UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VITÓRIA GARCIA ZAMBRANO

FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

JOINVILLE
2024

VITÓRIA GARCIA ZAMBRANO

FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.
Orientadora: Doutora Elisandra Bar de Figueiredo

JOINVILLE

2024

VITÓRIA GARCIA ZAMBRANO

FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.
Orientadora: Doutora Elisandra Bar de Figueiredo

BANCA EXAMINADORA

Elisandra Bar de Figueiredo - Doutora
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Carolina Soares Bueno - Doutora
Universidade do Estado de Santa Catarina

Marnei Luis Mandler - Mestre
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 28 de junho de 2024

Dedico esse trabalho aos meus pais, Luis e Vaniza, e meu amigo Leandro que sempre acreditaram em mim e me incentivaram a seguir em frente.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus pelo dom da vida e por me conceder a persistência para concluir essa graduação.

Aos meus pais por sempre me apoiarem e estarem presentes, sem a companhia de vocês nada disso seria possível.

Aos meus companheiros que tornaram mesmo os momentos mais difíceis suportáveis.

Aos professores que fizeram parte da minha jornada acadêmica, em especial à minha orientadora, professora Elisandra, pela parceria ao longo dessa trajetória e por apoiar as minhas ideias.

Por fim, a todos os familiares e amigos que já não estão presentes na minha vida, mas que de alguma forma foram importantes para ser quem sou hoje.

RESUMO

Este texto apresenta uma proposta de atividade para o ensino de sequências numéricas no Ensino Básico e Superior, focando na formação inicial dos professores utilizando fractais como exemplos de aplicação. Para isso, a autora buscou em duas bibliotecas virtuais produções relacionadas a sequências numéricas e geometria fractal, além de verificar se algum texto estabelecia uma relação direta entre esses temas. Adicionalmente, consultou-se a Base Nacional Comum Curricular para identificar as competências e habilidades associadas a sequências e analisou-se como esse assunto é abordado em coleções de livros didáticos do Ensino Básico e do Ensino Superior. Para compreender como a temática é abordada em um curso de formação de professores de matemática, examinou-se o Projeto Pedagógico do Curso e os Planos de Ensino das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e Análise Real, bem como suas bibliografias, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina. Além disso, com o propósito de integrar tecnologias dinâmicas, foram analisadas e modificadas três atividades disponíveis na comunidade do GeoGebra, para que os alunos pudessem visualizar mais iterações dos fractais e conferir os resultados. Com base nos dados coletados, desenvolveu-se uma proposta didática que relaciona sequências e fractais utilizando materiais físicos e digitais. Ela foi pensada para três modelos de fractal, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski e a Árvore de Pitágoras. Com materiais manipuláveis espera-se que os alunos respondam três blocos de perguntas, o primeiro relacionado às formas geradas a cada iteração e o comprimento dos lados dessas geometrias, o segundo tratando do perímetro e o terceiro da área. A proposta foi aplicada, como piloto, na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática IV e, apesar dos dados coletados não serem analisados nesse trabalho, a aplicação levantou importantes reflexões sobre tempo de aplicação e postura do professor quanto aplicador. Com essa proposta, espera-se motivar os educadores a implementarem diferentes metodologias em sala de aula e oferecer aos alunos uma aplicação prática do que é ensinado teoricamente em aulas de matemática.

Palavras-chave: Geometria Fractal, Sequências Numéricas, Materiais Manipuláveis, GeoGebra, Proposta de atividade.

ABSTRACT

This text presents a proposed activity for teaching numerical sequences at both Basic and Higher Education levels, focusing on the initial preparation of teachers using fractals as application examples. To this end, the author explored two virtual libraries for productions related to numerical sequences and fractal geometry, in addition to verifying whether any texts established a direct relationship between these themes. Additionally, the Base Nacional Comum Curricular was consulted to identify the competencies and skills associated with sequences, and an analysis was conducted on how this topic is addressed in collections of textbooks for Basic and Higher Education. To understand how the subject is approached in a teacher training course for mathematics, the Projeto Pedagógico do Curso and the Plano de Ensino for the subjects Differential and Integral Calculus II and Real Analysis, as well as their bibliographies, from the Mathematics Teaching Degree course at the Universidade do Estado de Santa Catarina were examined. Furthermore, with the purpose of integrating dynamic technologies, three activities available in the GeoGebra community were analyzed and modified so that students could visualize more iterations of the fractals and verify the results. Based on the collected data, a didactic proposal was developed that relates sequences and fractals using physical and digital materials. It was designed for three fractal models: the Sierpinski Triangle and Carpet, and the Pythagoras Tree. With manipulable materials, it is expected that students will answer three sets of questions: the first related to the shapes generated at each iteration and the lengths of the sides of these geometries, the second addressing the perimeter, and the third the area. The proposal was applied as a test run in the course Laboratório de Ensino de Matemática IV, and although the collected data is not analyzed in this work, the application raised important reflections on application time and the teacher's posture as an implementer. With this proposal, it is expected to motivate educators to implement different methodologies in the classroom and offer students a practical application of what is theoretically taught in mathematics classes.

Key words: Fractal Geometry, Numerical Sequences, Manipulable Materials, GeoGebra, Proposal Activity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ARE	Análise Real
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCT	Centro de Ciências Tecnológicas
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CMD	Congresso Movimentos Docentes
ENEM	Exame nacional do Ensino Médio
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MEC	Ministério da Educação
NEM	Novo Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PA	Progressão Aritmética
PPC	Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática
PG	Progressão Geométrica
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PUC	Pontifícia Universidade Católica
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Professores e alunos enfrentam dificuldades ao longo dos processos de ensino e de aprendizagem de matemática que, segundo Gervázio (2017), podem acarretar um desgaste dos profissionais de ensino e a evasão dos alunos. Dessa forma, existem defensores de formas de ensino diferentes da aula tradicional, afirmando que metodologias diferenciadas podem despertar um maior interesse por parte dos alunos. Uma dessas metodologias diferenciadas serias as denominadas ativas, que definidas como "estratégias de ensino que têm por objetivo incentivar os estudantes a aprenderem de forma autônoma e participativa" (Paraná, 2024), tendo como exemplo a Aprendizagem Baseada em Projeto. Para Yared (2023) as metodologias ativas são mais que apenas um método, são diversas ferramentas para que o professor desperte a reflexão e a geração de ideias em seus alunos. Foi pensando em como estimular os alunos a aprenderem matemática que surgiu a ideia desse trabalho.

Tendo isso em mente, o tema de sequências numéricas foi escolhido devido a interesses pessoais da autora e como anseio em buscar alternativas para ensinar esse conteúdo, explorando aplicações com problemas contextualizados e que usem metodologias diferentes em sala, como materiais concretos e aplicativos no GeoGebra, para exemplificar esse assunto. Isso porque, ao longo de estágios e conversas com acadêmicos, os alunos relatam não terem uma noção inicial do assunto e dizem ser um tema difícil e sem aplicação. Com o propósito de superar essa barreira inicial de dificuldade enfrentada pelos estudantes e buscando despertar seu interesse com o uso de materiais manipuláveis, surgiu a ideia de apresentar a Geometria Fractal na sala de aula e, por meio dela, introduzir conceitos de sequências numéricas.

Assim, para compreender melhor qual era a base matemática fornecida aos alunos a respeito de sequências numéricas foi realizada uma análise de como esse assunto é abordado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Tendo visto como a BNCC propõe a introdução sobre o tema aos alunos da Educação Básica, buscou-se compreender como os materiais didáticos apresentam esses conteúdos na prática. Importante ressaltar que a busca inicial na BNCC se fez relevante visto que ela é utilizada atualmente como parâmetro pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que "compreende um conjunto de ações voltadas para a distribuição de obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, destinados aos alunos e professores das escolas públicas de educação básica do País” (Brasil, 2024). Assim, todos os referenciais produzidos a partir da sua homologação devem cumprir, pelo menos, com os conteúdos por ela indicados. Portanto, com o foco de analisar como os alunos da educação básica estão aprendendo a respeito de sequências numéricas e quais as estratégias didáticas utilizadas, foi feita nessa pesquisa uma seleção e análise de livros didáticos que se baseiam na BNCC.

Pensando na formação de professores, a partir da leitura de livros didáticos do Ensino Básico buscou-se, no Projeto do Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática da UDESC-CCT, quais eram os materiais utilizados no Ensino Superior. Isso para compreender qual a preparação dada aos profissionais em formação para tratar do tema de sequências numéricas. Assim, foram selecionados livros das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI II) e Análise Real (ARE), matérias nas quais, segundo o PPC, o conteúdo é estudado. Com isso, foram selecionados livros da bibliografia básica da ementa dessas disciplinas para serem analisados.

Além disso, para compreender o que estava sendo publicado a respeito do ensino de sequências numéricas foi feita uma pesquisa em duas bibliotecas virtuais, o Acervo Capes e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). A partir dos resultados dessa pesquisa foram selecionados artigos e dissertações para leitura e análise inicial. Vendo então a necessidade da busca mais detalhada pelo ensino de sequências por meio de fractais foi feita outra pesquisa, nas mesmas bibliotecas, com novos resultados que serão abordados na Seção 4.1 do Capítulo 4.

A partir da análise da BNCC, de coletâneas de livros didáticos e dos artigos e dissertações lidos, foi desenvolvida uma proposta didática para apresentar aos alunos algumas aplicações do conteúdo de sequências numéricas estudado em sala de aula. Para isso, em colaboração com o laboratório Fábrica da Matemática (FAB3D), da UDESC, foram produzidos materiais concretos com a tecnologia da impressão 3D e com o objetivo de que os alunos os utilizassem na realização de situações problemas que foram pensadas para ajudar na formalização e generalização de conceitos matemáticos como na elaboração de uma lei de formação para as sequências numéricas, com foco em que os alunos percebam que elas levam a progressões numérica.

A pesquisa se justifica por tratar não apenas do uso de metodologias ativas, mas também por considerar que, a partir de debates e exercícios que instigam diferentes formas de resolução, os alunos possam identificar e reconhecer padrões, levando então a uma formalização com rigor matemático esperado no Ensino Médio. Isso vai ao encontro do que diz a BNCC ao estabelecer como uma das competências gerais para a Educação Básica:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (Brasil, 2018, p.9).

Dessa forma, o objetivo geral desse trabalho é propor uma atividade que auxilie o professor no ensino de sequências a partir da geometria fractal, com o uso de materiais manipuláveis. Para alcançá-lo, foram estipulados os seguintes objetivos específicos:

- Revisar a BNCC, bem como livros didáticos do Ensino Básico formulados a partir da implementação da BNCC e o Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática, da UDESC-CCT, para compreender como é abordado o conteúdo de sequências numéricas em cada uma das esferas de ensino, desde a Educação Básica até a Superior.
- Analisar a literatura a respeito das temáticas abordadas e verificar em acervos virtuais a produção acadêmica desenvolvida sobre o assunto de sequências numéricas e a sua relação com a geometria fractal.
- Propor atividades didáticas que, a partir do uso de modelos concretos e aplicativos dinâmicos de fractais, os alunos possam chegar na formulação das leis de sequências que descrevem esses fractais e, através disso, permitam estabelecer um conceito intuitivo de limite.

Com esses objetivos pretendemos responder à pergunta “De que forma é possível integrar materiais concretos e digitais no estudo de sequências numéricas, contextualizando com a geometria fractal?”.

Esse trabalho está estruturado em seis capítulos. O primeiro é essa introdução, que apresenta o que será discutido a seguir, bem como os objetivos e aspectos metodológicos. O segundo é o referencial teórico, onde abordamos com mais profundidade os conceitos e definições de sequências numéricas e da geometria fractal. No terceiro capítulo descrevemos que foi utilizada a metodologia com foco na abordagem qualitativa no levantamento e análise de artigos, dissertações e livros didáticos. No quarto capítulo é abordado o uso de materiais manipuláveis, tanto concretos quanto digitais, no ensino, com foco em matemática. O quinto capítulo trata do levantamento de literatura, aprofundando sobre as leituras dos materiais didáticos utilizados no Ensino Básico e

Superior, para compreender como o tema de sequências numéricas é abordado ao longo da vida acadêmica dos alunos. Com esses resultados, no capítulo seis, apresentamos uma proposta de atividade didática que visa abordar o tema de sequências numéricas a partir da geometria fractal, com o uso de materiais concretos. Por fim, no último capítulo, serão feitas as considerações finais desse trabalho. Ao final do texto constam como apêndices a proposta de atividades e os slides para a introdução da aula introdutória do conteúdo.

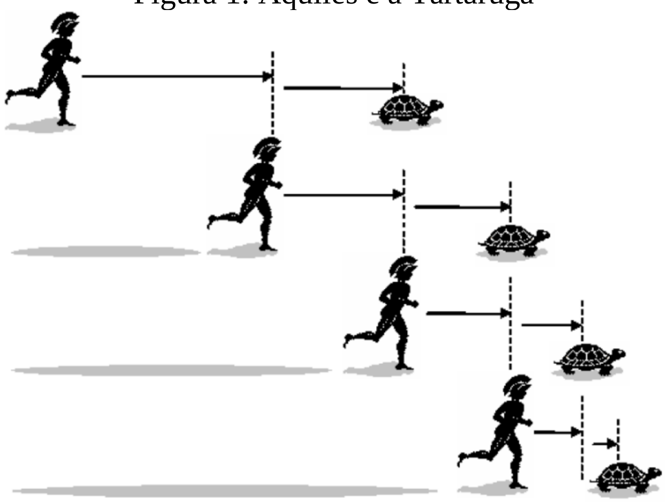
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esse capítulo irá abordar os temas de sequências numéricas e geometria fractal, com o objetivo de trazer um maior aprofundamento sobre esses temas. A partir disso, uma proposta de ensino de sequências numéricas por meio da geometria fractal será elaborada, tendo como foco de aplicação alunos do Ensino Médio.

2.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

No século III a.C. Aristóteles escreve os paradoxos de Zenão de Eleia, no seu livro intitulado Física, e um dos mais famosos ficou conhecido como Aquiles e a Tartaruga. Na narrativa o veloz herói aposta uma corrida com uma tartaruga, dando-lhe como vantagem os primeiros dez metros. Quando Aquiles atinge a marca dos dez metros a tartaruga conseguiu andar mais um metro. Assim, que ele percorre esse um metro, Aquiles percebe que a tartaruga caminhou 0,1 metro e ele segue perseguindo-a (Figura 1). Com isso, se considerarmos que o espaço é infinitamente divisível, sempre haverá uma distância entre o herói e a tartaruga, tornando impossível que ele a alcance. Com essa história, podemos perceber que a distância entre Aquiles e a tartaruga é dividida por dez a cada nova iteração, pois no início tínhamos 10 metros, depois $\frac{10}{10} = 1\ m$, depois $\frac{1}{10} = 0{,}1\ m$ e assim sucessivamente, como representado na Figura 1. Dessa forma, podemos ver uma relação decrescente nos valores das distâncias: $10{,}1,\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\cdots$ (Cerqueira, 2013).

Figura 1: Aquiles e a Tartaruga



Fonte: Matos, 2018.

Outros estudiosos famosos se dedicaram a pensar em questões similares, como por exemplo, Leonardo de Pisa, conhecido hoje como Fibonacci. Ele estabeleceu a seguinte questão: “Num pátio fechado, coloca-se um casal de coelhos. Supondo que, em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao final de um ano, quantos casais de coelhos haverá no pátio?” (Cerqueira, 2013, p. 16). Nesse cenário, no primeiro e no segundo mês teríamos um casal de coelhos, já no terceiro seriam dois casais, no quarto seriam 3 e no quinto seriam 5. Assim, se observarmos bem, podemos perceber que o número de casais de coelhos do mês que se deseja saber é sempre a soma da quantidade existente nos dois meses anteriores, ou seja, teríamos $1,1,2,3,5,8,13,21,$ ... casais de coelhos com o passar dos meses.

O que vemos acima, e que foi objeto de estudo desses pensadores, é o que hoje denominamos como sequência numéricas. De maneira intuitiva, podemos dizer que uma sequência é uma lista de números escritos em uma ordem definida (Stewart; Clegg; Watson, 2023) e que as sequências são finitas quando o seu número de termos for finito ou infinitas caso contenham infinitos termos. Essa é uma ideia simplificada, de maneira rigorosa, conforme Iezzi e Hazzan (2004), podemos definir as sequências finitas como uma função $n \to a_n$, onde cada número n natural que respeite a condição $(1 \leq n \leq i)$,sendo i um natural fixo, está associado a um a_n real. Já as infinitas são “uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto dos números naturais [...] do tipo $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq q\}$, em que q é um natural fixo” (Guidorizzi, 2023, p. 1), sendo a_n o termo geral da sequência, pois representa o valor que assume no natural n, sendo esse n denominado índice.

Para Iezzi e Hazzan (2004) o principal interesse matemático em sequências numéricas se deve à propriedade que define que os termos sucessores devem obedecer a uma regra, que é conhecida como lei de formação. Eles ainda afirmam que essa lei pode aparecer de três formas: fórmula de recorrência, expressando cada termo em função da sua posição ou pela propriedade dos termos. A fórmula de recorrência é aquela onde são dadas duas regras, uma que permite identificar o primeiro termo e outra para obter cada termo seguinte a partir do anterior. Considere a seguinte sequência:

$$a_1 = 2 \; e \; a_n = a_{n-1} + 5, \forall n \in \{2,3,4,5, \cdots\}.$$

Podemos ver que, a partir do primeiro termo, podemos obter os demais termos da sequência:

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = a_{2-1} + 5 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7,$$
$$a_3 = a_{3-1} + 5 = a_2 + 5 = 7 + 5 = 12,$$
$$a_4 = a_{4-1} + 5 = a_3 + 5 = 12 + 5 = 17,$$
$$a_5 = a_{5-1} + 5 = a_4 + 5 = 17 + 5 = 22,$$
$$\vdots$$

ou seja, temos a sequência $b = \{2,7,12,17,22,\cdots\}$.

Quando expressamos cada termo de uma sequência em função da sua posição dizemos que, dada uma sequência a_n o seu termo geral irá depender apenas de n. Isso pode ser visto quando pensamos em um número que faz parte do conjunto de todas as potências positivas de 3:

$$a_n = 3^n, \forall n \in N,$$

ou seja,

$$a_1 = 3^1 = 3,$$
$$a_2 = 3^2 = 9,$$
$$a_3 = 3^3 = 27,$$
$$a_4 = 3^4 = 81,$$
$$\vdots$$

assim, temos a sequência $c = \{3,9,27,81,\cdots\}$.

Por fim, quando falamos de uma sequência em que a lei de formação se baseia na propriedade de seus termos estamos falando que cada termo pode ter uma característica específica, como ser um número primo. Por exemplo, se pensarmos em uma sequência onde cada termo é igual ao número de divisores inteiros de seu índice, teríamos:

$$D(1) = \{-1,1\} \Rightarrow a_1 = 2,$$
$$D(2) = \{-2,-1,1,2\} \Rightarrow a_2 = 4,$$
$$D(3) = \{-3,-1,1,3\} \Rightarrow a_3 = 4$$
$$D(4) = \{-4,-2,-1,1,2,4\} \Rightarrow a_4 = 6,$$
$$\vdots$$

Outro ponto importante para o estudo de sequências infinitas é estudar se o termo geral tende, se aproxima de algum número, conforme n vai assumindo valores cada vez maiores. Veja o exemplo a seguir.

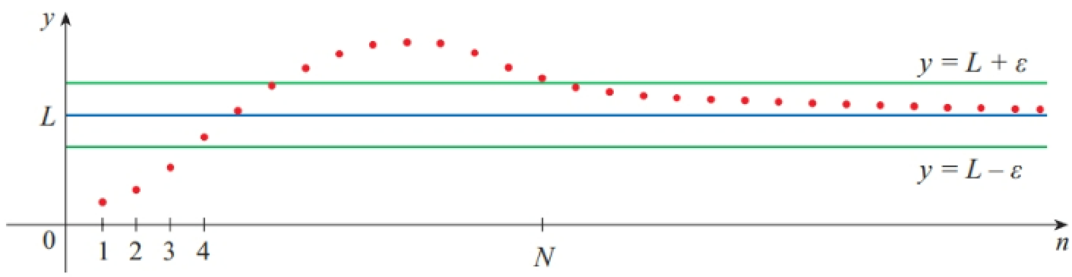
Exemplo 1: Considere a sequência cuja lei de formação é

$$a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right), \forall n \in N.$$

Ao analisarmos seus termos, podemos ver que, quanto maior é o valor de n, menor será o termo da sequência, então se tomarmos um n "muito grande" o enésimo termo dessa sequência estará próximo de zero. Em termos matemáticos, isso significa que o limite dessa sequência é zero. Dessa forma, uma noção intuitiva de limite seria dizer, para esse caso, que os termos da sequência tendem a zero quando o valor de n tende ao infinito. Nesse caso, o zero seria o limite da sequência. Para o caso geral, diz-se que o limite de a_n, quando n tende para infinito, é igual a L (Stewart; Clegg; Watson, 2023), que é representado por $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ ou simplesmente $\lim a_n = L$, pois não existe ambiguidade sobre qual limite está-se calculando quando se refere a limite de sequências infinitas.

Agora tratando com maior rigor, mas mantendo a analogia anterior, podemos expressar a proximidade entre os termos a_n e L por meio do valor absoluto entre a distância desses números, ou seja, por $|a_n - L|$. Portanto, quando dizermos que a_n está próximo de Lisso significa que o valor absoluto será sempre menor do que qualquer número positivo ε, por menor que seja, desde que o índice n seja grande o suficiente (Ávila, 2006, p.87). Assim, podemos definir que "uma sequência (a_n) tem um limite L se, dado ε > 0, é possível obter um número natural n_o tal que $|a_n - L|$< ε quando $n > n_o$. Nesse caso indica-se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ e diz-se que a sequência converge para L" (Iezzi; Hazzan, 2004, p.37). Na Figura 2 vemos como isso poderia ser representado graficamente, sendo os pontos vermelhos os termos da sequência e a reta em azul o limite para o qual ela tende. Caso a sequência possua limite, ela é denominada convergente, caso contrário é dita uma sequência divergente (Stewart; Clegg; Watson, 2023).

Figura 2: Representação Gráfica de Limite de uma Sequência



Fonte: Stewart; Clegg; Watson, 2023, p.669

Retomando o Exemplo 1, temos que de fato $\lim a_n = \lim \frac{1}{2^n} = 0$, pois dado $\varepsilon >$ 0, temos que

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Assim, escolhendo $n_0 \in N$ de modo que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (que existe, pois, o conjunto dos números naturais é ilimitado no corpo dos números reais), temos que

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_o} < \varepsilon,$$

provando o resultado pela definição de limite.

Uma classe importante de sequências divergentes são as que crescem arbitrariamente, nesse caso diz-se que seu limite é infinito e escreve-se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Formalmente, de acordo com Stewart; Clegg; Watson (2023), dizemos que o limite infinito implica que, para todo número real positivo M, irá existir um inteiro N tal que, se $n > N$, então $a_n > M$.

Exemplo 2: O limite da sequência infinita com termo geral $a_n = 2^n$ é infinito.

De fato, sabemos que $2 > 1$, logo ao multiplicar ambos os lados por 2^n teremos que $2^{n+1} > 2^n$. Agora, temos que $2 > 1 + h$, para qualquer $h \in R$ com $0 < h < 1$, então pela desigualdade de Bernoulli [1] teremos que $2^n > 1 + nh$. Assim, para que 2^n seja maior do que qualquer valor real M, basta tomarmos um número natural n, de forma que $1 + nh > M$, ou seja, $n > \frac{M-1}{h}$.

Com relação aos termos da sequência podemos dizer que se $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, ou seja, se $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, então essa sequência será crescente, se $a_n \leq a_{n+1}$ então a sequência será não-decrescente. Agora, se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, ou seja, se $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$, então essa sequência será decrescente e se $a_n \geq a_{n+1}$ ela será não-crescente. Denominamos de monótona a sequência que seja crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente (Stewart; Clegg; Watson, 2023). Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 3: A sequência do Exemplo 2, com termo geral $a_n = 2^n$, é crescente.
De fato, temos que $a_n = 2^n < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = a_{n+1}$, para todo$n \in N$.

[1] Denominada em homenagem ao matemático Jacques Bernoulli (1654-1705). A desigualdade indica que se x é um número real tal que $x \geq -1$ e n é um número natural, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (Silva, 2019).

Observando seus primeiros termos é possível perceber essa relação (apesar de precisar ser justificada para o caso geral):

$$a_1 = 2^1 = 2,$$
$$a_2 = 2^2 = 4,$$
$$a_3 = 2^3 = 8,$$
$$a_4 = 2^4 = 16,$$
$$\vdots$$

Exemplo 4: A sequência do Exemplo 1, com termo geral $a_n = \frac{1}{2^n}$, é decrescente.

De fato, temos que $a_n = \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} = a_{n+1}$, para todo$n \in N$.

Observando seus termos pode-se perceber essa relação (apesar de precisar ser justificada para o caso geral):

$$a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2},$$
$$a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$
$$a_3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$
$$a_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$
$$\vdots$$

Exemplo 5. A sequência constante é definida como $a_n = c$, para todo $n \in N$, sendo c um número real fixo. Essa sequência é simultaneamente não-decrescente e não-crescente e tal que $\lim a_n = c$ se for infinita.

De fato, temos que $a_n = c = a_{n+1}$, para todo$n \in N$.

Ainda, analisando os termos da sequência do Exemplo 1, para $a_n = \frac{1}{2^n}$, também podemos ver que, a cada iteração, os seus termos são a metade do valor do termo anterior, ou seja, os seus termos têm valores cada vez menores, observamos que os seus termos serão sempre menores ou iguais do que $\frac{1}{2}$ e maiores do que zero, isso significa que essa sequência é limitada. De maneira geral, "Uma sequência (a_n) será dita limitada quando o conjunto dos seus termos for limitado, isto é, quando existirem números reais a e b tais que $a \leq a_n \leq b$, para todo $n \in N$" (Cerqueira, 2013, p.15). A sequência pode ser limitada inferiormente quando existir $a \leq a_n$, para todo $n \in N$ e limitada superiormente quando $a_n \leq b$, para todo $n \in N$. Consequentemente, uma sequência limitada é limitada inferior e superiormente e será ilimitada caso não tenha limitante inferior ou superior.

Dessa forma, no Exemplo 3, podemos ver que os valores dos termos da sequência estão aumentando, ou seja, não há nenhum valor menor do que 2, que é o termo inicial da sequência. Assim, podemos dizer que essa sequência é limitada inferiormente. E observando o Exemplo 2, temos também que essa sequência é ilimitada superiormente. Também podemos perceber que, no Exemplo 5, os valores dos termos da sequência não aumentam nem diminuem, sendo assim dizemos que ela é limitada.

No estudo de sequências, temos alguns teoremas importantes que serão necessários para as análises que se seguirão, mas vale ressaltar que o objetivo desse trabalho não é fazer uma profunda análise no conteúdo de sequências, mas sim trazer aplicações práticas para sala de aula. Dessa forma, os teoremas serão citados sem suas demonstrações, mas caso o leitor tenha interesse, todos elas podem ser encontradas no livro Curso de Análise, volume 1, do autor Elon Lages Lima (Lima, 1992).

Teorema 1: Toda sequência convergente é limitada.

Analisando novamente os exemplos anteriores, no Exemplo 1, onde $a_n = \frac{1}{2^n}$, podemos ver que essa sequência é convergente, portanto, é limitada. O mesmo não ocorre com o Exemplo 2, $a_n = 2^n$, em que temos uma sequência não limitada, portanto divergente.

Teorema 2: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Do mesmo modo, vemos que a sequência do Exemplo 1, por ser decrescente e limitada é convergente, já a do Exemplo 2, é crescente e ilimitada, então não convergente.

Teorema 3: Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes, com $\lim a_n = L$ e $\lim b_n = M$, e seja (c_n) uma sequência divergente, então temos que:

b) a sequência $(k \cdot a_n)$ é convergente para todo $k \in R$ e $\lim(k \cdot a_n) = k \cdot L$;

ii) a sequência $(a_n \pm b_n$ é convergente e $\lim(a_n \pm b_n) = L \pm M$;

iii) a sequência $(a_n \cdot b_n$ é convergente e $\lim(a_n \cdot b_n) = L \cdot M$;

iv) se $b_n \neq 0$, para todo $n \in N$, e $M \neq 0$, então a sequência $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ é convergente e $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$;

v) a sequência (kc_n) é divergente para todo $k \in R$, $k \neq 0$;

vi) a sequência $(c_n \pm b_n$ é divergente.

Algumas sequências costumam ser estudadas no Ensino Médio, como é o caso das Progressões Aritméticas e Geométricas. Uma Progressão Aritmética (PA) "é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante r, chamada de razão da progressão." (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020, p. 123). Como por exemplo, a sequência $a_n = 3n - 1$, ou seja, $a_n = (2,5,8,11,14,\dots)$, percebemos, por indução, então que essa sequência é uma PA porque ela pode ser escrita como $a_n = a_{n-1} + 3$ para $n \geq 2$.

Progressão Geométrica (PG) é "toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante chamada de razão (q) da progressão." (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020, p.132). Por exemplo, as sequências dos Exemplos 1 e 2, que são PG's. De fato, no exemplo 1 temos que $a_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right)$,ou seja, vemos que $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$. Da mesma forma, no exemplo 2 temos que $a_n = 2^n = (2,4,8,16,32, \dots)$, o que nos leva à PG $a_n = a_{n-1} \cdot 2$.

O próximo exemplo caracteriza várias PG's e trata sobre a sua monotocidade e convergência.

Exemplo 6: Dado $q \in R$, com $q > 0$ e $q \neq 1$, a sequência infinita com termo geral $a_n = q^n$ é uma PG. Além disso, se $q \in (0,1)$, então a sequência é decrescente e limitada, logo convergente. Se $q > 1$ ela é crescente e ilimitada superiormente, portanto divergente.
De fato, se $q \in (0,1)$, então (q^n) é decrescente, pois $0 < q < 1$ e $q^n > 0$, logo,

$$0 < q < 1 \Rightarrow 0 < q^{n+1} < q^n, \forall n \in N.$$

E consequentemente também é limitada (inferiormente por zero e superiormente por 1). Portanto, pelo Teorema 2, a sequência é convergente. Na verdade, $\lim q^n = 0$, de fato, dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$|q^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow q^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \cdot ln\,(q) < ln\,(\varepsilon) \Leftrightarrow n > \frac{ln\,(\varepsilon)}{ln\,(q)}.$$

Como o conjunto dos números naturais é ilimitado no conjunto dos números reais, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $n_0 > \frac{ln\,(\varepsilon)}{ln\,(q)}$, logo

$$n > n_0 \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon.$$

Agora, para $q > 1$ teremos que (q^n) é crescente, pois

$$q > 1 \Rightarrow q^{n+1} > q^n, \forall n \in N.$$

Ainda, sendo $q > 1$, existe $h > 0$ tal que $q = 1 + h$. Então, pela desigualdade de Bernoulli temos:

$$q^n = (1 + h)^n > 1 + nh > nh.$$

Assim, dado $K \in R$, $K > 0$, temos, novamente pelo fato do conjunto dos números naturais ser ilimitado no conjunto dos números reais, que existe $n_0 \in N$ tal que $n_0 > \frac{K}{h}$, logo para todo $n > n_0$, teremos $q^n > n_0 h = K$, ou seja, a sequência é ilimitada superiormente. Portanto, pelo Teorema 2, é divergente.

Outro exemplo importante de sequência é a que soma os termos finitos de uma PG.

