UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA-CCT

PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

João Paulo Weselovski da Silva

Análise do comportamento dinâmico linear de membranas hiperelásticas considerando os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin

Joinville

2020

João Paulo Weselovski da Silva

Análise do comportamento dinâmico linear de membranas hiperelásticas considerando os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros (UDESC/CCT)

Coorientadora: Profª. Dra. Marianna Ansiliero De Oliveira Coelho Lorencet (HZ University of Applied Science)

Joinville

2020

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Weselovski da Silva, João Paulo
Análise do comportamento dinâmico linear de membranas hiperelásticas considerando os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin / João Paulo Weselovski da Silva. -- 2020.
120 p.

Orientador: Ricardo de Medeiros
Coorientadora: Marianna Ansiliero De Oliveira Coelho Lorencet
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2020.

1. Modelo neo-Hooke. 2. Características Dinâmicas da Membrana. 3. Influência da Geometria, Membrana hiperelástica. I. de Medeiros, Ricardo. II. Ansiliero De Oliveira Coelho Lorencet, Marianna. III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Titulo.

João Paulo Weselovski da Silva

Análise do comportamento dinâmico linear de membranas hiperelásticas considerando os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica de Programa De Pós-Graduação Em Engenharia Mecânica Do Centro De Ciências Tecnológicas – CCT, da Universidade do Estado de Santa Catarina – Udesc.
Orientador: Prof. Dr. Ricardo de Medeiros

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo de Medeiros
CCT /UDESC (Orientador/ Presidente)

Membros:

Marianna Ansiliero De Oliveira Coelho Lorencet
(HZ University of Applied Science)

Prof. Dr. Miguel Vaz Júnior
CCT /UDESC

Prof. Dr. Elvidio Gavassoni Neto
UFPR

Joinville, 04 de Novembro de 2020.

“ Dedico este trabalho a minha namorada Fernanda, aos meus pais Voleni e Lourdes, minha irmã Ana Carolina.”

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a DEUS e aos Orixás, por tantas oportunidades, por estarem sempre ao meu lado me guiando em meu caminho.

A toda minha família, que sempre estiveram ao meu lado em todos os momentos.

Ao professor Dr. Ricardo de Medeiros e a professora Dra. Marianna Ansiliero de Oliveira Coelho Lorencet pelo tempo dedicado à orientação e apoio na elaboração deste trabalho.

À Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, pelos conhecimentos e disponibilização de materiais necessários para a elaboração deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC – 2017TR1747, 2017TR784 e 2019TR779), pelo suporte financeiro.

Resumo

Por apresentar uma grande versatilidade, as membranas vêm ganhando cada vez mais destaque em diversas áreas da engenharia, alguns exemplos de aplicação são na cobertura de estruturas, biomecânica e aplicações aeroespaciais. Com as crescentes aplicações, surgiram a necessidade de conhecer o comportamento dinâmico de membranas estruturais hiperelásticas. Esses estudos têm grande importância, pois buscam entender o comportamento da membrana, e assim evitar que a mesma perca estabilidade. Assim, este trabalho busca avaliar a influência da geometria da membrana na frequência natural da estrutura. Para determinação das frequências naturais, de forma analítica, utilizar-se-á modelos constitutivos neo-Hooke e Mooney-Rivlin. Sendo estes desenvolvidos para determinar a frequência natural de estruturas de membrana considerando uma geometria quadrada. As formulações geradas a partir destas equações foram validadas comparando com resultados experimentais retirados das literaturas. Esses resultados analíticos serão usados para validar o modelo computacional das membranas. Para a análise numérica foi empregado o software de elementos finitos Abaqus®, juntamente com o modelo neo-Hooke. Com os modelos computacionais validados, torna-se possível alterar a geometria, e assim verificar a influência da geometria no comportamento dinâmico das membranas. Vale ressaltar que o estudo computacional permitiu analisar diferentes tipos de geometria, sem a necessidade de uma nova formulação analítica para cada uma das geometrias analisadas, tornando assim as análises mais ágeis e possibilitando compreender o comportamento de geometrias mais complexas.

Palavras-Chave: Modelo neo-Hooke, Características Dinâmicas da Membrana, Influência da Geometria, Membrana hiperelástica.

Abstract

Due to their great versatility, membranes are gaining more prominence in several areas of engineering. Some examples of application are structures roofs, biomechanics, and aerospace. With the increase of applications, the need to know or interact with these hyper elastic situations arose. These studies are of great importance, as they aim to understand the behavior of membrane and thus avoid the same loss of capacity. Therefore, this work goals to evaluate the geometry influence of membrane on the natural frequency. To determine analytically the natural frequencies, the neo-Hooke and Mooney-Rivlin constitutive models were analyzed. These were developed to determine the natural frequency of membrane structures considering a square geometry. The formulations were validated using experimental results. The analytical results were used to validate the computational model of the membranes. For numerical analysis, the finite element software Abaqus® was used, together with the neo-Hooke model. With the validated computational models, it becomes possible to change the geometry, and thus verify the influence of geometry on the dynamic behavior of membranes. It is worth to mention that the computational study allowed the analysis of different types of geometry, without the need to perform a new analytical formulation for each new geometry. Thus making the analysis more agile and possible to understand the behavior of more complex geometries.

Keywords: Neo-Hooke Model, Dynamic Membrane Characteristics, Influence of Geometry.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

Símbolos romanos

A	determinante da matriz covariante da membrana deformada
a	determinante da matriz covariante da membrana indeformada
$A_{\alpha\beta}$	matriz covariante da membrana deformada
$A^{\alpha\beta}$	matriz contra variante da membrana deformada
$a_{\alpha\beta}$	matriz covariante da membrana indeformada
$a^{\alpha\beta}$	matriz contra variante da membrana indeformada
C_i, C_{ij}, C_1, C_2	parâmetros do material
E	energia elástica de deformação
f_x	força tracionada aplicada na direção do eixo x
f_y	força tracionada aplicada na direção do eixo y
h	espessura da membrana indeformada
i, j	parâmetros para a quantidade de termos de uma série
Ii, I_1, I_2, I_3	invariantes de deformação
k_0	razão entre as dimensões na direção y e x da membrana indeformada
k_0	razão entre as dimensões na direção y e x da membrana deformada
L	função de Lagrange
L_{xo}	dimensão na direção do eixo x da membrana indeformada
L_{yo}	dimensão na direção do eixo y da membrana indeformada
M	índice métrico danos
m	número de semi-ondas na direção x
n	número de semi-ondas na direção y
R_e	energia de amortecimento

T	energia cinética
W	funções de densidade de energia de deformação
W_e	trabalho das forças externas
x, y, z	coordenadas do plano cartesiano da membrana indeformada
X, Y, Z	coordenadas do plano cartesiano da membrana deformada

Símbolos gregos

α	razão entre o segundo e primeiro parâmetros do material
Γ	massa específica da membrana
δ_i, δ_x, δ_y	razões entre o comprimento deformado e indeformado da membrana
ζ	coeficiente de amortecimento
λ_i, λ_1, λ_2, λ_3	extensões principais no plano da membrana
μ	módulo de cisalhamento para deformações infinitesimais
Π	energia potencial
σ_i, σ_1, σ_2	tensões nas direções principais
ω_{mn}	frequência natural dimensional da membrana

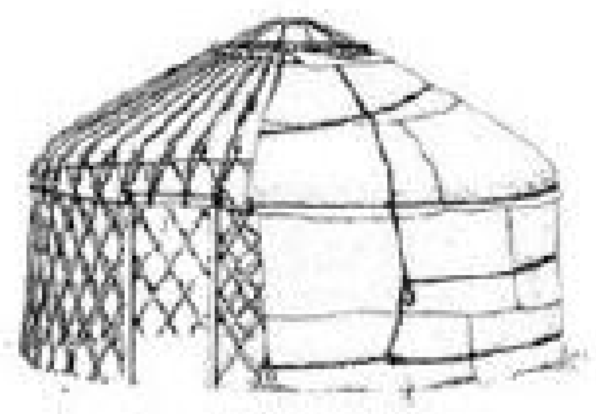
Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

As membranas vêm sendo usadas para a cobertura de estruturas a pelo menos 2 mil anos, onde povos nômades usavam peles de animais para cobrir suas tendas, pois as peles proporcionavam uma maior facilidade para a montagem e desmontagem das tendas (ROBBIN, 1996; SILVA, 2006). A Figura 1.1 mostra as tendas usadas pelos povos nômades.

Figura 1-1: Tenda nômade coberta por peles de animais



Fonte: Adaptado de Silva (2006).

Com o passar dos anos as membranas ganharam uma grande versatilidade, sendo empregadas nas mais diversas áreas de estudos, como por exemplo, estruturas arquitetônicas, uso médico, contêineres, entre outras aplicações (TEIXEIRA *et al.*, 2001). Shin *et al.* (2005) e Wissler e Mazza (2007) destacam que, nos últimos anos, as membranas estão sendo utilizadas na fabricação de sensores. Ainda, salienta-se a aplicação médica das membranas, por exemplo, no trabalho realizado por Pamplona e Mota (2012), que usam uma membrana circular, inflada por um fluido incompressível, para reproduzir o comportamento da expansão da pele de um paciente durante uma cirurgia, para colocação de uma prótese de silicone. Neste caso, foi aplicado o método de Runge-Kutta para a resolução de equações diferenciais de equilíbrio e comparado com os dados experimentais. As conclusões desse estudo apontaram que os resultados numéricos são compatíveis com os dados experimentais. A Figura 1.2 apresenta alguns exemplos de estruturas que usam membranas em sua composição.

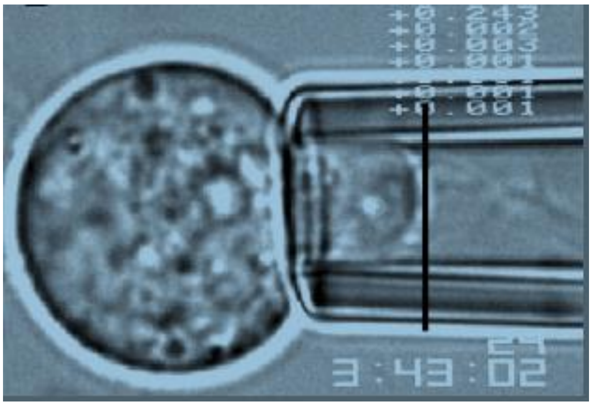
Figura 1-2: Aplicação de membranas em (a) Coberturas de construções civis, (b) Cobertura de construção civil utilizando uma estrutura inflável, (c) aspiração de célula da válvula triscúspide e (d) Equipamentos espaciais.

(a)

Fonte: Adaptado de ww.techne.pini.com.br/

(b)

Fonte: Adaptado de www.estruturaspneumaticas.wordpress.com



(c)

Fonte: Adaptado de ajpheart.physiology.org

(d)

Fonte: Adaptado de Soares (2009)

1.1. Motivação

As estruturas de membrana empregadas em coberturas podem ser uma solução economicamente viável, eficiente e esteticamente agradável (ROBBIN, 1996;

VANDENBERG, 1996; e WAKEFIELD, 1994). As membranas estruturais são superfícies flexíveis que resistem às ações devido à sua forma, às suas características físicas e ao seu pré-tracionamento. A forma da superfície é definida por uma configuração possível de equilíbrio. Suas características físicas definem a sua resistência à tração, limitando os níveis de tensão que podem ser atingidos. O pré-tracionamento é necessário para assegurar que a membrana esteja sempre submetida a esforços de tração (OLIVEIRA e BARBATO, 2005).

Recentemente as membranas têm sido empregadas na construção de grandes estruturas, diante disso, surge a necessidade de estudar o seu comportamento dinâmico, a fim de apresentar uma metodologia segura e correta para o dimensionamento da estrutura. O trabalho de Green e Adkins (1960) se destaca, pois, realizou um estudo sobre o comportamento linear e não-linear da membrana, considerando carregamentos estáticos ou dinâmicos. Esse trabalho foi uma grande contribuição para os estudos de não-linearidade de materiais hiperplásticos.

Dentro do estudo do comportamento dinâmico de membranas, Akkas (1978) buscou determinar a instabilidade não-linear de uma esfera inflada, para isso foi utilizado o modelo constitutivo de Mooney-Rivlin. A membrana foi submetida a vários tipos de carregamentos, por meio do aumento da pressão interna, buscando uma alternativa de prever o comportamento da membrana durante o processo de pressurização dinâmica.

Conforme Jenkins (1991), para determinar de maneira analítica o comportamento dinâmico linear e não linear da membrana, foram criados modelos constitutivos que utilizam as propriedades da membrana, com isso é possível determinar as frequências naturais de todos os modos de vibração, sejam eles lineares ou não-lineares. Então, foram desenvolvidos modelos constitutivos que permitissem determinar de maneira analítica as frequências naturais das membranas, e esses resultados analíticos foram utilizados para validar os modelos numéricos (KHAYAT E DERDOURI, 1994; JIANG E HADDOW, 1995).

Os modelos convencionais de materiais linear elástico não são aplicados para as membranas, já que elas são classificadas como materiais hiperelásticos. A diferença entre esses dois tipos de materiais é que os materiais lineares elásticos são descritos pela teoria da elasticidade linear, teoria que considera sólidos elásticos lineares submetidos a pequenas deformações, com isso os deslocamentos e deformações são lineares, ou seja, os componentes do campo de deslocamento são uma combinação linear dos componentes do tensor deformação do sólido. Em geral, um sólido elástico linear submetido a grandes deslocamentos não cumprirá esta condição. Portanto, por apresentarem essas características os materiais lineares elásticos podem ser modelados pela Lei de Hooke (MURNAGHAN, 1937).

Segundo Lapa (1987) a análise dinâmica de estruturas se divide em dois segmentos, a linear e não linear. Para a análise dinâmica linear os materiais utilizados quando submetidos a um carregamento apresentam valores baixos de deslocamento e uma linearidade na relação de tensão e deformação sendo o seu comportamento linear na comparação tensões e deformações. Já para a análise dinâmica não linear os materiais utilizados quando submetido a carregamento apresentam grandes valores de deslocamento e uma não linearidade na relação de tensões e deformações o que pode gerar uma instabilidade, também suas características mecânicas variam ao longo do tempo fazendo com que seja modificado a sua resistência.

Segundo Ogden (1987), os materiais hiperelásticos apresentam grandes deformações, e com isso a utilização de algum modelo constitutivo linear elástico, como exemplo a Lei de Hooke, acabaria por não descrever com precisão o comportamento do material. Para isso, existem modelos constitutivos próprios que descrevem corretamente o comportamento dos materiais hiperelástico, dentre os quais destaca-se:

- Modelo de Mooney-Rivlin;
- Modelo neo-Hooke;
- Modelo de Ogden;
- Modelo Yeoh;
- Modelo Polinomial;
- Modelo Arruda-Boyce.

Como os modelos constitutivos são capazes de determinarem o comportamento dos materiais hiperelástico, logo qualquer um dos modelos pode ser usado para os estudos envolvendo esses materiais. O estudo de Selvadurai (2006) faz uso dos modelos de neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Blatz-ko, Ogden e Yeoh para determinar a deformação transversal de uma membrana hiperelástica com a geometria circular. Xavier (2015) faz uso dos modelos de neo-Hooke, Mooney-Rivlin e Yeoh para estudar o comportamento dinâmico linear e não linear de uma membrana isotrópica. Já o trabalho de Chakravarty e Albertani (2012) usam somente o modelo de Mooney-Rivlin para realizar uma análise modal de uma membrana de látex submetida a vibração forçada.

Como pode ser visto existem vários estudos que buscam entender o comportamento dinâmico de membranas, sendo que para isso é empregado algum dos modelos constitutivos. Ao fazer a aplicação de algum modelo constitutivo para determinar as frequências naturais, faz-se necessário realizar um equacionamento que se inicia com o a equação do modelo constitutivo escolhido, então é aplicado a geometria da membrana para então dar origem a uma equação que seja capaz de determinar as frequências naturais. Esse processo se faz necessário para cada tipo de geometria, portanto justifica-se este estudo que busca avaliar a influência da geometria de uma membrana no seu comportamento dinâmico. Para este trabalho foi utilizado o modelo neo-Hooke e o de Mooney-Rivlin pois ambos consegue descrever o muito bem o comportamento dinâmico linear e não linear de materiais hiperelásticos isotrópicos, e também apresentam uma formulação matemática simples. Sendo que o modelo neo-Hooke usa apenas um parâmetro do material e um invariante de deformação e o modelo de Mooney-Rivlin utiliza dois parâmetros dos materiais e dois invariantes de deformações.

1.2. Objetivos

Diante do exposto, o objetivo principal deste trabalho é avaliar a influência da geometria da membrana na análise modal da estrutura.

Os objetivos específicos são:

- Realizar a validação da formulação analítica desenvolvida por Soares (2014), verificando a capacidade da formulação de representar fidedignamente o comportamento dinâmico de membranas com geometria quadrada.
- Determinar a frequência natural, considerando a formulação analítica desenvolvida por Soares (2014), considerando dois tipos de materiais para a membrana, lona de polietileno de baixa densidade e membrana de borracha.
- Desenvolver um modelo computacional que represente as estruturas de membranas. O modelo computacional será desenvolvido empregando o software Abaqus®. O modelo será validado ao comparar suas frequências naturais computacionais com os resultados analíticos desenvolvidos por Soares (2014).
- Estudar a influência da geometria no comportamento dinâmico das membranas, para isso serão considerados as geometrias triangular, retangular e circular.
- Avaliar as potencialidades e limitações do modelo desenvolvido para a previsão das frequências naturais de estruturas de membrana.

1.3. Estrutura do trabalho

Esta dissertação é organizada e apresentada em 6 capítulos, conforme descrito a seguir:

- **Capítulo 1 – Introdução:** Este capítulo faz uma abordagem introdutória acerca do tema proposto, bem como seus objetivos, motivações e escopo do estudo.
- **Capítulo 2 – Embasamento teórico:** Este capítulo apresenta os estudos dinâmicos aplicados a membranas, assim como, os modelos constitutivos desenvolvidos para o estudo. A aplicação do método de elementos finitos, explicando sua formulação e as áreas de utilização.
- **Capítulo 3 – Materiais e Métodos:** Neste capítulo, descreve-se a metodologia que foi empregada no trabalho, além da descrição dos materiais e métodos utilizados no desenvolvimento do trabalho. Ainda, apresenta-se o desenvolvimento dos modelos computacionais, empregando o Método de Elementos Finitos (MEF).
- **Capítulo 4 – Resultados:** Este capítulo apresenta os resultados e discussões do modelo analítico usando os modelos constitutivos. Bem como da abordagem computacional, a qual utilizou diferentes geometrias de membranas.
- **Capítulo 5 – Conclusão:** Neste capítulo apresenta-se as conclusões obtidas através dos resultados e as principais discussões realizadas no Capítulo 4. Desta forma, finaliza-se o trabalho com as principais contribuições e sugestões para trabalhos futuros nesta área.
- **Capítulo 6 – Referências Bibliográficas:** Estão dispostas todas as literaturas consultadas para a fundamentação teórica e comparação de resultados do presente trabalho.
- **Anexos:** Textos e figuras complementares ao trabalho:
    - **Anexo A** – Código desenvolvido no software Scilab usado para determinar de forma analítica os valores das frequências naturais para as membranas.
    - **Anexo B** – Apresenta os valores das frequências naturais e o comportamento modal do presente estudo usando a geometria quadrática, para ambos as as membranas.
    - **Anexo C** – Apresenta os valores das frequências naturais e o comportamento modal do presente estudo usando a geometria triangular, para ambos as as membranas.

- **Anexo D** – Apresenta os valores das frequências naturais e o comportamento modal do presente estudo usando a geometria circular, para ambos as as membranas.
- **Anexo E** – Apresenta os valores das frequências naturais e o comportamento modal do presente estudo usando a geometria retangular 1, para ambos as as membranas.
- **Anexo F** – Apresenta os valores das frequências naturais e o comportamento modal do presente estudo usando a geometria retangular 2, para ambos as as membranas.

CAPÍTULO 2

Embasamento teórico

Neste capítulo será apresentado uma apresentação sobre os modelos constitutivos para materiais hiperelásticos, o estado da arte das membranas, onde estudos sobre o comportamento dinâmico, com foco nos modelos constitutivos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin são discutidos. Vale ressaltar que Soares e Gonçalves (2014) utilizam tais modelos com objetivo de apresentar uma metodologia capaz de determinar as frequências naturais para membranas quadradas. Além disso, apresentar-se-á a formulação matemática para análise dinâmica de estruturas considerando a abordagem via método de elementos finitos (MEF).

2.1. Estado da arte

Mooney (1940), Treloar (1943) e Rivlin (1947) foram os primeiros trabalhos a estudar o comportamento geométrico de membranas quando estão submetidas a grandes deformações, esses trabalhos serviram de base para a elaboração da teoria da elasticidade não-linear. A partir do modelo de Mooney-Rivlin Gent *et al*. (1958), busca realizar o melhor ajuste para casos de grandes deformações para isso é utilizado um termo logarítmico em função do segundo invariante de deformação do material.

Alexander (1968) propõem um modelo constitutivo para descrever com precisão a resposta para diferentes níveis de deformação de balões em elevada altitude. Akkas (1978) aplica a modelo de Mooney-Rivlin para determinar o comportamento dinâmico de uma membrana esférica submetida a uma pressão de enchimento.

Yeoh (1990) aplicou as funções de energia e deformação para determinar empiricamente as propriedades de uma borracha preenchida com carbono, os resultados empíricos são comparados com um modelo computacional. Os estudos de Laura *et al*. (1998), Gutierrez *et al*. (1998), Pronsato *et al*. (1999) e Buchanan (2005) buscaram evidenciar a influência da inércia sobre a vibração linear de materiais elásticos, através do uso de métodos numéricos e analíticos.

As teorias de Mooney-Rivlin e neo-Hooke foram utilizadas por Pamplona e Bevilacqua (1992) para estudar o problema de deformações finitas de uma membrana circular que estavam submetidas a carregamentos por uma força axial e momentos de torção. Nesse estudo foram usadas equações de energia potencial estacionária para obter as equações de equilíbrio. Com as equações de equilíbrio aplicou-se métodos numéricos, e com isso, foi possível determinar os deslocamentos bem como as deformações da estrutura.

Entre os estudos que buscam entender o comportamento dinâmico das membranas, o trabalho de Willatzen (2002), que faz uma aproximação utilizando o método de Frobenius para determinar as frequências naturais e os modos de vibração de membranas circulares.

Além de métodos teóricos para o cálculo das frequências naturais, é possível determiná-las através de ensaios experimentais. Isso pode ser visto no estudo de Pinto (2006), onde as frequências naturais do sistema foram determinadas a partir de um experimento que utilizou um microfone capacitivo e a membrana era excitada por atuadores eletrostáticos no vácuo. As frequências obtidas com o experimento foram comparadas com as frequências obtidas através de um modelo analítico, essas comparações mostraram resultados que validam o modelo analítico.

Como visto anteriormente, existem vários trabalhos sobre membranas, cada estudo busca realizar uma análise para obter as características mecânicas e comportamento dinâmico. Para isso, são usadas as mais diversas abordagens, desde métodos analíticos até aplicação de modelos computacionais, passando por ensaios experimentais. Xavier (2003) apresentou um estudo estático para determinar o comportamento não linear de membranas hiperelásticas. Neste estudo foi realizado a comparação entre dados experimentais e resultados usando o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O trabalho desenvolvido por Chakravarty e Albertani (2012) desenvolveram uma análise modal de uma membrana de látex usada como material para a fabricação de um micro veículo aéreo. No estudo em questão é usado o modelo de Mooney-Rivlin para determinar analiticamente as frequências naturais, e experimentos foram realizados com objetivo de verificar o comportamento real da membrana. Também foi desenvolvido modelos computacionais utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF). De posse destes resultados analítico, computacional e experimental, foi possível determinar as características da membrana de látex quando ela se encontra solicitada sob diferentes carregamentos dinâmicos.

Dong *et al.* (2015) identificaram como a adição de massa pode influenciar no comportamento dinâmico de uma membrana, para isso usou-se duas membranas, uma com geometria circular e outra com geometria quadrada. Então foram realizadas simulações com e sem a adição de massa na membrana. Os resultados obtidos indicam que ao adicionar massa as frequências naturais das membranas diminuem, sendo a primeira frequência natural mais influenciada no estudo.

Ainda, podemos destacar o trabalho de Unnikrishnan *et al.* (2019), que utilizaram o método de Galerkin, que é um método sem o uso de malha, para realizar a simulação da vibração livre de uma membrana pré-tensionada. Para isso ele aplica uma formulação de aproximação, onde a membrana é comparada a uma placa plana com três graus de liberdade. Os resultados obtidos foram comparados com soluções analíticas e computacionais, essa comparação entre métodos indicou que o método de Galerkin apresenta resultados precisos podendo assim ser aplicado para simular o comportamento dinâmico de vibração livre de membranas.

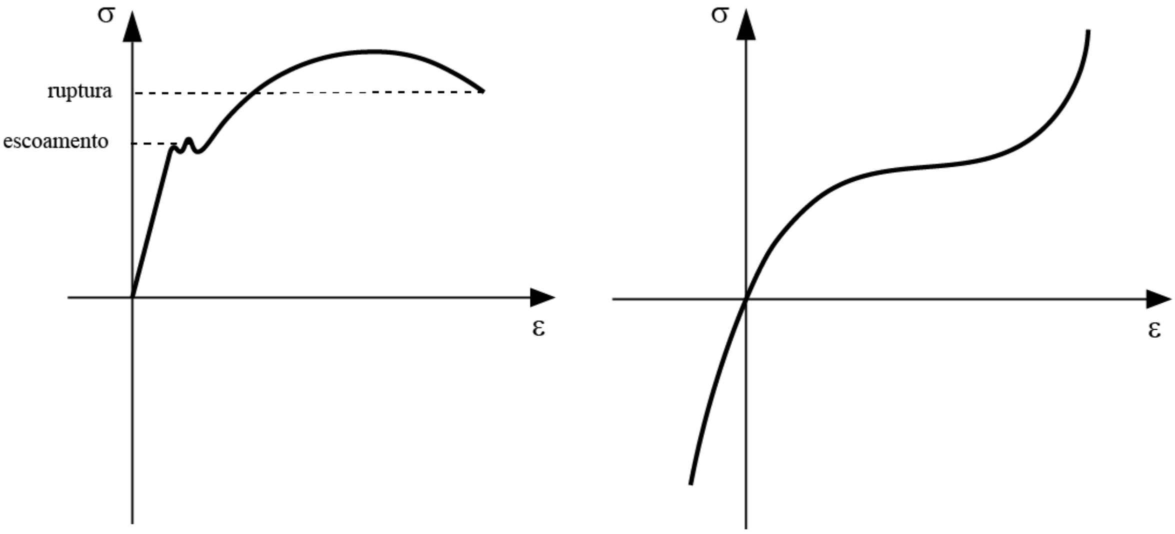
2.2. Modelos constitutivos hiperelásticos

A hiperelasticidade é a resposta elástica de determinados materiais quando são submetidos a grandes deformações, ocorrendo uma não linearidade geométrica e física. O comportamento de materiais hiperelásticos depende de diferentes fatores como: a temperatura, a deformação e a taxa de carregamento (BOWER,2010). A Figura 2.1 mostra uma comparação entre os gráficos de tensão-deformação entre o material elasto-plástico e o material hiperelástico.

Conforme Hoss (2009), existem duas correntes sobre a dedução de modelos constitutivos:

- Modelos fenomenológicos: que são baseados na observação experimental do comportamento do material, entre esses modelos estão os modelos de Ogden, Mooney-Rivlin, Yeoh e outros.
- Modelos micro mecânicos: usam como base as características químicas do material, entre esses modelos estão o neo-Hooke o de Arruda-Boyce.

