.....	32
Figura 9 – Propriedade refletora da parábola.....	33
Figura 10 – Tangente a uma parábola	34
Figura 11 – Inclinação da tangente de uma parábola	35
Figura 12 – Ângulos da tangente à parábola.....	36
Figura 13 – Ilustração da Lenda de Arquimedes.....	37
Figura 14 – Farol parabólico.....	38
Figura 15 – Antena Parabólica	38
Figura 16 – Objetivos do Plano anual da escola	39
Figura 17 – Sumário do livro Quadrante Matemática	39
Figura 18 – Sumário do livro da editora Leya - Matemática: interação e tecnologia	40
Figura 19 – Algumas das imagens de parábolas trazidas pelos alunos	47
Figura 20 – Aluna manuseando o cone 3D	48
Figura 21 – Visualização das seções cônicas	49
Figura 22 – Aplicações da propriedade refletora da Parábola.....	49
Figura 23 – Prédio curvo mostrado na reportagem	50
Figura 24 – Carro com a lataria e espelho com marcas de derretimento devido a reflexão da luz solar	50
Figura 25 – Papel incendiado pelos raios concentrados no foco do refletor	51
Figura 26 – Tentativa de reproduzir a lenda de Arquimedes.....	51
Figura 27 – Alunos construindo o refletor parabólico	52
Figura 28 – Alunos verificando a temperatura no foco da parábola	53
Figura 29 – Definição da parábola: relatório do Grupo 1.....	54
Figura 30 – Metodologia e descrição das atividades: relatório do Grupo 1.....	54
Figura 31 – Resultados das medições: relatório do Grupo 2	55
Figura 32 – Anexos: relatório do Grupo 1	55
Figura 33 – Trecho dos relatórios: conclusões.....	56
Figura 34 – Função quadrática cujo gráfico contém três pontos dados	57
Figura 35 – Solução de uma questão da lista de exercícios feita por uma aluna.....	58
Figura 36 – Representação do gráfico de uma função quadrática por um aluno	59
Figura 37 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$	62
Figura 38 – Solução de um aluno: gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$	63
Figura 39 – Alunos resolvendo a lista de exercícios	65
Figura 40 – Aluna resolvendo a questão.....	66
Figura 41 – Solução da aluna.....	66

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 ASPECTOS HISTÓRICOS: CÔNICAS.....	11
3 REFERENCIAL TEÓRICO.....	20
3.1 A PARÁBOLA E AS ESFERAS DE DANDELIN-QUETELET	20
3.2 BABILÔNIOS E A EQUAÇÃO QUADRÁTICA.....	22
3.3 FORMA CANÔNICA DO TRINÔMIO	24
3.4 FUNÇÃO QUADRÁTICA DEFINIDA POR TRÊS PONTOS.....	26
3.5 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	30
3.6. PROPRIEDADE REFLETORA DA PARÁBOLA.....	32
3.7 ENSINO DA PARÁBOLA NO ENSINO BÁSICO	38
4 PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO	42
4.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE	42
4.2 A CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	44
4.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES	45
4.3.1 Atividade 1: sistemas lineares e completando quadrados.....	45
4.3.2 Atividade 2: parábola como seção cônica e sua propriedade refletiva.....	46
4.3.3 Atividade 3: construção do Refletor parabólico.	52
4.3.4 Atividade 4: identificação da lei da função quadrática a partir de 3 pontos da parábola	57
4.3.5 Atividade 5: método babilônico.....	59
4.3.6 Atividade 6: forma canônica do trinômio.....	61
4.3.7 Atividade 7: problemas de máximos e mínimos	64
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	68
REFERÊNCIAS.....	70
APÊNDICES	72
APÊNDICE A – CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA	72
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO DOS ALUNOS.....	73
APÊNDICE C – PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS	74
APÊNDICE D – SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS.....	75
APÊNDICE E – TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS	76
APÊNDICE F – QUARTA LISTA DE EXERCÍCIOS.....	77
APÊNDICE G – QUINTA LISTA DE EXERCÍCIOS.....	78
APÊNDICE H – IMAGENS QUE OS ALUNOS TROUXERAM NA AULA INICIAL....	80

INTRODUÇÃO

O conteúdo de funções quadráticas é trabalhado no último ano do Ensino Fundamental e também no primeiro ano do Ensino Médio, geralmente de forma mecânica, sendo dadas várias fórmulas (fórmula do vértice, fórmulas das raízes) e feitos muitos exercícios de repetição. Dessa forma os alunos, na maioria das vezes, compreendem o processo a ser feito, mas não conseguem relacionar o conteúdo a nenhuma aplicação no seu cotidiano. Nesse mesmo contexto, a parábola aparece dentro do estudo da função quadrática, como seu gráfico, sem considerar as propriedades da parábola, sua definição como uma cônica e suas aplicações práticas.

A proposta desse trabalho é explorar um pouco esse tema e propor um modo diferente de trabalhar esse conteúdo com os alunos do primeiro ano.

A ideia de apresentar a parábola como uma seção cônica deve-se a uma tentativa de estabelecer uma relação entre a geometria e a álgebra. Pela experiência da autora, a maneira como este conteúdo é abordado hoje, o aluno aprende função quadrática no primeiro ano do Ensino Médio, e o conteúdo de cônicas é visto no terceiro ano, e nenhuma relação é feita entre os conteúdos. Pensamos que o aluno, já no primeiro ano, poderia compreender a parábola como uma seção cônica, mesmo que não seja feito um estudo mais aprofundado sobre as suas propriedades geométricas.

Sendo assim, o objetivo principal desse trabalho é proporcionar aos alunos um método de aprendizagem que priorize a construção do conhecimento através do conhecimento histórico e interpretação dos problemas, além da visualização da utilização do conteúdo matemático no seu dia-a-dia.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 2 será apresentada uma pesquisa histórica sobre as cônicas, a motivação para seu estudo e os avanços obtidos por diversos matemáticos. No Capítulo 3 será apresentado o embasamento teórico matemático sobre as funções quadráticas e seus gráficos, as parábolas, que é a base para a construção das atividades da sequência didática. No Capítulo 4 será apresentada a sequência didática, dividida em 7 atividades, que aborda todo o conteúdo de função quadrática estudado no primeiro ano do Ensino Médio, assim como a análise qualitativa dos resultados obtidos com a aplicação da sequência

didática. Já no Capítulo 5 serão apresentadas as considerações finais deste trabalho e possibilidades para futuros trabalhos.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS: CÔNICAS

A civilização grega trouxe várias contribuições para o avanço da Matemática. Uma das maiores contribuições dos matemáticos helenísticos (século VI a.C. até o século V d.C.) foi o desenvolvimento do pensamento abstrato e a introdução do método axiomático, ao contrário de civilizações anteriores como os egípcios e babilônios que aplicavam a matemática de maneira utilitária.

Podemos destacar três problemas que desempenharam papel importante no desenvolvimento da matemática, que ficaram conhecidos como os três problemas clássicos da geometria grega:

1. Quadratura do círculo: dado um círculo, construir um quadrado com a mesma área;
2. Trissecção do ângulo: dado um ângulo, construir um ângulo com um terço da amplitude;
3. Duplicação do cubo: dado um cubo, construir outro cubo com o dobro do volume do anterior.

Apesar de fácil compreensão dos enunciados, a solução desses problemas não é simples. É importante lembrar que resolver um problema para os gregos significava resolvê-lo através de construções com régua e compasso (que hoje sabemos ser impossível). Porém a busca de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas.

O problema da duplicação do cubo foi o que deu início ao estudo das cônicas. A origem deste problema não é certa, mas existem lendas sobre sua criação. A mais famosa é a da duplicação do altar de Apolo:

Conta uma lenda que em 429 a.C., durante o cerco espartano na Guerra do Peloponeso, uma peste matou um quarto da população de Atenas, e que a profunda impressão criada por esta catástrofe talvez tenha originado um segundo problema matemático famoso. Diz-se que uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Os atenienses, ao que se diz, obedientemente dobraram as dimensões do altar, mas isto não adiantou para afastar a peste. É claro, o altar tivera seu volume multiplicado por oito e não por dois. Essa, diz a lenda, era a origem do problema da 'duplicação do cubo', que a partir daí foi geralmente designado como 'problema deliano' – dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro. (BOYER, 1996, p.44)

O primeiro grande passo para a solução deste problema foi dado por Hipócrates de Quios (470 – 410 a.C.). Ele propunha encontrar duas médias proporcionais entre segmentos de comprimento a e $2a$, ou seja, achar x e y tal que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Da primeira igualdade temos que $x^2 = ay$ e da segunda igualdade que $y^2 = 2ax$. Substituindo o valor de y na segunda igualdade temos que $x^3 = 2a^3$. Assim dado o cubo de lado a encontramos um outro de lado x tal que o volume do segundo é o dobro do volume do primeiro. Porém não há construção geométrica para esta dupla proporção.

Menaecmus (380 – 320 a.C.) foi quem descobriu a existência de curvas com essa propriedade, que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone.

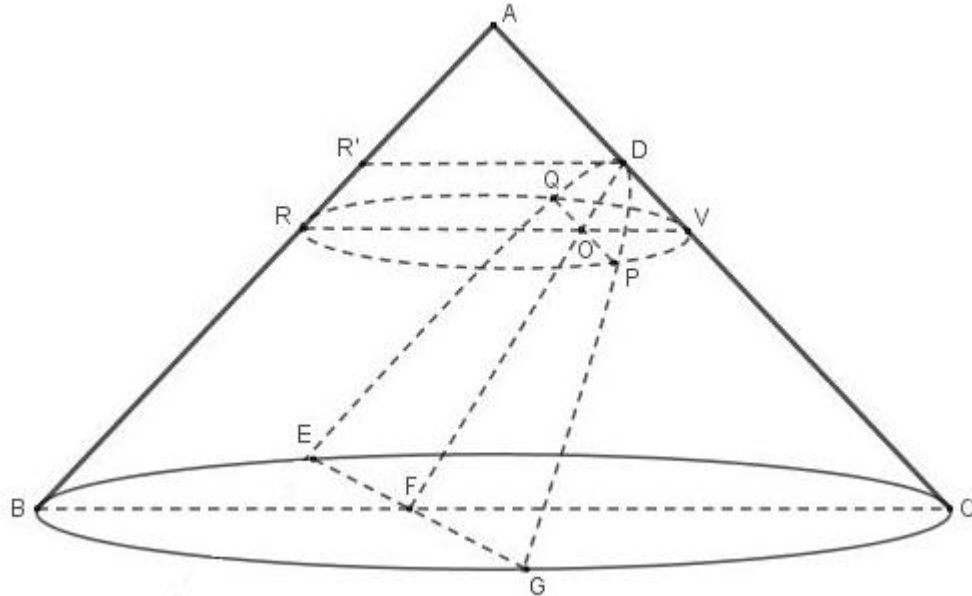
Segundo Boyer (1996), Menaecmus descobriu que, cortando um cone circular reto simples, com ângulo gerador de 45° , por um plano perpendicular à uma geratriz do cone, a curva de interseção é tal que, em linguagem de geometria analítica atual, sua equação pode ser escrita na forma $y^2 = lx$, em que l é uma constante que depende da distância do plano ao vértice chamada de *latus rectum*. Não é conhecida a maneira como Menaecmus deduziu essa propriedade, mas ela depende apenas de teoremas de geometria elementar. Como vemos na demonstração do Teorema 2.1 a seguir.

Teorema 2.1 Seja ABC um cone com ângulo gerador de 45° e seja π um plano perpendicular à uma geratriz do cone ABC, representado na Figura 1. Então, a interseção de π com o cone pode ser escrita na forma $y^2 = lx$, em que l é uma constante que depende da distância do plano ao vértice A.

Demonstração: Sendo AC a geratriz do enunciado e D a interseção de π com a geratriz, seja EDG a curva interseção entre π e o cone, conforme ilustra a Figura 1. Então, por um ponto P qualquer da curva, façamos passar um plano α perpendicular ao eixo do cone (pela posição da Figura 1 seria um plano horizontal). Seja então PVR o círculo dado pela interseção do cone com o plano α . Como a interseção entre planos é uma reta nota-se que existe um ponto Q, o outro ponto de interseção da curva EDG

com o círculo, tal que a interseção dos planos π e α é a reta que contém os pontos P e Q.

Figura 1 – Solução da propriedade de Menaecmus



FONTE: adaptado de Oliveira, 2016, p.57.

Das simetrias envolvidas resulta que a reta PQ é perpendicular a RV em O. Para verificar esse fato, basta observar que o plano que contém o eixo do cone e o ponto D é perpendicular ao plano α , contém o eixo de simetria da curva EDG e contém o diâmetro, denotado por RV, do círculo PVR.

Segue então, da propriedade das cordas, que

$$|OQ||OP| = |OR||OV|. \quad (2.1)$$

Logo, como $|OP| = |OQ|$, temos que OP é a média geométrica entre RO e OV. Além disso, da semelhança dos triângulos R'DA (R'D paralelo a RV) e ABC segue-se que

$$\frac{|R'D|}{|AR'|} = \frac{|BC|}{|AB|}. \quad (2.2)$$

Da semelhança dos triângulos OVD e BCA segue que

$$\frac{|OV|}{|DO|} = \frac{|BC|}{|AB|}. \quad (2.3)$$

Sejam $y = |OP|$ e $x = |OD|$ as coordenadas do ponto P no plano π , utilizando as equações 2.1, 2.2 e 2.3, temos

$$y^2 = |R'D||OV| = |AR'| \frac{|BC|}{|AB|} |DO| \frac{|BC|}{|AB|}. \quad (2.4)$$

Como $|AR'| = |AD|$ e $x = |OD|$ concluimos que

$$y^2 = |AD| \frac{|BC|^2}{|AB|^2} x. \quad (2.5)$$

Sendo o triângulo retângulo BAC isósceles temos ainda $|BC|^2 = 2|AB|^2$, e substituindo na equação 2.5 chegamos em:

$$y^2 = 2|AD|x \quad (2.6)$$

finalmente, basta definir $l = 2|AD|$.

■

Menaecmus provavelmente conhecia muitas das propriedades hoje familiares das seções cônicas, inclusive as assíntotas da hipérbole, que lhe permitiriam operar com equivalentes das equações modernas que usamos. Proclo (412 - 485) diz que Menaecmus foi um daqueles que “tornaram toda a geometria mais perfeita”, mas pouco sabemos do que fez realmente. (BOYER, 1996, p.66).

O final do século III a.C. foi o período de maior popularidade dos três problemas clássicos. Esses problemas constituem o ponto comum dos trabalhos de diversos geômetras da época. Três matemáticos se destacaram aos demais da época: Euclides (c. 300 a.C.), Arquimedes (287 – 212 a.C.) e Apolônio (262 – 190 a.C.). É por causa da obra deles que o período de cerca de 300 a 200 a.C. foi denominado de “Idade Áurea” da matemática grega.

Durante todo o período helenístico a cidade de Alexandria permaneceu o foco matemático do Ocidente, mas um dos maiores matemáticos de toda a antiguidade, Arquimedes nasceu e viveu em Siracusa, conhece-se pouco sobre sua vida, mas pode ter estudado por algum tempo em Alexandria com os estudantes de Euclides. Arquimedes fez diversas contribuições à Física, principalmente nos campos da hidrostática e da estática, e inventou vários tipos de máquinas para usos civil e militar.

Costumava utilizar o método da *neusis*¹, que não se encaixava nos padrões euclidianos pois necessitava de uma reta graduada.

Para Roque (2012) os demais geômetras da época parecem ter sofrido influência direta de Arquimedes, o que pode ser constatado pelo uso de métodos mecânicos, como a espiral e de diversos tipos de *neusis*. Contudo, nota-se também que eles se distanciaram um pouco do estilo de Arquimedes, uma vez que se dedicaram à procura de métodos alternativos em suas construções, indicando uma possível necessidade de ir além dos procedimentos disponíveis na época. Os escritos de Euclides ofereciam uma alternativa.

A busca de novos métodos de construção inspirados no paradigma euclidiano serviu de motivação para os trabalhos de Apolônio (262 – 190 a.C.) desenvolvidos na virada do século III a.C. para o século II a.C. Apolônio parece ter-se considerado rival de Arquimedes; assim, tratou de vários assuntos em comum. Pouco se conhece sobre a vida de Apolônio: nasceu em Perga, sul da Ásia Menor, quando jovem foi para Alexandria a fim de estudar com os sucessores de Euclides, e acabou ficando na cidade por longo tempo. Posteriormente visitou Pérgamo, no oeste da Ásia Menor, onde havia uma universidade e uma biblioteca recentemente criadas nos moldes das de Alexandria. Retornou depois para Alexandria onde permaneceu até sua morte. (EVES, 2004).

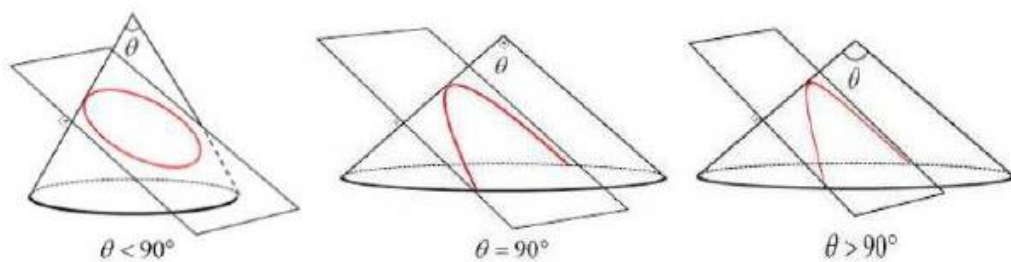
Segundo Roque (2012) uma das preocupações de Apolônio era apresentar soluções por meio de cônicas para os problemas clássicos, como a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo, a fim de eliminar as soluções por *neusis* e por curvas especiais usadas por Arquimedes e outros. A obra mais famosa de Apolônio, *As Cônicas*, conta com cerca de 400 proposições em seus oito livros. É um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores. Dessa obra um dos livros se perdeu, apenas os quatro primeiros livros existem ainda em grego; e os três seguintes foram traduzidos para o árabe no século IX, e essa versão se preservou. Em 1710 Edmund Halley fez uma tradução latina dos sete livros, e daí então apareceram edições em muitas línguas.

¹ Técnica de construção que não pode ser classificada como construção com régua e compasso, pois utiliza régua graduada.

Nessa obra, Apolônio define seções cônicas do modo mais geral possível, como seções de cones, usando métodos muito característicos dos Elementos de Euclides. Apolônio segue o estilo formal dos Elementos até nos detalhes do enunciado de certas proposições.

Segundo Eves (2004), antes do tempo de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos de cone circular reto: conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso (Figura 2).

Figura 2 – Obtenção das cônicas antes de Apolônio



Fonte: CERQUEIRA, 2015, p.4.

