

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**EDUARDO DA SILVA FERNANDES**

**O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COMO  
FERRAMENTA DE ANÁLISE DE DISPOSITIVOS  
ELETROMAGNÉTICOS**

**JOINVILLE**

**2015**

**EDUARDO DA SILVA FERNANDES**

**O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COMO  
FERRAMENTA DE ANÁLISE DE DISPOSITIVOS  
ELETROMAGNÉTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
curso de Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Flavio Licarião  
Nogueira

**JOINVILLE**

**2015**

**EDUARDO DA SILVA FERNANDES**

**O USO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COMO FERRAMENTA DE  
ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS**

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de bacharelado em engenharia elétrica do centro de ciências tecnológicas, da universidade do estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Engenharia Elétrica.

**Banca Examinadora**

Orientador:

\_\_\_\_\_  
(Dr. Antônio Flavio Licarião Nogueira)  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

\_\_\_\_\_  
(Dr. Adalberto de Araújo Barreto Filho)  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

\_\_\_\_\_  
(Dr. Fernando Buzzulini Prioste)  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 10/12/2015

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por me ter dado a vida e por ter me guiado na minha jornada de vida até este momento. Também gostaria de agradecer a meus pais, Sebastião e Nazaré Fernandes e a minha irmã, Luiza Fernandes, por serem minha referência e por me darem apoio em toda a minha vida.

Gostaria de agradecer a todos os meus amigos, principalmente aqueles que cultivei dentro da UDESC, por tornarem a minha jornada acadêmica muito mais alegre.

Por fim gostaria de agradecer ao meu professor orientador Antônio Flávio Licarião Nogueira, por ter proposto este trabalho e por ter me orientado na execução deste.

## RESUMO

A compreensão e análise aprofundada de um dispositivo elétrico exige uma inspeção detalhada dos fenômenos eletromagnéticos que ocorrem no interior do mesmo. Os avanços recentes da tecnologia de simulação tornaram os programas para o cálculo numérico de campos eletromagnéticos mais acessíveis e fáceis de serem utilizados. No presente trabalho, será apresentada a formulação matemática do método dos elementos finitos, bem como sua utilização em conjunto com o método variacional. Dispositivos de conversão de energia tais como capacitores, indutores e transformadores serão analisados utilizando programa de elementos finitos e métodos analíticos de cálculo.

**Palavras-chave:** capacitância, conversão de energia, indutância, método dos elementos finitos, programas de simulação, transformadores.

## **ABSTRACT**

The understanding and in-depth analysis of an electrical device require a detailed inspection of electromagnetic phenomena that occur within it. The recent advances in simulation technology have made the software for the numerical calculation of electromagnetic fields more accessible and easier to be used. In the present work, the mathematical formulation of the finite element method will be presented in conjunction with the variational method.. Energy conversion devices such as capacitors, inductors and transformers will be analysed using finite element program supported by analytical methods of calculation.

**Keywords:** Capacitance, energy conversion, inductance, finite elements method, simulation software, transformers.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 – Discretização por elementos finitos .....  | 17 |
| Figura 3.1 – Parâmetros do capacitor coaxial cilíndrico .....   | 23 |
| Figura 3.2 – Indutor em formato solenoidal .....  | 24 |
| Figura 3.3 – Estrutura da bobina de Brooks .....  | 25 |
| Figura 3.4 – Fluxos associados as indutâncias próprias e mútuas.....  | 27 |
| Figura 3.5 – Transformador ideal .....  | 28 |
| Figura 3.6 – Circuito elétrico equivalente de um transformador real.....  | 30 |
| Figura 4.1 – Estrutura axissimétrica ou de revolução .....  | 32 |
| Figura 4.2 – Estrutura planar .....   | 32 |
| Figura 4.3 – Variação do potencial elétrico em função do raio.....  | 34 |
| Figura 4.4 – Variação do campo elétrico em função do raio.....  | 34 |
| Figura 4.5 – Vista do modelo planar do capacitor coaxial cilíndrico.....  | 35 |
| Figura 4.6 – Elementos do modelo utilizando axissimetria.....   | 35 |
| Figura 4.7 – Traçado das superfícies equipotenciais na estrutura planar .....   | 36 |
| Figura 4.8 – Traçado das superfícies equipotenciais com estrutura axissimétrica .....   | 36 |
| Figura 4.9 – Variação do potencial elétrico no espaço entre os eletrodos: estrutura planar ....                               | 37 |
| Figura 4.10 – Variação do potencial elétrico no espaço entre os eletrodos: estrutura axissimétrica ou de revolução.....       | 38 |
| Figura 4.11 – Variação do campo elétrico no espaço entre os eletrodos: estrutura planar.....                                  | 38 |
| Figura 4.12 – Variação do campo elétrico no espaço entre os eletrodos: estrutura axissimétrica ou de revolução.....           | 39 |
| Figura 4.13 – Bobina de Brooks .....  | 40 |
| Figura 4.14 – Estrutura axissimétrica para análise da bobina solenoidal .....   | 41 |
| Figura 4.15 – Superfícies equipotenciais superpostas ao mapeamento sombreado da indução magnética “ <i>B</i> ” .....          | 42 |
| Figura 4.16 – Par de bobinas para o cálculo da indutância mútua .....   | 43 |
| Figura 4.17 – Estrutura axissimétrica esférica para análise da indutância mutua .....   | 45 |
| Figura 4.18 – Estrutura axissimétrica cilíndrica para análise da indutância mútua .....                                       | 45 |
| Figura 4.19 – Transformador com enrolamentos concêntricos .....   | 47 |
| Figura 4.20 – Modelo numérico e dimensões do transformador .....  | 48 |
| Figura 4.21 – Distribuição das linhas de fluxo magnético no ensaio simulado de circuito aberto .....                          | 49 |
| Figura 4.22 – Direção do fluxo magnético na configuração aditiva .....  | 50 |
| Figura 4.23 – Direção do fluxo magnético na configuração subtrativa.....  | 50 |
| Figura 4.24 – Distribuição das linhas de fluxo magnético no ensaio simulado de curto-circuito na configuração subtrativa..... | 52 |
| Figura 4.25 – Circuito equivalente do transformador com parâmetros calculados .....   | 55 |

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 4.1 – Especificações do capacitor coaxial cilíndrico .....  | 33 |
| Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos no problema do capacitor coaxial cilíndrico ..... | 39 |
| Tabela 4.3 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos no problema da bobina solenoidal.....             | 42 |
| Tabela 4.4 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos no cálculo da indutância mútua.....               | 46 |
| Tabela 4.5 – Especificações do transformador .....   | 47 |
| Tabela 4.6 – Grandezas calculadas numericamente para o ensaio simulado de circuito aberto do transformador .....     | 49 |
| Tabela 4.7 – Configuração dos enrolamentos para se gerar fluxo nas configurações aditiva e subtrativa .....          | 51 |
| Tabela 4.8 – Grandezas calculadas numericamente para o ensaio simulado em curto-circuito do transformador.....       | 53 |



## SUMÁRIO

|              |  |           |
|--------------|--|-----------|
| <b>1</b>     | <b>INTRODUÇÃO .....</b>  | <b>10</b> |
| 1.1          | JUSTIFICATIVA.....   | 10        |
| 1.2          | FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....                                       | 10        |
| 1.3          | OBJETIVOS.....   | 11        |
| <b>1.3.1</b> | <b>Objetivo Geral .....</b>  | <b>11</b> |
| <b>1.3.2</b> | <b>Objetivos Específicos.....</b>                                  | <b>11</b> |
| 1.4          | METODOLOGIA E DISCUSSÃO.....                                       | 11        |
| 1.5          | HIPÓTESE .....   | 12        |
| 1.6          | ESTRUTURA DO TRABALHO .....  | 12        |
| <b>2</b>     | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>                                 | <b>13</b> |
| 2.1          | EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DA FÍSICA-MATEMÁTICA.....           | 13        |
| <b>2.1.1</b> | <b>Classificação das Equações Diferenciais Parciais .....</b>      | <b>13</b> |
| 2.1.1.1      | Equações Elípticas .....   | 13        |
| 2.1.1.2      | Equações Parabólicas .....   | 13        |
| 2.1.1.3      | Equações Hiperbólicas .....  | 14        |
| 2.2          | CONDIÇÕES DE CONTORNO.....   | 14        |
| <b>2.2.1</b> | <b>Condição de Contorno de Dirichlet .....</b>                     | <b>14</b> |
| <b>2.2.2</b> | <b>Condição de Contorno de Neumann.....</b>                        | <b>15</b> |
| <b>2.2.3</b> | <b>Condição de Contorno Assintótica .....</b>                      | <b>15</b> |
| 2.3          | O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....                               | 16        |
| <b>2.3.1</b> | <b>Histórico .....</b>   | <b>16</b> |
| <b>2.3.2</b> | <b>Formulação .....</b>  | <b>16</b> |
| 2.4          | O MÉTODO VARIACIONAL .....   | 18        |
| <b>3</b>     | <b>PROBLEMAS ELETROMAGNÉTICOS .....</b>                            | <b>22</b> |
| 3.1          | CAPACITÂNCIA .....   | 22        |
| <b>3.1.1</b> | <b>Definição.....</b>  | <b>22</b> |
| <b>3.1.2</b> | <b>Capacitor coaxial cilíndrico.....</b>                           | <b>23</b> |
| 3.2          | INDUTÂNCIA PRÓPRIA .....   | 24        |
| <b>3.2.1</b> | <b>Definição.....</b>  | <b>24</b> |
| <b>3.2.2</b> | <b>Bobina de Brooks .....</b>                                      | <b>25</b> |
| 3.3          | INDUTÂNCIA MÚTUA .....   | 26        |
| <b>3.3.1</b> | <b>Definição.....</b>  | <b>26</b> |
| <b>3.3.2</b> | <b>Cálculo Analítico da Indutância Mútua.....</b>                  | <b>26</b> |
| 3.4          | ESTUDO DO TRANSFORMADOR.....                                       | 28        |
| <b>3.4.1</b> | <b>O Transformador Ideal .....</b>                                 | <b>28</b> |
| <b>3.4.2</b> | <b>Circuito Elétrico Equivalente de um Transformador Real.....</b> | <b>29</b> |
| <b>4</b>     | <b>SIMULAÇÕES .....</b>  | <b>31</b> |

|       |  |           |
|-------|--|-----------|
| 4.1   | O FEMM .....   | 31        |
| 4.1.1 | <b>Estrutura Axissimétrica.....</b>  | <b>31</b> |
| 4.1.2 | <b>Estrutura Planar .....</b>  | <b>32</b> |
| 4.2   | ANÁLISE DO CAPACITOR COAXIAL CILÍNDRICO .....                                    | 32        |
| 4.2.1 | <b>Descrição do Problema .....</b>   | <b>33</b> |
| 4.2.2 | <b>Cálculo Analítico .....</b>   | <b>33</b> |
| 4.2.3 | <b>Simulação Numérica .....</b>  | <b>35</b> |
| 4.2.4 | <b>Discussão dos Resultados.....</b>   | <b>39</b> |
| 4.3   | BOBINA SOLENOIDAL .....  | 40        |
| 4.3.1 | <b>Descrição do Problema .....</b>   | <b>40</b> |
| 4.3.2 | <b>Cálculo Analítico .....</b>   | <b>40</b> |
| 4.3.3 | <b>Simulação Numérica .....</b>  | <b>41</b> |
| 4.3.4 | <b>Discussão dos Resultados.....</b>   | <b>42</b> |
| 4.4   | CÁLCULO DA INDUTÂNCIA MÚTUA .....  | 43        |
| 4.4.1 | <b>Descrição do Problema .....</b>   | <b>43</b> |
| 4.4.2 | <b>Cálculo Analítico .....</b>   | <b>43</b> |
| 4.4.3 | <b>Métodos para Cálculo da Indutância Mútua.....</b>                             | <b>44</b> |
| 4.4.4 | <b>Simulação Numérica .....</b>  | <b>44</b> |
| 4.4.5 | <b>Discussão dos Resultados.....</b>   | <b>46</b> |
| 4.5   | CÁLCULO DOS PARÂMETROS DO CIRCUITO ELÉTRICO EQUIVALENTE DE UM TRANSFORMADOR..... | 46        |
| 4.5.1 | <b>Descrição do Problema .....</b>   | <b>46</b> |
| 4.5.2 | <b>Modelo Numérico .....</b>   | <b>47</b> |
| 4.5.3 | <b>Ensaio em Circuito Aberto .....</b>   | <b>48</b> |
| 4.5.4 | <b>Ensaio em Curto-Circuito .....</b>  | <b>50</b> |
| 4.5.5 | <b>Discussão dos resultados.....</b>   | <b>55</b> |
| 5     | <b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....</b>                                      | <b>56</b> |
|       | <b>REFERÊNCIAS.....</b>  | <b>58</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados a justificativa para a escolha deste trabalho, a formulação do problema, os objetivos gerais e específicos, a metodologia a ser empregada, hipótese e a estrutura geral do trabalho.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

O uso de programas de elementos finitos como ferramenta de análise de dispositivos eletromagnéticos foi escolhido como tema deste trabalho devido à importância que os dispositivos eletromagnéticos, como por exemplo, os motores elétricos, transformadores, indutores, capacitores e contadores têm na indústria em um modo geral e em equipamentos eletroeletrônicos e como o método dos elementos finitos pode facilitar na análise e desenvolvimento destes dispositivos.

## 1.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A relação entre os projetos de natureza elétrica, mecânica e termodinâmica torna a manufatura de equipamentos elétricos um processo altamente especializado onde uma parte das especificações do projeto está associada às grandezas de natureza eletromagnética. Nas últimas décadas, um número cada vez maior de fabricantes de equipamentos elétricos utiliza programas de computador para cálculo numérico de campos eletromagnéticos em seus projetos elétricos. Esses sistemas informáticos, em sua grande maioria, usam a técnica dos elementos finitos e estão inseridos na filosofia de projeto com auxílio computadorizado ou, simplesmente, filosofia *CAD (computer-aided design)* (NOGUEIRA, 2007).