Figura 2-1: Em (a) gráficos de tensão-deformação para o material elasto-plástico, em (b) gráficos de tensão-deformação para o material hiperelástico.



Fonte: Adaptado de Hoss (2009).

Na literatura, encontra-se diversos modelos constitutivos que descrevem corretamente o comportamento dos materiais hiperelástico, tais como:

✓ **Modelo de Mooney–Rivlin**

Este modelo foi proposto em 1940 por Melvin Mooney e expresso em termos de invariantes por Rivlin em 1948 (MOONEY, 1940; RIVLIN, 1947; KEERTHIWANSA *et al.*, 2018). No modelo Mooney-Rivlin a função de densidade de energia de deformação é definida por

$$W \;=\; C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3)\,, \tag{1}$$

onde C_1 e C_2 são parâmetros do material e I_2 o segundo invariante de deformação.

✓ **Modelo neo-Hooke**

Proposto em 1948 por Ronald Rivlin. É o modelo hiperelástico mais simples, similar a lei de Hooke, que pode ser utilizado para predizer o comportamento não linear de tensão-deformação de materiais sob grandes deformações, como por exemplo para materiais isotrópicos tipo borracha (MARCKMANN *et al.*, 2016). No modelo neo-Hooke a função densidade de energia de deformação para um material neo-Hookeano incompressível em uma descrição tridimensional é definido como

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3)\,, \tag{2}$$

onde W é a densidade de energia, C_1 é um parâmetro do material, I_1 é o primeiro invariante de deformação.

- ✓ **Modelo de Ogden**

Modelo desenvolvido por Raymond Ogden em 1972. O modelo de Ogden, como outros modelos hiperelásticos modelos, assume que o comportamento do material pode ser descrito por meio de uma função de densidade de energia de deformação, a partir do qual as relações tensão-deformação podem ser derivadas (OGDEN, 1972). No modelo de Ogden a densidade de energia de deformação é expressa em termos dos alongamentos principais, esse modelo apresenta uma particularidade, a partir dele é possível deduzir os modelos neo-Hooke e Mooney-Rivlin, para isso basta selecionar os parâmetros $\mathbf{C_{ij}}$:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \cdot \left(\lambda_1^{-\alpha_i} + \lambda_2^{-\alpha_i} + \lambda_3^{-\alpha_i} - 3\right), \tag{3}$$

a densidade de energia é dada também por uma série, onde μ_i, α_i são os parâmetros relacionados com as propriedades do material, μ_i o módulo de cisalhamento para deformações infinitesimais e N o número de termos da série.

- ✓ **Modelo Yeoh**

Modelo fenomenológico para a deformação de materiais elásticos não-lineares quase incompressíveis, como a borracha. O modelo é baseado na observação de Ronald Rivlin de que as propriedades elásticas da borracha podem ser descritas usando uma função de densidade de energia de deformação, que é uma série de potências nos invariantes de deformação dos tensores de deformação de Cauchy-Green (YEOH, 1993). O modelo de Yeoh, sendo o modelo original proposto por Yeoh, tinha uma forma cúbica com apenas dependência de I_1 e é aplicável a materiais puramente incompressíveis. Hoje, uma versão um pouco mais generalizada do modelo Yeoh é usada. Este modelo inclui n termos e a densidade de energia de deformação para este modelo é escrita como

$$W = \sum_{i=1}^{N} C_i \cdot (I_1 - 3)^i, \tag{4}$$

a densidade de energia é determinada por uma série, onde N é o número de termos da série, C_i são parâmetros do material.

✓ **Modelo Polinomial**

Modelo fenomenológico de elasticidade da borracha. Nesse modelo, a função densidade de energia de deformação é da forma de um polinômio nos dois invariantes do tensor de deformação esquerdo de Cauchy-Green (RIVLIN E SAUNDERS, 1951). O modelo Polinomial (RIVLIN E SAUNDERS, 1951) também como o modelo de Ogden apresenta uma particularidade, a partir dele é possível deduzir os modelos neo-Hooke e Mooney-Rivlin, para isso basta selecionar os parâmetros $\mathbf{C_{ij}}$. A densidade de energia calculada pela série é definida por

$$W = \sum_{i+j=1}^{N} \boldsymbol{C_{ij}} \cdot (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j, \tag{5}$$

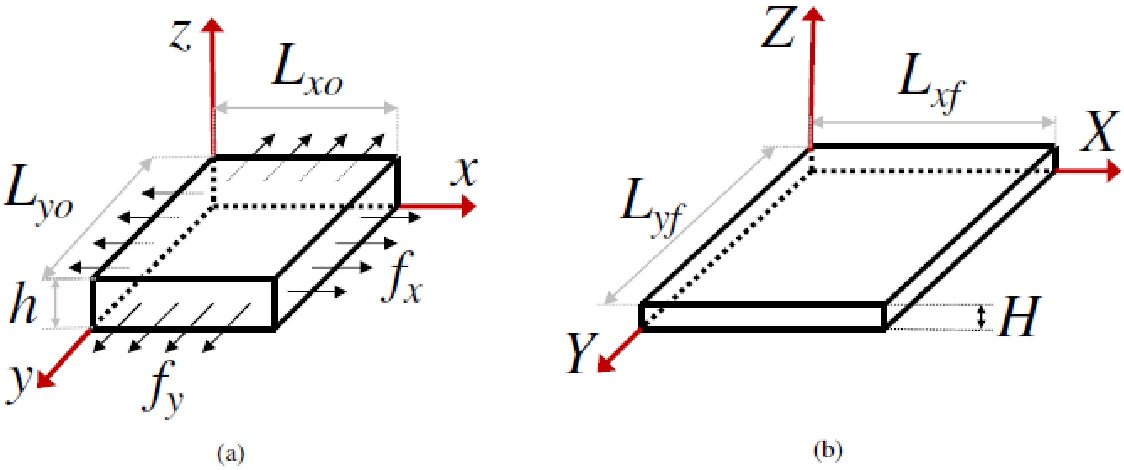
onde N é o número de termos da série $\mathbf{C_{ij}}$ são parâmetros do material e I_1 e I_2 são os invariantes.

2.3. Modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin

Dentre os modelos constitutivos hiperelásticos descritos anteriormente, este trabalho utilizar-se-á os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin. Assim, o trabalho de Soares (2009), que aplicou o modelo neo-Hooke para determinar analiticamente o comportamento da membrana quando ela se encontra sob vibrações não-lineares, de posse dos resultados analíticos, realizou-se uma comparação com os resultados obtidos no *software* de elementos finitos Abaqus®. Ainda, Soares e Gonçalves (2012) utilizaram o MEF para analisar a vibração não-linear em membranas anelares hiperelásticas pré-tracionadas, o foco desse trabalho foi determinar a frequência natural, amplitude, curvas de ressonância e bacias de atração. Além disso, demonstrou-se a influência da geometria na não-linearidade das vibrações geradas por grandes amplitudes. Em um novo estudo, Soares e Gonçalves (2014) usam o modelo de Mooney-Rivlin para estudar a resposta da vibração linear e não-linear de uma membrana retangular. Os autores realizaram uma análise paramétrica das constantes constitutivas do material e com isso obtiveram as frequências naturais, modos de vibração e relação frequência-amplitude.

A formulação desenvolvida por Soares e Gonçalves (2014) e Silva (2015) é usada como base para o desenvolvimento desse trabalho, a formulação é apresentada no Capítulo 2.3.1 até 2.3.4. Essa formulação considera uma membrana retangular que apresenta como características espessura e massa específica constantes, e a membrana está sujeita a um carregamento de tração em seu plano médio. A Figura 2-1 mostra a membrana com o carregamento de tração no seu plano médio e a sua respectiva deformação, *fx* e *fy* são as forças de tração que são aplicadas nas direções *x* e *y*, *Lxo*, *Lyo* e *h* são as dimensões da membrana antes de ser tracionada, e *Lxf*, *Lyf* e *H* são as dimensões da membrana após ser tracionada.

Figura 2-2: Membrana com carregamento de tração no plano médio, em (a) a geometria não deformada e em (b) mostra a deformação da geometria.



Fonte: Adaptado de Soares, Gonçalves (2014).

A equação de Lagrange é dada por Q_j que é a componente da força generalizada, U é a energia potencial total, E_c é a energia cinética total de um sistema mecânico,

$$Q_j = \frac{\partial E_c}{\partial q_j} - \left(\frac{\partial E_c}{d\dot{q}_j}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}. \tag{6}$$

A energia de deformação elástica (*E*), pode ser obtida fazendo a integração da energia de deformação ao longo do volume do corpo indeformado,

$$E = \int W dV. \tag{7}$$

O trabalho gerado pelas forças externas é resultado das cargas que são aplicadas na membrana, o mesmo pode ser determinado usando,

$$W_e = L_{x0} f_y (Y - y)|_{y=Ly0} - L_{x0} f_y (Y - y)|_{y=0} + L_{y0} f_x (X - x)|_{x=Lx0} - L_{y0} f_y (X - x)|_{x=0}\, \Delta V, \tag{8}$$

onde X e Y são as coordenadas do plano cartesiano da membrana deformada e x e y são coordenadas do plano cartesiano da membrana indeformada, e ΔV é variação do volume da membrana.

A energia cinética (T) é proveniente da velocidade, e é determinada resolvendo a integral,

$$T = \int_0^{L_{x0}} \int_0^{L_{y0}} h\, \Gamma \frac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}{2}\, dxdy, \tag{9}$$

onde Γ, h são massa específica da membrana e espessura da membrana respectivamente.

O amortecimento que é considerado para realizar a análise dinâmica é dado por,

$$R_e = 2\omega_{mn} \int_v \zeta\, \Gamma \frac{\dot{W}}{2}\, dV, \tag{10}$$

onde ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_{mn} é a frequência natural do sistema.

A energia potencial total é determinada por,

$$\Pi = E - W_e, \tag{11}$$

onde W_e é o trabalho realizado pelas forças externas.

A função de Lagrange, pode ser definida a partir das energias como

$$L = T + R_e - E + W_e\,, \tag{12}$$

utilizando a função de Lagrange é possível determinar as equações diferenciais para casos particulares em estudo.

2.3.1. Análise estática modelo neo-Hooke

Segundo Soares e Gonçalves (2014), devido ao corpo estar em estado de equilíbrio e não apresentar variação do volume ao longo do tempo, portanto os invariantes estão em função dos alongamentos principais

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$
$$I_2 = (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_1 \lambda_3)^2, \tag{13}$$
$$I_3 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2.$$

Sendo que λ_i pode ser determinado como

$$\lambda_i = \frac{dS_i}{ds_i}, \tag{14}$$

onde dS_i é o comprimento deformado e ds_i é o comporimento indeformado de um elemento infinitesimal que se encontra nas direções principais da membrana.

Considerando que a membrana é um material incompressível, o invariante I_3 será igual a 1. Devido a essa consideração, é possível escrever λ_1 , λ_2 e λ_3 utilizando a Eq. (14), como

$$\lambda_1 = \frac{dX}{dx} = X_x,$$
$$\lambda_2 = \frac{dY}{dy} = Y_y, \tag{15}$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{X_x \; Y_y}.$$

Realizando a substituição da Eq. (15) na Eq. (13) é possível reescrever os invariantes

$$I_1 = X_x^2 + Y_y^2 + (\frac{1}{X_x \; Y_y})^2,$$
$$I_2 = (X_x \; Y_y)^2 + (Y_y \frac{1}{X_x \; Y_y})^2 + (X_x \frac{1}{X_x \; Y_y})^2, \tag{16}$$
$$I_3 = 1.$$

Com a Eq. (16) é possível reescrever o modelo constitutivo neo-Hooke conforme apresentado na Eq. (1), como sendo

$$W = C_1 \cdot \frac{X_{,x}^4 Y_{,y}^2 + X_{,x}^2 Y_{,y}^4 - 3X_{,x}^2 Y_{,y}^2 + 1}{X_{,x}^2 Y_{,y}^2}. \tag{17}$$

Substituindo a Eq. (17) na Eq. (11), considerando que a energia potencial total é determinada pela diferença entre a energia de deformação e o trabalho realizado pelas forças externas, aplicando o princípio da energia potencial total e fazendo a integração por partes, determinam-se as equações de equilíbrio da membrana para o modelo constitutivo neo-Hooke:

$$2hX_{xx} \, C_1 \; (1 + \frac{3}{X_{,x}^4 Y_{,y}^2}) = 0, \tag{18}$$

$$2hY_{yy} \, C_1 \; (1 + \frac{3}{X_{,x}^2 Y_{,x}^4}) = 0. \tag{19}$$

Utilizando o princípio da energia potencial total determinam-se as condições de contorno para o modelo constitutivo neo-Hooke,

$$2hC_1\ (X_{xx} - \frac{1}{X_{,x}^3 Y_{,x}^2}) = L_{y0}\, f_x\,, \tag{20}$$

$$2hC_1\ (Y_{yy} - \frac{1}{X_{,x}^2 Y_{,x}^3}) = L_{x0}\, f_y\,. \tag{21}$$

As Eqs. (17) e (18) podem ser solucionadas usando as Eqs. (20) e (21), resultando em

$$\begin{aligned} X(x,y) &= \delta_x\, x, \\ Y(x,y) &= \delta_y\, y. \end{aligned} \tag{22}$$

A razão entre as dimensões deformadas e não-deformadas é definida por:

$$\begin{aligned} \delta_y &= \frac{L_{yf}}{L_{y0}}, \\ \delta_x &= \frac{L_{xf}}{L_{x0}}. \end{aligned} \tag{23}$$

As tensões de Cauchy na membrana podem ser determinadas através de

$$\sigma_i = \lambda_i\, \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}. \tag{24}$$

Aplicando na Eq. (23) as funções de densidade de energia e de deformação, calculam-se as tensões nas direções principais através de:

$$\sigma_1 = \frac{2C_1\,(\delta_{,x}^4 \delta_{,y}^2 - 1)}{\delta_{,x}^2 \delta_{,y}^2}, \tag{25}$$

$$\sigma_2 = \frac{2C_1\,(\delta_{,x}^2 \delta_{,y}^4 - 1)}{\delta_{,x}^2 \delta_{,y}^2}. \tag{26}$$

2.3.2. Análise estática modelo Mooney-Rivlin

Para determinação da equação estática considerando o modelo Mooney-Rivlin, os mesmos passos mostrados anteriormente no modelo neo-Hooke devem ser seguidos, logo substitui-se a Eq. (16) na Eq. (3) e com isso é reescrito o modelo de neo-Hooke como:

$$W = C_1 \cdot \frac{X_{,x}^4 Y_{,y}^2 + X_{,x}^2 Y_{,y}^4 - 3X_{,x}^2 Y_{,y}^2 + 1}{X_{,x}^2 Y_{,y}^2} + C_2 \cdot \frac{X_{,x}^4 Y_{,y}^2 + X_{,x}^2 Y_{,y}^4 - 3X_{,x}^2 Y_{,y}^2 + 1}{X_{,x}^2 Y_{,y}^2}. \tag{27}$$

Substituindo a Eq. (27) na Eq. (11), e adotando as mesmas considerações já citadas anteriormente, é determinada as equações de equilíbrio estático da membrana para o modelo Mooney-Rivlin

$$2hX_{xx}\left[C_1\ \left(1+\frac{3}{X_{,x}^4 Y_{,y}^2}\right)+C_2\,(Y_{,y}^2+\frac{3}{X_{,x}^4})\right]=0, \tag{28}$$

$$2hY_{yy}\left[C_1\ \left(1+\frac{3}{X_{,x}^4 Y_{,y}^2}\right)+C_2\,(X_{,x}^2+\frac{3}{Y_{,y}^4})\right]=0. \tag{29}$$

Usando o princípio da energia potencial total determina-se as condições de contorno para o modelo constitutivo Mooney-Rivlin. Sendo estas condições representadas por:

$$2hC_1\ \left(X_x-\frac{1}{X_{,x}^3 Y_{,y}^2}\right)+2hC_2\,(X_x Y_{,y}^2-\frac{1}{X_{,x}^3})=L_{y0}\,f_x\,, \tag{30}$$

$$2hC_1\ \left(Y_y-\frac{1}{X_{,x}^2 Y_{,y}^3}\right)+2hC_2\,(Y_y X_{,x}^2-\frac{1}{Y_{,y}^3})=L_{x0}\,f_x\,. \tag{31}$$

Solucionando o sistema das Eqs. (30) e (31), aplicando essa solução na Eq. (24), e usando as funções de densidade de energia de deformação, determinam-se as equações para calcular as tensões de Cauchy nas direções principais da membrana dada por

$$\sigma_1\ =2C_1\,(\delta_{,x}^4\delta_{,y}^2-1)\ \left(\frac{1}{\delta_{,x}^2\delta_{,y}^2}+\frac{\alpha}{\delta_{,x}^2}\right), \tag{32}$$

$$\sigma_2\ =\ 2C_1\,(\delta_{,x}^2\delta_{,y}^4-1)\ \left(\frac{1}{\delta_{,x}^2\delta_{,y}^2}+\frac{\alpha}{\delta_{,y}^2}\right). \tag{33}$$

2.3.3. Análise Dinâmica modelo neo-Hooke

Green e Adkins (1960) propuseram como determinar os tensores métricos covariantes na configuração deformada da membrana, ou seja, utilizam-se as seguintes derivadas

$$\begin{aligned}A_{11}\ &=\ \frac{dX}{dx}\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dx}\frac{dY}{dx}+\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dx}=X_{,x}^2+Y_{,x}^2+Z_{,x}^2,\\ A_{12}\ &=\ \frac{dX}{dx}\frac{dX}{dy}+\frac{dY}{dx}\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dy}=X_{,x}\,X_{,y}\ +Y_{,x}\,Y_{,y}\ +Z_{,x}\,Z_{,y}\,,\\ A_{21}\ &=\ \frac{dX}{dy}\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{dY}{dx}+\frac{dZ}{dy}\frac{dZ}{dx}=X_{,x}\,X_{,y}\ +Y_{,x}\,Y_{,y}\ +Z_{,x}\,Z_{,y}\,,\end{aligned} \tag{34}$$

$$A_{22} = \frac{dX}{dy}\frac{dX}{dy} + \frac{dY}{dy}\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dy}\frac{dZ}{dy} = X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2.$$

A matriz covariante na configuração deformada é representada por

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 & X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} \\ X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} & X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

O resultado do determinante da matriz dos covariantes é

$$A = \left(X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2\right)\left(X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2\right) - (X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y})^2. \tag{36}$$

Ainda, Green e Adkins (1960) descreveram os invariantes de deformação como

$$\begin{gathered} I_1 = \alpha^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + \lambda^2, \\ I_2 = \alpha^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} + \frac{1}{\lambda^2}, \\ I_3 = \lambda^2\frac{A}{a}. \end{gathered} \tag{37}$$

Determinando os invariantes, a Eq. (37) é substituída na Eq. (12), assim as equações de movimento da membrana são definidas por

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial X_{,x}}W\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial X_{,y}}W\right) - h\Gamma\ddot{X} - h\omega_{mn}\Gamma\zeta\dot{X} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial Y_{,x}}W\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial Y_{,y}}W\right) - h\Gamma\ddot{Y} - h\omega_{mn}\Gamma\zeta\dot{Y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial}{\partial Z_{,x}}W\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial Z_{,y}}W\right) - h\Gamma\ddot{Z} - h\omega_{mn}\Gamma\zeta\dot{Z} = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Para determinar o campo de deslocamentos para a configuração deformada tem-se

$$\begin{gathered} X = \delta_x x + u(x,y,t), \\ Y = \delta_y y + v(x,y,t), \\ Z = w(x,y,t). \end{gathered} \tag{39}$$

onde *u*, *v* e *w* são os deslocamentos nos eixos *x*, *y* e *z*, respectivamente.

Substituindo as funções da Eq. (39) na Eq. (17), então substituindo na Eq. (38), e desconsiderando o amortecimento e qualquer carregamento externo, reescreve-se a equação do modelo neo-Hooke como

$$0 = \left(1 - \frac{1}{\delta_{,x}^4\delta_{,y}^2}\right)C_1 w_{xx} \left(1 - \frac{1}{\delta_{,x}^2\delta_{,y}^4}\right)C_1 w_{yy} - \frac{\Gamma}{2}w_{tt}\,. \tag{40}$$

Resolvendo a Eq. (39), obtém-se o deslocamento transversal da membrana, que é dada por

$$w(x,y,t) = \sum A_{mn}\, sen\left(\frac{mx\pi}{L_{x0}}\right) sen\left(\frac{my\pi}{L_{y0}}\right)\cos(\omega_{mn}\, t)\,, \tag{41}$$

onde A_{mn} é a amplitude modal, *m* é o número de semi-onda na direção *x*, *n* é a quantidade de semi-ondas na direção y e ω_{mn} é a frequência natural.

Dessa forma, é estabelecida uma relação entre o comprimento deformado e o não-deformado da membrana por

$$\delta_y = \delta_x \frac{k_f}{k_0}, \tag{42}$$

onde k_0 é a razão entre as dimensões não-deformadas nas direções *x* e *y*, e k_f é a razão entre as dimensões deformada nas direções *x* e *y* da membrana.

Substituindo a Eq. (41) na equação do deslocamento transversal (40), que por sua vez é substituída na Eq. (39), resulta-se na equação que permite determinar a frequência natural da membrana, considerando o modelo de neo-Hooke, definida por

$$\omega_{mn} = \frac{C_1\, 2\pi^2}{\Gamma L_{x0}^2}\left(m^2\left(1-\frac{K_0^2}{\delta_{,x}^6 K_f^2}\right)+\frac{n^2}{K_0^2}\left(1-\frac{K_0^4}{\delta_{,x}^6 K_f^4}\right)\right). \tag{43}$$

2.3.4. Análise Dinâmica modelo Mooney-Rivlin

Seguindo o mesmo procedimento apresentado anteriormente no modelo de neo-Hooke, substituiu-se as funções mostradas nas Eqs. (39) e (27), que representa a função de densidade de energia para o modelo Mooney-Rivlin. O resultado dessa primeira substituição foi aplicado na Eq. (30), assim obtêm-se um novo formato para o modelo Mooney-Rivlin, nesse novo formato é considerado as equações de equilíbrio dinâmico como

$$0 = \left(1-\frac{1}{\delta_{,x}^4\delta_{,y}^2}\right)\left(1+\alpha\delta_{,y}^2\right)C_1\, w_{xx} + \left(1-\frac{1}{\delta_{,x}^2\delta_{,y}^4}\right)\left(1+\alpha\delta_{,x}^2\right)C_2 w_{yy} - \frac{\Gamma}{2} w_{tt}\,. \tag{44}$$

Aplicando a Eq. (40) na Eq. (43), e usando a Eq. (41), resulta-se na equação para calcular a frequência natural, considerando o modelo de Mooney-Rivlin, definida por

$$\omega_{mn} = \frac{C_1\, 2\pi^2}{\Gamma L_{x0}^2}\left[m^2\left(1-\frac{K_0^2}{\delta_{,x}^6 K_f^2}\right)\left(1+\alpha\delta_{,x}^2\frac{K_f^2}{K_o^2}\right)+\frac{n^2}{K_0^2}\left(1-\frac{K_0^4}{\delta_{,x}^6 K_f^4}\right)\left(1+\alpha\delta_{,x}^2\right)\right]. \tag{45}$$

2.4. Elementos Finitos

Alves Filho (2000; 2001) afirma que o método dos elementos finitos é uma ferramenta de alto potencial que auxilia as equipes de engenharia em uma das tarefas mais importantes no desenvolvimento de um produto, na determinação do seu comportamento, seja ele estático ou dinâmico. Com esse método é possível simular situações críticas, e assim determinar as tensões atuantes no componente. A análise de tensões é considerada uma das entradas do sistema, pois a partir dela são feitas escolhas que irão alterar as características estruturais do produto (como espessuras, geometria, materiais e condições de trabalho, por exemplo). A utilização adequada de método não só permite reduzir o ciclo de desenvolvimento do produto, mas também o número de testes de campo, realizando previsões do seu comportamento, resultando em substancial redução de custos, evitando a utilização do método da tentativa e erro.

Também em seus estudos Alves Filho (2000) destaca que para executar uma análise estrutural que conduza a decisões adequadas, deve-se atender a alguns pré-requisitos:

- Entendimento claro do problema físico a ser simulado;
- Conhecimento do comportamento estrutural desejado (critério de projeto);
- Propriedades dos materiais envolvidos;
- Características dos elementos finitos envolvidos na análise;
- Definição da região objeto de interesse, definindo a extensão do modelo de análise;
- Condições de Contorno - Cargas e vínculos da estrutura.

Os estudos de Quraishi e Sandeep (2011) apontaram que quando é aplicado esse método, o tempo de processamento da análise irá depender diretamente da complexidade geométrica e do tamanho do modelo, isso fica evidente quando é realizada a comparação entre uma análise estática de um objeto 3D com uma análise dinâmica desse mesmo objeto. Uma das alternativas para reduzir o tempo de cálculo são as análises adaptativas, as quais têm sido desenvolvidas e aplicadas à grande escala em projetos de engenharia. Além disso, as abordagens de malha adaptativas têm sido estudadas com base na técnica de interface de captura *Enhanced-Discretization* (discretização reforçada), com dois níveis de malhas ou uma combinação de malhas finas e grosseiras, que têm sido aplicadas a fluxos compressíveis com choques e superfícies livres (MUROTANI *et al.*, 2013).

Segundo Soriano (2003), o método de elementos finitos baseia-se na transformação das equações diferenciais que regem um problema específico em uma série de regiões (os elementos finitos) de tipologia simples como triângulos, quadriláteros, tetraedros e hexaedros, cuja geometria é definida pelas coordenadas de um conjunto de pontos (os nós). Este conjunto de elementos é denominado malha de elementos finitos.

Para Alves Filho (2005), o cálculo das forças internas acontece em cada elemento, considerando as características separadamente de material e de propriedades geométricas. Conhecendo-se a matriz de rigidez de cada elemento, é possível demonstrar a matriz de rigidez da estrutura. Em uma dada condição de contorno definida pelas restrições e pelo carregamento atuante é possível determinar os deslocamentos nodais para a estrutura inteira.

Conforme Rao (1989), Hinton e Owen (1980), o método de elementos finitos pode ser dividido em três classificações:

- Problemas de equilíbrio (exemplo, análise estática estrutural);
- Problemas de autovalor (exemplo, análise dinâmica estrutural);
- Problemas de propagação (exemplo, análise transiente no tempo).

A Figura 2-3 apresenta um fluxograma do processo de análise pelo método de elementos finitos. Conforme Huebner (1994), o método de elementos finitos pode ser dividido em três etapas, que são respectivamente, pré-processamento, solução e pós-processamento. O pré-processamento é a primeira etapa, nela é feita a modelagem do problema. São definidas as condições iniciais e as de contorno. São inseridos os carregamentos e realizadas as simplificações no modelo. É feita a escolha do tipo de elemento e definidas as propriedades do material.