Exemplo 7: Dado $q \in R$, com $q > 0$ e $q \neq 1$, considere a sequência com termo geral

$$x_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}.$$

Escrevendo alguns dos termos temos:

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 1 + q,$$
$$x_3 = 1 + q + q^2,$$
$$x_4 = 1 + q + q^2 + q^3,$$
$$\vdots$$

Como essa sequência está sempre somando um termo positivo, temos que ela é crescente e consequentemente limitada inferiormente pelo seu primeiro termo $x_1 = 1$. Pelo Exemplo 6, temos que $a_n = q^n$ é uma PG, então a sequência (x_n) é a soma dos n primeiros termos da PG com razão q.

Observemos que o termo geral,

$$x_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1},$$

pode ser escrito de outra maneira. Multiplicando a expressão acima pela razão q, temos que

$$x_n \cdot q = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n.$$

Agora subtraindo essas expressões obtém-se,

$$x_n(1 - q) = 1 - q^n \Rightarrow x_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Com essa nova expressão para (x_n), com os resultados do Exemplo 6 e com o Teorema 3, tem-se que para $q \in (0,1)$ essa sequência é convergente e $\lim x_n = \frac{1}{1-q}$, enquanto para

$q > 1$ ela é divergente, pois é a diferença entre uma sequência convergente, a sequência constante $\left(\frac{1}{1-q}\right)$, e uma divergente multiplicada por uma constante não nula $\left(\frac{1}{1-q} \cdot q^n\right)$.

Com os resultados (exemplos e teoremas) dessa seção teremos condições para explorar e discutir as atividades didáticas que propomos no capítulo 6. O tema de sequências é muito mais amplo e como referência o leitor pode consultar Guidorizzi (2023), Stewart; Clegg; Watson (2023), Lima (1992) entre outros.

Na próxima seção será tratado sobre a geometria fractal que é a fonte de exemplos para as atividades que propomos.

2.2 GEOMETRIA FRACTAL

Para Boyer e Merzbach (2012) é difícil de mensurar qual foi a origem da matemática, visto que sua utilização parece ser mais antiga do que a própria escrita. Dessa forma, temos conhecimento da matemática de cerca dos últimos seis milênios e, ao longo de todo esse tempo, nenhum livro foi tão divulgado e amplamente conhecido como Os Elementos, de Euclides de Alexandria (século III a.C.).

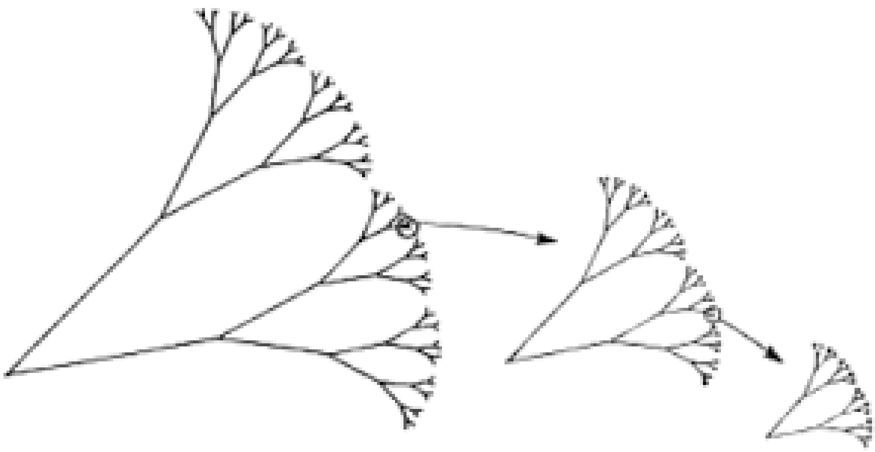
Por volta de 300 a.C. foi escrito o livro Os Elementos, um dos muitos publicados por Euclides, que conta com treze capítulos, seis sobre geometria plana elementar, três sobre teoria dos números, um sobre incomensuráveis e os demais sobre geometria espacial (Boyer e Merzbach, 2012). Esse livro serviu, ao longo dos dois milênios que se seguiram a sua publicação, como uma referência do que é considerado geometria. Por isso, que a área de estudos que vemos nas aulas de matemática é denominada Geometria Euclidiana.

Com isso, buscamos representar objetos do mundo real por meio de formas geométricas, como quadrados, triângulos e círculos. Para Lesmoir-Gordon, Rood e Edney (2014) essas formas são raramente encontradas na natureza, sendo superfícies uniformes uma exceção e não a regra. Para ele, quando os cientistas observam o mundo através da Geometria Euclidiana, eles não o estão observando de uma forma intuitiva e teriam aí um problema, problema esse que pode ser resolvido se mudarem essa perspectiva de observação.

Essa mudança de perspectiva viria na metade do século XIX, com matemáticos como Weierstrass (1815-1897) e Von Kock (1870-1924), modelando o que eram chamados inicialmente de “monstros” e que acreditavam tratar-se de formas sem grande valor científico (Valmorbida, 2018). Foi apenas na década de 1960, com o advento da computação, que esses "monstros" vieram a ter aplicações, principalmente para descrever curvas. Desse modo, por meio dos seus estudos, Benoit Mandelbrot (1924-2010) ousou pensar que essas novas formas, compostas por irregularidades, se pareciam muito mais com a natureza do que os polígonos até então utilizados, pois "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves e nem o raio se propaga em linha reta" (Mandelbrot, 1983, p. 4). Foi no seu livro "*The fractal geometry of nature*" que foi cunhado, pela primeira vez, o termo geometria fractal, sendo a palavra fractal inspirada na palavra latina *fractus*, que significa irregular ou quebrado.

Com isso, ao tentar definir um fractal o que fazemos, em geral, é descrever a sua principal característica, pois eles são formas cujas partes são semelhantes ao todo, ou seja, quando repartimos um fractal ele ainda mantém a sua forma original, seja ela um quadrado, triângulo ou círculo (Barbosa, 2005). Por ser tão relevante, essa propriedade é denominada autossimilaridade ou autossemelhança, e sua definição acaba sendo autoexplicativa pelo seu nome, mas é importante ressaltar que ela nos garante, por exemplo, que em um plano, os ângulos correspondentes são iguais, os segmentos mantêm a sua proporção e as figuras que são replicadas mantém as características do todo. A Figura 3 apresenta um exemplo de autossemelhança.

Figura 3: Autossemelhança em galhos de árvore

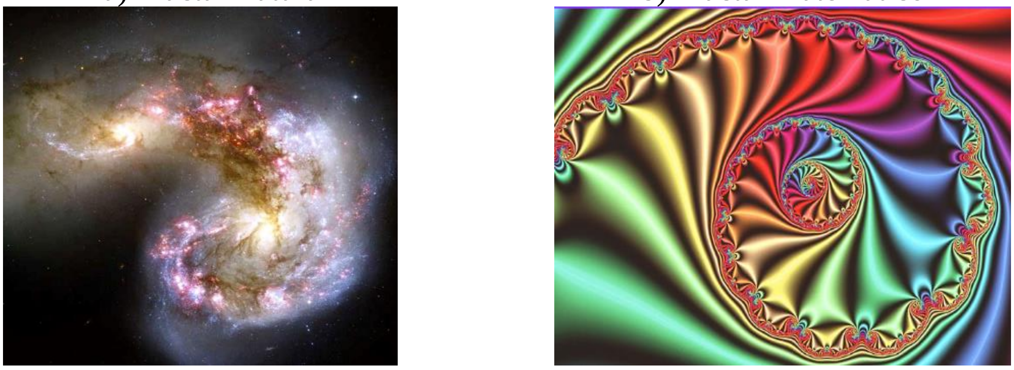


Fonte: Assis *et al*., 2008.

É importante ressaltar, porém, que essa característica só é obtida no que chamamos de fractais matemáticos, já que na natureza, aplicando o rigor matemático, isso não acontece (Valmorbida, 2018). Como podemos ver na Figura 4a, temos uma representação real de duas galáxias que estão em processo de colisão e, na Figura 4b, como seria caso essas galáxias fossem representadas por um fractal matemático.

Figura 4: Fractal gerado com a colisão de duas galáxias

a) Fractal Natural　　b) Fractal Matemático

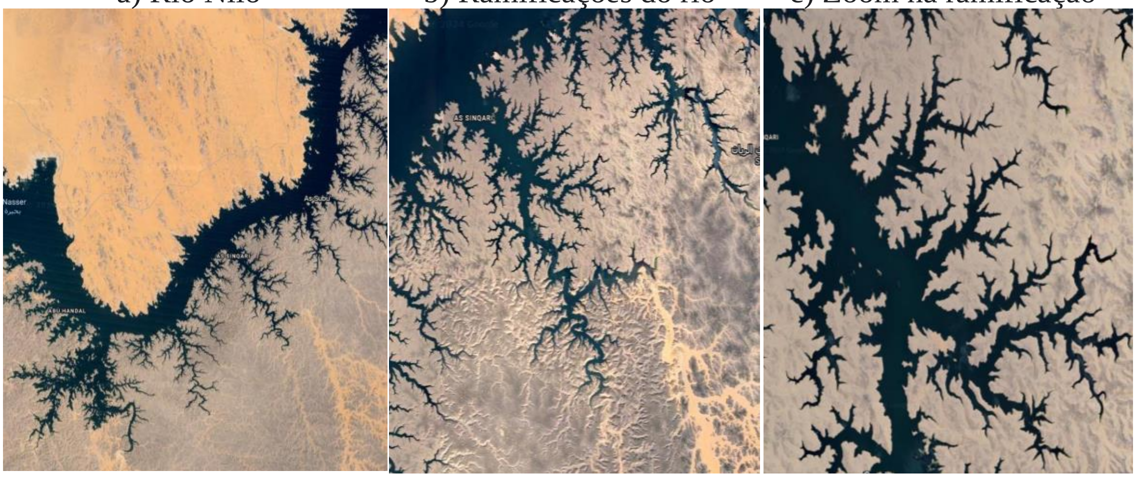


Fonte: Nasa, 2013.　　Fonte: Ventura, 2019.

Quando falamos na repetição de padrões existente em um do fractal, o que estamos tratando é do resultado de cada nova iteração ocorrido. Segundo o dicionário Oxford (2024), iteração é o “processo de resolução de uma equação mediante operações em que sucessivamente o objeto de cada uma é o resultado da que a precede”. Dessa forma, vemos que as respostas obtidas em cada iteração do processo vão gerar geometrias semelhantes à inicial, mantendo assim um padrão. Isso pode ser visto, segundo Mandelbrot (1983), ao analisarmos um litoral, como, por exemplo, na Figura 5a do rio Nilo, no Egito, pois ao olharmos os detalhes (5b) podemos ver que ao dar zoom em uma imagem, os desenhos se mantêm, mudando apenas a escala (5c), efeito que ele denomina de cascata.

Figura 5: Costa do rio Nilo

a) Rio Nilo　　b) Ramificações do rio　　c) Zoom na ramificação



Fonte: Google Maps, 2024.

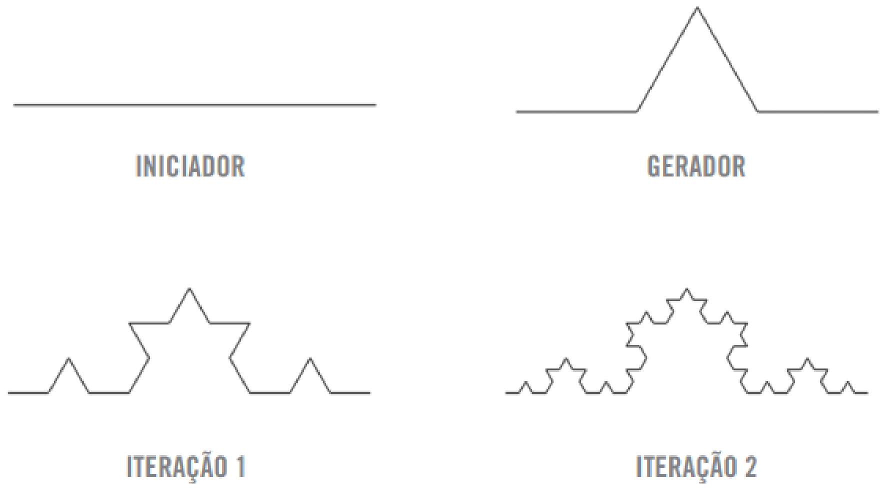
Outra propriedade importante dos fractais é a sua dimensão. As geometrias convencionais podem ser diferenciadas como unidimensional, que são as linhas, bidimensional, sendo as superfícies, e os sólidos que são tridimensionais. Existem ainda dimensões maiores, que podem ser representadas graficamente apenas por meio de projeções bi ou tridimensionais, já que não somos capazes de visualizar mais do que três dimensões. A dimensão caracterizada pela forma como o conjunto ocupa o espaço é chamada de dimensão topológica e sempre é representada por um número inteiro.

> Uma característica importante dessas dimensões é que elas não dependem nem da forma nem do tamanho da figura: uma linha é unidimensional, seja ela reta ou curva; uma superfície é bidimensional, seja ela plana, esférica ou de qualquer outra forma, e qualquer que seja a sua extensão. (Serra; Karas, 1997, p. 14).

A dimensão usada para caracterizar fractais está relacionada com o espaço que uma figura ocupa (Serra; Karas, 1997). Vejamos essa ideia com um exemplo. Na Figura 6, temos a curva de Koch, cuja construção tem início com um segmento de reta que é dividido em três outros segmentos de mesmo tamanho. A partir disso, o segmento médio é substituído por um triângulo equilátero que teve a base removida. Com isso, para as próximas iterações, o processo é repetido para cada segmento de reta. Dessa forma, a cada passo realizado é possível perceber que três segmentos são substituídos por outros quatro, ou seja, o comprimento total está sendo multiplicado por $\frac{4}{3}$ a cada iteração. Sabendo que o limite de uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$ é infinito (como visto no Exemplo 6), temos que o comprimento da figura final para qual a sucessão tende será infinito (Assis *et al.*, 2008).

Tendo então uma curva complexa como essa, que possui um número infinito de passos, podemos dizer que, devido a essa infinidade de detalhes, ela “ocupa mais espaço” do que uma linha tradicional, portanto deve ter uma dimensão maior do que um, mas também não é o suficiente para ser considerada de dimensão dois. Dessa forma, a dimensão fractal “é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém.” (Assis *et al.*, 2008 p. 1). Para Mandelbrot (1983), dimensão D de um fractal é maior do que a sua dimensão euclidiana e menor do que a dimensão euclidiana do espaço em que ele está inserido. Assim, a curva de Koch é um fractal de dimensão euclidiana um e está contida no plano, que tem dimensão dois, logo, sua dimensão é um número fracionário entre 1 e 2.

Figura 6: Fractal curva de Koch



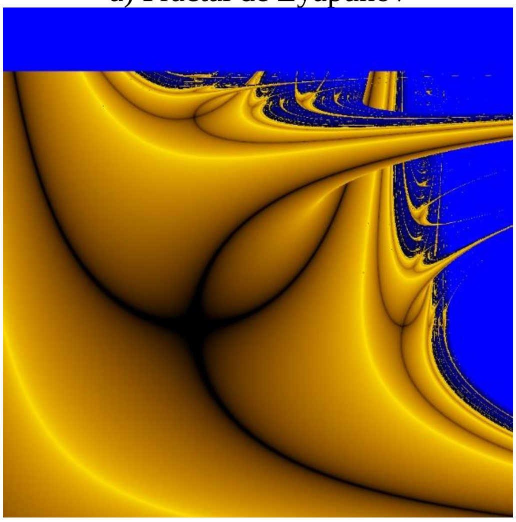
Fonte: Sedrez, 2012.

Existe uma fórmula para calcular a dimensão dos fractais, mas isso excede o propósito deste texto. O leitor interessado em tal fórmula pode consultar Assis *et al*. (2008), Serra e Karas (1997), Mandelbrot (1983), entre outros.

Sendo assim, podemos dizer que as principais propriedades dos fractais são a autossimilaridade, a capacidade de iteração e a sua dimensão, que se comporta de forma diferente da dimensão euclidiana. Essas são as características dos fractais mais conhecidos, mas existem outros tipos de fractais. Os que se assemelham aos que vimos acima são denominados fractais de iteração, pois a cada nova iteração existe uma regra fixa de substituição. Os fractais de relação de recorrência, como o fractal de Lyapunov (Figura 7a) e, por fim os fractais aleatórios, que são gerados por processos estocásticos, como o fractal do voo de Lévy (Figura 7b) (Mandelbrot, 1998).

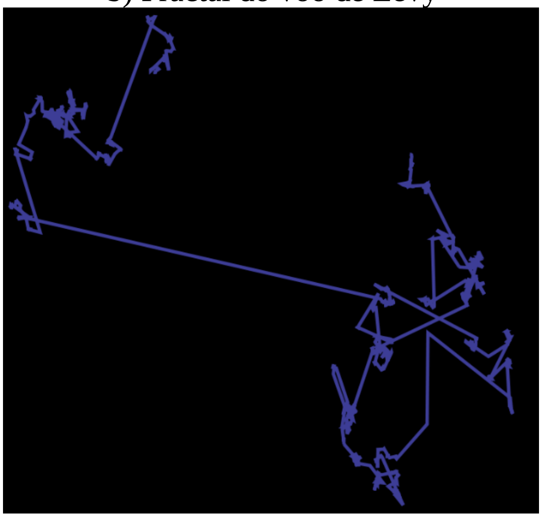
Figura 7: Outros fractais

a) Fractal de Lyapunov



Fonte: Github, 2020.

b) Fractal do voo de Lévy



Fonte: Gala, 2024.

Com isso, podemos utilizar fractais para trabalhar diferentes aspectos da matemática em sala de aula. Assim, bem como Dante e Viana (2021) trazem em seus livros, Barbosa (2005) defende o uso da Geometria Fractal em sala de aula, pois segundo ele por meio dos fractais é possível fazer relação com diversas outras ciências, tratar do belo e do artístico em conjunto com a matemática e sanar as lacunas deixadas pela Geometria Euclidiana, principalmente quando pensamos em questões voltadas para a natureza.

No próximo capítulo iremos abordar a metodologia aplicada nesse trabalho. Para isso, falaremos sobre o que é uma pesquisa com abordagem qualitativa e apresentaremos a definição de levantamento de literatura.

3 METODOLOGIA

A metodologia desse trabalho caracteriza-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, pois “o ambiente natural é fonte direta para coleta de dados, interpretação de fenômenos e atribuição de significados” (Prodanov; Freitas, 2013, p.128). Inicialmente fizemos um levantamento de literatura que “é um apanhado geral sobre os principais documentos e trabalhos realizados a respeito do tema escolhido, abordados anteriormente por outros pesquisadores para a obtenção de dados para a pesquisa” (Prodanov; Freitas, 2013, p. 80). Essa pesquisa foi dividida em várias etapas, sendo elas: dois momentos de busca em banco de dados por trabalhos correlatos; análise da BNCC do Ensino Fundamental e Médio; análise de livros didáticos do Ensino Básico ao Ensino Superior; e elaboração da sequência de atividades.

As pesquisas nos bancos de dados por trabalhos correlatos foram realizadas no portal de periódicos da CAPES e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Num primeiro momento, foi visto o que já havia sido produzido na academia a respeito do ensino de sequências numéricas, para num segundo momento, analisar se a Geometria Fractal estava sendo utilizada no ensino de sequências.

No primeiro momento a pesquisa em ambos os bancos de dados utilizou como palavra-chave “sequências numéricas” e foi realizada em outubro de 2023. Os critérios de inclusão utilizados foram que os artigos e dissertações trouxessem uma revisão bibliográfica sobre sequências numéricas ou aplicações com diferentes metodologias para serem implementadas em sala de aula.

No portal da Capes foram aplicados os filtros de data de 2010 até 2023, pois buscou-se obter resultados mais recentes. e de periódicos revisados por pares, sendo no total encontrados cento e três artigos, dos quais oito foram selecionados a partir da leitura do título e do resumo, porém desses oito, três não foram encontrados, pois os links disponibilizados não eram compatíveis com o artigo apresentado ou não eram mais válidos. Ainda foi feita a busca por esses artigos nas revistas nas quais eles foram publicados, mas os sites não possuíam uma ferramenta de busca que permitisse, a partir do volume, encontrar o artigo desejado. Com relação a BDTD foi aplicado o filtro “Matemática - Estudo e ensino” que gerou 35 resultados, dos quais três dissertações foram selecionadas com os mesmos critérios de leitura para saber se havia relação com o tema dessa pesquisa.

No segundo momento, em março de 2024, foi feito um novo levantamento nas bibliotecas virtuais da Capes e da BDTD, agora com o uso do descritor “sequência numérica e fractal”. Na Capes a busca retornou quatro resultados, sendo dois deles iguais e um com erro na editoração das fórmulas matemáticas, tendo muitos termos sobrepostos, tornando incompreensível a identificação do que ele propõe, então na prática restaram apenas dois resultados, sendo um já analisado anteriormente a partir da primeira busca. Na BDTD foram obtidos vinte e um resultados, dos quais três falavam sobre o uso de fractais na educação.

Com relação aos livros didáticos, a escolha foi pautada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com o foco de que fosse analisado o material de um mesmo autor sobre as sequências numéricas ao longo do Ensino Fundamental e Médio, a fim de perceber como ele iria discorrer sobre esse conteúdo. O autor escolhido foi José Ruy Giovanni Júnior, que é graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP) e trabalha como autor de livros didáticos desde 1990, na editora FDT. As coleções de livros analisadas foram “A Conquista da Matemática” para Ensino Fundamental I e II e “Prisma” para o Ensino Médio, ambas publicadas pela editora FDT, entre os anos de 2018 e 2020, dessa forma elas estão atualizadas com a BNCC e com o Programa Nacional do Livro Didático (PNDL).

Seguindo o mesmo critério, o autor Luiz Roberto Dante também foi escolhido. Ele é graduado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Mestre em Matemática pela USP e Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Desde o final da década de 1980 trabalha como livre docente na UNESP e, em 2010, iniciou com a publicação de livros didáticos, que hoje compõem 3 coleções, a Ápis, para os anos iniciais do Ensino Fundamental, a Teláris para os anos finais e a Matemática Contexto e Aplicações para o Ensino Médio, todas publicadas pela editora Ática.

Da mesma forma, foi escolhida a autora Thais Marcelle Andrade. Ela é formada em Licenciatura em Matemática, especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), tendo atuado como professora no Ensino Fundamental em redes públicas e privadas de ensino. Ela é autora da coleção de livros para Ensino Fundamental Anos Iniciais “Criança Vida” e para os anos finais “Jornada Novos Caminhos”, ambos da editora Saraiva e, para Ensino Médio “Matemática Interligada” da editora Scipione.

Para analisar o conteúdo de sequências numéricas previsto no curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), do Centro de Ciência e Tecnologias (CCT) de Joinville, foram analisados o Projeto do Curso e as Ementas das disciplinas de Análise Real (ARE) e Cálculo Diferencial e Integral II (CDI II). A partir das Ementas foi possível obter uma série de referências de livros utilizados na bibliografia de cada curso e os escolhidos para a análise foram aqueles que, baseado em as minhas experiências pessoais e conversas com demais acadêmicos ao decorrer do curso, com mais frequência são utilizados nas aulas de ARE ou CDI II e que tratavam de alguma forma o tema de sequências, sendo eles Stewart; Clegg; Watson (2023), Guidorizzi (2023) e Lima (1992).

A partir da análise do levantamento de literatura e dos livros didáticos foi dado início à elaboração das atividades didáticas. Com o intuito de inserir materiais manipuláveis e aplicativos dinâmicos foi realizada uma pesquisa de materiais disponíveis na comunidade do GeoGebra. Nessa busca foram usadas as palavras “fractal”, “Sierpinski” e “Menger” (a busca no GeoGebra não mostra o número de objetos de aprendizagem relacionados), os resultados obtidos foram analisados e escolhidos alguns aplicativos para serem feitas adaptações com o objetivo de serem usados na sequência de atividades.

A fim de sintetizar os dados mencionados acima, foi construído o Quadro 1.

Quadro 1: Resultado da revisão nos bancos de dados

Buscas	Acervo Capes	BDTD
Busca 1	103 resultados → 8 selecionados	35 resultados → 3 selecionados
Busca 2	4 resultados → 1 selecionado	21 resultados → 3 selecionados

Fonte: Autora, 2024

Todas essas análises resultaram na elaboração de uma proposta de atividade didática, com o propósito de auxiliar o professor no ensino de sequências numéricas, a partir de exemplos práticos da geometria fractal. Essa proposta foi pensada para três diferentes modelos de fractais: o Triângulo e o Tapete de Sierpinski e a Árvore de Pitágoras. Uma aplicação teste foi realizada na disciplina de Laboratório do Ensino de Matemática IV, mas a análise e discussão desses resultados não constam nesse trabalho, apenas algumas reflexões importantes que vieram com a aplicação.

No seguinte capítulo abordamos brevemente os materiais manipuláveis, os quais propomos usar como elemento facilitador e motivador para a aprendizagem de sequências numéricas.

4 MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Nesse capítulo iremos abordar materiais manipuláveis, que são aqueles que o estudante pode sentir, movimentar ou tocar (Matos; Serrazina, 1996). Para Lorenzato (2009) qualquer material que possa vir a ser útil nos processos de ensino e de aprendizagem é considerado um material didático, como um giz ou um livro. Dessa forma, para o autor, quando pensamos em um material didático manipulável podemos pensar em dois tipos de materiais: os estáticos e os dinâmicos. Os estáticos são aqueles que não possibilitam modificações, sendo mais voltados para visualizações em 3D, já os dinâmicos permitem que transformações sejam feitas pelos alunos.

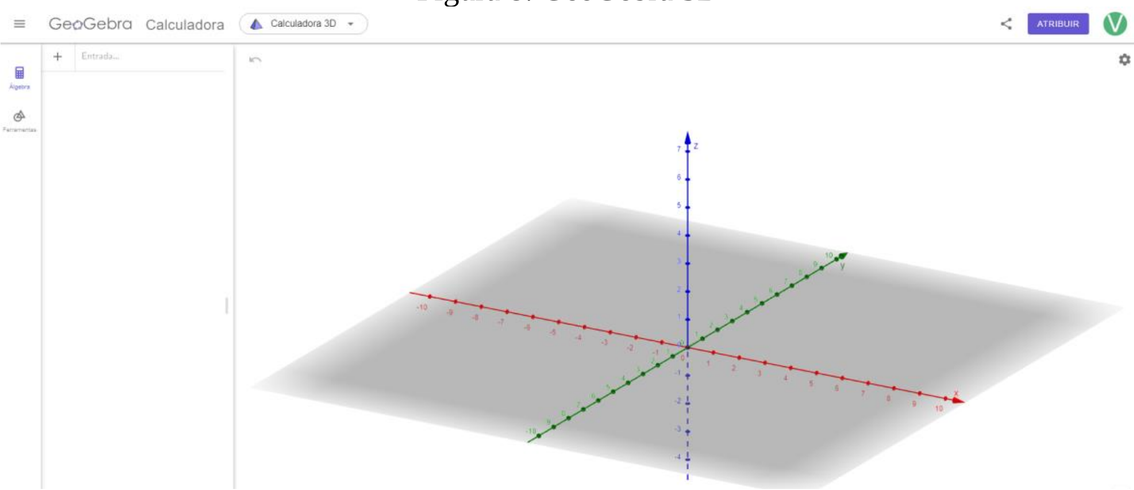
Outra função importante desses materiais é a capacidade de tornar concreta uma ideia abstrata. Para Montessori (2017), essa é uma potencialidade ao se trabalhar com crianças que ainda estão aprendendo a abstrair. Ela afirma que “o material revela à inteligência caminhos que, sem ele, seriam inacessíveis nessa idade” (Montessori, 2017, p.183). Isso vai ao encontro do que diz Lorenzato (2009) quando afirma que o material sozinho não é a garantia de um bom ensino, pois ele deve ser bem empregado por meio de um planejamento docente que estimule a atividade mental dos alunos.

Voltando o olhar para um dos principais documentos que norteiam a educação no país, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nela há indicações do uso de materiais manipuláveis para o ensino de matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Por exemplo, a habilidade EF01MA07 indica que o aluno deve “compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo” (Brasil, 2018). Isso ocorre até o quarto ano, onde é citado diretamente o uso de materiais manipuláveis para problemas de agrupamento. A partir do quinto ano os alunos são instigados a utilizar, além dos materiais concretos, também materiais digitais, como forma de motivar os alunos em sala de aula.

Nos primeiros tópicos da BNCC, ao falar sobre os direitos de aprendizagem na Educação Infantil, é abordada a questão de explorar tecnologias e uma das competências específicas a ser desenvolvida no Ensino Fundamental é utilizar ferramentas e processos matemáticos, podendo ser uma tecnologia digital, para resolver e modelar problemas do dia a dia em diferentes áreas do conhecimento. Dessa forma, pode-se ver que o foco do material manipulável sai do concreto para o mundo digital, trazendo para sala de aula softwares e/ou aplicativos que auxiliem o professor. Entretanto, Borba, Silva e Gadanibis (2018) recordam que é importante que ocorra uma adaptação para aplicação de atividades digitais, de forma a explorar ao máximo esses recursos, com foco pedagógico e que realmente seja algo que acrescente na formação do estudante.

Um dos mais conhecidos softwares da área da Educação Matemática é o GeoGebra (Figura 8), pois além de disponibilizar calculadoras 2D e 3D para a construção de formas geométricas ele também conta com recursos da comunidade, onde professores do mundo todo podem criar objetos de aprendizagem e deixá-los disponíveis para que outros educadores apliquem em suas salas de aula. O software foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter e consolidou seu espaço entre professores e acadêmicos por ser uma plataforma dinâmica que pode ser utilizada em todos os níveis de ensino e permite a combinação de grandes áreas da matemática, como geometria, álgebra, estatística e cálculo (Borba; Silva; Gadanibis, 2018).

Figura 8: GeoGebra 3D



Fonte: Autora, 2024.

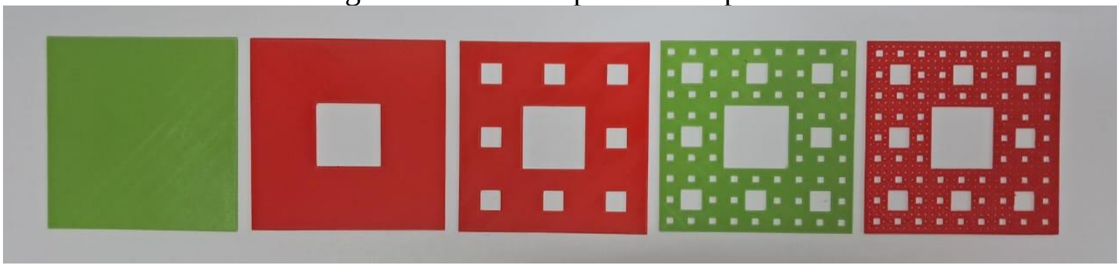
Uma das finalidades do GeoGebra, segundo Alves (2012), é complementar as situações de ensino, proporcionando resoluções de atividades investigativas que não seriam viáveis em um contexto de ensino limitado ao uso de lápis e papel. Isso porque, para Oliveira *et al.* (2021), as aulas tradicionais se apoiam em técnicas de reprodução que, em muitos casos, é desprovida de significado para os alunos. Nesse sentido, o GeoGebra, por meio das suas ferramentas, contribui para que o aluno compreenda conceitos e propriedades e desenvolva uma compreensão global desses temas (Carlos, 2017). Isso acontece porque o software conta com diferentes registros de representação de um mesmo objeto, segundo Carlos (2017) e isso é benéfico justamente porque, por exemplo, ao digitar no Campo de Entrada a equação de uma circunferência o retorno dado será a representação geométrica dessa circunferência, permitindo que o aluno relacione a questão algébrica com a geométrica.