Os recursos dos simuladores de campos voltados para a visualização e inspeção de grandezas físicas podem contornar as dificuldades envolvidas no entendimento de conceitos físicos abstratos como, por exemplo: campos eletromagnéticos dispersos e acoplamento magnético. Tais conceitos são de extrema importância no estudo dos parâmetros que compõem os circuitos elétricos equivalentes de máquinas e transformadores.

É possível abordar uma vasta gama de problemas de conversão de energia considerando somente grandezas terminais como indutâncias, forças e torques, considerando que as mesmas são, por vezes, facilmente medidas. No entanto, existem efeitos de grande importância prática que precisam ser explicados pela teoria de campos; é o caso, por exemplo, da dissipação de

calor em núcleos ferromagnéticos e das forças dinâmicas produzidas pelas correntes parasitas em meios condutivos bem como em seu entorno.

### 1.3 OBJETIVOS

Nos itens 1.3.1 e 1.3.2 são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

#### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do projeto é utilizar programas de simulação baseados na técnica dos elementos finitos no estudo de dispositivos elétricos tais como capacitores, indutores e transformadores.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Estudar o método dos elementos finitos;
- Utilizar o software “finite element method magnetics” (FEMM);
- Estudar métodos analíticos e numéricos para cálculo de capacitâncias;
- Estudar métodos analíticos e numéricos para cálculo de indutâncias próprias;
- Estudar métodos analíticos e numéricos para cálculo de indutâncias mútuas;
- Identificação dos fenômenos físicos associados aos parâmetros que fazem parte do circuito elétrico equivalente de um transformador.

### 1.4 METODOLOGIA E DISCUSSÃO

Os encontros do aluno com o orientador foram semanais. A apresentação dos conteúdos foi feita através de aulas expositivas, pesquisa bibliográfica e tutoriais supervisionados.

Cada pesquisa bibliográfica esteve associada a um problema específico de cálculo de campo. Serviu de preparação para a realização de um tutorial que, através de instruções detalhadas, conduziu o estudante aos cálculos numéricos de parâmetros e inspeção de grandezas. Ao final de cada etapa (pesquisa bibliográfica associada a um tutorial), o aluno apresentou um relatório técnico sucinto.

## 1.5 HIPÓTESE

O método dos elementos finitos tem como vantagem permitir uma análise rápida de várias configurações de um dado dispositivo. Outra vantagem é que com o método dos elementos finitos, pode-se ter uma noção do funcionamento de um dado dispositivo ainda antes da elaboração do protótipo, devido aos resultados que a simulação por este método pode fornecer.

Sendo assim, a principal hipótese deste trabalho é a possibilidade de fazer simulações numéricas utilizando o método dos elementos finitos para cálculo de parâmetros e de variáveis de dispositivos eletromagnéticos.

Por fim, é esperado que os resultados simulados repitam os resultados obtidos de forma analítica.

## 1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 1 é a introdução deste trabalho, onde está a justificativa, os objetivos gerais e específicos, a metodologia empregada e a hipótese.

No Capítulo 2 é feita uma introdução ao método dos elementos finitos, apresentando a formulação e assuntos relacionados a este, como equações diferenciais parciais e condições de contorno.

No Capítulo 3 foi desenvolvida toda a teoria a respeito dos problemas eletromagnéticos que foram solucionados posteriormente através do método dos elementos finitos.

O Capítulo 4 foi feita primeiramente uma breve introdução sobre o programa *Finite Element Method Magnetic* (FEMM), software que foi utilizado para fazer as simulações, seguido dos resultados obtidos para problemas eletromagnéticos utilizando este programa, já com uma discussão a respeito dos resultados obtidos.

Já no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho e possíveis futuros trabalhos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentada a formulação teórica referente ao método dos elementos finitos e que servirá de base para a elaboração deste trabalho de conclusão.

### 2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DA FÍSICA-MATEMÁTICA

Muitos problemas físicos podem ser solucionados através da solução de equações diferenciais parciais (EDP). Estas EDPs podem ser classificadas de acordo com o regime de operação (regime permanente ou regime transitório) e de acordo com a variação dos seus parâmetros (NOGUEIRA, 1992). Os três tipos básicos de EDPs são as equações elípticas, equações parabólicas e equações hiperbólicas, que serão abordadas nesta seção.

#### 2.1.1 Classificação das Equações Diferenciais Parciais

Nas discussões que se seguem, as soluções dos problemas eletrostáticos e magnetostáticos são expressas em termos do potencial genérico  $\phi$  e a fronteira exterior que delimita o domínio de análise é definida pela superfície  $s$ . Ou seja, as condições de contorno são especificadas na superfície  $s$ .

##### 2.1.1.1 Equações Elípticas

São equações que descrevem a operação ou funcionamento de dispositivos em regime permanente. Nessas equações a segunda derivada da função varia com a posição  $(x,y)$  dentro do domínio de análise. Um exemplo clássico é a equação (2.1), conhecida como Equação de Laplace em duas dimensões (ZILL, CULLEN, 2001):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

##### 2.1.1.2 Equações Parabólicas

São equações que descrevem a operação ou funcionamento de um dispositivo em regime transitório ou dinâmico. Nessas equações, a segunda derivada da função varia com o

deslocamento e a primeira derivada varia com o tempo. O principal exemplo de equação parabólica é a (2.2), chamada de equação unidimensional do calor (ZILL, CULLEN, 2001), também conhecida como equação de difusão da temperatura.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

### 2.1.1.3 Equações Hiperbólicas

Também modelam dispositivos que operam em regime transitório. São equações onde a segunda derivada da função varia com o deslocamento e o tempo, como apresentado na equação (2.3).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

## 2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Existem vários tipos de condições de contorno que são usadas na solução de equações diferenciais parciais. As condições de contorno mais empregadas são as condições de Dirichlet, Neumann e assintótica.

### 2.2.1 Condição de Contorno de Dirichlet

Essa condição de contorno é usada para especificar o valor do potencial  $\phi$  em toda a superfície  $s$  que delimita o domínio de análise. Na análise, em duas dimensões, a superfície  $s$  se reduz a um simples contorno. A condição de contorno do tipo Dirichlet tem como forma a equação (2.4) (NOGUEIRA, 1992):

$$\phi(s) = k. \quad (2.4)$$

Ou seja, o potencial  $\phi$  é especificado igual à constante  $k$  em toda a superfície  $s$ .

### 2.2.2 Condição de Contorno de Neumann

Este tipo de condição de contorno tem como forma a equação (2.5), aonde  $n$  é o vetor normal a superfície  $s$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = k. \quad (2.5)$$

Neste caso, é atribuído um valor constante,  $k$ , para a componente normal do potencial  $\phi$ . Quando  $k=0$ , a condição de contorno de Neumann é dita homogênea. Essa condição de contorno é “natural” no método dos elementos finitos. Ou seja, quando não se especifica uma condição de contorno na interface entre duas regiões do modelo numérico, a distribuição do potencial  $\phi$  obedece à condição de contorno de Neumann homogênea (NOGUEIRA, 1992).

### 2.2.3 Condição de Contorno Assintótica

Trata-se de um tipo de condição de contorno usado para delimitar problemas que são originalmente definidos em domínios abertos. A condição de contorno assintótica preserva a esparsidade da matriz de coeficientes de elementos finitos e representa uma forma muito eficiente para a delimitação do domínio de análise (CHEN, KONRAD, 1997). Essa condição de contorno somente se aplica a fronteiras circulares, tanto em problemas planares quanto em problemas axissimétricos.

Para aplicar a condição de contorno assintótica, é necessário calcular os parâmetros  $c_0$  e  $c_1$ , definidos a partir da geometria do círculo e das propriedades materiais. Em problemas eletrostáticos, os parâmetros são dados pelas relações (2.6) e (2.7), onde  $r_0$  é o raio externo da região, em metro, e  $\epsilon_0=8,854 \times 10^{-12}$  F/m é a permissividade elétrica do vácuo.:

$$c_0 = \frac{\epsilon_0}{r_0} \quad (2.6)$$

$$c_1 = 0 \quad (2.7)$$



Em problemas magnetostáticos, os parâmetros são dados pelas equações (2.8) e (2.9), onde  $r_0$  é o raio externo da região, em metro, e  $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}$  H/m é a permeabilidade magnética do vácuo.

$$: \quad c_0 = \frac{1}{\mu_0 r_0} \quad (2.8)$$

$$c_1 = 0 \quad (2.9)$$

## 2.3 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### 2.3.1 Histórico

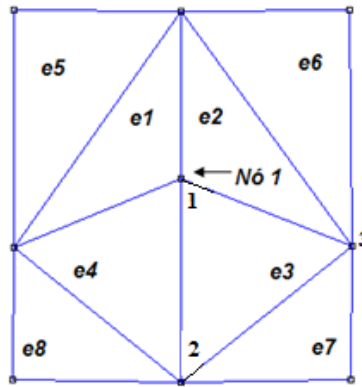
Muitos dos problemas encontrados na Física e na Engenharia, como os problemas eletromagnéticos, envolvem a solução de equações diferenciais parciais (EDP), que costumam ser de difícil solução analítica (BASTOS,1992).

Diante desta dificuldade, fez-se necessário o uso de métodos numéricos para solução de problemas que envolvessem EDPs. O principal método é justamente o Método dos Elementos Finitos - MEF, que começou a ser utilizado em meados dos anos 1950 para solução de problemas envolvendo aplicações aeronáuticas e durante os anos 1970 se expandiu para o eletromagnetismo (BASTOS, 2008).

### 2.3.2 Formulação

O MEF se baseia na discretização, ou seja, na divisão de um certo domínio em pequenas regiões de dimensões minúsculas chamadas de elementos finitos (BASTOS, 2008). Um exemplo de domínio discretizado é apresentado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Discretização por elementos finitos



Fonte: (NOGUEIRA, 1992)

Como é difícil o cálculo com elementos quadrangulares (SADIKU, 2012), serão utilizados somente elementos triangulares, como apresentado na Figura 2.1.

O potencial varia linearmente com as coordenadas  $x$  e  $y$  através da equação (2.10), que representa uma função planar.

$$\phi(x, y) = a + bx + cy \quad (2.10)$$

Sejam  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  os potenciais nos vértices 1, 2 e 3 do triângulo. Aplicando a equação (2.10) em cada vértice, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\phi_1(x, y) = a + bx_1 + cy_1 \quad (2.11)$$

$$\phi_2(x, y) = a + bx_2 + cy_2$$

$$\phi_3(x, y) = a + bx_3 + cy_3$$

A solução do sistema de equações (2.11) fornece o valor dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  em termos das coordenadas e potenciais dos três vértices. Para se obter o potencial  $\phi$  em uma posição genérica  $(x, y)$ , os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são substituídos na equação (2.10). Após manipulações algébricas, obtém-se a equação (2.12).

$$\phi(x, y) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i x + r_i y) \phi_i \quad (2.12)$$

Na equação (2.12),  $D$  é o dobro da área do triângulo e os parâmetros  $p_i$ ,  $q_i$  e  $r_i$  são calculados a partir das coordenadas dos vértices do triângulo, conforme expresso no conjunto de equações (2.13).

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (x_2 y_3 - y_2 x_3) \\
 p_2 &= (x_3 y_2 - y_3 x_2) \\
 p_3 &= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \\
 q_1 &= (y_2 - y_3) \\
 q_2 &= (y_3 - y_1) \\
 q_3 &= (y_1 - y_2) \\
 r_1 &= (x_3 - x_2) \\
 r_2 &= (x_1 - x_3) \\
 r_3 &= (x_2 - x_1)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Para se chegar a uma expressão compacta para o potencial, faz-se o uso das funções planares conhecidas como funções de forma e expressas por:

$$\alpha_i(x, y) = \frac{1}{D} (p_i + q_i x + r_i y) \tag{2.14}$$

A expressão para o potencial em termos das funções  $\alpha$  é dada pela relação (2.15).

$$\phi(x, y) = \sum_{e=1}^3 \alpha_i(x, y) \phi_i \tag{2.15}$$

A equação (2.15) fornece o potencial dentro de um dado elemento triangular e é válida para todos os triângulos de uma dada malha. O potencial ao longo de uma aresta é calculado pela interpolação linear dos dois vértices. Para dois triângulos que têm dois vértices em comum, o potencial será contínuo na fronteira dos dois elementos (NOGUEIRA, 1992).

## 2.4 O MÉTODO VARIACIONAL

O comportamento global do problema pode ser analisado através de um método variacional. Nessa abordagem, o funcional do problema,  $F_i$ , é aproximado pela soma dos funcionais energéticos dos elementos individuais, como apresentado na equação (2.16), onde  $n$  é o número de elementos.

$$F = \sum_{l=1}^n F_l \quad (2.16)$$

A solução aproximada para o problema é obtida através da minimização do funcional  $F_i$ , em relação aos potenciais “livres” ou sem restrição.

Diferenciando o funcional,  $F$ , em relação a um potencial genérico,  $\phi_k$ , e igualando a zero, tem-se a equação (2.17), onde  $k$  coincide com o número de todos os nós sem restrição.

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial F_l}{\partial \phi_k} \quad (2.17)$$

Cada funcional  $F_i$  é não nulo no elemento  $i$ , mas é nulo em todos os outros elementos. A contribuição de um dado nó sem restrição deve-se somente aos funcionais associados aos elementos que compartilham aquele nó.

Consideremos agora a Figura 2.1, onde o nó de número 1 é posicionado no centro da malha e compartilhado somente pelos elementos  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  e  $e_4$ . A contribuição para o somatório devida ao nó de número 1, localizado na posição central, é dada pela equação (2.18).

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_{k|k=1}} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial F_j}{\partial \phi_1} \quad (2.18)$$

A minimização dos funcionais individuais resulta em um conjunto de equações simultâneas que pode ser expresso através de forma matricial.