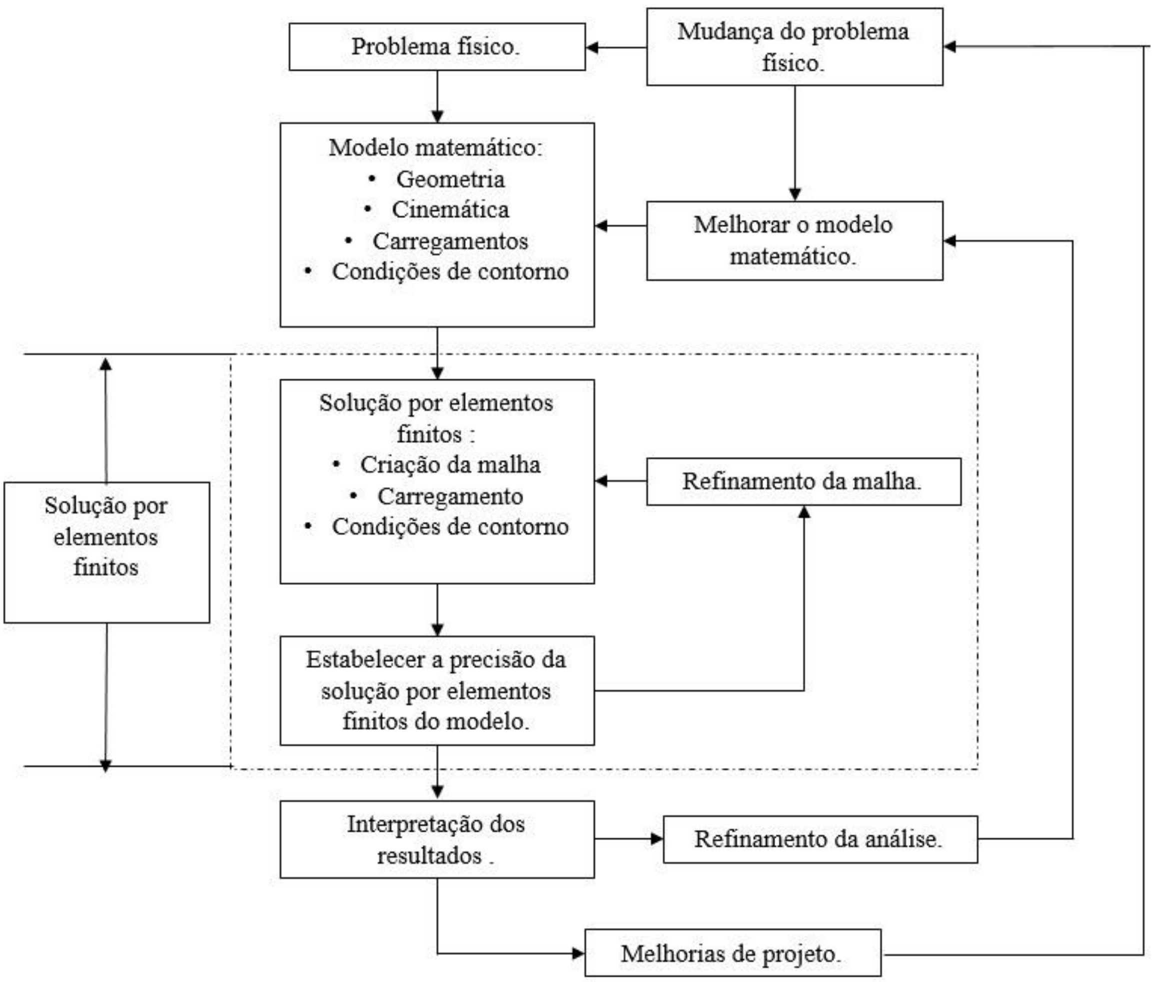
Nessa etapa inicial é realizada a discretização do problema, isso corresponde a criação da malha, onde o modelo é subdividido em um determinado número de elementos. A forma desses elementos pode ser triangular, quadriláteros podendo ser em 2D ou 3D.

A segunda etapa é a solução do problema, nessa etapa é realizada a resolução de uma equação diferencial que carrega todas as condições que foram impostas anteriormente. A solução pode ser dividida em quatro partes que são as seguintes:

- Obtenção da matriz de rigidez: onde ela é criada usando os coeficientes das equações de equilíbrio, a matriz de rigidez relaciona os deslocamentos nodais com as forças aplicadas em cada nó;

- Montagem das equações globais: com a matriz de rigidez local e o vetor de força local é realizada a montagem da matriz de rigidez global e o vetor de força global;
- Solução das equações globais montadas anteriormente;
- Cálculo das deformações e tensões elementares.

Figura 2-3: Funcionamento de uma análise por Elementos Finitos.



Fonte: Adaptado de Bathe (1996).

A terceira e última etapa é o pós-processamento. Essa etapa depende diretamente do que se busca com a resolução do problema, pois nessa etapa é possível obter dados como:

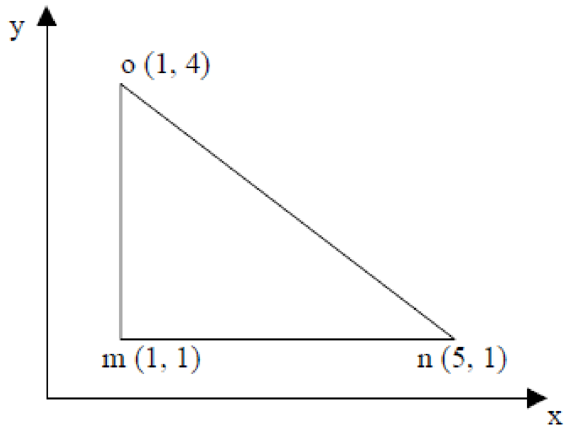
- Deformações da geometria;
- Gradientes de temperatura;
- Frequências naturais e modos de vibração da estrutura;
- Deslocamentos nodais ao longo do tempo;

- Gradientes de tensão de acordo com o critério de resistência escolhido;
- Deslocamentos nodais;

2.4.1. Análise estática

Como descrito anteriormente, o método de elementos finitos pode ser aplicado para a solução de diferentes problemas, estáticos ou dinâmicos. A análise estática geralmente é usada para a obtenção de valores de deformações do material e tensões geradas por carregamentos externos. Para melhor exemplificar a aplicação da análise estática, apresenta-se o procedimento para realização do cálculo de tensões para um elemento triangular com 3 nós, como mostrado na Figura 2-4, e apresentado por Huebner (1982).

Figura 2-4: Elemento triangular.



Fonte: Adaptado de Huebner (1982).

Para a realização desse cálculo é utilizado as funções de interpolação, a fim de transferir os deslocamentos nodais para um ponto qualquer que se encontra dentro do elemento, definido por

$$\{u\} = [\mathbf{N}]\{u\}_n \,, \tag{46}$$

onde u é o vetor deslocamento interno ao elemento, **N** a matriz de funções de deslocamento e u_n o vetor dos deslocamentos nodais.

Os deslocamentos, u e v, do triângulo podem ser escritos como

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y,$$
$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y. \tag{47}$$

Considerando a condição de contorno

$$u = u_i ,$$
$$v = v_i , \tag{48}$$

é possível determinar os coeficientes a_i realizando a substituição pelas coordenadas nodais. Ao fazer isso é criado um sistema de equações,

$$\begin{aligned} u_m &= a_1 + a_2 + a_3, & x = x_m ;\ y = y_m , \\ u_n &= a_1 + a_2 5 + a_3, & x = x_n ;\ y = y_n , \\ u_0 &= a_1 + a_2 + a_3 4, & x = x_0 ;\ y = y_0 . \end{aligned} \tag{49}$$

A partir desse sistema de equações é possível criar a matriz de funções, e assim obter o seu determinante

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix} = \mathbf{12} . \tag{50}$$

Conhecendo-se o determinante é possível descobrir as constantes a_i. Para isso basta substituir o vetor *u* na respectiva coluna, e então dividir pelo determinante, assim

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\begin{bmatrix} u_m & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ u_n & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ u_0 & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}}{12} = \frac{(19u_m - 3u_n - 4u_0)}{12}, \\ a_2 &= \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & u_m & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & u_n & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & u_0 & \mathbf{4} \end{bmatrix}}{12} = \frac{(-3u_m + 3u_n)}{12}, \\ a_3 &= \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & u_m \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & u_n \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & u_0 \end{bmatrix}}{12} = \frac{(-4u_m + 4u_0)}{12}. \end{aligned} \tag{51}$$

Conhecendo-se a_i, substitui-se na função de deslocamento e reescreve-se como

$$\begin{aligned} u &= \frac{(19u_m - 3u_n - 4u_0)}{12} + \frac{(-3u_m + 3u_n)}{12} + \frac{(-4u_m + 4u_0)}{12}, \\ u(x, y) &= \frac{(19 - 3x - 4y)u_m}{12} + \frac{(-3 + 3x)u_n}{12} + \frac{(-4 + 4y)u_0}{12}. \end{aligned} \tag{52}$$

Além disso, é possível escrever de maneira análoga em função de v(x, y),

$$v(x, y) = \frac{(19 - 3x - 4y)u_m}{12} + \frac{(-3 + 3x)u_n}{12} + \frac{(-4 + 4y)u_0}{12}. \tag{53}$$

Portanto, a matriz da função de deslocamentos pode ser reescrita como sendo

$$N_m = \frac{(19 - 3x - 4y)}{12},$$
$$N_m = \frac{(-3 + 3x)}{12}, \quad (54)$$
$$N_0 = \frac{(-4 + 4y)}{12}.$$

Organizando tudo na forma matricial tem-se

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N_m} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_m} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_m} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_m} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \vdots \\ u_0 \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{N}]\{u\}_n . \quad (55)$$

Assim, determina-se os deslocamentos nodais, e com isso determinar o deslocamento de qualquer ponto do elemento. Esse procedimento pode ser aplicado para qualquer tipo de elemento, modificando apenas as equações de deslocamentos. Conhecendo-se os deslocamentos é possível determinar as deformações e as tensões do material. Para materiais linear-elásticos é aplicado a Lei de Hooke, e para os materiais hiperelásticos pode-se aplicar o modelo constitutivo de neo-Hooke.

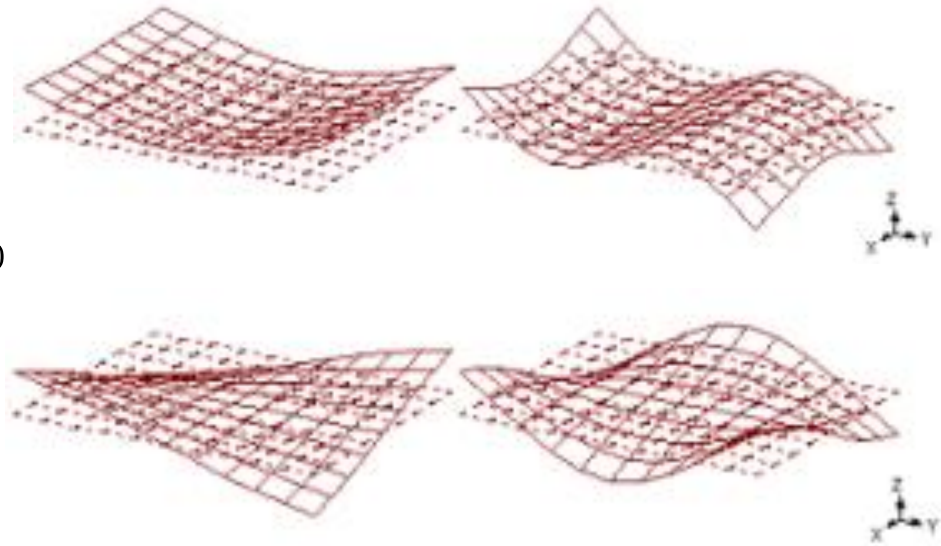
2.4.2. Análise modal

Segundo Almeida (1990) ao fazer um estudo do comportamento dinâmico de um sistema, é possível identificar o comportamento de uma estrutura sabendo suas características dinâmicas, isso é feito usando a função de transferência ou a Função Resposta em Frequência (FRF).

Além de conhecer os parâmetros modais do sistema, frequência natural e o amortecimento, deve-se identificar outro parâmetro muito importante para o estudo das propriedades dinâmicas da estrutura, os modos de vibração. Já que cada modo de vibração representa uma propriedade global do sistema. Os modos de vibração podem ser encontrados usando a função transferência. Os modos de vibração são características dependentes do sistema a ser estudado, tais como condições de fixação da estrutura, amortecimento, massa e rigidez, e consequentemente associado a cada modo há uma frequência natural. Se houver alteração em qualquer propriedade do material ou nas suas condições de fixação isso acarretará alteração na frequência natural (SCHWARZ, 1999).

Schwarz (1999) dividiu os modos de vibrar em modos de corpos rígidos e modos de corpos flexíveis, sendo que todas as estruturas apresentam 6 modos de corpo rígido, sendo eles, 3 modos de translação e 3 de rotação. A Figura 2-5 mostra os 4 primeiros modos de vibrar flexíveis de uma placa, sendo em (a) o primeiro modo de flexão, em (b) o segundo modo de flexão, em (c) o primeiro modo de torção e em (d) o segundo modo de torção.

Figura 2-5: Primeiro e segundo modos de flexão e torção.



(a) (b)

(c) (d)

Fonte: Adaptado de Schwarz (1999).

Conforme mencionado anteriormente, um dos métodos usados para realizar uma análise modal é através da determinação da FRF. Segundo Hey (2014), esse método consiste em observar a resposta de um sistema usando um sinal de entrada, que tem uma faixa de frequência preestabelecida. Ao usar a FRF tem-se a vantagem pois é possível realizar um experimento e obter as respostas do sistema sem a necessidade de conhecer a função transferência dele.

Conforme Campos (2012), ao utilizar FRF em um experimento para obter a forma modal de um sistema, se reduz o erro de análise, já que em um sistema complexo poderia existir diversos valores de frequência natural muito próximo um do outro, dificultando a análise modal. Ao realizar um estudo onde se compara resultados experimentais e resultados analíticos, usar a função resposta em frequência torna possível obter uma melhor correlação entre resultados.

Segundo Munck *et al.* (2008), o método de elementos finitos é uma ferramenta que torna possível representar diversos tipos de fenômenos físicos através da resolução de equações diferenciais. Para aplicar esse método se faz necessário conhecer todas as entradas do problema, com isso é criado um modelo que consegue reproduzir o comportamento aproximado do fenômeno real.

É possível encontrar várias metodologias diferentes que explicam como criar, utilizar e obter a resposta estrutural de um modelo numérico para estudos modais, dentre elas destaca-se

Imregun e Visser (1991) e Mottereshead e Friswell (1993). É possível classificar os métodos de utilização do modelo criado com o MEF, esses métodos são classificados em iterativos e não iterativos. Os métodos iterativos buscam minimizar uma função objetivo. Para criar essa função geralmente são utilizados autovalores e auto vetores (LIM, 1990; CHEN E GARBA, 1980).

Conforme Souza (2018), para um modelo analítico submetido a pequenas deformações é possível determinar a equação dinâmica estrutural utilizando a segunda lei de Newton, sendo que é feita a equiparação entre à excitação externa com as forças internar como a inércia, densidade e elasticidade. Essa equação é representada como,

$$\mathbf{M}\ddot{X}(t) + \mathbf{C}\dot{X}(t) + \mathbf{K}X(t) = F(t), \tag{56}$$

sendo que **M**, **C** e **K** são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura, F é o vetor de forças externa que gera a excitação. Já $\ddot{X}$, $\dot{X}$ e X são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente.

Fazendo a consideração da resposta do sistema harmônico é possível determinar a excitação harmônica,

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t}, \tag{57}$$

onde F_0 é a força estática, F_0 é a amplitude e ω é a frequência de excitação. Fazendo a mesma consideração é possível determinar a solução para o deslocamento,

$$X(t) = X_0 e^{i\omega t}. \tag{58}$$

Ao aplicar as derivadas no deslocamento é obtido as equações de velocidade e aceleração, respectivamente,

$$\dot{X}(t) = i\omega X_0 e^{i\omega t}, \tag{59}$$

$$\ddot{X}(t) = -\omega^2 X_0 e^{i\omega t}. \tag{60}$$

Fazendo a substituição das Eqs. (57) e (58) na equação de movimento obtém-se

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{C}i\omega + \mathbf{K})X_0 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}. \tag{61}$$

Reescrevendo a equação de movimento resulta em

$$(\mathbf{K} + \mathbf{C}i\omega X_0 - \mathbf{M}\omega^2)X_0 = F_0. \tag{62}$$

Ao isolar X_0 e F_0 obtêm-se a equação da FRF do sistema

$$\frac{X_0}{F_0} = \frac{1}{(\mathbf{K} + \mathbf{C}i\omega X_0 - \mathbf{M}\omega^2)} = H_{pq}\ . \tag{63}$$

Segundo Simulia (2016), o procedimento para o cálculo das frequências é descrito por:

- Realiza o cálculo de autovalor para calcular as frequências naturais e as formas modais correspondentes de um sistema;
- Incluirá efeitos de tensão inicial e rigidez da carga devido a pré-cargas e condições iniciais se a não linearidade geométrica for contabilizada no estado base, de modo que pequenas vibrações de uma estrutura pré-carregada possam ser modeladas;
- Calculará modos residuais, se solicitado;
- É um procedimento de perturbação linear;
- Pode ser executada usando a arquitetura tradicional do software Abaqus;
- Resolve o problema de autovalores apenas para matrizes simétricas de massa e rigidez; o método complexo de autovalores deve ser usado se forem necessárias contribuições assimétricas.

Para a realização da análise modal numérica determinam-se as frequências naturais aplicando o método de autovalores e autovetores. O software Abaqus® utiliza o método Lanczos para resolver os problemas de autovalores e autovetores, esse método executa várias iterações para determinar a resposta sendo que para cada iteração é aplicada a seguinte transformação,

$$\theta\phi = (\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M})^{-1}, \tag{64}$$

onde, θ é o autovalor, ϕ é o autovetor e σ é o valor da iteração.

Para o método Lanczos, precisa-se informar a frequência máxima de interesse ou o número de autovalores necessários. O Abaqus/Standard determinará um tamanho de bloco adequado. Se especificar a frequência máxima de interesse e o número de autovalores necessários e, o número real de autovalores for subestimado, o Abaqus/Standard emitirá uma mensagem de aviso correspondente; os modos próprios restantes podem ser encontrados reiniciando a extração de frequência.

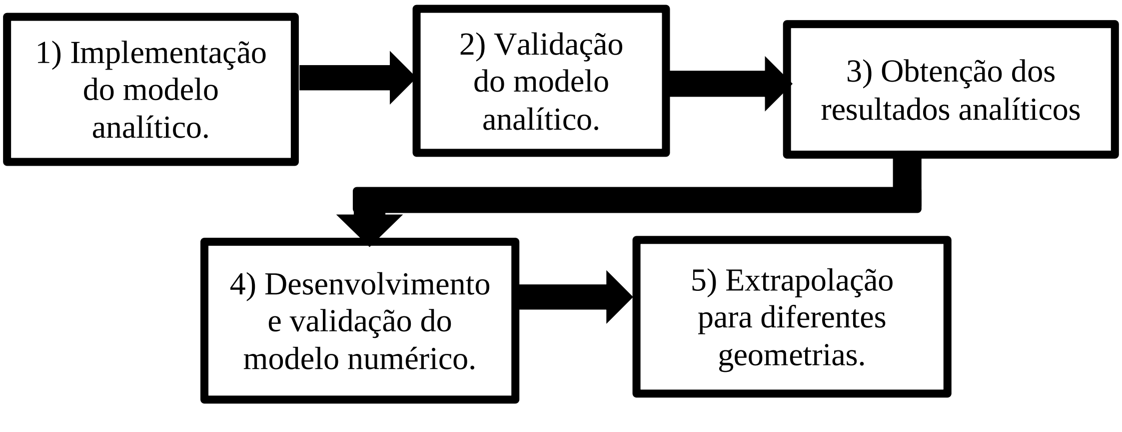
Além disso, também pode-se especificar as frequências mínimas de interesse. O Abaqus/Standard obterá os valores próprios até que o número solicitado de valores tenha sido obtidos no intervalo especificado ou que todas as frequências no intervalo determinado tenham sido determinadas.

CAPÍTULO 3

Materiais e Métodos

A metodologia adotada para este trabalho pode ser dividida em cinco etapas. A primeira etapa consiste em desenvolver um código no software Scilab®, implementando as equações apresentadas por Soares e Gonçalves (2014). A segunda etapa consiste na validação do código. Para isso os resultados analíticos obtida via código são comparados com os dados experimentais. Após o código ser validado, a terceira etapa consiste na obtenção dos resultados analíticos, via código implementado no software Scilab®, para os dois materiais diferentes de membranas, o Polietileno de Baixa Densidade e a membrana de borracha. A quarta etapa consiste no desenvolvimento e validação dos modelos numéricos, software comercial Abaqus®, para os dois materiais da membrana. Finalmente, a quinta e última etapa consiste na extrapolação da metodologia computacional, desenvolvida e validada, para diferentes geometrias de membranas, assim, buscar-se-á verificar a influência da geometria nas frequências naturais da estrutura. A Figura 3-1 apresenta as etapas em forma de fluxograma.

Figura 3-1: Fluxograma representando a metodologia utilizada.



Fonte: Próprio autor, 2020.

3.1. Materiais

Neste trabalho utilizou-se as propriedades do material de duas membranas isotrópicas, sendo que a membrana 1 (Polietileno de Baixa Densidade) foi obtida do trabalho de Suzin (2019), a membrana 2 (membrana de borracha) foi obtida do trabalho de Gruttmann e Taylor (1992) e a membrana 3(filme de poliamida) foi obtida do trabalho de Young *et al*. (2005). As membranas 1 e 2 são utilizadas para obter os valores das frequências naturais analíticas e computacionais para todos os estudos de caso, já a membrana 3 é usada para a validação das Equações (42) e (44). As características das membranas são:

- ✓ Membrana 1 (SUZIN, 2019):
  - Material: Polietileno de Baixa Densidade;
  - Pigmentação: Cinza Médio;
  - Aditivo: AntiUV;
  - Módulo de elasticidade 70,6 MPa;
  - Módulo de cisalhamento 41,2 MPa;
  - Espessura 0,001 m;
  - Lado de 0,150 m;
  - Densidade 1125 kg/m³;
  - Coeficiente de Poisson 0,2.
- ✓ Membrana 2 (GRUTTMANN E TAYLOR, 1992):
  - Material: Membrana de Borracha;
  - Módulo de elasticidade 250 MPa;
  - Módulo de cisalhamento 96,15 MPa;
  - Espessura 0,002 m;
  - Lado de 0,150 m;
  - Densidade 1200 kg/m³;
  - Coeficiente de Poisson 0,3.
- ✓ Membrana 3 (YOUNG *et al*. ,2005):
  - Material: filme de poliamida;
  - Módulo de elasticidade 255,06 MPa;
  - Módulo de cisalhamento 102,04 MPa;
  - Espessura 0,005 m;

- Lado de 0, 56 m;
- Densidade 1419,58 kg/m³;
- Coeficiente de Poisson 0,34.

3.2. Modelo Analítico

Conforme mencionado anteriormente, para a determinação dos resultados analíticos foi utilizado o software Scilab. Ao realizar a programação, além de simplificar a resolução, este oferece uma parametrização das variáveis, considerando diferentes valores de propriedades e carregamentos que podem ser aplicados na estrutura. Para isso, foi implementado um código para os modelos constitutivos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin. Após, foi realizado a validação do mesmo, para isso foi utilizado os resultados experimentais do trabalho de Young *et al*. (2005). No experimento o corpo de prova foi fixado em uma máquina que tracionava a membrana, e assim gerava uma pré-tensão na estrutura, o valor da pré-tensão considerado no experimento foi de 0,01 MPa. Por fim, a frequência natural foi medida usando um vibrômetro de varredura a laser Polytec PI PSV-200.

As propriedades da membrana são inseridas nos códigos de ambos os modelos constitutivos, então é calculado as frequências naturais analíticas. Os valores são comparados com os resultados experimentais. A fim de avaliar a diferença entre os métodos, a diferença absoluta foi determinada.

Com o código validado, utilizou-se as propriedades das membranas 1 e 2, e calculou-se os 4 primeiros modos de vibração das estruturas na condição de contorno de pré-tensão constante de 1 MPa para a coordenada *y*, e para a coordenada *x* a pré-tensão variou de 1 MPa a 3 MPa, com incremento de 0,5 MPa. Assim, avaliou-se o comportamento das membranas com a variação de pré-tensão. Ainda, optou-se por variar a pré-tesão em uma única direção com o objetivo de verificar a influência nos modos 2 e 3, uma vez que estes são modos simétricos.

3.3. Modelo Computacional

As análises computacionais foram divididas em duas etapas, análise estática e análise dinâmica. Para a análise estática determinou-se os deslocamentos da membrana 1 e estes resultados foram comparados com os dados experimentais do trabalho de Suzin (2019), para fins de validação do modelo computacional. A segunda etapa consiste na análise dinâmica da estrutura, onde são obtidas as frequências naturais através do modelo computacional, e esses resultados são comparados com os resultados analíticos, a fim de validar o modelo computacional para as membranas 1 e 2.

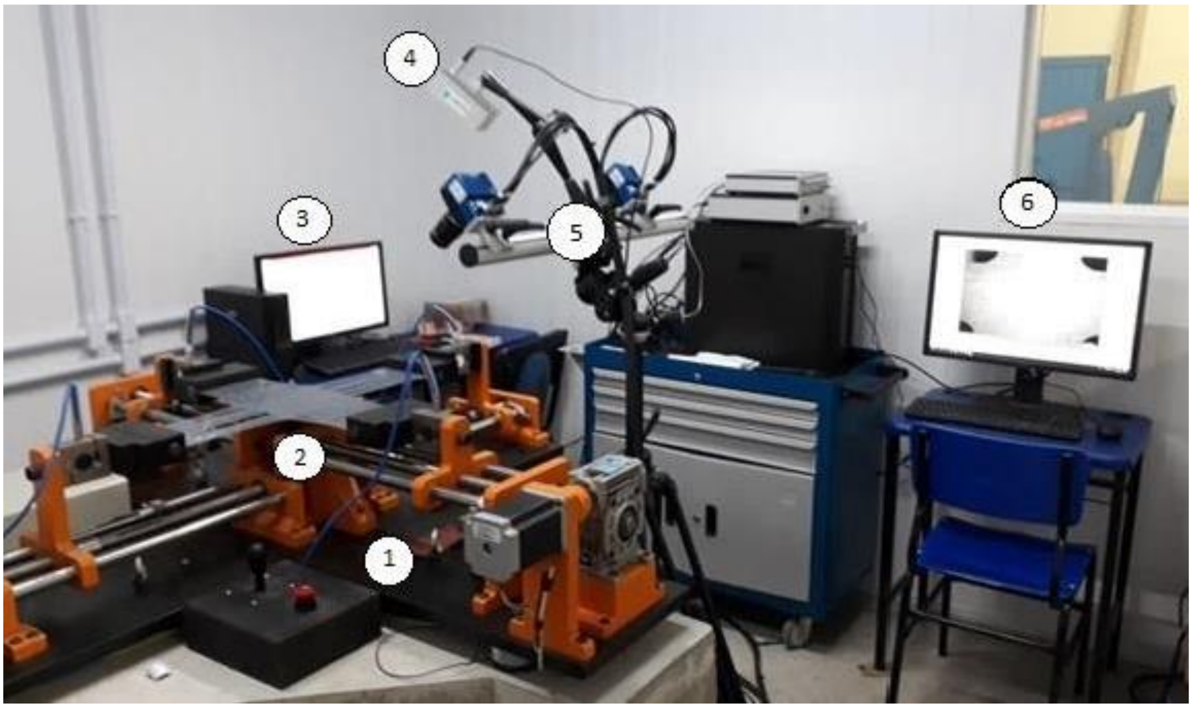
3.3.1. Análise Estática

A fim de realizar a validação do modelo analítico, implementado no Scilab, utilizou-se os dados experimentais de deformação do trabalho de Suzin (2019). O procedimento experimental utilizado por Suzin (2019) consistiu em fixar a membrana em uma máquina de ensaio biaxial. Essa máquina permite aplicar diferentes valores de pré-tensão para cada eixo, com isso é possível selecionar um valor de pré-tensão para o eixo *y* e variar o valor do eixo *x*. A Figura 3-2 mostra o aparato experimental realizado no trabalho de Suzin (2019).