4.1 MATERIAIS PARA A PROPOSTA DE APLICAÇÃO

Com o propósito de ensinar o conteúdo de sequências numéricas a partir da geometria fractal foram desenvolvidos materiais manipuláveis, tanto estáticos quanto dinâmicos. Vamos falar um pouco sobre eles e sobre o processo de construção que levou aos materiais utilizados na proposta.

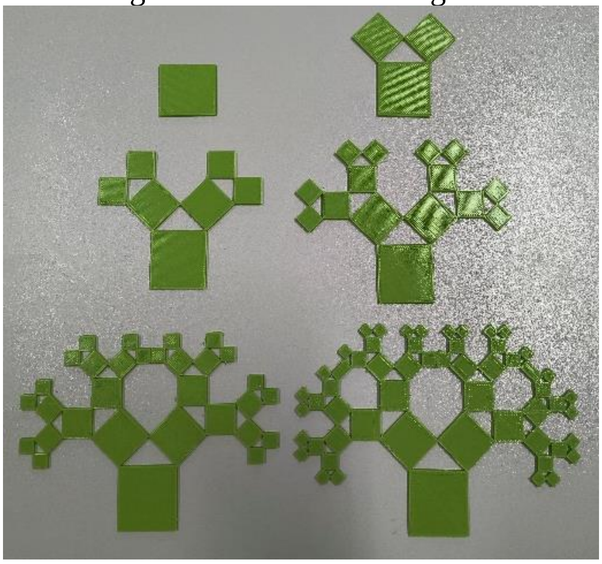
A fim de proporcionar a visualização de conceitos abstratos para o concreto, desenvolvemos três modelos finitos de fractais, e algumas de suas iterações, com apoio de tecnologia de impressão 3D. Nas Figuras 9, 10 e 11 podemos ver um exemplo do Triângulo e Tapete de Sierpinski, respectivamente, e da Árvore de Pitágoras. Vale informar que, para esses materiais concretos, o número de iterações fica limitado à resolução da máquina de impressão 3D.

Figura 9: Fractal Tapete de Sierpinski



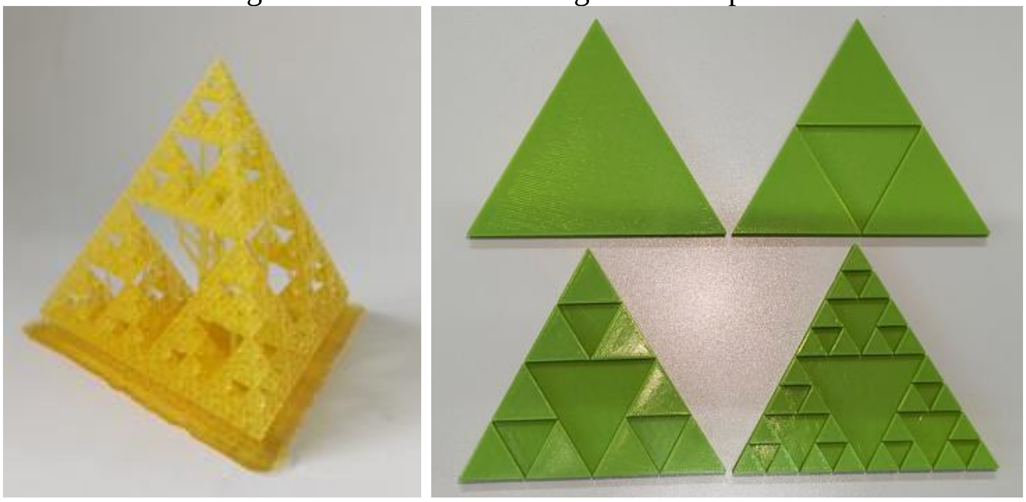
Fonte: Acervo do FAB3D, 2024.

Figura 10: Árvore de Pitágoras



Fonte: Acervo do FAB3D, 2024.

Figura 11: Tetraedro e triângulo de Sierpinski

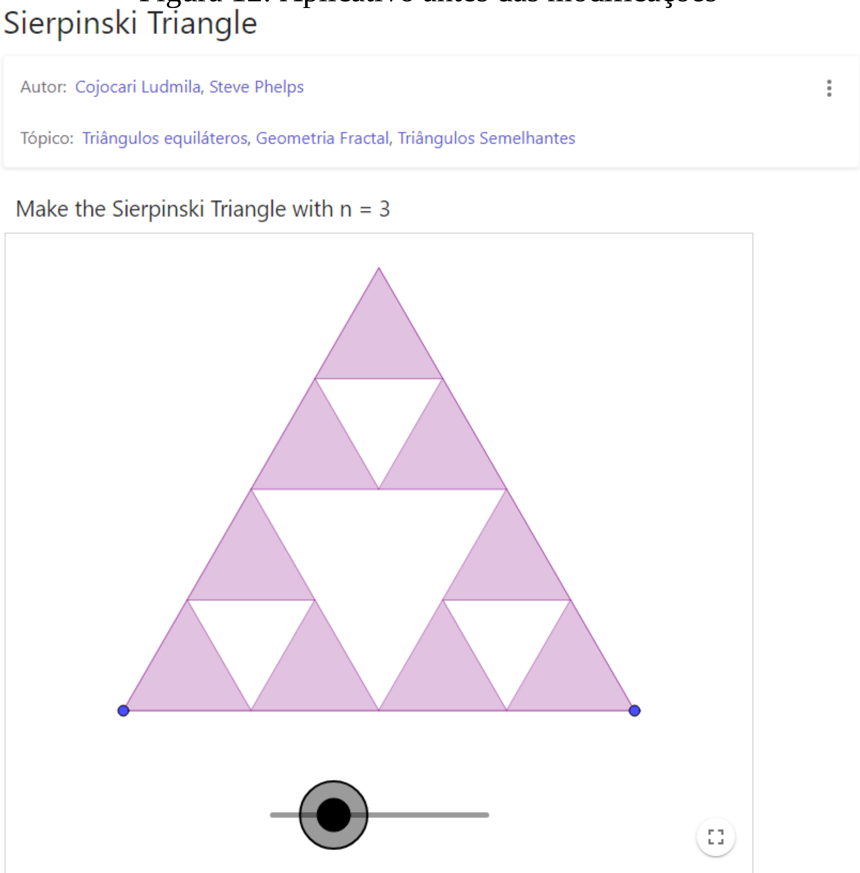


Fonte: Acervo do FAB3D, 2024.

Com relação aos materiais dinâmicos, os mesmos fractais que foram confeccionados com a impressora 3D também possuem uma versão digital no software GeoGebra. O processo de criação das atividades iniciou com uma pesquisa na biblioteca do GeoGebra, que foi feita a partir do nome de cada fractal. A ferramenta de pesquisa e seleção do site não apresenta o número de resultados obtidos qualquer possibilidade de algum tipo de filtro, como por data, então a seleção foi feita manualmente, abrindo cada arquivo e avaliando se seria ou não interessante para os objetivos desse trabalho. Por fim, três aplicativos foram selecionados e, a partir da sua concepção inicial, foram feitas alterações, visando torná-los mais completos para auxiliar os alunos a conferirem suas respostas. Na Figura 12 temos o aplicativo do triângulo de Sierpinski antes das modificações.

De maneira geral, os aplicativos que encontramos na comunidade do GeoGebra eram apenas contemplativas, sem nenhuma outra função além de observar as modificações ocorridas a cada iteração. Para a aplicação foram adicionados nos aplicativos dos três fractais, campos onde o usuário consegue ver, variando de acordo com as iterações e a medida do lado escolhido para a forma geométrica inicial, o número de formas geométricas criadas, o perímetro e a área de cada uma, como podemos ver na Figura 13, para o triângulo de Sierpinski. Isso foi feito para que, à medida que os alunos forem respondendo às perguntas das atividades, possam utilizar o software para verificação dos cálculos.

Figura 12: Aplicativo antes das modificações



Fonte: Ludmila, Phelps, 2024[2].

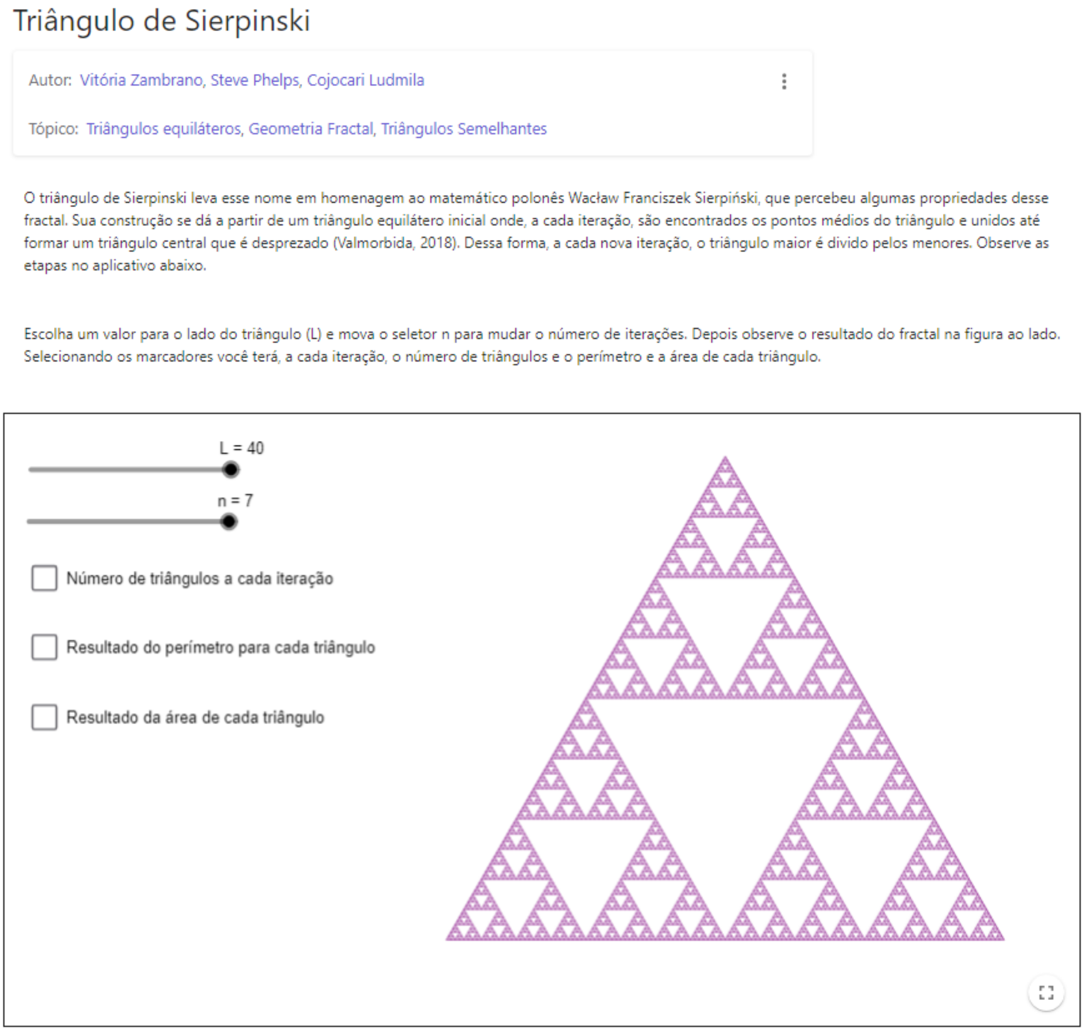
Espera-se que esses materiais auxiliem nos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas. Uma possibilidade para o futuro seria complementar o material disponível no GeoGebra, tornando públicas as perguntas que são feitas na proposta apresentada no capítulo 6, fazendo com que essas atividades possam ser utilizadas por outros professores que usam materiais da comunidade do GeoGebra.

A partir das construções dos fractais no aplicativo do GeoGebra podemos entender melhor o que Carlos (2017) diz quando afirma que ele possibilita mais formas de representação para que alunos visualizem um mesmo conceito. Assim, a proposta desenvolvida se baseou em tal potencialidade, trazendo uma descrição de como gerar os fractais, um material concreto com algumas iterações e um aplicativo no GeoGebra com uma representação digital que permite maior dinamicidade e mobilidade na sala de aula.

---

2 Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yksp78cm>.

Figura 13: Aplicativo depois das adaptações



Fonte: Zambrano, Ludmila, Phelps, 2024[3].

[3] Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/w6czmu8m>.

5 ANÁLISE DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA E DE LIVROS DIDÁTICOS

A fim de compreender como o tema de sequências numéricas é estudado pelos alunos ao longo da Educação Básica e, também, verificar qual a produção existente a respeito do ensino de sequências numéricas, foi realizado um levantamento de bibliografia. Esse capítulo será separado em tópicos que irão se aprofundar em cada um desses diferentes momentos da pesquisa.

5.1 ANÁLISE DE ARTIGOS E DISSERTAÇÕES

O capítulo 3 descreveu como foram realizadas as pesquisas que levaram aos materiais que serão analisados. Cada texto a seguir foi lido de maneira integral e pontos relevantes como seus objetivos, a sua metodologia e os resultados serão detalhados ao longo desse documento.

Iniciando pelos artigos encontrados na primeira pesquisa no portal de periódicos da CAPES, o primeiro é de Thaís Regina Miranda Martins, com o título “Perspectivas da avaliação formativa e o estudo de sequências numéricas” e foi publicado pela revista “Com a Palavra o Professor” (Martins, 2019). O objetivo do artigo era discutir o tema de sequências para contribuir com futuras pesquisas a esse respeito. Para tanto, a metodologia aplicada pela autora foi a de levantamento de literatura, por meio da qual ela selecionou seis dissertações disponíveis no Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) que tinham relação com os temas estudados. A partir da leitura desses textos ela identificou a necessidade de desenvolver atividades com os alunos que promovam o estudo de sequências numéricas, para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico e intelectual dos estudantes. Assim, a autora indica algumas propostas de aprendizagem do Caderno do Professor, material disponibilizado pelo do programa São Paulo Faz Escola, da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

O segundo artigo foi publicado na Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo e se intitula “Sequências e Conjecturas com o GeoGebra”, de Crispiniano de Jesus Gomes Furtado (Furtado, 2018). Com o objetivo de explorar recursos do software GeoGebra, o texto se divide em duas seções, a primeira apresenta a implementação de três atividades práticas com o uso do GeoGebra no estudo de sequências, onde é feito uma avaliação técnica preliminar e são descritas as sequências de Collatz e de Fibonacci. Já a segunda seção analisa a opinião dos alunos e professores após a realização das atividades.

Conforme os resultados obtidos, pode-se notar que todos os participantes avaliaram o GeoGebra como uma boa ferramenta para o estudo de sequências e a maioria gostou das atividades realizadas. O texto inclusive indica outras propostas que poderiam dar continuidade às tarefas idealizadas pelo autor.

O terceiro artigo, “O software GeoGebra como aporte para o Ensino de Matemática e aplicação em sequências numéricas”, é de autoria de Oliveira *et al.* (2021). Também publicado na Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, é descrito como um estudo exploratório de cunho qualitativo com o foco no uso de tecnologias em metodologias ativas para o ensino sequências, em específico o uso do software GeoGebra, e como isso pode ter um caráter modificador no âmbito do ensino. Para isso, o artigo aborda dois problemas sobre sequências numéricas e explica de forma detalhada as suas resoluções, justificando que essa “situação didática oportuniza o desenvolvimento de um raciocínio inferencial partindo de um pensamento intuitivo” (Oliveira *et al.*, 2021). Dessa forma, os autores concluem que as atividades propostas no texto podem instigar nos alunos um comportamento mais ativo, visto que a interação com o software visa internalizar conceitos e verificar as relações existentes entre as sequências e os objetos de estudo.

Os dois últimos artigos dessa pesquisa inicial, selecionados no portal de periódicos da Capes, trazem uma abordagem com o foco em interligar os assuntos de sequências numéricas e fractais, que vem ao encontro da nossa proposta de pesquisa. O artigo “Sequências Numéricas e Fractais: Uma Conexão Possível”, de José Carlos Pinto Leivas e Bárbara Regina da Silveira Batista (Leivas; Batista, 2020), publicado pela revista Poésis, é um recorte de uma pesquisa de mestrado, com cunho qualitativo e cujo objetivo foi observar as influências do uso de fractais para licenciandos em matemática que eram introduzidos ao conteúdo de sequências. Para isso, foram realizadas atividades com três professores de matemática de uma instituição de Ensino Superior privada. A primeira atividade era um questionário de caráter diagnóstico para dar início a construção do Floco de Neve de Koch a partir das orientações dadas pelos autores. Após, os participantes deveriam preencher uma ficha com algumas questões sobre o tema que levariam à lei de formação de uma sequência. Com isso, Leivas e Batista (2020) concluem que a utilização de fractais possibilitou a revisão de diversos conteúdos e expandiu o pensamento dos futuros professores sobre a utilização desses recursos em sala de aula.

O artigo “A Geometria dos Fractais no ensino de Progressões Geométricas” tem uma temática semelhante, mas voltada para o Ensino Médio. Publicado pela Scientia Cum

Industria, por Morgana Bozza, Laurete Zanol Sauer e Valquíria Villas Boas Gomes Missell, o artigo apresenta os resultados da aplicação de atividades que relacionam fractais e progressões geométricas, em forma de oficina, com uso do software GeoGebra como aporte tecnológico (Bozza; Sauer; Missel, 2016). A oficina iniciou com uma breve explicação a respeito da metodologia ativa, Aprendizagem por Questionamento, para indicar aos participantes que desenvolveriam as atividades de uma forma diferente da usual, esperando que fossem eles mais ativos no processo de aprender um novo conteúdo. Na sequência, os participantes assistiram um vídeo introdutório sobre fractais e, com o auxílio de um roteiro de perguntas, os pesquisadores mediaram um debate a respeito dos temas apresentados no vídeo. Depois, os alunos foram separados em grupos para a prática de criação de um fractal a partir da dobradura de um papel. Assim, os alunos deveriam ser capazes de relacionar o fractal com progressões geométricas chegando a uma formalização do conceito, para então dar início a outra atividade, referente à construção da curva de Koch no papel e depois, no GeoGebra, a do Floco de Neve de Koch. Após, os alunos tiveram um tempo para pesquisar outros fractais e a oficina se encerrou com a realização de questões de vestibulares. Dentre os resultados, os alunos apontaram que a utilização da metodologia ativa permitiu que eles fossem mais ativos no processo de aprendizagem e aprendessem novas estratégias de estudo.

Partindo para as análises de dissertações, a primeira analisada foi “Um estudo sobre séries e sequências” da pesquisadora Ana Cecília Sanches Cerqueira (Cerqueira, 2013). Ele apresenta a teoria de sequências e séries numéricas, bem como propõe atividades para professores do Ensino Médio a respeito do tema. Para isso, o texto é dividido em três partes principais. Na primeira ele define sequências, na segunda séries e na terceira ela apresenta o que estava sendo abordado no Ensino Médio e sugestões de aplicações para o professor. A parte inicial é um bom material para os alunos utilizarem em estudos complementares, pois ela apresenta de forma sucinta e direta as definições e demonstrações a respeito de sequências e séries, como sequências de Cauchy e critérios de convergência de uma série, como também traz exemplos e exercícios com a aplicação de sequências.

Na terceira seção a autora traz algumas propostas pedagógicas sobre o tema de Progressões Aritméticas e Geométricas a partir de problemas contextualizados ou lúdicos. A primeira aborda o tema de matemática financeira e tem por objetivo, a partir de definições já estabelecidas sobre progressões aritméticas, discutir o conceito de juros simples. Já a segunda é sobre o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, que tem como propósito introduzir o conceito intuitivo de limite de uma sequência. A terceira é sobre a Lenda da Criação do Xadrez, que apresenta aos alunos o crescimento exponencial de uma progressão geométrica. Com o objetivo de mostrar que funções senos e cossenos podem ser limites de certas somas infinitas é proposta uma atividade de Tabela de Senos e Cossenos. Por fim, a atividade Número de Euler busca apresentar esse número como limite de uma série, como alternativa à definição padrão dada por livros didáticos, que expressam o número como a base do logaritmo natural. Dessa maneira, a dissertação cumpre os objetivos que propostos ao tratar do tema de sequências e séries numéricas e apresentar propostas de atividades didáticas. O texto não indica se alguma das atividades propostas foi implementada.

A segunda dissertação, "Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência: episódios de resolução de tarefas" de Nélvia Santos Ramos (Ramos, 2017), tem por objetivo discutir como a organização de tarefas propostas pelos livros didáticos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) podem ser adaptadas de forma que contribuam para a aprendizagem dos alunos. A autora se respalda em outras pesquisas para defender uma reestruturação do curso de CDI que, por meio da resolução de tarefas, teria início em sequências para construir noções intuitivas de derivadas, a partir do estudo de sequências às diferenças, e a aplicação de somas parciais para desenvolver uma noção intuitiva de integral, visto que os alunos ingressam no Ensino Superior com uma visão discreta da matemática e isso pode acarretar dificuldades de aprendizagem em CDI. Dessa forma, a resolução de tarefas busca auxiliar o aluno na construção do seu conhecimento, visto que a autora cita que os professores da disciplina relatam que os alunos costumam memorizar métodos de resolução ao invés de entender os conceitos aplicados nos exercícios.

A dissertação tem como metodologia a *Design Research* e a resolução de tarefas como ferramenta para alcançar seus objetivos. As tarefas propostas não eram imutáveis, ou seja, se o professor percebesse que o resultado que buscava não havia sido obtido, novas tarefas poderiam surgir ou a que havia sido aplicada poderia ser alterada para novas aplicações. Inicialmente são propostas quatro tarefas, que ao longo da aplicação sofreram desdobramentos e geraram outras duas subtarefas. Na primeira tarefa os alunos deveriam analisar qual agência de publicidade traria mais consumidores para a sua empresa. O objetivo era que os alunos pudessem perceber o crescimento de cada empresa como uma progressão aritmética, uma geométrica e uma estável, para assim chegar ao conceito de convergência de sequência. A segunda tarefa era composta por questões a respeito de diferentes sequências para que, por meio das discussões e resoluções das questões, os estudantes pudessem debater sobre crescimento, decrescimento, alternância, sequência limitada e subsequências. Dessa tarefa surgiu uma tarefa intermediária com o foco auxiliar no entendimento dos alunos a respeito das questões sobre os comportamentos das sequências. A terceira tarefa foi elaborada a partir dos resultados obtidos pelas anteriores para estudar a unicidade do limite, análise de convergência e o estudo de subsequências por meio do uso do software GeoGebra para observar o comportamento de sequências para valores de n muito altos. Com base nisso, outra tarefa intermediária surgiu, para discutir os critérios de convergência de sequências. Por fim, a quarta tarefa buscou formalizar os conceitos previamente debatidos com questões sobre construção de sequências e verificação da sua convergência com o uso de tiras de papel.

Os dados obtidos foram coletados através da realização das atividades pelos alunos e dos debates promovidos pela autora ao longo das aulas, para compartilhamento de métodos usados ao longo da resolução das tarefas e tentativa coletiva de chegar em conceitos mais formais. A pesquisadora afirma que, após as aplicações, os professores de CDI notaram uma mudança de atitude por parte dos alunos com relação à maneira que viam o conteúdo, pois eles não esperavam que os conceitos e demonstrações lhes fossem apresentados para realizar as atividades, mas sim se tornaram participantes ativos ao longo das aulas para desenvolver os conceitos. Com esses resultados, a ementa do curso de CDI da universidade foi alterada, pois se percebeu uma melhora significativa com essa nova abordagem.

A última dissertação analisada foi escrita por Geovane Pereira do Nascimento e se intitula “Progressões Aritméticas, Geométricas, Harmônicas: Aplicações e Propostas de Atividades” (Nascimento, 2017). O texto tem por objetivo averiguar qual a contribuição da metodologia de resolução de problemas no ensino de progressões e quais as motivações dos alunos para aprender esse conteúdo por meio dessa metodologia. Após uma apresentação das definições, demonstrações e propriedades de progressões aritméticas, o texto descreve uma proposta didática que foi implementada em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Para isso, primeiro foi realizada uma etapa de diagnóstico acerca dos conhecimentos prévios da turma e, em seguida, os alunos foram divididos em grupos de quatro a cinco estudantes para resolver cinco problemas que tinham como objetivo auxiliá-los a desenvolver o raciocínio lógico e suas habilidades algébricas.

De maneira semelhante, o autor apresenta os conceitos e definições de progressões geométricas para depois sugerir uma aplicação na mesma turma, porém dessa vez a ideia era trabalhar com dobradura de papel para chegar em uma sequência. Na discussão foi destacado que os alunos utilizaram métodos diferentes para chegar no mesmo resultado e, ao debater isso com a turma, gerou-se uma série de questionamentos sobre a unicidade de um resultado matemático. Para realizar a conexão entre sequências e a geometria, o autor aborda no quarto capítulo o Triângulo de Kepler e sua relação com o número áureo e progressões geométricas, juntamente com o Triângulo de Sierpinski. Ele afirma que a importância dessa prática em sala se deve à possibilidade de expansão da compreensão dos alunos a respeito de progressões. Assim, o texto apresenta como desenhar ambos os triângulos e formula questões que levam à lei de formação dessas sequências. A atividade proposta aborda triângulos equiláteros para o estudo de progressões geométricas, mas não fica claro se ela foi aplicada, pois não há discussão de resultados. Em seguida ele trata de Progressões Harmônicas, mas como elas não são estudadas no Ensino Médio, nenhuma atividade é proposta sobre o tema, sendo apenas apresentadas algumas definições. Assim, o quinto capítulo conta com informações matemáticas mais formais, sobre relações existentes entre triângulos que são construídos a partir de aplicações de progressões aritméticas como os triângulos de Brahmagupta. O texto é concluído com os resultados das atividades, que despertaram o interesse dos alunos e mudaram suas percepções a respeito de progressões.

No acervo Capes não foram encontrados outros artigos correlatos com o objetivo dessa pesquisa, então passaremos para as dissertações encontradas na BDTD. A primeira foi a dissertação da autora Bárbara Regina da Silveira Batista, intitulada “Sequências Numéricas a partir da Geometria Fractal para Licenciandos em Matemática” (Batista, 2017). A premissa do trabalho de Batista (2017) é inserir a Geometria Fractal na introdução de sequências numéricas, no contexto de formação profissional de futuros professores, para que tenham maior domínio sobre temas contemporâneos da matemática e consigam trazer isso para suas salas de aula. Para isso, a autora utiliza a Investigação Matemática como metodologia. Dessa forma, o primeiro capítulo traz a fundamentação teórica que aborda temas centrais como o ensino de geometria e definições sobre fractais. Ela utiliza o segundo capítulo para se aprofundar em sequências numéricas e no terceiro apresenta uma proposta de atividade piloto que foi aplicada com professores de uma instituição de Ensino Superior privada.

A atividade foi realizada em três etapas, onde na primeira ocorreu uma explanação a respeito da Geometria Fractal, na segunda foram entregues roteiros para a construção do Floco de Neve de Koch e, em seguida, os professores deveriam responder perguntas e preencher tabelas sobre o número de lados de determinadas iterações e outras questões relacionadas a fractais. Ainda nesse capítulo, a autora efetua a análise dos dados coletados e destaca sobre a importância das interações e discussões que ocorreram entre os participantes. Ela também afirma que, apesar de alguns já terem conhecimento de fractais, não haviam estudado sobre a Geometria Fractal e, por meio das construções realizadas, foi possível que eles experimentassem, criassem estratégias e, por fim, formalizassem as principais ideias a respeito do tema. O quarto capítulo trata dos processos metodológicos e das alterações realizadas para aplicar a atividade proposta com alunos da graduação em Licenciatura em Matemática, para então no capítulo cinco trazer uma análise a respeito da atividade implementada.

A aplicação com os licenciandos foi dividida em dois encontros, com o primeiro objetivando identificar os conhecimentos prévios dos alunos e familiarizar os que não conheciam a respeito do tema. Ainda no primeiro encontro eles realizaram a construção do Floco de Neve de Koch e preencheram tabelas semelhantes à proposta piloto, onde a pesquisadora relatou que não houve maiores dificuldades por parte dos alunos e que eles acharam a atividade interessante. Já no segundo encontro, a partir dos materiais produzidos anteriormente, os alunos deveriam responder a uma série de questões que tinham como objetivo a formalização do conteúdo. No último capítulo ela apresenta suas discussões, alegando que as atividades didáticas cumpriram o que se esperava, proporcionando uma conexão entre geometria fractal e sequências, também abordando temas de cálculo, como um conceito primitivo de limite, utilizando termos como “a sequência tende a algum valor” (Batista, 2017).

Outra dissertação analisada foi “Uma Proposta de Atividades para o Estudo de Progressões Geométricas Utilizando Fractais e o Software GeoGebra”, uma pesquisa realizada por Juliana Maria Valmorbida e defendida em 2018 pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul (Valmorbida, 2018). Com o objetivo de elaborar uma sequência didática que possibilite aos alunos um aprendizado a respeito de PG a partir da Geometria Fractal a autora propõe o uso do GeoGebra. Dessa forma, o segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica, que trata de algumas concepções a respeito do ensino de matemática e de como isso foi alterado ao longo das décadas. Na fundamentação ela ainda aborda sobre o uso de tecnologias em sala de aula, embasando a implementação do GeoGebra e anunciando definições e conceitos de sequências e progressões numéricas, bem como de fractais. O terceiro capítulo apresenta a metodologia utilizada ao longo da pesquisa, que teve início com uma pesquisa bibliográfica que forneceu subsídios para a elaboração da sequência didática.

A sequência contou com um questionário de diagnóstico, para seguir com vídeos que apresentavam a temática da Geometria Fractal e do uso do GeoGebra. No software em cada aula os alunos deveriam realizar a construção de um fractal e representar algumas de suas características, como perímetro, número de lados ou de figuras criadas em cada iteração. Os fractais criados pelos alunos foram o Conjunto de Cantor, o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Koch e a Esponja de Menger. A última aula ficou reservada para a aplicação de um novo questionário, que buscou compreender a opinião dos alunos e seu posicionamento a respeito das atividades realizadas. O último capítulo contém a análise dos dados coletados, mostrando que apesar dos alunos terem acesso a ferramentas tecnológicas, elas raramente eram utilizadas em suas aulas, por isso o uso dos computadores os deixou animados para realizar as atividades. De maneira geral, são atingidos os objetivos estabelecidos inicialmente, ao engajar os alunos a participarem de forma ativa nas atividades e fomentar que eles utilizassem seus conhecimentos prévios e, trabalhassem em grupo para alcançarem os objetivos didáticos desejados.

A última dissertação analisada foi “Sequências Aplicáveis para o Ensino Médio”, de Elton Fernandes Barbosa, publicada em 2015 pelo Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (Barbosa, 2015). O principal foco do trabalho é fornecer um material de aprofundamento para professores que ensinam o conteúdo de PG e sequências e, para isso, a dissertação se divide em quatro capítulos. O primeiro apresenta as definições de sequência e PG, se aprofunda nas expressões algébricas de seus de termos gerais e trata de recorrências lineares. No segundo é explorada a sequência de Fibonacci de maneira aprofundada, contendo exemplos de questionamentos que poderiam ser feitos para alunos da Educação Básica, como o fractal de Grossman, em que a cada nova iteração existe a criação de um triângulo isósceles ligado a um dos vértices do triângulo inicial. O terceiro capítulo trata do triângulo de Pascal e suas relações com sequências numéricas, trazendo uma abordagem que, segundo o autor, não é comumente encontrada em outros materiais didáticos. Por fim, o último capítulo apresenta conceitos que não são vistos no Ensino Médio, como progressões exponenciais, com isso o autor espera despertar interesse dos professores pelo conteúdo e os instigar a buscar mais a respeito do assunto. Essa dissertação aborda fractais em apenas um exemplo, mas traz várias ideias diferentes para o ensino de sequências.