Os funcionais são diferentes para cada classe de problemas. Para problemas magnetostáticos o funcional deve levar em conta a não linearidade magnética. A presença de correntes elétricas e/ou de ímãs deve também ser incluída no funcional.

A contribuição de um dado elemento  $j$ , para o somatório, é dado pela equação (2.19), onde os nós são numerados localmente como 1, 2 e 3:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_j}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial F_j}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial F_j}{\partial \phi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

A matriz quadrada [S] presente no segundo membro da equação (2.19) é conhecida como matriz de rigidez, uma terminologia herdada da análise estrutural. O termo  $S_{mn}$ , que é dado pela equação (2.20), é expresso em termos da área do elemento, dos coeficientes geométricos  $q$  e  $r$  e da característica do meio,  $k$ .

$$S_{mn} = \frac{k}{2D} (q_m q_n + r_m r_n), \quad m=n=1,2,3 \quad (2.20)$$

O vetor [Q] representa as fontes energéticas, tais como cargas elétricas, correntes nodais e o efeito de ímãs permanentes. O sistema global com a contribuição de todos os  $n$  nós da região discretizada é expresso pela equação matricial (2.21).

$$SS_{n \times n} \cdot \phi_n = Q_n \quad (2.21)$$

A contribuição de cada elemento  $i$ , é inserida na matriz [SS] e no vetor [Q] obedecendo à numeração global dos nós. Informações relativas às condições de contorno de Dirichlet também devem ser inseridas nessa equação matricial. Se o potencial no nó  $m$  tiver valor atribuído  $\phi_m$ , a  $m$ -ésima linha da matriz [SS] tem valor unitário na posição diagonal  $mm$ , e zero em todas as posições restantes. Também, a  $m$ -ésima posição do vetor [Q] assume o valor do potencial  $\phi_m$ .

Na maioria dos problemas, a matriz global [SS] tem as propriedades de ser simétrica, esparsa e diagonalmente predominante. Tais propriedades são extremamente importantes, pois permitem o uso de procedimentos econômicos no armazenamento e manipulação de dados.

Na montagem do sistema matricial é necessário inserir os valores da permeabilidade ou reluctividade que variam de acordo com a característica de magnetização. O valor de  $\mu$  varia com o ponto de operação ( $B, H$ ) e se faz necessária a implementação de um processo iterativo adicional.

Resta, assim, a solução do sistema de equações lineares para se obter os potenciais nos vários nós. Existe um grande número de métodos que podem ser utilizados e uma literatura extensiva sobre o assunto (NOGUEIRA, 1992).

### 3 PROBLEMAS ELETROMAGNÉTICOS

Neste capítulo será apresentada a fundamentação teórica a respeito de problemas eletromagnéticos que posteriormente serão resolvidos utilizando o MEF.

#### 3.1 CAPACITÂNCIA

Nesta seção será estudada primeiramente a definição de capacitância, seguido de um estudo teórico a respeito do capacitor coaxial cilíndrico.

##### 3.1.1 Definição

O capacitor é um dispositivo que tem por finalidade armazenar energia elétrica (HALLIDAY, RESNICK, WALKER 2009). Já a capacitância  $C$  pode ser definida como a razão entre a magnitude da carga  $Q$  em uma das placas que formam o capacitor e a diferença de potencial  $V$  entre elas (SADIKU, 2012), dada assim pela equação (3.1):

$$C = \frac{Q}{V} \quad (3.1)$$

Já a energia  $W$  armazenada no capacitor é dada pela equação (3.2) (HALLIDAY, RESNICK, WALKER 2009):

$$W = \frac{CV^2}{2} \quad (3.2)$$

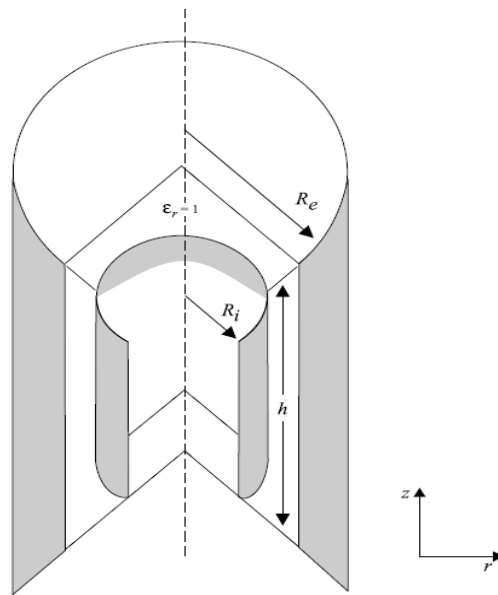
A relação entre a corrente  $i_c$  e a tensão  $V$  no capacitor é dada pela equação (3.3) (HALLIDAY, RESNICK, WALKER 2009):

$$i_c = \frac{CdV}{dt} \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Capacitor coaxial cilíndrico

A Figura 3.1 apresenta um capacitor coaxial cilíndrico. Na ilustração,  $R_i$  é o raio do eletrodo interno,  $R_e$  o raio do eletrodo externo,  $h$  é o comprimento e  $\epsilon_r$  é a permissividade relativa do meio.

Figura 3.1 – Parâmetros do capacitor coaxial cilíndrico



Fonte: (NOGUEIRA, 2007)

O potencial, o campo elétrico e a capacitância no interior do capacitor coaxial cilíndrico são fornecidos respectivamente pelas equações (3.4), (3.5) e (3.6), onde  $V_0$  é a diferença de potencial entre os eletrodos que formam o capacitor (NOGUEIRA, 2007).

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \ln\left(\frac{R_e}{r}\right) \quad (3.4)$$

$$E(r) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \frac{1}{r} \quad (3.5)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \quad (3.6)$$



## 3.2 INDUTÂNCIA PRÓPRIA

Nesta seção será apresentada primeiramente a definição de indutância própria, seguido do cálculo analítico desta grandeza para a bobina de Brooks.

### 3.2.1 Definição

O indutor nada mais é do que um dispositivo utilizado para gerar campo magnético. Sendo então um indutor percorrido por um corrente  $i$ , que produz um fluxo concatenado  $\lambda$ , a indutância  $L$  deste indutor é dada pela relação (3.7) (HALLIDAY, RESNICK, WALKER 2009).

:

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (3.7)$$

O fluxo enlaçado  $\lambda$  é dado pela relação (3.8).

$$\lambda = N\Phi \quad (3.8)$$

Sendo  $\phi$  o fluxo magnético na espira e  $N$  o número de voltas. O formato mais comum de indutor é o solenoide, como apresentado na Figura 3.2. A indutância por unidade de comprimento  $l$  deste é dada pela equação (3.9):

$$\frac{L}{l} = \mu_0 N^2 A \quad (3.9)$$

Figura 3.2 – Indutor em formato solenoidal



Fonte: (HALLIDAY, RESNICK, WALKER 2009).

Onde  $\mu_0$  é a permeabilidade do vácuo que vale  $4\pi 10^{-7}$  H/m,  $N$  é o número de voltas e  $A$  é a área da circunferência. Já a tensão  $V_L$  no indutor é dada pela relação (3.10) (SADIKU, 2012).

$$V_L = \frac{Ldi}{dt} \quad (3.10)$$

A energia  $W$  armazenada em um indutor é dada pela relação (3.11) (HALLIDAY, RESNICK, WALKER 2009).

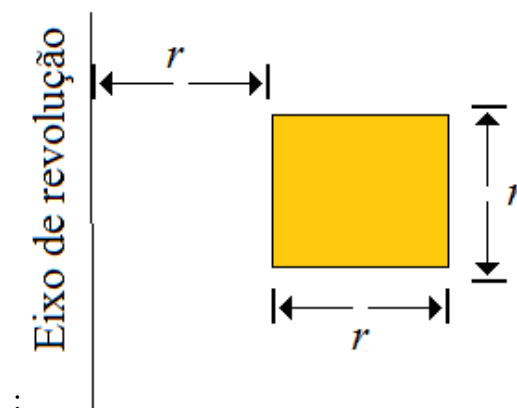
$$W = \frac{Li^2}{2} \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Bobina de Brooks.

A Figura 3.3 apresenta um desenho da estrutura axissimétrica da bobina de Brooks. (INFOLYTICA, CO. INFOLYTICA, CO. 2D Case study: self-inductance of a Brooks coil, 2005).

Esse tipo de bobina possui uma disposição geométrica especial que leva ao maior valor da indutância para um determinado comprimento de um fio condutor. Na bobina de Brooks, os valores do raio interno, largura e altura do enrolamento solenoidal são iguais entre si. Esse tipo de bobina pode ser analisado como estrutura axissimétrica onde a corrente de excitação flui na direção de azimute

Figura 3.3 – Estrutura da bobina de Brooks



FONTE: Produzido pelo próprio autor

A indutância própria  $L$  de uma bobina de Brooks é dada pela equação (3.12), onde  $R$  é o raio médio.

$$L = 1,699RN^2 \mu\text{H} \quad (3.12)$$

### 3.3 INDUTÂNCIA MÚTUA

Nesta seção serão apresentadas a definição e a formulação teórica a respeito do cálculo analítico da indutância mútua.

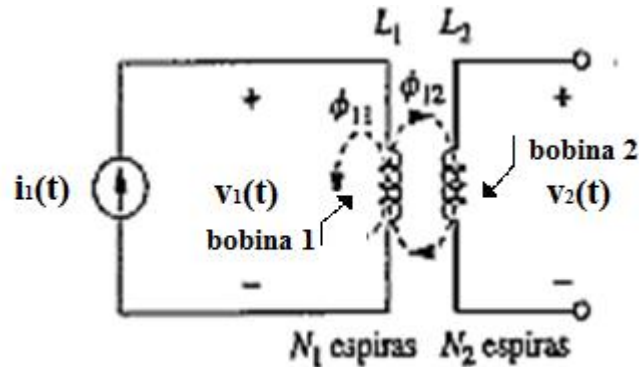
#### 3.3.1 Definição

Quando dois indutores estão próximos, o fluxo magnético causado pela corrente de uma bobina enlaça a outra bobina, conseqüentemente induzindo uma tensão nesta última (ALEKSANDER, SADIKU, 2008). “A indutância mútua é a capacidade do indutor de induzir uma tensão em um indutor vizinho, medida em henry” (ALEKSANDER, SADIKU, 2008).

#### 3.3.2 Cálculo Analítico da Indutância Mútua

Consideremos as duas bobinas apresentadas na Figura 3.4. A bobina 1 tem indutância própria  $L_1$  e  $N_1$  espiras enquanto que a bobina 2 tem indutância própria  $L_2$  e  $N_2$  espiras. Supondo que somente a bobina 1 é percorrida por corrente, o fluxo magnético gerado na bobina 1 tem duas componentes, uma componente  $\Phi_{11}$  que enlaça a própria bobina 1 e uma componente  $\Phi_{21}$  que é o fluxo que enlaça a bobina 2 causado pela corrente que circula na bobina 1. Assim, tem-se a equação (3.13) (ALEKSANDER, SADIKU, 2008).

Figura 3.4 – Fluxos associados as indutâncias próprias e mútuas



FONTE: (ALEKSANDER, SADIKU, 2008)

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} \quad (3.13)$$

A indutância mútua  $M_{21}$ , que é a indutância mútua na bobina 2 devido a corrente que circula na bobina 1) é dada pela relação (3.14).

$$M_{21} = \frac{N\Phi_{21}}{i_1} \quad (3.14)$$

A equação (3.14) também pode ser expressa em função do fluxo enlaçado, como é apresentado na equação (3.15) (INFOLYTICA, CO. 2D Case study: mutual inductance of coaxial coils, 2005).

$$M_{21} = \frac{\lambda_{21}}{i_1} \quad (3.15)$$

Suponhamos que agora somente a bobina 2 seja percorrida por corrente. O fluxo magnético gerado pela bobina 2 tem duas componentes, uma componente  $\Phi_{22}$  que enlaça somente a bobina 2 e uma componente  $\Phi_{12}$  que enlaça a bobina 1 causado pela corrente que circula no bobina 2. Assim, tem-se a equação (3.16) (ALEKSANDER, SADIKU, 2008).

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} \quad (3.16)$$

A indutância mútua  $M_{12}$  (indutância mútua na bobina 1 devido a corrente que circula na bobina 2) é dada pela relação (3.17).

$$M_{12} = \frac{N\Phi_{12}}{i_2} \quad (3.17)$$

A equação (3.17) também pode ser expressa em função do fluxo enlaçado, como é apresentado na equação (3.18) (INFOLYTICA, CO. 2D Case study:mutual inductance of coaxial coils, 2005).

$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{i_1} \quad (3.18)$$

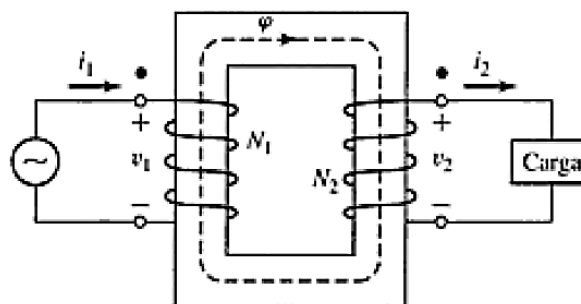
### 3.4 ESTUDO DO TRANSFORMADOR

Nesta seção será apresentado um estudo prévio a respeito do transformador ideal, seguido de um estudo a respeito do circuito equivalente de transformadores reais.

#### 3.4.1 Transformador Ideal

A Figura 3.5 apresenta um transformador ideal alimentando uma carga. O enrolamento primário possui uma tensão  $v_1$ , corrente  $i_1$ , impedância  $Z_1$  e  $N_1$  espiras. Já o secundário possui tensão  $v_2$ , corrente  $i_2$ , impedância  $Z_2$  e  $N_2$  espiras. Neste caso, existe um fluxo  $\phi$  que é enlaçado, ao mesmo tempo, nos dois enrolamentos (FITZGERALD, KINGSLEY, UMANS, 2008).