Foram ensaiadas as seguintes razões de carregamentos x-y: pré-tensão de 1,0 MPa no eixo *y* e, 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa para o eixo *x*, sendo as mesmas condições aplicadas no modelo computacional. Vale ressaltar que tais carregamentos foram selecionados com base na Norma Europeia EN 17117-1 (2018) e no protocolo Japonês (MSAJ/M-02-1995). Os resultados computacionais de deformação foram comparados com os dados experimentais, determinando-se a diferença relativa entre eles.

Para a análise estática foi desenvolvido um modelo computacional da membrana, via software Abaqus®. Neste modelo aplicou-se as propriedades, as condições de contorno, no caso em questão foi realizado uma restrição em duas arestas da membrana e nas outras duas foi aplicado a pré-tensão, o carregamento é responsável por gerar a pré-tensão. A Figura 3-3 mostra uma representação de como as condições de contorno foram aplicadas na membrana sendo que foi fixado todos os nós das arestas inferior e esquerda e o carregamento foi aplicado em todos os nós das arestas superior e direita. Sua dimensão é de 0,15 metros em ambos os lados.

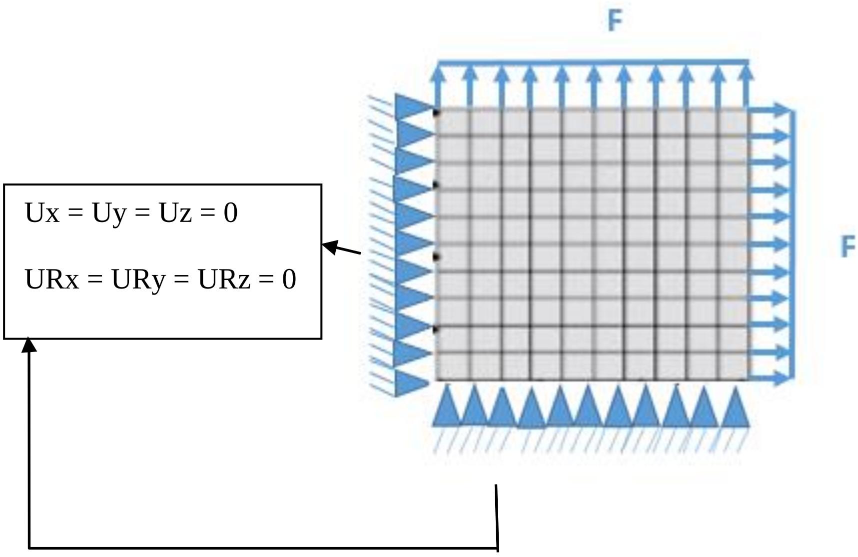
Figura 3-2: Aparato experimental equipamento de tração biaxial



1 – Equipamento de tração biaxial;
2 – Corpo-de-prova;
3 – Software controlador do equipamento de tração;
4 – Iluminação do sistema de correlação de imagem digital (DIC);
5 – Câmeras fotográficas do sistema de correlação de imagem digital (DIC);
6 – Software controlador do sistema de correlação de imagem digital (DIC).

Fonte: Adaptado de Suzin, 2019.

Figura 3-3: Representação das condições de contorno.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Em seguida, realizou-se a discretização do modelo, para isso foi selecionado um dos elementos de casca disponíveis no software Abaqus®, a Tabela 3-1 mostra alguns dos elementos disponíveis. O elemento de casca é um sólido tridimensional, cujo material se confina na vizinhança de uma superfície que é chamada de superfície média, sendo caracterizado por apresentar duas dimensões muito maiores que a terceira, denominada espessura. Ainda, pode-se destacar que é resistente a esforços de membrana e de flexão. Assim, selecionou-se o elemento S4R, sendo este um elemento de casca com 4 nós, cada nó possui 6 graus de liberdade sendo 3 de translação e 3 de rotação. A designação do elemento escolhido é S4R (SIMULIA, 2006) significa:

- S: elemento pertencente a classe casca (shell);
- 4: número de nós que compõem o elemento;
- R: integração reduzida;

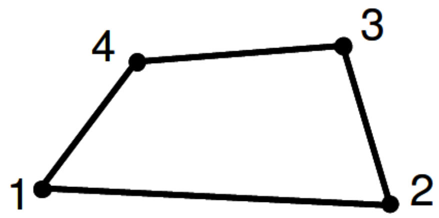
Tabela 3- 1: Elementos de casca possíveis de escolher no software Abaqus®.

Sigla	**Tipo**	**N° de elementos**
STRI3	triangular (casca fina)	3
S3	triangular (geral – deformação finita)	3
S3R	triangular com integração reduzida	3
S3RS	triangular com baixa deformação de membrana	3
STRI65	triangular (casca fina)	6
S4	quadrilateral (geral – deformação finita)	4
S4R	quadrilateral com integração reduzida	4
S4RS	quadrilateral com integração reduzida e baixa deformação de membrana	4
S4R5	quadrilateral (casca fina)	4
S8R	quadrilateral (casca espessa)	8
S8R5	quadrilateral (casca fina)	8
S9R5	quadrilateral (casca fina)	9

Fonte: Adaptado de Soares,2009.

A Figura 3-4 apresenta a representação gráfica do elemento de casca quadrilateral S4R com 4 nós. O elemento é aplicado na determinação das deformações finitas de membranas, pois apresenta uma formulação para grandes deformações, logo pode representar o comportamento hiperelástico da membrana.

Figura 3-4: Representação do elemento de casca S4R.



Fonte: Adaptado de Soares,2009.

Para discretização do espaço que se quer estudar, usa-se da técnica de refinamento de malhas. Assim, o equacionamento do método é obtido com a somatória dos resultados obtidos em cada subdivisão realizada. Dessa forma, aumentar o refinamento irá proporcionar um maior número de dados para a análise, buscando a convergência para a solução próxima da exata. Entretanto, ao aumentar o refinamento, irá necessitar de mais tempo computacional para realizar a análise, e consequentemente um maior custo operacional (TAVARES, 1998). Portanto, buscar-se-á, para o modelo estático, uma malha que não possui um tempo de processamento elevado e a resposta do problema independesse da malha escolhida. A Figura 3-5 mostra os resultados da convergência de malha, e a Tabela 3-2 indica para cada malha usada o seu número de elementos e o valor da deformação. É possível perceber que ao aumentar o número de elementos na malha, o valor da deformação converge para um mesmo valor.

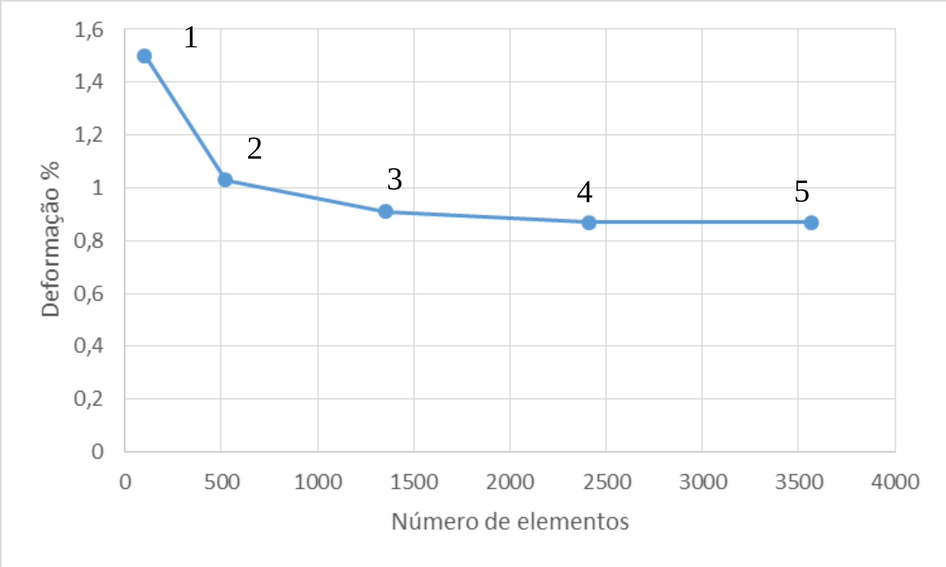
Tabela 3- 2: Parâmetros utilizados em cada malha para análise estática.

	Malha 1	**Malha 2**	**Malha 3**	**Malha 4**	**Malha 5**
Deformação%	1,5	1,03	0,91	0,84	0,85
Número de elementos	100	521	1357	2412	3568

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Percebe-se que a diferença relativa entre os valores de deformação diminui com o aumento da quantidade de elementos, ao comparar as malhas 4 e 5 a diferença relativa entre os valores de deformação é de 0,30 %. Entretanto, a malha 5 apresenta uma quantidade maior de elementos, logo o custo computacional será maior. Portanto, a malha selecionada foi a 4, já que esta apresenta uma diferença relativa pequena quando comparada com a malha 5. Com a malha escolhida é realizada a validação do modelo, o processo de validação consiste em comparar os resultados computacionais de deslocamento com dados experimentais. O modelo estático é composto de 2412 elementos e 2507 nós.

Figura 3-5: Análise de convergência de malha para o modelo estático.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

3.3.2. Análise Dinâmica

Para a análise dinâmica foi desenvolvido um modelo semelhante ao usando para análise estática, onde foi considerado uma pré-tensão de 1,0 MPa no eixo *y* e 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa para o eixo *x*. O modelo computacional para à análise dinâmica foi modelado via software Abaqus®. No modelo computacional dinâmico aplicou-se as propriedades, as condições de contorno, no caso em questão foi realizado uma restrição em duas arestas da membrana e nas outras duas foi aplicado o carregamento responsável por gerar a pré-tensão, procedimento igual ao da análise estática, na Figura 3-3 mostra uma representação de como as condições de contorno foram aplicadas para esse modelo computacional.

Para a discretização do modelo foi escolhido o elemento S4R, que também foi utilizado no modelo estático. Com o modelo devidamente discretizado é realizado o processo de convergência de malha. Esse processo consistiu em analisar o quarto modo de vibração da membrana, isso deve-se ao fato do quarto modo apresentar uma maior rigidez e, consequentemente, apresentar mais picos, vales e linhas nodais. Assim, aplicado a metodologia de refinamento para o quarto modo e resultando em uma resposta independente da malha, os demais modos estarão ajustados.

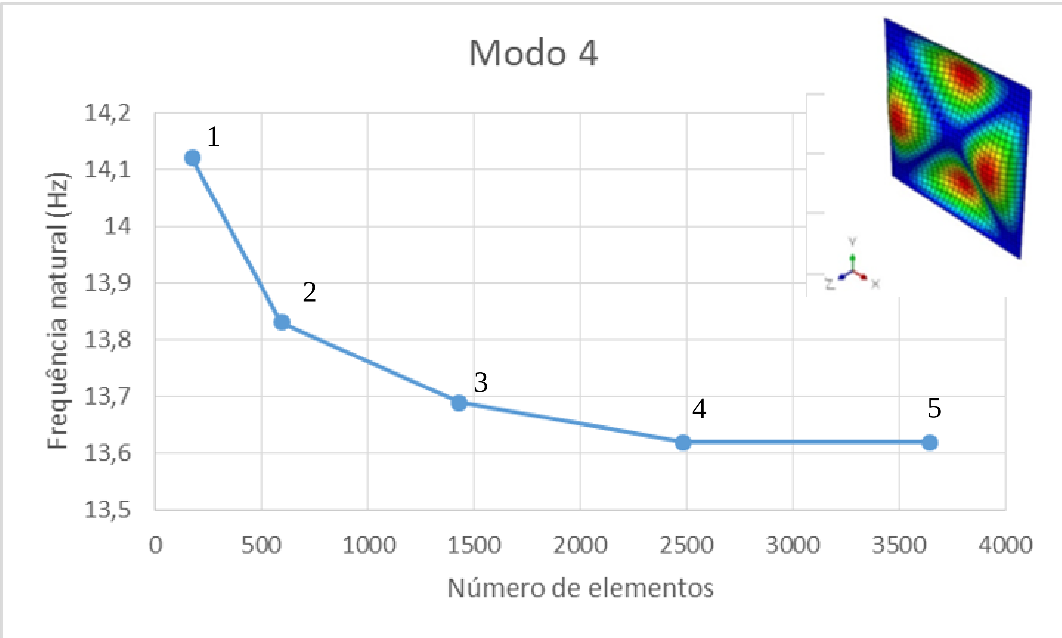
A Figura 3-6 apresenta o gráfico de refinamento de malha realizado para o quarto modo de vibração, e a Tabela 3-3 indica para cada malha usada o valor de frequência natural e o número de elementos. Percebe-se que o comportamento do gráfico tende a convergir à medida que há um incremento no número de elementos.

Tabela 3- 3: Parâmetros utilizados em cada malha para análise dinâmica.

	Malha 1	**Malha 2**	**Malha 3**	**Malha 4**	**Malha 5**
Frequência natural [Hz]	14,12	13,83	13,69	13,62	13,61
Número de elementos	175	596	1432	2487	3643

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura 3-6: Análise de convergência de malha para o modelo dinâmico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Selecionou-se o ponto 4, já que a diferença relativa entre os valores de sequência é de 0,13%. Logo a malha 4 é a melhor escolha pois apresenta um resultado aceitável com um baixo custo computacional, o modelo dinâmico é composto de 2487 elementos e 2584 nós. Observa-se que existe uma variação entre o número de elementos do modelo estático para o modelo dinâmico, isso ocorre pois foi feita uma convergência de malha para cada modelo buscando uma malha que melhor representasse a resposta para o problema a ser resolvido.

Após realizar a análise de convergência de malha, o próximo passo consiste na validação do modelo, para isso os resultados de frequência natural, do modelo computacional, são comparados com os dados analíticos, considerando o modelo neo-Hooke. Calculou-se a diferença absoluta entre os valores computacionais e analíticos. É importante ressaltar que se utilizou o modelo de neo-Hooke pois ele estava implementado no software Abaqus®. Assim, é possível comparar as frequências computacionais diretamente como os dados analíticos. Ainda, foi utilizada a métrica desenvolvida por Silva *et al.* (2008) para comparação dos resultados, definida como

$$M = \sum_{1}^{N} \sqrt{\frac{(F_a - F_c)^2}{(F_a)^2}} \tag{63}$$

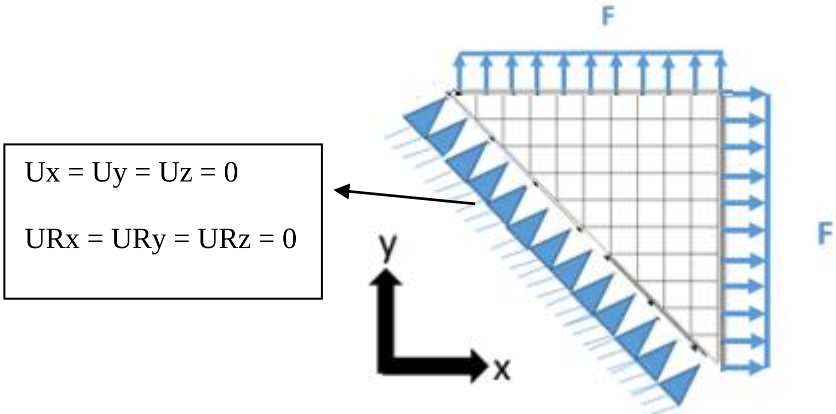
onde F_a representa os dados analíticos e F_c corresponde aos resultados computacionais. Essa métrica foi desenvolvida para correlacionar o dano em materiais compósitos, mas devido a sua simplicidade, pode ser adaptada para aplicação na correlação entre modelos. Considera-se uma boa correlação o resultado da métrica mais próximo a 1. Neste trabalho, os dados analíticos obtidos usando o modelo de neo-Hooke foram considerados como referência para a correlação com os resultados computacionais.

Após a validação do modelo computacional, analisou-se a influência de diferentes geometrias na resposta dinâmica da estrutura (frequência natural). Para isso, as geometrias desenvolvidas apresentam a área, volume e número de nós da geometria quadrada, uma vez que estes dados podem exercer influência nas frequências naturais.

A primeira geometria desenvolvida foi um triângulo retângulo. Este foi engastado na sua aresta maior (hipotenusa), e aplicado o carregamento nas outras arestas. A Figura 3-7 mostra as condições de contorno aplicadas na geometria triangular, as dimensões são de 0,225 metros para os catetos e 0,318 metros para a hipotenusa. Foi fixado todos os nós da aresta da hipotenusa e foi aplicado a pré-tensão em todos os nós do cateto, aplicando uma pré-tensão de 1,0 MPa no eixo y e 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa para o eixo x.

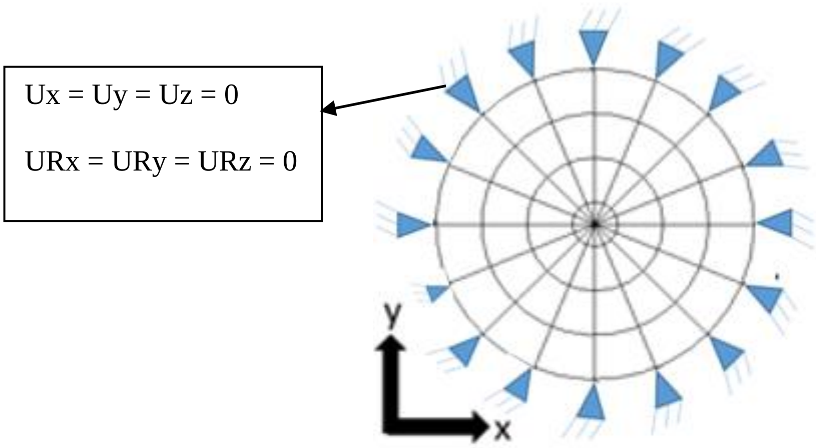
A segunda geometria estudada é a circular com o raio de 0,84 metros. Para essa geometria foi engastada todos os nós do seu perímetro e, então, aplicado um carregamento distribuído fora do plano da membrana. Esse carregamento também foi variado em 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa. A Figura 3-8 mostra as condições de contorno para a geometria circular.

Figura 3-7: Representação da geometria triangular



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura 3-8: Representação da geometria circular

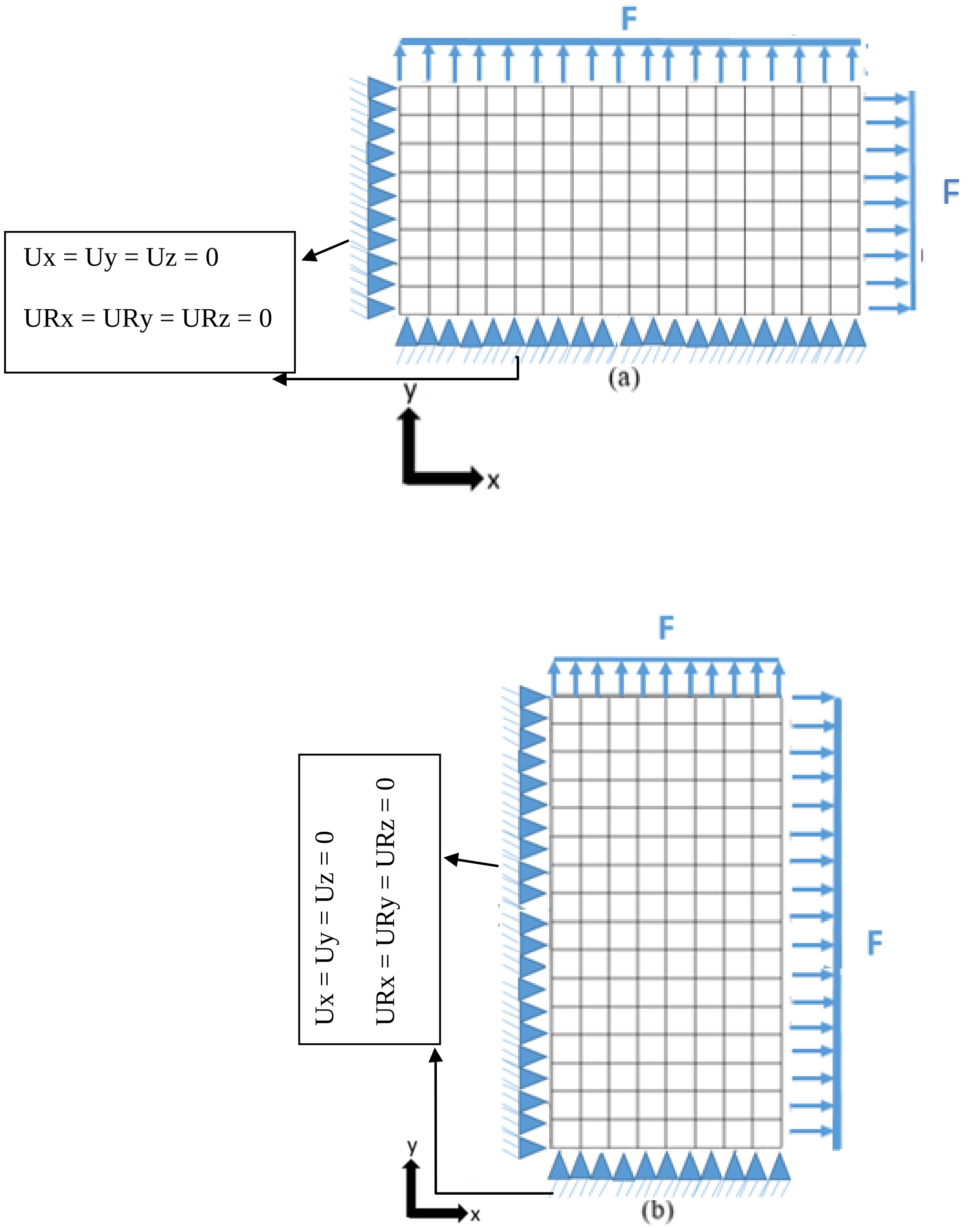


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A terceira e quarta geometrias são retangulares com uma base de 0,2 metros e uma altura de 0,113 metros ambas apresentam as mesmas características e condições de contorno sendo engastado todos os nós das arestas inferior e direita e aplicado a pré-tensão nas arestas superior e esquerda, o que as diferencia é a as duas geometrias é direção da pré-tensão. O primeiro retângulo apresenta na direção *y* pré-tensão fixa em 1,0 MPa e, pré-tensão na direção *x* variando em 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa. O segundo retângulo, a pré-tensão em *y* varia em 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa e a pré-tensão em *x* é fixada em 1 MPa. Isso foi feito para verificar a influência da direção de pré-tensão na frequência natural para a geometria.

A Figura 3-9 mostra as duas geometrias retangulares, em (a) o retângulo tipo 1 e, em (b) o retângulo tipo 2 onde ocorre uma variação de 90° de rotação em relação ao tipo 1, porém mantendo a variação de pré-tensão em *x*.

Figura 3-9: Representação das geometrias retangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

CAPÍTULO 4

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados, mostrando o processo de validação para as Equações (43) e (45) e os modelos computacionais. Além disso, apresentar-se-á o comportamento dinâmico considerando as diferentes geometrias analisadas.

4.1. Validação

Inicialmente é apresentado os resultados considerando as Equações (43) e (45), implementadas no software Scilab®, comparando as mesmas com os dados da literatura. Após, tais resultados são comparados com o modelo computacional, via software Abaqus®, considerando a membrana com geometria quadrada.

4.1.1. Validação estática – Modelo neo-Hooke

Para validação do modelo computacional estático, foram comparados os dados de deformação do trabalho de Suzin (2019) com os valores de deformação obtidos com o modelo computacional, considerando as propriedades da membrana 1 e o mesmo tipo de carregamento biaxial, ou seja, pré-tensão igual a 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa na direção *x* e 1,0 MPa na direção *y*. A Tabela 4-1 mostra a comparação entre os valores de deformação experimental e considerando o modelo computacional. Como pode ser observado, a diferença relativa manteve-se abaixo de 1%, isso indica que o modelo analítico para Membrana 1 representa o seu comportamento mecânico para a condição analisada.

Tabela 4-1: Comparação da deformação da membrana 1 direção *x*, entre as análises experimental e computacional.

Razão de pré-tensão x-y (MPa)	Exp. [1] %	Abaqus® [2] %	Δ1 [%]
1,0 : 1,0	0,86	0,87	0,93
1,5 : 1,0	1,08	1,09	1,11
2,0 : 1,0	1,22	1,24	1,23
2,5 : 1,0	1,29	1,31	1,40
3,0 : 1,0	1,43	1,45	1,47

Δ_1 =([2]–[1]/[1])·100
[1] = **Deformação** experimental, Suzin (2019)
[2] = **Deformação** computacional obtida do software Abaqus®

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.1.2. Validação dinâmica

Como comentado anteriormente, fez-se necessário validar o código desenvolvido com as Equações (43) e (45) dos modelos constitutivos neo-Hooke e Mooney-Rivlin. Para isso, utilizou-se os resultados experimentais apresentados em Young *et al*. (2005). A Tabela 4-2 apresenta a comparação entre as frequências naturais experimentais, considerando os modelos de neo-Hooke, Mooney-Rivlin e a diferença relativa entre os resultados para os 7 primeiros modos de vibração da membrana.

Percebe-se que os valores das frequências naturais obtidos com o modelo Mooney-Rivlin apresentaram uma diferença relativa maior quando comparados com os valores experimentais. Já os valores obtidos com o modelo de neo-Hooke apresentam uma diferença relativa menor quando comparados com os valores experimentais.

Devido ao fato dos resultados, considerando os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin, a diferença relativa foi menor que 1,0% e 1,9%, respectivamente. Portanto, é possível afirmar que ambos os modelos são válidos e aplicáveis para a determinação das frequências naturais de membranas com geometria quadrada.

Tabela 4-2: Tabela de comparação entre os resultados experimentais e analíticos.

Modo	Exp. Young *et al.* (2005) [Hz][1]	Presente trabalho neo-Hooke [Hz][2]	Presente trabalho Mooney-Rivlin [Hz][3]	Exp. × neo-Hooke [%]	Exp. × Mooney-Rivlin [%]
1	13,40	13,35	13,65	0,37	1,87
2	17,70	17,59	17,96	0,62	1,47
3	17,70	17,59	17,96	0,62	1,47
4	18,50	18,67	18,80	0,92	1,62
5	18,50	18,67	18,80	0,92	1,08
6	20,00	20,03	20,23	0,15	1,15
7	20,00	20,03	20,23	0,15	1,15

[1]**experimental trabalho de Young *et al.* (2005)**
[2]presente trabalho – equação analítica modelo de neo-Hooke (**Equação 43**)
[3]presente trabalho – equação analítica modelo Mooney-Rivlin **(Equação 45)**

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.2. Estudo de Caso 1 – Geometria Quadrática

4.2.1. Membrana 1

A seguir são apresentados os resultados analíticos, obtidos através dos modelos neo-Hooke e Mooney-Rivlin, e os resultados computacionais, utilizando o modelo Neo-Hooke no software Abaqus®. Utilizou-se uma membrana hiperelástica isotrópica, com geometria quadrada submetida a um estado de tração biaxial. A membrana possui espessura de 0,001 m, comprimento de 0,150 m, densidade 1125 kg/m³, módulo de elasticidade de 7,06 MPa, módulo de cisalhamento de 4,12 MPa e coeficiente de Poisson de 0,2.