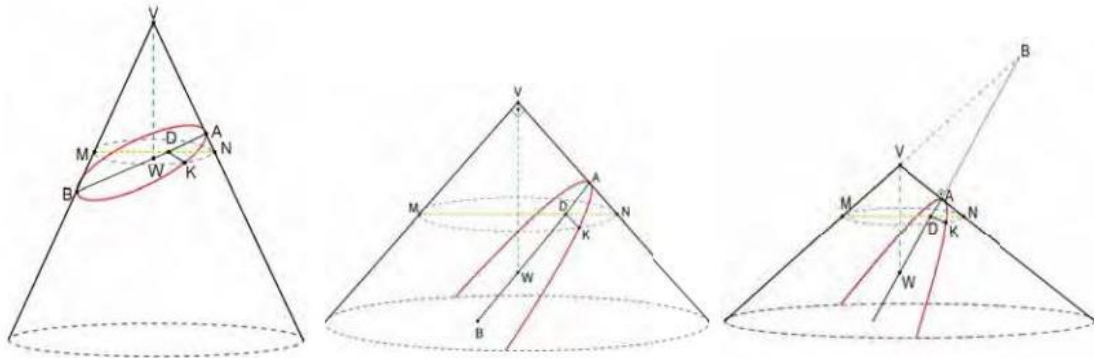
Apolônio, no livro I de *As Cônicas*, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de seções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de seção. Esse foi um passo importante para relacionar os três tipos de curvas. Uma segunda generalização importante se efetuou quando Apolônio provou que o cone não precisava ser reto – isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular – mas pode também ser um cone oblíquo ou escaleno.

Apolônio também substituiu o cone de uma só folha por um duplo. Ele, na verdade, deu a mesma definição de cone circular usada hoje:

Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. (BOYER, 1996, p. 100).

Essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que nos é familiar hoje. Quanto à nomenclatura, as curvas não tinham tido designações além de descrições do modo pelo qual tinham sido descobertas – seções de cone acutângulo (*oxytome*), seções de cone retângulo (*orthotome*) e seções de cone obtusângulo (*amblytome*) (Figura 3).

Figura 3 – Seções de cone acutângulo, retângulo e obtusângulo

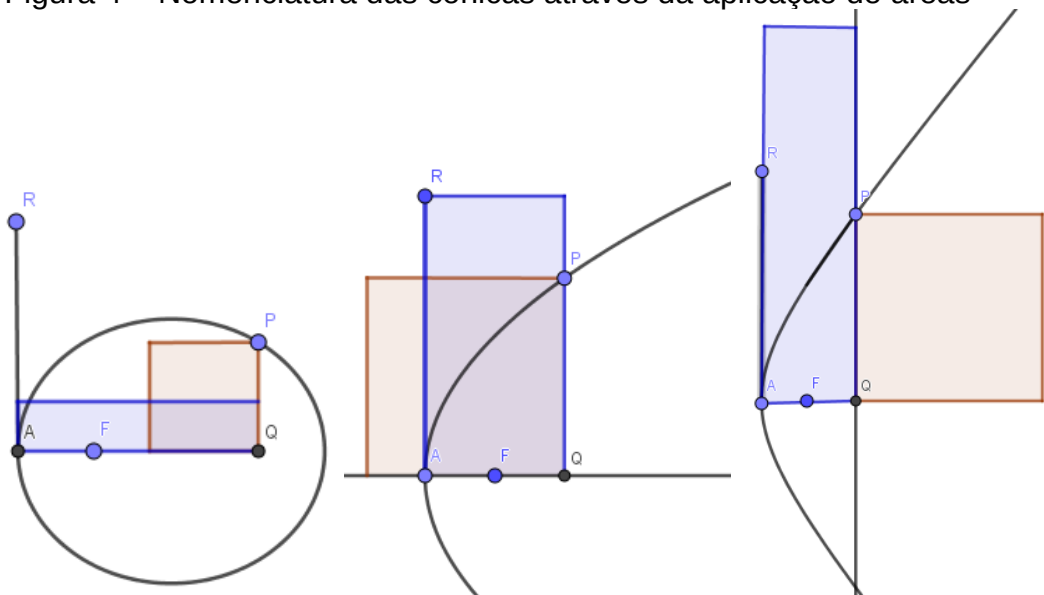


FONTE: LOPES, 2011, p.36.

Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta (isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento) eles diziam que se tinha um caso de “*ellipsis*”, “*parabole*” ou “*hyperbole*”, conforme a base do retângulo era menor do que segmento de reta, igual ou maior, como ilustra a Figura 4.

Seja então AB o eixo principal de uma cônica, P um de seus pontos e Q o pé da perpendicular por P e AB. Por A, que é o vértice da cônica, trace a perpendicular a AB e marque nela uma distância AR igual ao que chamamos hoje *latus rectum* ou parâmetro p , da cônica. Aplique a AR um retângulo tendo AQ como um dos lados e de área igual a $(PQ)^2$. Conforme a aplicação fique aquém do segmento de reta AR, coincida com ele ou o exceda, Apolônio chamava a cônica de elipse, parábola ou hipérbole. (EVES, 2004, p.199, grifo do autor).

Figura 4 – Nomenclatura das cônicas através da aplicação de áreas



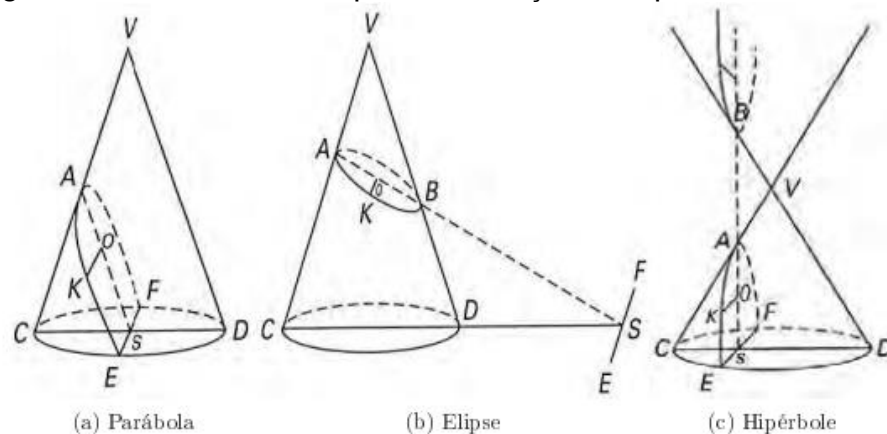
Fonte: a autora, 2018

Para Boyer (1996), os estudos de Apolônio eram tão semelhantes aos atuais que muitas vezes ele antecipa a Geometria Analítica de Descartes (1596-1650). Seus métodos não são diferentes do uso de sistemas de coordenadas. Embora Apolônio não se reportasse a um sistema de eixos, via de regra, utilizava um par de diâmetros conjugados como equivalentes aos eixos oblíquos. As *cônicas* representaram uma revolução no estudo da área, servindo como base para matemáticos de diversas gerações:

assim como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em um nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos. (BOYER, 1996, p.99, grifo do autor).

Para definir as seções cônicas, Apolônio cortou um cone VCD por um plano através do eixo. A interseção desse plano com a base do cone é o diâmetro CD. O triângulo resultante ΔVCD é chamado de triângulo axial. A parábola, a elipse e a hipérbole são definidas como as interseções deste cone por determinados planos que cortam o segmento CD ou o prolongamento de CD sobre uma reta EF conforme ilustra a Figura 5. Essa reta EF é ortogonal a CD. A reta AS é a interseção dos cortes planos com o triângulo axial.

Figura 5 – Cortes do cone pela construção de Apolônio



FONTE: LOPES, 2011, p.41.

Assim, as cônicas são definidas da seguinte forma:

- Se AS é paralelo ao lado do triângulo axial, a seção é uma parábola;
- Se AS interceptar ambos os lados do triângulo axial, a seção é uma elipse;

- Se AS interceptar um dos lados do triângulo axial e o prolongamento do outro lado dado além de V, a seção é uma hipérbole. Nessa situação, existem dois ramos da curva, ao contrário da hipérbole gerada pelo cone de ângulo obtuso.

Após os trabalhos de Euclides, Arquimedes e Apolônio, a matemática grega passou por um declínio e demorou para que qualquer progresso na teoria ou aplicações das cônicas ocorresse. Os estudos de Apolônio sobre as cônicas contribuíram para os estudos de Ptolomeu (90 – 168 d.C.). Além disso, as cônicas de Apolônio exerceram influência sobre os estudos de Galileu (1564 - 1642) e Kepler (1571 - 1630). Kepler tinha interesse na possibilidade de aplicações das cônicas à astronomia, enquanto Galileu nas aplicações à física. O nome foco deve-se a Kepler e tem origem na palavra *focus*, latim para lareira. Galileu contribuiu com a dinâmica através de sua análise do movimento dos projéteis numa componente horizontal uniforme e uma componente vertical uniformemente acelerada. Foi o primeiro a mostrar que a trajetória de um projétil, desprezando a resistência do ar, é uma parábola. Kepler teve várias contribuições para o estudo das cônicas, em 1609 anunciou suas duas primeiras leis de astronomia. A primeira diz que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos. Por volta de 1686, Newton (1643 – 1727) provou em seu livro “*Principia Mathematica*” que isso pode ser deduzido da lei de gravitação e das leis da Mecânica. (LOUZADA, 2013).

Para Neto (2008), Kepler também apresenta as cônicas de forma unificada usando a hipérbole para medições do fenômeno de reflexão. Ele também mostra pela primeira vez a parábola como limite de uma elipse ou hipérbole. Na construção da parábola ele utiliza a mesma distância dos pontos até o foco e até a diretriz. Ele também afirma que a parábola tem o segundo foco no infinito, que até então não era utilizado na geometria.

No próximo capítulo iremos focar na cônica parábola trazendo a fundamentação teórica como cônica, como gráfico de função quadrática, algumas de suas propriedades e como ela está presente no Ensino Básico.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse capítulo vamos nos aprofundar no estudo da parábola e da função quadrática, como referencial usamos os pontos propostos pelo livro *Números e Funções Reais*, de Elon Lages Lima (LIMA, 2013), utilizado no PROFMAT e usamos algumas referências para complementar o texto, como Dutra (2015), Monteiro (2014), entre outros.

Vamos primeiramente apresentar a definição geométrica de uma parábola.

Definição 3.1. *Considere-se, em um plano α , um ponto F e uma reta d que não contém F . Denominamos parábola de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano α que equidistam de d e F .*

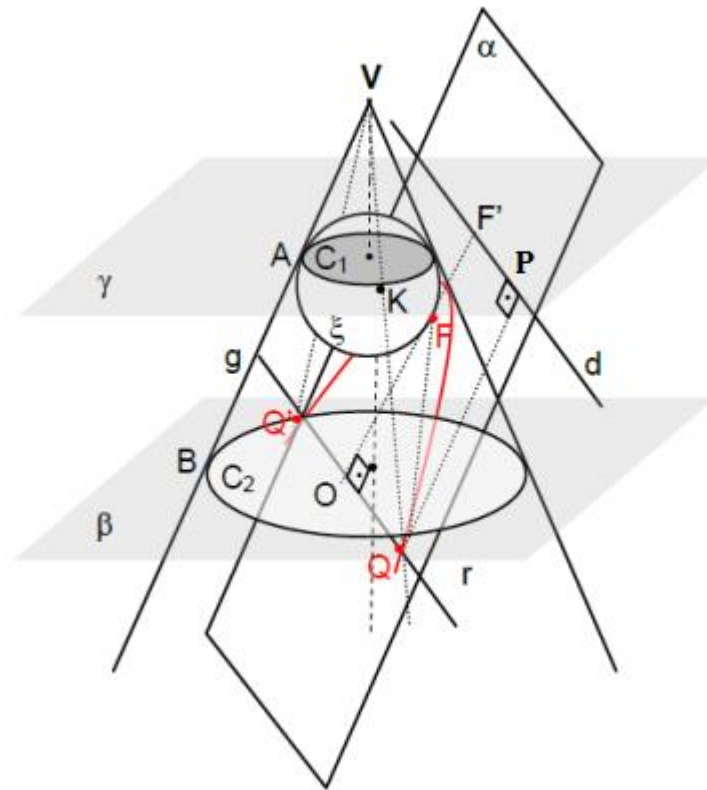
Na próxima seção vamos provar que a seção de um cone circular por um plano paralelo a geratriz é de fato uma parábola.

3.1 A PARÁBOLA E AS ESFERAS DE DANDELIN-QUETELET

As definições de cônicas que utilizamos atualmente foram comprovadas no século XIX pelo matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847). Em 1822, ele introduziu uma nova ideia que ajudaria a demonstrar as propriedades das seções cônicas. Adolphe Quetelet (1796-1874), também belga, e colega de Dandelin foi um importante colaborador deste trabalho. O trabalho de Dandelin foi mostrar que dado um plano que secciona um cone, existem uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e ao cone. Estas esferas são conhecidas como esferas de Dandelin. (MONTEIRO, 2014). Na sequência apresentamos esse resultado para o caso em que a seção é a parábola.

Teorema 3.1. *O ponto de tangência da esfera de Dandelin com um plano paralelo à geratriz do cone, que intersecciona uma das folhas do cone, é o foco F de uma parábola, sendo a reta diretriz a intersecção deste plano com o plano que contém a círculo de tangência da esfera com o cone.*

Figura 6 – Esferas de Dandelin: Parábola



FONTE: Adaptado de Chung, 2013, p.9.

Demonstração: Considere uma das folhas de uma superfície cônica circular. Vamos interceptar esse cone com um plano α paralelo a uma geratriz do cone.

Seja ξ uma esfera inscrita no cone e tangente a α no ponto F , como na Figura 6. Seja γ o plano que contém o círculo C_1 resultante da interseção entre a esfera ξ e o cone. Chamaremos de A o ponto de interseção do círculo C_1 à geratriz do cone paralela ao plano α . Seja d a reta interseção entre o plano α e o plano γ .

Escolha Q um ponto arbitrário sobre a curva resultante da interseção de α com o cone e K o ponto de C_1 em que a esfera ξ intersecta a geratriz que passa por Q . Seja ainda P a projeção ortogonal do ponto Q sobre a reta d .

Pela propriedade das tangentes às esferas, temos que $VA=VK$ e $QK=QF$. O triângulo isósceles VAK é semelhante ao triângulo KQP pois possuem um ângulo igual (ângulos opostos pelo vértice) e para o outro ângulo notamos que VA é paralelo a QP , pois QP está no plano α que é paralelo a geratriz VA . Como VQ é uma transversal aos segmentos paralelos VA e QP , temos outro ângulo igual, confirmando que os

triângulos são semelhantes, logo $QP=QK$. Podemos assim concluir que $QF=QP$. Logo, a distância entre o ponto Q , sobre a curva, ao ponto F é a mesma que a distância entre Q e a reta d , que é a definição dos pontos que pertencem a uma parábola.

Portanto a curva interseção de α com o cone é uma parábola de foco F e reta diretriz d .

■

Na próxima seção veremos como a equação quadrática era trabalhada e motivada pelos Babilônios.

3.2 BABILÔNIOS E A EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p . Em termos geométricos, esse problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o seu semi-perímetro s e a sua área p .

Os números procurados são as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 - sx + p = 0.$$

De fato, como s é a soma dos números, se um dos números é x , o outro é $s - x$ e seu produto é

$$p = x(s - x) = sx - x^2$$

logo,

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Observe que se α é uma raiz desta equação, isto é, $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$, então $\beta = s - \alpha$ também é raiz, pois

$$\begin{aligned}\beta^2 - s\beta + p &= (s - \alpha)^2 - s(s - \alpha) + p = \\ &= s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p = \\ &= \alpha^2 - s\alpha + p = 0.\end{aligned}$$

A regra para encontrar os dois números cuja soma e cujo produto são dados era assim enunciada pelos babilônicos:

Eleve ao quadrado a metade da soma subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número. (LIMA, 2013, p.108).

Utilizando a notação atual esta regra nos fornece as raízes

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad e \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

para a equação $x^2 - sx + p = 0$.

Há indícios de que o raciocínio que levou os babilônicos a encontrarem essa conclusão pode ter sido usando a relação da média aritmética. Ou seja, se α e β são os números procurados, digamos $\alpha \leq \beta$, então eles são equidistantes da média aritmética $\frac{s}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Assim, se conhecermos a diferença $d = \beta - \frac{s}{2} = \frac{s}{2} - \alpha$ teremos os dois números $\alpha = \frac{s}{2} - d$ e $\beta = \frac{s}{2} + d$. Para obter d tem-se

$$p = \alpha\beta = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2$$

logo

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \quad e \quad d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Donde,

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

e

$$\beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Segundo Lima (2013, p.109), como s e p eram sempre positivos, os babilônicos nunca tinham preocupações com soluções negativas fornecidas pela sua regra. Certamente deviam ocorrer casos em que $\left(\frac{s}{2}\right)^2 < p$, cuja solução é conhecida hoje com os números complexos, nesses casos, eles deveriam concluir que os números procurados não existiam, o que é correto no âmbito dos números reais.

Na sequência discutiremos a forma canônica do trinômio e diversas propriedades que podemos obter com relação a função quadrática usando essa expressão.

3.3 FORMA CANÔNICA DO TRINÔMIO

Consideremos o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

Completando o quadrado podemos escrever

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau é chamada de forma canônica e tem algumas consequências importantes. Em primeiro lugar, ela conduz imediatamente a fórmula que dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0.$$

Se o discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, for negativo significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x + \frac{b}{2a}$ não pode ser negativo. Se $\Delta > 0$, obtemos

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Usando a definição de módulo, segue que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}.$$

Sabemos que $|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a > 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$, porém, como o segundo termo da equação já apresenta as duas opções de sinal, podemos escrever

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta é a fórmula clássica para as raízes da equação quadrática, conhecida no Brasil como Fórmula de Bhaskara. Em outros países, essa fórmula é chamada apenas de “fórmula quadrática” ou “fórmula de resolução de equações do 2º grau”.

Como segunda consequência destacamos a caracterização dos extremos da função quadrática. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, supondo $a > 0$, a forma canônica exhibe, no interior dos colchetes, na equação (3.1), uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre maior ou igual a zero. A segunda é constante. Assim, o menor valor dessa soma é atingido quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Nesse ponto $f(x)$ assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Se $a < 0$, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Quando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo, pois conforme o valor de x se afasta de $x = -\frac{b}{2a}$ temos que o valor $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ vai aumentando e consequentemente os valores de $f(x)$ vão aumentando, ou seja, é uma função ilimitada superiormente. Analogamente, quando $a < 0$, $f(x)$ não assume valor mínimo, logo é ilimitada inferiormente.

A terceira consequência é que a forma canônica nos ajuda a identificar para quais valores $x \neq x'$ temos $f(x) = f(x')$, ou seja, identificar as simetrias. Olhando para a forma canônica, vemos que $f(x) = f(x')$ se, e somente se,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como estamos supondo $x \neq x'$, isto significa que

$$x' + \frac{b}{2a} = -\left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

isto é,

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a},$$

ou seja, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $x = -\frac{b}{2a}$, que é o ponto de máximo ou de mínimo da função $f(x)$.

Na próxima seção abordaremos alguns resultados que tratam da determinação dos coeficientes a , b e c que determinam a lei de uma função quadrática.

3.4 FUNÇÃO QUADRÁTICA DEFINIDA POR TRÊS PONTOS

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Os teoremas dessa seção nos dizem que f está bem definida pelos valores que f assume.

Teorema 3.2. *Se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2 e x_3 , então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x .*

Demonstração: Suponhamos que as funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ assumam os mesmos valores $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ para três números reais distintos x_1, x_2 e x_3 .