Figura 3.5 – Transformador ideal



Fonte: (FITZGERALD, KINGSLEY, UMANS, 2008)

Para o transformador ser considerado ideal, as resistências dos enrolamentos são desprezíveis, todo o fluxo enlaça ambos os enrolamentos, ou seja, não existe fluxo disperso. Além disso, não há perdas no núcleo e a permeabilidade magnética do núcleo é muito alta. Para o transformador ideal, são válidas as relações (3.19) até (3.23) (FITZGERALD, KINGSLEY, UMANS, 2008). :

$$\frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2} \quad (3.19)$$

$$i_1 N_1 = i_2 N_2 \quad (3.20)$$

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (3.21)$$

$$\frac{v_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{v_2}{I_2} \quad (3.22)$$

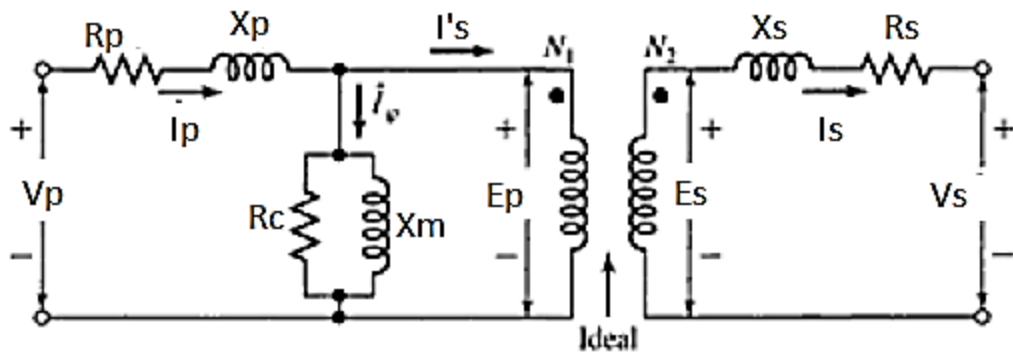
$$Z_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2 \quad (3.23)$$

### 3.4.2 Circuito Elétrico Equivalente de um Transformador Real

Na Figura 3.6 é apresentado o circuito elétrico equivalente de um transformador real. Este modelo leva em consideração as resistências dos enrolamentos, os fluxos dispersos e as correntes finitas de excitação por causa da permeabilidade finita no núcleo (FITZGERALD, KINGSLEY, UMANS, 2008).

Na ilustração, o circuito primário aparece no lado esquerdo. Nesse circuito,  $V_p$ ,  $I_p$ ,  $R_p$  e  $X_p$  denotam respectivamente, a tensão, corrente, resistência e reatância de dispersão neste circuito. Na direita tem-se o circuito secundário, onde  $V_s$ ,  $I_s$ ,  $R_s$  e  $X_s$  denotam respectivamente, a tensão, corrente, resistência e reatância de dispersão neste circuito. No centro do transformador real tem-se um transformador ideal, onde as tensões  $E_p$  e  $E_s$  e as correntes  $I_s$  e  $I'_s$  obedecem as relações (3.19) até (3.23).

Figura 3.6 – Circuito elétrico equivalente de um transformador real



Fomte: (FITZGERALD, KINGSLEY, UMANS, 2008)

Na análise do circuito equivalente, a corrente primária  $I_p$  pode ser decomposta em duas componentes: a corrente de excitação  $I_\phi$  e a corrente de carga  $I'_s$ . Esta corrente  $I_\phi$  se divide em outras duas componentes: uma corrente de perdas no núcleo  $I_c$ , que passa pela resistência de perdas no núcleo  $R_c$ , e uma corrente de magnetização  $I_m$ , que passa pela reatância de magnetização  $X_m$ . A combinação entre  $R_c$  e  $X_m$  forma a impedância de magnetização  $Z_\phi$  (FITZGERALD, KINGSLEY, UMANS, 2008). As reatâncias indutivas  $X$  são dadas pela relação (3.24):

$$X=2.\pi.f.L \quad (3.24)$$

Onde  $L$  é uma indutância e  $f$  é a frequência.

## 4 SIMULAÇÕES

Neste capítulo será feita uma breve introdução sobre o programa de elementos finitos para cálculo numérico de campos eletromagnéticos empregado no presente estudo. Trata-se do programa intitulado "Finite Element Method Magnetics" (FEMM), um programa gratuito e amplamente utilizado por cientistas e engenheiros em todo o mundo (MEEKER, 2010). Esta seção introdutória é seguida pela solução de problemas eletromagnéticos.

### 4.1 O FEMM

O *finite element method magnetics* (FEMM) é um conjunto de programas de elementos finitos para solução numérica de problemas eletrostáticos, magnéticos, eletrocinéticos e de transferência de calor em duas dimensões e em baixa frequência, sendo esta considerada nula em todos os casos deste trabalho. Essa suíte de programas permite a análise de estruturas planares e axissimétricas (MEEKER, 2010). Estas estruturas são apresentadas nas seções 4.1.1 e 4.1.2, respectivamente.

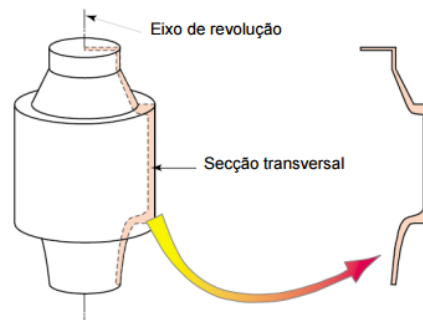
O FEMM realiza as três etapas básicas da solução de um problema, que são: i) pré-processamento; ii) processamento ou solução do sistema matricial de equações e iii) o pós-processamento. Na etapa de pré-processamento é feita toda a formulação geométrica e analítica do problema, são definidas as condições de contorno e também são geradas as malhas de elementos finitos. Na etapa de processamento é realizada a solução numérica do problema em si e no pós-processamento é feita uma análise dos campos eletromagnéticos e de outras variáveis globais calculadas pelo programa (OLIVEIRA, FERREIRA, PONTES, 2010).

#### 4.1.1 Estrutura Axissimétrica

“As estruturas axissimétricas ou de revolução, são estruturas que podem ser representadas por uma seção transversal que contém um eixo de revolução. Estas estruturas podem assim ser geradas rodando a seção transversal 360° segundo o eixo de revolução.” (RODRIGUES, 2009) Na Figura 4.1 pode-se observar um exemplo de um dispositivo que pode ser analisado como estrutura axissimétrica.



Figura 4.1 – Estrutura axissimétrica ou de revolução

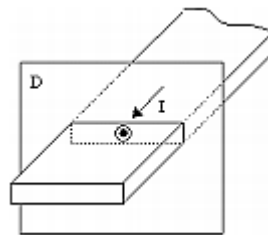


Fonte: (RODRIGUES, 2009)

#### 4.1.2 Estrutura Planar

“A simetria de um problema pode ser do tipo planar quando o eixo de simetria do problema é uma reta perpendicular ao plano que contém a geometria do problema.” (OLIVEIRA, FERREIRA & PONTES, 2010) Pode-se observar um exemplo de estrutura planar na ilustração da Figura 4.2.

Figura 4.2 – Estrutura planar



Fonte: (OLIVEIRA, FERREIRA, PONTES, 2010)

## 4.2 ANÁLISE DO CAPACITOR COAXIAL CILÍNDRICO

Nesta seção serão calculadas de forma analítica e numérica grandezas físicas relacionadas ao capacitor coaxial cilíndrico apresentado na seção 3.2.1. Em seguida, serão feitas comparações e discussões sobre os resultados.

#### 4.2.1 Descrição do Problema

O capacitor coaxial cilíndrico a ser estudado nesta seção é o da Figura 2.1. As dimensões geométricas e os parâmetros elétricos são resumidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Especificações do capacitor coaxial cilíndrico

| Variável                                     | Valor                   |
|--|-------------------------|
| Raio interno $R_i$ (cm)                      | 1,0                     |
| Raio externo $R_e$ (cm)                      | 5,0                     |
| Comprimento $h$ (cm)                         | 20,0                    |
| Tensão do eletrodo interno (V)               | 1000,0                  |
| Tensão do eletrodo externo (V)               | 0,0                     |
| Permissividade no vácuo $\epsilon_0$ (F/m)   | $8,850 \times 10^{-12}$ |
| Permissividade relativa do meio $\epsilon_r$ | 1,0                     |

Fonte: Produzido pelo autor

#### 4.2.2 Cálculo Analítico

Tendo por base os valores das dimensões geométricas e da permissividade elétrica que constam na Tabela 4.1, é possível calcular os valores da capacitância e energia elétrica armazenada no capacitor coaxial. O valor da capacitância é calculado através do emprego da equação (3.6), ou seja:

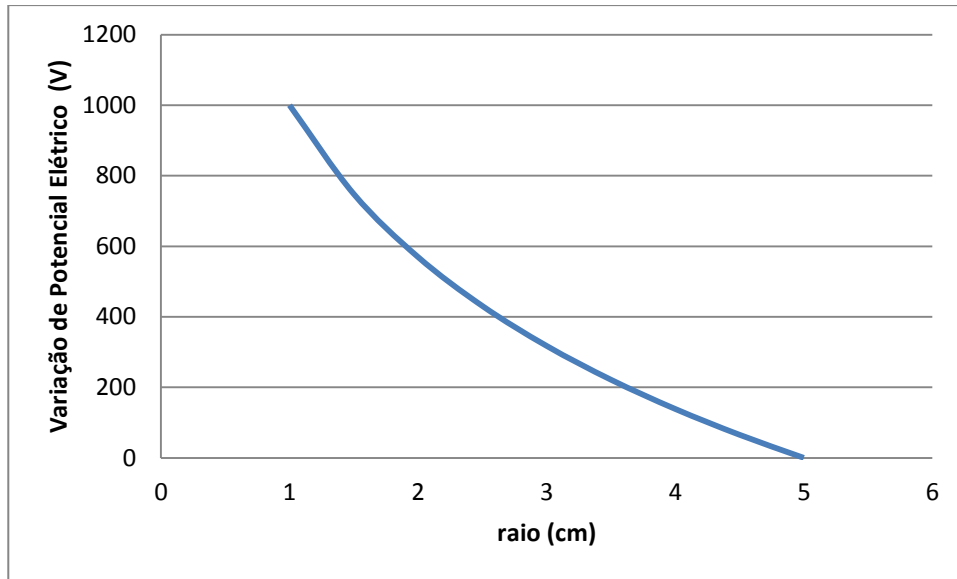
$$C = 6,910 \text{ pF} \quad (4.1)$$

A energia armazenada é calculada através da equação (3.2), ou seja,

$$W = 3,455 \text{ } \mu\text{J} \quad (4.2)$$

A curva da variação do potencial elétrico em função do raio no espaço entre os eletrodos é apresentada no gráfico da Figura 4.3. Esta foi elaborada com o auxílio da equação (3.4).

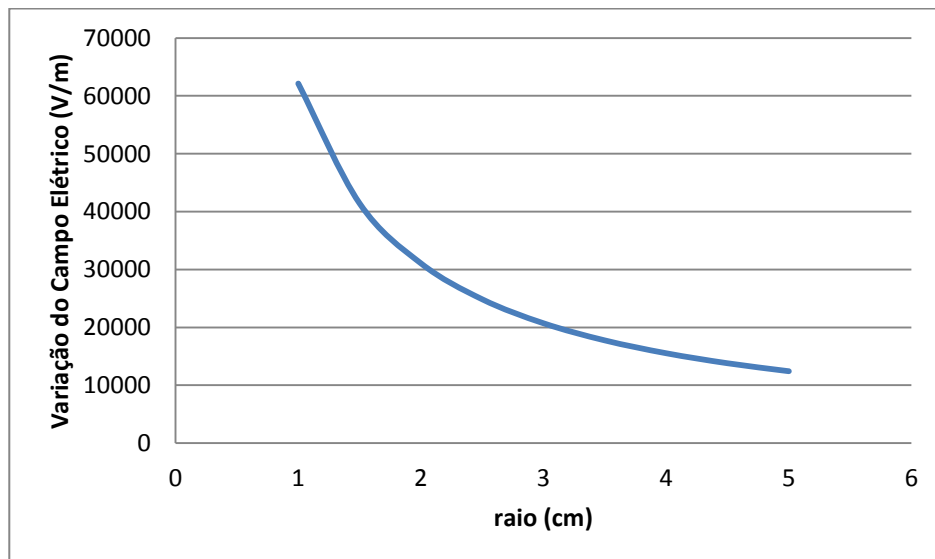
Figura 4.3 – Variação do potencial elétrico em função do raio



Fonte: Produzido pelo próprio autor

A variação do campo elétrico em função do raio é apresentada no gráfico da Figura 4.4. Esta foi elaborada com o auxílio da equação (3.5).