Na primeira análise considerou-se a pré-tensão de 1 MPa em ambas as direções, nas demais análises a pré-tensão em *y* foi considerada constante de 1 MPa e, a pré-tensão em *x* considerou-se os seguintes valores: 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa. Os resultados são apresentados na Tabelas 4-3.

Tabela 4-3: Comparação das frequências naturais considerando os modelos analítico e computacional para membrana 1.

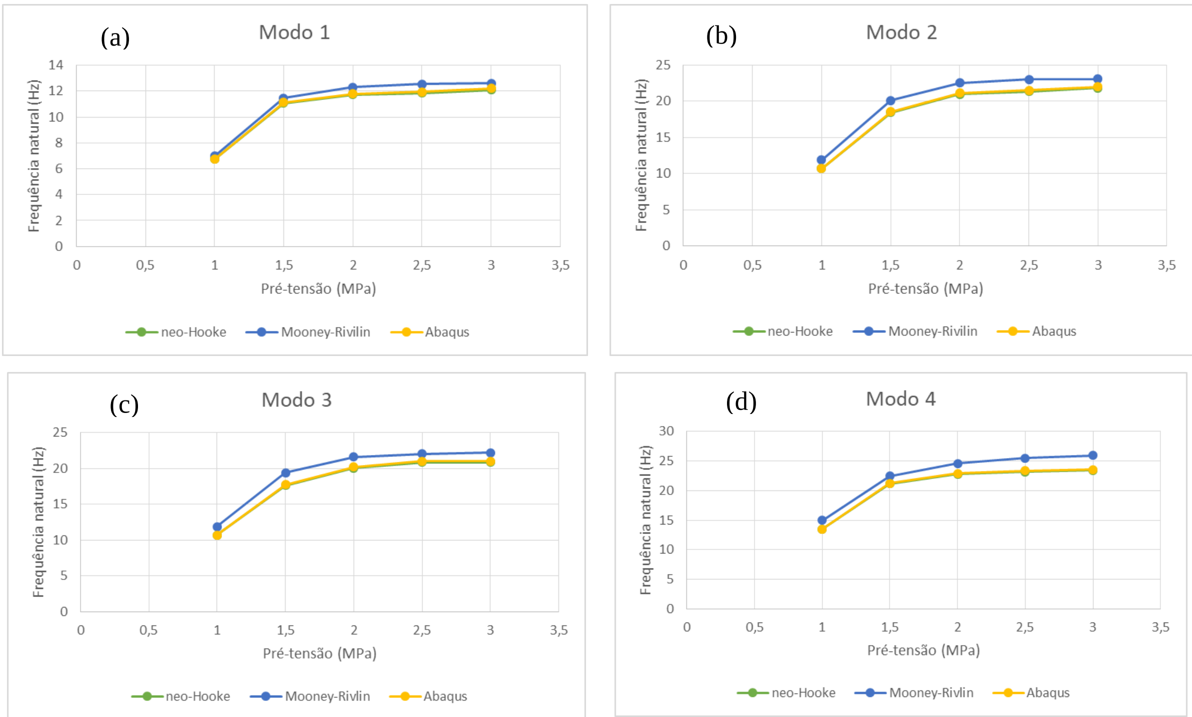
Razão de pré-tensão x-y [Mpa]	**Modos**	**neo-Hooke [Hz] Eq. (43)**	**Mooney-Rivlin [Hz] Eq. (45)**	**Abaqus® [Hz]**	**neo-Hooke × Abaqus® [%]**	**Mooney-Rivlin × Abaqus® [%]**
1,0:1,0	1	6,75	6,97	6,74	0,15	3,30
	2	10,67	11,90	10,68	0,09	10,25
	3	10,67	11,90	10,68	0,09	10,25
	4	13,50	14,95	13,52	0,15	9,57
1,5:1,0	1	11,08	11,47	11,13	0,45	2,96
	2	18,42	20,09	18,52	0,54	7,81
	3	17,64	19,41	17,71	0,4	8,76
	4	21,16	22,45	21,26	0,47	5,30
2,0:1,0	1	11,72	12,3	11,78	0,51	4,23
	2	20,94	22,51	21,1	0,76	6,26
	3	20,06	21,63	20,2	0,70	6,61
	4	22,76	24,61	22,91	0,66	6,91
2,5:1,0	1	11,84	12,56	11,94	0,84	4,94
	2	21,35	22,98	21,52	0,80	6,35
	3	20,83	22,04	20,99	0,77	4,76
	4	23,20	25,51	23,36	0,69	8,43
3,0:1,0	1	12,10	12,62	12,21	0,91	3,25
	2	21,81	23,08	22,00	0,86	4,68
	3	20,87	22,18	21,04	0,81	5,14
	4	23,41	25,92	23,58	0,73	9,03
neo-Hooke × Abaqus® = ([neo-Hooke] – [Abaqus®] / [neo-Hooke])·100						
Mooney-Rivlin × Abaqus® = ([Mooney-Rivlin] – [Abaqus®] / [Mooney-Rivlin])·100						

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Observa-se que com o aumento do carregamento, há um aumento da frequência natural, com isso é possível afirmar que o valor da pré-tensão está diretamente associado ao aumento da rigidez da membrana. Ao comparar os modos 2 e 3, modos simétricos, considerando a pré-tensão igual 1,0 MPa, em ambas as direções, os modos apresentam a mesma frequência natural. Entretanto, quando é comparado os demais valores de pré-tensão, há uma diferença entre as frequências naturais, isso se deve ao fato de que o segundo modo está sofrendo maior influência da pré-tensão, logo apresenta maiores valores de frequência.

A Figura 4-1 mostra o comportamento de cada modo de vibração da membrana ao comparar os valores da frequência natural, quando a pré-tensão em *x* e *y* são 1,0 MPa e para a pré-tensão em *x* de 1,5 Mpa. É possível observar um aumento no valor da frequência, porém quando se compara os valores da frequência natural para a pré-tensão em *x* de 2,5 ou 3,0 MPa, a diferença entre os valores é menor.

Figura 4-1: Em (a) o comportamento da frequência natural para o modo 1 de vibrar da membrana em (b) o comportamento do modo 2, em (c) o comportamento do modo 3 e em (d) o comportamento do modo 4.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Como mencionado anteriormente, a máxima diferença relativa entre o modelo computacional e o modelo de neo-Hooke foi menor que 2%. Logo isso faz com que a primeira etapa de validação do modelo computacional esteja concluída.

Para a segunda etapa é aplicada a métrica desenvolvida por Silva (2008). Observa-se na Tabela 4-4 os resultados dessa correlação. Observa-se que ao correlacionar o modo analítico com o seu respectivo modo computacional os valores tendem a serem próximos de 1, entretanto, quando se correlaciona modos distintos os valores tendem a se aproximar de 0. Contudo, ao correlacionar o modo 2 analítico com o modo 3 computacional, estes apresentam uma alta correlação, isso se deve ao fato dos modos 2 e 3 serem simétricos.

Tabela 4-4: Correlação dos resultados computacionais e neo-Hooke considerando 1,0 MPa de pré-tensão para a membrana 1.

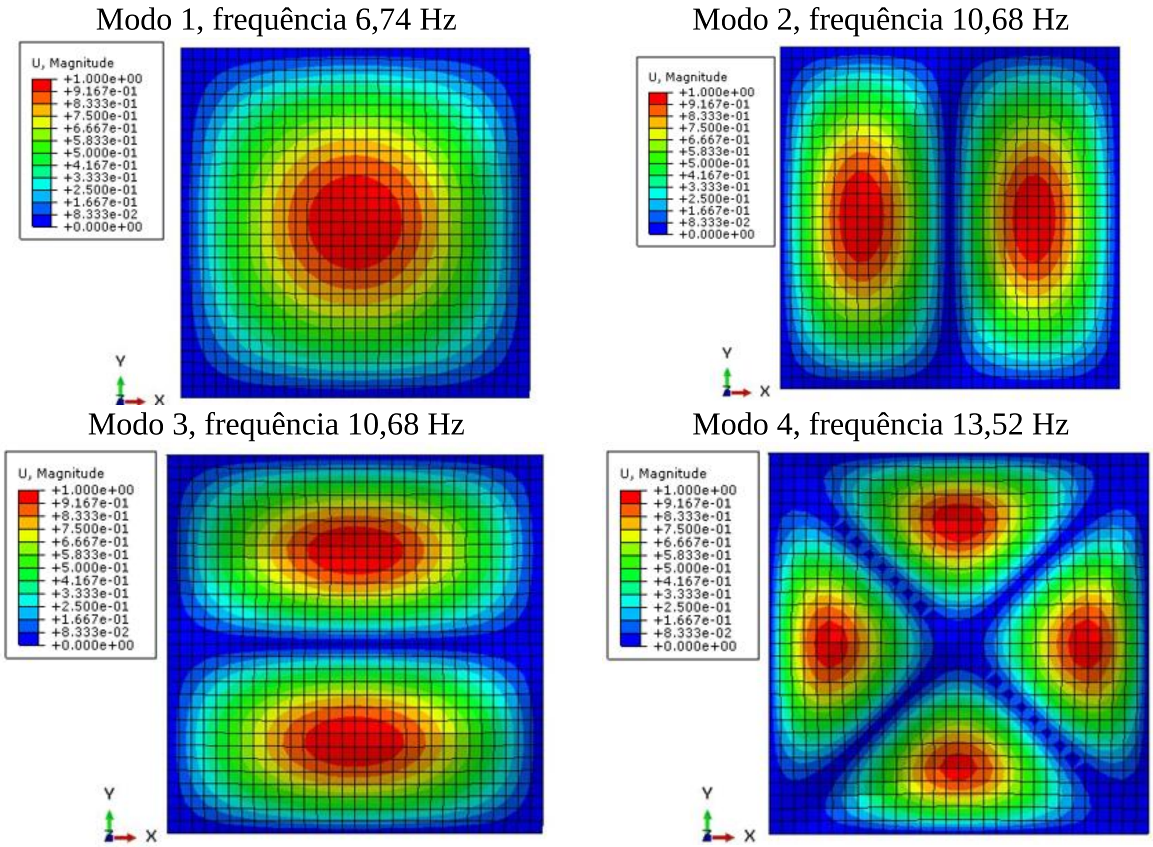
Pré-tensão *x*-*y* [MPa]	**Modelo**	**Comp. 1**	**Comp. 2**	**Comp. 3**	**Comp. 4**
1,0 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,14	0,22	0,01
	neo-Hooke 2	0,31	**0,99**	0,99	0,66
	neo-Hooke 3	0,31	0,99	**0,99**	0,69
	neo-Hooke 4	0,01	0,62	0,68	**0,99**
1,5 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,15	0,19	0,01
	neo-Hooke 2	0,34	**0,99**	0,96	0,69
	neo-Hooke 3	0,34	0,95	**0,99**	0,72
	neo-Hooke 4	0,1	0,65	0,71	**0,99**
2,0 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,18	0,25	0,03
	neo-Hooke 2	0,44	**0,99**	0,97	0,75
	neo-Hooke 3	0,44	0,96	**0,99**	0,77
	neo-Hooke 4	0,11	0,74	0,76	**0,99**
2,5 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,32	0,39	0,04
	neo-Hooke 2	0,51	**0,99**	0,96	0,85
	neo-Hooke 3	0,51	0,96	**0,99**	0,88
	neo-Hooke 4	0,16	0,81	0,83	**0,99**
3,0 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,32	0,4	0,07
	neo-Hooke 2	0,56	**0,99**	0,97	0,87
	neo-Hooke 3	0,56	0,94	**0,99**	0,9
	neo-Hooke 4	0,17	0,89	0,91	**0,99**

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A Figura 4-2 apresenta o comportamento dos modos de vibração da membrana para os valores de pré-tensão de 1 Mpa. Para as pré-tensões de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa os modos de vibração se encontram no Anexo B.

É importante ressaltar que as formas modais da membrana apresentam comportamento esperado. Para o primeiro modo de vibrar existe uma única semi-onda para ambos os sentidos, *x* e *y*. O segundo e terceiro modos apresentam o comportamento simétrico, sendo que o segundo modo apresenta 2 semi-ondas no sentido do eixo *x* e uma semi-onda em *y*. O terceiro modo apenas se diferencia do segundo modo pela localização das semi-ondas em relação aos eixos cartesianos. O quarto modo apresenta duas semi-ondas em cada eixo cartesiano. Todos os modos apresentam a mesma forma modal independentemente do valor da pré-tensão selecionado.

Figura 4-2: Comportamento modal da membrana 1 submetida a 1,0 MPa.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.2.2. Membrana 2

Para a membrana 2 foi considerado o mesmo procedimento da membrana 1. Apresenta-se o resultado considerando 1,0 MPa em ambas as direções, e para os demais casos foi modificado o valor da pré-tensão em *x*, sendo 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa e 3,0 MPa. A Tabela 4-5 apresenta as frequências naturais calculadas com os modelos analíticos e via software Abaqus®, juntamente com a diferença relativa entre os modelos.

O comportamento da frequência natural da membrana 2 é similar ao comportamento da membrana 1, já que ao aumentar o valor da pré-tensão faz com que ocorra o aumento no valor da frequência natural. Considerando a membrana 2, para um incremento da pré-tensão há um aumento da rigidez da estrutura. Além disso, o segundo e o terceiro modo de vibrar, que são modos simétricos, possuem a mesma frequência natural quando submetidos a uma pré-tensão de 1,0 MPa em ambas as direções, porém ao promover um incremento do valor da pré-tensão, a frequência natural do segundo modo se torna maior que o valor do terceiro modo. Portanto, o modo 2 da membrana 2 sofre uma maior influência da pré-tensão quando comparado ao modo 3, comportamento similar ao da membrana 1.

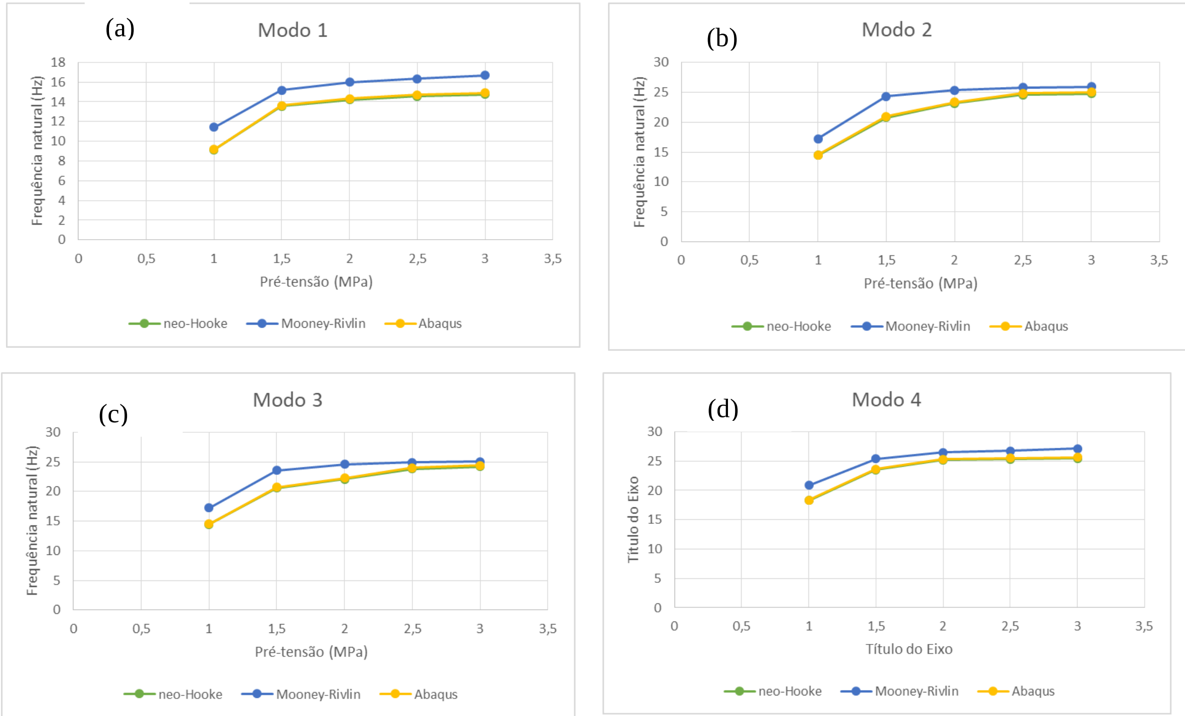
Tabela 4-5: Comparação das frequências naturais considerando os modelos analítico e computacional para membrana 2.

Pré-tensão x-y MPa	**Modos**	**neo-Hooke [Hz] Eq. (43)**	**Mooney-Rivlin [Hz] Eq. (45)**	**Abaqus® [Hz]**	**neo-Hooke × Abaqus® [%]**	**Mooney-Rivlin × Abaqus® [%]**
1,0 : 1,0	1	9,15	11,44	9,16	0,11	19,93
	2	14,46	17,25	14,50	0,28	15,94
	3	14,46	17,25	14,50	0,28	15,94
	4	18,29	20,86	18,34	0,27	12,08
1,5 : 1,0	1	13,57	15,17	13,64	0,52	10,09
	2	20,81	24,3	20,95	0,67	13,79
	3	20,60	23,57	20,73	0,63	12,05
	4	23,51	25,36	23,62	0,47	6,86
2,0 : 1,0	1	14,21	15,98	14,32	0,77	10,39
	2	23,15	24,81	23,34	0,82	5,93
	3	22,09	24,61	22,24	0,68	9,63
	4	25,17	26,5	25,33	0,64	4,42
2,5 : 1,0	1	14,57	16,34	14,71	0,96	9,98
	2	24,62	25,23	24,84	0,89	1,55
	3	23,82	24,92	24,01	0,76	3,65
	4	25,31	26,75	25,48	0,67	4,75
3,0 : 1,0	1	14,75	16,70	14,91	1,08	10,72
	2	24,81	25,64	25,06	1,01	2,26
	3	24,20	25,02	24,40	0,83	2,46
	4	25,46	27,15	25,64	0,71	5,56
neo-Hooke × Abaqus® = ([neo-Hooke] – [Abaqus®] / [neo-Hooke])·100						
Mooney-Rivlin × Abaqus® = ([Mooney-Rivlin]–[Abaqus®] / [Mooney-Rivlin])·100						

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A Figura 4-3 apresenta o comportamento dos quatro primeiros modos de vibrar da membrana, as frequências naturais apresentam incremento quando comparados aos valores calculados com pré-tensão de 1,0 MPa. Após o valor de pré-tensão 1,5 Mpa, as frequências naturais tendem a estabilizar, a diferenças entre eles se torna menor com o aumento de pré-tensão.

Figura 4-3: (a) o comportamento do modo 1 de vibrar da membrana, (b) o comportamento do modo 2, (c) o comportamento do modo 3 e (d) o comportamento do modo 4.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Para a membrana 2, percebe-se um comportamento semelhante ao da membrana 1, com o incremento da pré-tensão a membrana torna-se mais rígida e, as frequências naturais tendem a estabilizar após um determinado valor de pré-tensão. Além disso, observa-se que a diferença relativa entre o modelo computacional e o modelo de neo-Hooke é menor que 2%, valor este considerado aceitável para validação da membrana 2.

Os resultados da correlação são apresentados nas Tabelas 4-6. É possível notar que a membrana 2 apresenta boa correlação para a diagonal principal, corroborando com a hipótese que o modelo computacional está válido para o estudo em questão. Observa-se que ao realizar a correlação entre os modos simétricos, esta apresentou alta correlação, assegurando o comportamento observado na membrana 1.

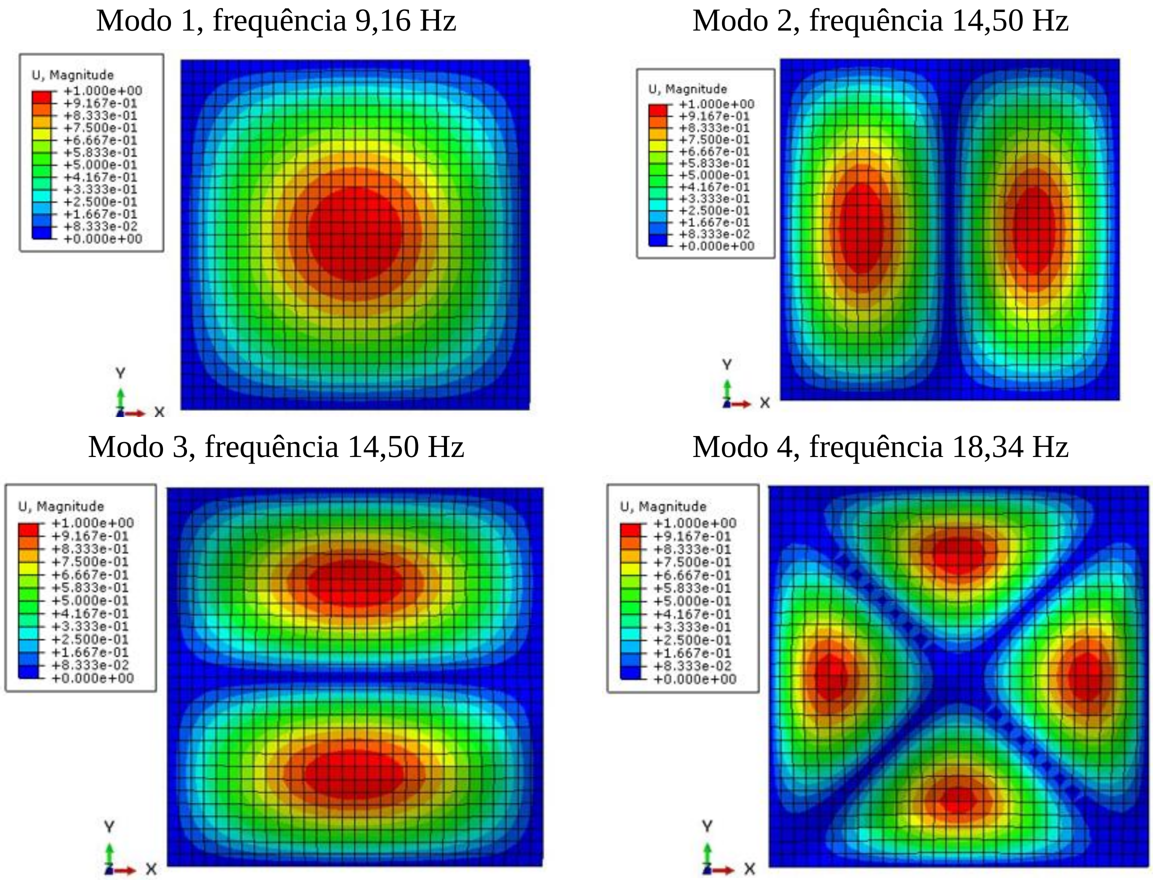
Tabela 4-6: Correlação dos resultados computacionais e neo-Hooke considerando 1,0 MPa de pré-tensão para a membrana 2.

Pré-tensão x-y [Mpa]	Modelo	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3	Comp. 4
1,0 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,17	0,25	0,01
	neo-Hooke 2	0,34	**0,99**	0,99	0,66
	neo-Hooke 3	0,34	0,99	**0,99**	0,71
	neo-Hooke 4	0,01	0,65	0,71	**0,99**
1,5 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,18	0,22	0,02
	neo-Hooke 2	0,36	**0,99**	0,96	0,69
	neo-Hooke 3	0,36	0,95	**0,99**	0,74
	neo-Hooke 4	0,1	0,68	0,75	**0,99**
2,0 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,19	0,27	0,03
	neo-Hooke 2	0,47	**0,99**	0,97	0,74
	neo-Hooke 3	0,47	0,96	**0,99**	0,76
	neo-Hooke 4	0,12	0,84	0,79	**0,99**
2,5 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,32	0,39	0,04
	neo-Hooke 2	0,53	**0,99**	0,96	0,85
	neo-Hooke 3	0,53	0,96	**0,99**	0,9
	neo-Hooke 4	0,15	0,89	0,91	**0,99**
3,0 : 1,0	neo-Hooke 1	**0,99**	0,32	0,4	0,07
	neo-Hooke 2	0,56	**0,99**	0,97	0,86
	neo-Hooke 3	0,56	0,94	**0,99**	0,91
	neo-Hooke 4	0,17	0,9	0,92	**0,99**

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A Figura 4-4 apresenta o comportamento dos modos de vibração da membrana para o valor de pré-tensão de 1 MPa. A representação dos modos para as pré-tensões de 1,5 MPa; 2 MPa; 2,5 MPa; 3 MPa se encontram no Anexo B. A membrana 2 possui comportamento semelhante ao da membrana 1, contudo isto já era esperado pois ambas apresentam as mesmas condições de fixação, geometria e carregamento.

Figura 4-4: Comportamento modal da membrana 2 submetida a 1,0 MPa.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.3. Estudos de Caso 2 – Geometria Triangular

Uma vez validado o modelo computacional, então realiza-se a extrapolação para as geometrias triangular, retangular e circular, de forma a verificar a influência da geometria nas frequências naturais da estrutura. É importante destacar que todas as geometrias devem manter a mesma área e volume dos modelos previamente validados.

4.3.1. Membrana 1

A Tabela 4-7 apresenta as frequências naturais obtidas para a geometria triangular. Pode-se evidenciar o aumento nas frequências naturais de cada modo devido ao incremento de pré-tensão e, estes valores tendem a estabilizar após atingirem o valor de 1,5 MPa.

Tabela 4-7: Frequências naturais da geometria triangular para as propriedades da membrana 1.

Pré-tensão *x-y* **[Mpa]**	**Modo 1** [Hz]	**Modo 2** [Hz]	**Modo 3** [Hz]	**Modo4** [Hz]
1,0 : 1,0	8,49	14,41	14,41	17,98
1,5 : 1,0	11,94	19,11	18,82	22,21
2,0 : 1,0	12,38	21,39	21,06	22,92
2,5 : 1,0	12,59	21,59	21,29	23,04
3,0 : 1,0	12,71	22,24	21,94	23,06

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

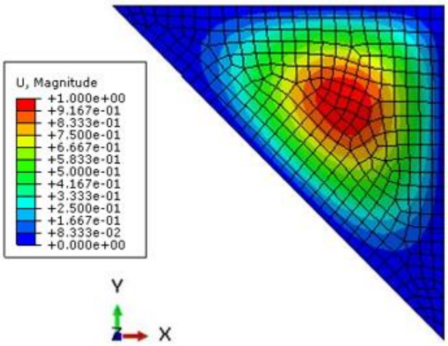
Contudo ao compararmos as frequências naturais de cada modo da membrana quadrada com a membrana com geometria triangular, fica evidente que a geometria triangular possui frequências naturais maiores. Logo a membrana com a geometria triangular apresenta uma rigidez maior quando comparada com a geometria quadrada.

A Figuras 4-5 mostra o comportamento dos modos de vibrar da membrana para o valor de pré-tensão de 1,0 MPa. A representação dos modos para as pré-tensões de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa se encontram no Anexo C. Como esperado, as frequências naturais sofreram alterações quando comparados a geometria quadrada. Com o incremento da pré-tensão os valores das frequências naturais também aumentaram e, que para um determinado valor de pré-tensão os valores das frequências naturais estabilizaram, mesmo comportamento observado para geometria quadrada.