5.2 ANÁLISE DA BNCC E DOS LIVROS DIDÁTICOS

A BNCC é o documento que estabelece um currículo mínimo a ser implementado em âmbito nacional, buscando melhora e padronização na educação de forma a garantir que todos os alunos tenham acesso às aprendizagens definidas como essenciais, garantindo assim seus direitos (Brasil, 2018). Esse documento é desenvolvido em torno de competências e habilidades, que podem ser definidas como "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos) e [...] (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (Brasil, 2018, p.8).

De acordo a BNCC (Brasil, 2018), os alunos devem ter o primeiro contato com o conteúdo de sequências no final da Educação Infantil, quando é esperado que consigam relacionar números e quantidades e identificar "o antes, o depois e o entre em uma sequência" (p. 52). No Ensino Fundamental I o tema é apresentado na unidade temática de Álgebra. Para o 1º ano é indicada a habilidade "Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras" (p. 279). Para o 2º ano espera-se que os alunos já reconheçam sequências de números naturais em ordem crescente e decrescente. No 3º ano é desejado que identifiquem regularidades em sequências resultantes de somas ou subtrações sucessivas e, no 4º ano, a partir do resto da divisão, entre números naturais.

Depois, o tema retorna no 7º e 8º ano do Ensino Fundamental II, onde primeiro os estudantes devem ser capazes de reconhecer a equivalência entre expressões algébricas utilizadas para descrever a regularidade de uma sequência, para no ano seguinte, desenvolver o algoritmo de um fluxograma que permite identificar os termos seguintes de uma sequência numérica. E, por fim, o aluno deve chegar ao final do Ensino Médio sendo capaz de identificar e relacionar progressões aritméticas com funções afim e progressões geométricas com funções exponenciais, para analisar suas definições e demais conceitos. Assim, sabendo o que a BNCC propõe, analisamos algumas coletâneas de livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio para avaliar como esses materiais bibliográficos podem auxiliar o professor no ensino de sequências numéricas.

5.2.1 Análise de Livros Didáticos

A análise dos livros foi realizada a partir da a leitura dos seus sumários e índices, verificar em qual parte do livro era abordado o tema de sequências. Para cada capítulo que tratava do tema foi confirmado se a abordagem utilizada atendia às recomendações da BNCC e também buscou-se verificar se, ao longo de alguma coletânea, o tema da geometria fractal era explorado de alguma forma.

Damos início a essa análise com a coleção de livros “A Conquista da Matemática” (Giovanni Júnior, 2018), que explora sequências no seu livro para o 4º ano do Ensino Fundamental I, no quinto capítulo, denominado “Divisão com Números Naturais”. No início do capítulo o autor explicita as habilidades que a BNCC recomenda que sejam desenvolvidas, como a EF04MA12, que tem por “Objetivo de Conhecimento” que o aluno saiba que existem sequências numéricas recursivas formadas por números que têm o mesmo resto na divisão por um número natural fixado. Dessa forma, o capítulo apresenta aos alunos o algoritmo da divisão e explica quando uma divisão é exata, para assim introduzir os possíveis restos de uma divisão que irão formar uma sequência. Isso ocorre por meio de um exercício que pede que os alunos continuem preenchendo um quadro com os possíveis restos da divisão por 4 e 5, esperando que eles compreendam a regularidade que aparece e, como sugestão de atividade didática, o manual do professor sugere a discussão desses resultados com toda a turma (Giovanni Júnior, 2018).

Da mesma coletânea, o livro do 7º ano possui uma seção chamada “Linguagem Algébrica e Equações” que apresenta destacadamente um capítulo sobre sequências. Ele define uma sequência como sendo “aquelas que apresentam números escritos (ou figuras dispostas) em determinada ordem preestabelecida” (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018a, p.132). Assim, são apresentados alguns exemplos de sequências e a definição de sequências recursivas. No mesmo capítulo são definidos os termos de uma sequência e propostos exercícios com o objetivo de preparar o aluno para perceber regularidades numéricas. Esse tema leva a uma introdução de expressões algébricas, onde a ideia é que os alunos compreendam, a partir da lei de formação de algumas sequências, como encontrar variáveis. O texto se encaminha então para igualdades, para introduzir o conceito de equações. Dessa forma, as sequências são utilizadas como auxiliares para a compreensão de outros conteúdos, pois proporcionam aos alunos se atentar às semelhanças e padrões, que é o recomendado pela BNCC na habilidade EF07MA16 que deve ser trabalhada no 7º ano.

Para o 8º ano, a BNCC recomenda o desenvolvimento de habilidades relacionadas à identificação de regularidades em sequências, para assim o estudante ser capaz de pensar em um algoritmo que permita indicar os próximos termos. Porém, no livro didático para esse ano, os autores (Giovanni Júnior; Castrucci, 2018b) deixam esses temas somente em um material suplementar, disponibilizado no manual do professor. Dessa forma, o material destinado aos alunos não contém nenhuma abordagem direta sobre o tema de sequências numéricas.

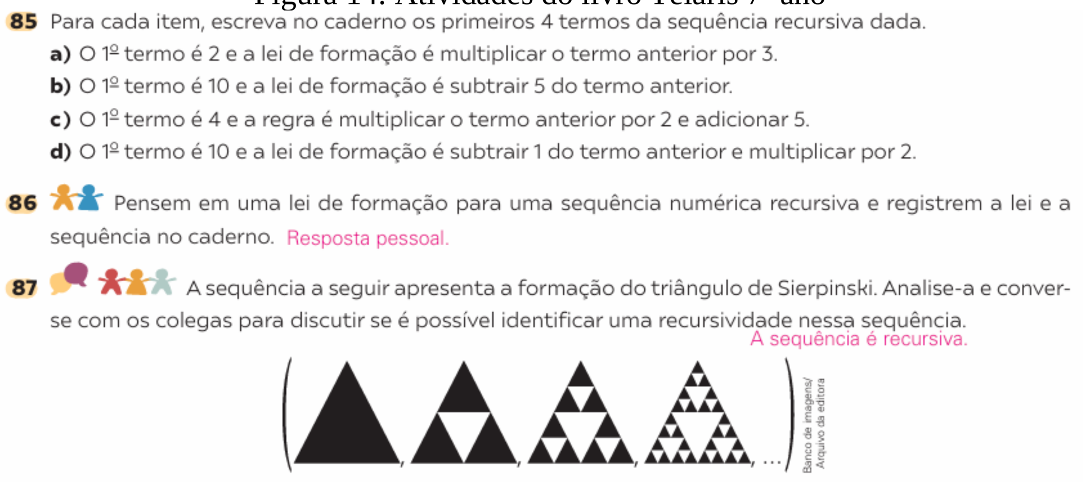
As mudanças ocasionadas pela BNCC e o Novo Ensino Médio acarretaram a reestruturação dos livros didáticos, que agora eles são mais separados por anos de ensino, mas sim por áreas do conhecimento. Dessa forma, a coleção “Prisma”, lançada em 2020, é composta por seis livros que não tem interdependência entre si, portanto o professor pode utilizar o que considerar mais adequado. Nessa coleção, o tema de sequências foi designado para o livro que aborda “Funções e Progressões” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020). Nele, há um capítulo voltado inteiramente para progressões, que é dividido em Sequências, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. O texto tem início com a história da matemática, por meio de contos de tribos africanas e uma breve explicação sobre a sequência de Fibonacci. A partir disso, há algumas definições sobre sequências e seus termos, para então propor uma série de exercícios. De forma mais direta, o conteúdo de progressões aritméticas começa com um exemplo seguido por suas definições e sua relação com a função afim para, em seguida serem propostos problemas elaborados pelos autores e também retirados de vestibulares. Da mesma forma a PG é apresentada juntamente com a sua relação com a função exponencial. Esse livro possui bastante material complementar, com indicação de referências externas e sugestões de áudios e links que os alunos podem acessar para ver de outra forma o assunto.

. De maneira geral, podemos perceber que a obra de José Ruy Giovanni Júnior procura abordar a BNCC propõe, por vezes de forma indireta, como atividade complementar, mas sempre mencionando o assunto. Isso porque a quantidade de conteúdos que devem ser tratados no currículo comum de matemática para o Ensino Básico é muito extensa, precisando que o aluno faça leituras e estudos fora de sala de aula. Contudo, o autor não trata em nenhum dos seus livros a respeito de fractais, pelo menos não de forma vinculada ao ensino de sequências.

Para falar das obras de Luiz Roberto Dante daremos início abordando a coleção Ápis (Dante; Viana, 2021). No livro do 4º ano o tema de sequências é abordado de maneira indireta, mas satisfazendo os parâmetros da BNCC. Um modelo interessante de explicação é utilizado nesse livro, pois a parte inicial do manual do professor explica de maneira direta quais atividades trabalham as habilidades da BNCC, citadas no início de cada capítulo, e dão sugestões de como o professor pode abordar esse tema. O livro em si é mais um caderno de atividades do que um material didático para o professor se basear. Então, em algumas escolas, como a que realizei o meu estágio curricular supervisionado, os alunos utilizavam esse livro como um caderno de tarefas e de resolução de exercícios, enquanto o livro adotado para explorar os conteúdos era outro. Dessa forma, as atividades que trabalham com a introdução direta de sequências são três exercícios que envolvem divisão com resto diferente de zero.

Para o Ensino Fundamental II o autor possui a série de livros Teláris, publicados pela editora Ática. O livro para o 7º ano inicia seu primeiro capítulo abordando sobre sequências recursivas, que por definição, são aquelas em que "cada termo dessa sequência é definido em relação ao termo anterior" (Dante; Viana, 2022a, p. 47). Os autores explicam que para a matemática é importante conhecer a lei de formação dessas sequências e apresentam exemplos de como encontrá-las. O texto aborda a lei de formação em linguagem escrita, como no exercício "O 1º termo é 3 e a lei de formação é multiplicar o termo anterior por 2" (Dante; Viana, 2022a). O livro também conta com atividades e sugestões para o professor, uma delas falando sobre a sequência de Fibonacci e outra que pergunta aos alunos se é possível identificar, a partir do desenho do triângulo de Sierpinski, se a sequência que representa sua formação é ou não recursiva (Figura 14).

Figura 14: Atividades do livro Teláris 7º ano



85 Para cada item, escreva no caderno os primeiros 4 termos da sequência recursiva dada.

a) O 1º termo é 2 e a lei de formação é multiplicar o termo anterior por 3.

b) O 1º termo é 10 e a lei de formação é subtrair 5 do termo anterior.

c) O 1º termo é 4 e a regra é multiplicar o termo anterior por 2 e adicionar 5.

d) O 1º termo é 10 e a lei de formação é subtrair 1 do termo anterior e multiplicar por 2.

86 Pensem em uma lei de formação para uma sequência numérica recursiva e registrem a lei e a sequência no caderno. Resposta pessoal.

87 A sequência a seguir apresenta a formação do triângulo de Sierpinski. Analise-a e converse com os colegas para discutir se é possível identificar uma recursividade nessa sequência. A sequência é recursiva.

Fonte: Dante; Viana, 2022a, p. 47.

A partir disso, no capítulo 4, os autores abordam sequências numéricas com expressões algébricas para determinar seus termos. É interessante que, no manual do professor, esse livro conta com diversos textos de apoio que dão sugestões de atividades, como para introduzir esse tema, ao invés do professor iniciar falando "A fórmula dada é a fórmula do termo geral da sequência, pois cada termo a_n dela depende do valor de n" (Dante; Viana, 2022a, p.119) ele sugere que o professor inicie no quadro com os alunos escrevendo os primeiros números pares, peça que eles identifiquem o padrão dos números como sendo o anterior somado a 2 e substitua essa parte escrita por n, para que surja o temo geral da sequência. Dessa forma, a letra n aparece de maneira mais natural para os alunos e isso ajuda a lidar com o receio que os alunos têm de envolver letras na matemática, pois eles percebem que a letra é apenas a representação algébrica geral de algo que eles já sabem e que o processo fica mais simples e prático com o seu uso. Para concluir o assunto, eles se aprofundam em recursividade e aborda o tema da Geometria Fractal da seguinte forma:

> O termo recursividade é usado para descrever, a partir de um elemento, o processo de repetição desse elemento ou de parte dele de maneira similar ao que já foi mostrado antes. Existe um ramo da Matemática, conhecido como Geometria fractal, em que figuras são construídas usando o conceito de recursividade. (Dante; Viana, 2022a, p. 122).

O livro ainda apresenta a curva de Koch e deixa como sugestão de atividade que os alunos sejam separados em grupos e cada grupo pesquise a respeito de matemáticos (como Helge von Koch e Karl Menger) e suas principais contribuições e apresentem aos demais colegas. De maneira geral, o livro é bem completo a respeito do assunto e aborda de maneira aprofundada o que é recomendado pela BNCC. É interessante que, mesmo nos anos iniciais as crianças já sejam estimuladas a identificar a relação existente entre sequências e fractais, pois assim conseguem perceber em exemplos concretos o que aprenderam na teoria.

Ainda tratando do 7º ano, pude encontrar um livro da coleção Teláris publicado em 2015, e assim comparar com sua atual, publicada em 2022. O livro de 2015 ainda não contemplava todos os conteúdos hoje estabelecidos pela BNCC, sendo o tema de sequências um deles (Dante, 2015). Segundo a BNCC, a habilidade a ser desenvolvida no 7º ano no tocante a sequências consiste em "Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes" (Brasil, 2018, p. 307). Isso é abordado na edição mais antiga, porém de maneira superficial, com apenas meio parágrafo explicando quando duas expressões são equivalentes. O livro não contém nenhuma atividade que aborde sequências e também não fornece nenhum material extra para o aluno possa estudar o tema por conta própria.

Assim, podemos perceber que a BNCC impactou a editoração de livros didáticos para a educação de nível básico.

É preciso ressaltar que este trabalho não busca efetuar tais comparativos, já que estamos buscando um comparativo justamente entre a BNCC e o que os alunos estão vendo em sala de aula, para compreender como eles chegam no Ensino Superior e poder criar uma proposta. Outro motivo para não haver mais comparações é que livros anteriores a BNCC são difíceis de se encontrar por já não estarem mais em circulação e também porque antes da pandemia nem todos os materiais eram disponibilizados de maneira digital.

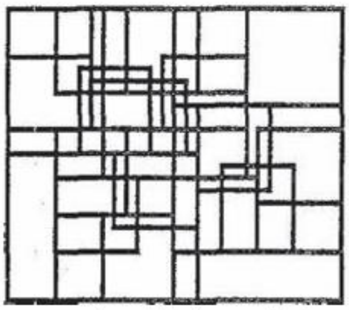
Seguindo para o 8º ano, o livro da coletânea Teláris retoma os conhecimentos prévios do aluno sobre o tema de sequências numéricas, relembrando os alunos o que são os termos de uma sequência e como interpretar sua lei de formação (Dante; Viana, 2022b). O texto também trata de sequências finitas e infinitas e contém questões de avaliações de nível nacional como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Apesar de não ampliar tanto o conhecimento dos alunos, o livro traz exemplos mais complexos de sequências e propõe exercícios que envolvem raciocínio lógico de forma integrada. Novamente, como leitura complementar, o texto aborda a Geometria Fractal. Nesse livro é apresentado o seu surgimento, a partir da indagação de matemáticos a respeito de formas que não respeitavam a geometria de Euclides, como flocos de neve, e é afirmado que “nessa Geometria, algumas figuras são obtidas por partes reduzidas de si mesmas” (Dante; Viana, 2022b, p. 55). Assim, a partir do texto são propostas uma série de atividades a respeito do assunto, como podemos ver na Figura 15.

Figura 15: Exemplos do livro Teláris 8º ano

Os fractais são muito utilizados na cultura africana nas construções, nas religiões, nos tecidos, nas esculturas, nas máscaras, nos penteados, etc.

CNES/Airbus/Google Earth

Aldeia Logone Birni, em Camarões. Foto de 2021.



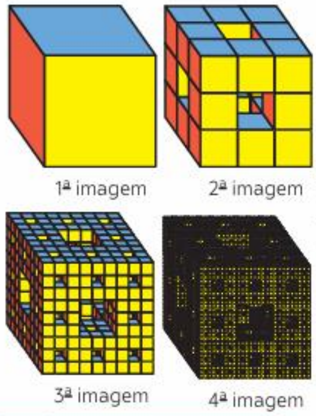
Reprodução/African Fractals, Modern computing and indigenous design/Rutgers University Press

Fractal que representa a aldeia Logone Birni, em Camarões.

Outro fractal interessante é a esponja de Menger. Acompanhe os procedimentos para obtê-lo.

1. Começamos com o cubo grande da 1ª imagem.
2. Esse cubo é dividido em 27 cubos idênticos.
3. O cubo do meio de cada face do cubo maior é removido e o cubo do centro também é removido.
4. Sobram 20 cubos, como na 2ª imagem.
5. Repetimos os passos **2** e **3** para cada cubo restante, e assim sucessivamente.

Perceba como existe uma regularidade para a retirada desses cubos.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Esponja de Menger

Nível	0	1	2	3	...	n
Quantidade de cubos removidos	0	7	$7 \cdot 20$	$7 \cdot 20 \cdot 20 = 7 \cdot 20^2$	...	$7 \cdot 20^{n-2} \cdot 20 = 7 \cdot 20^{n-1}$
Quantidade de cubos restantes	$1 = 20^0$	$1 \cdot 20 = 20^1$	$20 \cdot 20 = 20^2$	$20^2 \cdot 20 = 20^3$	...	$20^{n-1} \cdot 20 = 20^n$

Dados elaborados para fins didáticos.

Seguindo os procedimentos de construção da esponja de Menger, vamos obtendo um sólido geométrico em que, conforme a medida de área da superfície dele vai aumentando indefinidamente, a medida de volume vai se aproximando de 0.

Fonte: Dante; Viana, 2022b, p.56.

De maneira similar ao que foi feito na coletânea Prisma, o autor também separa os conteúdos, do Ensino Médio, em seis livros na coletânea "Matemática em Contexto" e o que aborda o tema de sequências é denominado "Função exponencial, Logarítmica e Sequências" (Dante; Viana, 2020). A partir de uma introdução a respeito de matemáticos que formalizaram as sequências numéricas e uma atividade sobre a sequência de Fibonacci, o texto traz duas situações problema para que o aluno visualize os padrões que levam à construção de sucessões, para então formalizar a definição de sequência como uma função e propor exercícios. De forma semelhante, a ideia de progressão aritmética é introduzida, com três exemplos iniciais para então definir que "Progressão aritmética (PA) é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e é representada pela letra r" (Dante; Viana, 2020, p. 116). Depois de tratar dos conceitos de PA crescente, decrescente e constante os autores formalizam o método para encontrar o seu termo geral e propõem exercícios sobre o tema. A seguir, o autor apresenta a relação entre PA e função afim, a soma dos termos de uma PA, mostram as conexões possíveis entre os assuntos e sugerem uma série de exercícios. Da mesma forma, para a PG, o livro contém duas situações problemas e a definição de PG, abordando as diferenças entre PG crescente, decrescente, constante e alternante. Eles também formalizam a fórmula do termo geral, estabelecem relação com a função exponencial e a soma dos termos de uma PG. Todo o livro tem leituras complementares para os alunos, trazendo um pouco da história da matemática, falando sobre o papiro de Rhind, o paradoxo de Zenão e o triângulo de Sierpinski. Além disso, no manual do professor há uma série de sugestões de literaturas e atividades para serem aplicadas em sala de aula.

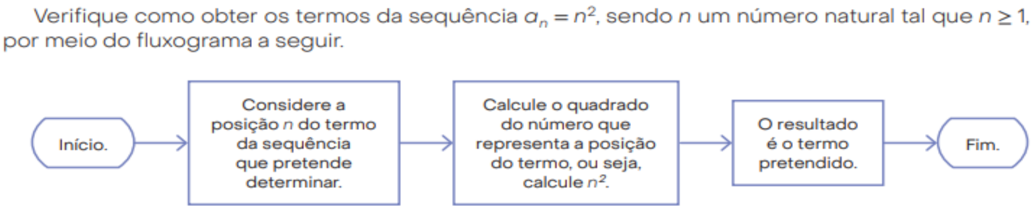
Nessa coletânea pudemos perceber que o autor estabeleceu diversas vezes a relação entre os fractais e as sequências, o que se relaciona diretamente com essa pesquisa. De maneira geral, os textos cumprem o que a BNCC propõe e o comparativo com as edições anteriores nos permite perceber que, antes de ser estabelecido um currículo comum, é provável que muitos conteúdos não aparecessem nos livros didáticos, justamente pelo que comentamos acima sobre a quantidade extensa de conteúdo. Portanto, a BNCC destacando a importância desses conteúdos pode ter feito com que, pelo menos um autor, voltasse o seu olhar para outros exemplos que podem ser empregados em sala de aula e acabou percebendo a relevância da Geometria Fractal.

Por fim, os livros da autora não foram analisados. A coleção Vida Criança - Manual de Práticas e Acompanhamento de Aprendizagem (Andrade, 2021) consiste em um apanhado de atividades a respeito dos temas estudados pelos alunos, funcionando quase como um caderno de exercícios, mas explorando algumas definições como base para a resolução das questões. Sendo assim, a primeira vez que o livro aborda o tema de sequências é por meio de um exemplo "A sequência (0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28) é formada pelos primeiros múltiplos de 4". Em nenhum momento o livro apresenta uma definição formal sobre o tema. Então, consideramos que esse livro não deve ser utilizado como uma bibliografia principal, mas sim como suporte ou um caderno para realização de tarefas.

Para o 7º ano, Andrade (2022a) apresenta uma proposta diferente, com um livro didático mais convencional, não apenas atividades. Esse livro é dividido em unidades e o conteúdo de sequências aparece na Unidade 6: Expressões algébricas, fórmulas e equações. Os conteúdos da unidade são divididos em trilhas e a de número 38 é sobre sequências. Nessa trilha a autora define uma sequência de maneira semelhante aos demais livros, falando sobre seus termos e a importância da ordem entre eles, explicando que, quando um termo depende do anterior, essa sequência pode ser denominada recursiva e também como encontrar o seu termo geral. Em seguida, é apresentada uma série de exercícios e atividades avaliativas e deixado como sugestão uma cantiga popular com versos que vão se complementando a partir do anterior a fim de "demonstrar a abordagem recursiva na linguagem e converse com os estudantes a fim de trabalhar a Competência geral 3" (Andrade, 2022a, p. 145).

De maneira similar, o livro para o 8º ano também é dividido em unidades composta por trilhas. O assunto de sequências aparece na Unidade 4: Polinômios, produtos notáveis e fatoração, na trilha 24 (Andrade, 2022b). Para introduzir o assunto é efetuada uma breve revisão do que o aluno já estudou nos anos anteriores, porém não há muito aprofundamento sobre o assunto, apenas relaciona exemplos mais complexos e emprega fluxogramas para que o aluno entenda como cada termo de uma sequência recursiva é calculado, como ilustra a Figura 16.

Figura 16: Fluxograma representando como encontrar cada termo da sequência



Fonte: Andrade, 2022b, p. 78.

O livro apresenta mais alguns exercícios sobre o tema e, no manual do professor, a autora justifica como cada exercício foi baseado na BNCC, buscando atingir as competências e habilidades esperadas para aquele ano.

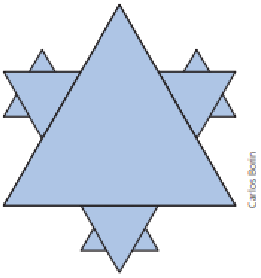
Para o Ensino Médio, a partir das determinações do Novo Ensino Médio (NEM), o livro que aborda o tema de sequências é denominado Matemática Interligada: Grandezas, sequências e matemática financeira (Andrade, 2020). Pelo título percebe-se que a autora optou por separar os conteúdos de maneira diferente dos demais. Enquanto os outros autores analisados dedicaram um livro inteiro para o estudo de funções e progressões, ela optou por abordar o tema em um capítulo (Andrade, 2020). Nesse capítulo, a autora trata de maneira superficial a respeito de conjuntos e funções para então introduzir sequências e a define formalmente como:

> Chama-se sequência finita de n termos, uma função f cujo domínio é o conjunto dos n primeiros elementos de N, ou seja, $\{1,2,3, \ldots, n\}$ e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. A cada i em $\{1,2,3,4, \ldots, n\}$ está associado um único $a_i \in R$. (Andrade, 2020, p. 69).

Depois dessa definição e de uma explicação sobre como encontrar os termos de uma sequência, há uma série de exercícios que servem como base para a introdução da definição de PA. A seguir, o texto apresenta o conceito de razão, usado para definir se uma PA é crescente, decrescente ou constante e, depois de alguns exercícios propostos, aborda a soma dos termos da PA e a sua relação com a função afim. Do mesmo modo, passa para a PG, que tem a sua definição apresentada, juntamente com os conceitos de PG crescente, decrescente, constante ou alternante. O único momento que o livro cita fractais é em um exercício retirado de um vestibular da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), que está ilustrado na Figura 17.

Figura 17: Exercício a respeito de fractais

120. (Unicamp-SP) Construir fractais no computador corresponde a um procedimento como o descrito a seguir. A partir de um triângulo equilátero, de área **A**, acrescentamos, no meio de cada lado, um outro triângulo equilátero, de lado igual a um terço do anterior; nos lados livres desses triângulos, acrescentamos triângulos de lados iguais a um terço dos anteriores e assim sucessivamente. Desse modo, construímos uma figura com uma infinidade de triângulos (veja o desenho). $\frac{10A}{7}$



Calcule a medida da área, em termos de **A**, da região determinada por esse processo.

Fonte: Andrade, 2020, p. 100.

Com as leituras dos livros da autora podemos ver que ela traz abordagens bem diferentes para cada etapa curricular. Porém, em comparação com as demais coletâneas de livros didáticos, as escritas pela autora são as que abordam de forma mais superficial o tema de sequências numéricas. Apesar de cumprir o estabelecido pela BNCC, a autora não trata de fractais, trazendo apenas um exercício que remete ao tema.

Com isso, concluímos nossa análise dos materiais para a Educação Básica. Podemos ver que os alunos atualmente têm acesso à materiais didáticos já atualizados de acordo com a BNCC e estudam o conteúdo de sequência numérica em alguns momentos tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, mas como vimos no exemplo do livro anterior à 2018, nem sempre esse assunto era abordado pelos livros didáticos. Porém, muitas pessoas que agora estão chegando no Ensino Superior passaram pela Educação Básica antes que essas reformas fossem implementadas. Portanto, é provável que, em breve, os alunos ingressem na graduação com uma boa base de sequências.

5.2.2 Livros do Ensino Superior

Da mesma forma que foi feita uma análise de livro didáticos para o Ensino Básico pautada na BNCC, para o Ensino Superior a análise se baseou no plano de ensino das disciplinas e nas suas ementas, disponíveis no Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Pelo PPC, o assunto de sequências numéricas é tratado nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI II) e Análise Real (ARE) (UDESC, 2005). Analisando o plano de ensino dos professores que ministram essas disciplinas no primeiro semestre de 2024, para o curso de Licenciatura em Matemática, observamos que os objetivos nessas disciplinas são diferentes. Em CDI II o conteúdo programático aborda a definição, a convergência e divergência de sequências (Furlanetto, 2024) e o de ARE é mais aprofundado, tratando de sequências infinitas, limite de sequências, sequências limitadas, operações com limites de sequências, sequências monótonas, subsequências e sequências recorrentes (Figueiredo, 2024). Para tratar desses assuntos a bibliografia básica e complementar do PPC sugere uma série de livros e dentre eles, foram escolhidos os que, de acordo com as minhas experiências pessoais e de diálogos com demais acadêmicos, são utilizados com maior frequência nas disciplinas do curso, como Stewart; Clegg; Watson (2023), Guidorizzi (2023) e Lima (1992).

Na disciplina de CDI II o assunto de sequências é parte integrante da ementa do curso. Como bibliografia recomendada se encontra o livro Cálculo, volume 2 de James Stewart, Daniel Clegg e Saleem Watson que foi publicado em 2023 pela editora Cengage Learning. Esse livro possui um capítulo inteiro voltado para o estudo de sequências e séries numéricas. Nele uma sequência é definida como “uma lista de números escritos em uma ordem definida” (Stewart; Clegg; Watson, 2023, p. 624). O livro discute maneiras de determinar a lei de uma sequência e as definições de limite de sequência, abordando primeiro uma noção intuitiva, para então as formalizar, incluindo a definição do limite infinito, que tem algumas diferenças do limite finito. Sobre convergência, ele explora propriedades, tanto da sequência quanto do seu limite. E a respeito de sequências monótonas e limitadas o livro define crescimento, decrescimento e constância, limitantes de sequência e apresenta os casos em que ela é limitada, limitada superiormente e inferiormente. O capítulo termina com exercícios relacionados a esses assuntos.

Outro livro comumente utilizado na disciplina de CDI II é o Um Curso de Cálculo – Volume IV, do autor Hamilton Luiz Guidorizzi, publicado pela editora LTC em 2023. Esse livro tem um capítulo inteiro dedicado a sequências numéricas, iniciando os seus estudos com a definição de sequência e tratando do seu limite, para então formalizar os conceitos de convergência e divergência. Depois de uma série de exercícios a respeito desses assuntos, ele parte para sequências monótonas, discorrendo sobre sequências crescentes e decrescentes, efetuando as demonstrações dos teoremas relacionados a sequências limitadas, limitadas superiormente e inferiormente. O capítulo encerra com exercícios a respeitos desses assuntos (Guidorizzi, 2023).

De maneira geral, os dois livros trazem conteúdos bastante similares, então fica a critério do professor escolher qual considera mais apropriado para a disciplina. Apesar da ementa de CDI II não se aprofundar tanto no assunto, é importante que os alunos tenham acesso a um material completo como esse, que pode servir de introdução para os estudos no campo da análise.

Para a disciplina de ARE, o autor mais utilizado é Elon Lages Lima, por isso seu livro “Curso de Análise: Volume 1” (Lima, 1992) foi selecionado. Nele o autor dedica um capítulo inteiro apenas para o estudo de sequências e séries de números reais. Assim, para dar início ao tema o autor discorre a importância do cálculo de limites para a análise matemática e, portanto, da relevância do estudo de sequências. Ele apresenta de maneira breve o tema de sequência limitada, utilizando exemplos para revisar esse conteúdo. Em seguida, trata do limite de uma sequência, inicialmente de forma similar aos livros anteriores, mas com um aprofundamento sobre a unicidade do limite. Outros conteúdos abordados por (Lima, 1992) que não apareceram anteriormente consiste em subsequências, que são importantes para a disciplina de Análise, pois envolvem resultados como “toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente” (Lima, 1992, p. 96) e as definições de ínfimo e máximo. Outro item desse capítulo são as sequências de Cauchy e resultados a esse respeito, para então discorrer sobre limites infinitos e algumas de suas propriedades aritméticas. O autor também traz exemplos de sequências que convergem para o número de Euler. Com isso ele encerra o conteúdo de sequências.