Escrevendo $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$, queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Como $f(x_1) - g(x_1) = 0$, $f(x_2) - g(x_2) = 0$ e $f(x_3) - g(x_3) = 0$, segue que

$$(*) \begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

que é um sistema linear homogêneo que tem $\alpha = \beta = \gamma = 0$ como solução, queremos verificar que esse sistema não tem nenhuma outra solução. Assim, subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, temos que:

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.2)$$

e

$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0. \quad (3.3)$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a equação 3.2 por $x_2 - x_1$ e a equação 3.3 por $x_3 - x_1$, obtendo

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0 \quad (3.4)$$

e

$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0. \quad (3.5)$$

Agora, subtraindo membro a membro as equações (3.4) e (3.5), temos $\alpha(x_3 - x_2) = 0$. Como $x_3 - x_2 \neq 0$, resulta que $\alpha = 0$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. Portanto, a solução homogênea é a única solução para o sistema (*), donde, $f(x) = g(x)$.

■

Com esse teorema podemos afirmar que se as imagens de duas funções quadráticas coincidem em três valores então elas serão iguais.

Teorema 3.3. *Sejam x_1, x_2 e x_3 três números reais distintos e y_1, y_2 e y_3 números tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não-colineares em $\mathbb{R}^2$. Então, existe uma, e somente uma, função quadrática*

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Demonstração: Na demonstração do Teorema 3.2 vimos que o sistema homogêneo (*) admitia apenas a solução trivial. Sabemos que, em geral, quando um sistema homogêneo só admite a solução trivial então podemos substituir os zeros dos segundos membros por números arbitrários que sempre teremos solução única. No caso presente, isto é fácil de ver diretamente: usando os mesmos passos seguidos acima, vemos que, dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2 e y_3 , existe um, e somente um terno ordenado de números a, b, c tais que

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

De fato, seguindo os passos do Teorema 3.2, subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, temos:

$$a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \quad (3.6)$$

e

$$a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1. \quad (3.7)$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a equação 3.6 por $x_2 - x_1$ e a equação 3.7 por $x_3 - x_1$, obtendo

$$a(x_1 + x_2) + b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e

$$a(x_1 + x_3) + b = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Agora, subtraindo membro a membro, temos

$$a(x_3 - x_2) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

logo

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2} \left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right]. \quad (3.8)$$

Assim, podemos afirmar que dados três números reais distintos x_1, x_2, x_3 e números reais arbitrários y_1, y_2, y_3 , existe um, e somente um, terno de números a, b, c

tais que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpra $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$. Precisamos garantir que a função obtida é uma função quadrática, ou seja, $a \neq 0$.

O valor de a acima obtido na equação (3.8) mostra que a é zero se, e somente se, vale

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

ou seja, as retas AB e AC possuem a mesma inclinação, isto é, os pontos A, B e C são colineares, contradizendo a hipótese do teorema. Portanto, $a \neq 0$ e a função f obtida é uma função quadrática. Com isso provamos a existência de f , a unicidade é exatamente o resultado do Teorema 3.2.

■

Esse teorema nos garante que dados três pontos não colineares sempre existirá uma única função quadrática cujo gráfico contém esses três pontos. Por exemplo, vamos encontrar a função quadrática que contém os pontos A(1,1), B(2,0) e C(3,1):

Como a função quadrática é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, substituindo os pontos acima, obtemos:

$$\text{Ponto A: } a(1)^2 + b(1) + c = 1 \rightarrow a + b + c = 1$$

$$\text{Ponto B: } a(2)^2 + b(2) + c = 0 \rightarrow 4a + 2b + c = 0$$

$$\text{Ponto C: } a(3)^2 + b(3) + c = 1 \rightarrow 9a + 3b + c = 1$$

Portanto, precisamos resolver o sistema:

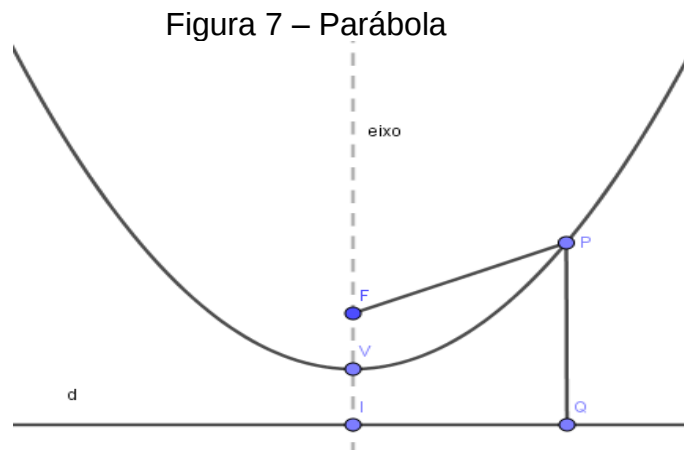
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}$$

Cuja solução é $a = 1, b = -4$ e $c = 4$. Assim, a função quadrática que passa pelos pontos A, B e C é $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Na próxima seção veremos que o gráfico de uma função quadrática é a cônica parábola.

3.5 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Pela Definição 3.1 temos que a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano, determinado por F e d , que distam igualmente de F e de d (Figura 7). Queremos mostrar que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.



Fonte: a autora, 2018.

Por exemplo, o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, \frac{1}{4})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$. Com efeito, a distância de um ponto qualquer $P(x, x^2)$ do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = (0, \frac{1}{4})$ é igual a

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Por outro lado, A distância do mesmo ponto $P(x, x^2)$ à reta $y = -\frac{1}{4}$ é

$$d(P, d) = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Como se trata de números positivos, para verificarmos a igualdade entre estas duas distâncias, basta ver que seus quadrados são iguais. E, de fato, tem-se,

$$x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2.$$

De modo mais geral, se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$. Utilizando o mesmo argumento acima, basta verificar que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale a igualdade

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2.$$

Considerando a função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$, sendo $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ temos que o gráfico de $g(x) = a(x - m)^2$ resulta do gráfico de $h(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \rightarrow (x + m, y)$ a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$. Já o gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x)$ por meio da translação vertical $(x, y) \rightarrow (x, y + k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$ (Figura 8). Assim o gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

Segue disso que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ e cujo foco é o ponto

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right).$$

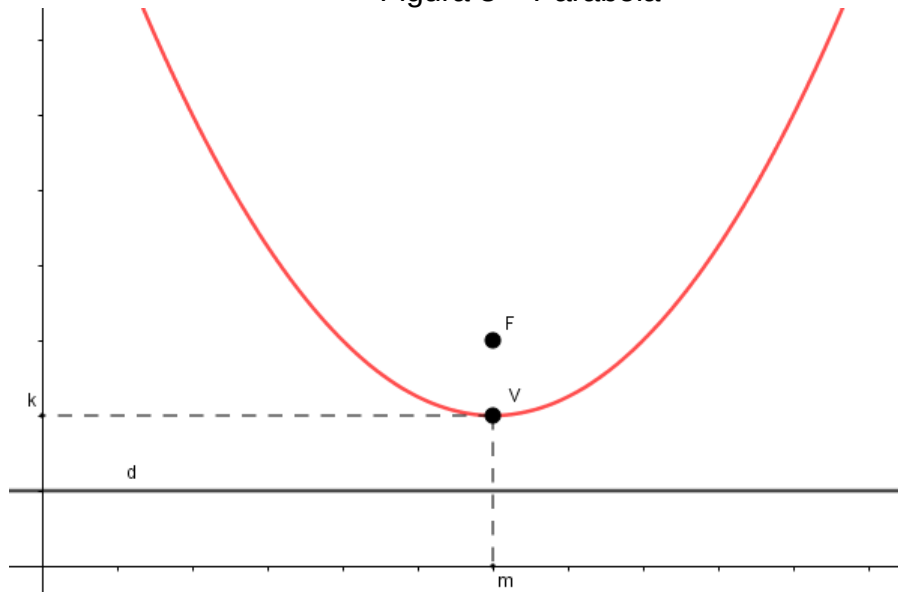
Com efeito, a forma canônica do trinômio nos dá

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k,$$

sendo $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

O ponto do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ mais próximo da diretriz é aquele de abscissa $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Ainda quando $x = -\frac{b}{2a}$, o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$. Na Figura 8 temos a representação dos elementos.

Figura 8 – Parábola



Fonte: a autora, 2018.

Na próxima seção falaremos de uma propriedade bem importante da parábola e muito utilizada em aplicações.

3.6. PROPRIEDADE REFLETORA DA PARÁBOLA

A propriedade de maior destaque da parábola é a propriedade de reflexão. Reflexão é o fenômeno que consiste no fato de a luz voltar a se propagar no meio de origem, após incidir sobre um objeto ou superfície.

Leis da Reflexão:

Primeira lei da reflexão: O raio incidente, o raio refletido e a reta normal são coplanares. Ou seja, pertencem ao mesmo plano geométrico.

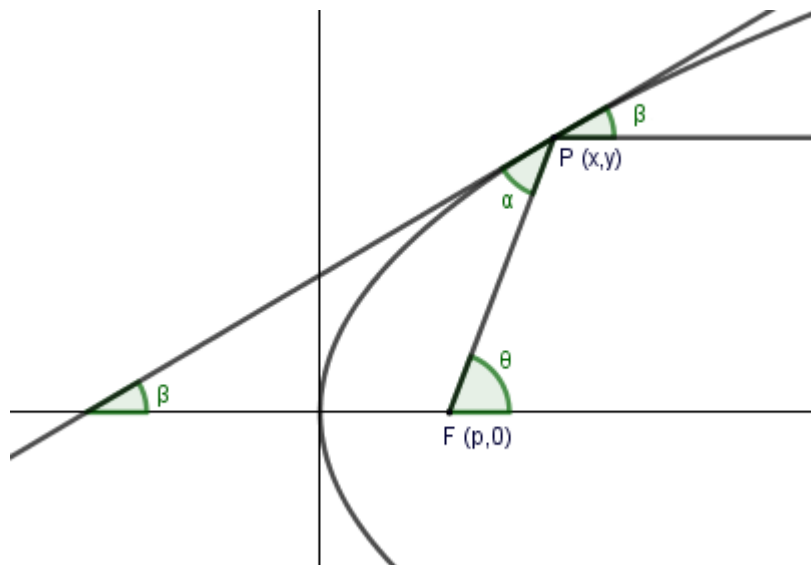
Segunda lei da reflexão: O ângulo de reflexão (r) é sempre igual ao ângulo de incidência (i).

Pela segunda lei da reflexão, se um feixe de luz paralelo ao eixo focal de uma parábola incide sobre ela então todo feixe de luz será refletido na direção do foco da parábola. Analogamente, se uma fonte de luz estiver sobre o foco de uma parábola, de forma que os raios de luz incidem na parábola, então esses raios serão refletidos paralelamente ao eixo focal da parábola. (SILVA FILHO, 2015).

Vamos mostrar essa propriedade da parábola de modos: uma utilizando conceitos de cálculo e outra apenas geometria.

Considere a parábola $y^2 = 4px$, com foco no ponto $F(p,0)$, como ilustra a Figura 9. Considere uma reta tangente à parábola no ponto $P(x,y)$ e seja α o ângulo formado entre a reta tangente e o segmento $\overline{PF}$ e β o ângulo formado entre a reta tangente e a reta paralela ao eixo da parábola, passando por P. Vamos mostrar que $\alpha = \beta$.

Figura 9 – Propriedade refletora da parábola



Fonte: adaptado de Dutra, 2015, p. 28.

Usando diferenciais, temos que o coeficiente da reta tangente que passa por P é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{y}{2p}} = \frac{2p}{y} = \tan \beta \quad (3.9)$$

Por outro lado, o coeficiente da reta que passa por P e pelo foco F é

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x - p} \quad (3.10)$$

sendo θ é o ângulo PFT (ver Figura 9) de modo que, prolongando a tangente até o eixo x , teremos um triângulo ΔFPQ e pelo teorema do ângulo externo, temos $\theta = \alpha + \beta$.

Assim, usando as equações 3.9 e 3.10 temos que:

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} = \frac{\frac{y}{x-p} - \frac{2p}{y}}{1 + \frac{y}{x-p} \cdot \frac{2p}{y}} = \frac{2p}{y}. \quad (3.11)$$

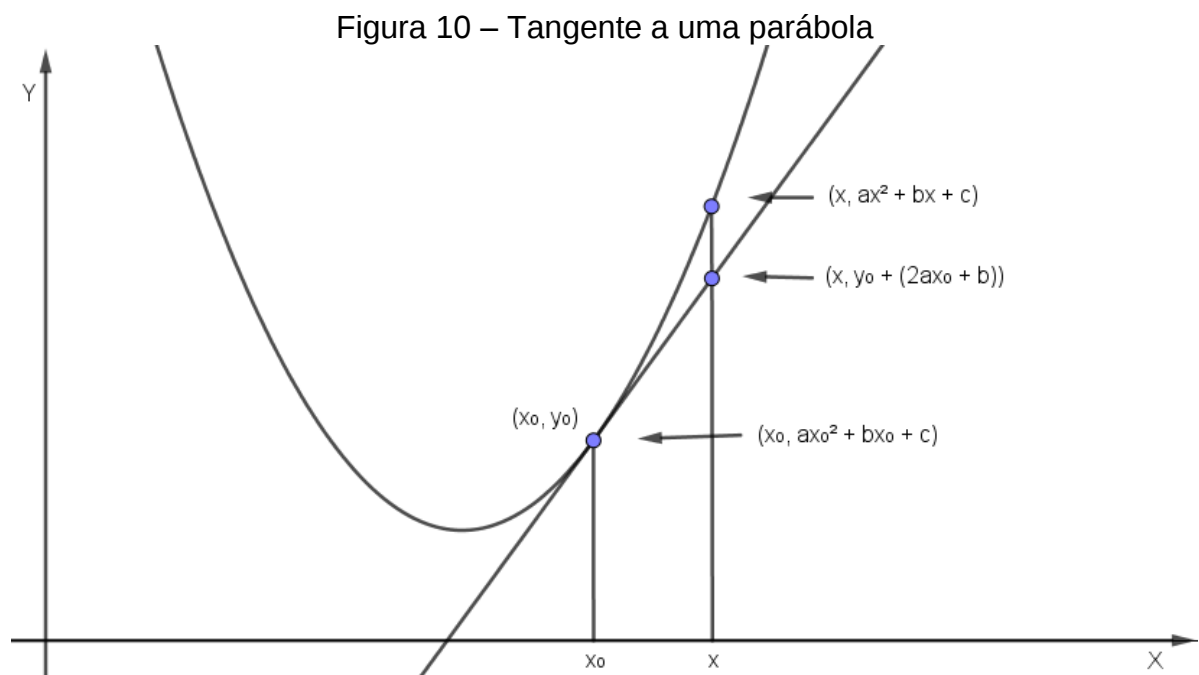
De (3.9) e (3.11), temos que $\alpha = \beta$. (DUTRA, 2015).

Agora iremos demonstrar essa propriedade utilizando apenas conceitos de geometria. Vamos primeiramente definir a posição da tangente a uma parábola, determinada pelo Teorema 3.4.

Teorema 3.4. *Se a parábola é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente no ponto $P = (x_0, y_0)$, onde $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a $2ax_0 + b$.*

Demonstração: Vamos mostrar que todos os pontos dessa parábola que tem abscissa diferente de x_0 estão fora da reta mencionada e no mesmo semiplano determinado por ela.

Suponhamos que $a > 0$. Mostraremos que, para todo $x \neq x_0$, o ponto (x, y) da parábola, com $y = ax^2 + bx + c$ está acima do ponto $(x, y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0))$, de mesma abscissa x , situado sobre a reta, como ilustra a Figura 10.



Fonte: adaptado de Lima, 2013, p.123.

Em outras palavras, queremos provar que, supondo $a > 0$,

$$x \neq x_0 \rightarrow ax^2 + bx + c > ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

Para isto, basta notar que

$$x \neq x_0 \rightarrow ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)] = a(x - x_0)^2 > 0$$

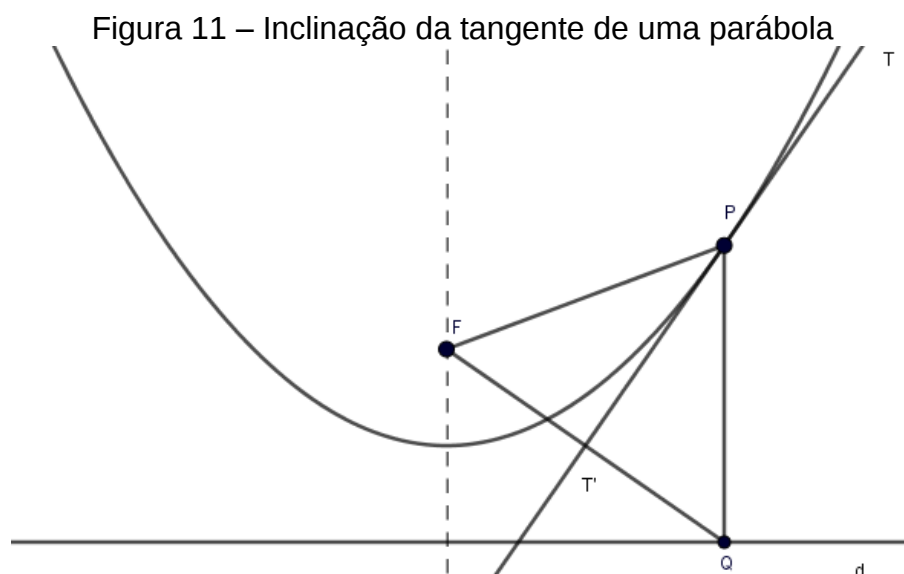
■

Isto mostra que a reta de inclinação $2ax_0 + b$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) , com $y_0 = f(x_0)$ tem este único ponto em comum com a parábola que é o gráfico de f e que todos os pontos da parábola estão acima dessa reta. Logo, essa reta é tangente à parábola nesse ponto.

Sabendo agora que a parábola, gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem, no ponto $P = (x, y)$, uma tangente cuja inclinação é $2ax + b$, calculemos agora a inclinação da reta FQ que une o foco F ao ponto Q , pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d (Figura 11).

No cálculo que segue admitiremos que P não é o vértice da parábola. Caso P fosse o vértice, a reta FQ seria vertical e a tangente no ponto P teria inclinação zero, logo seria horizontal.

A inclinação da reta FQ é dada por uma fração cujo numerador é a diferença entre as ordenadas de Q e F e cujo denominador é a diferença entre as abscissas desses pontos.



Fonte: adaptado de Lima, 2013, p.124.