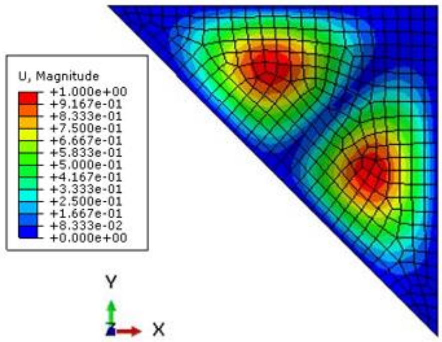
O comportamento das formas modais para a geometria triangular apresentou para o primeiro modo de vibrar uma única semi-onda para ambos os sentidos, *x* e *y*. O segundo e terceiro modo apresentam o comportamento simétrico. Já o quarto modo apresenta duas semi-ondas em cada eixo cartesiano. Ao incrementar os valores de pré-tensão, os modos de vibrar apresentados mantem o mesmo comportamento.

Figura 4-5: Comportamento modal da membrana 1 com geometria triangular com pré-tensão de 1,0 MPa.

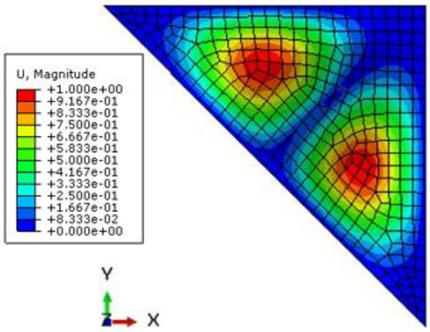
Modo 1, frequência 8,49 Hz



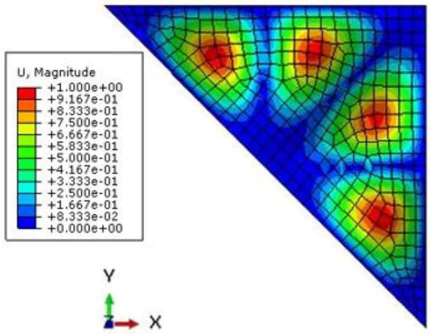
Modo 2, frequência 14,41 Hz



Modo 3, frequência 14,41 Hz



Modo 4, frequência 17,98 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.3.2. Membrana 2

Considerando as propriedades da membrana 2, foi realizada a análise para a geometria triangular. A Tabela 4-8 apresenta os resultados obtidos para a geometria triangular.

Tabela 4-8: Frequências naturais da geometria triangular para as propriedades da membrana 2.

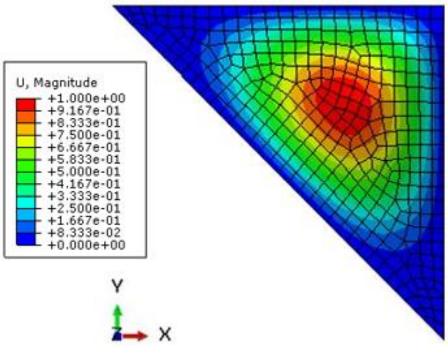
Pré-tensão *x-y* [Mpa]	**Modo 1**	**Modo 2**	**Modo 3**	**Modo4**
1,0 : 1,0	14,63	18,05	18,81	21,77
1,5 : 1,0	16,05	23,44	22,55	24,5
2,0 : 1,0	17,42	24,37	23,32	26,04
2,5 : 1,0	17,24	24,76	23,5	26,6
3,0 : 1,0	17,28	24,78	23,94	26,89

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

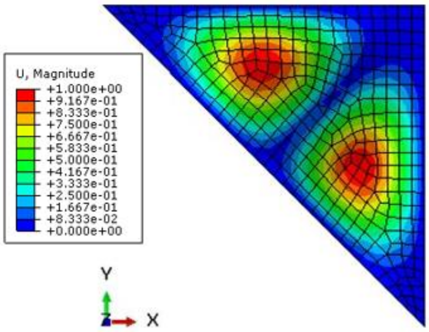
A Figura 4-6 mostra o comportamento dos modos de vibrar da membrana 2 para o valor de pré-tensão de 1,0 MPa. A representação dos modos para as pré-tensões de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa encontram-se no Anexo C.

Figura 4-6: Comportamento modal da membrana 2 com geometria triangular com pré-tensão de 1,0 MPa.

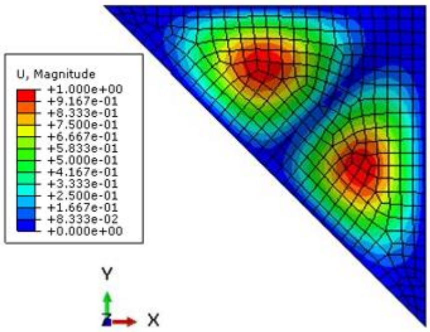
Modo 1, frequência 14,63 Hz



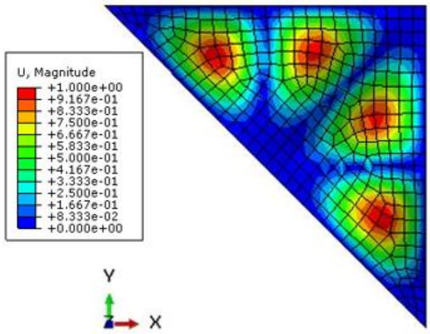
Modo 2, frequência 18,81 Hz



Modo 3, frequência 18,81 Hz



Modo 4, frequência 21,77 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

O comportamento das semi-ondas permaneceu igual, logo pode-se comprovar que a propriedade não altera o comportamento das semi-ondas, contudo a influência é exercida pelas condições de contorno e pela forma de aplicação do carregamento.

4.4. Estudo de Caso 3 – Geometria Circular

4.4.1. Membrana 1

A Tabela 4-9 apresenta as frequências naturais dos quatro primeiros modos para a membrana 1 e geometria circular.

Tabela 4-9: Frequências naturais da geometria circular para as propriedades da membrana 1.

Pré-tensão *x-y* [Mpa]	**Modo 1** [Hz]	**Modo 2** [Hz]	**Modo 3** [Hz]	**Modo4** [Hz]
1,0 : 1,0	7,79	12,51	12,51	15,90
1,5 : 1,0	11,42	18,86	18,25	23,16
2,0 : 1,0	11,87	19,58	18,97	24,07
2,5 : 1,0	11,95	19,70	19,09	24,22
3,0 : 1,0	11,99	19,72	18,11	24,25

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

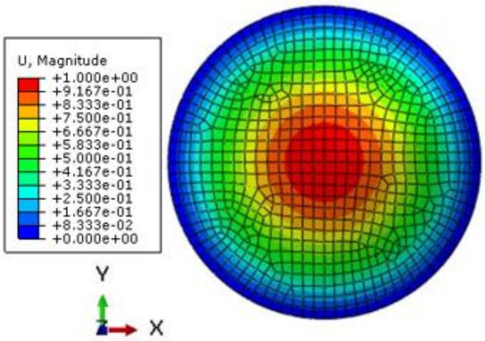
A geometria circular apresentou o mesmo comportamento das geometrias anteriores, ou seja, as frequências naturais tendem a aumente conforme há um incremento no valor de pré-tensão e, esses valores tendem a estabilizar-se após um determinado valor de pré-tensão. Ao comparar os valores das frequências das geometrias circular, quadrada e triangular, para uma pré-tensão de 1,0 Mpa, a geometria circular possui valores maiores que a geometria quadrada e menores que a geometria triangular.

Quando o valor de pré-tensão é 1,5 MPa, as frequências naturais para a membrana circular ficam maiores que a geometria triangular e quadrada. Portanto, a membrana com a geometria circular possui uma maior rigidez quando comparadas com a membrana com a geometria quadrada e triangular.

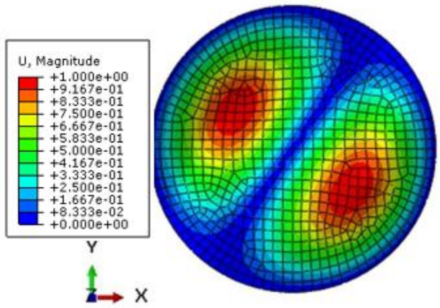
As formas modais da geometria circular, para a membrana 1, são apresentadas na Figura 4-7, considerando uma pré-tensão igual a 1,0 MPa. Vale ressaltar que valores de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa encontram-se no Anexo D.

Figura 4-7: Comportamento modal da membrana 1 com geometria circular com pré-tensão de 1,0 MPa

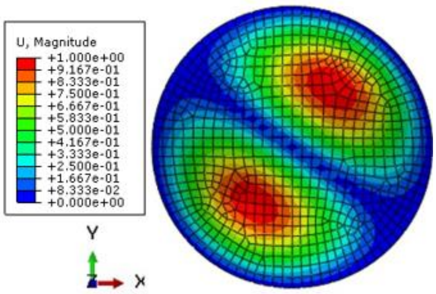
Modo 1, frequência 7,79 Hz



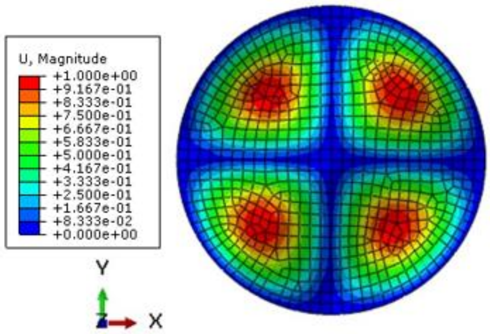
Modo 2, frequência 12,51 Hz



Modo 3, frequência 12,51 Hz



Modo 4, frequência 15,90 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Comparando-se o comportamento das semi-ondas da geometria circular é possível perceber que os modos 2 e 3 da geometria circular são similares, apresentando duas semi-ondas. Enquanto que o modo 1 apresenta uma semi-onda e o modo 4 apresenta quatro semi-ondas.

4.4.2. Membrana 2

A Tabela 4-10 mostra os resultados obtidos para a geometria circular e considerando as propriedades da membrana 2. Analisando os resultados da geometria circular com as propriedades da membrana 2, percebe-se que as frequências naturais são mais elevadas do que a geometria circular com as propriedades da membrana 1, o mesmo comportamento da geometria triangular. Além disso, percebe-se que para a geometria circular com pré-tensão de 1,0 MPa, as frequências naturais são menores que a geometria triangular. Porém quando o valor da pré-tensão passa a ser 1,5 MPa, as frequências naturais da geometria circular tornam-se maiores que a geometria triangular, mesmo comportamento observado anteriormente quando ambas as geometrias possuíam as propriedades da membrana 1.

Tabela 4-10: Frequências naturais da geometria circular para as propriedades da membrana 2.

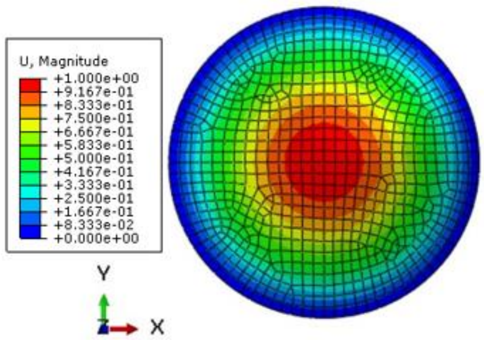
Pré-tensão ***x-y*** **[Mpa]**	**Modo 1** **[Hz]**	**Modo 2** **[Hz]**	**Modo 3** **[Hz]**	**Modo4** **[Hz]**
1,0: 1,0	13,23	18,74	18,74	20,29
1,5 : 1,0	15,51	21,64	20,55	27,55
2,0: 1,0	16,24	22,37	22,39	27,61
2,5 : 1,0	16,57	22,68	22,65	27,81
3,0: 1,0	16,76	22,98	22,96	27,96

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

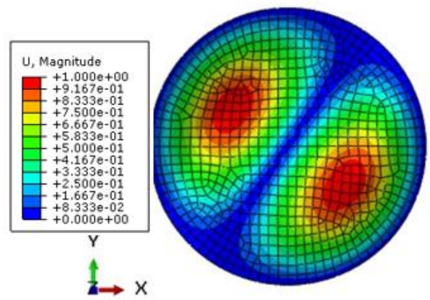
A Figura 4-8 mostra o comportamento dos modos de vibrar da membrana para a pré-tensão de 1,0 MPa.

Figura 4-8: Comportamento modal da membrana 2 com geometria circular com pré-tensão de 1,0 MPa.

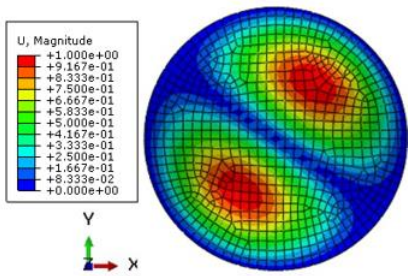
Modo 1, frequência 13,23 Hz



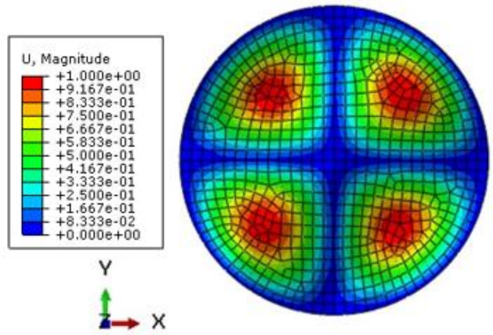
Modo 2, frequência 18,74 Hz



Modo 3, frequência 18,74 Hz



Modo 4, frequência 20,29 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A representação dos modos para as pré-tensões de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa se encontram no Anexo D. Nota-se que o comportamento das semi-ondas da geometria circular se manteve igual as propriedades da membrana 1, isso demonstra que as propriedades das membranas não interferiram no comportamento dinâmico das semi-ondas, fato este evidenciado para a geometria triangular.

4.5. Estudo de Caso 4 – Geometria Retangular Tipo 1

4.5.1. Membrana 1

A Tabela 4-11 apresenta os resultados da frequência natural para a geometria retangular tipo 1 e considerando as propriedades da membrana 1. Como esperado, a geometria retangular tipo 1 apresentou o mesmo comportamento das geometrias previamente analisadas. Conforme há um incremento no valor da pré-tensão a membrana torna-se mais rígida. Esse comportamento fica evidente quando se observa as frequências naturais.

Tabela 4-11: Frequências naturais da geometria retangular para as propriedades da membrana 1.

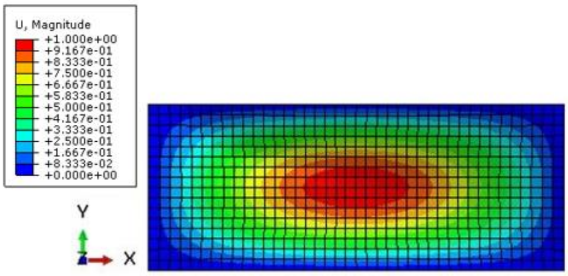
Pré-tensão *x-y* [MPa]	**Modo 1** [Hz]	**Modo 2** [Hz]	**Modo 3** [Hz]	**Modo4** [Hz]
1,0: 1,0	13,98	22,29	22,29	28,28
1,5 : 1,0	20,37	33,01	32,40	41,07
2,0 : 1,0	21,19	34,21	33,60	42,66
2,5 : 1,0	21,30	34,48	33,86	43,01
3,0: 1,0	21,33	34,53	33,92	42,99

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

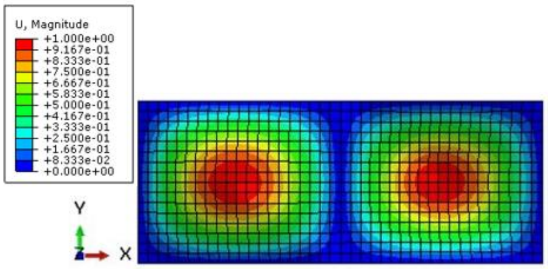
O comportamento dinâmico da geometria retangular é apresentado na Figura 4-9, considerando 1,0 MPa de pré-tensão. Os resultados para pré-tensão de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa encontram-se no Anexo E. O comportamento das semi-ondas da geometria retangular tipo 1 é similar ao comportamento da geometria quadrática, além disso pode-se facilmente identificar cada modo de vibrar.

Figura 4-9: Comportamento modal da membrana 1 com geometria retangular tipo 1 com pré-tensão de 1,0 MPa.

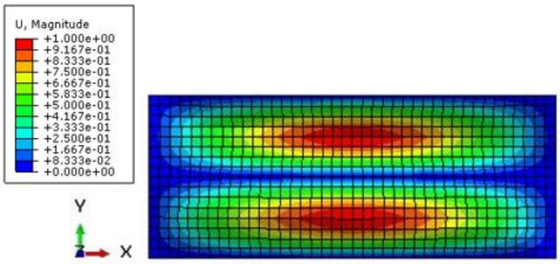
Modo 1, frequência 13,98 Hz



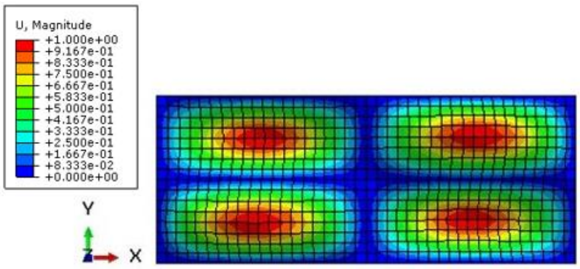
Modo 2, frequência 22,29 Hz



Modo 3, frequência 22,29 Hz



Modo 4, frequência 28,28 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.5.2. Membrana 2

A Tabela 4-12 apresenta as frequências naturais para os quatro primeiros modos de vibrar, considerando as propriedades da membrana 2 e geometria retangular tipo 1.

Tabela 4-12: Frequências naturais da geometria retangular tipo 1 para as propriedades da membrana 2.

Pré-tensão *x-y* [Mpa]	**Modo 1 [Hz]**	**Modo 2 [Hz]**	**Modo 3 [Hz]**	**Modo4 [Hz]**
1,0 : 1,0	17,37	25,68	25,68	31,67
1,5 : 1,0	23,76	36,40	35,79	44,53
2,0 : 1,0	24,58	37,60	36,99	46,05
2,5 : 1,0	24,69	37,87	37,26	46,32
3,0 : 1,0	24,72	37,92	37,31	46,38

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

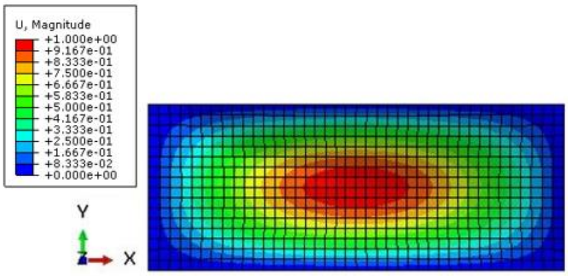
A geometria retangular tipo 1, considerando as propriedades da membrana 2, possui frequências naturais maiores quando comprada com a membrana 1, comportamento igual os encontrados nas geometrias quadrática, triangular e circular.

A Figura 4-10 mostra o comportamento dos modos de vibrar da membrana retangular tipo 1 para a pré-tensão de 1,0 MPa. A representação dos modos de vibrar para as pré-tensões de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa se encontram no Anexo E.

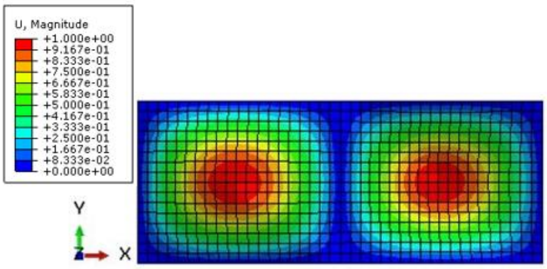
É possível observar nos resultados que a geometria retangular tipo 1, para a membrana 2, não apresentou alterações no comportamento das semi-ondas quando comparada com a mesma geometria e propriedades da membra 1, o que comprova, para esse estudo, que a propriedade do material não influência na forma modal da estrutura.

Figura 4-10: Comportamento modal da membrana 2 com geometria retangular com pré-tensão de 1,0 MPa.

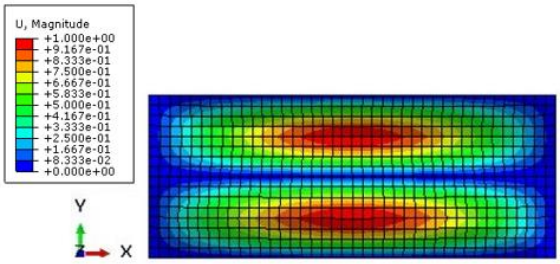
Modo 1, frequência 17,37 Hz



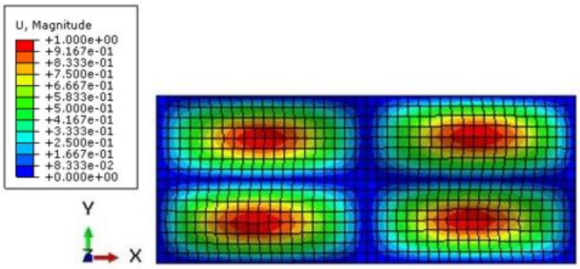
Modo 2, frequência 25,68 Hz



Modo 3, frequência 25,68 Hz



Modo 4, frequência 31,67 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.6. Estudo de Caso 5 – Geometria Retangular Tipo 2

4.6.1. Membrana 1

Aplicando as propriedades da membrana 1, e realizando a alteração das condições de contorno para aplicação da pré-tensão na geometria retangular, ou seja, realizou-se uma rotação de 90º na membrana para analisar a influência da pré-tensão na frequência natural. Os resultados da frequência natural estão na Tabela 4-13.

Tabela 4-13: Frequências naturais da geometria retangular tipo 2 para as propriedades da membrana 1.

Pré-tensão *x-y* [MPa]	**Modo 1 [Hz]**	**Modo 2 [Hz]**	**Modo 3 [Hz]**	**Modo4 [Hz]**
1,0: 1,0	5,40	8,72	8,72	11,12
1,5 : 1,0	7,96	13,18	12,78	16,24
2,0 : 1,0	8,28	13,60	13,28	16,88
2,5 : 1,0	8,33	13,76	13,36	16,97
3,0 : 1,0	8,34	13,78	13,38	17,00

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

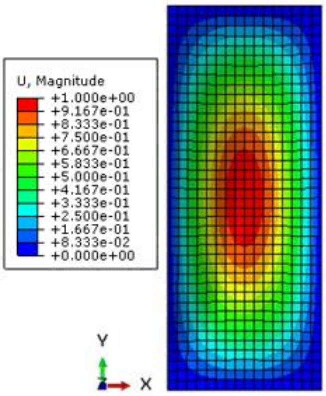
É importante observar que para a geometria retangular tipo 2, o mesmo comportamento das geometrias anteriores, conforme há um incremento da pré-tensão, a estrutura torna-se mais rígida e, consequentemente, as frequências naturais aumentaram. Entretanto, os resultados mostraram os menores valores de frequências naturais em todos os valores de pré-tensão aplicados. Ao compararmos as duas geometrias retangulares, tipo 1 e 2, percebe-se que as condições de contorno da geometria exercem grande influência nas frequências naturais, onde a membrana com geometria retangular tipo 1 possui valores de frequências maiores que a geometria retangular tipo 2.

A Figura 4-11 mostra o comportamento modal da geometria retangular tipo 2, considerando a pré-tensão de 1,0 MPa. Os comportamentos modais para os demais valores de pré-tensão são encontrados no Anexo F.

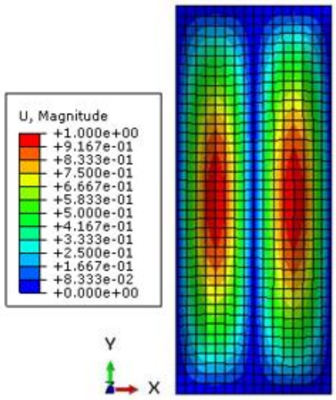
O comportamento das semi-ondas da geometria retangular tipo 2 é igual ao comportamento da geometria retangular 1, contudo há uma inversão nos modos 2 e 3 da geometria retangular tipo 1 em comparação com a geometria retangular tipo 2

Figura 4-11: Comportamento modal da membrana 1 com geometria retangular tipo 2 com pré-tensão de 1,0 MPa.

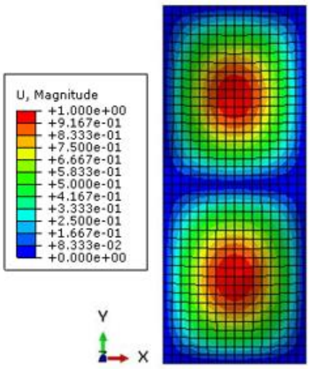
Modo 1, frequência 5,40 Hz



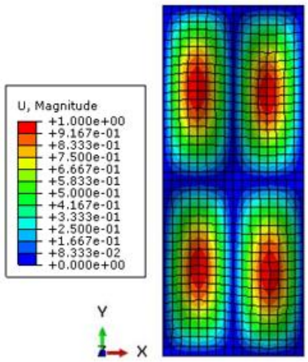
Modo 2, frequência 8,72 Hz



Modo 3, frequência 8,72 Hz



Modo 4, frequência 11,12 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

4.6.2. Membrana 2

A Tabela 4-14 apresenta os resultados das frequências naturais para as propriedades da membrana 2, considerando a geometria retangular tipo 2. Quando se comparou as frequências naturais entre as membranas 1 e 2, a membrana 2 apresenta valores maiores que a membrana 1, como observado em todas as geometrias analisadas.

Tabela 4-14: Frequências naturais da geometria retangular tipo 2 para as propriedades da membrana 2.

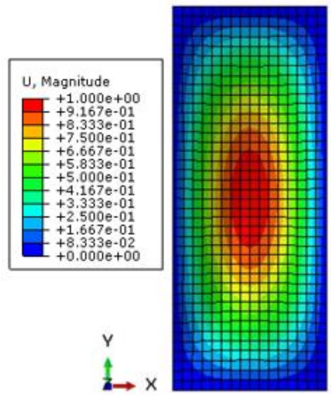
Pré-tensão *x-y* [MPa]	**Modo 1 [Hz]**	**Modo 2 [Hz]**	**Modo 3 [Hz]**	**Modo4 [Hz]**
1,0: 1,0	8,79	12,11	12,11	14,51
1,5 : 1,0	11,35	16,57	16,17	19,63
2,0 : 1,0	11,67	16,99	16,67	20,27
2,5 : 1,0	11,72	17,15	16,75	20,36
3,0 : 1,0	11,73	17,17	16,77	20,39

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

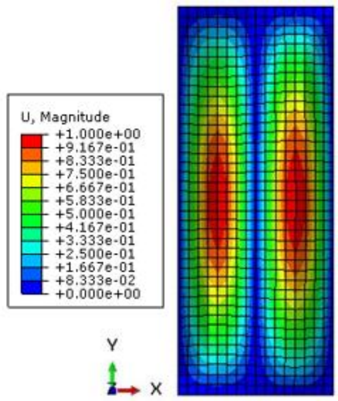
A Figura 4-12 mostra o comportamento modal da membrana retangular tipo 2 considerando pré-tensão de 1,0 MPa. A representação dos modos para as pré-tensões de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa se encontram no Anexo F.

Figura 4-12: Comportamento modal da membrana 2 com geometria retangular tipo 2 com pré-tensão de 1,0 MPa.