Assim, podemos compreender quais conteúdos são vistos no Ensino Superior, mais especificamente no curso de Licenciatura em Matemática da UDESC-CCT e analisar qual o contato que os alunos têm com esse assunto na graduação. Depois de analisar os livros do Ensino Básico e do Ensino Superior e a ementa das disciplinas, uma das percepções da autora foi que um dos fatores que levam os alunos a enfrentar dificuldade nesse conteúdo é que no Ensino Básico o conteúdo é visto de forma mais superficial e, dependendo do material didático, com poucas aplicações. Por isso, ao ingressar no Ensino Superior e se deparar com esse assunto os alunos podem sofrer obstáculos de aprendizagem.

Apesar disso, vimos que os livros utilizados nas disciplinas trazem um bom aprofundamento sobre sequências, mesmo que nem todo o conteúdo contido neles seja, de fato, abordado pelo professor em sala de aula. Dessa forma, podemos perceber que a bibliografia do curso serve de base tanto para os alunos, caso queiram aprofundar os seus estudos, quanto para os professores, que devem conhecer bem o conteúdo que estão ministrando para sanar eventuais dúvidas dos estudantes.

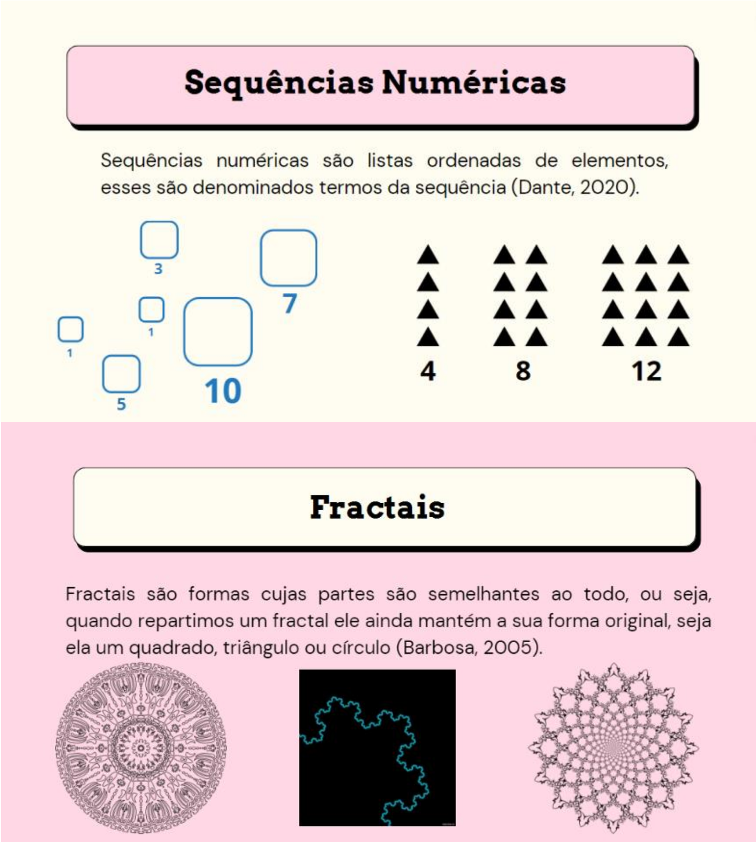
6 PROPOSTA DE ATIVIDADE

A atividade que descreveremos foi planejada ser aplicada com alunos da Licenciatura em Matemática que já passaram das fases iniciais do curso, em uma disciplina da área da Educação Matemática, visando levantar discussões sobre as possibilidades de práticas docentes diferenciadas para o Ensino Básico. No planejamento foram previstas quatro aulas de 50 minutos cada, sendo três seguidas. Com algumas adaptações, consideramos que a proposta também pode ser aplicada com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

Para a realização atividades, os alunos devem ser separados em grupos, onde cada grupo irá receber um modelo de fractal para analisar. A proposta conta com três variações, então para o caso de uma turma com trinta alunos, por exemplo, como é o padrão do Ensino Básico, uma sugestão seria a formação de seis grupos, com cinco integrantes cada, porque dessa forma os grupos que receberem o mesmo fractal podem comparar e discutir as suas respostas. A ideia de utilizar modelos diferentes de fractais consiste justamente em oportunizar que os alunos percebam que, apesar das variações específicas de cada um, ainda é possível estabelecer relações entre fractais e sequências. Assim, ao final da resolução de cada atividade, propõe-se que o professor promova um momento de debate, para que os alunos exponham seus raciocínios e comparem os resultados obtidos, percebendo semelhanças entre as relações estabelecidas.

Para dar início à aula, propomos uma apresentação das definições e termos básicos sobre sequências e fractais (Figura 18). O objetivo é revisar conceitos que os alunos já conhecem, como as sequências, e introduzir os fractais que provavelmente eles já tiveram algum contato ao longo da vida. O Apêndice 2 contém uma ampliação da apresentação usada na aplicação da proposta na turma de Laboratório de Ensino de Matemática IV do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC. Acrescentamos nessa versão algumas definições sobre sequências numéricas e também incluímos as Progressões Aritméticas, para que, caso um professor do Ensino Médio queira aplicar a atividade, ele tenha acesso a um material completo sobre o tema.

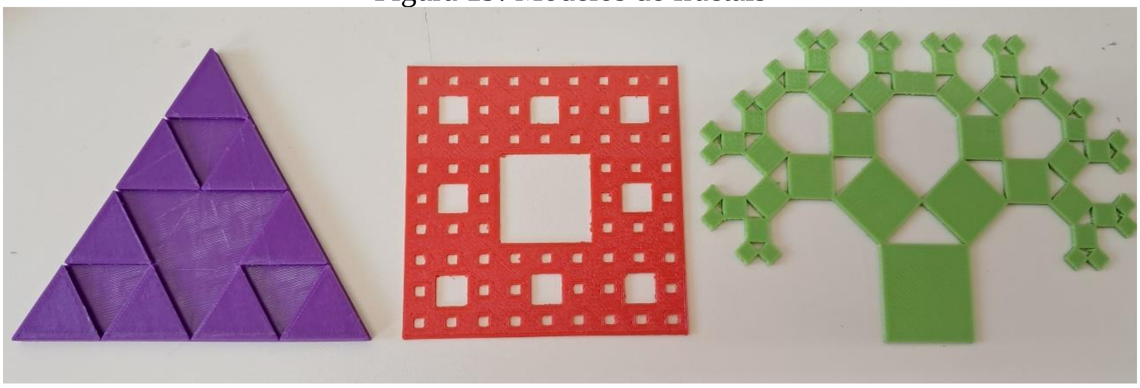
Figura 18: Slides para introdução da proposta didática



Fonte: Autora, 2024.

A seguir, o professor distribui alguns materiais concretos em formato de fractais para a manipulação dos alunos, debatendo sobre os padrões estabelecidos nas definições matemáticas e verificando se os estudantes conseguem percebê-los na prática. Na Figura 19 temos alguns exemplos de fractais produzidos por Impressão 3D, que foram utilizados nessa etapa.

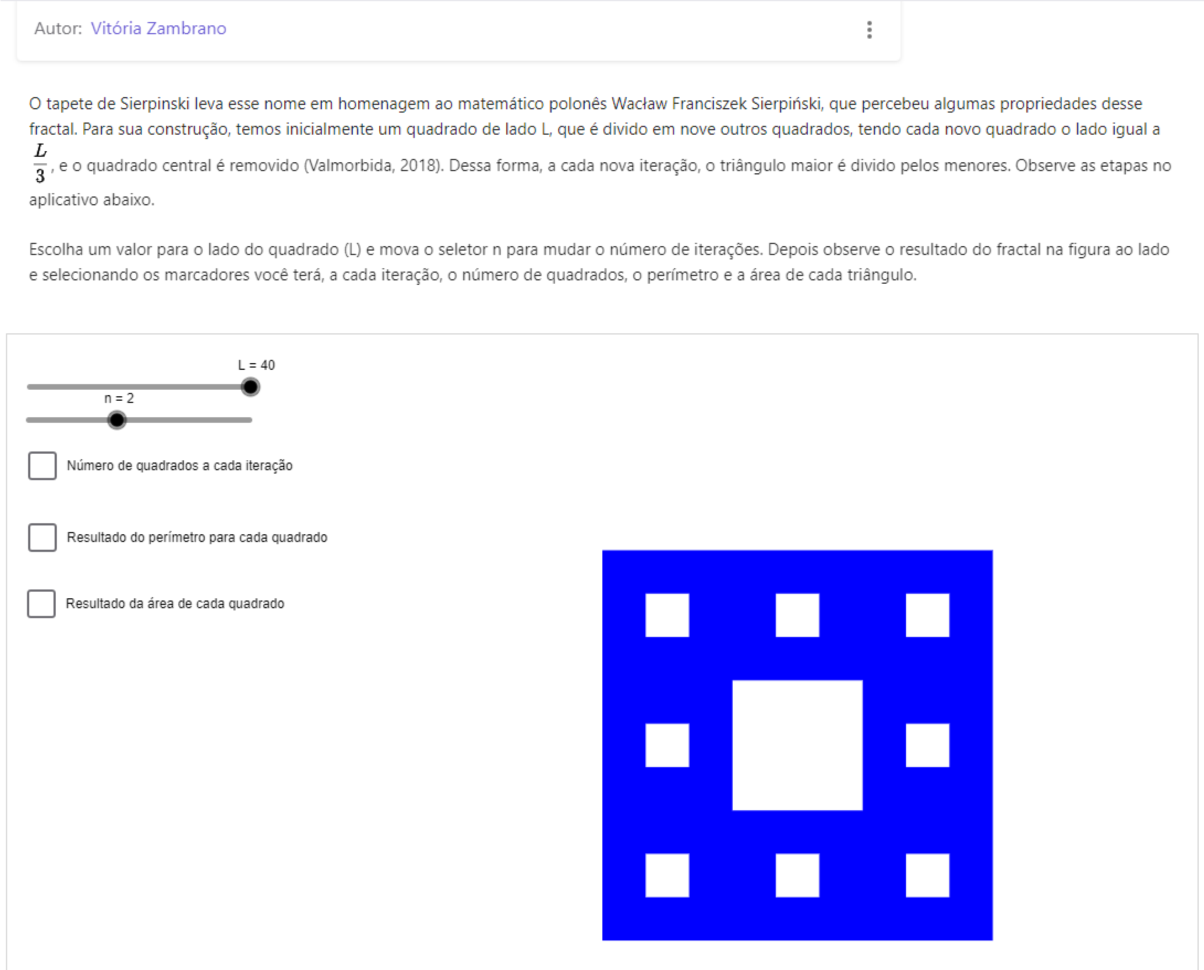
Figura 19: Modelos de fractais



Fonte: Acervo do FAB3D, 2024.

Além da manipulação dos materiais concretos também são apresentados aplicativos dinâmicos elaborados no GeoGebra, que permitem aos alunos explorar um maior número de iterações dos fractais. Segundo Valmorbida (2018), uma proposta didática que integra a com tecnologia em sala de aula instiga e estimula a participação dos estudantes ao longo das atividades. Nas Figuras 12 e 13 vimos como foi feita a adaptação do material referente ao Triângulo de Sierpinski e abaixo, nas Figuras 20 e 21, temos a imagem dos demais fractais desenvolvidos para esta proposta didática.

Figura 20: Aplicativo do Tapete de Sierpinski

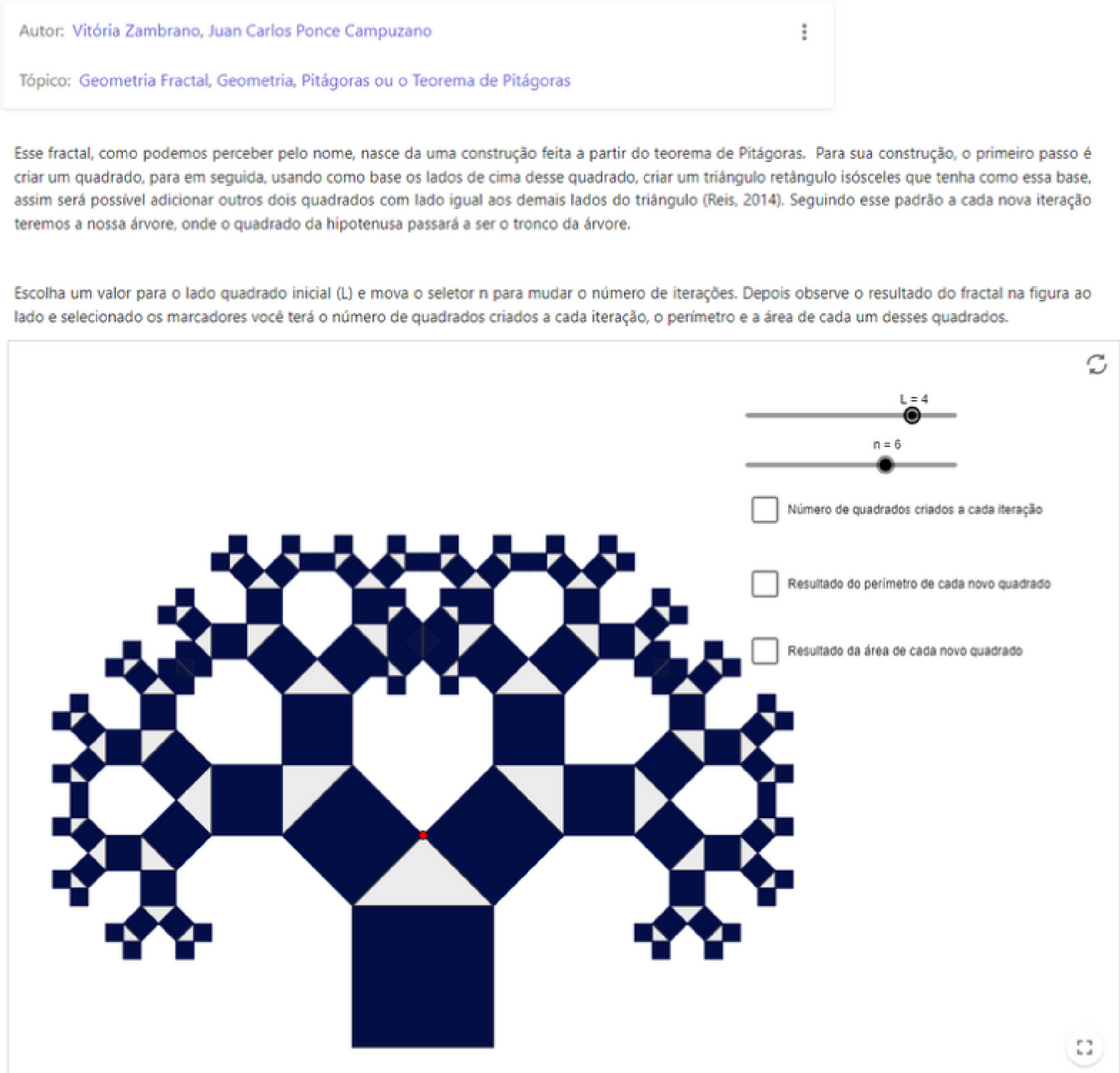


Fonte: Zambrano, 2024[4].

Assim como efetuado no aplicativo do Triângulo de Sierpinski, as modificações principais foram a inclusão dos campos para selecionar o número de iterações e os resultados da área e do perímetro dos quadrados.

[4] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/enrhm6zf

Figura 21: Aplicativo da Árvore de Pitágoras



Fonte: Zambrano, Campuzano, 2024[5].

Depois de manipular o material concreto e os aplicativos dinâmicos, os alunos irão para a atividade escrita que consiste em responder algumas perguntas sobre as iterações realizadas nas figuras geométricas. A seguir, cada tópico irá se aprofundar nas respostas que são esperadas a partir das perguntas propostas.

6.1 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

A primeira parte das questões consiste no preenchimento de informações sobre os fractais, que tem como objetivo explicitar relações que surgem ao longo das iterações. No Quadro 2 temos as informações a serem preenchidas sobre o Triângulo de Sierpinski, que

[5] Disponível em https://www.geogebra.org/m/xkewer8u

devem ser obtidas por meio da manipulação dos materiais disponibilizados (o texto em vermelho são as respostas colocadas aqui para discutir os resultados esperados, e a íntegra da atividade está no Apêndice 1).

Quadro 2: Relações sobre o Triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski leva esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Franciszek Sierpiński, que percebeu algumas propriedades desse fractal. Sua construção se dá através de um triângulo equilátero inicial, onde a cada iteração, são encontrados os pontos médios do triângulo e unidos até formar um triângulo central que é desprezado (Valmorbida, 2018). Dessa forma, a cada nova iteração o triângulo maior é divido pelos menores. Observe a etapas no material concreto e no aplicativo disponibilizado.

Com base no material concreto e considerando que o triângulo inicial tem lado igual a L, preencha o quadro abaixo e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de Δ	Lado de cada Δ	Perímetro de cada Δ	Perímetro total	Área de cada Δ	Área total
0	1	L	$3L$	$3L$	$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
1	3	$\frac{L}{2}$	$\frac{3L}{2}$	$\frac{9L}{2}$	$\frac{L^2\sqrt{3}}{16}$	$\frac{3L^2\sqrt{3}}{16}$
2	9	$\frac{L}{4}$	$\frac{3L}{4}$	$\frac{27L}{4}$	$\frac{L^2\sqrt{3}}{64}$	$\frac{9L^2\sqrt{3}}{64}$
3	27	$\frac{L}{8}$	$\frac{3L}{8}$	$\frac{81L}{8}$	$\frac{L^2\sqrt{3}}{256}$	$\frac{27L^2\sqrt{3}}{256}$
4	81	$\frac{L}{16}$	$\frac{3L}{16}$	$\frac{243L}{16}$	$\frac{L^2\sqrt{3}}{1024}$	$\frac{81L^2\sqrt{3}}{1024}$

Fonte: Autora, 2024.

A partir do preenchimento do Quadro 2 os alunos devem responder alguns questionamentos. A questão 1 (Quadro 3) refere-se ao número de formas geométricas criadas em cada iteração. No caso do triângulo de Sierpinski estamos nos referindo a triângulos, para o Tapete de Sierpinski, por exemplo, teríamos as mesmas perguntas, mas tratando de quadrados.

Quadro 3: Questão 1 do Triângulo de Sierpinski

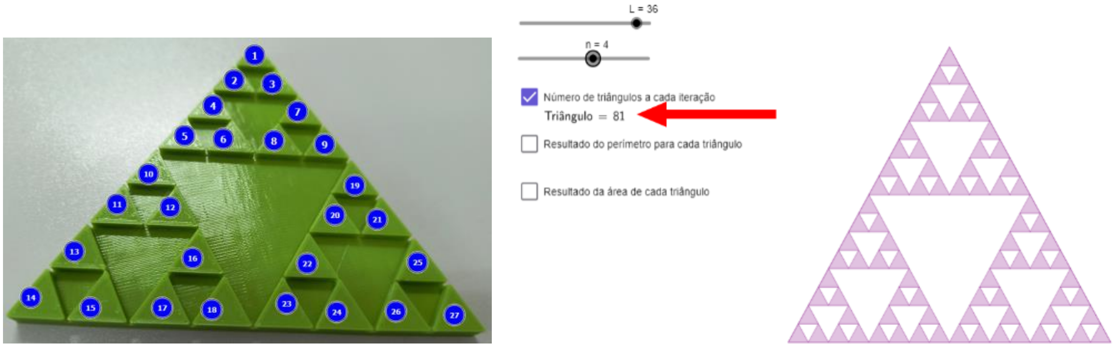
1. Com relação ao número de triângulos: a) Escreva de maneira ordenada o número de triângulos gerados até a quinta iteração. b) A partir da lista feita no item (a), podemos perceber uma relação entre esses números, descreva-a. c) De que maneira podemos generalizar a expressão para a enésima iteração da relação construída na questão anterior? Demonstre seu raciocínio.

Fonte: Autora, 2024.

Nessa questão espera-se que no item (a) os alunos enumerem a quantidade de triângulos construídos e cheguem na sequência finita $(1,3,9,27,81,243)$. Ao fazer essa lista, fica mais fácil de identificar que a relação entre esses números, solicitada no item (b), é o termo anterior multiplicado por três, que podemos escrever como 3^n, sendo n o número de iterações realizadas. O que também é a resposta do item (c), que pode ser expressa como $a_n = 3^n$ ou $a_n = 3a_{n-1}$, sendo $a_0 = 1$. Essa é a expressão geral desejada, sendo a_n o termo geral da sequência e espera-se que o aluno obtenha essa relação. Espera-se também que os materiais manipuláveis, tanto os concretos quanto os digitais, auxiliem o aluno na elaboração das suas respostas, facilitando a generalização e permitindo que ele teste suas hipóteses. Por exemplo, caso ele encontre como resposta 3^n e esteja em dúvida, ele pode colocar no GeoGebra um determinado número de iterações e comparar se os resultados apresentados pelo software correspondem aos obtidos por meio dos seus cálculos (como ilustra a Figura 22).

Figura 22: Contagem dos triângulos nos materiais manipuláveis

a) Concreto: 3ª iteração   b) GeoGebra: 4ª iteração[6]



Fonte: Autora, 2024.

A Questão 2 é voltada para a relação de lados e perímetro (Quadro 4). O objetivo é que os alunos percebam que, por se tratar de um fractal, como o número de formas geométricas aumenta, mesmo que o tamanho de seus lados diminua, conforme as iterações aumentam, o perímetro total aumenta.

Quadro 4: Questão 2 do Triângulo de Sierpinski

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos triângulos: a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de triângulos, há uma relação entre a medida dos lados de cada triângulo gerado por uma nova iteração. Escreva uma maneira de generalizar essa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão. b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

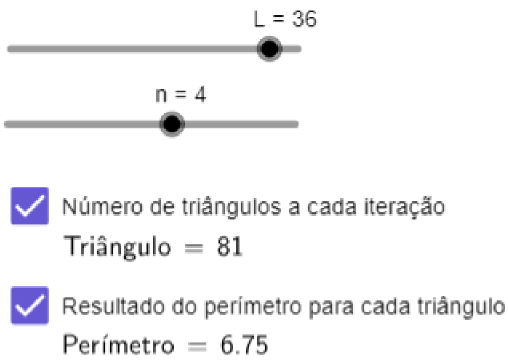
Fonte: Autora, 2024.

Supondo que a medida do lado do triângulo seja L, a partir dos dados preenchidos no Quadro 2, os alunos devem perceber que a relação existente entre a medida de cada lado e o de iterações é que, para cada iteração, o comprimento do lado cai pela metade, justamente porque estamos construindo novos triângulos a partir do ponto central de cada lado. Desse modo, a relação poderia ser formalizada como $L\left(\frac{1}{2}\right)^n$, sendo n o número de iterações. Do mesmo modo, o perímetro está diretamente relacionado com a medida dos lados, pois o perímetro é a soma de todos os lados, portanto a relação desejada é o triplo do valor obtido para o lado, pois temos triângulos equiláteros. Assim, para a enésima

[6] Disponível em https://www.geogebra.org/m/w6czmu8m.

iteração, o perímetro de cada triângulo será $3L\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e o perímetro total na enésima etapa será o número de triângulos multiplicado pelo perímetro de cada triângulo, ou seja, $3^n \cdot 3L\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3L\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Dessa forma, podemos perceber que o perímetro total está aumentando a cada iteração. Novamente, pode ser que o aluno não obtenha a relação matemática, mas suas respostas devem levar a essa conclusão ao final do debate com seus colegas e o professor. O professor também deve instigar os alunos a pensarem sobre o que acontece com o perímetro de cada triângulo e com o total, conforme o número de iterações aumenta arbitrariamente. Ele pode utilizar o GeoGebra para isso, mostrando os resultados do perímetro de cada triângulo para um dado lado L, como vemos na Figura 23.

Figura 23: Perímetro de cada triângulo no aplicativo



Fonte: Autora, 2024.

A terceira e última questão (Quadro 5) está relacionada com a área e o seu objetivo é que o aluno consiga construir as sequências, reconhecer o seu padrão e obter a sua lei de formação.

Quadro 5: Questão 3 do Triângulo de Sierpinski

3. Com relação à área dos triângulos: a) Escreva de maneira ordenada a área de cada triângulo até a quinta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores. b) O que acontece com a soma das áreas de todos os triângulos restantes em cada iteração? Justifique sua resposta com argumentos intuitivos e tente formalizar essa resposta matematicamente. c) Em cada iteração são retirados os triângulos centrais. Que valor obtemos se somarmos a área desses triângulos retirados até a quarta iteração? O que acontece se continuarmos somando as áreas de todos os triângulos retirados? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente. d) Há relação entre a soma do item (b) e do item (c)? Justifique.

Fonte: Autora, 2024.

Aqui espera-se que o aluno já tenha compreendido o objetivo geral da atividade e explique que, conforme cada novo triângulo é criado, a área de cada um deles irá diminuir, visto que cada novo triângulo está na parte interior do triângulo equilátero inicial, que tem a área igual a $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$. Usando a medida do lado do triângulo obtido na enésima iteração, temos que a área de cada triângulo é igual a $L^2\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ e a área total será $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$. Espera-se que os alunos percebam que a área total vai diminuindo e tendendo a zero, pois sua expressão corresponde ao termo geral de uma PG com razão entre 0 e 1, conforme vimos no Exemplo 6.

Com relação ao número de triângulos retirados, na primeira iteração será apenas um, que tem o mesmo tamanho dos três que ficaram, ou seja, a medida do seu lado é $\frac{L}{2}$; na segunda serão retirados mais três com lado medindo $\frac{L}{4}$; na terceira mais nove com lado medindo $\frac{L}{8}$ e na quarta, são retirados mais vinte e sete, com lado medindo $\frac{L}{16}$. Assim, retiraremos um triângulo de área $\frac{L^2\sqrt{3}}{16}$, três triângulos de área $\frac{L^2\sqrt{3}}{64}$, nove triângulos de área $\frac{L^2\sqrt{3}}{256}$ e vinte e sete de área $\frac{L^2\sqrt{3}}{1024}$. Consequentemente a área total retirada será:

$$A_{ret} = \frac{L^2\sqrt{3}}{16} + 3\cdot\frac{L^2\sqrt{3}}{64} + 9\cdot\frac{L^2\sqrt{3}}{256} + 27\cdot\frac{L^2\sqrt{3}}{1024}$$

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{16}\cdot\left(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}\right)=\frac{L^2\sqrt{3}}{16}\cdot\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{175L^2\sqrt{3}}{1024}.$$

Observando a soma obtida, espera-se que os alunos (principalmente os do Ensino Superior) percebam que estão somando os termos de uma PG de razão $\frac{3}{4}$ cujo primeiro termo é $\frac{L^2\sqrt{3}}{16}$. Pensando na soma até uma determinada iteração, tem-se uma PG finita, mas ao considerar as iterações indefinidamente tem-se a soma de uma PG infinita de razão $\frac{3}{4}$, que consiste em uma série geométrica. No caso da PG infinita, sua soma seria finita, pois a razão tem módulo menor do que 1, e igual a $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ (como visto no Exemplo 6), que é a área do triângulo inicial o que faz sentido, visto que nas infinitas iterações toda a área teria sido removida. Caso os alunos não percebam essas relações, é importante o professor instigá-los com perguntas e relembrando os conceitos de PG e soma de PG.

Além disso, com os valores das áreas retiradas os alunos podem perceber que, ao subtrair o valor da área dos triângulos retirados da área total do triângulo inicial, eles devem obter o valor da área dos triângulos que permanecem. Como a área do triângulo equilátero de lado L é $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ e com o resultado da área total retirada até a quarta iteração encontrado acima, o valor da área dos triângulos remanescentes será de

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}-\frac{175L^2\sqrt{3}}{1024}=\frac{1024L^2\sqrt{3}-700L^2\sqrt{3}}{4096}=\frac{324L^2\sqrt{3}}{4096}=\frac{81L^2\sqrt{3}}{1024},$$

que corresponde ao valor obtido no preenchimento dos dados iniciais (Quadro 2).

6.2 TAPETE DE SIERPINSKI

Como na proposta anterior, a primeira etapa é o preenchimento dos dados do Quadro 6, com o objetivo de explicitar as relações que surgem ao longo das iterações. Os dados referentes ao fractal Tapete de Sierpinski, podem ser obtidos por meio da manipulação dos materiais disponibilizados. Novamente, o texto em vermelho são as respostas, que colocamos aqui para discutir os resultados esperados.

Quadro 6: Relações sobre o Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski leva esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Franciszek Sierpiński, que percebeu algumas propriedades desse fractal. Para sua construção, temos inicialmente um quadrado de lado L, que é divido em nove outros quadrados, tendo cada novo quadrado o lado igual a $\frac{L}{3}$, e o quadrado central é removido (Valmorbida, 2018). Esse procedimento pode ser realizado infinitas vezes. Observe a etapas no material concreto e no aplicativo disponibilizado.

Com base no material concreto, e considerando que o quadrado inicial tem medida do lado igual a L, preencha o quadro abaixo e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de □	Lado de cada □	Perímetro de cada □	Perímetro total	Área de cada □	Área total
0	1	L	$4L$	$4L$	L^2	L^2
1	8	$\frac{L}{3}$	$\frac{4L}{3}$	$\frac{32L}{3}$	$\frac{L^2}{9}$	$\frac{8L^2}{9}$
2	64	$\frac{L}{9}$	$\frac{4L}{9}$	$\frac{256L}{9}$	$\frac{L^2}{81}$	$\frac{64L^2}{81}$
3	512	$\frac{L}{27}$	$\frac{4L}{27}$	$\frac{2048L}{27}$	$\frac{L^2}{729}$	$\frac{512L^2}{729}$
4	4096	$\frac{L}{81}$	$\frac{4L}{81}$	$\frac{16384L}{81}$	$\frac{L^2}{6561}$	$\frac{4096L^2}{6561}$

Fonte: Autora, 2024.

Com os resultados preenchidos, os alunos devem responder a algumas questões. A questão 1 (Quadro 7) é com relação ao número de formas geométricas criadas em cada iteração.

Quadro 7: Questão 1 do Tapete de Sierpinski

1. Com relação ao número de quadrados:

a) Escreva de maneira ordenada o número de quadrados gerados até a quinta iteração.

b) A partir da lista feita no item (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva-a.

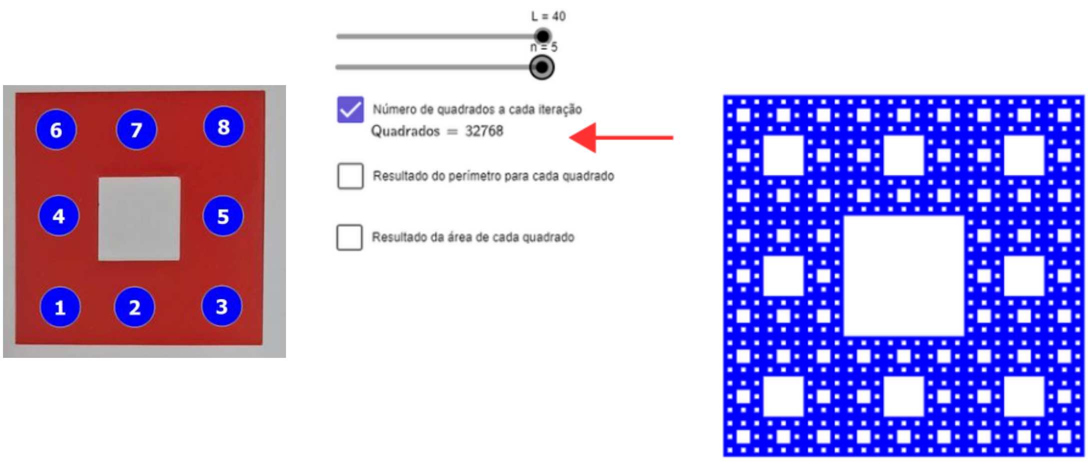
c) De que maneira podemos generalizar a enésima iteração da relação construída na questão anterior? Demonstre seu raciocínio.