Figura 4.4 – Variação de campo elétrico em função do raio

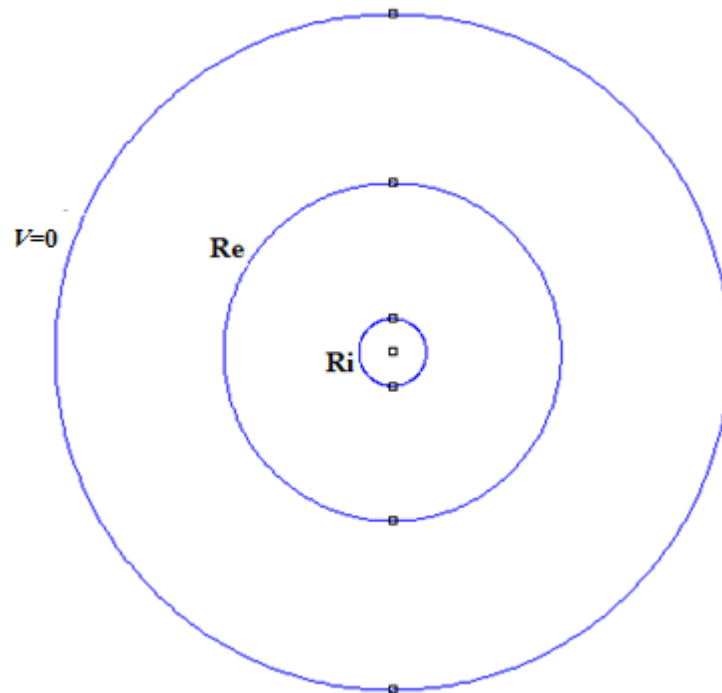


Fonte: Produzido pelo próprio autor

### 4.2.3 Simulação Numérica

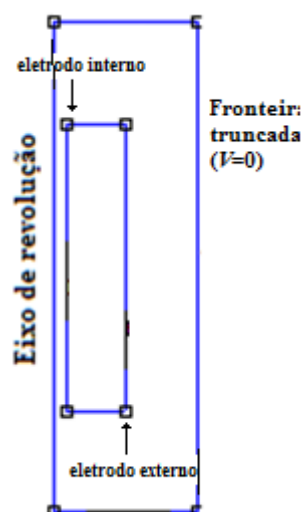
Este problema foi implementado com dois tipos diferentes de estrutura, a planar e a axissimétrica. Nas figuras 4.5 e 4.6 são apresentadas as geometrias de cada estrutura.

Figura 4.5 – Vista do modelo planar do capacitor coaxial cilíndrico



Fonte: Produzido pelo próprio autor

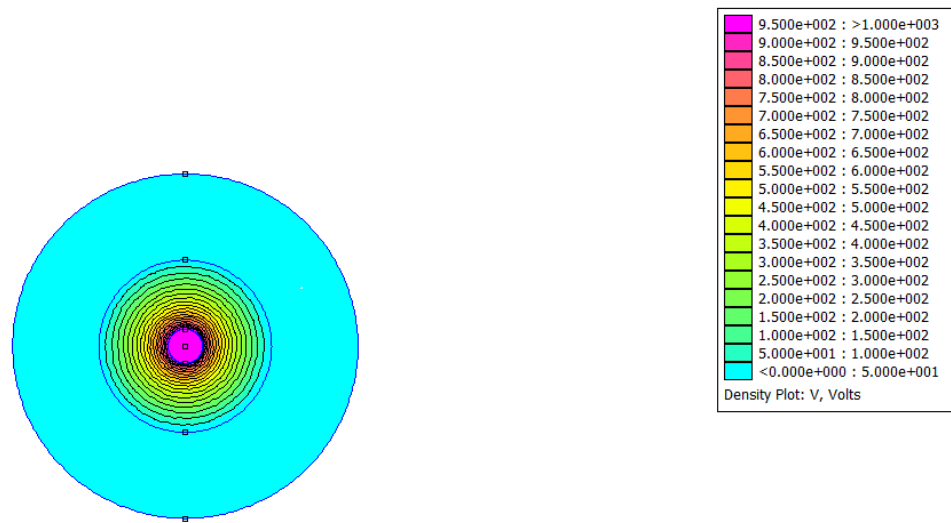
Figura 4.6 – Elementos do modelo utilizando axissimetria



Fonte: Produzido pelo próprio autor

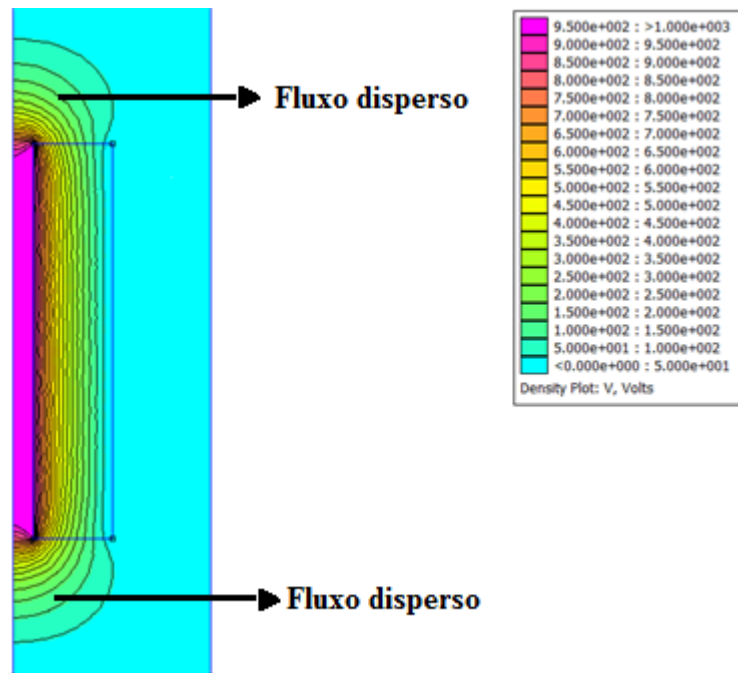
No caso planar, o potencial na superfície é nulo, podendo ser chamado assim de truncamento de fronteira. Já na estrutura axissimétrica, tem-se superfície truncada e superfície com condição de contorno de Neumann. Nas Figuras 4.7 e 4.8 tem-se, respectivamente, o traçado das equipotenciais sobrepostas ao mapeamento sombreado do potencial elétrico entre os eletrodos nas simulações das estruturas planar e axissimétrica.

Figura 4.7 – Traçado das superfícies equipotenciais na estrutura planar



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 4.8 – Traçado das superfícies equipotenciais na estrutura axissimétrica

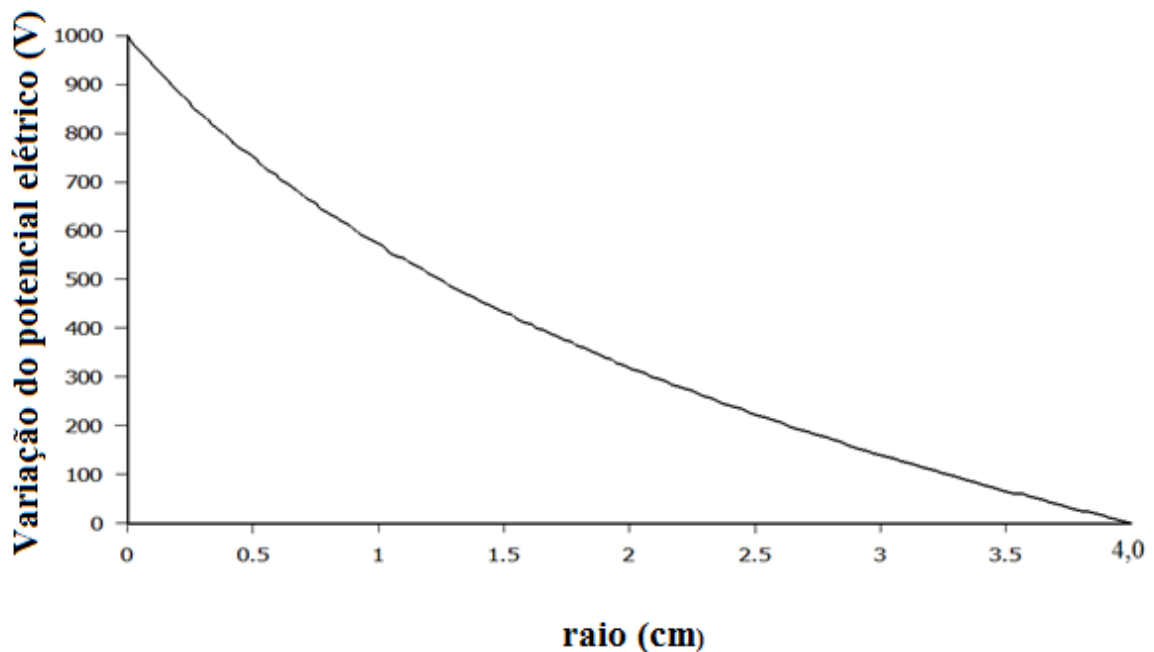


Fonte: Produzido pelo próprio autor

A escala de cores representa a intensidade do campo elétrico em V/m. Em ambas as estruturas percebe-se que a intensidade do campo é maior próximo ao eletrodo de 1000 V. Na estrutura axissimétrica é possível se observar o fluxo de dispersão nas extremidades do capacitor.

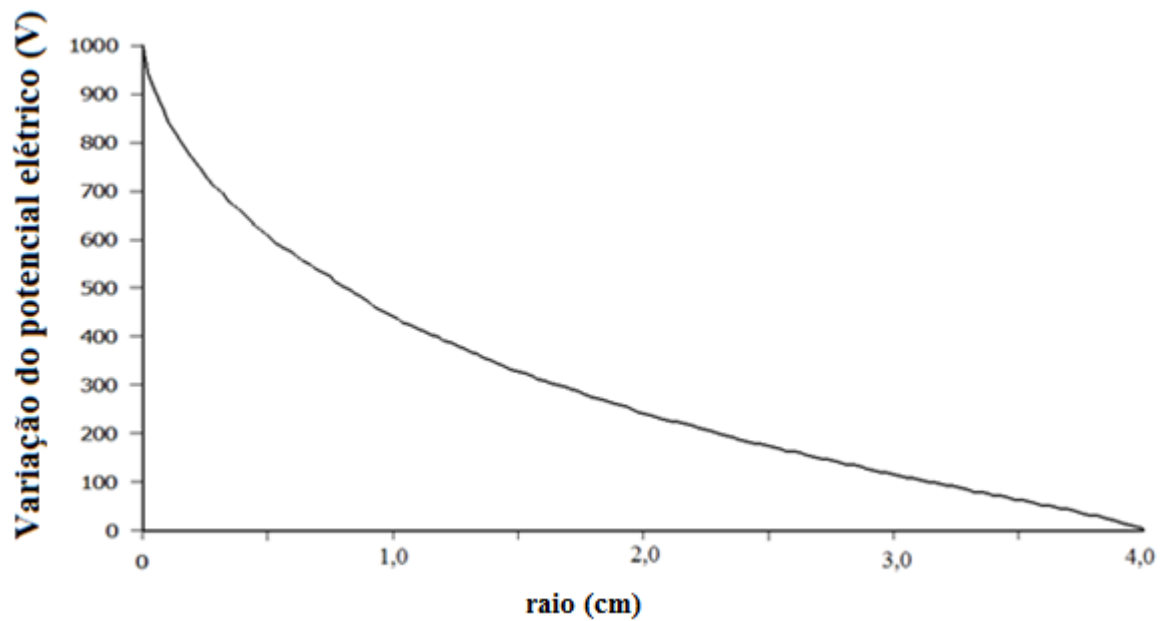
No FEMM também é possível gerar gráficos de variáveis eletrostáticas e magnéticas. Para o caso do capacitor coaxial cilíndrico, tanto para a estrutura planar quanto axissimétrica, foram gerados os gráficos do potencial e do campo elétrico em função do raio no espaço entre os eletrodos, que são apresentados nas Figuras 4.9 a 4.12.

Figura 4.9 –Variação do potencial elétrico no espaço entre eletrodos: estrutura planar



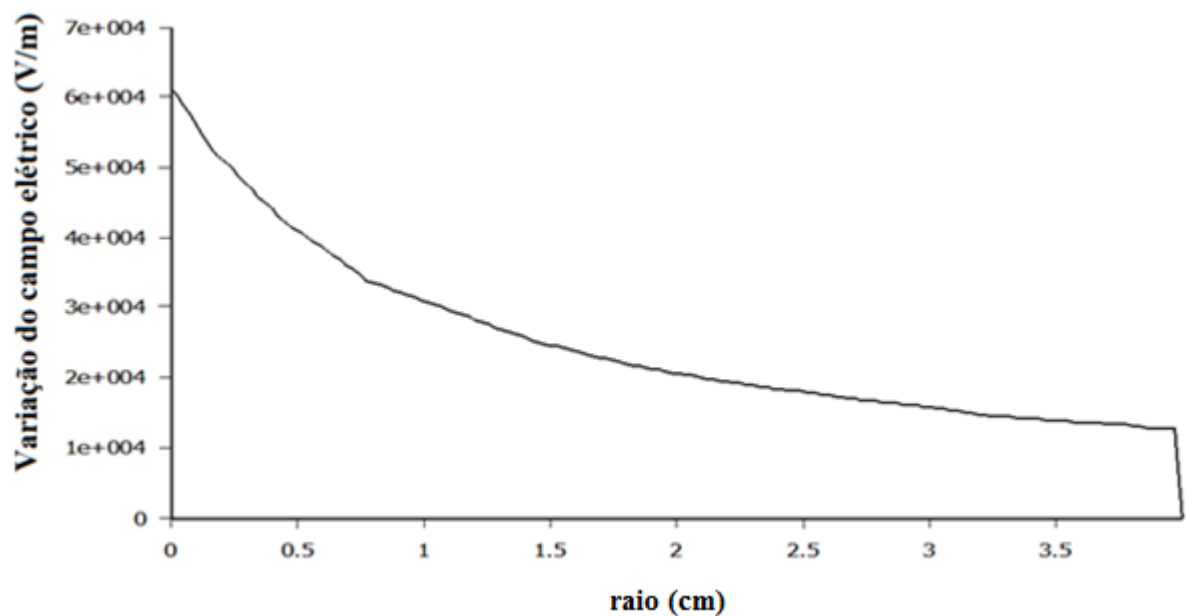
Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 4.10 –Variação do potencial elétrico no espaço entre eletrodos: estrutura axissimétrica