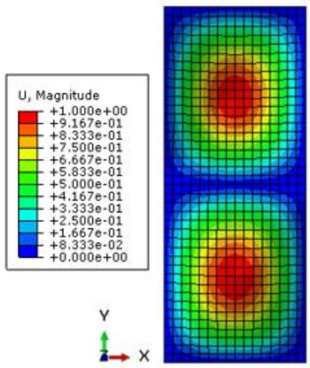
Modo 1, frequência 8,79 Hz



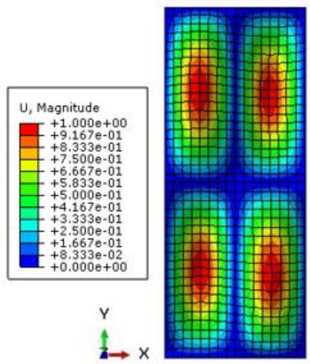
Modo 2, frequência 12,11 Hz



Modo 3, frequência 12,11 Hz



Modo 4, frequência 14,51 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

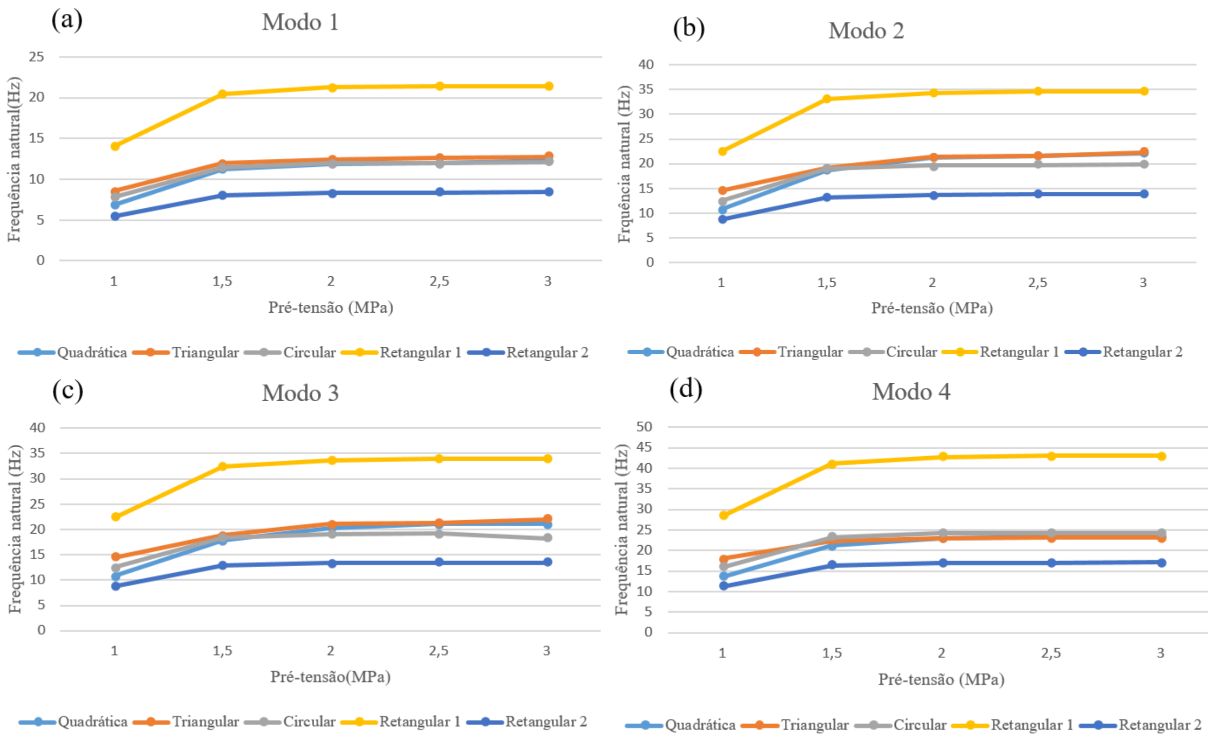
Quando foi analisado os modos da geometria retangular tipo 2, observa-se o mesmo comportamento da geometria retangular tipo 1, isto deve-se ao fato da consideração que as duas membranas são isotrópicas, ou seja, considerando diferentes materiais com mesma relação constitutiva, a possível alteração é modificação na rigidez e na massa da estrutura, ocasionando alteração nas frequências naturais e, mantendo a mesma forma modal.

4.7. Análise dos Resultados

4.7.1. Membrana 1

A Figura 4-13 mostra a comparação do comportamento dos quatro primeiros modos de vibrar das geometrias quadrática, triangular, circular, retangular 1 e retangular 2 considerando as propriedades da membrana 1.

Figura 4-13: (a) o comportamento do modo 1, (b) o comportamento do modo 2, (c) o comportamento do modo 3 e (d) o comportamento do modo 4.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Ao compararmos todas as geometrias nota-se que todas apresentam o mesmo comportamento de estabilizar o valor da frequência natural após atingirem o valore de 1,5 MPa. Ainda, destaca-se que a geometria retangular tipo 1 possui os maiores valores de frequência natural, enquanto a geometria retangular tipo 2 possui os menores valores de frequência natural, sendo que ambas as geometrias possuem as mesmas características físicas, apenas diferenciando as condições de contorno. Com isso observa-se que como para cada condição de contorno da membrana, esta resulta em uma influência no seu comportamento dinâmico. Para as demais geometrias percebe-se que as suas frequências naturais são muito próximas, sendo que nos 3 primeiros modos a geometria triangular apresenta valores maiores que as geometrias circular e quadrática, contudo, no quarto modo a geometria circular possui valores maiores que as outras duas geometrias.

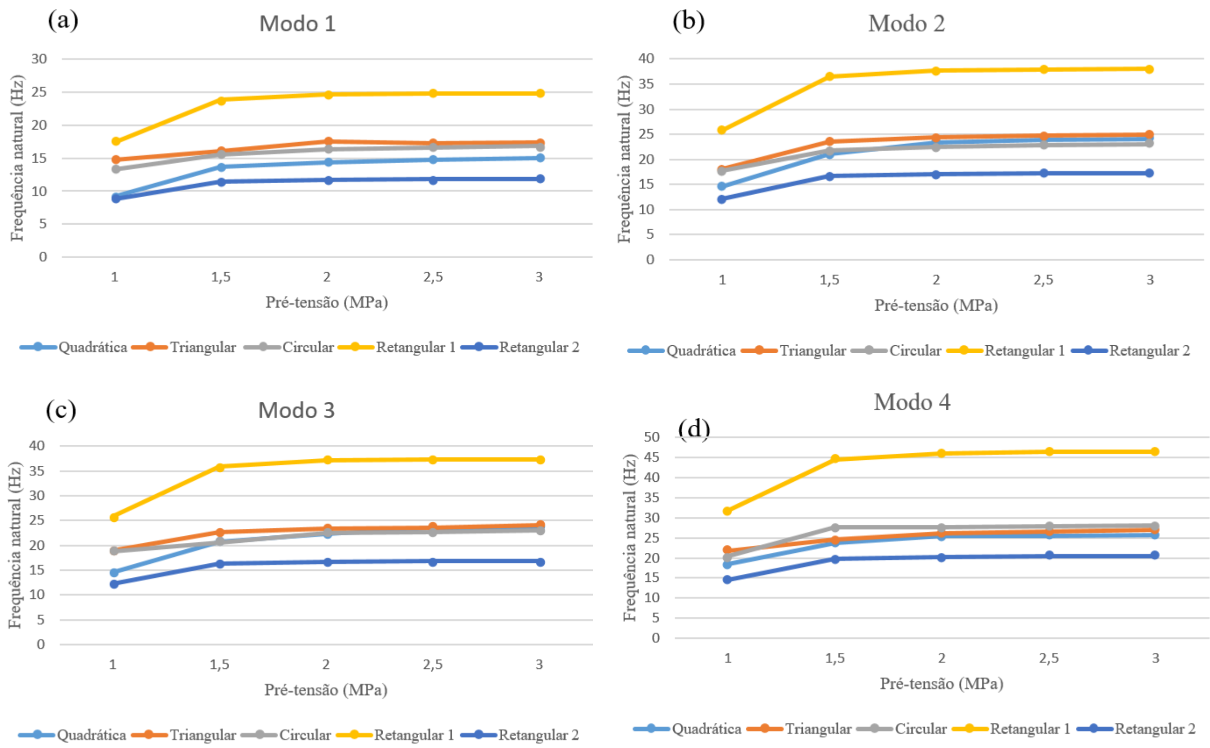
4.7.2. Membrana 2

Para a membrana 2, nota-se um comportamento semelhante ao da membrana 1, com o incremento da pré-tensão a membrana torna-se mais rígida e, as frequências naturais tendem a estabilizar após um determinado valor de pré-tensão. A Figura 4-14 mostra o comportamento dinâmico da membrana 2 para as geometrias quadrática, triangular, retangular tipo 1 e tipo 2 mostrando o comportamento dinâmico dos 4 primeiros modos de vibrar da membrana 2.

Para a membrana 2 pode ser observado que todas as geometrias se estabilizam após atingirem o valor de 1,5 MPa, como ocorreu anteriormente com a membrana 1. A geometria retangular tipo 1 se manteve como a geometria com os maiores valores de frequência natural e a retangular tipo 2 ficou com os menores valores de frequência natural.

Pode ser observado que a geometria triangular é a que apresenta uma menor variação das frequências entre os valores de pré-tensão de 1,0 e 1,5 MPa, isso ocorre em todos os modos e se torna mais claro no modo 4 onde a diferença das frequências naturais é de 1,42 Hz. As geometrias triangular, circular e quadrática se mantiveram com as suas frequências muito próximas, e a geometria triangular se manteve com o maior valor quando comparado as demais, nos 3 primeiros modos e no quarto modo a geometria circular apresenta valores maiores que a geometria triangular. Com isso é possível observar que para uma mesma geometria ao fazer a alteração do material das membranas o comportamento é semelhante, ocorrendo somente a alteração nos valores das frequências naturais.

Figura 4-14 :(a) o comportamento do modo 1, (b) o comportamento do modo 2, (c) o comportamento do modo 3 e (d) o comportamento do modo 4.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre a influência da geometria da membrana no comportamento dinâmico linear utilizando duas membranas hiperelásticas. A primeira etapa consistiu em realizar a validação das equações descritas por Soares e Gonçalves (2014) para os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin. Para isso foi utilizado os resultados experimentais do trabalho de Young *et al.* (2005). As equações apresentadas por Soares e Gonçalves (2014) foram usadas para obter as frequências naturais dos quatro primeiros modos de vibração das membranas 1 e 2. De posse dos resultados analíticos de ambos os modelos constitutivos, concluiu-se que para a membrana 1 o modelo de neo-Hooke apresenta valores um pouco menores que os modelos de Mooney-Rivlin (em torno de 1%), isto deve-se ao fato do modelo de Mooney-Rivlin levar em consideração mais parâmetros do material do que o modelo de neo-Hooke. Observou-se que os modos de vibrar 2 e 3 são simétricos, portanto, para pré-tensões iguais nas direções x e y, ambos possuem o mesmo valor. Porém, quando há um incremento na pré-tensão, no sentido do eixo *x*, as frequências naturais tendem a ser diferentes, ou seja, o sentido da pré-tensão influencia no comportamento dinâmico da membrana, esses comportamentos analíticos foram percebidos também para a membrana 2.

De posse dos resultados analíticos, pode-se realizar a validação do modelo computacional das membranas 1 e 2, esse procedimento foi realizado de duas formas. A primeira, realizou-se a comparação dos deslocamentos computacionais com dados experimentais considerando somente a membrana 1, conforme Suzin (2019). Na segunda, determinou-se o erro absoluto entre as frequências analíticas e as computacionais, e aplicou-se a métrica desenvolvida por Silva *et al.* (2008). Esses dois procedimentos permitiram validar o modelo computacional desenvolvido neste trabalho.

Após a validação do modelo computacional, diferentes geometrias foram analisadas, ou seja, analisou-se as geometrias triangular, circular, retangular tipo 1 e retangular tipo 2. Considerando a membrana 1 para as geometrias quadrada e triangular, é possível perceber que as frequências naturais dos quatro primeiros modos de vibração da membrana quadrada são menores que os valores da geometria triangular. Além disso, a geometria triangular estabiliza os seus valores de frequências naturais quando a pré-tensão é 1,5 MPa. O mesmo comportamento pode ser observado para a geometria quadrática, contudo as frequências naturais da geometria triangular são maiores, resultado de uma rigidez mais elevada que geometria quadrática.

Observa-se que a geometria circular possui frequências naturais menores que a geometria triangular nos 3 primeiros modos de vibrar, porém quando compara-se o quarto modo, a geometria circular apresenta frequência natural maior que a geometria triangular. Para as geometrias retangular tipo 1 e tipo 2 percebe-se que dependendo da condição de contorno selecionada e a pré-tensão aplicada, há grande influência nas frequências (cerca de 60%), mesmo que ambas as geometrias sejam iguais. Além disso, as frequências naturais de ambas as geometrias retangulares se estabilizam com 1,5 MPa de pré-tensão, porém a geometria retangular tipo 1 após a estabilização dos seus valores se tornam mais próximos uns dos outros, o que não acontece com a retangular tipo 2. Além desse comportamento existe uma alteração no comportamento da semi-ondas dos modos 2 e 3, na geometria retangular tipo 2 o modo 2 inverte-se com o modo 3.

Para a membrana 2 percebe-se somente alteração nos valores das frequências naturais. Isto deve-se ao fato da membrana 2 apresentar maior módulo de elasticidade (250 MPa) quando comparada com a membrana 1 (70,6 MPa). Além disso, devido as condições de contorno aplicadas na estrutura, isso faz com que a mesma membrana possua diferentes comportamentos dinâmicos, logo podendo ser confeccionada de forma distinta a atender sua aplicação. Portanto, faz-se necessário um estudo específico para cada geometria buscando atender a aplicação desejada.

Por fim, no decorrer desse trabalho foi possível perceber que o comportamento dinâmico das membranas apresenta uma ligação direta com a pré-tensão aplicada sobre ela, pois conforme há um incremento na pré-tensão, as frequências naturais aumentam. Portanto, conforme o projeto da estrutura é possível alterar a frequência natural de uma membrana modificando apenas a pré-tensão aplicada.

A alteração das geometrias resultou em diferentes comportamentos, isso deve-se ao fato de cada geometria apresentar condições de contorno e aplicação da pré-tensão de maneira específica para atender os requisitos de projeto. Comprova-se ao comparar o comportamento das geometrias retangulares, onde ambas possuem as mesmas propriedades e dimensões, porém cada uma é fixada e pré-tensionada de maneira diferente da outra.

Dessa forma, conclui-se que o comportamento tanto estático quanto dinâmico da membrana sofre grande influência das condições de contorno sob as quais ela está submetida.

Assim, pretende-se que este trabalho contribua como referência bibliográfica para trabalhos futuros sobre comparação de modelos constitutivos de materiais elastoméricos aplicados em membranas tracionadas, ou seja, a linha de pesquisa em membranas possui várias vertentes para investigação abrindo perspectivas para análises matemáticas, simulações computacionais e aplicações diversas em biomateriais, bioengenharia e engenharias afins.

5.1. Trabalhos Futuros

O comportamento dinâmico de uma membrana está condicionado a diversos fatores, dentre eles foram analisados a geometria e modelos constitutivos do material. Entretanto, há outras características que podem ser analisadas para colaborar no entendimento do comportamento de membranas hiperelásticas como sugerem a seguir:

- Verificar outras geometrias da membrana, por exemplo, membranas cilíndricas;
- Avaliar o tamanho da geometria na resposta dinâmica da estrutura;
- Utilizar outros tipos de materiais como, por exemplo, os modelos Ogden, Polinomial, Arruda-Boyce, dentre outros;
- Analisar a resposta da estrutura submetida à diferentes combinações de carregamentos externos buscando representar o carregamento da estrutura real;
- Analisar a influência do amortecimento na resposta da estrutura;
- Avaliar dinamicamente estruturas de membrana com padrões de corte otimizadas, a fim de avaliar o campo de tensões da estrutura.

CAPÍTULO 6

Referências

ALEXANDER, H. A constitutive relation for rubber-like materials. International Journal of Engineering Science, v. 6, p. 549-563, 1968

ALMEIDA, M.T. *Vibrações mecânicas para engenheiros*. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1990.y

ALVES FILHO, A. Modelos e a interpretação CAE – Parte 1. Método de elementos finitos. Série i-[cae] 001 Computer AIded Design (icae001.pdf). *Revista Cadware.com.br*. 2000.

ALVES FILHO, A. Modelos e a interpretação CAE – Parte 2. Método de elementos finitos. Série i-[cae] 002 Computer AIded Design (icae002.pdf). *Revista Cadware.com.br*. 2001

ALVES FILHO, A. *Elementos finitos, a base da tecnologia CAE- Análise dinâmica*. 1 Ed. São Paulo: Editora Érica, 2005.

ARRUDA, E.M.; BOYCE, M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic membranes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 41, n. 2, p. 389-412, 1993.

Akkas, N. On the dynamic snap-out instability of inflated non-linear spherical membranes. International Journal of Non-Linear Mechanics. 1978.

BATHE, K.J. *Finite Element procedures*. New Jersey, Prentice Hall, 1037p., 1996.

BUCHANAN, G.R. Vibration of circular membrane with linearly varying density along a diameter. *Journal of Sound and Vibration*, v. 250, p. 407-41, 2005.

CAMPOS, N.B.F. Ajuste de Modelos Numéricos usando Funções de Resposta em Frequência. 2012. 98f. *Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica)* - Faculdade de Engenharia

Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2012.

CHAKRAVARTY, U.K.; ALBERTANI, R. Experiment and Modal Finite Element Analysis of a Flexible Elastic Membrane for Micro Air Vehicles Applications. *Journal of Applied Mechanics* v. 79, 2012.

DONG, L.; GRISSOM, M.; FISHER F.T. Resonant frequency of mass-loaded membranes for vibration energy harvesting applications. *AIMS Energy*, 2015.

EN 17117-1:2018. *Rubber or plastics-coated fabrics - Mechanical test methods under biaxial stress states. Part 1: Tensile stiffness properties*. Reino Unido, 2018.

GENT, A.N.; THOMAS, A.G. J. Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized

rubber. Polymer Science, v. 28, 1958.

GREEN, A.E.; ADKINS, J.E. Large Elastic Deformation, Oxford University Press, London, 1960.

GUTIERREZ, R.H.; LAURA, P.A.A.; BAMBILL, D.V.; JEDERLINIC, V.A.; HODGES, D.H. Axisymmetric vibrations of solid circular and annular membranes with continuously varying density. *Journal of Sound and Vibration*, v. 212, n. 4, p 611-622, 1998.

GRUTTMANN, F.; TAYLOR, R. Theory and finite element formulation of rubberlike membrane shells using principal stretches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 35, n. 5, p.1111–1126, 1992.

HEY, H.L. *Apostila de sistemas de controle I: Centro de processamento de dados*. Disponível em < http://coral.ufsm.br/renes/Templates/arquivos/elc418/elc418-cap8.pdf>

HUEBNER, K.; THORNTON, E. *The finite element method for engineers*. 2 ed. New York, John Wiley & Sons. 1982

JENKINS, C.H.M. Gossamer Spacecraft: Membrane and Inflatable Structures Technology for Space Applications. *IAA, Reston*, 2001.

JIANG, L.; HADDOW, J.B. A finite formulation for finite static axisymmetric deformation of hyperelastic membranes. *Computers and Structures,* v. 57, n. 3, p. 401-405, 1995.

KEERTHIWANSA, R., KLEDROWETZ, J. Elastomer testing: The risk of using only uniaxial data for fitting the Mooney-Rivlin hyperelastic-material model. *Materiali in Tehnologije*, v. 52, n. 1, p. 3–8, 2018

KHAYAT, R.E.; DERDOURI, A. Inflation of hyperelastic cylindrical membranes as applied to blow moulding. Part I. Axisymmetric case. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, p. 3773-3791, 1994.

LAPA. J.A.M.; Análise dinâmica linear e não linear de estruturas. Porto. Dissertação de mestrado- Departamento de Engenharia Mecânica, Univercidade do Porto, 1987.

LAURA, P.A.A.; ROSSIT, C.A.; LA MALFA, S. Transverse vibrations of composite circular annular membranes: exact solution. *Journal of Sound and Vibration*, v 212, n. 4, p. 611-622, 1998.

MARCKMANN, G.V.E. *Comparison of Hyperelastic Models for Rubber-Like Materials*. To cite this version: HAL Idhal-01004686. 2016.

MOONEY, M.A. Theory of Large Elastic Deformation. *Journal of Applied Physics*, 1940.

MSAJ/M-02-1995, *Testing Method for Elastic Constants of Membrane Materials. Standard of the Membrane Structures Association of Japan*, Tokyo, Japão, 1995.

MURNAGHAN, F.D. Finite deformations of an elastic solid. *American Journal of Mathematics*, 1937.

MUROTANI, K.; YAGAWA, G.; CHOI, J.B. Adaptive finite elements using hierarchical mesh and its application to crack propagation analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 253, p. 1-14. 2013.

OGDEN, R.W. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. In: *Royal Society London. Mathematical physical and engineering sciences*, 1972. v. 326, p. 565–584.

OGDEN, R.W, *Non-Linear Elastic Deformations*, Dover Publications, 560p., 1984.

OLIVEIRA, M.B. BARBATO, R.L.A. Estudo das Estruturas de Membrana: Uma Abordagem Integrada do Sistema Construtivo, do Processo de Projetar e dos Métodos de Análise, *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 7, n. 22, p. 107-122, 2005.

OWEN, D.; HINTON, E. *Finite elements in plasticity: theory and pratice*. Swansea, UK, Pineridge Press Ltda. 1980.

PAMPLONA, D.C.; BEVILACQUA, L. Large deformations under axial force and moment loads of initially flat annular membranes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 27, n. 4, p. 639-650, 1992.

PAMPLONA, D.C.; MOTA, D.E.J.S. Numerical and experimental analysis of inflating a circular hyperelastic membrane over a rigid and elastic foundation. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 65, n. 1, p. 18–23, 2012.

PINTO, F. Analytical and experimental investigation on a vibrating annular membrane attached to a central free, rigid core. *Journal of Sound and Vibration*, v. 291, p. 1278-1287, 2006.

PRONSATO, M.E.; LAURA, P.A.A.; JUAN, A. Transverse vibrations of a rectangular membrane with discontinuously varying density. *Journal of Sound and Vibration*, v. 222, n. 2, p. 341-344, 1999.

QURAISHI, S.M.; SANDEEP, K. A second-generation wavelet based finite elements on triangulations. *Computational Mechanics*. v. 48, p. 163-174. 2011.

RAO, S. *The finite element method in engineering*. Oxford, Pergamon Press, 1989.

RIVLIN, R.S. Torsion of a Rubber Cylinder. *Journal of Applied Physics*. v. 38, 1947

RIVLIN, R.S.; SAUNDERS, D.W.; Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, v. 243, n. 865, pp. 251-288. 1951

ROBBIN, T. *Engineering a new architecture*. United States of America, Quebecor Eusy Press, Leominster, Massachusetts, 1996.

SCHWARZ, B.J.; RICHARDSON, M.H. Experimetal Modal Analysis. In: *CSI Reliability Week*, 1999. Proceedings: Jamestown, Califórnia, 1999.

SHIN, D.D.; MOHANCHANDRA, K.P.; CARMAN, G.P. Development of hydraulic linear actuator using thin film SMA. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 119, p. 151-156, 2005.

SILVA, S. R. Estudo do comportamento dinâmico de membranas retangulares hiperelásticas. Goiânia. Dissertação de mestrado- Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás 2015.

SILVA, S.; DIAS JÚNIOR, M.; LOPES JUNIOR, V. Structural health monitoring in smart structures through time series analysis. *Structural Health Monitoring*, v.7, n.3, p.231-244, 2008.

SIMULIA ABAQUS, 2014, *Documentation*. Pawtucket: Hibbitt, Karlsson & Sorensen.

SOARES, R.M. Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas. Rio de Janeiro, 2009. *Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil,* Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2009.

SOARES, R.M.; GONÇALVES, P.B. Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane. *International Journal of Solids and Structures*, v. 49, n. 3–4, p. 514–526, 2012.

SOARES, R.M.; GONÇALVES, P.B. Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney-Rivlin rectangular membrane. *Journal of Sound and Vibration*, v. 333, p. 2920-2935, 2014.

SORIANO, H.L.; LIMA, S.S. *Método de elementos finitos em análise de estruturas*. São Paulo: Edusp, 2003.

SOUZA, L.F.S. A methodology to analyse the dynamic response of composute plates using design of experiments and kriging model. *Dissertação (Dissertação em engenharia mecânica)* – UDESC. Joinville, 2018.

SUZIN, C.M. Análise de tração biaxial em membranas. *Dissertação (Dissertação em engenharia civil)* – UDESC. Joinville, 2019.

TAVARES, J.M.R.S, *Introdução ao método dos Elementos Finitos*. Feup, Portugal, 1998.

TEIXEIRA, P.B.C.; GONÇALVES, P.B.; CESTARI, I.A.; LEIRNER, A.A.; PAMPLONA, D. Mechanical Behavior and Stability of the Internal Membrane of the InCor Ventricular Assist Device. *Artificial Organs. International Society for Artificial Organs*, v. 25, n. 11, p. 912-921, 2001.

TRELOAR, L.R.G. The elasticity of a network of long-chain molecules. *Transactions of the Faraday Society*. v. 39, 1943.

UNNIKRISHNAN, K.R., PRAVEEN, K.I.R., & ARUN, C.O. Free Vibration Analysis of Pre-stressed Membrane Using Element Free Galerkin Method. *International Conference on Emerging Trends in Engineering*, 2019.

VANDENBERG, M. *Soft canopies*. Great Britain: Academy Editions. 64p, 1996.

Wakefield, D. S.; Engineering analysis of tension structures: theory and practice. Engineering Structures. 1994.

WISSLER, M.; MAZZA, E. Mechanical behavior of an acrylic elastomer used in dielectric elastomer actuators. *Sensors Actuators A: Physical*, v. 134, p. 494-504, 2007.

XAVIER, S.R. Comportamento não linear e instabilidade de membranas e cascas hiperelásticas. 2003. 180f. *Tese (Doutorado em Engenharia Civil)* - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

YEOH, O.H. Characterization of elastic properties of carbon black filled rubber vulcanizates.

Rubber Chemistry and Technology, v. 63, p.792-805, 1990.

YEOH O.H. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chem. Technol*, 66:754–771, 1993.

YOUNG, L.G.; RAMANATHAN, S., Hu, J.; & PAI, P.F. Numerical and experimental dynamic characteristics of thin-film membranes. *International Journal of Solids and Structures*, v. 42, p. 3001–3025, 2005.

CAPÍTULO 7

Anexos

Anexo A – Código Scilab

A Figura A-1 mostra o código criado no Scilab que foi usado para obter os resultados analíticos para os modelos de neo-Hooke e Mooney-Rivlin. As variáveis usadas são:

- *C1* é parâmetros do material,
- C2 é parâmetros do material,
- *a1* é razão entre o segundo e primeiro parâmetros do material C2/C1,
- *pi* valor de pi,
- *k0* é razão entre as dimensões na direção *y* e *x* da membrana indeformada,
- kf é razão entre as dimensões na direção *y* e *x* da membrana deformada,
- *m* é número de semi-ondas na direção *y*,
- *n* é número de semi-ondas na direção *x*,
- *sx* é razões entre o comprimento deformado e indeformado da membrana,
- *T* é massa específica da membrana;
- *Lx0* é dimensão na direção do eixo *x* da membrana indeformada.

Figura A-1: Em (a) o código para o modelo neo-Hooke, em (b) o código para o modelo Mooney-Rivlin.