Fonte: Autora, 2024.

Se espera, no item (a) dessa questão, que os alunos obtenham a sequência $(1{,}8{,}64{,}512{,}4096{,}32768)$ e que, ao fazer essa lista, consigam visualizar as relações pedidas nos itens seguintes. No item (b), por exemplo, os alunos podem escrever algo como "o próximo valor será o anterior multiplicado por 8", o que pode ser escrito como 8^n, sendo n o número de iterações realizadas, que é a resposta esperada no item (c), no caso $a_n = 8^n$ ou $a_n = 8a_{n-1}$, sendo $a_0 = 1$. No material concreto novamente os alunos podem contar o número de quadrados e no aplicativo é possível observar a resposta habilitando a caixa "Número de quadrados a cada iteração", como ilustra a Figura 24.

Figura 24: Contagem dos quadrados nos materiais manipuláveis

a) Concreto: 3ª iteração b) GeoGebra: 2ª iteração[7]



Fonte: Autora, 2024.

Na questão seguinte (Quadro 8) abordamos a relação entre os lados e o perímetro. No caso desse fractal, os alunos podem perceber que, conforme o número de formas geométricas aumenta, mesmo que o tamanho de seus lados diminua, o perímetro total aumenta.

Quadro 8: Questão 2 do Tapete de Sierpinski

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos quadrados:
a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de quadrados, há uma relação entre a medida dos lados de cada quadrado gerado por uma nova iteração. Escreva uma

[7] Disponível em https://www.geogebra.org/m/enrhm6zf.

maneira de generalizar essa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão. b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

Fonte: Autora, 2024.

Escolhendo a medida do lado do quadrado inicial igual a L, a partir dos dados preenchidos no Quadro 7, os alunos devem perceber que a relação existente entre a medida de cada lado e o número de iterações é que, para cada nova iteração, o comprimento cai pela terça parte. Assim, podemos formalizar essa relação como $L\left(\frac{1}{3}\right)^n$, sendo n o número de iterações. Da mesma forma, como a medida do perímetro está diretamente relacionada com a dos lados, já que o perímetro é a soma de todos os lados, para a enésima iteração o perímetro de cada quadrado será $4L\left(\frac{1}{3}\right)^n$ e o perímetro total na enésima etapa será o número de quadrados vezes o perímetro de cada quadrado, ou seja, teremos:

$$8^n \cdot 4L\left(\frac{1}{3}\right)^n = 4L\left(\frac{8}{3}\right)^n.$$

Com isso, podemos ver que o perímetro total está aumentando a cada nova iteração, pois temos cada vez mais quadrados sendo gerados. Para a aplicação com os alunos do Ensino Superior esperamos que eles percebam que conforme n aumenta o perímetro de cada triângulo tende para zero, pois será o limite, quando n tende para infinito, da sequência de termo geral $a_n = 4L\left(\frac{1}{3}\right)^n$, que é uma PG de ração $\frac{1}{3}$, enquanto o perímetro total segue aumentando, tendendo para o infinito conforme n tende para infinito, como vimos no Exemplo 6, visto que é o limite da sequência de termo geral $4L\left(\frac{8}{3}\right)^n$,que é uma PG de razão $\frac{8}{3} > 1$.

A terceira e última questão (Quadro 9) está relacionada com a área dos quadrados.

Quadro 9: Questão 3 do Tapete de Sierpinski

3. Com relação à área dos quadrados: a) Escreva de maneira ordenada a área de cada quadrado restantes até a quinta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores.

b) O que acontece com a soma das áreas de todos os quadrados em cada iteração? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente. c) Em cada iteração são retirados os quadrados centrais. Que valor obtemos se somarmos a área desses quadrados retirados até a quarta iteração? O que acontece se continuarmos somando as áreas de todos os quadrados retirados? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente. d) Há relação entre as somas obtidas no item (b) e no item (c)? Justifique.

Fonte: Autora, 2024.

Nessa questão espera-se que o aluno já tenha compreendido o objetivo geral da atividade e explique que, conforme cada novo quadrado é criado a área de cada um deles irá diminuir, visto que cada novo quadrado está na parte interior do quadrado inicial, que tem a área igual a L^2. Usando a medida do lado obtido na enésima iteração, temos que a área de cada quadrado é igual a $L^2\left(\frac{1}{9}\right)^n$ e a área total será $L^2\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Espera-se que os alunos percebam que a área total vai diminuindo e tendendo a zero, pois novamente é o limite de uma PG de razão menor do que 1.

Com relação ao número de quadrados retirados, na primeira iteração será um, que tem o mesmo tamanho dos oito que ficaram, ou seja, com a medida do lado $\frac{L}{3}$; na segunda são retirados mais oito com lado medindo $\frac{L}{9}$; na terceira mais sessenta e quatro com lado medindo $\frac{L}{27}$ e na quarta são retirados mais quinhentos e doze com lado medindo $\frac{L}{81}$. Assim, retira-se um quadrado de área $\frac{L^2}{9}$;oito quadrados de área $\frac{L^2}{81}$; sessenta e quatro quadrados de área $\frac{L^2}{729}$ e quinhentos e doze de área $\frac{L^2}{6561}$. Consequentemente, a área total retirada será

$$\frac{L^2}{9}+8.\frac{L^2}{81}+64.\frac{L^2}{729}+512.\frac{L^2}{6561}=\frac{L^2}{9}.\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{8}{9}\right)^k=\frac{2465}{6561}L^2.$$

Observando a soma obtida, espera-se que os alunos (principalmente os do Ensino Superior) percebam que estão somando os termos de uma PG de razão $\frac{8}{9}$ e primeiro termo igual a $\frac{L^2}{9}$. Esse é um caso de PG finita, mas para o caso da PG infinita, a razão tem módulo menor do que 1, e soma igual a L^2, que é a área do quadrado inicial, o que faz sentido visto que nas infinitas iterações toda a área teria sido removida. Caso os alunos não percebam essas relações é importante que o professor os instigue com perguntas e relembrando os conceitos de PG e soma de PG.

Além disso, com os valores das áreas retiradas os alunos devem perceber que, ao subtrair o valor da área dos quadrados retirados da área total do quadrado inicial, eles devem obter o valor da área dos quadrados que permanecem. Como a área do quadrado de lado L é L^2 e com o resultado da área total retirada até a quarta iteração encontrado acima, o valor da área dos quadrados remanescentes será de

$$L^2 - \frac{2465}{6561}L^2 = \frac{6561L^2 - 2465L^2}{6561} = \frac{4096}{6561}L^2,$$

O que confirma o valor obtido nos dados iniciais (Quadro 6).

6.3 ÁRVORE DE PITÁGORAS

De maneira análoga ao que foi feito para as outras atividades, a primeira parte das questões relacionadas à Árvore de Pitágoras consiste em preencher informações sobre o fractal, com o objetivo de explicitar os padrões que surgem ao longo das iterações. No Quadro 10 temos uma tabela que deve ser preenchida com os dados relacionados ao fractal da Árvore de Pitágoras, que podem ser obtidos por meio da manipulação dos materiais disponibilizados. Novamente, o texto em vermelho são as respostas que colocamos aqui para discutir os resultados esperados.

Quadro 10: Relações sobre a Árvore de Pitágoras

Esse fractal, como podemos perceber pelo nome, nasce de uma construção feita a partir do teorema de Pitágoras. Para sua construção, o primeiro passo é criar um quadrado, para em seguida, usando como base os lados de cima desse quadrado, criar um triângulo retângulo isósceles que tenha como hipotenusa essa base, assim será possível adicionar outros dois quadrados com lado igual aos catetos do triângulo (Reis, 2014). Seguindo esse padrão, a cada nova iteração teremos a nossa árvore, onde o quadrado sobre a hipotenusa passará a ser o tronco da árvore.

Com base no material concreto e no aplicativo do GeoGebra, e considerando que o quadrado inicial tem um lado igual a L, preencha o quadro abaixo e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de □ novos	Lado de cada novo □	Perímetro de cada novo □	Perímetro total	Área de cada novo □	Área total
0	1	L	$4L$	$4L$	L^2	L^2
1	2	$\frac{\sqrt{2}L}{2}$	$2\sqrt{2}L$	$4(1+\sqrt{2})L$	$\frac{L^2}{2}$	$2L^2$
2	4	$\frac{L}{2}$	$2L$	$4(3+\sqrt{2})L$	$\frac{L^2}{4}$	$3L^2$
3	8	$\frac{\sqrt{2}L}{4}$	$\sqrt{2}L$	$4(3+3\sqrt{2})L$	$\frac{L^2}{8}$	$4L^2$
4	16	$\frac{L}{4}$	L	$4(7+3\sqrt{2})L$	$\frac{L^2}{16}$	$5L^2$

Fonte: Autora, 2024.

A partir do preenchimento do quadro, os alunos devem responder algumas perguntas. A questão 1 (Quadro 11) é com relação ao número de formas geométricas criadas em cada iteração.

Quadro 11: Questão 1 da Árvore de Pitágoras

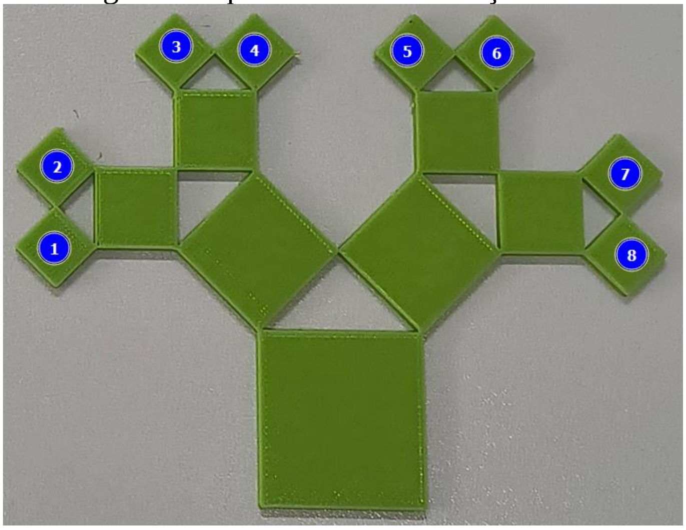
1. Com relação ao número de novos quadrados: a) Escreva de maneira ordenada o número de novos quadrados gerados até a quarta iteração. b) A partir da lista feita no item (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva-a. c) De que maneira podemos generalizar a enésima iteração da relação construída na questão anterior? Demonstre seu raciocínio.

Fonte: Autora, 2024.

Na primeira questão, no item (a), os alunos devem construir a sequência finita $(1,2,4,8,16,32)$. Com isso, deseja-se facilitar a relação existente entre esses valores, para responder o que é pedido no item (b), cuja resposta é que a cada nova iteração o número de quadrados dobra. Para o item (c) seria justamente a formalização matemática do que foi dito antes, que pode ser escrito como 2^n, sendo n o número de iterações realizadas.

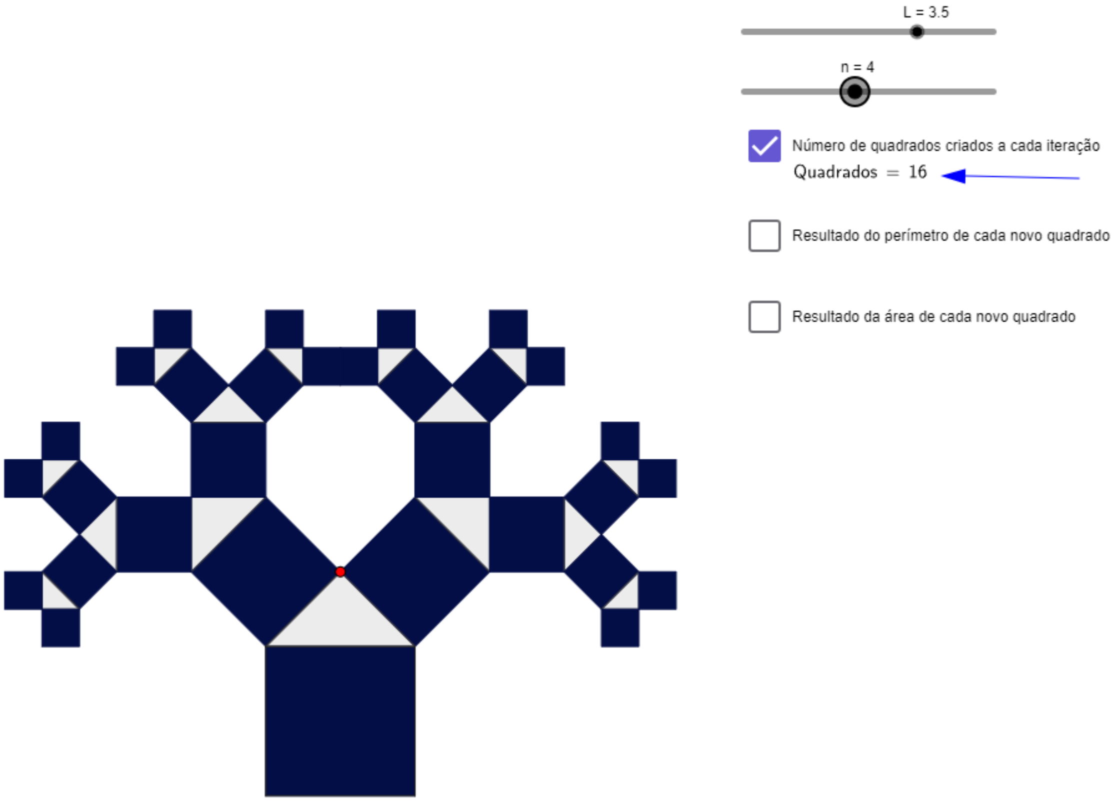
Espera-se também que os materiais manipuláveis, tanto os concretos quanto os digitais, auxiliem o aluno na obtenção dessas respostas, facilitando a generalização e permitindo que ele teste suas hipóteses. Por exemplo, caso ele obtenha a resposta 2^n e esteja em dúvida, ele pode colocar no aplicativo do GeoGebra um determinado número de iterações e comparar se os resultados apresentados pelo software correspondem aos obtidos por meio dos seus cálculos (como ilustram as Figuras 25 e 26).

Figura 25: Contagem dos quadrados na 3ª iteração no material concreto



Fonte: Autora, 2024.

Figura 26: Contagem dos quadrados na 4ª iteração no aplicativo



Fonte: Autora, 2024.

A Questão 2 é voltada para a relação entre os lados e o perímetro (Quadro 12). O objetivo é que os alunos percebam que, por se tratar de um fractal, como o número de formas geométricas aumenta, mesmo que o tamanho de seus lados diminua, conforme as iterações aumentam, o perímetro total aumenta.

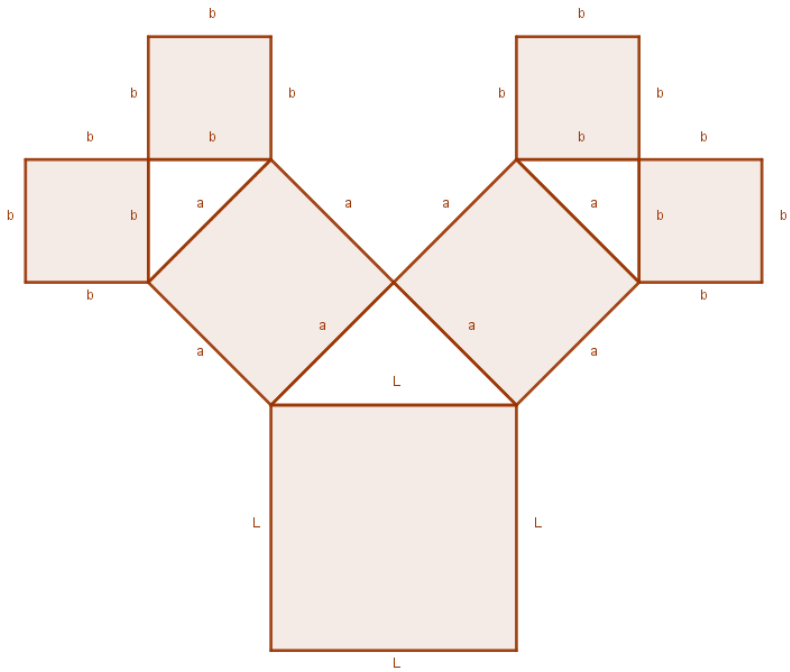
Quadro 12: Questão 2 da Árvore de Pitágoras

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos quadrados: a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de quadrados, há uma relação entre a medida dos lados de cada quadrado gerado por uma nova iteração. Escreva uma generalização dessa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão. b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

Fonte: Autora, 2024.

Os valores das medidas dos lados, preenchidos no Quadro 10, podem ser obtidos usando o Teorema de Pitágoras sucessivamente, conforme explicamos a seguir. Ao considerarmos o quadrado com lado L, esse será o valor da hipotenusa do triângulo retângulo isósceles central e, a partir dos seus catetos, outros dois quadrados serão construídos, tendo como medida do lado o valor dos catetos, como podemos ver na Figura 27.

Figura 27: Representação dos lados dos quadrados



Fonte: Autora, 2024.

Assim, se L é a hipotenusa e os outros lados possuem o mesmo tamanho, que chamaremos de a, como na Figura 27, pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$L^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow L^2 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{L^2}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{L^2}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{L}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}L}{2}.$$

Fazendo o mesmo processo para b, obtemos que:

$$a^2 = b^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{a^2}{2}} \Leftrightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{\sqrt{2}a}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}L}{2} \Leftrightarrow b = \frac{2L}{4} \Leftrightarrow b = \frac{L}{2}.$$

Esses são os cálculos necessários para calcular o lado de cada quadrado criado a cada iteração. Por meio da ordenação desses valores, espera-se que o aluno perceba, mesmo que não consiga escrever matematicamente, que os lados diminuem de acordo com a sequência $L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, sendo n o número de iterações.

Do mesmo modo, o perímetro está diretamente relacionado com a medida dos lados, pois o perímetro é a soma da medida de todos os lados. Assim, o perímetro total será a soma dos perímetros de cada etapa e podemos ver que ele aumenta com uma proporção, pois ao final de quatro iterações teremos:

Perímetro Total$1 \cdot 4L + 2 \cdot 2\sqrt{2}L + 4 \cdot 2L + 8 \cdot \sqrt{2}L + 16 \cdot L = 28L + 12\sqrt{2}L.$

A relação que pode ser perceptível para os alunos é que a raiz de dois aparece de forma alternada entre os perímetros, então espera-se que eles percebam que, ao elevar uma raiz quadrada a um número par, ela acaba se cancelando, mas ao elevar em um número ímpar, o mesmo não ocorre e a raiz permanece. Dessa forma, podemos dizer que a lei de formação da sequência que determina o perímetro de todos os novos quadrados é $4L\left(\sqrt{2}\right)^n$, sendo n igual ao número de iterações, sem considerar as sobreposições que ocorrem a partir da quinta iteração. Sabemos que essa sequência é uma PG de razão $\sqrt{2}$, maior que 1, portanto divergente, pelo Exemplo 6. O perímetro total, por sua vez, é a soma dos termos dessa PG, que também será divergente, pelo Exemplo 7. Na aplicação com alunos do Ensino Superior, espera-se que eles percebam essa relação.

A terceira e última questão (Quadro 13) está relacionada com a área dos quadrados e o objetivo é que o aluno consiga construir as sequências.

Quadro 13: Questão 3 da Árvore de Pitágoras

3. Com relação à área dos quadrados: a) Escreva de maneira ordenada a área de cada novo quadrado até a quarta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores. b) O que acontece com a soma das áreas de todos os quadrados em cada iteração? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.

Fonte: Autora, 2024.

Nessa questão, espera-se que o aluno já tenha compreendido o objetivo geral da atividade e explique que, conforme cada novo quadrado é criado, a área de cada um deles irá diminuir, visto que seus lados serão cada vez menores em comparação com o lado do quadrado inicial. Dessa forma, a área de cada quadrado será dada por $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot L^2$, sendo n o número de iterações. Assim, a soma da área total, sem considerar as sobreposições, é dada pela área de cada quadrado, vezes a quantidade de quadrados que possuem aquela área. Logo, a soma da área total até a quarta iteração, quando não temos sobreposições é:

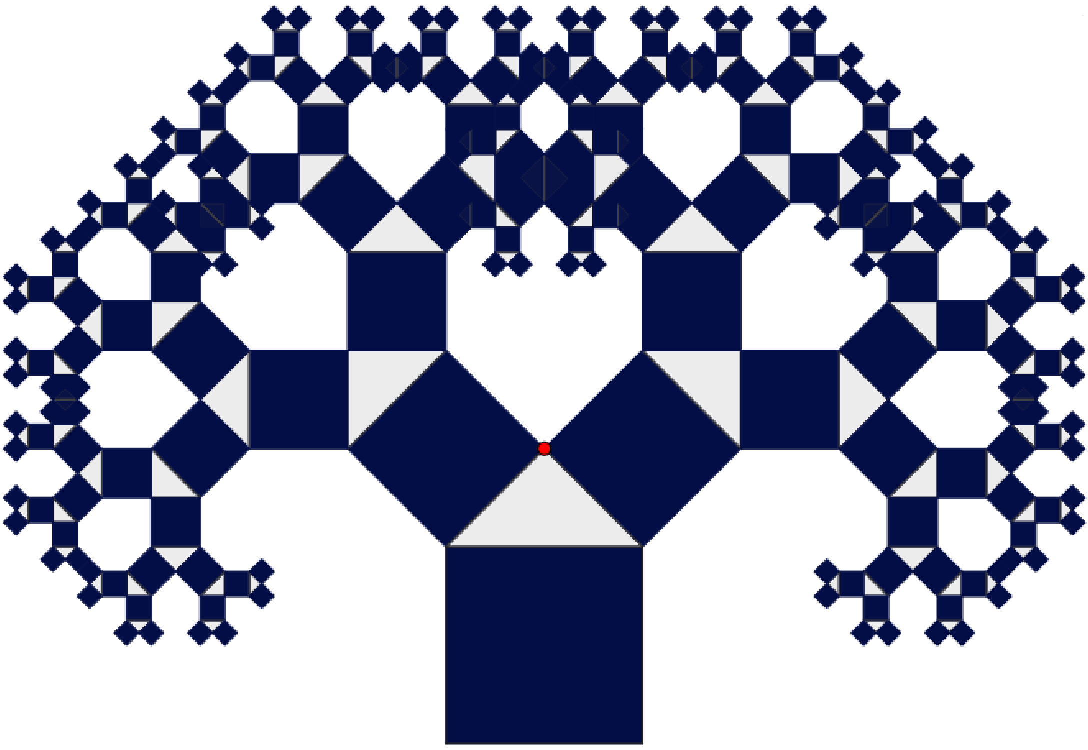
Área Total = $1 \cdot L^2 + 2 \cdot \frac{L^2}{2} + 4 \cdot \frac{L^2}{4} + 8 \cdot \frac{L^2}{8} + 16 \cdot \frac{L^2}{16} + 32 \cdot \frac{L^2}{32} = 5L^2.$

Podemos observar que a área total até a enésima iteração, sem as sobreposições, é dada por

$$\sum_{i=0}^{n} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot L^2 = \sum_{i=0}^{n} L = n \cdot L^2,$$

ou seja, seria n vezes a área do quadrado inicial. O que levaria a uma área infinita conforme n aumenta arbitrariamente. No entanto, a área é finita (Ernst, 2004). Isso porque, a partir da quinta iteração, alguns quadrados novos ficam sobrepostos, como podemos ver na Figura 28, e suas áreas devem ser desconsideradas.

Figura 28: Quadrados sobrepostos da Árvore de Pitágoras



Fonte: Autora, 2024.

Assim, conforme aumentamos o número de iterações, as áreas desconsideradas passam a ser equivalentes às que são adicionadas, fazendo com que a estrutura da árvore tenha, de acordo com Ernst (2004), a dimensão máxima de $6L \times 4L$.

6.4 REFLEXÕES A RESPEITO DAS PROPOSTAS DIDÁTICAS

O objetivo das propostas didáticas é possibilitar que os alunos percebam as relações existentes entre sequências e fractais, permitindo a formalização das leis das sequências que geram as áreas e os perímetros dos fractais, por exemplo. Para isso, ao finalizar suas respostas, os estudantes devem debater entre os pares para perceber que, embora os fractais utilizados sejam diferentes, há semelhanças nas relações obtidas, principalmente entre o Triângulo e o Tapete de Sierpinski. Para a Árvore de Pitágoras as relações diferem, pois não são retiradas partes e sim acrescentados novos ramos cada vez menores. É importante também o professor instigar os alunos a perceberem que todas as sequências formadas são progressões geométricas.

Para testar se os objetivos que estabelecemos realmente podem ser alcançados, a proposta de atividade foi implementada na turma de Laboratório de Ensino de Matemática IV (LEM IV) do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC, no segundo semestre de 2024, na forma de um trabalho que tinha por objetivo apresentar diferentes metodologias para o ensino de matemática na Educação Básica. Apesar deste trabalho não ter como foco a análise desses resultados, eles forneceram reflexões importantes a serem consideradas caso ocorram outras aplicações.

Um ponto importante é que, ao final da atividade, os alunos devem ter clareza do que foi feito por eles e pelos demais companheiros de classe. Tendo isso em mente, uma sugestão seria que, após conversarem entre si, fossem ao quadro e escrevessem os resultados obtidos, para deixar claro aos colegas o raciocínio implementado na resolução das atividades e talvez perceber se havia outras formas de responder a mesma pergunta.

Outro ponto seria que, por ter uma criação diferente dos outros dois, a Árvore de Pitágoras exige um raciocínio diferente para os cálculos, o que causou indagações dos grupos na hora do debate final e foi preciso efetuar as contas para que o restante da sala os compreendesse. Poderia se pensar que, para uma turma de Ensino Médio, o professor utilizasse as atividades dos fractais de Sierpinski e tomasse a Árvore de Pitágoras como exemplo, apresentando algumas questões após a realização da tarefa pelos alunos, para conseguir trabalhar de maneira integral alguns conceitos.

No geral, os alunos de LEM IV conseguiram obter as respostas desejadas sem grandes dificuldades, o que foi um bom resultado, sinalizando que a escrita da proposta estava compreensível. Foi possível observar que dois dos três grupos conferiram as respostas no GeoGebra, um inclusive corrigiu a fórmula encontrada depois dos testes que realizaram, então podemos dizer que o aplicativo auxiliou os alunos da forma esperada. Já o material concreto serviu mais como contemplação inicial, para que os alunos compreendessem as iterações e preenchessem as tabelas, mas ao longo das atividades não foi muito utilizado. Eles também responderam às perguntas sem precisar de ajuda e, no debate dos resultados, foi possível discutir sobre questões voltadas para o Ensino Superior, como o que aconteceria no limite da área e do perímetro e eles conseguiram compreender bem essa ideia.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho foram apresentadas propostas de atividade didáticas para o ensino de sequências numéricas através da Geometria Fractal. Vimos que a BNCC busca apresentar aos professores uma visão não cartesiana dos conteúdos, por isso ela traz habilidades e competências a serem desenvolvidas ao invés de conteúdos a serem passados, dessa forma as novas coleções de livros didáticos tentam acompanhar a proposta da BNCC. Portanto, ao analisá-los é possível perceber que o conhecimento a respeito de sequências é construído de forma gradativa e a cada ano os alunos se aprofundam mais nas suas definições e aplicações. Ainda assim, ao sair do Ensino Médio, o aluno pode não ter conquistado um conhecimento significativo nessa área da matemática, por isso a relevância de trabalhos que integram o uso de tecnologias e outras metodologias de ensino.

A partir das leituras realizadas foi possível responder à pergunta inicial dessa pesquisa, “de que forma é possível integrar materiais concretos e digitais no estudo de sequências numéricas, contextualizando com a geometria fractal?”. Vimos que uma possibilidade seria trazer uma proposta que relacionasse perímetro e área das formas geométricas criadas a cada iteração, apresentando os resultados no GeoGebra e trazendo o material impresso em 3D para que os alunos pudessem manipulá-lo. Portanto, os objetivos propostos com relação ao levantamento de literatura de materiais em publicação sobre o tema e materiais didáticos utilizados tanto no Ensino Básico quanto Superior foram cumpridos, bem como o relacionado a proposta de uma atividade que integrasse materiais concretos e recursos tecnológicos.

Com a aplicação da proposta alguns pontos foram considerados, como a diferença entre os fractais, da Árvore de Pitágoras principalmente com relação aos demais, pois demandava um raciocínio diferente, e talvez para uma prática na Educação Básica tornaria as discussões mais complicadas. Outro foi a necessidade de um debate final amplo e aprofundado sobre os métodos utilizados pelos alunos para responder às questões. Uma das alunas da turma sugeriu uma adaptação para o Ensino Superior, visto que na disciplina de CDI II é quando os alunos têm o primeiro contato com o tema na graduação e ela afirmou não ter sido um assunto fácil para a sua turma, sendo assim uma boa opção a realização de uma atividade como essa para a familiarização com o tema e vendo um exemplo prático.

Assim, ficam algumas ressalvas ao professor que decida implementar a atividade, ou a utilize para a construção de um plano de aula. Com isso, espero que esse material possa ser utilizado no futuro e sirva como inspiração e motivação para educadores que buscam adotar outras perspectivas a respeito do ensino de sequências em suas salas de aula.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco Regis Vieira. Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do software GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA. 2012, p. 48 - 55. Montevidéu. **Anais do Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra** Disponível em: http://www.GeoGebra.org.uy/2012/actas/73.pdf. Acesso em: 05 jun. 2024.

ANDRADE, Thais Marcelle. **Vida Criança**: matemática: 4º ano. São Paulo: Saraiva, 2021. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/anos-iniciais-ensino-fundamental-vida-crianca-matematica-4o-ano-objeto-2-pnld-2023/. Acesso em: 07 fev. 2024.

ANDRADE, Thais Marcelle. **Jornadas**: novos caminhos: matemática: 7º ano. São Paulo: Saraiva, 2022a. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/jornadas-matematica-7o-ano-pnld-2024-objeto-1-anos-finais-ensino-fundamental/. Acesso em: 08 fev. 2024.

ANDRADE, Thais Marcelle. **Jornadas**: novos caminhos: matemática: 8º ano. São Paulo: Saraiva, 2022b. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/jornadas-matematica-8o-ano-pnld-2024-objeto-1-anos-finais-ensino-fundamental/. Acesso em: 08 fev. 2024.

ANDRADE, Thais Marcelle. **Matemática interligada**: grandezas, sequências e matemática financeira. São Paulo: Scipione, 2020. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/matematica-interligada-grandezas-sequencias-e-matematica-fina/. Acesso em: 08 fev. 2024.

ASSIS, Thiago Albuquerque de; MIRANDA, José Garcia Vivas; MOTA, Fernando de Brito; ANDRADE, Roberto Fernandes Silva; CASTILHO, Caio Mário Castro de. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Salvador, v. 30, n. 2, p. 2304-2314, 21 jul. 2008.