Já vimos na seção 3.5 que $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e $Q = \left(x, k - \frac{1}{4a}\right)$, em que $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ é a ordenada do vértice da parábola. Logo, a inclinação de FQ é igual a

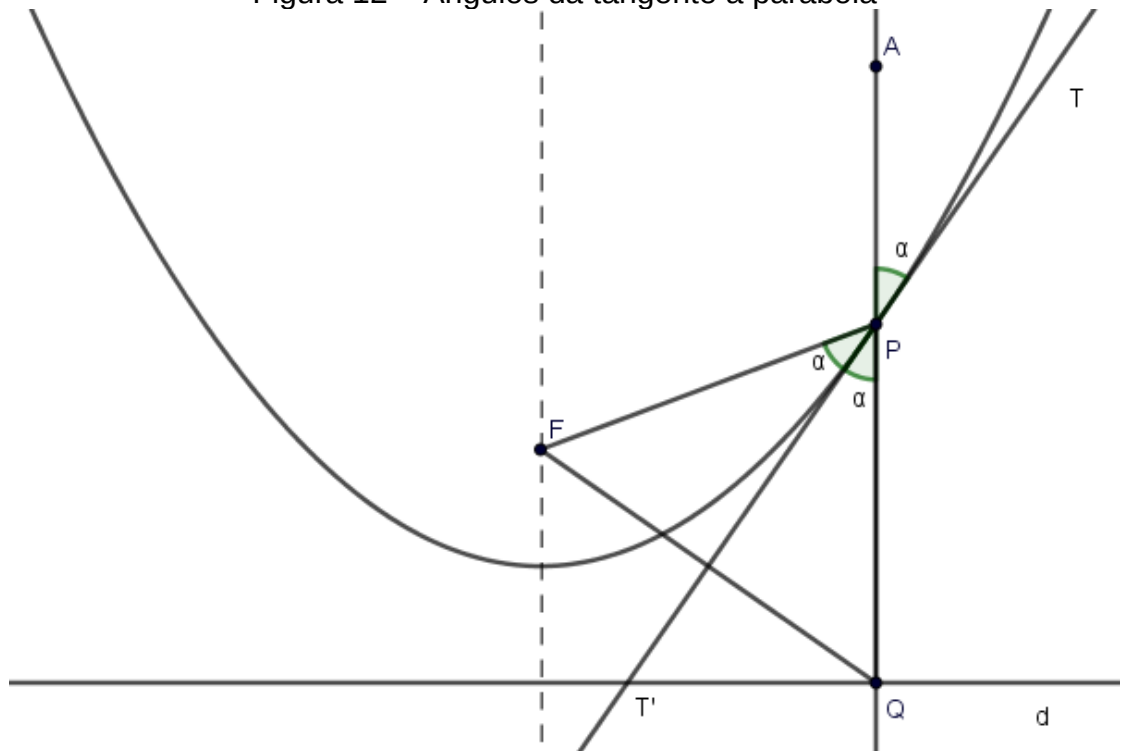
$$\frac{k - \frac{1}{4a} - \left(k + \frac{1}{4a}\right)}{x - m} = \frac{-1}{2a(x - m)} = \frac{-1}{2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)} = -\frac{1}{2ax + b}. \quad (3.12)$$

Pelo Teorema 3.4 sabemos que a inclinação da reta tangente é $2ax + b$, logo de (3.12) segue que o segmento de reta FQ é perpendicular² à reta TT' , tangente à parábola no ponto P .

Com estes resultados, podemos enunciar a propriedade geométrica da parábola:

A tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto (Figura 12).

Figura 12 – Ângulos da tangente à parábola



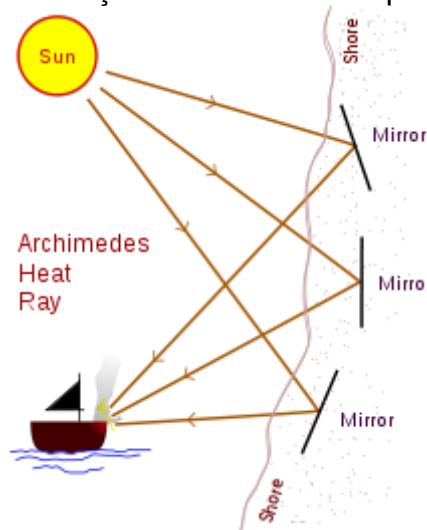
Fonte: Adaptado de LIMA, 2013, p.126.

² As retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, com $a \neq 0$ e $a' \neq 0$, são perpendiculares se, e somente se, $a' = -\frac{1}{a}$.

Seja Q o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz, como na Figura 12, a definição da parábola nos diz que $\overline{FP} = \overline{PQ}$, logo o triângulo FPQ é isósceles. Além disso, acabamos de ver que FQ é perpendicular à tangente, ou seja, a tangente é altura desse triângulo isósceles, logo é também bissetriz. Portanto os ângulos $F\hat{P}T'$ e $T'\hat{P}Q$ são iguais. Donde, $A\hat{P}T = F\hat{P}T' = \alpha$.

Uma história muito conhecida sobre a utilização da propriedade refletora da parábola é a lenda de Arquimedes que conta que, em 214 a.C., Arquimedes salvou a cidade de Siracusa do ataque marítimo dos romanos usando uma arma de raios. Os gregos instalaram na costa um conjunto de espelhos planos e direcionaram os raios de sol refletidos contra os barcos romanos. Rapidamente os barcos incendiaram devido à alta concentração de luz num único ponto, como ilustra a Figura 13.

Figura 13 – Ilustração da Lenda de Arquimedes



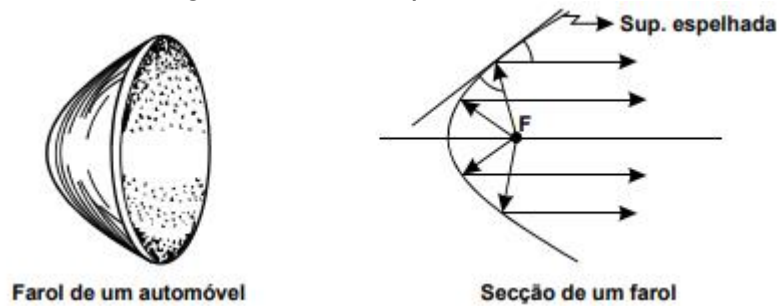
Fonte: WIKIMEDIA, 2007.

Apesar de ser pouco provável que a história seja verdadeira, é uma ilustração dessa propriedade da parábola.

O paraboloide de revolução, também conhecido como superfície parabólica, é uma superfície obtida pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria, e essa superfície preserva a propriedade refletora da parábola. A secção de um farol de automóvel tem o formato de um paraboloide. A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos segundo retas paralelas ao eixo da parábola, como ilustra a Figura 14.

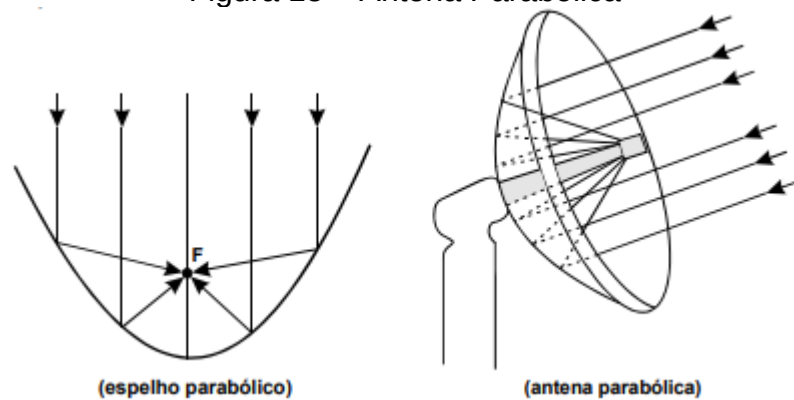
Já nos telescópios, antenas de radar e antenas parabólicas as ondas paralelas ao eixo da parábola se refletem na parábola e se direcionam ao seu foco, onde se encontra o receptor de sinal. Essa propriedade é ilustrada na Figura 15.

Figura 14 – Farol parabólico



Fonte: VENTURI, 2003, p. 46.

Figura 15 – Antena Parabólica



Fonte: VENTURI, 2003, p. 47.

Nesta seção pudemos ver a importância da propriedade refletora da parábola e sua ampla utilização no nosso cotidiano, mais um motivo para aprofundarmos o ensino dessa cônica. Na próxima seção apresentamos um breve panorama do ensino da parábola na Educação Básica.

3.7 ENSINO DA PARÁBOLA NO ENSINO BÁSICO

No Ensino Básico as cônicas aparecem em momentos e formas diferentes. No Ensino Fundamental a única cônica estudada é a parábola, como gráfico da função quadrática, estudada no 9º ano. Nesse momento são apresentados apenas alguns pontos notáveis, como os zeros e o vértice para a construção do gráfico. Apesar de alguns livros apresentarem a sua propriedade refletora, dificilmente os alunos compreenderão o funcionamento, uma vez que não estudaram o foco da parábola,

elemento fundamental para o entendimento das aplicações da parábola no nosso cotidiano.

O estudo da matemática vem sendo realizado, queira ou não, ainda de uma forma muito abstrata em sala de aula, onde vários conteúdos são abordados e desenvolvidos apenas teoricamente e com fórmulas, não tendo sentido para os discentes e para parte dos docentes. (MACHADO, 2009, p.2).

No primeiro ano do Ensino Médio, a parábola é vista praticamente da mesma forma que no Ensino Fundamental. No plano de ensino anual da escola em que a sequência foi aplicada, encontramos os conteúdos e os objetivos do ensino das funções, como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Objetivos do Plano anual da escola

Funções • Função polinomial do 1º grau (função afim) • Tipos de função, gráficos, zeros, crescente e decrescente. • Função do 2º grau • Gráficos, crescente, decrescente, zeros da função, vértice, valor máximo ou mínimo.	• Identificar e representar uma função do 1º e 2º graus por sua lei e seu gráfico • Determinar as raízes de uma função • Relacionar a concavidade da parábola e o número de raízes reais da função, respectivamente, com o sinal do coeficiente a e com o sinal do discriminante Δ. • Determinar o vértice da parábola e classificá-la como ponto máximo e mínimo, e assim obter a imagem da função.
--	--

Fonte: a autora, 2017

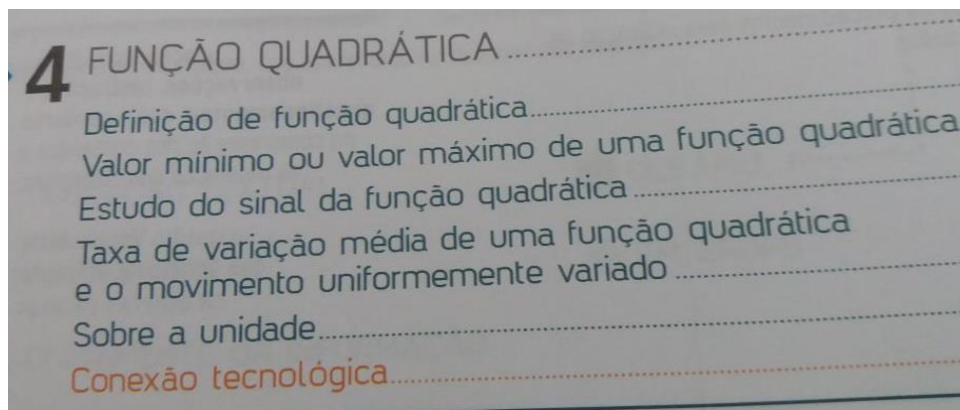
Nas Figuras 17 e 18 são apresentados os sumários de dois livros do primeiro ano do Ensino Médio:

Figura 17 – Sumário do livro Quadrante Matemática

Função quadrática	
• Definição de função quadrática	99
• Zeros de uma função quadrática	100
• Forma canônica	104
• Gráfico da função quadrática	106
• Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$	106
• Translação do gráfico de uma função quadrática	107
• Coeficientes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$..	109
• Conjunto imagem de uma função quadrática	115
• Valor máximo e valor mínimo de uma função quadrática	116
• Estudo do sinal da função quadrática	117

Fonte: BALESTRI, 2016.

Figura 18 – Sumário do livro da editora Leya - Matemática: interação e tecnologia



4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição de função quadrática.....

Valor mínimo ou valor máximo de uma função quadrática.....

Estudo do sinal da função quadrática

Taxa de variação média de uma função quadrática e o movimento uniformemente variado

Sobre a unidade.....

Conexão tecnológica.....

Fonte: CHAVANTE E PRESTES, 2016.

Além dos tópicos citados no plano da escola, os dois livros também apresentam o estudo do sinal da função quadrática. Além disso, o livro da editora Quadrante aborda a forma canônica do trinômio do segundo grau, e o livro da editora Leya aborda a taxa de variação média de uma função quadrática, assunto que não costuma ser abordado no Ensino Médio. Apesar dos livros apresentarem algumas particularidades, a base do ensino da função quadrática é a mesma: definição e aplicação das fórmulas para obter raízes, vértice e ser possível esboçar o gráfico da função.

O estudo das Cônicas retorna então no terceiro ano do Ensino Médio dentro da Geometria Analítica. De modo geral os livros didáticos fazem um desenvolvimento apresentando sua origem, definição, elementos e equações. Apesar de sua importância histórica, o estudo das Cônicas na Educação Básica se restringe a memorização de fórmulas, dificultando o estudo e o entendimento da importância deste assunto.

Pensando nisso, o objetivo de realizar este trabalho foi apresentar este conteúdo de uma maneira diferente da usual, priorizando a construção do conhecimento através do conhecimento histórico e interpretação dos problemas em detrimento do uso de fórmulas e memorização de modelos.

Segundo Santos (2009, p. 19), “é importante olhar para o passado para estudar matemática, pois perceber as evoluções das ideias matemáticas observando somente o estado atual dessa ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças”. Além disso, a Proposta Curricular de Santa Catarina (2014) cita que “A Matemática deve ser

contextualizada e trabalhada de forma significativa, transformando as informações em conhecimentos que durante o percurso formativo contribuam para a formação integral dos sujeitos” (p. 163) e recomenda “que se desenvolvam aulas práticas e experimentais, de forma a propiciar acesso e domínio da linguagem científica. ” (p. 168).

Buscamos então apresentar uma sequência didática que aborda o conteúdo de Parábolas no primeiro ano do Ensino Médio. Essa sequência tem como base a abordagem do tema no livro “Números e Funções Reais”, de Elon Lages Lima (LIMA, 2013), utilizado no PROFMAT. Essa sequência foi dividida em sete atividades que serão detalhadas no próximo capítulo.

4 PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Nesse capítulo será apresentada a sequência didática que aborda uma maneira do ensino da função quadrática no primeiro ano do Ensino Médio. Serão descritos os procedimentos metodológicos e características da análise qualitativa, a concepção da sequência didática e a descrição juntamente com análise da aplicação da sequência.

4.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE

O tema função quadrática é visto na Educação Básica no último ano do Ensino Fundamental e também no primeiro ano do Ensino Médio. Resolvemos aplicar essa sequência em uma turma de Ensino Médio, pelo fato de os alunos já possuírem um pouco de conhecimento sobre o tema e por ser uma turma na qual a autora desse trabalho lecionava.

Antes de iniciar a aplicação com os alunos, foi obtido o aval da direção com a assinatura de um termo de consentimento (APÊNDICE A) e também foi conversado com os alunos sobre o modo que trabalharíamos o próximo conteúdo. Eles levaram um termo para os pais assinarem (APÊNDICE B) e trouxeram assinado nas aulas seguintes. Eles também foram informados sobre o método de avaliação durante as atividades a saber: entrega das listas de exercícios, atividades feitas no caderno e nota do relatório de um experimento que realizaríamos, as atividades seriam individuais com exceção do relatório do experimento.

A análise dos resultados obtidos com a aplicação da sequência será feita de maneira qualitativa. Segundo Godoy (1995), algumas características básicas da pesquisa qualitativa são:

1. O ambiente natural é a fonte direta de dados: o pesquisador é o instrumento de observação, seleção e análise e interpretação dos dados coletados, realizando o estudo no ambiente em que ocorre e faz parte.

2. A pesquisa é descritiva: os dados apresentados aparecem na forma de entrevistas, anotações, fotografias, vídeos entre outros documentos. Os pesquisadores qualitativos se preocupam com o processo e não simplesmente com os resultados ou produto.

3. O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são a preocupação essencial do investigador: os pesquisadores qualitativos tentam compreender os fenômenos que estão sendo estudados a partir da perspectiva dos participantes.

4. Os pesquisadores utilizam enfoque indutivo na análise de dados: como os pesquisadores qualitativos não partem de hipóteses estabelecidas a priori, não se preocupam em buscar dados ou evidências que corroborem ou neguem tais suposições. Partem de questões ou focos de interesse amplos, que vão se tornando mais diretos e específicos no transcorrer da investigação.

Dentre os tipos de abordagens qualitativas, o que se adapta ao nosso trabalho é o estudo de caso, utilizando a pesquisa participativa. Segundo Lüdke e André (1986, p. 13), o estudo de caso “vêm ganhando crescente aceitação na área de educação, devido principalmente ao seu potencial para estudar as questões relacionadas à escola”.

Um estudo de caso apresenta três fases em seu desenvolvimento: inicialmente, há a fase exploratória; num segundo momento, há a delimitação do estudo e a coleta de dados; e, num terceiro estágio, há a análise sistemática desses dados, culminando na realização do relatório (NISBET E WATT, apud LÜDKE E ANDRÉ, 1986).

O papel da professora nesse estudo é classificado, segundo Leininger (1985), como “Participação com alguma observação”. Nessa fase, o observador começa uma participação mais ativa e diminui a observação com o objetivo de aprender com as pessoas através do envolvimento direto em suas atividades. Nesse papel, o pesquisador teve o prévio consentimento por parte da comunidade a ser observada. Os sujeitos, neste caso, sabem do caráter científico do estudo, podendo haver acordos, algumas obrigações e promessas, discutidas antes do início da pesquisa.

O papel de participante como observador se adapta ao tipo de pesquisa que envolve o ambiente de sala de aula. O pesquisador, com essa técnica, terá o livre trânsito no local, podendo realizar suas observações, interagir com os sujeitos até chegar à análise dos dados, obtendo ou não as conclusões de sua pesquisa. (OLIVEIRA, 2009, p.10).

Na próxima seção falaremos sobre a concepção da sequência didática.

4.2 A CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Uma sequência didática é um conjunto de atividades planejadas para ensinar um conteúdo, organizada de acordo com os objetivos do professor para a aprendizagem dos alunos. Para Zabala (2007, p.18), sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.

Desta forma ao iniciar o conteúdo de função quadrática os alunos foram orientados em relação a maneira como o conteúdo seria trabalhado e também como eles seriam avaliados em cada etapa. Além disso, Peretti e Costa (2013, p.6) destacam que ao iniciar a sequência didática “é necessário efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas”.

A abordagem foi planejada de modo que os alunos construíssem o conhecimento necessário para o estudo da função quadrática. Nas atividades que seriam trabalhadas os alunos precisavam resolver sistemas lineares de três variáveis e completar quadrados. Assim, iniciou-se com uma revisão de resolução de sistemas lineares de duas variáveis, e depois foram introduzidos os sistemas lineares de três variáveis e o método de completar quadrados. Apesar do conteúdo não ser abordado da maneira usual, não foi aplicado um formalismo matemático excessivo, levando em consideração que eram alunos do primeiro ano e a maioria deles possui muitas dificuldades nos conteúdos do Ensino Fundamental.

Na sequência foram apresentadas as seções cônicas e as propriedades refletoras da parábola de maneira dinâmica com a realização de um experimento. Depois foi feito um resgate histórico sobre o método de obtenção das raízes da equação do segundo grau, construção do gráfico da função quadrática e resolvidos problemas de otimização utilizando a forma canônica do trinômio.