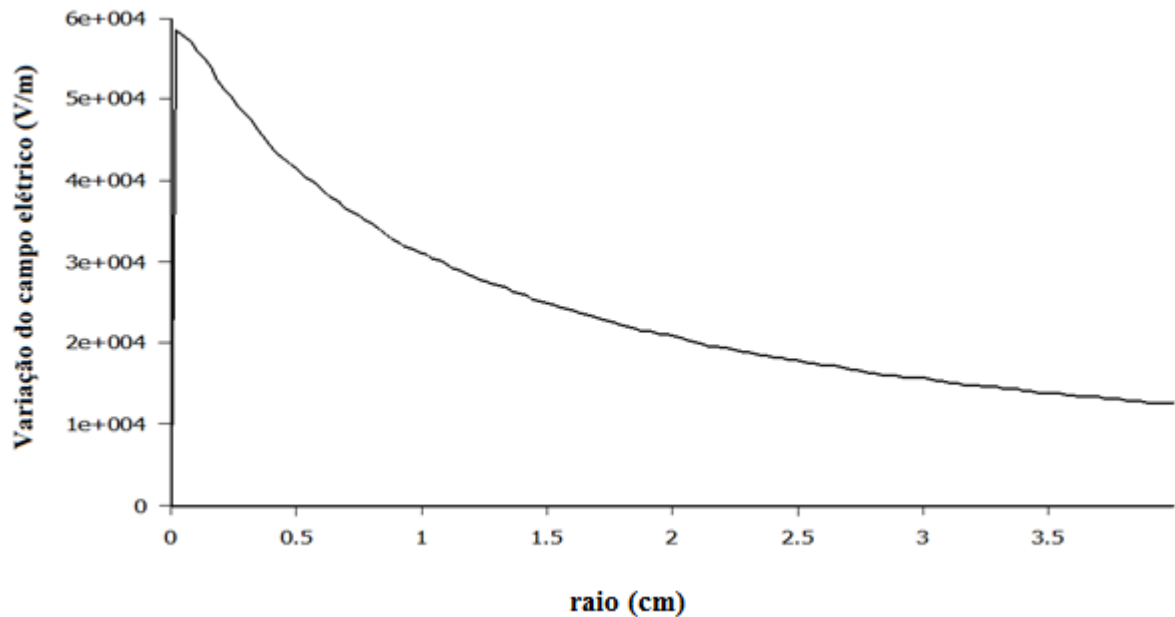
Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 11 - Variação do campo elétrico no espaço entre eletrodos: estrutura planar



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 4.12 – Variação do campo elétrico no espaço entre eletrodos: estrutura axissimétrica



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Na Tabela 4.2, são apresentados alguns parâmetros do capacitor coaxial cilíndrico calculados analiticamente e numericamente. No erro percentual, o valor calculado pela estrutura axissimétrica foi tomado como referência.

Tabela 4.2 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos no problema do capacitor coaxial cilíndrico

|                   | Axissimétrico | Planar | Erro percentual planar | Analítico | Erro percentual analítico |
|-------------------|---------------|--------|------------------------|-----------|---------------------------|
| Carga (nC)        | 7,859         | 6,932  | 11,798%                | 6,910     | 12,078%                   |
| Capacitância (pF) | 7,859         | 6,932  | 11,798%                | 6,910     | 12,078%                   |
| Energia (uJ)      | 3,930         | 3,466  | 11,795%                | 3,455     | 12,075%                   |

Fonte: Produzido pelo próprio autor

#### 4.2.4 Discussão dos Resultados

Ao se comparar os gráficos feitos de forma analítica utilizando as equações que caracterizam o campo e o potencial elétrico no capacitor coaxial cilíndrico com os gráficos gerados pelo FEMM, percebe-se que há extrema semelhança, mostrando assim que o FEMM é uma boa ferramenta para geração de gráficos.

Ao comparar as grandezas físicas calculadas analiticamente e numericamente pela estrutura planar com a referência, que neste caso é valor calculado na estrutura axissimétrica,



percebe-se certa discrepância nos valores. Isto ocorre porque na estrutura axissimétrica está incluso o fluxo de dispersão, que não é levado em consideração no cálculo analítico e na estrutura planar.

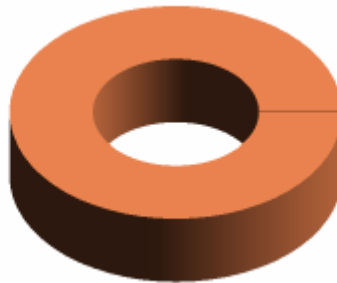
### 4.3 BOBINA SOLENOIDAL

Nesta seção serão calculados de forma analítica e simulada variáveis de um indutor em formato de bobina solenoidal.

#### 4.3.1 Descrição do Problema

A bobina solenoidal a ser estudada nesta seção é apresentada na Figura 4.13. Esta tem as dimensões de uma bobina de Brooks, já apresentada na seção 3.2.2. A bobina é percorrida por uma corrente de 1 A, possui 1000 voltas, o raio é de 0,1 metro e o raio médio é de 0,15 metro.

Figura 4.13 – Bobina de Brooks



Fonte: (INFOLYTICA, CO. INFOLYTICA, CO. 2D Case study: self-inductance of a Brooks coil.2005)

#### 4.3.2 Cálculo Analítico

Substituindo os dados já apresentados na seção 4.3.1 na relação (3.12), chega-se ao seguinte valor para a indutância,  $L$ ,

$$L=0,255 \text{ H} \quad (4.3)$$

Com o valor da indutância e da corrente elétrica é possível se calcular analiticamente o fluxo magnético concatenado,  $\lambda$ , e a energia armazenada no indutor,  $W$ , através das equações (3.7) e (3.11), respectivamente,

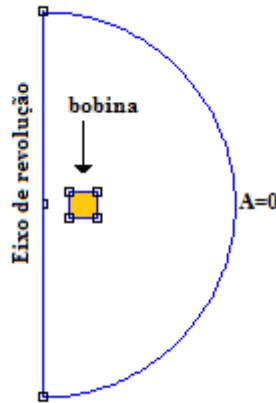
$$\lambda = 0,255 \text{ Wb} \quad (4.4)$$

$$W = 0,127 \text{ J} \quad (4.5)$$

### 4.3.3 Simulação Numérica

A estrutura axissimétrica usada para modelar a bobina solenoidal é apresentada na Figura 4.14. O pequeno quadrado que aparece no centro da figura modela a bobina propriamente dita. Já o semicírculo externo é usado para definição da condição de contorno que delimita o domínio de análise. Na primeira análise, foi utilizada a técnica de truncamento de fronteira onde o vetor potencial magnético "A" é especificado como nulo.

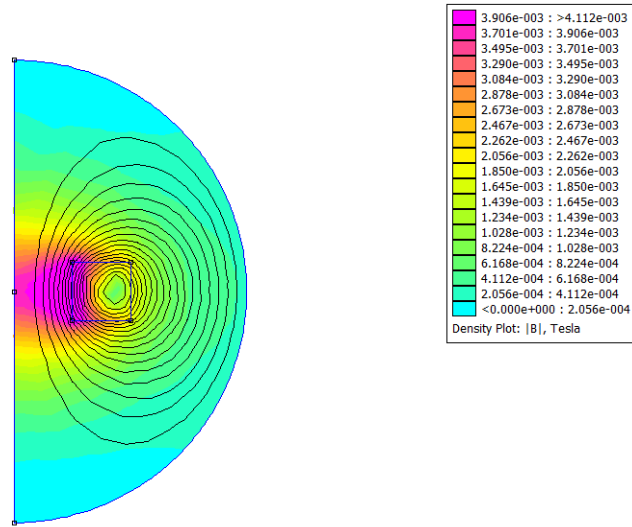
Figura 4.14 – Estrutura axissimétrica para análise da bobina solenoidal



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Na ilustração da Figura 4.15, são apresentadas as linhas de fluxo magnético superpostas ao mapeamento sombreado da indução magnética "B". Na estrutura axissimétrica, as linhas representam as superfícies equipotenciais com mesmo valor de  $2*\pi*r*A$ .

Figura 4.15 – Superfícies equipotenciais superpostas ao mapeamento sombreado da indução magnética "B".



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Na Tabela 4.3 são apresentados os valores das grandezas físicas calculadas a partir da solução de campo. Nessa tabela, também são incluídos os valores dos erros percentuais. Nesses cálculos, os valores analíticos são tomados como valores de referência..

Tabela 4.3 – Comparação entre os valores analíticos e numéricos no problema da bobina solenoidal

| Grandeza               | Valor Analítico | Valor Simulado | Erro percentual |
|------------------------|-----------------|----------------|-----------------|
| Corrente (A)           | 1,000           | 1,000          | 0,000%          |
| Indutância (H)         | 0,255           | 0,249          | 2,166%          |
| Fluxo concatenado (Wb) | 0,255           | 0,249          | 2,166%          |
| Energia (J)            | 0,127           | 0,125          | 2,284%          |

Fonte: Produzido pelo próprio autor

#### 4.3.4 Discussão dos Resultados

Ao comparar os valores da indutância calculados analiticamente e numericamente, fluxo concatenado e energia armazenada da Tabela 4.3 observa-se um erro máximo de 2,284%, um valor bem pequeno e tolerável, o que comprova a eficiência do FEMM para o cálculo de variáveis da bobina solenoidal.

## 4.4 CÁLCULO DA INDUTÂNCIA MÚTUA

Nesta seção será calculada numericamente a indutância mútua de um sistema com duas bobinas.

### 4.4.1 Descrição do problema

A Figura 4.16 apresenta o sistema a ser estudado nesta seção. O problema magnetostático consiste de duas bobinas de Brooks com 100 voltas cada, dispostas de forma concêntrica. Cada bobina possui um raio interno de 10 cm. A distância entre o topo da bobina inferior e a base da bobina superior é também 10 cm.

Figura 4.16 – Par de bobinas para o cálculo da indutância mútua



Fonte: Adaptado de (INFOLYTICA, CO. 2D Case study: self-inductance of a Brooks coil. 2005).

### 4.4.2 Cálculo Analítico

O valor analítico da indutância mútua, segundo (INFOLYTICA, CO. INFOLYTICA, CO. 2D Case study: Mutual inductance of coaxial coils, 2005), é igual a 0,491 mH.

### 4.4.3 Métodos Numéricos para Cálculo da Indutância Mútua

Existem basicamente três métodos para se calcular numericamente a indutância mútua do sistema apresentado na Figura 4.16, de acordo com (INFOLYTICA, CO. INFOLYTICA, CO. 2D Case study: Mutual inductance of coaxial coils, 2005). Os métodos 1 e 2 levam em consideração o fluxo enlaçado e o método 3 leva em consideração a energia armazenada no sistema.

Método 1: Consiste em alimentar somente a bobina 1 com uma corrente  $I_1$ . Assim calcula-se numericamente o fluxo  $\lambda_{21}$ . A indutância mútua neste caso é calculada pela equação (3.15).

Método 2: Alimenta-se somente a bobina 2 com uma corrente  $I_2$  e calcula-se numericamente o fluxo  $\lambda_{12}$  e assim calcula-se a indutância mútua através da relação (3.18).

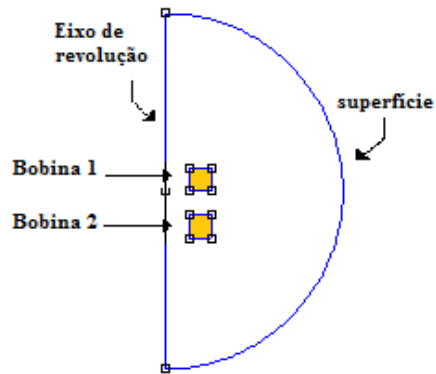
Método 3: Neste caso alimenta-se as duas bobinas com uma corrente  $I_1$  e  $I_2$  de mesma intensidade. Calcula-se a energia armazenada  $W_a$ . Em seguida inverte-se o sentido da corrente na segunda 2, porém mantendo a intensidade e calcula-se a energia armazenada  $W_b$ . Assim, a indutância mútua é dada pela relação (4.6):

$$M = \frac{W_a - W_b}{2I^2} \quad (4.6)$$

### 4.4.4 Simulação Numérica

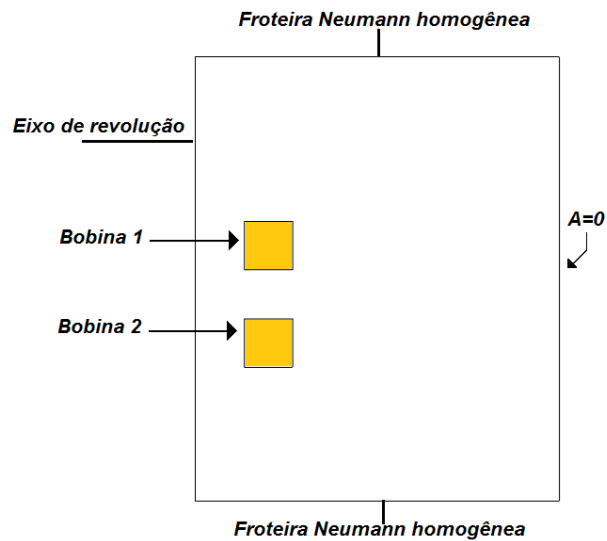
Todos os três métodos descritos na seção 4.4.3 foram implementados utilizando estruturas axissimétrica. A sequência de simulações inclui: i) superfície esférica com potencial nulo ( $A=0$ ); ii) superfície esférica com condição de contorno assintótica; e iii) superfície cilíndrica com potencial nulo ( $A=0$ ). Nas Figuras 4.17 e 4.18 são apresentadas ilustrações relativas às estruturas axissimétricas, esféricas e cilíndricas.

Figura 4.17 – Estrutura axissimétrica esférica para cálculo da indutância mútua



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Figura 4.18 – Estrutura axissimétrica cilíndrica para cálculo da indutância mútua



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Na Tabela 4.4 são apresentados os valores calculados numericamente e analiticamente para a indutância mútua. Os valores dos erros percentuais indicados na tabela foram calculados tomando-se como referência o valor analítico.