BARBOSA, Elton Fernandes. **Sequências Aplicáveis para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, ago. de 2015.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal** – para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BATISTA, Bárbara Regina da Silveira. **Sequências Numéricas a partir da Geometria Fractal para Licenciandos em Matemática**. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 5 de abr. de 2017.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma Matemática**: Funções e Progressões. São Paulo: FDT, 2020.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R. da; GADANIDIS, George. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em desenvolvimento. 2. ed. Belo Horizonte: Grupo Autêntica, 2018. 155 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BOZZA, Morgana; SAUER, Laurete Zanol; MISSELL, Valquíria Villas Boas Gomes. A Geometria dos Fractais no ensino de Progressões Geométricas. **Scientia Cum Industria**, Caxias do Sul, v. 4, n. 4, p. 252-256, set. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programas do Livro**. Disponível em: https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro. Acesso em: 14 maio 2024.

CARLOS, Marciane Linhares. **Parâmetros no Geogebra na Construção de Circunferências**: um estudo sobre raciocínio generalizador com alunos do 3º ano do ensino médio. 2017. 145 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/157965. Acesso em: 05 jun. 2024.

CERQUEIRA, Ana Cecília Sanches. **Um estudo sobre sequências e séries**. 2013. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2013.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Ápis**: matemática: 4º ano. 2021. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/apis-mais-matematica-4o-ano-pnld-2023/. Acesso em: 02 fev. 2024.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: matemática: ensino fundamental 2. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Teláris Essencial**: matemática: 7º ano. São Paulo: Ática, 2022a. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/telaris-essencial-matematica-7o-ano-objeto-1-pnld-2024-anos-finais-ensino-fundamental/. Acesso em: 02 fev. 2024.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Teláris Essencial**: matemática: 8º ano. São Paulo: Ática, 2022b. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/telaris-essencial-matematica-8o-ano-objeto-1-pnld-2024-anos-finais-ensino-fundamental/. Acesso em: 03 fev. 2024.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos**: função exponencial, função logarítmica e sequências. São Paulo: Ática, 2020. Disponível em: https://www.edocente.com.br/pnld/matematica-em-contexto-funcao-exponencial-logaritmica-e-sequencias/. Acesso em: 05 fev. 2024.

ERNST, Bruno. **De ware geschiedenis van de Boom Van Pythagoras**. 2004. Disponível em: https://web.archive.org/web/20090118100209/http://www.arsetmathesis.nl/bruno0402.htm. Acesso em: 10 maio 2024.

FIGUEIRERO, Elisandra Bar de. **Plano de ensino de Análise Real**. Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2024. Disponível em: https://siga.udesc.br/siga-report/download/R-P463-138958802877643226 61.pdf?evento=arquivoDownload. Acesso em 19 jun. 2024.

FURLANETTO, José Rafael Santos. **Plano de ensino de Cálculo Diferencial e Integral II**. Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2024. Disponível em: https://siga.udesc.br/siga-report/download/R-P463-7960542625708394866.pdf?evento=arquivoDownload. Acesso em 19 jun. 2024.

FURTADO, Crispiniano de Jesus Gomes. Sequências e Conjecturas com o GeoGebra. **Revista do Instituto Geogebra de São Paulo**, [s. l], v. 7, n. 2, p. 95-110, set. 2018.

GALA, Paulo. **Econofisica para entender a complexidade dos mercados financeiros**. Disponível em: https://www.paulogala.com.br/para-entender-a-complexidade-dos-mercados-financeiros/. Acesso em: 17 jun. 2024.

GERVÁZIO, Suemilton Nunes. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa. C.Q.D. – **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 9, p. 42-55, jul. 2017. C.Q.D.- Revista Eletronica Paulista de Matematica. http://dx.doi.org/10.21167/cqdvol9201723169664sng4255.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática:** 4º ano. São Paulo: FDT, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 7º ano. São Paulo: FDT, 2018a.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática**: 8º ano. São Paulo: FDT, 2018b.

GITHUB. **Lyapunov**: a 2d/3d lyapunov fractal generator. a 2D/3D Lyapunov fractal generator. 2020. Disponível em: https://github.com/RokerHRO/lyapunov/blob/master/seq-AB.png. Acesso em: 17 jun. 2024.

GOOGLE MAPS. **Rio Nilo.** Disponível em: https://www.google.com/maps/place/Rio+Nilo/@22.7959315,32.0738174,8z/data=!4m6!3m5!1s0x145ab3a846ac45ad:0x623b3324fc34ab22!8m2!3d23.9727595!4d32.8749206!16zL20vMDViNXc?entry=ttu. Acesso em 05 jun. 2024.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**: volume IV. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2023.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004. 4 v.

LEIVAS, José Carlos Pinto; BATISTA, Bárbara Regina da Silveira. Sequências Numéricas e Fractais: uma conexão possível? **Poiésis**: Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação, Tubarão, v. 14, n. 25, p. 221-236, jan. 2020.

LESMOIR-GORDON, Nigel; ROOD, Will; EDNEY, Ralph. **Introducing Fractals**: a graphic gruide. Londres: Icon Book, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**: volume 1. 7. ed. São Paulo: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992.

LORENZATO, Sérgio. (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 2ª ed., Campinas: Autores Associados Ltda, 2009.

LUDMILA, Cojocari; PHELPS, Steve**. Sierpinski Triangle**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/yksp78cm> Acesso em: 12 jun. 2024.

MANDELBROT, Benoit. **The fractal geometry of nature**, New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

MANDELBROT, Benoit. **Objetos Fractais**: forma, acaso e dimensão. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

MARTINS, Thaís Regina Miranda. Perspectivas da avaliação formativa e o estudo de sequências numéricas. **Com A Palavra O Professor**, Vitória da Conquista, v. 44, n. 10, p. 209-224, set. 2019.

MATOS, Aline dos Reis. **O Infinito**. 2018. Disponível em: https://elaestaemtudo.ime.usp.br/?portfolio=new-mobile-app-2. Acesso em: 04 jul. 2023.

MATOS, José Manuel; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didática da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996. cap.7. “Recursos na aula de Matemática”, p.191-212.

MONTESSORI, M. **A Descoberta da Criança**: pedagogia científica. 1ª ed., Campinas, 2017.

MUCHERONI, Laís Fernandes. **Dimensão de Hausdorff e Algumas Aplicações**. 2017. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2017.

NASA. **NASA Hubble Sees Sparring Antennae Galaxies**. 2013. Disponível em: https://science.nasa.gov/centers-and-facilities/goddard/nasa-hubble-sees-sparring-antennae-galaxies/. Acesso em: 17 jun. 2024.

NASCIMENTO, Geovane Pereira do. **Progressões Aritméticas, Geométricas, Harmônicas**: aplicações e propostas de atividades. 2017. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2017.

OLIVEIRA, Rannyelle Rodrigues de; OLIVEIRA, João Luzeilton de; PAIVA, Rui Eduardo Brasileiro; LIMA, Antônia Emanuela Oliveira de. O software GeoGebra como aporte para o Ensino de Matemática e aplicação em sequências numéricas. **Revista do Instituto Geogebra de São Paulo**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 92-107, jun. 2021.

OXFORD LANGUAGES. **Iteração**. Oxford: Oxford University Press, 2024.

Disponível em: https://languages.oup.com/research/oxford-english-dictionary/. Acesso em: 06 maio 2024.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Metodologias Ativas**. Disponível em: https://professor.escoladigital.pr.gov.br/metodologias_ativas. Acesso em: 04 jul. 2024.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do Trabalho Científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RAMOS, Nélvia Santana. **Sequências Numéricas Como Desencadeadoras Do Conceito De Convergência**: episódios de resolução de tarefas. 2017. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

REIS, Jakson Ney da Costa. FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: explorando a árvore de pitágoras. **Ciência e Natura**, [S.L.], v. 37, p. 411, 7 ago. 2015. Universidade Federal de Santa Maria. http://dx.doi.org/10.5902/2179460x14636.

SEDREZ, Maycon Ricardo. A contribuição da arquitetura fractal para o ensino de CAAD. **Oculum Ensaios**, [S.L.], n. 1112, p. 44-57, 23 abr. 2012. Cadernos de Fe e Cultura, Oculum Ensaios, Reflexão, Revista de Ciências Medicas e Revista de Educação da PUC-Campinas. http://dx.doi.org/10.24220/2318-0919v0n11_12a153.

SERRA, Celso M. Penteado; KARAS, Elizabeth Wegner. **Fractais**: gerados por sistemas dinâmicos complexos. Curitiba: Champagnat, 1997.

SILVA, Pedro Costa da. **As desigualdades elementares e suas aplicações**. 2019. 113 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/27608/1/Desigualdadeselementaresaplica%C3%A7%C3%B5es_Silva_2019.pdf. Acesso em: 11 jun. 2024.

STEWART, James; CLEGG, Daniel; WATSON, Saleem. **Cálculo**, volume II. 8ª ed., São Paulo: Cengage Learning, 2023.

UDESC. **Projeto do Curso de Licenciatura em Matemática**. Centro de Ciências Tecnológicas, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2005. Disponível em: https://www.joinville.udesc.br/portal/ensino/graduacao/matematica/arquivos/PPC_Matematica.pdf. Acesso em 19 jun. 2024.

VALMORBIDA, Juliana Maria. **Uma Proposta de Atividades para o Estudo de Progressões Geométricas Utilizando Fractais e o Software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, ago. de 2018.

VENTURA, Dalia. **O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de 'impressão digital de Deus'**. 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301. Acesso em: 06 maio 2024.

YARED, Ivone. Metodologias ativas sob um olhar interdisciplinar. In: SILVA, Ana Lúcia Gomes da; ALMEIDA, Telma Teixeira de Oliveira (org.). **Interdisciplinaridade e Metodologias Ativa**: como fazer?. São Paulo: Cortez, 2023. p. 1-223.

ZAMBRANO, Vitória Garcia. **Tapete de Sierpinski**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/enrhm6zf> Acesso em: 12 jun. 2024.

ZAMBRANO, Vitória Garcia; CAMPUZANO, Juan Carlos Ponce. **Árvore de Pitágoras**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/enrhm6zf> Acesso em: 12 jun. 2024.

ZAMBRANO, Vitória Garcia; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. Um Estudo Sobre a Abordagem de Sequências Numéricas. *In:* MOVIMENTOS DOCENTES, v1, 2023, online. **Anais do Congresso Internacional Movimentos Docentes.** Santo André - SP: V&V Editora, outubro de 2023. p. 1573- 1582.

ZAMBRANO, Vitória Garcia; LUDMILA, Cojocari; PHELPS, Steve. **Triângulo de Sierpinski**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/w6czmu8m> Acesso em: 12 jun. 2024.

APÊNDICE A – PROPOSTA DE ATIVIDADE

Triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski leva esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Franciszek Sierpiński, que percebeu algumas propriedades desse fractal. Sua construção se dá através de um triângulo equilátero inicial, onde a cada iteração, são encontrados os pontos médios do triângulo e unidos até formar um triângulo central que é desprezado (Valmorbida, 2018[8]). Dessa forma, a cada nova iteração o triângulo maior é divido pelos menores. Observe a etapas no material concreto e aplicativo disponibilizado.

Com base no material concreto e considerando que o triângulo inicial tem lado igual a L, preencha o quadro abaixo e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de Δ	Lado de cada Δ	Perímetro de cada Δ	Perímetro total	Área de cada Δ	Área Total
0						
1						
2						
3						
4						

1. Com relação ao número de triângulos:
a) Escreva de maneira ordenada o número de triângulos gerados até a quinta iteração.
b) A partir da lista feita no item (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva-a.
c) De que maneira podemos generalizar a expressão para a enésima iteração da relação construída na questão anterior? Demonstre seu raciocínio.

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos triângulos:
a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de triângulos, há uma relação entre a medida dos lados de cada triângulo gerado por uma nova iteração. Escreva uma maneira de generalizar essa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão.
b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

3. Com relação à área dos triângulos:
a) Escreva de maneira ordenada a área de cada triângulo até a quinta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores.
b) O que acontece com a soma das áreas de todos os triângulos restantes em cada iteração? Justifique sua resposta com argumentos intuitivos e tente formalizar essa resposta matematicamente.
c) Em cada iteração são retirados os triângulos centrais. Que valor obtemos se somarmos a área desses triângulos retirados até a quarta iteração? O que acontece se continuarmos somando as áreas de todos os triângulos retirados? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.
d) Há relação entre a soma do item (b) e do item (c)? Justifique.

---

[8] VALMORBIDA, J. M. **Uma Proposta de Atividades para o Estudo de Progressões Geométricas Utilizando Fractais e o Software GeoGebra**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, ago. de 2018.

Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski leva esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Franciszek Sierpiński, que percebeu algumas propriedades desse fractal. Para sua construção, temos inicialmente um quadrado de lado L, que é divido em nove outros quadrados, tendo cada novo quadrado o lado igual a $\frac{L}{3}$, e o quadrado central é removido (Valmorbida, 2018[9]). Esse procedimento pode ser realizado infinitas vezes. Observe a etapas no material concreto e no aplicativo disponibilizado.

Com base no material concreto, e considerando que o quadrado inicial tem lado igual a L, preencha o quadro abaixo e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de □	Lado de cada □	Perímetro de cada □	Perímetro total	Área de cada □	Área Total
0						
1						
2						
3						
4						

1. Com relação ao número de quadrados:
a) Escreva de maneira ordenada o número de quadrados gerados até a quinta iteração.
b) A partir da lista feita no item (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva-a.
c) De que maneira podemos generalizar a enésima iteração da relação construída na questão anterior? Demonstre seu raciocínio.

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos triângulos:
a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de quadrados, há uma relação entre a medida dos lados de cada quadrado gerado por uma nova iteração. Escreva uma maneira de generalizar essa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão.
b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

3. Com relação à área dos quadrados:
a) Escreva de maneira ordenada a área de cada quadrado restante até a quinta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores.
b) O que acontece com a soma das áreas de todos os quadrados restantes em cada iteração? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.
c) Em cada iteração são retirados os quadrados centrais. Que valor obtemos se somarmos a área desses quadrados retirados até a quarta iteração? O que acontece se continuarmos somando as áreas de todos os quadrados retirados? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.
d) Há relação entre as somas obtidas no item (b) e no item (c)? Justifique.

---

[9] VALMORBIDA, J. M. **Uma Proposta de Atividades para o Estudo de Progressões Geométricas Utilizando Fractais e o Software GeoGebra**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, ago. de 2018.

Árvore de Pitágoras

Esse fractal, como podemos perceber pelo nome, nasce de uma construção feita a partir do teorema de Pitágoras. Para sua construção, o primeiro passo é criar um quadrado, para em seguida, usando como base os lados de cima desse quadrado, criar um triângulo retângulo isósceles que tenha como hipotenusa essa base, assim será possível adicionar outros dois quadrados com lado igual aos cateteos do triângulo (Reis, 2014[10]). Seguindo esse padrão, a cada nova iteração teremos a nossa árvore, onde o quadrado sobre a hipotenusa passará a ser o tronco da árvore.

Com base no material concreto e no aplicativo do GeoGebra, e considerando que o quadrado inicial tem um lado igual a L, preencha o quadro abaixo e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de □ novos	Lado de cada novo □	Perímetro de cada novo □	Perímetro total	Área de cada novo □	Área Total
0						
1						
2						
3						
4						

1. Com relação ao número de novos quadrados:
a) Escreva de maneira ordenada o número de novos quadrados gerados até a quarta iteração.
b) A partir da lista feita na letra (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva essa relação.
c) De que maneira podemos generalizar a enésima iteração da relação construída na questão anterior (desconsidere as sobreposições)? Demonstre seu raciocínio.

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos quadrados:
a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de triângulos, há uma relação entre a medida dos lados de cada triângulo gerado por uma nova iteração. Escreva uma generalização dessa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão.
b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

3. Com relação à área dos quadrados:
a) Escreva de maneira ordenada a área de cada novo quadrado até a quarta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores.
b) O que acontece com a soma das áreas de todos os quadrados em cada iteração? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.

---

[10] REIS, Jakson Ney da Costa. FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: explorando a árvore de pitágoras. **Ciência e Natura**, [S.L.], v. 37, p. 411, 7 ago. 2015. Universidad Federal de Santa Maria. http://dx.doi.org/10.5902/2179460x14636.

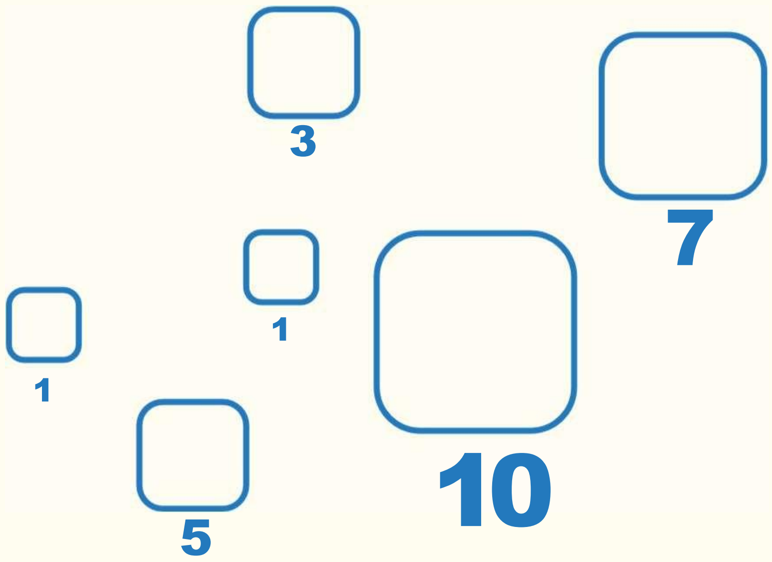
APÊNDICE B – SLIDES

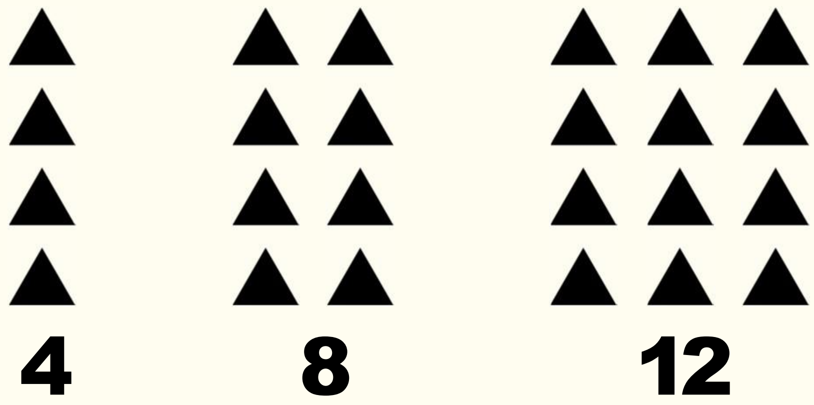
Sequências Numéricas e Fractais

Uma proposta de ensino através de materiais manipuláveis

Sequências Numéricas

Sequências numéricas são listas ordenadas de elementos, que são denominados termos da sequência (Dante, 2020).





Termos da Sequência

Cada elemento de uma sequência é denominado termo da sequência. Esse termo pode ser representado por uma letra acompanhada de um índice, que informa a posição ou a ordem dele na sequência.

Na sequência de Fibonacci temos que:

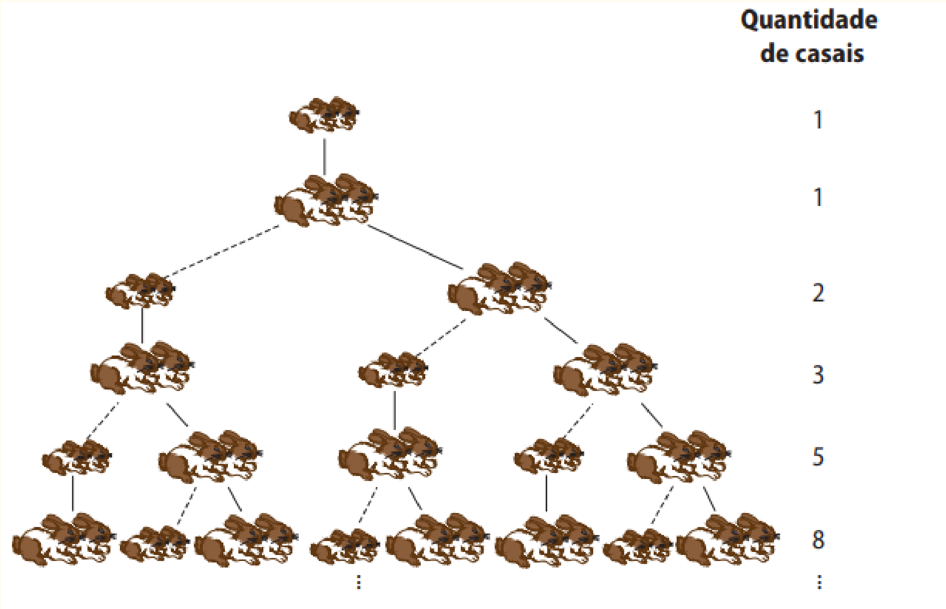
$a_1 = 1$ é o primeiro termo

$a_2 = 1$ é o segundo termo

$a_3 = 2$ é o terceiro termo

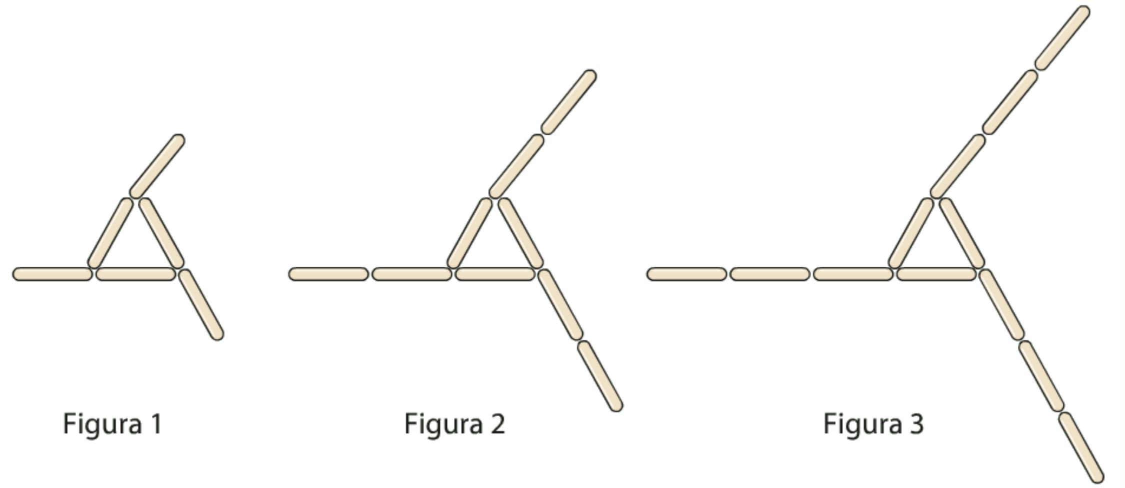
$a_4 = 3$ é o quarto termo

$\vdots$



Termos da Sequência

Exercício 1: Carlotta utilizou palitinhos de picolé para construir a seguinte sequência

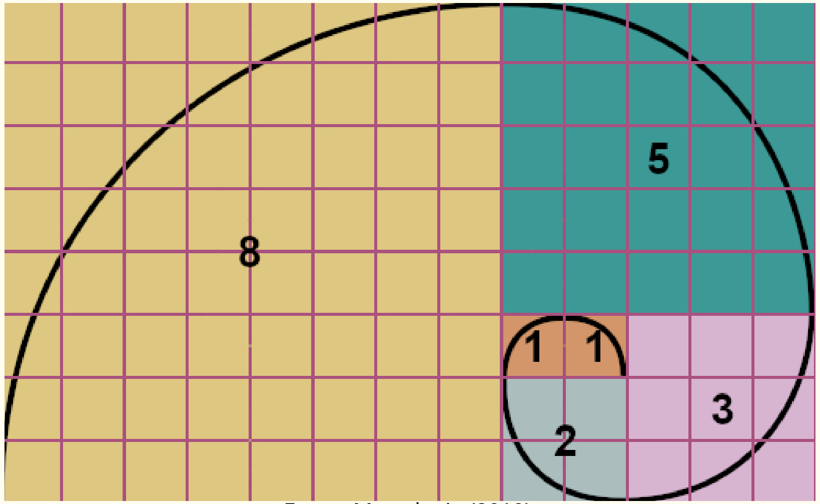


Pensando nas figuras 4 e 5, quantos palitinhos serão necessários para construí-las?

Lei de Formação

Toda sequência está definida por uma relação de recorrência, ou seja, existe uma relação entre os termos que nos permite calcular os seguintes.

Para a sequência finita temos que a lei de formação será dada por uma função de domínio igual ao conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ e o contradomínio igual ao conjunto dos números reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\dots, f(n) = a_n$ (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020).

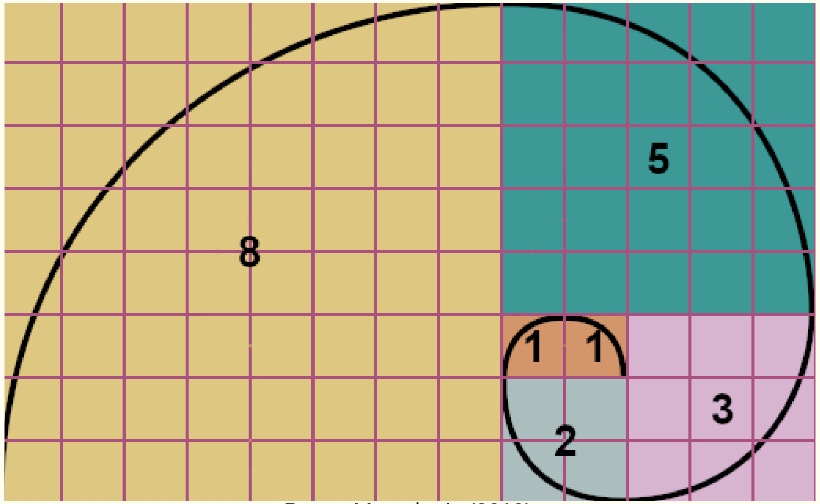


Fonte: Metrologia (2019).


Fonte: Freire (2023).

Lei de Formação

Para a sequência infinita temos que a lei de formação será dada por uma função cujo domínio é o conjunto dos naturais não nulos, ou seja, $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e o contradomínio o conjunto dos reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\ldots, f(n) = a_n, f(n+1) = a_{n+1}, \ldots$ (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020).

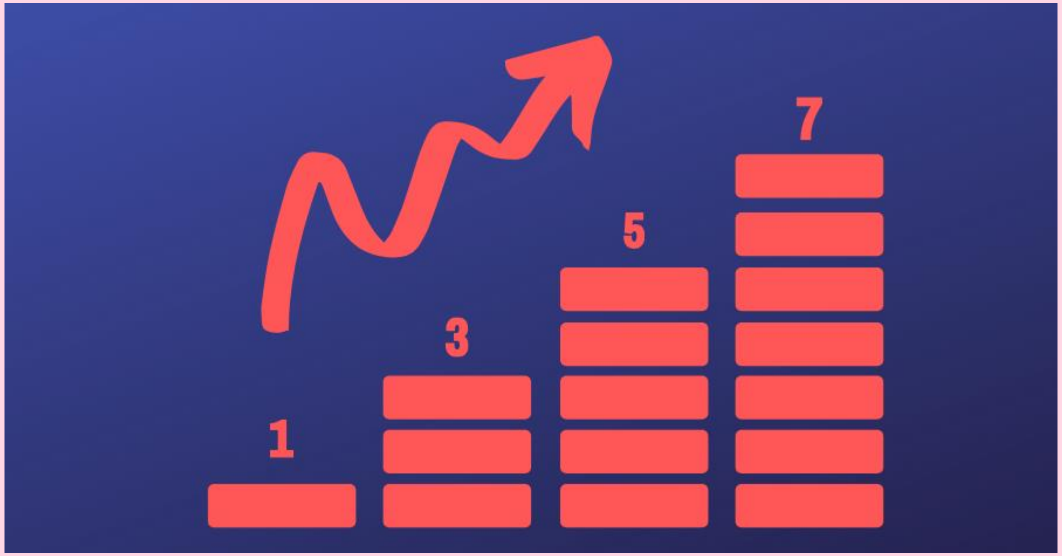


Fonte: Metrologia (2019).

Fonte: Freire (2023).

Progressão Aritmética

Progressão Aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante r, chamada de razão da progressão.

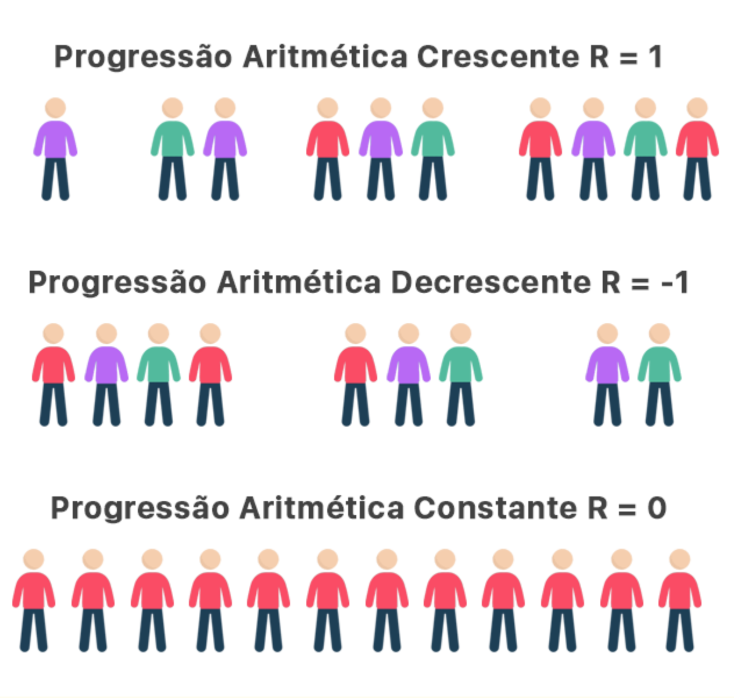


Fonte: Wolfart (2020).

Progressão Aritmética

Considerando o primeiro termo como a_1 e a razão como r, podemos classificar uma PA como:

- Crescente, se $r > 0$;
- Decrescente, se $r < 0$;
- Constante, se $r = 0$.



Fonte: Ferretto (2019).

Termo Geral da PA

Seja uma PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ com primeiro termo a_1 temos:

$$a_2 = a_1 + r;$$
$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$
$$\dots$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Assim, temos que o termo geral é $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Exercício 2

Uma avenida tem 4000 m de extensão e vai receber em seu canteiro central o plantio de palmeiras imperiais. A distância entre as mudas deve ser de 15 m, e a primeira planta vai ficar a 10 m do início da avenida. Quantas palmeiras devem ser plantadas?

Soma dos Termos da PA

Seja uma PA qualquer dada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Podemos perceber que, ao somar dois extremos temos:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2)r = 2a_1 + (n-2+1)r = 2a_1 + (n-1)r$$
$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + a_1 + (n-3)r = 2a_1 + (n-3+2)r = 2a_1 + (n-1)r$$

Soma dos Termos da PA

Repare que as somas entre os termos equidistantes são iguais, então podemos generalizar a soma como:

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$

$2S_n = (a_1 + a_n)n$

Assim, temos que o termo geral da PA é dado por $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Exercício 3

(USCS-SP) Um laboratório que foi credenciado para produzir certa vacina. No primeiro mês, irá produzir 80000 unidades e, a cada mês, aumentará essa quantidade em 20000 unidades. Mantidas essas condições, em um ano e meio de produção ininterrupta, qual será a quantidade total de vacinas produzidas nesse laboratório?

Progressão Geométrica

Progressão geométrica é toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante chamada de razão (q) da progressão.

Fonte: Wolfart (2020).