A sequência foi aplicada no terceiro bimestre de 2017, em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, com 32 alunos matriculados, da Escola de Educação Básica Professor José Duarte Magalhães, uma escola pública estadual localizada em Jaraguá do Sul. No Ensino Médio público de Santa Catarina são ministradas

semanalmente três aulas de matemática, com 45 minutos cada. Nesta turma, eram duas aulas consecutivas na quarta-feira e uma aula na sexta-feira. A primeira atividade teve início no dia 02 de agosto 2017 e a última atividade foi apresentada pelos alunos no dia 04 de outubro de 2017.

4.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Nesta seção apresentaremos os objetivos, a descrição e a análise de cada umas das atividades da sequência proposta.

4.3.1 Atividade 1: sistemas lineares e completando quadrados

Os objetivos dessa atividade eram revisar e introduzir os conteúdos que serão necessários no estudo da função quadrática, a saber: completar quadrados e sistemas lineares. Prevemos 06 aulas para o desenvolvimento dessa atividade.

Iniciamos a aplicação da sequência didática com o método de completar quadrados, que é necessário para escrever a função quadrática em sua forma canônica. O conteúdo foi iniciado com o procedimento contrário, desenvolver quadrados, para que os alunos percebessem o que acontece, principalmente com os coeficientes de x e x^2 , relembrando as relações $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ e $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

O processo de completar quadrados é iniciado com quadrados perfeitos para então serem trabalhados com termos quaisquer. Os alunos não tiveram dificuldades em compreender o método, porém alguns erros foram cometidos, principalmente quando era preciso colocar algum fator em evidência, como por exemplo, escrever na forma de quadrado perfeito a expressão $-3x^2 + 6x - 3$. Nesse caso, nos exercícios feitos em sala, às vezes os alunos esqueciam de dividir algum termo ou erravam o sinal na hora de completar o quadrado. Sabemos que, nesse caso, os alunos deveriam chegar na relação $-3x^2 + 6x - 3 = -3(x - 2)^2 + 9$.

Após três aulas trabalhando com o método de completar quadrados, para verificar a aprendizagem, foi entregue uma lista de exercícios (APÊNDICE C) aos

alunos para serem resolvidos em casa e entregues na aula seguinte, em que já seria iniciada a revisão de sistemas lineares.

Para encontrar a lei de formação de uma função quadrática cujo gráfico contenha três pontos dados é preciso resolver um sistema linear 3×3 . Os alunos aprendem soluções de sistemas 2×2 no Ensino Fundamental, mas a maioria não recorda. Desta forma, foi necessário, primeiramente, revisar a solução de sistemas 2×2 , para tal foi utilizado o método da substituição. Depois disto foi possível dar início aos sistemas 3×3 , utilizando o mesmo método. Como o objetivo era apenas resolver sistemas para que os alunos fossem capazes de encontrar funções quadráticas a partir de três pontos, foram trabalhados apenas sistemas possíveis e determinados. Os alunos irão se aprofundar no estudo dos sistemas lineares no segundo ano do Ensino Médio.

Novamente, após as três aulas trabalhando com sistemas, os alunos levaram para casa uma lista de exercícios (APÊNDICE D) a ser entregue na aula seguinte. Além disso, foi solicitado aos alunos que trouxessem na próxima aula imagens de objetos ou construções que os lembrassem uma parábola.

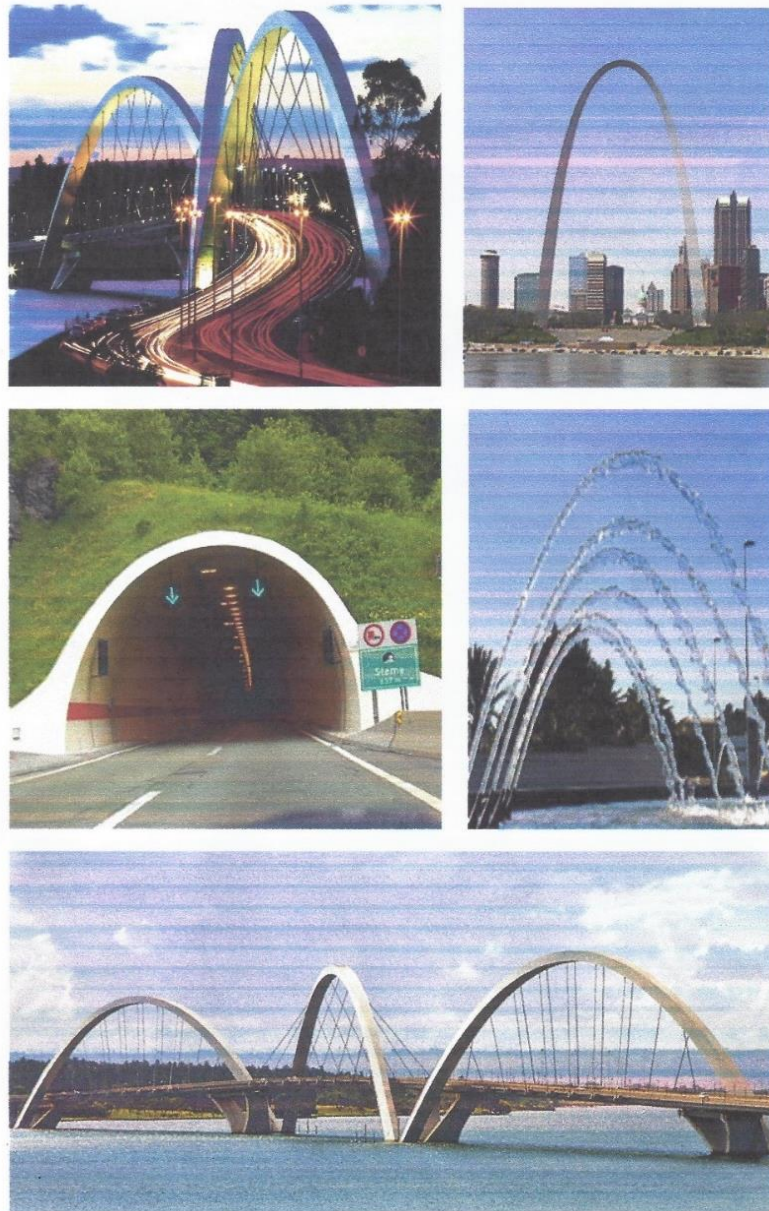
Nessa primeira atividade, os alunos sempre respondiam e questionavam as soluções, às vezes encontrando a resposta mentalmente antes de apresentar o procedimento escrito, principalmente nos exemplos mais simples. Conforme os cálculos se mostraram mais trabalhosos, foi necessária a utilização do procedimento escrito para encontrar a solução. Apenas 3 alunos deixaram de entregar as listas de exercícios. De modo geral, os alunos compreenderam o que precisava ser feito, porém, muitos alunos apresentaram dificuldades nos cálculos algébricos, cometendo erros nas soluções.

4.3.2 Atividade 2: parábola como seção cônica e sua propriedade refletiva

Os objetivos dessa atividade eram motivar o estudo da parábola a partir do cotidiano, exemplificar a propriedade refletiva das parábolas e introduzir as cônicas como seções do cone explorando um material confeccionado na impressora 3D. Foi prevista 01 aula para a sua realização.

A aula é iniciada perguntando aos alunos o que é uma parábola, eles apresentam as imagens que trouxeram (Figura 19 e APÊNDICE H) e como já tiveram o conteúdo de função quadrática no Ensino Fundamental, muitos relacionam a parábola com o gráfico dessa função. Pergunto então quais objetos do cotidiano possuem o formato parabólico e se eles achavam que esses objetos possuíam esse formato por algum motivo específico ou apenas pela estética. Entre as respostas dos alunos estavam: pista de skate, guarda-chuva, pontes e antenas parabólicas.

Figura 19 – Algumas das imagens de parábolas trazidas pelos alunos

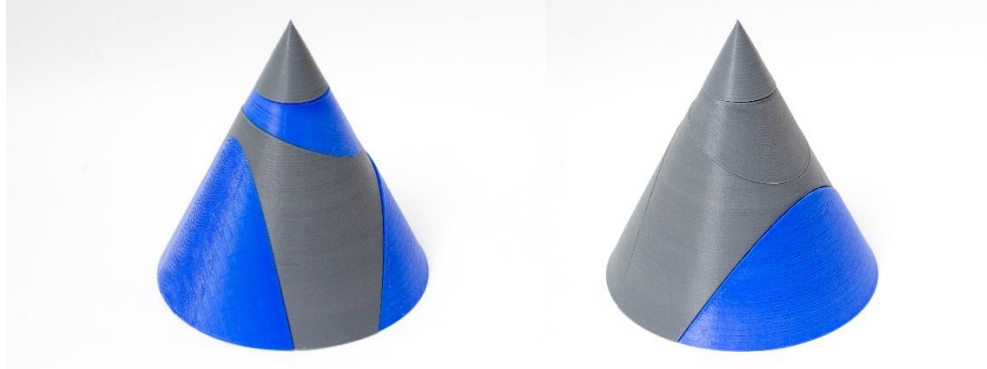


Fonte: trabalhos dos alunos, 2017.

Na sequência foi apresentada a parábola como uma seção cônica, para tal foi utilizado um cone circular que ilustra as seções cônicas que foi produzido na

impressora 3D (Figura 20), permitindo a visualização do círculo, da parábola, da hipérbole e da elipse.

Figura 20 – Cone e as seções cônicas



Fonte: acervo Prof^a Elisandra Bar de Figueiredo, 2017.³

Os alunos demonstraram interesse em manusear o cone e observar as suas seções, como pode ser observado na Figura 21. Para ilustrar as seções cônicas também foi utilizada a Figura 22. Foi explicado então que nesse momento seria trabalhado apenas com a parábola e que as demais cônicas seriam estudadas no terceiro ano do Ensino Médio.

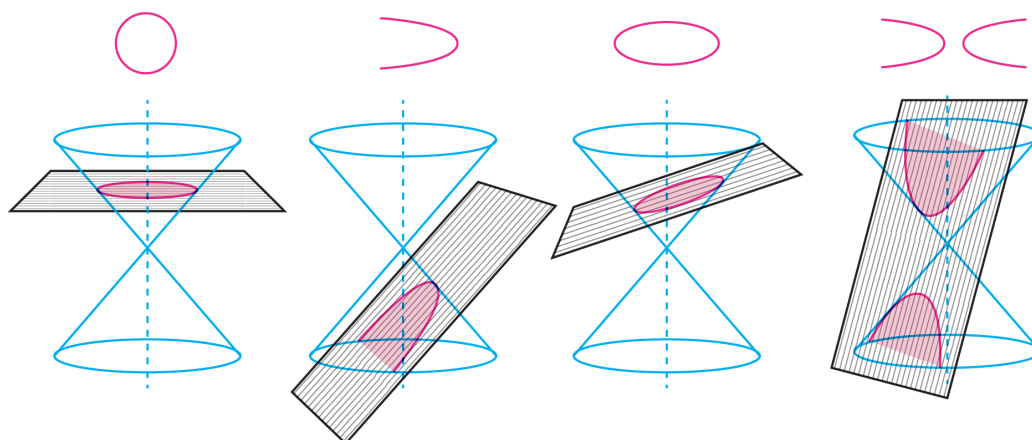
Figura 20 – Aluna manuseando o cone 3D



Fonte: acervo da autora, 2017.

³ Material do laboratório FAB3D do departamento de Matemática.

Figura 21 – Visualização das seções cônicas

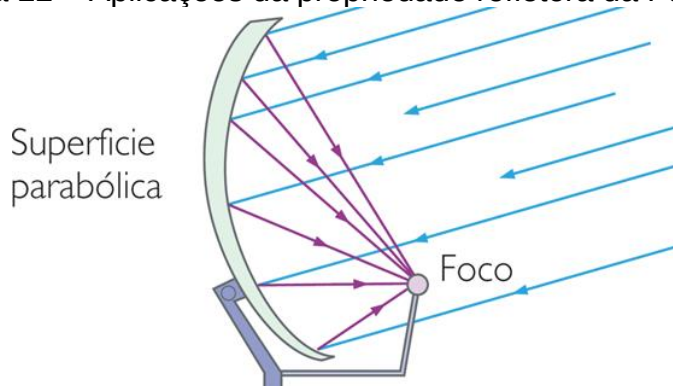


Fonte: PENSE MATEMÁTICA, 2018.

Nessa introdução ao tema de parábolas os alunos debateram o uso de objetos parabólicos em nosso cotidiano e os motivos da utilização. Compreenderam a definição de seções cônicas e manusearam com fascínio o cone impresso em 3D.

Depois de apresentar as seções cônicas, falamos sobre a propriedade refletora da parábola. Para que os alunos compreendessem essa propriedade foi explicado o funcionamento da antena parabólica e faróis de carros, com auxílio de imagens, como as ilustradas nas Figuras 14, 15 e 23.

Figura 22 – Aplicações da propriedade refletora da Parábola



Fonte: JASON, 2018.

Depois é apresentado o vídeo⁴ (GLOBO.COM, 2013) de uma reportagem do Jornal Nacional sobre um prédio curvo, em Londres, com vidros espelhados, ilustrado

⁴ <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2013/09/predio-reflete-luz-do-sol-e-jornalista-frita-ovo-na-calcada-em-londres.html>

na Figura 24. O prédio virou um enorme espelho côncavo que concentra os raios do sol na calçada, causando estragos em carros (Figura 25) e fachadas de lojas.

Figura 23 – Prédio curvo mostrado na reportagem



Fonte: GLOBO.COM, 2013.

Figura 24 – Carro com a lataria e espelho com marcas de derretimento devido a reflexão da luz solar



Fonte: GLOBO.COM, 2013.

Ainda foi passado para os alunos um outro vídeo⁵ ([D'ÁVILA, 2014](https://www.youtube.com/watch?v=tn01x3fkGak)) sobre teste de calor com um espelho. Nele, o autor encontra o foco da parábola observando a reflexão da luz solar em um papel, e após pouco tempo o papel começa a incendiar, como ilustra a Figura 26.

⁵ <https://www.youtube.com/watch?v=tn01x3fkGak>

Figura 25 – Papel incendiado pelos raios concentrados no foco do refletor



Fonte: D'ÁVILA, 2014.

Após a apresentação dos vídeos ilustrando a propriedade refletora do foco da parábola, é contada aos alunos a lenda de Arquimedes com o auxílio de um vídeo⁶ (BOZEMAN, 2015) que mostra uma tentativa de reproduzir a lenda utilizando os materiais disponíveis na época, como mostra a Figura 27.

Figura 26 – Tentativa de reproduzir a lenda de Arquimedes



Fonte: BOZEMAN, 2015.

Os alunos acharam muito interessante e, mesmo avisados de que a história provavelmente não é verdadeira, fizeram diversos comentários sobre a possibilidade. Depois de receberem as informações sobre a propriedade refletora, os alunos mostraram-se entusiasmados com a proposta de construção do refletor parabólico,

⁶ <https://www.youtube.com/watch?v=PQUMMsGonVc>

devido ao fato de um experimento não ser algo constantemente visto em sala de aula. Para a atividade 3 foi solicitado que os alunos levassem o material que seria necessário para a construção do refletor.

4.3.3 Atividade 3: construção do Refletor parabólico.

O objetivo dessa atividade era verificar a propriedade refletora da parábola e foram utilizadas 03 aulas para a sua aplicação.

Para iniciar é apresentado, aos alunos, trechos de um vídeo⁷ da construção de um refletor parabólico e também um refletor já construído pela professora para que eles tenham um modelo. Os alunos levaram os materiais necessários e uniram-se em 6 equipes de 5 ou 6 integrantes. Foram utilizadas duas aulas para a construção: os alunos utilizaram papelão para a base, papel cartão coberto por papel alumínio para a superfície refletora e também papel cartão com fita para unir a base com a superfície refletora. Algumas equipes utilizaram cola quente. Para a realização das medições foi utilizada uma aula. A Figura 28 ilustra as equipes trabalhando na construção do refletor.

Figura 27 – Alunos construindo o refletor parabólico



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

⁷ <https://www.youtube.com/watch?v=TfT3JHlByhI>.

As medições de temperatura foram realizadas utilizando termômetros digitais, alguns modelos culinários e outros de termômetros de ambientes, com um sensor na extensão de um cabo, no dia da medição a temperatura ambiente estava em torno de 26°C e os alunos conseguiram medir temperaturas superiores a 42 graus (Figura 29), evidenciando que o refletor teve êxito. Os alunos buscavam encontrar pontos com diferentes temperaturas, com o intuito de encontrar o ponto com a temperatura mais alta, que seria o foco do refletor parabólico. Na aula em que foram realizadas as medições de temperatura, as equipes acompanharam a medição de todos os colegas e surgiu uma competição para ver quem conseguia atingir a maior temperatura. Alguns grupos quiseram medir várias vezes, para tentar atingir uma temperatura maior. A Figura 29 ilustra as medições de algumas equipes. As equipes deveriam fazer um relatório contendo uma pesquisa sobre o foco da parábola, a construção e os resultados obtidos no experimento que seria entregue na aula seguinte.

Figura 28 – Alunos verificando a temperatura no foco da parábola



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

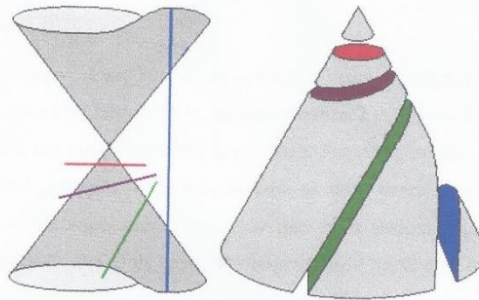
Apesar do entusiasmo na realização do experimento, dois grupos deixaram de entregar o relatório, mesmo sendo dada a oportunidade de entregar com atraso. Os relatórios entregues continham todas as informações que foram solicitadas. As Figuras 30 a 34 apresentam trechos de alguns relatórios entregues pelos alunos.

Figura 29 – Definição da parábola: relatório do Grupo 1

I. Descrição da parábola:

A parábola é uma seção cônica gerada pela interseção de uma superfície cônica de segundo grau e um plano paralelo a uma linha geradora do cone (chamada de geratriz). Uma parábola também pode ser definida como o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado (chamado de foco) e de uma reta dada (chamada de diretriz). É uma curva plana.

Seção cônica



Se o plano corta o cone de maneira oblíqua ao seu eixo central e paralelo há uma geratriz, então, a seção formada é uma **parábola**.

Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Figura 30 – Metodologia e descrição das atividades: relatório do Grupo 1

III. Metodologia:

Na aula do dia 25/08, nossa professora de matemática iniciou um projeto simples, envolvendo o conteúdo estudado: parábola. A proposta era a de que montássemos uma e com ela, verificássemos a temperatura, encontrando seu ponto foco e percebendo as variações térmicas que ocorreriam. Formamos grupos com 5 integrantes cada e separamos as tarefas, descritas a seguir:

IV. Descrição das atividades:

Começamos recortando duas bases no papelão, com formatos de parábolas, com aproximadamente 30 cm de largura cada, enquanto outros 2 membros do grupo recortavam 22 pequenos retângulos em um pedaço de papel cartão. Pegamos, então, outro papel cartão e o cobrimos com papel alumínio. Em seguida, com as duas bases prontas, dobramos nossos pequenos retângulos de papel cartão de modo que estes fossem colados com fita adesiva transparente nos lados de dentro da base e apoiassem nosso papel cartão envolto em alumínio, acompanhando o formato das bases e também colado com fita adesiva, para maior sustentação. A decoração das bases ficava a critério do grupo e era opcional; no nosso caso específico optamos por 14 lindas estrelas brancas também feitas de papelão com o intuito de tornar nosso trabalho único e especial.

Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Figura 31 – Resultados das medições: relatório do Grupo 2
Relatório das Medições

Para iniciarmos as medições na parábola, primeiramente tivemos que encontrar o foco do raio solar, ou seja, onde os raios solares estavam mais presente em nosso trabalho. Após termos feito isso, colocamos no local um termômetro para sabermos a qual temperatura estava o foco da nossa parábola.

Em nossa primeira medição, conseguimos uma temperatura de 40,7 °C (temperatura ambiente 26,2 °C). Todavia, não havíamos encontrado o foco perfeitamente, o que resultou em uma baixa temperatura comparando com a dos colegas.

Entretanto, ao medir na segunda vez, encontramos perfeitamente o foco da nossa parábola e com isso conseguimos uma maior temperatura resultante em 44,3 °C (temperatura ambiente 24,8 °C).

Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Figura 32 – Anexos: relatório do Grupo 1

VI. Anexos:

Vista traseira da superfície metálica:



Vista Lateral e Frontal da superfície construída:



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Figura 33 – Trecho dos relatórios: conclusões

Conclusão

Na parte de montar a parábola foi bem divertida, na hora de ver a temperatura chegamos a conclusões que da primeira vez que medimos deixamos bastante tempo no sol por isso ele mediu 41.8 graus, mas quando fomos medir pelo segundo vez deixamos pouco tempo e ele só chegou a 35 graus.

Conclusão

Com esse trabalho pudemos aprofundar nosso conhecimento em relação às parábolas, e o experimento funcionou, pois conseguimos perceber o aumento da temperatura significativamente.

Conclusões: Quando os raios solares atingiram um ponto com a sol, foi atingida uma temperatura um tanto quanto elevada (43,8°C). Os trabalhos que foram feitos em proporções maiores obtiveram mais onda de calor, portanto, com esse experimento concluímos que, a primeira coisa que fizemos nos deu um resultado considerável e a terceira uma temperatura quente, podemos utilizá-lo para aquecer coisas pequenas, e se colocarmos um espelho para refletir o sol podemos até por fogo em papéis ou algo do tipo.

Conclusão

Com a conclusão deste trabalho, nós percebemos que, realmente, os raios solares estavam concentrados no foco na parábola, aprendemos também a fazer uma parábola simples e prática, além de mostrar suas aplicações e o conceito de parábola.

Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Podemos notar nos relatórios que todos os grupos obtiveram êxito no experimento, atingindo temperaturas muito mais altas do que a temperatura ambiente. O grupo que apresentou a terceira conclusão da Figura 34 citou que os colegas que construíram o refletor em um tamanho maior atingiram temperaturas maiores. Porém alguns alunos obtiveram algumas conclusões que podem ser contestadas, por exemplo, na primeira conclusão da Figura 34, os alunos atribuíram uma temperatura

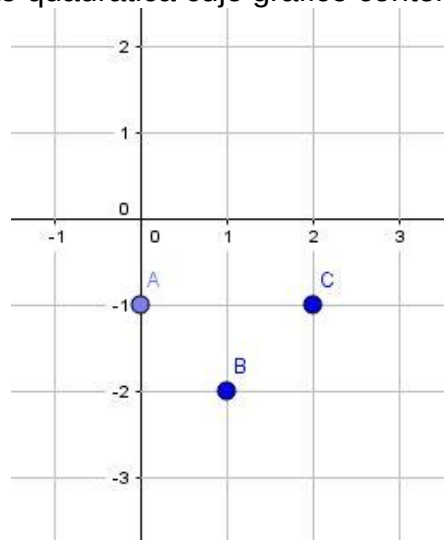
menor ao medir pela segunda vez pelo fato de ter ficado menos tempo medindo, e não por não ter posicionado o termômetro no foco da parábola.

4.3.4 Atividade 4: identificação da lei da função quadrática a partir de 3 pontos da parábola

O objetivo dessa atividade foi encontrar a lei de formação da função quadrática conhecendo três pontos pertencentes ao gráfico da parábola. Foram usadas 04 aulas para o desenvolvimento dessa atividade.

Retomando o conhecimento que os alunos já possuem de que a função quadrática é escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, iniciamos o processo de encontrar a lei de formação da função quadrática conhecendo três de seus pontos. Para encontrar a função precisamos resolver um sistema com três equações e três variáveis. Por exemplo, considere a parábola que passa pelos pontos A, B e C ilustrados na Figura 35.

Figura 34 – Função quadrática cujo gráfico contém três pontos dados



Fonte: a autora, 2017.

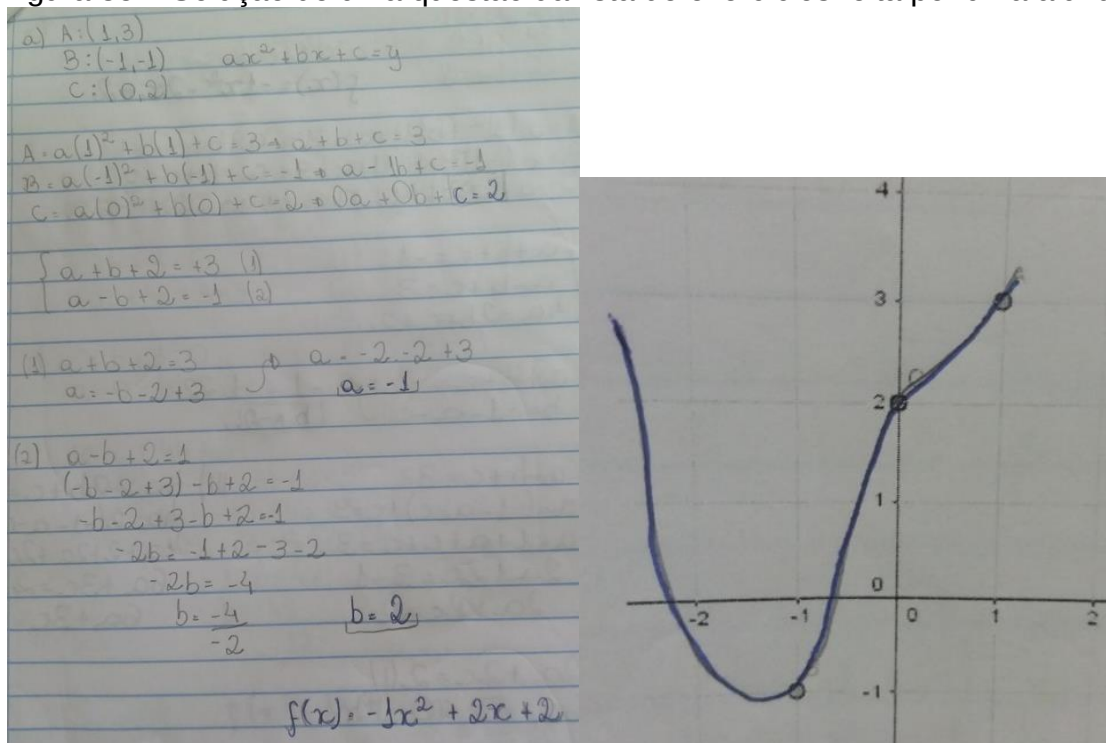
Substituindo os pontos na forma geral da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ obtemos o sistema 3x3

$$\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

cujas soluções são os valores de $a = 1$, $b = -2$ e $c = -1$. Foram feitos alguns exemplos em sala, inicialmente com valor $x = 0$, quando o valor de c é encontrado de maneira direta, depois para $x \neq 0$, resultando um sistema em que nenhuma incógnita é encontrada de maneira direta. Os alunos resolveram exercícios em sala e também entregaram na aula seguinte uma lista de exercícios (APÊNDICE E) cujo objetivo era tentar representar a parábola que passa pelos pontos marcados e encontrar sua lei de formação.

Como o conteúdo de sistemas de equações de três variáveis e três equações já tinha sido visto, os alunos não tiveram maiores problemas em encontrar a lei da função. Porém, na atividade em que deveria ser representado o gráfico da função passando pelos pontos, alguns alunos tiveram dificuldades por não relembrarem as propriedades que são estudadas no Ensino Fundamental, como a concavidade ser para cima ou para baixo dependendo do valor de a . Na Figura 36 temos a resolução de uma questão da lista de exercícios sobre a atividade 4 realizada por uma aluna, na qual podemos ver que a aluna encontrou corretamente a lei de formação da função, $f(x) = -1x^2 + 2x + 2$, mas não relacionou o sinal do coeficiente a com a concavidade da parábola, conteúdo apresentado no Ensino Fundamental.

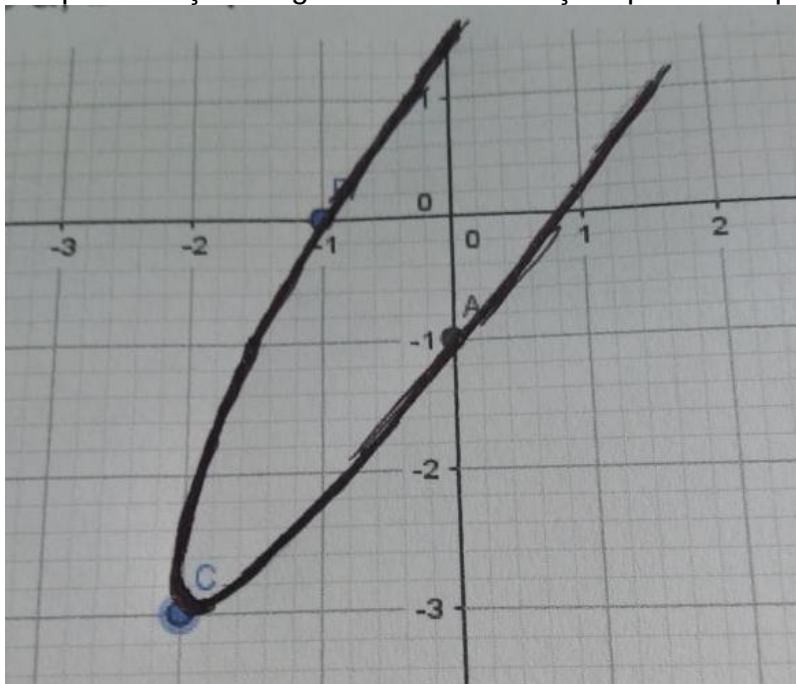
Figura 35 – Solução de uma questão da lista de exercícios feita por uma aluna



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Outro aluno que veio de outra escola alegou não ter visto o conteúdo no ano anterior ele encontrou a lei de formação correta, mas representou a parábola ilustrada na Figura 37 que não corresponde a lei obtida e nem ao gráfico de uma função quadrática.

Figura 36 – Representação do gráfico de uma função quadrática por um aluno



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

A correção da construção dos gráficos foi feita posteriormente utilizando o software GeoGebra. Como os computadores do laboratório de informática precisavam de manutenção, foi necessário projetar os gráficos para os alunos, possibilitando que eles verificassem seus gráficos e também conferissem se encontraram os coeficientes corretamente.

4.3.5 Atividade 5: método babilônico

O objetivo dessa atividade era fazer os alunos perceberem a evolução das ideias matemáticas e encontrar as raízes de uma equação quadrática.

A aula foi iniciada com a apresentação do vídeo⁸ “A fórmula que não é de Bhaskara” que apresenta a história da equação do segundo grau e sua solução. É

⁸ A fórmula que não é de Bhaskara. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=p2uTvDqGKrA&t=1s>>. Acesso em: 07 jul 2018.

proposto então a solução da equação por meio do método babilônico de encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto. A regra para encontrar esses dois números cuja soma e cujo produto são dados era enunciada pelos babilônios como:

Eleve ao quadrado a metade da soma subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número. (LIMA, 2013, p.108).

Utilizando esse método, foi feito um exemplo explicando o passo a passo para encontrar os dois números cuja a soma deles é 2 e o produto entre eles é -8. No Quadro 1 temos o passo a passo para obter a solução.

Quadro 1: Passo a passo do método babilônico

Eleve ao quadrado a metade da soma:	$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$
Subtraia o produto:	$1 - (-8) = 9$
Extraia a raiz quadrada da diferença:	$\sqrt{9} = 3$
Some ao resultado a metade da soma, isso dará o maior dos números procurados:	$3 + \frac{2}{2} = 4$
Subtraia-o da soma para obter o outro número:	$2 - 4 = -2$

Fonte: a autora, 2017.

Portanto os números que satisfazem essas condições são 4 e -2. Os alunos verificaram que, de fato, esses números satisfazem as condições do enunciado.

Foram propostos outros valores, alguns fáceis de calcular mentalmente, outros resultados não exatos em que o modo mais fácil de resolver é realizando os cálculos e também quando o resultado não é possível para números reais. Na sequência foi explicado que esses números que estavam sendo determinados eram as soluções da equação $x^2 - sx + p = 0$, para que os alunos relacionassem com a equação quadrática.

Os alunos comentaram que este método foi mais fácil para eles do que o aprendido no ano anterior, utilizando a fórmula de Bhaskara para solução das equações do segundo grau, pois utilizando a fórmula eles normalmente confundem os sinais a serem utilizados. Com essa atividade também foi discutido sobre a construção do conhecimento matemático, tentando desfazer a ideia que muitos alunos possuem de que matemáticos “inventam” fórmulas ao acaso e eles devem aprender a utilizá-las, sem uma motivação.

4.3.6 Atividade 6: forma canônica do trinômio

Os objetivos da Atividade 6 foram encontrar as raízes e o vértice da função quadrática por meio da forma canônica do trinômio e utilizar essas informações para construir o gráfico da função. Foram utilizadas 05 aulas para o seu desenvolvimento.

Iniciei a explicação com o exemplo $f(x) = x^2 - 4x + 3$, retomando o método de completar quadrados e também o significado das raízes da função, igualando a lei de formação a zero e encontrando as soluções dessa equação. Assim, reescrevemos a função usando o método de completar quadrados:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

e obtivemos as raízes resolvendo a equação $(x - 2)^2 - 1 = 0$:

$$(x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{1}$$

$$x - 2 = 1 \rightarrow x' = 3$$

$$x - 2 = -1 \rightarrow x'' = 1.$$

Uma vez obtidos os valores eles foram substituídos na função dada para tirar a prova real de que tínhamos, de fato, obtido as raízes.

Depois desse primeiro exemplo foi realizada a formalização esclarecendo que função quadrática pode ser escrita da forma

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v,$$

conhecida como forma canônica do trinômio, sendo (x_v, y_v) as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função quadrática. Para escrever a função desta forma

basta utilizar o método de completar quadrados. Para encontrar as raízes é necessário igualar a função a zero.

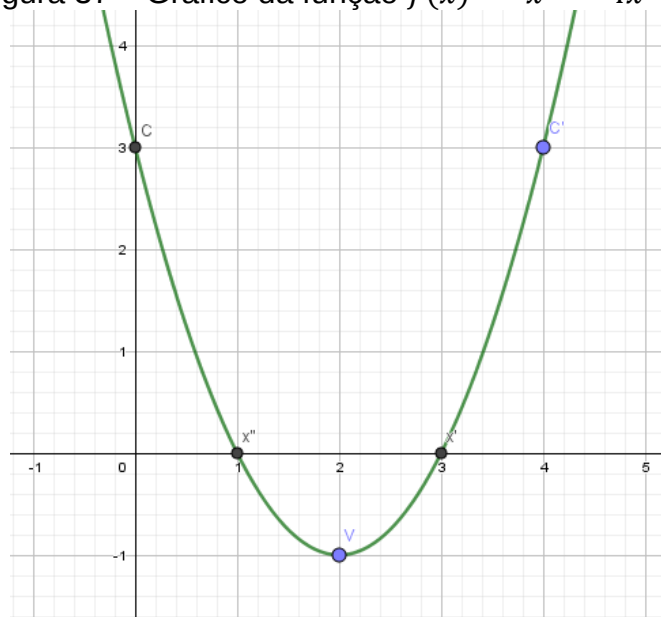
Assim, dada uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ ela pode ser reescrita como

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

logo $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}$ que são as clássicas fórmulas para as coordenadas do vértice da parábola e igualando a zero obtemos $x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que é a conhecida fórmula de Bhaskara. Essa forma de escrever o trinômio foi apresentada aos alunos, mas não foi demonstrada por envolver termos genéricos difíceis de serem entendidos por alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Agora, conhecendo as raízes, o vértice e também utilizando o coeficiente c (valor da função quando $x = 0$) é possível construir o gráfico da função. Além desses pontos outros podem ser marcados utilizando o conhecimento de que a função calculada em pontos cujas abscissas são equidistantes da abscissa do vértice possuem o mesmo valor. O gráfico do exemplo inicial pode ser observado na Figura 38 em que marcamos os pontos obtidos. Na aula, o gráfico foi feito no quadro para que os alunos acompanhassem melhor a construção.

Figura 37 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

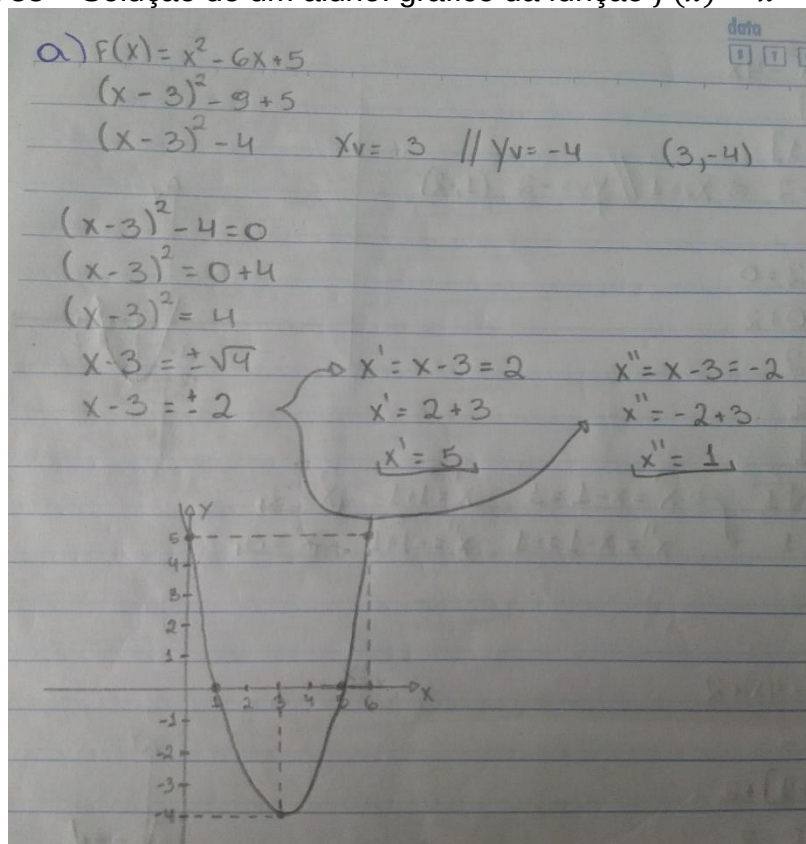


Fonte: a autora, 2017.