Tabela 4.4 – Comparação entre os valores analíticos e numéricos no cálculo da indutância mútua

| Método                             | Valor analítico da indutância mútua (mH) | Erro percentual  |   |   |
|------------------------------------|--|--|---|---|
|                                    |  | Superfície esférica com condição de contorno assintótica | Superfície esférica com condição de contorno nula | Superfície cilíndrica com condição de contorno nula |
| Método 1 - $I_1=10$ A e $I_2=0$    | 0,491                                    | 0,166%   | 4,755%  | 3,865%  |
| Método 2 - $I_1=0$ e $I_2=10$ A    |  | 0,168%   | 4,752%  | 3,865%  |
| Método 3 - $I_1=10$ A e $I_2=10$ A |  | 1,468%   | 3,256%  | 3,831%  |

Fonte: Produzido pelo próprio autor

#### 4.4.5 Discussão dos Resultados

Tomando-se os valores calculados analiticamente como referência, observa-se que os maiores erros percentuais estão associados a uma superfície esférica com potencial nulo ( $A=0$ ). Já os menores erros foram observados na superfície esférica com condição de contorno assintótica, onde o erro percentual máximo é de somente 1,468%.

Vale ressaltar que, todos os erros percentuais estão abaixo de 5%. Isto sugere que os resultados das simulações obtidos pelos métodos envolvendo fluxo enlaçado e energia armazenada são plenamente satisfatórios para problemas que envolvem cálculo de indutância mútua..

### 4.5 CÁLCULO DOS PARÂMETROS DO CIRCUITO ELÉTRICO EQUIVALENTE DE UM TRANSFORMADOR

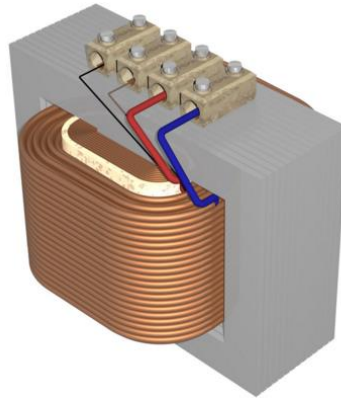
Nesta seção serão calculados os parâmetros do circuito elétrico equivalente de um transformador monofásico.

#### 4.5.1 Descrição do problema

O transformador estudado nesta seção tem os enrolamentos concêntricos, como apresentado na Figura 4.19, ou seja, os enrolamentos primário e secundário circundam a trave

central do transformador. No caso, o enrolamento mais externo é o secundário, onde a corrente nominal é de 200 A. Considera-se também que o transformador está imerso no ar e que não há perdas no núcleo, ou seja, a resistência  $R_C$  é nula. Na Tabela 4.5 tem-se as especificações do transformador.

Figura 4.19 – Transformador com enrolamentos concêntricos



Fonte: (<https://en.wikipedia.org/wiki/Transformer>)

Tabela 4.5 – Especificações do transformador

|                                 |                   |
|---------------------------------|-------------------|
| Corrente no primário (A)        | 100               |
| Número de espiras no primário   | 2000              |
| Corrente no secundário (A)      | 200               |
| Número de espiras no secundário | 1000              |
| Material dos enrolamentos       | Cobre ( $\mu=1$ ) |
| Permeabilidade do núcleo        | 1000              |

Fonte: Produzido pelo próprio autor

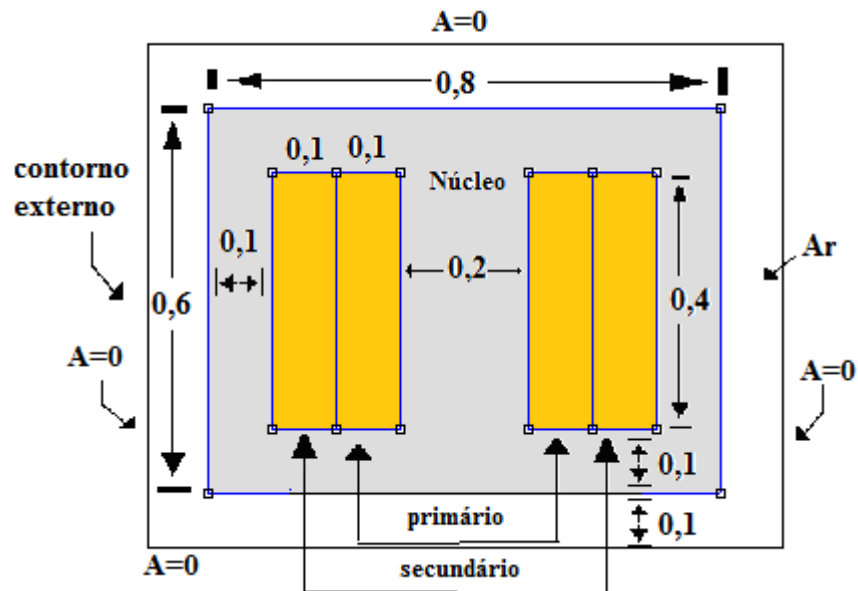
#### 4.5.2 Modelo numérico

O modelo numérico inclui uma camada de ar que envolve o transformador. A camada de ar termina no contorno externo indicado na Figura 4.20. Ao longo do contorno externo, o vetor potencial magnético  $A$  é nulo, ou seja, trata-se de uma condição de contorno de Dirichlet, que é usado para fechar o domínio de análise. A estrutura utilizada é a planar e a profundidade do modelo na direção  $z$  é 0,6 metro.



Cada bobina é modelada por dois retângulos não adjacentes (NOGUEIRA, 2013). As propriedades desta região incluem o número de voltas e a corrente elétrica, valores estes especificados na Tabela 4.5.

Figura 4.20 – Modelo numérico e dimensões do transformador



Fonte: Produzido pelo próprio autor

### 4.5.3 Ensaio de Circuito Aberto

O primeiro passo para encontrar os parâmetros do circuito equivalente do transformador é fazer um ensaio de circuito aberto, que neste caso foi feito de forma simulada. Primeiramente, o secundário foi colocado em aberto, ou seja,  $I_s=0$ , com  $I_p=1,0$  A e em seguida o primário é que foi colocado em aberto, ou seja,  $I_p=0$ , com  $I_s=2$  A. As correntes representam 1% do valor nominal. A Tabela 4.6 apresenta todos os valores das grandezas físicas calculadas numericamente para ambos os ensaios simulados.

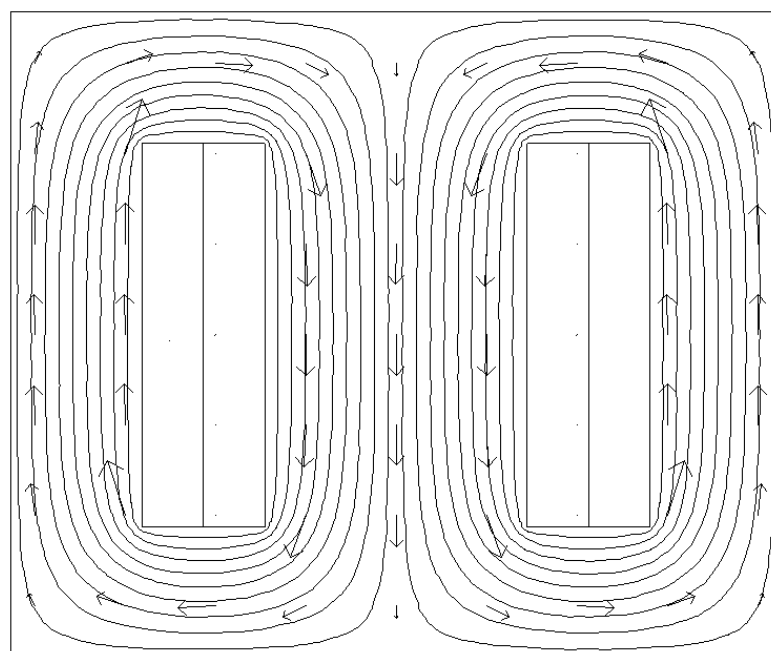
Tabela 4.6 – Grandezas calculadas numericamente no ensaio simulado de circuito aberto do transformador

| Grandeza                 | Secundário em aberto ( $I_p=1A$ e $I_s =0$ ) | Primário em aberto ( $I_s=2 A$ e $I_p =0$ ) |
|--------------------------|--|---|
| Corrente (A)             | 1,000  | 2,000                                       |
| Energia (J)              | 213,428                                      | 213,433                                     |
| Tensão (V)               | 2,069  | 1,034                                       |
| Fluxo (Wb)               | 426,856                                      | 213,433                                     |
| Indutância (H)           | 426,856                                      | 106,717                                     |
| Resistencia ( $\Omega$ ) | 2,069  | 0,517                                       |
| Potencia (W)             | 2,069  | 2,069                                       |

Fonte: Produzido pelo próprio autor

Observa-se a partir dos valores indicados na quarta linha da tabela que a queda de tensão calculada nos enrolamentos primário e secundário obedece à relação (3.19). A Figura 4.21 apresenta a distribuição das linhas de fluxo referentes ao ensaio de circuito aberto. Nesta ilustração, é possível observar que o fluxo magnético está confinado no núcleo.

Figura 4.21 – Distribuição das linhas de fluxo magnético no ensaio simulado de circuito aberto



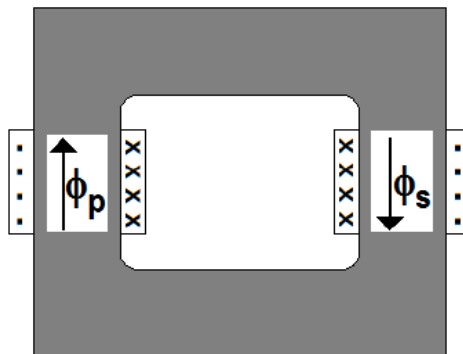
Fonte: Produzido pelo próprio autor

#### 4.5.4 Ensaio em Curto-Circuito

A etapa seguinte para se encontrar os parâmetros de circuito equivalente de um transformador é o ensaio em curto-circuito, que também foi feito de forma simulada. Neste caso devem-se usar os valores de correntes nominais nos enrolamentos,  $I_p=100\text{ A}$  e  $I_s=200\text{ A}$ .

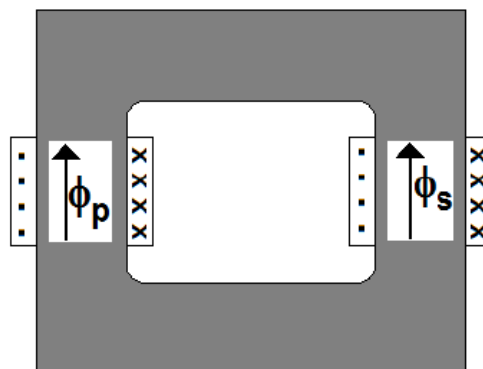
Neste caso, é necessário que se façam dois testes, o primeiro com fluxo magnético na configuração aditiva e posteriormente na configuração subtrativa. Os sentidos do fluxo nas duas configurações são apresentados nas Figuras 4.22 e 4.23.

Figura 4.22: Direção do fluxo magnético na configuração aditiva



Fonte: (NOGUEIRA, 2015)

Figura 4.23 – Direção do fluxo magnético na configuração subtrativa



Fonte: (NOGUEIRA, 2015)

A Tabela 4.7 apresenta como deve ser feita a configuração das correntes e enrolamentos para gerar os fluxos nas configurações aditiva e subtrativa.

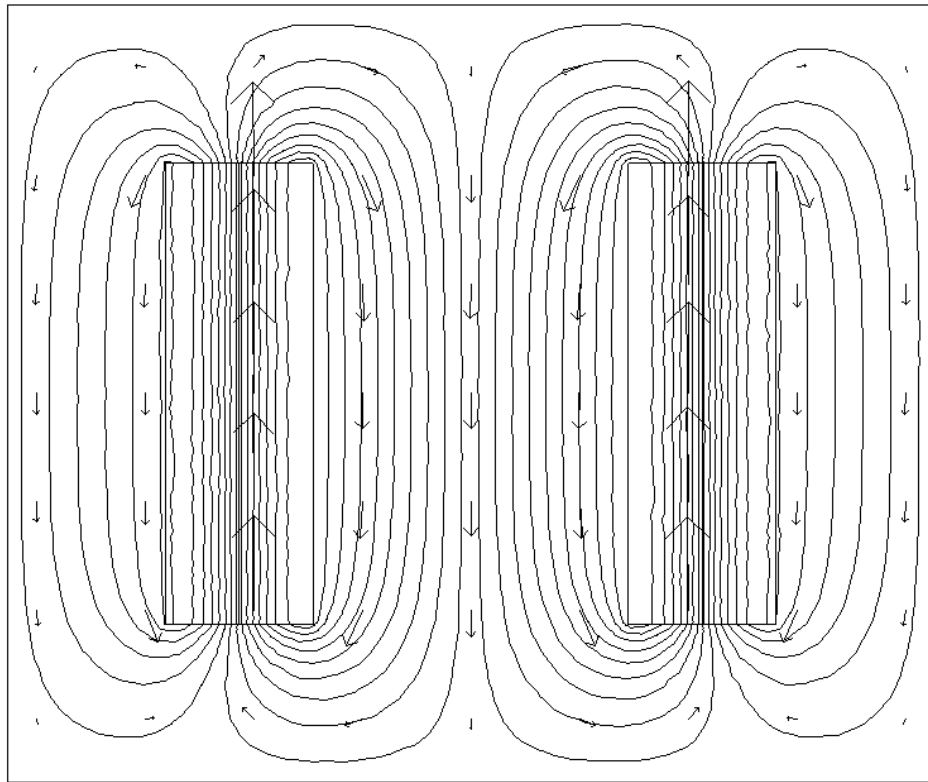
Tabela 4.7 – Configuração dos enrolamentos para gerar fluxo configurações aditiva e subtrativa

|                                |                   |                         |                      |       |
|--------------------------------|-------------------|-------------------------|----------------------|-------|
| <b>Configuração aditiva</b>    | <b>Primário</b>   | <b>Corrente (A)</b>     |                      | 100   |
|                                |                   | <b>Número de voltas</b> | <b>Lado esquerdo</b> | -2000 |
|                                |                   |                         | <b>Lado direito</b>  | 2000  |
|                                | <b>Secundário</b> | <b>Corrente (A)</b>     |                      | 200   |
|                                |                   | <b>Número de voltas</b> | <b>Lado esquerdo</b> | -1000 |
|                                |                   |                         | <b>Lado direito</b>  | 1000  |
| <b>Configuração subtrativa</b> | <b>Primário</b>   | <b>Corrente (A)</b>     |                      | 100   |
|                                |                   | <b>Número de voltas</b> | <b>Lado esquerdo</b> | -2000 |
|                                |                   |                         | <b>Lado direito</b>  | 2000  |
|                                | <b>Secundário</b> | <b>Corrente (A)</b>     |                      | 200   |
|                                |                   | <b>Número de voltas</b> | <b>Lado esquerdo</b> | 1000  |
|                                |                   |                         | <b>Lado direito</b>  | -1000 |

Fonte: (NOGUEIRA, 2015)

A Figura 4.21 apresenta a distribuição das linhas de fluxo para o caso de fluxo na configuração subtrativa.