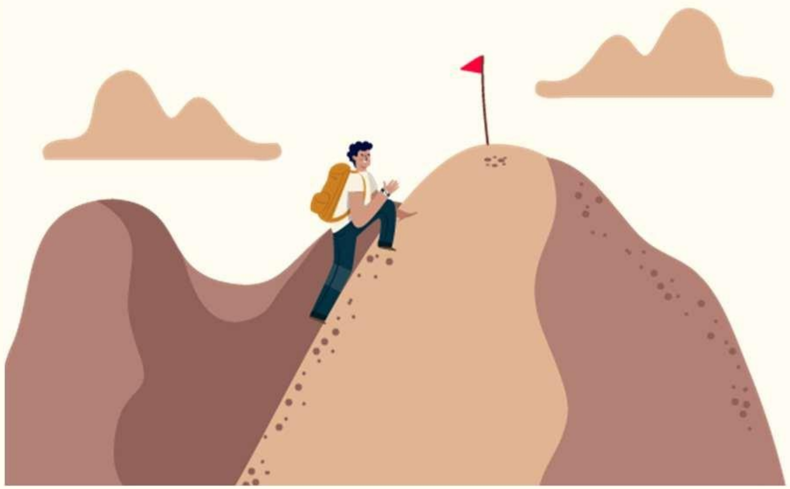
Progressão Geométrica

Considerando o primeiro termo e o valor da razão, podemos classificar uma PG como:

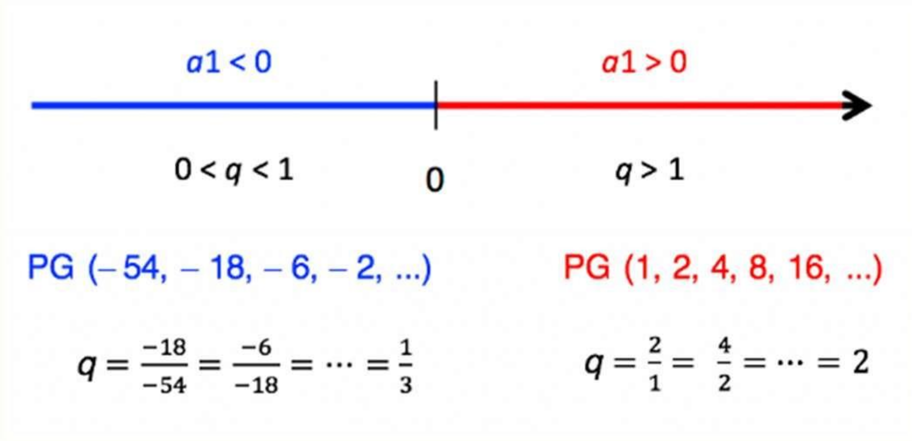
- **Crescente;**
- **Decrescente;**
- **Oscilante;**
- **Constante.**

Progressão Geométrica

Crescente: Cada termo é maior do que o anterior. Isso ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

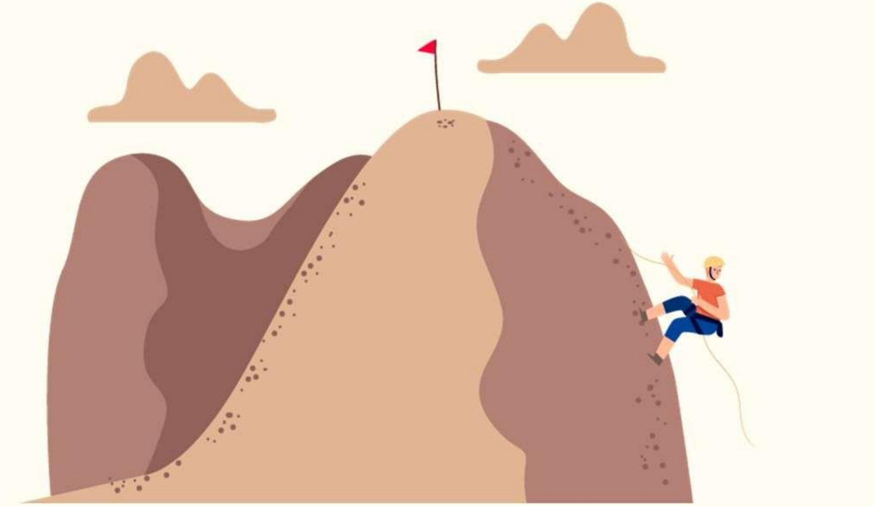


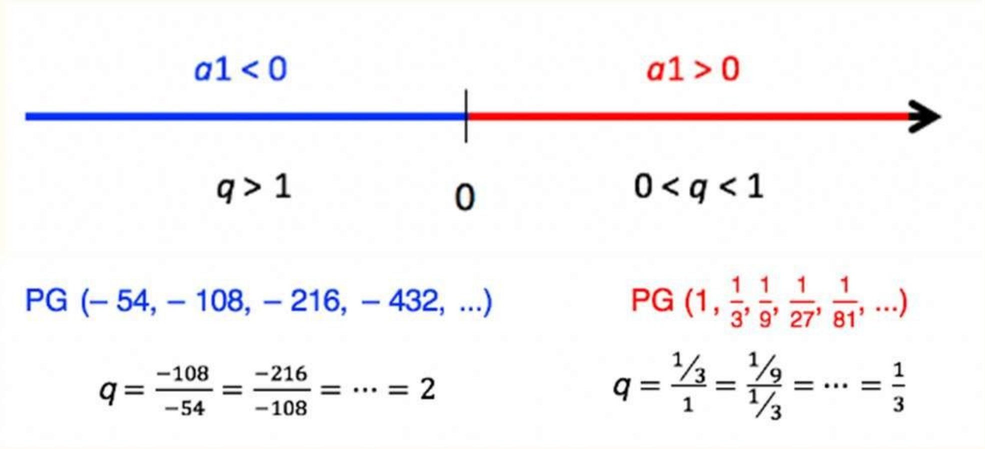
Fonte: Ferreto (2019).



Progressão Geométrica

Decrescente: Cada termo é menor do que o anterior. Isso ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.





Fonte: Ferreto (2019).

Progressão Geométrica

Oscilante: Os termos da sequência oscilam entre valores positivos e negativos. Isso ocorre quando o primeiro termo é um número real diferente de zero, e a razão é um número negativo, isto é, $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Fonte: Ferreto (2019).

PG (5, – 10, 20, – 40, 80, ...)

$$q = \frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \cdots = -2$$

Progressão Geométrica

Constante: Todos os termos da sequência são iguais ao primeiro. Isso ocorre quando sua razão é igual a 1.

Fonte: Ferreto (2019).

PG (5, 5, 5, 5, 5, ...)

$$q = \frac{5}{5} = \frac{5}{5} = \cdots = 1$$

Termo Geral da PG

(UE – PA) Exercício 4: Um carro, cujo preço à vista é R$ 24000,00, pode ser adquirido dando- se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R$ 4000,00 e a quarta parcela de R$ 1000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

Termo Geral da PG

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ uma PG infinita qualquer, temos:

$$a_2 = a_1 . q$$
$$a_3 = a_2 . q = (a_1 . q) . q = a_1 q^2$$
$$a_4 = a_3 . q = (a_1 . q^2) . q = a_1 q^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} . q = (a_1 . q^{n-2}) . q = a_1 q^{n-1}$$

Dessa forma, $a_n = a_1 q^{n-1}$, onde a_n é o termo geral da PG.

Soma de PG Finita

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ uma PG finita qualquer, temos:

Podemos obter a soma S_n de todos os termos dessa PG considerando dois casos distintos:

1º caso: Se $q = 1$, essa PG é constante, portanto a soma é dada por $S_n = a_1 . n$, sendo n o número de termos da PG.

Soma de PG Finita

2º caso: Se q≠1, temos que

$S_n = a_1 + a_1 . q + \cdots + a_1 . q^{n-1}$

Se multiplicarmos essa equação por q temos $q . S_n = a_1 . q + \cdots + a_1 . q^n$

Agora, fazendo a subtração dessas duas equações

$q . S_n - S_n = a_1 . q + \cdots + a_1 . q^n - (a_1 + a_1 . q + \cdots + a_1 . q^{n-1})$

$q . S_n - S_n = \cancel{a_1 . q} - \cancel{a_1 . q} + \cdots + \cancel{a_1 . q^{n-1}} - \cancel{a_1 . q^{n-1}} + a_1 . q^n$

$q . S_n - S_n = -a_1 + a_1 . q^n \Rightarrow S_n (q - 1) = -a_1 + a_1 . q^n \Rightarrow S_n = a_1 . \frac{(q^n - 1)}{(q-1)}$

Soma de PG Infinita

A soma dos termos de uma PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \ldots)$ é dada por

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$\vdots$$

Soma de PG Infinita

Quando $-1 < q < 1$, temos que $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Para provar isso, faremos:

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = a_1 . \frac{(q^n - 1)}{(q-1)} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} . q^n$$

Lembrando que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ e isso resulta em $\lim_{n\to\infty}\left(S_n - \frac{a_1}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{a_1}{1-q} . q^n$

$-\frac{a_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Então, $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Soma de Progressões Geométricas

Assim, temos as seguintes equações:

PG Finita:

$$S_n = \boxed{\frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

PG Infinita:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Bonjorno, Giovanni Jr. e Paulo Câmara, 2020

Exercício 5

Calcule o valor de x na igualdade:

$$x + 3x + 9x + ... + 729x = 5465$$

sabendo que os termos do 1º membro formam uma PG e que x não é nulo.

Exercício 6

Entre os números 18 e b foram inseridos dois termos, obtendo-se uma PG de razão 3. Qual é o valor de b?

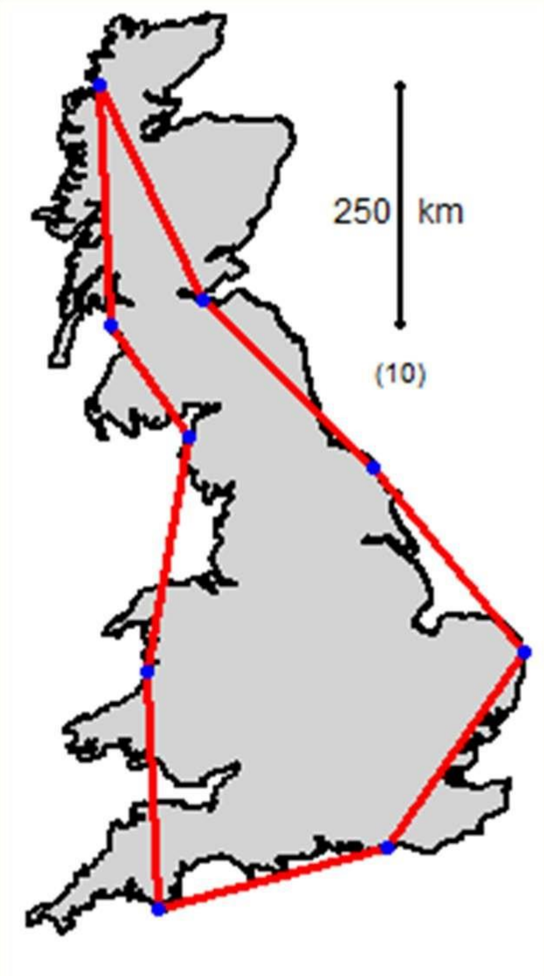
Exercício 7

(UFJF-MG) Uma bola de borracha cai de uma altura de 30 metros. Após o choque com o solo, a bola sobe a uma altura igual a $\frac{1}{3}$ da altura anterior. Se deixarmos a bola subir e descer sem interrupção, qual será a distância total percorrida por ela?

Paradoxo do Litoral

Quanto mede a costa da Grã-Bretanha?

Aproximadamente 2500km

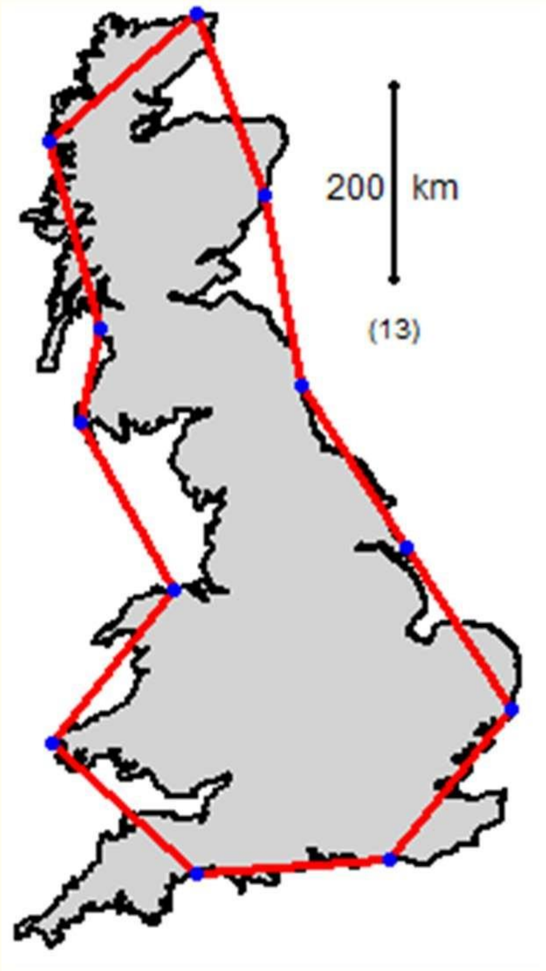


Fonte: Gurunk, 2017

Paradoxo do Litoral

Quanto mede a costa
da Grã-Bretanha?

Aproximadamente 2600km

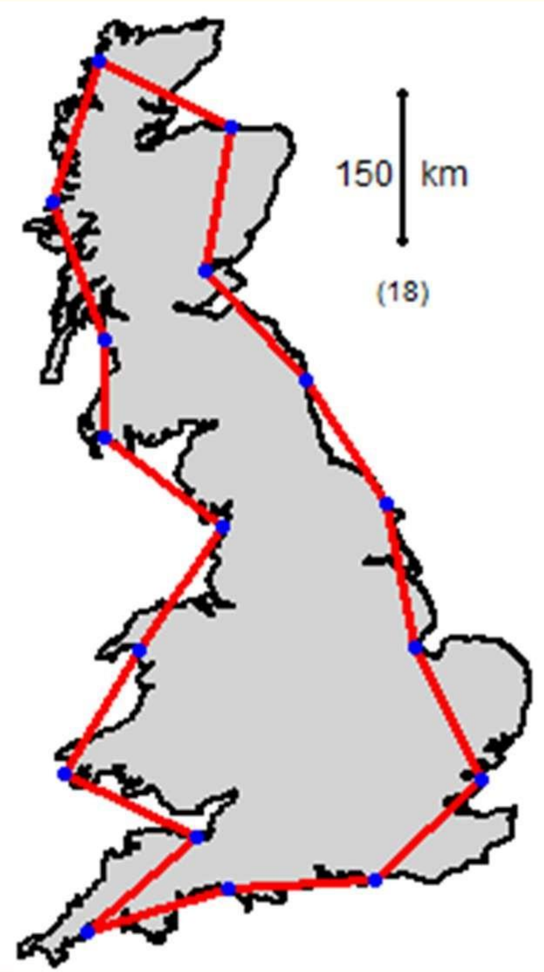


Fonte: Gurunk, 2017

Paradoxo do Litoral

Quanto mede a costa da Grã-Bretanha?

Aproximadamente 2700km

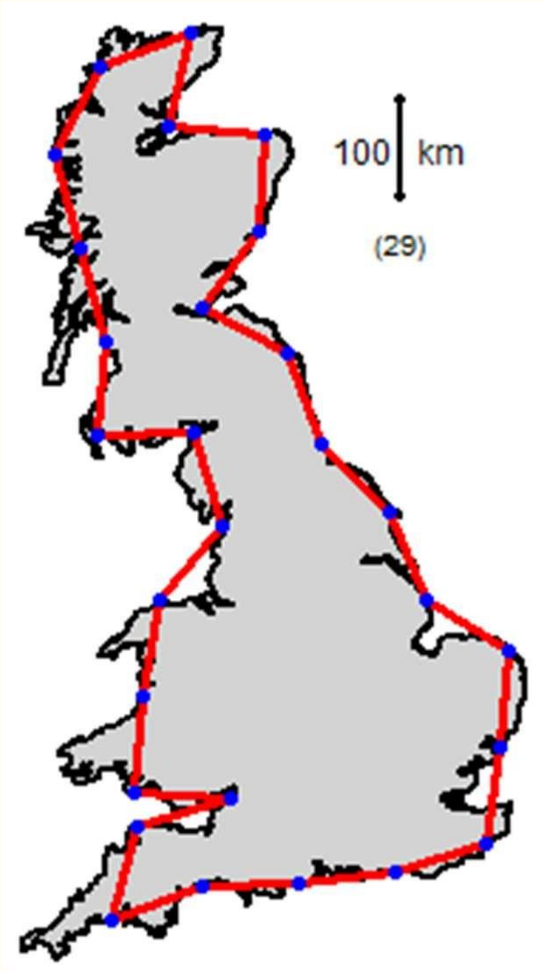


Fonte: Gurunk, 2017

Paradoxo do Litoral

Quanto mede a costa da Grã-Bretanha?

Aproximadamente 2900km

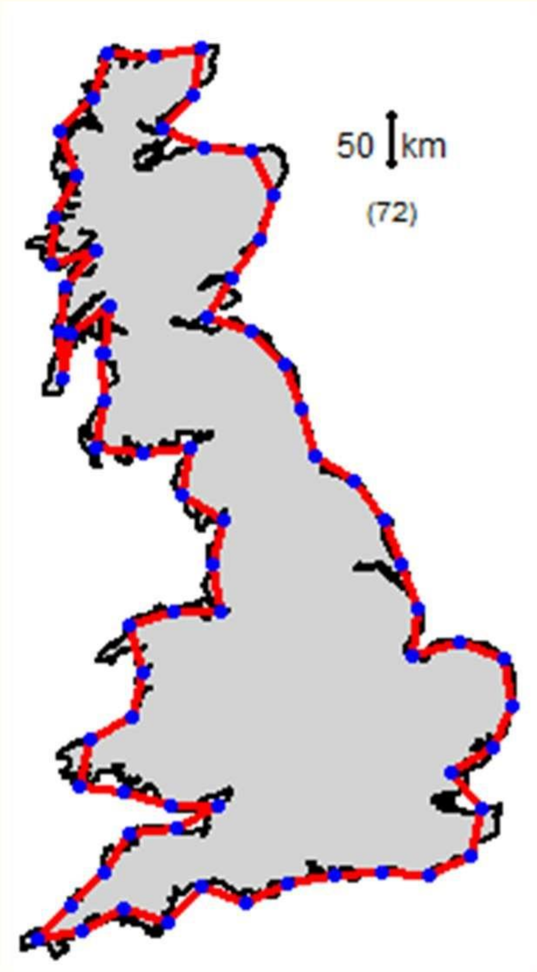


Fonte: Gurunk, 2017

Paradoxo do Litoral

Quanto mede a costa da Grã-Bretanha?

Aproximadamente 3600km

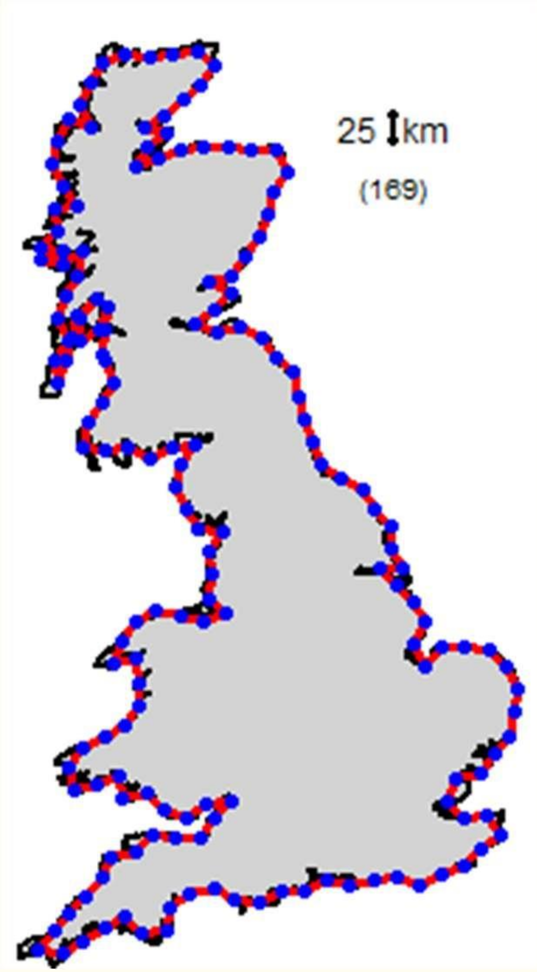


Fonte: Gurunk, 2017

Paradoxo do Litoral

Quanto mede a costa da Grã-Bretanha?

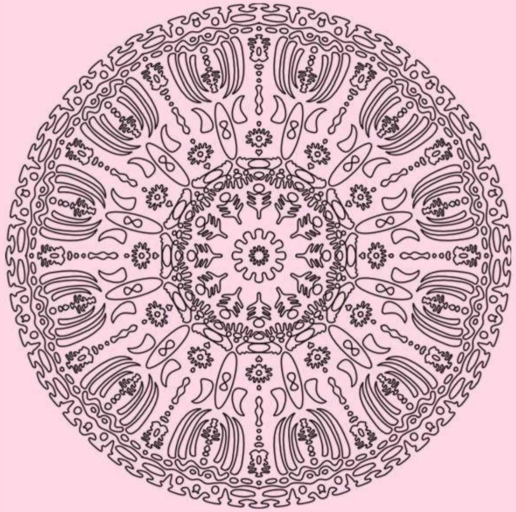
Aproximadamente 4225km

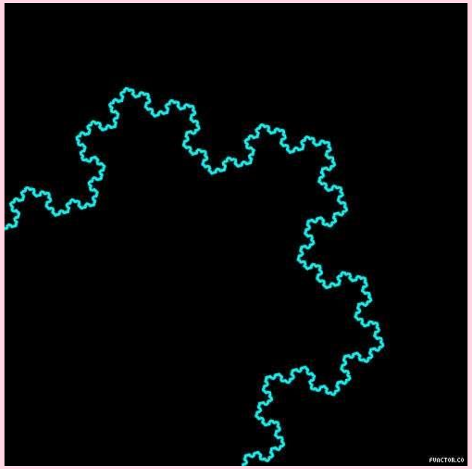


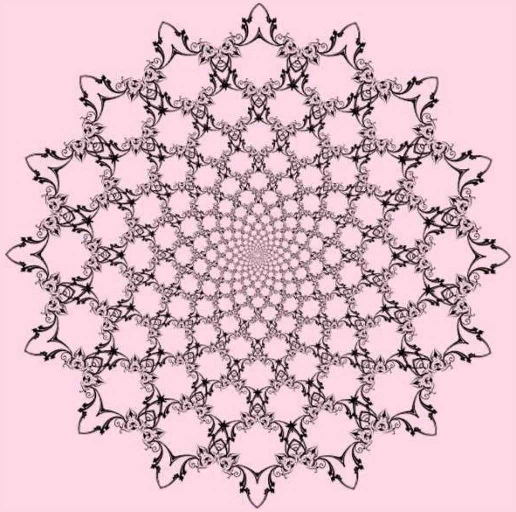
Fonte: Gurunk, 2017

Fractais

Fractais são formas cujas partes são semelhantes ao todo, ou seja, quando repartimos um fractal ele ainda mantém a sua forma original, seja ela um quadrado, triângulo ou círculo (Barbosa, 2005).







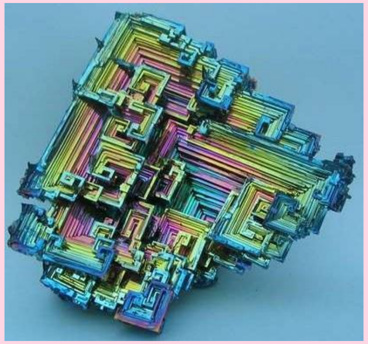
Fractais na Natureza

Fonte: Romanzoti, 2017.

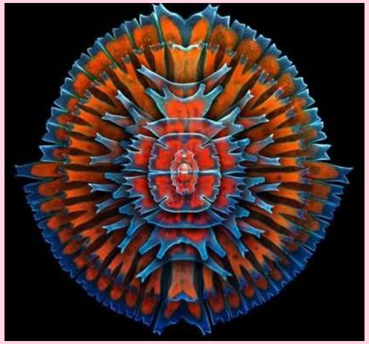
Fonte: Lopez, 2016.

Fonte: Torres, 2010.

Fonte: Torres, 2010.

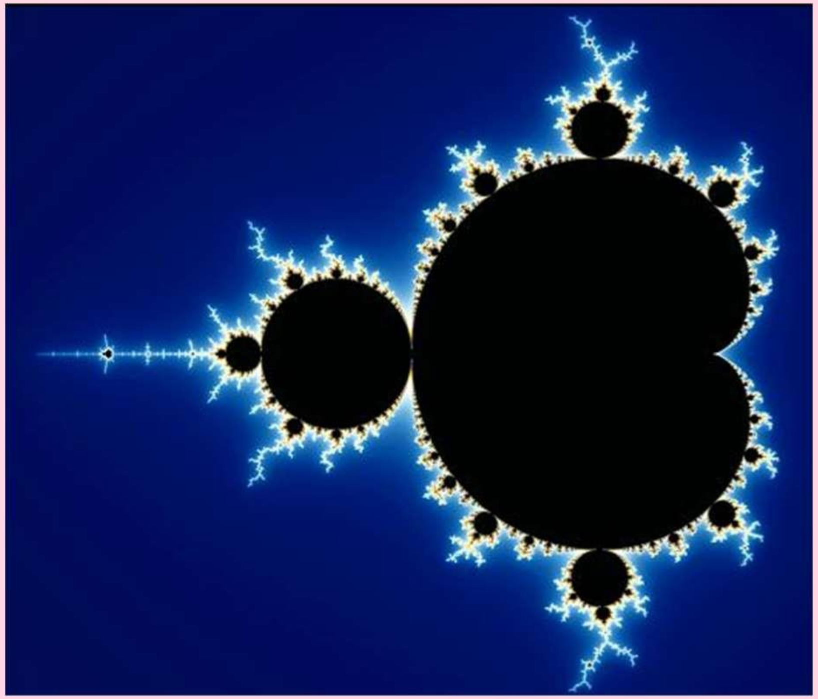


Fonte: Romanzoti, 2017.

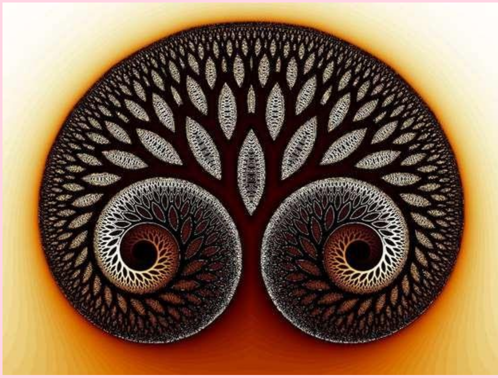


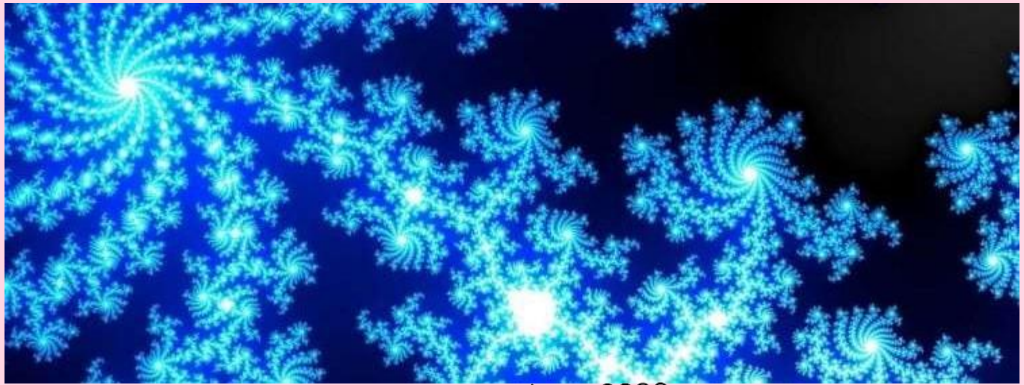
Fonte: Romanzoti, 2017.

Fractais na Matemática


Fonte: Público, 2010.


Fonte: Gasparini, 2012.


Fonte: Gasparini, 2012.


Fonte: Marciano, 2020.

REFERÊNCIAS

FERRETTO, Professor. **Definição e Classificação de uma Progressão Aritmética**. 2019. Disponível em: https://blog.professorferretto.com.br/definicao-e-classificacao-de-uma-pa/. Acesso em: 17 jun. 2024.

FERRETO, Professor. **Definição e Classificação de uma Progressão Geométrica**. 2019. Disponível em: https://blog.professorferretto.com.br/definicao-e-classificacao-de-uma-pg/. Acesso em: 07 jun. 2024.

FREIRE, Noelia. **Os segredos da proporção áurea, a marca da matemática na natureza**. 2023. Disponível em: https://www.nationalgeographic.pt/ciencia/segredos-proporcao-aurea-marca-matematica-na-natureza_4357. Acesso em: 05 jun. 2024.

GASPARINI, Eliana Ada. **Fractais**: a arte da matemática. A arte da matemática. 2012. Disponível em: https://coisasdeada.blogspot.com/2012/05/fractais-arte-da-matematica.html. Acesso em: 08 jun. 2024.

GURUNG, K**. Fractal Dimension in Architecture**: An exploration of Spatial Dimension. 2017. Dissertação de Mestrado – Hochschule Anhalt, Bernburg, 29 de ago. de 2017.

LOPEZ, Alvaro**. Los enigmáticos fractales y sus insospechados usos**. 2016. Disponível em: Los enigmáticos fractales y sus insospechados usos. Acesso em: 08 jun. 2024.

MARCIANO, Elainy. **Fractais**. 2020. Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/fractais/. Acesso em: 08 jun. 2024.

METROLOGIA, Almanaque de. **A Sequência Fibonacci**. 2019. Disponível em: https://ipemsp.wordpress.com/2019/11/11/a-sequencia-fibonacci/. Acesso em: 05 jun. 2024.

REFERÊNCIAS

NUNES, Vitor. **Sequências e regularidades**. Disponível em: https://www.matematica.pt/aulas-exercicios.php?id=145. Acesso em: 17 jun. 2024.

PÚBLICO. **Viagem ao interior dos fractais**. 2010. Disponível em: https://www.publico.pt/2010/10/19/jornal/viagem-ao-interior-dos-fractais-20433854. Acesso em: 08 jun. 2024.

ROMANZOTI, Natasha. **10 estonteantes fractais encontrados na natureza**. 2017. Disponível em: https://hypescience.com/10- estonteantes-fractais-encontrados-na-natureza/. Acesso em: 08 jun. 2024.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Exercícios sobre Progressão Geométrica**. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-progressao-geometrica.htm. Acesso em: 07 jun. 2024.

TORRES, David de. **Fractales en la Naturaleza**. 2010. Disponível em: https://www.ccapitalia.net/?p=333. Acesso em: 08 jun. 2024.

WOLFART, João Vitor. **Progressão Aritmética**. 2020. Disponível em: https://jv-matematica.pinheirasc.com/blog/2020/08/11/elementor-263/. Acesso em: 17 jun. 2024.

WOLFART, João Vitor. **Progressão Geométrica**. 2020. Disponível em: https://jv-matematica.pinheirasc.com/blog/category/matematica/progressao-geometrica/. Acesso em: 07 jun. 2024.