Como os alunos já haviam visto o conteúdo de completar quadrados, conseguiram desenvolver a atividade. Um erro comum é o de sinal, tanto na hora de completar o quadrado como na hora de identificar o valor da abscissa do vértice, mas no momento da construção do gráfico os alunos percebiam que tinham errado em algo e conferiam os resultados. Depois de alguns exemplos e exercícios os erros foram diminuindo. Outra dificuldade encontrada foi na marcação de pontos equidistantes do vértice. Durante os exercícios feitos em sala alguns alunos não conseguiam identificar quais pontos poderiam ser marcados para facilitar a construção do gráfico, pedindo auxílio nesse momento.

Após os exemplos e atividades resolvidas em sala, os alunos levaram para casa uma lista de exercícios (APÊNDICE F) sobre a construção de gráficos das funções quadráticas utilizando a forma canônica do trinômio. De modo geral os alunos obtiveram êxito nas construções dos gráficos, a Figura 39 mostra a solução de um dos exercícios da lista feita por um aluno.

Figura 38 – Solução de um aluno: gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

4.3.7 Atividade 7: problemas de máximos e mínimos

O objetivo dessa atividade era resolver a situação-problema envolvendo máximos e mínimos de funções quadráticas, para tal os alunos precisavam determinar a lei de formação da função que representava a situação-problema e depois utilizar a forma canônica do trinômio para encontrar o valor de máximo e/ou de mínimo. Foram previstas 05 aulas para trabalhar com essa atividade.

Essa atividade foi iniciada com a proposição de alguns exemplos que foram resolvidos pela professora. Inicialmente foi feito um exemplo sobre área e perímetro, por ser mais simples de ser compreendido. Os alunos participavam da construção da solução quando questionados, mas sem guiá-los com as perguntas corretas não seria possível resolver o problema. O enunciado de outro exemplo feito era o seguinte: “Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R\$800,00 mais R\$10,00 por cada lugar vago. Qual deve ser o número de passageiros para que a empresa tenha a maior renda?”. Ao questionar os alunos sobre esse problema, mesmo já tendo resolvido problemas de máximos e mínimos sobre área e perímetro, nenhum aluno teve ideia de como montar a solução do problema. Alguns falaram simplesmente que “se estiver cheio vai lucrar mais, é óbvio”. Durante a solução do problema, os alunos conseguiram acompanhar os passos feitos, mas sem muita convicção de que conseguiriam fazer os exercícios sozinhos.

Após esses exemplos resolvidos em conjunto com a professora, os alunos receberam uma lista de exercícios (APÊNDICE G) e formaram grupos de 4 ou 5 alunos para resolvê-los. Os alunos tiveram três aulas para resolver as questões e tirar as dúvidas. Após isso, um aluno de cada grupo deveria apresentar a solução de uma das questões para os colegas, utilizando o quadro. Apesar da atividade ser em equipe, todos os alunos deveriam ter a resolução de todos os exercícios da lista em seu caderno. Na Figura 40 temos os alunos trabalhando em equipes para resolver a lista de exercícios.

Figura 39 – Alunos resolvendo a lista de exercícios

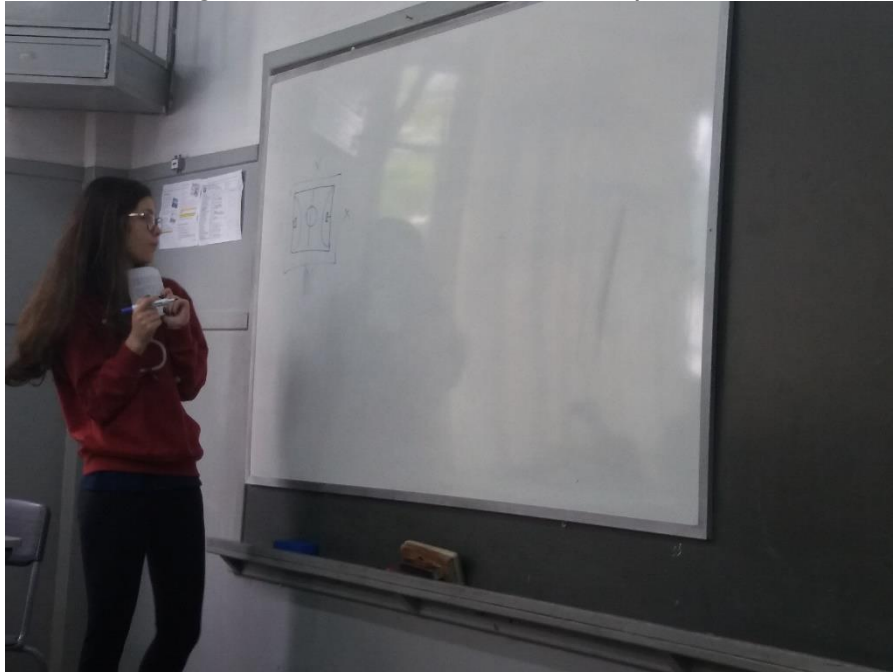


Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Na aula das apresentações, primeiramente foi feita a verificação de que todos os alunos possuíam as soluções dos exercícios nos seus cadernos. Todos os grupos apresentaram e no momento das soluções dos alunos no quadro, muitos alunos me surpreenderam. Alguns alunos tímidos conseguiram explicar a resolução dos exercícios de maneira clara e com boa entonação. Outros, mais despojados, brincaram e explicaram de uma maneira mais informal. Todos apresentaram de maneira satisfatória. A única dificuldade que os alunos tiveram foi na organização do quadro: ao acompanhar a explicação do aluno e sua escrita no quadro, foi possível entender a solução do problema, mas, caso alguém apenas olhasse para o quadro, seria impossível entender os passos, pois a maior parte dos alunos não seguiu uma ordem, escrevendo em qualquer parte do quadro.

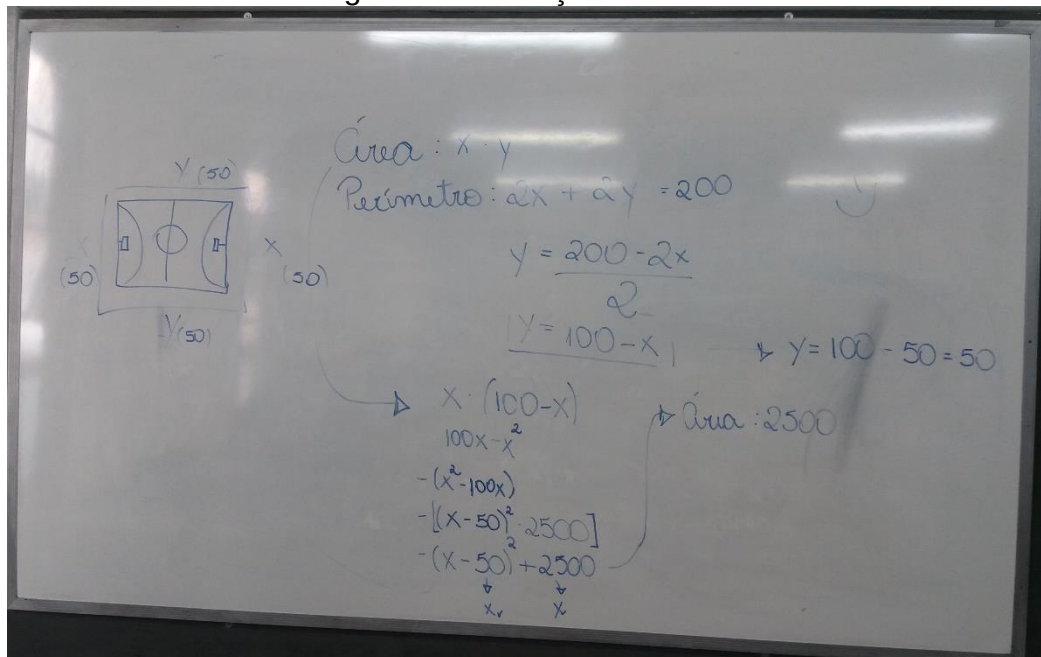
Uma das questões da lista de exercícios era: “Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta dela com tela de alambrado. Tendo recebido 200 m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível.” Essa questão foi resolvida por uma aluna, que explicou detalhadamente como resolver o problema, a solução dela está representada nas Figura 41 e 42.

Figura 40 – Aluna resolvendo a questão



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Figura 41 – Solução da aluna



Fonte: acervo de fotos da autora, 2017.

Após a aplicação de todas as atividades pude constatar que esta foi a atividade em que os alunos apresentaram mais dificuldade, pois era necessária primeiramente a interpretação do problema para encontrar a função quadrática. Porém, essa dificuldade já havia sido prevista no planejamento da sequência didática, por isso os

alunos foram separados em equipes. Dessa forma, além de debaterem a solução do problema, quando um aluno da equipe conseguia resolver, explicava para os outros que ainda não haviam compreendido.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta deste trabalho foi desenvolver uma estratégia de ensino para o conteúdo de função quadrática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) orientam que os alunos concluintes do Ensino Médio:

saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Seguindo essas orientações, buscamos apresentar o contexto histórico de alguns elementos da função quadrática para os alunos, como a obtenção das raízes e o estudo da parábola, sem deixar de lado os cálculos algébricos necessários, mas apresentando uma abordagem diferente da usual.

Inclusive, as atividades com cálculos algébricos foram as que os alunos apresentaram maior dificuldade. Porém, no decorrer das aulas, foi notória a melhora no desenvolvimento das atividades que necessitavam de manipulações algébricas, embora os alunos ainda se sentissem inseguros, quase sempre pedindo auxílio para conferir os resultados antes de prosseguir.

Esse trabalho representou uma mudança de postura, da minha concepção do papel do professor. Não cabe mais um professor que seja apenas transmissor de conhecimento. Atividades diferenciadas são importantes para manter os alunos interessados e participativos, contudo nem sempre são viáveis, pois demandam muito mais tempo de preparo e execução. Outro fato importante foi o papel que assumi com esse trabalho, não sendo apenas a professora, mas também uma pesquisadora que estava recolhendo dados. Esta talvez tenha sido a maior dificuldade encontrada na realização do trabalho, pois durante as aulas muitas vezes o papel de pesquisadora foi preterido ao papel de professora, e com isso alguns momentos e atividades que poderiam ter sido registradas para incorporar este trabalho foram esquecidas, principalmente pelo fato de estar sozinha com a turma, precisando atender todos os alunos e também registrar as atividades das aulas.

De modo geral, considero que a aplicação da sequência didática foi muito produtiva. Os alunos mostraram interesse na realização das atividades,

principalmente na atividade prática, mas mesmo durante as aulas, questionavam e argumentavam sobre as atividades desenvolvidas. Dos 32 alunos da turma, alguns entregaram as listas com atraso, mas apenas 3 não entregaram as listas de exercícios propostos.

A forma canônica do trinômio e a obtenção da parábola que passa por três pontos dados não costumam ser trabalhadas no Ensino Médio, principalmente em uma escola pública, mas consideramos um conteúdo importante para um melhor entendimento da função quadrática.

Apresentamos algumas das aplicações da parábola, mas, pela quantidade reduzida de aulas que temos, não foi possível trabalhar de maneira mais ampla.

Para trabalho futuros, destacamos que as atividades aqui apresentadas podem ser adaptadas, tanto para serem trabalhadas no ano final do Ensino Fundamental quanto no terceiro do Ensino Médio, momento em que os alunos já viram o conteúdo de distância entre pontos e cônicas, então alguns conteúdos poderiam ser mais aprofundados.

Apresentamos uma sequência que visa o ensino da função quadrática como um todo, mas as atividades podem ser desenvolvidas separadamente quando necessário. Outra possibilidade é a aplicação da parábola na Física, principalmente sobre o movimento uniformemente variado, em que diversos experimentos podem ser feitos.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia**. Volume 1. 2ª edição. São Paulo: Leya, 2016.

BOZEMAN, J. **Archimedes Death Ray**. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=PQUMMsGonVc>>. Acesso em: 07 jul 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica: **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2006.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 1ª edição. LOCAL: Blucher, 1996.

CERQUEIRA, A. A. **Parábola e suas aplicações**. 2015. 55 p. Dissertação - (mestrado)- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, 2015.

CHAVANTE, E; PRESTES, D. **Quadrante Matemática**. 1º ano. São Paulo. Edições SM, 2016.

CHUNG, K. **A parábola, sua propriedade refletora e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

DUTRA, S.M. **Contextualizando o Ensino das Parábolas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

D'ÁVILA, Jader. **Teste de calor usando Espelho parabólico**. 2014. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=tn01x3fkGak>>. Acesso em: 07 jul 2018.

EVES, H. W. **Introdução a história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GLOBO.COM. **Prédio reflete luz do sol e jornalista frita ovo na calçada em Londres**. 2013. Disponível em: <<http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2013/09/predio-reflete-luz-do-sol-e-jornalista-frita-ovo-na-calçada-em-londres.html>>. Acesso em: 26 jun 2018.

JASON, A. **MAAM891'S BLOG**: Foco primario. Offset y cassegrain. 2018. Disponível em: <<https://maam891.wordpress.com/2011/05/11/>>. Acesso em: 09 jul 2018.

LEININGER, M.M. **Qualitative research methods in nursing**. Orlando: Grune & Stratton, Inc, 1985.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LOPES, J. F. **Cônicas e Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

LOUZADA, S. **Relações entre cônicas e funções no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas. 2013.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, M. T. G. **Parábolas – As curvas preciosas**. Objeto de aprendizagem colaborativa – OAC. Universidade Estadual de Londrina, 2009.

MELO, G.S. **Ensino de Geometria por secções**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.

MONTEIRO, R.M. **Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

NETO, F. Q. **Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o Ensino de Matemática**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. 2008

OLIVEIRA, C. L. **Um apanhado teórico-conceitual sobre a pesquisa qualitativa: tipos, técnicas e características**. Travessias (UNIOESTE. Online), 2009.

OLIVEIRA, O. **Cônicas (Propriedades de Reflexão)**. Curso de Geometria Analítica. Primeiro semestre de 2016. Notas de aula. Universidade de São Paulo. Disponível em < <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ele-conicas.pdf>>. Acesso 01/06/2018.

PENSE MATEMÁTICA. **Cônicas**. 2018. Disponível em: <<http://pensevestibular.com.br/category/topicosdematematica/geometria-analitica/conicas>>. Acesso em: 09 jul 2018.

PERETTI, L; COSTA, T. **Sequência Didática na Matemática**. Revista de Educação do IDEAU. Vol 8, n. 17. Getúlio Vargas, 2013.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta curricular de Santa Catarina: formação integral na educação básica**. Estado de Santa Catarina, 2014.

SANTOS, L. M. **Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática**. Curitiba: Ibpx, 2009.

SILVA FILHO, L.E. **Cônicas: apreciando uma obra-prima da matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

VENTURI, J.J. **Cônicas e quádras**. 5ª ed. Curitiba, 2003.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: Como Ensinar**. Editora Artmed: Porto Alegre, 2007.

WIKIMEDIA COMMONS. **Archimedes Heat Ray conceptual diagram**. 2007. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_Heat_Ray_conceptual_diagram.png>. Acesso em: 09 jul 2018.

APÊNDICES**APÊNDICE A – CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA****DECLARAÇÃO DA INSTITUIÇÃO PARTICIPANTE
CARTA DE ANUÊNCIA**

Autorizamos a pesquisadora responsável Caroline Kosloski, mestrande Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – *PROFMAT*, na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), orientada pela professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo a realizar uma aplicação para sua Dissertação de Mestrado nas dependências da EEB Professor José Duarte Magalhães, sobre Funções Quadráticas, sendo esta a instituição coparticipante, motivo ao qual está sendo direcionada a carta de anuência.

Como mencionado anteriormente, a pesquisa será realizada nas dependências da escola, onde a pesquisadora trabalha como docente do Ensino Médio atualmente.

Concordamos que os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados por escritos e oralmente em banca de Dissertação, em exposição oral, congressos e revistas científicas.

Jaraguá do Sul, ____ de _____ de 2017.

Atenciosamente,

Diretora

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO DOS ALUNOS



TERMO DE CONSENTIMENTO

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – *PROFMAT* da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: “**Ensino da Parábola no Ensino Médio**”, da acadêmica Caroline Kosloski, tendo como objetivo analisar as soluções apresentadas nas atividades propostas pela acadêmica que é também professora dele(a), e com a autorização da direção da escola.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula.

A identidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, podendo substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A pessoa que estará acompanhando os procedimentos será a própria acadêmica e professora Caroline Kosloski.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados de do(a) seu(ua) filho(a)/dependente, como as resolução das atividades que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(a) senhor(a) poderá solicitar o não uso das resoluções das atividades do(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestranda Caroline Kosloski
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

Professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino
Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome do aluno: _____

Nome do responsável por extenso: _____

Assinatura _____ Local: _____ Data: ____/____/____

APÊNDICE C – PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS

	SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO GERÊNCIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO EEB PROF. JOSÉ DUARTE MAGALHÃES Data: ____/____/2017	NOTA: (Máximo: 2,0)
ALUNO(A): _____		TURMA: 101
PROFESSORA: Caroline Kosloski		

Lista de Exercícios – Método de Completar Quadrados

Observações: como avisado em sala, serão 5 listas de exercícios durante o bimestre, cada uma com valor 2,0. Esta folha com o enunciado deverá ser entregue junto com os exercícios resolvidos. Data de entrega: 09/08/17

Utilize o método de completar quadrados para escrever as expressões na forma de quadrado perfeito: (Valor: 0,1 cada)

- | | | | |
|---------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 10x + 30$ | f) $2x^2 + 16x + 70$ | k) $x^2 - 8x + 18$ | p) $2x^2 - 16x + 4$ |
| b) $x^2 + 4x - 2$ | g) $3x^2 - 18x + 32$ | l) $x^2 - 8x - 19$ | q) $2x^2 + 4x - 5$ |
| c) $x^2 - 20x + 88$ | h) $-x^2 + 6x - 13$ | m) $x^2 + 18x + 80$ | r) $-3x^2 + 6x - 7$ |
| d) $x^2 + 6x - 8$ | i) $-x^2 - 12x + 15$ | n) $x^2 - 12x + 35$ | s) $-x^2 + 2x - 1$ |
| e) $x^2 - 10x + 25$ | j) $-2x^2 + 12x - 10$ | o) $x^2 + 4x - 9$ | t) $-2x^2 + 8x - 10$ |

APENDICE D – SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS

	SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO GERÊNCIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO EEB PROF. JOSÉ DUARTE MAGALHÃES Data: ____ / ____ / 2017	NOTA: (Máximo: 2,0)
ALUNO(A): _____ TURMA: 101 PROFESSORA: Caroline Kosloski		

Lista de Exercícios – Sistemas Lineares

Observações: como avisado em sala, serão 5 listas de exercícios durante o bimestre, cada uma com valor 2,0. Esta folha com o enunciado deverá ser entregue junto com os exercícios resolvidos. Data de entrega: 18/08/17

Resolva os sistemas: (Valor: 0,4 cada)

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 5x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 5x - 4y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ 3x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 5x - 4y + 3z = 12 \end{cases}$$

APÊNDICE E – TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS



SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
GERÊNCIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO
EEB PROF. JOSÉ DUARTE MAGALHÃES
Data: ____/____/2017

NOTA: (Máximo: 2,0)

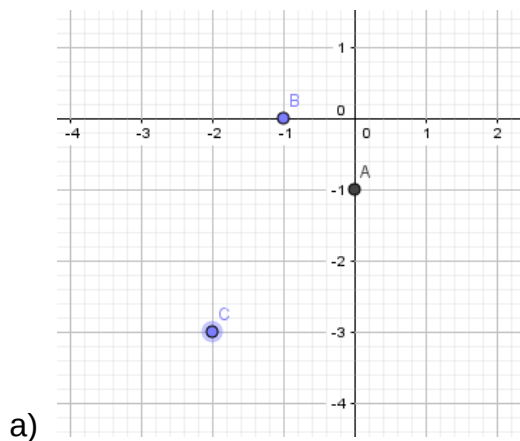
ALUNO(A): _____ TURMA: 101

PROFESSORA: Caroline Kosloski

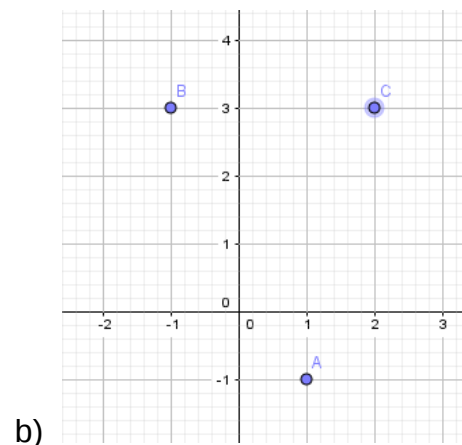
Lista de Exercícios – Encontrar a Função $ax^2 + bx + c$

Observações: como avisado em sala, serão 5 listas de exercícios durante o bimestre, cada uma com valor 2,0. Esta folha com o enunciado deverá ser entregue junto com os exercícios resolvidos. Data de entrega: 06/09/17

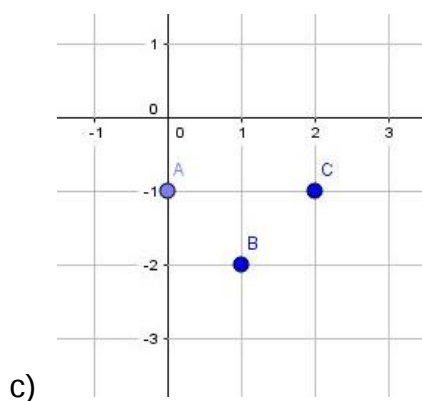
Questão: Represente o gráfico da função quadrática que passa pelos 3 pontos e encontre os valores de a, b e c que determinam a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ em cada caso:



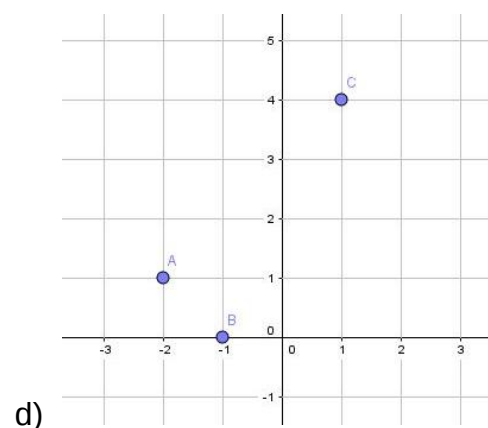
Função: $f(x) =$ _____



Função: $f(x) =$ _____



Função: $f(x) =$ _____



Função: $f(x) =$ _____

APÊNDICE F – QUARTA LISTA DE EXERCÍCIOS

	SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO GERÊNCIA REGIONAL DA EDUCAÇÃO EEB PROF. JOSÉ DUARTE MAGALHÃES Data: ____/____/2017	NOTA: (Máximo: 2,0)
	ALUNO(A): _____ TURMA: 101 PROFESSORA: Caroline Kosloski	

Lista de Exercícios – Construção de Gráficos

Observações: como avisado em sala, serão 5 listas de exercícios durante o bimestre, cada uma com valor 2,0. Esta folha com o enunciado deverá ser entregue junto com os exercícios resolvidos. Data de entrega: 22/09/17

Construa o gráfico das funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = -x^2 + 1$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x$

d) $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$

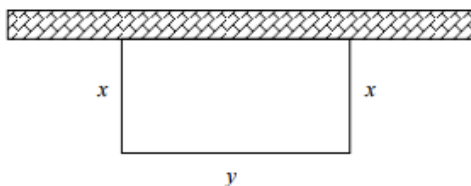
e) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

APÊNDICE G – QUINTA LISTA DE EXERCÍCIOS

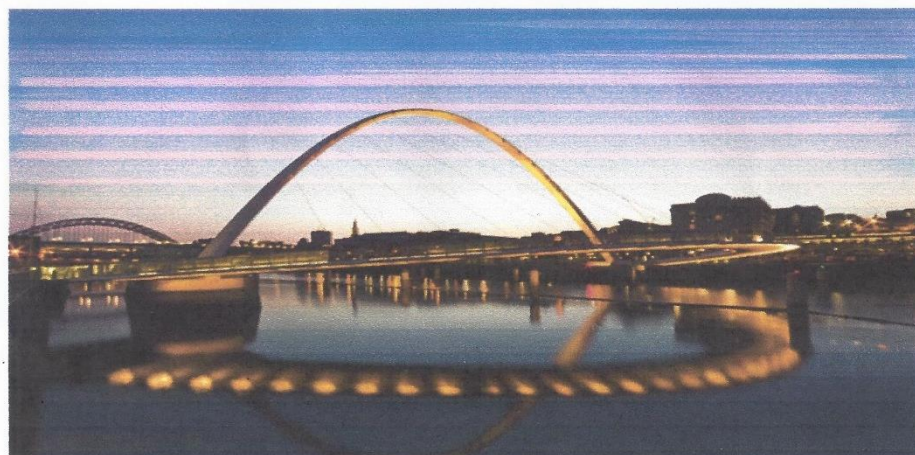
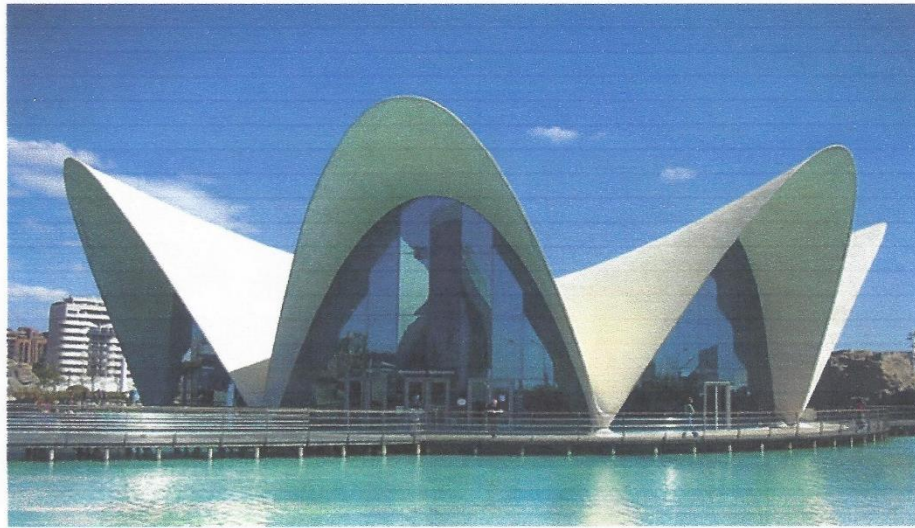
Problemas de máximos e mínimos

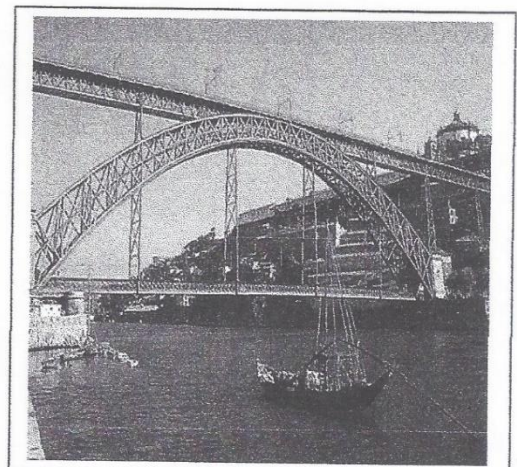
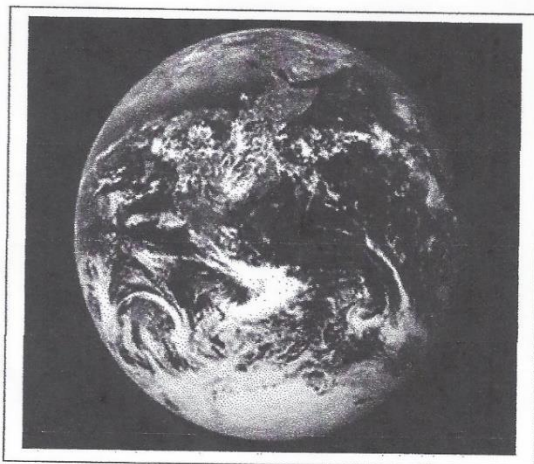
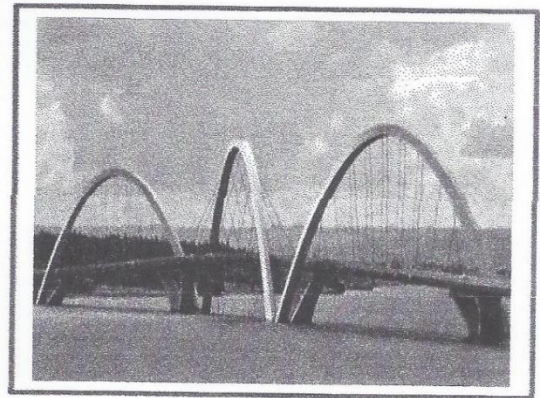
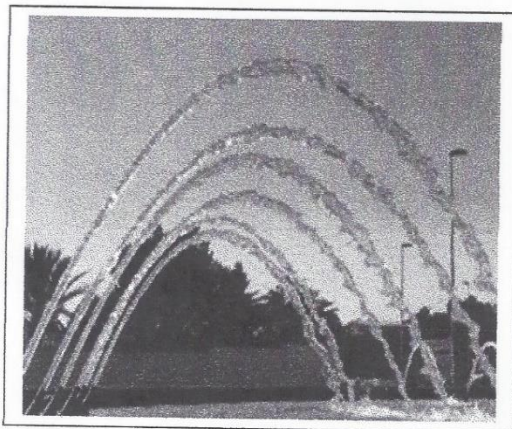
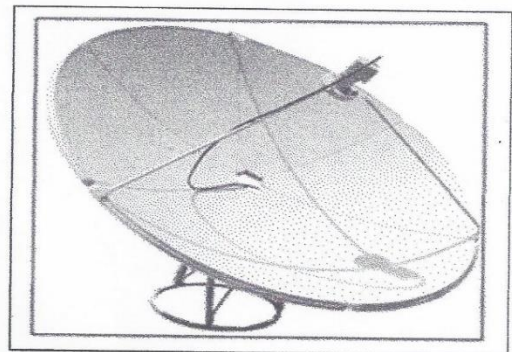
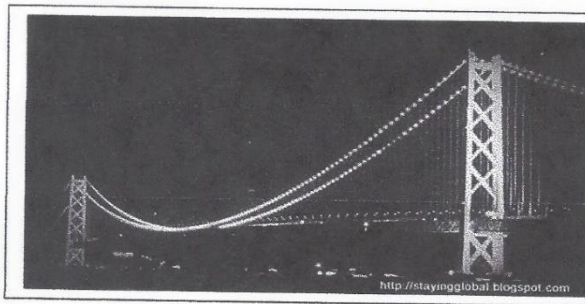
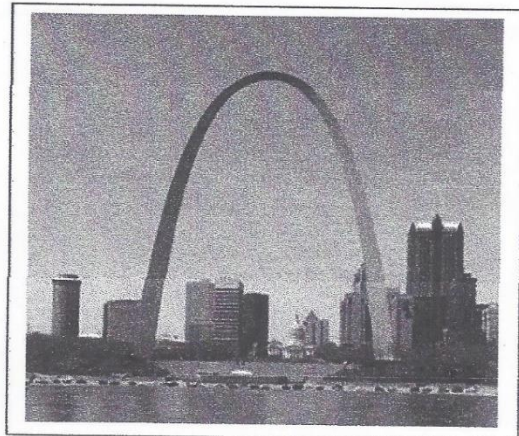
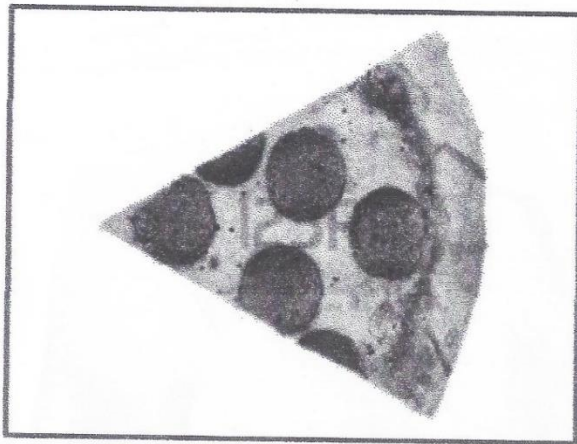
1. Determine o valor máximo da área de um retângulo cujo semiperímetro é 8 unidades de comprimento.
2. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar seus animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área seja a maior possível?
3. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R\$800 mais R\$10,00 por cada lugar vago. Para qual número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?
4. João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolé por R\$20,00. Ele percebeu que cada vez que diminuía R\$1,00 no preço da caixa, venda 40 caixas a mais. Quanto ele deve cobrar pela caixa para que sua receita seja máxima?
5. O diretor de uma orquestra percebeu que com a ingresso a R\$9,00, em média 300 pessoas assistem seus concertos e que, para cada redução de R\$1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta em 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?
6. Um carpinteiro possui um sarrafo com 8 metros de comprimento e pretende com este sarrafo fazer uma moldura retangular para um quadro. Como ele deve cortar o sarrafo, para que a área do quadro seja máxima?
7. Os alunos de uma escola alugaram, para uma festa de formatura, um salão de eventos com capacidade para 150 pessoas. Cada aluno comprometeu-se, de início, a pagar R\$10,00. Caso a lotação do estabelecimento não fosse atingida, o gerente propôs que cada aluno que comparecesse pagasse um adicional de R\$0,50 por lugar vazio. Qual deve ser a quantidade de alunos presentes a festa de formatura para que a receita seja máxima?
8. O lucro de uma fábrica na venda de determinado produto é dado pela função $L(x) = -5x^2 + 100x - 80$, onde x representa o número de produtos vendidos e $L(x)$ é o lucro em reais. Determine:

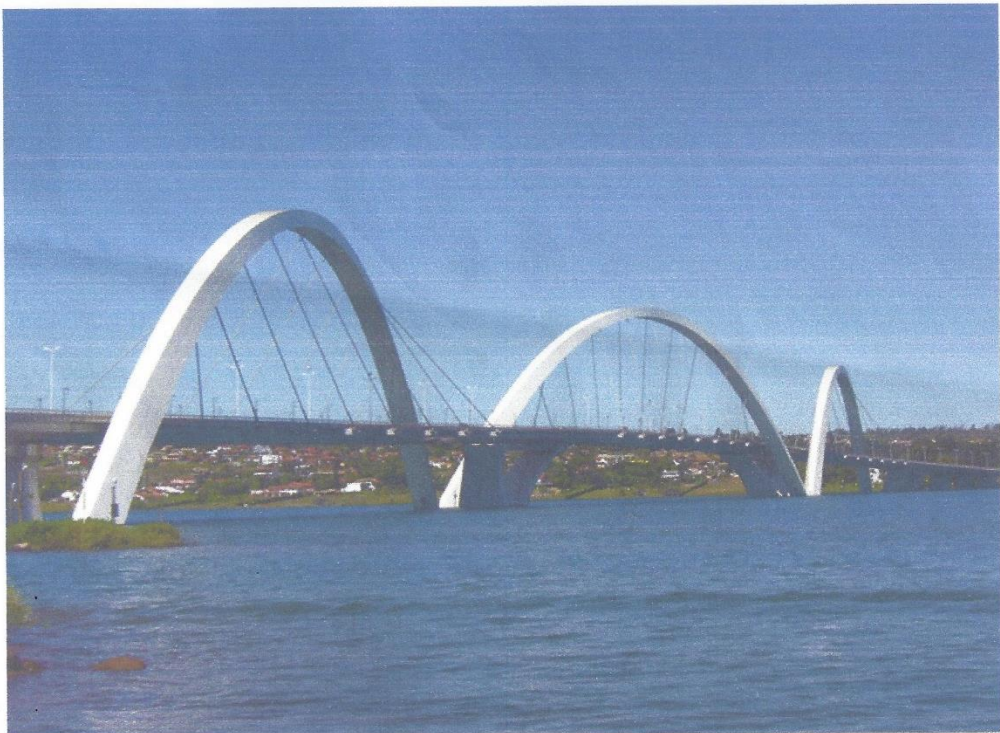
- a) O lucro máximo obtido pela fábrica na venda desses produtos.
- b) Quantos produtos precisam ser vendidos para obtenção do lucro máximo.
9. Um muro, com 6 metros de comprimento, será aproveitado como parte de um dos lados do cercado retangular que certo criador precisa construir. Para completar o contorno desse cercado o criador usará 34 metros de cerca. Determine as dimensões do cercado retangular de maior área possível que o criador poderá construir.
10. Um lote retangular tem 171 m^2 de área; a medida de sua frente tem 1 m a mais do que o dobro da medida dos fundos. Quantos metros de muro deverão ser construídos para cercar o lote?
11. Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta dela com tela de alambrado. Tendo recebido 200 m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível.
12. Deseja-se construir uma casa térrea de forma retangular. O retângulo onde a casa será construída tem 80 m de perímetro. Calcule as dimensões desse retângulo sabendo que a área de sua região deve ser a maior possível.
13. Um fazendeiro precisa construir um galinheiro de forma retangular utilizando-se de uma tela de 16 metros de comprimento. Sabendo que o fazendeiro vai usar um muro como fundo do galinheiro, determine as dimensões do mesmo para que a sua área seja máxima.



14. Um sitiante plantou 30 abacateiros e cada árvore produz 100 abacates em média. Pretendendo aumentar o número de árvores, o sitiante consultou um especialista que o informou que cada árvore nova plantada fará diminuir em 2 abacates o número médio produzido pelas árvores. Nestas condições, quantas árvores ele deverá plantar para obter o número máximo de abacates?

APÊNDICE H – IMAGENS QUE OS ALUNOS TROUXERAM NA AULA INICIAL





Parábolas