Figura 4.24 – Distribuição das linhas de fluxo magnético no ensaio simulado de curto-circuito na configuração subtrativa



Fonte: Produzido pelo próprio autor

Examinando a distribuição do fluxo, percebem-se quatro regiões idênticas onde o fluxo magnético atravessa o enrolamento e retorna através da porção magnética adjacente do núcleo. O fluxo circula na direção horária e anti-horária (NOGUEIRA, 2013)

A Tabela 4.8 apresenta os valores das grandezas físicas calculadas numericamente para o ensaio de curto-circuito para as configurações aditiva e subtrativa.

Tabela 4.8 – Grandezas calculadas numericamente para o ensaio simulado em curto-circuito do transformador

| Grandeza                 | Configuração subtrativa |            | Configuração aditiva |            |
|--------------------------|-------------------------|------------|----------------------|------------|
|                          | Primário                | Secundário | Primário             | Secundário |
| Energia armazenada (J)   | 4960,590                |            | 8532270,000          |            |
| Corrente (A)             | 100                     | 200        | 100                  | 200        |
| Tensão (V)               | 206,897                 | 103,448    | 206,897              | 103,448    |
| Fluxo (Wb)               | 49,088                  | 25,062     | 85322,200            | 42661,600  |
| Indutância (H)           | 0,490                   | 0,125      | 853,222              | 213,308    |
| Resistencia ( $\Omega$ ) | 2,069                   | 0,517      | 2,069                | 0,517      |
| Potencia (W)             | 20689,700               | 20689,700  | 20689,700            | 20689,700  |

Fonte: Produzido pelo próprio autor

Percebe-se mais uma vez que a tensão nos enrolamentos obedece a relação (3.19). A indutância mútua  $M_p$  no primário e  $M_s$  no secundário pode ser calculada através da relação (4.6), onde neste caso  $W_a$  é a energia armazenada na configuração aditiva e que vale 8532270 J e  $W_b$  é a energia armazenada na configuração subtrativa e vale 4960,590 J. Estes valores estão na terceira linha da Tabela 4.8. Para se calcular a indutância mútua no primário utiliza-se o valor  $I=100$  A e no secundário  $I=200$  A. Sendo assim:

$$M_p = 426,365 \text{ H} \quad (4.7)$$

$$M_s = 106,591 \text{ H} \quad (4.8)$$

A indutância própria total  $L_p$  no primário e  $L_s$  no secundário, dadas respectivamente pelas relações (4.9) e (4.10) (NOGUEIRA, 2015).

$$L_p = l_p + M_p \quad (4.9)$$

$$L_s = l_s + M_s \quad (4.10)$$

Estas grandezas já foram calculadas no ensaio de circuito aberto e os valores estão na sexta linha da Tabela 4.6. As grandezas  $l_p$  e  $l_s$  são respectivamente as indutâncias de dispersão no primário e no secundário, Logo:

$$l_p = 0,4961 \text{ H} \quad (4.10)$$

$$l_s = 0,126 \text{ H} \quad (4.11)$$

Utilizando a relação (3.24), pode ser calculada a reatância de dispersão no primário e no secundário, utilizando uma frequência de 60 Hz. Assim:

$$X_p = 187,025 \Omega \quad (4.11)$$

$$X_s = 47,500 \Omega \quad (4.12)$$

Utilizando a mesma relação (3.24), pode-se calcular a reatância de magnetização  $X_m$  utilizando a indutância mútua  $M_p$ . Assim:

$$X_m = 160,734 \text{ k}\Omega \quad (4.13)$$

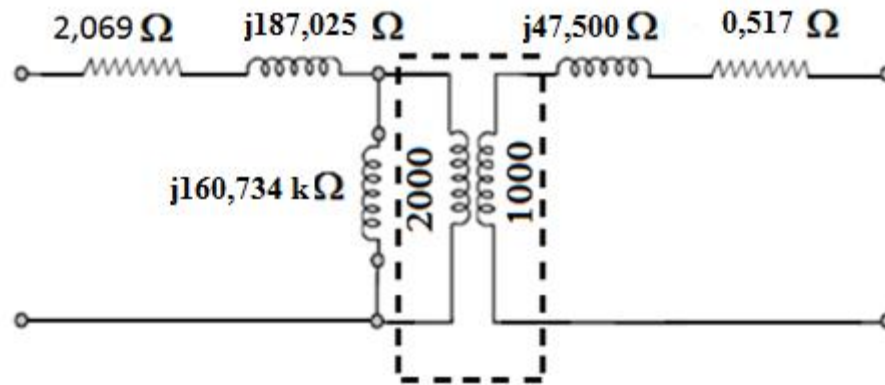
Observando as Tabelas 4.6 e 4.8 percebe-se que as resistências no primário e no secundário são dadas respectivamente pelas relações (4.14) e (4.15):

$$R_p = 2,069 \Omega \quad (4.14)$$

$$R_s = 0,517 \Omega \quad (4.15)$$

Calculado todos os parâmetros, tem-se o circuito equivalente completo apresentado na Figura 4.25.

Figura 4.25 – Circuito elétrico equivalente do transformador com parâmetros calculados



Fonte: Produzido pelo próprio autor

#### 4.5.5 Discussão dos Resultados

Nesta seção, fica claro que é possível calcular os parâmetros de um circuito elétrico equivalente de um transformador através de ensaio de curto-circuito e circuito aberto nas configurações aditivas e subtrativas através de simulação numérica. Além disso, também foram apresentados os cálculos que relacionam a indutância total, de dispersão e mútua nos enrolamentos do transformador.



## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A partir dos objetivos traçados inicialmente neste trabalho, pode-se comprovar a eficiência e precisão numérica da técnica dos elementos finitos para uma série de problemas eletrostáticos e magnetostáticos, onde os resultados de simulações numéricas são contrastados com aqueles obtidos por cálculo analítico.

No caso dos problemas eletrostáticos, a grandeza global de maior interesse é a capacitância, e os resultados mostram que o cálculo analítico baseado em uma fórmula fechada conduz a um valor subestimado da capacitância. Isso ocorre porque o cálculo analítico não leva em consideração os campos dispersos das extremidades ou bordas dos eletrodos que formam o capacitor. Outra grandeza de grande interesse é a variação do campo elétrico. Nesse caso, os simuladores de campos eletromagnéticos disponibilizam mapeamentos sombreados da intensidade do campo que permitem identificar com rapidez e precisão as regiões que operam próximo ou acima da tensão disruptiva do meio dielétrico empregado na simulação. De posse dessa informação, o engenheiro ou projetista usualmente altera a configuração geométrica dos eletrodos de forma que o dispositivo possa vir a operar de forma mais segura.

No caso dos problemas magnetostáticos, a grandeza global de maior interesse é a indutância. No caso da indutância própria de uma bobina de Brooks o pequeno erro percentual encontrado entre o valor numérico e analítico comprovou a eficiência do MEF. O cálculo da indutância mútua permitiu validar os métodos do fluxo enlaçado e da energia armazenada para cálculo numérico de indutâncias ao comparar os valores calculados numericamente com aqueles obtidos analiticamente.

Um estudo comparativo sobre o tipo de condição de contorno e a precisão numérica do cálculo de grandezas foi feito com base no problema que envolve o cálculo da indutância mútua de bobinas de Brooks. Foram testadas as influências de superfícies cilíndricas e esféricas, associadas a condições de contorno assintóticas e com truncamento de fronteira. Os resultados mostram que a combinação de superfícies esféricas com a condição de contorno assintótica é uma ótima opção para delimitar o domínio de análise e, ao mesmo tempo, conseguir resultados mais precisos das grandezas globais.

No estudo de transformadores, os ensaios simulados em circuito aberto e curto-circuito foram usados para determinar os parâmetros elétricos que formam o circuito elétrico equivalente de um transformador monofásico. Os elementos concentrados do circuito

equivalente levam em consideração os fluxos dispersos; as resistências dos enrolamentos e a permeabilidade finita do núcleo.

No estudo, foi apresentada a sequência de operações necessárias para avaliar os parâmetros do circuito equivalente através da simulação numérica dos testes de circuito aberto e de curto-circuito com configurações aditiva e subtrativa. A discussão apresentada deixa claros os conceitos de indutância própria, indutância mútua e indutância total de um determinado enrolamento, e explica como calcular seus valores separadamente. Através da sequência de operações apresentada, fica claro que somente os ensaios simulados são suficientes para calcular quase todos os parâmetros do circuito equivalente de um transformador.

Com relação a trabalhos futuros, deve-se, primeiramente, observar que existe, hoje, uma facilidade crescente de acesso aos programas para cálculo numérico de campos eletromagnéticos. É possível assim, utilizar a suíte de programas gratuitos “**finite element method magnetics**” (MEEKER, 2010) no estudo de fenômenos de grande importância prática e que precisam ser explicados com base na teoria de campos eletromagnéticos (LOWTHER and FREEMAN, 1993). Tais fenômenos incluem, por exemplo, as estimativas da quantidade de calor dissipada em núcleos magnéticos de máquinas e transformadores, bem como o cálculo das forças dinâmicas produzidas por correntes parasitas em meios condutivos.

A proposta de trabalhos futuros é voltada para a magnetodinâmica, e consiste no estudo de dispositivos eletromagnéticos que apresentam correntes induzidas em suas regiões condutivas. A magnetodinâmica é um ramo do eletromagnetismo que incorpora estudos relativos à penetração de campos em meios condutivos, blindagem eletromagnética, aquecimento indutivo, perdas magnéticas e conversão eletromecânica de energia. A utilização de simuladores de campos eletromagnéticos pelos grupos de pesquisa em eletromagnetismo aplicado do centro tecnológico da UDESC já é uma realidade. Para problemas modelados em duas dimensões, a maioria dos trabalhos de simulação têm sido feitos empregando-se a suíte de programas FEMM. Para problemas que requerem uma solução em três dimensões, temos à disposição o programa de simulação distribuído comercialmente e conhecido como MAXWELL.

Este trabalho pode ser considerado pioneiro, pois é o primeiro trabalho de conclusão do curso de engenharia elétrica na UDESC que estuda o método dos elementos finitos aplicados a dispositivos eletromagnéticos.

## REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. 901 p

BASTOS, João Pedro Assumpção. **Eletromagnetismo e cálculo de campos**. 2. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992. 452 p.

BASTOS, João Pedro Assumpção. **Eletromagnetismo para engenharia: estática e quase-estática**. Florianópolis: Ed. UFSC, 2008. 396p

CHEN, Q.; KONRAD, A. A review of finite element open boundary techniques for static and quasi-static electromagnetic field problems. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 33, no. 1, January 1997.

FITZGERALD, A. E; KINGSLEY, Charles; UMANS, Stephen D. **Máquinas elétricas: com introdução à eletrônica de potência**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. 648 p.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**. 8. Ed v.3. Rio de Janeiro: LTC, 2009.372p

INFOLYTICA, CO. **2D Case study: mutual inductance of coaxial coils**. 2005.

INFOLYTICA, CO. **2D Case study: self-inductance of a Brooks coil**. 2005.

LOWTHER, D. A.; FREEMAN, E. M. A new approach to using simulation software in the electromagnetics curriculum, **IEE Transactions on Education**, Vol 36, No2, May 1993.

NOGUEIRA, A.F.L., **Computation of cogging torques in permanent-magnet machines using the finite element method**. PhD dissertation. University of Wales, Cardiff, 1992.

NOGUEIRA, Antônio Flávio Licarião. Análise de Cabos Coaxiais Cilíndricos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 4, 565-573, 2007.

NOGUEIRA, Antônio Flávio Licarião. Calculation of Power Transformers Equivalent Circuit using Numerical Field Solutions. **International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences**, 17 (1), 2013.

NOGUEIRA, Antônio Flávio Licarião. Determination of Equivalent Electric Circuit Parameters of Single-Phase Power Transformers with different number of winding turns. **International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences**, 22 (3), 2015.

MEEKER, David. **Finite element method magnetics, user's manual**, 2010. Disponível em <<http://www.femm.info/Archives/doc/manual42.pdf>>.

OLIVEIRA, D. N.; FERREIRA, G. B.; PONTES, R. S. T. Método dos Elementos Finitos como Ferramenta Didática para o Ensino de Magnetostática e Eletrostática. In: COBENGE 2010, 2010, Fortaleza, **Anais Eletrônicos**. Disponível em <<http://www.lamotriz.ufc.br/Artigos/562.pdf>>. Acesso em 02 dez. 2015.

RODRIGUES, Cristiano Y. C. **Análise de Estruturas Axissimétricas: Aplicação a reservatórios circulares**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2009.

SADIKU, Matthew N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. São Paulo: Makron Books, 2001. 434 p.