(a)

```
C1=
p=
ko=
kf=
m=
n=
sx=
T=
Lxo=

a=(C1*(2*(p^2)))/(T*(Lxo^2))
b=1-((ko^2)/((sx^6)*(kf^2)))
c=(n^2)/(ko^2)
d=1-((ko^4)/((sx^6)*(kf^4)))
w=a*(((m^2)*b)+(c*d))
disp(w)
W=sqrt(w)
disp(W)
```

(b)

```
C1=
p=
ko=
kf=
m=
n=
sx=
T=
Lxo=

a=(C1*(2*(p^2)))/(T*(Lxo^2))
b=1-((ko^2)/((sx^6)*(kf^2)))
c=(n^2)/(ko^2)
d=1-((ko^4)/((sx^6)*(kf^4)))
w=a*(((m^2)*b)+(c*d))
disp(w)
W=sqrt(w)
disp(W)
```

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Anexo B – Membrana Quadrática

A Tabela B-1 apresenta os resultados das frequências naturais para as membranas 1 e 2, considerando a geometria quadrática e pré-tensão na direção *x* de 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa e 3,0 MPa.

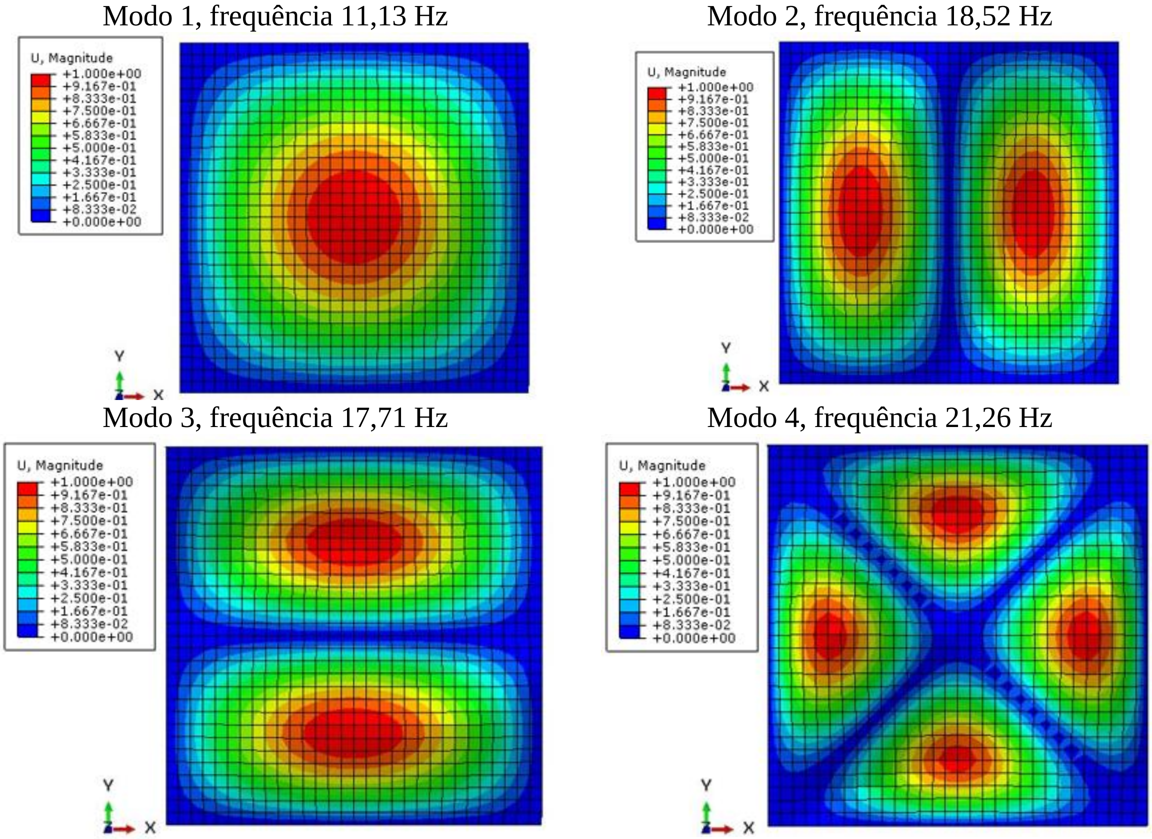
Tabela B-1: Frequências naturais da geometria Quadrada.

	Pré-tensão *x* [MPa]	**Modo 1 [Hz]**	**Modo 2 [Hz]**	**Modo 3 [Hz]**	**Modo 4 [Hz]**
Membrana 1	1,0	6,74	10,68	10,68	13,52
	1,5	11,13	18,52	17,71	21,26
	2,0	11,78	21,10	20,20	22,91
	2,5	11,94	21,52	20,99	23,36
	3,0	12,21	22,03	21,04	23,58
Membrana 2	1,0	9,16	14,50	14,50	18,34
	1,5	13,64	20,95	20,73	23,62
	2,0	14,32	23,34	22,24	25,33
	2,5	14,71	24,84	24,01	25,48
	3,0	14,91	25,06	24,40	25,64

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

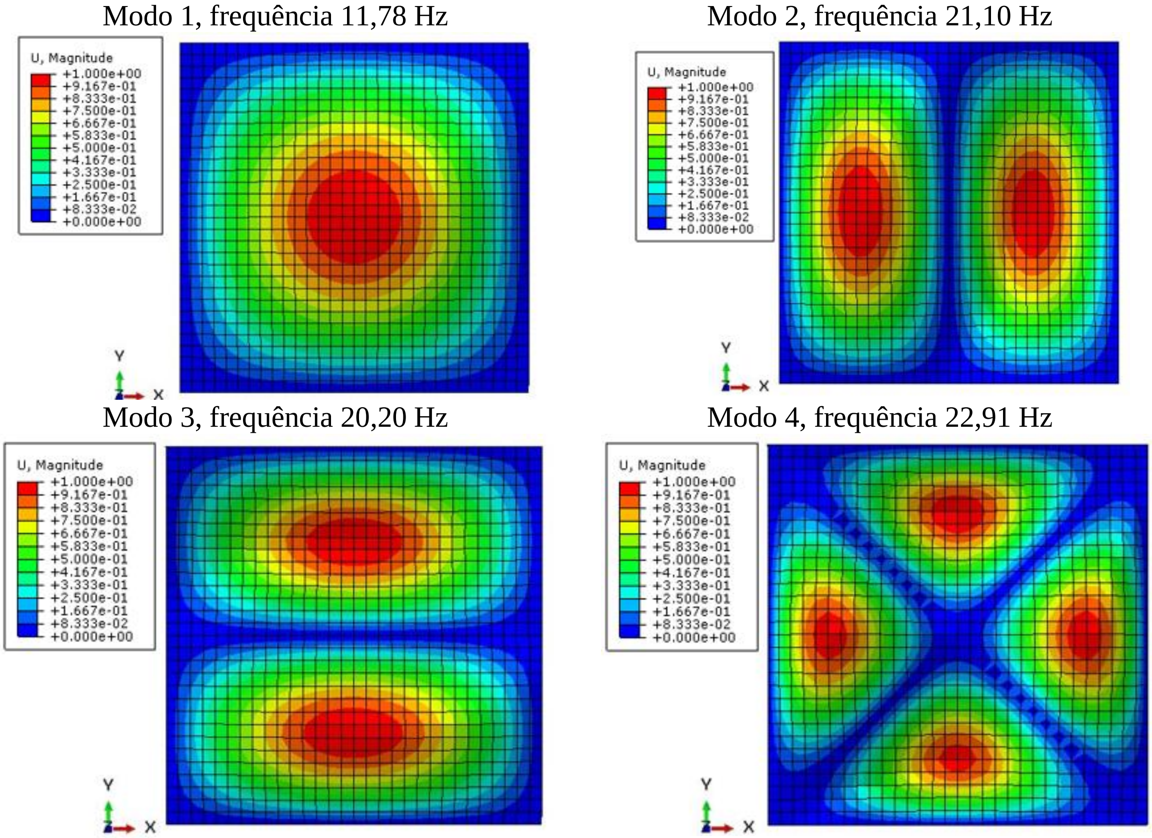
As Figuras B-1, B-2, B-3 e B-4 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 1 e, as Figuras B-5, B-6, B-7 e B-8 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 2, considerando a pré-tensão de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa. O comportamento das formas modais das membranas é o mesmo para todas as pré-tensões. Observa-se para o primeiro modo de vibrar uma única semi onda para ambos os sentidos, *x* e *y*. O segundo e terceiro modo apresentam comportamento simétrico, o segundo modo apresenta 2 semi ondas no sentido do eixo *x* e uma semi onda em *y*. O terceiro modo diferencia-se pela localização das semi ondas em relação aos eixos cartesianos, o quarto modo apresenta duas semi ondas em cada eixo cartesiano.

Figura B-1: Forma modal da membrana 1, geometria quadrada, submetida a 1,5 MPa.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

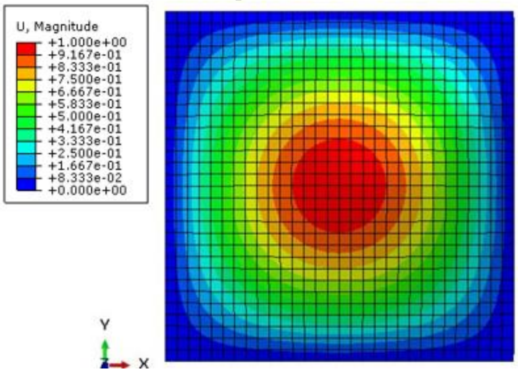
Figura B-2: Forma modal da membrana 1, geometria quadrada, submetida a 2,0 MPa.



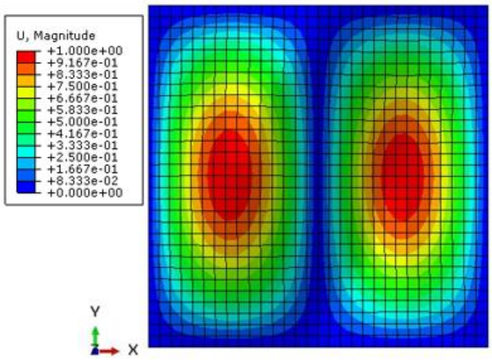
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura B-3: Forma modal da membrana 1, geometria quadrada, submetida a 2,5 MPa.

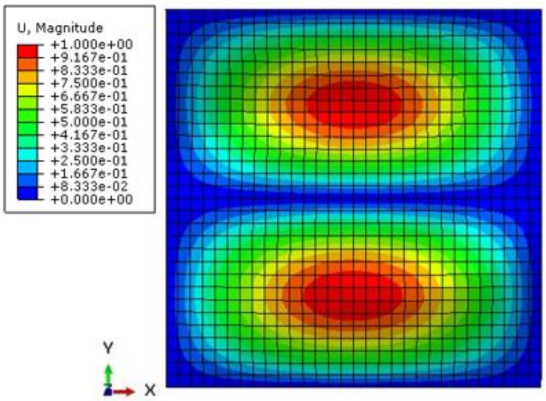
Modo 1, frequência 11,94 Hz



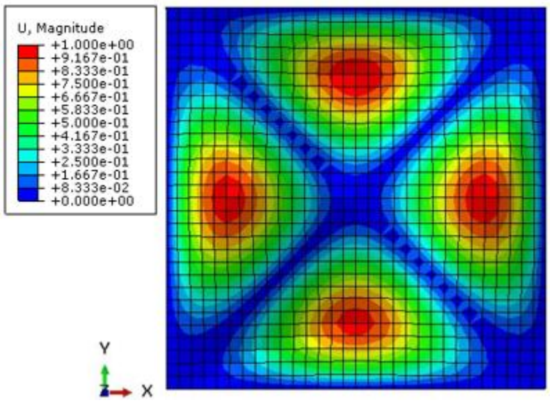
Modo 2, frequência 21,52 Hz



Modo 3, frequência 20,99 Hz



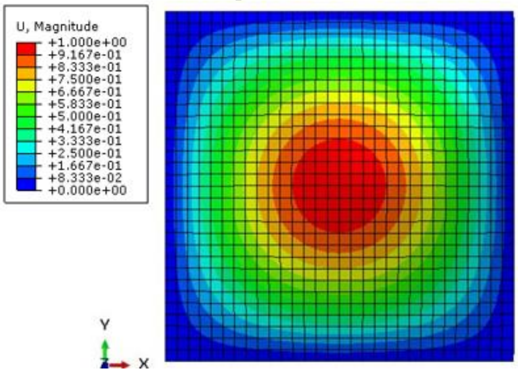
Modo 4, frequência 23,36 Hz



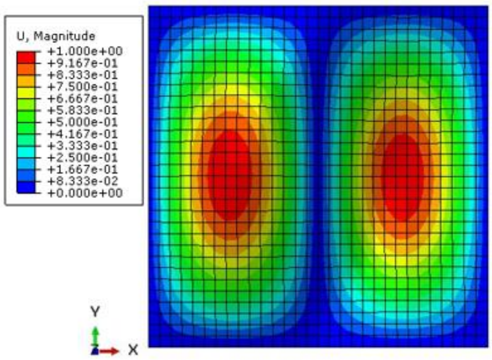
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura B-4: Forma modal da membrana 1, geometria quadrada, submetida a 3,0 MPa.

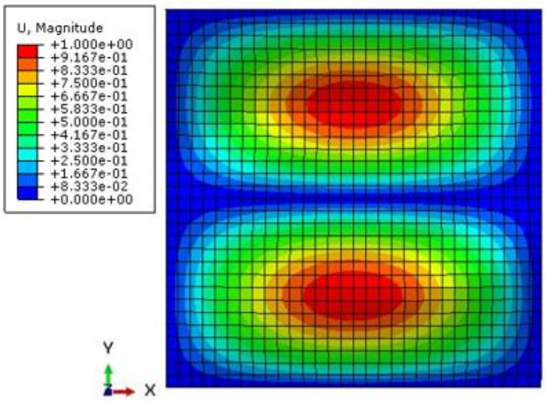
Modo 1, frequência 12,21 Hz



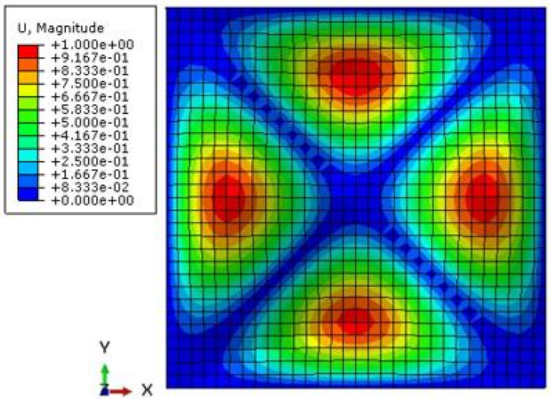
Modo 2, frequência 22,03 Hz



Modo 3, frequência 21,04 Hz



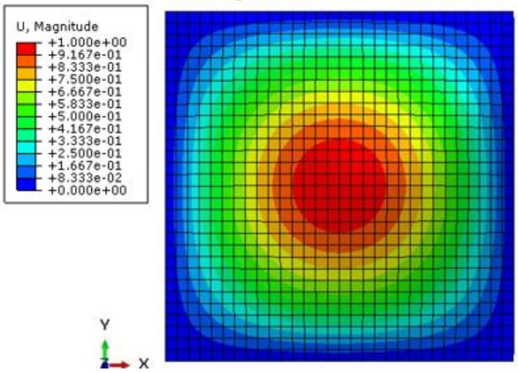
Modo 4, frequência 23,58 Hz



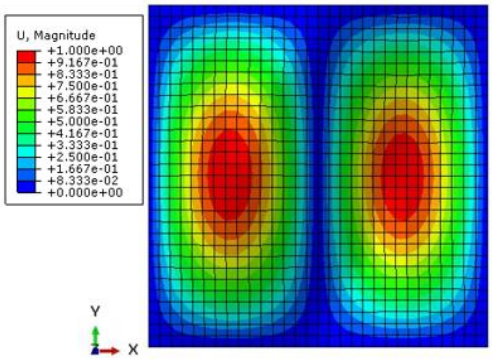
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura B-5: Forma modal da membrana 2, geometria quadrada, submetida a 1,5 MPa.

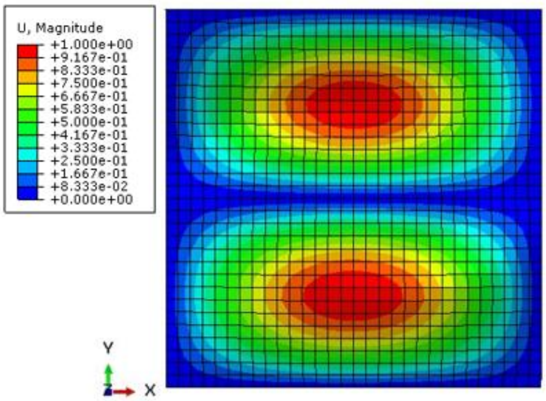
Modo 1, frequência 13,64 Hz



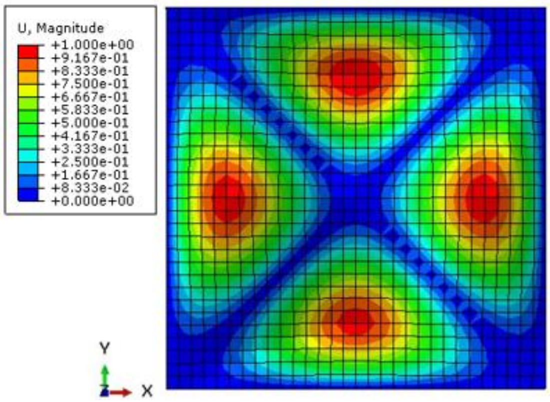
Modo 2, frequência 20,95 Hz



Modo 3, frequência 20,73 Hz



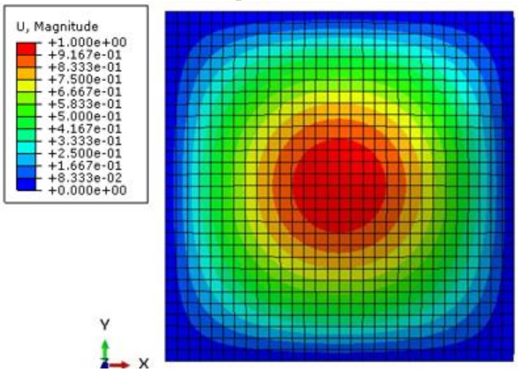
Modo 4, frequência 23,62 Hz



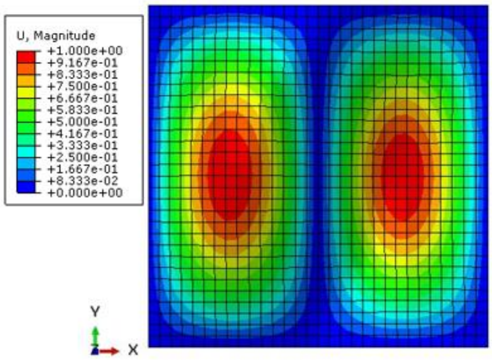
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura B-6: Forma modal da membrana 2, geometria quadrada, submetida a 2,0 MPa.

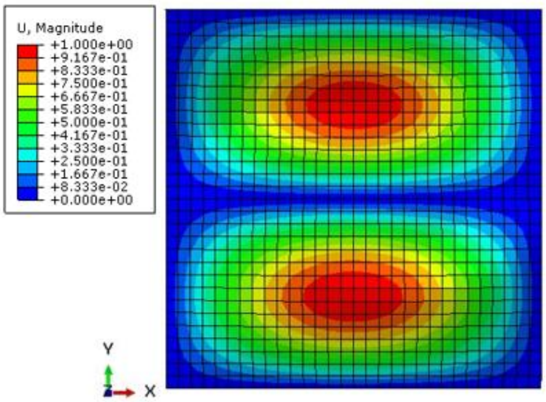
Modo 1, frequência 14,32 Hz



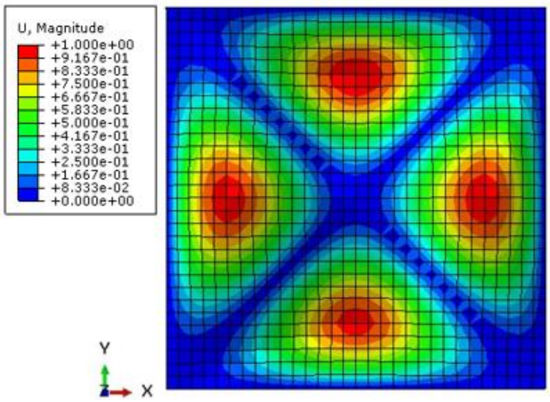
Modo 2, frequência 23,32 Hz



Modo 3, frequência 22,24 Hz



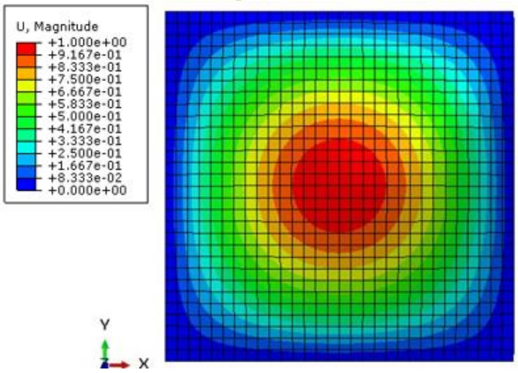
Modo 4, frequência 25,33 Hz



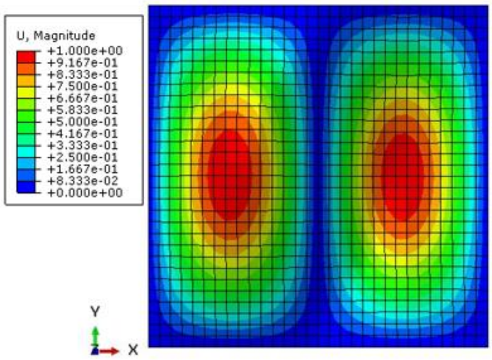
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura B-7: Forma modal da membrana 2, geometria quadrada, submetida a 2,5 MPa.

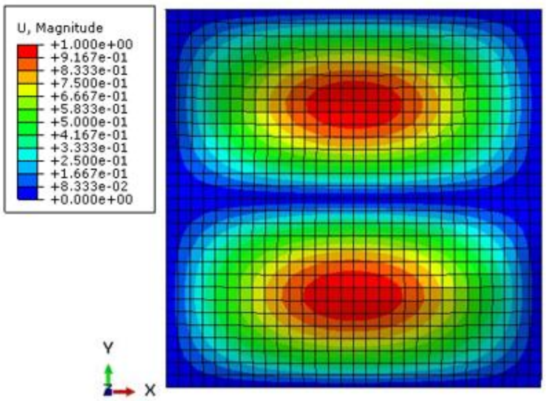
Modo 1, frequência 14,71 Hz



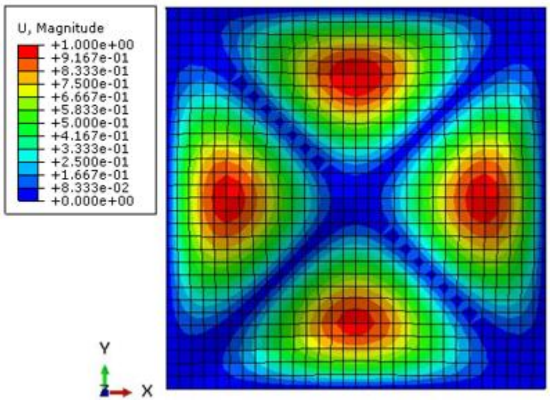
Modo 2, frequência 24,84 Hz



Modo 3, frequência 24,00 Hz



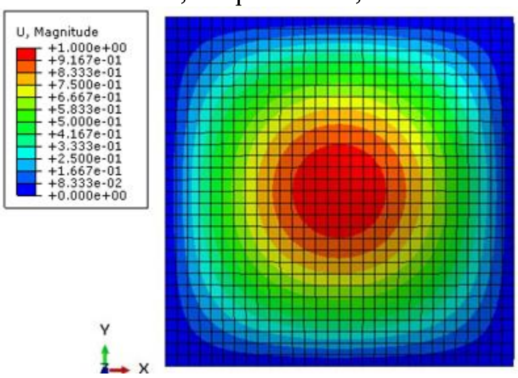
Modo 4, frequência 25,48 Hz



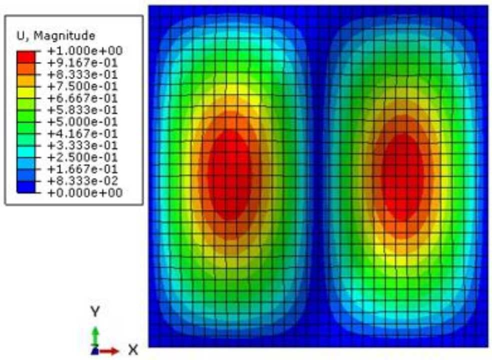
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura B-8: Forma modal da membrana 2, geometria quadrada, submetida a 3,0 MPa.

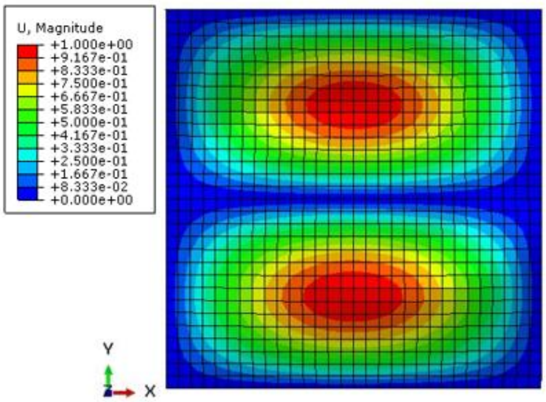
Modo 1, frequência 14,91 Hz



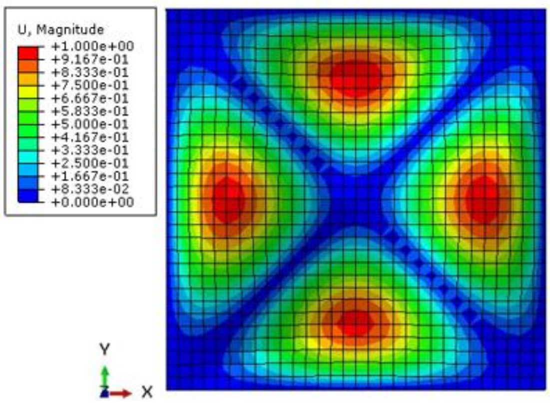
Modo 2, frequência 25,06 Hz



Modo 3, frequência 24,40 Hz



Modo 4, frequência 25,64 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Anexo C – Membrana Triangular

A Tabela C-1 mostra os valores das frequências naturais para ambas membranas 1 e 2, considerando a geometria triangular e pré-tensão de 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa e 3,0 MPa.

Tabela C-1: Frequências naturais da geometria triangular.

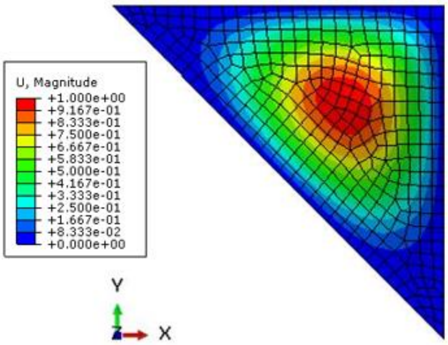
	Pré-tensão x [MPa]	**Modo 1 [Hz]**	**Modo 2 [Hz]**	**Modo 3 [Hz]**	**Modo 4 [Hz]**
Membrana 1	1	8,49	14,41	14,41	17,98
	1,5	11,94	19,11	18,82	22,21
	2,0	12,38	21,39	21,06	22,92
	2,5	12,59	21,59	21,29	23,04
	3,0	12,71	22,24	21,94	23,06
Membrana 2	1	14,63	18,05	18,81	21,77
	1,5	16,05	23,44	22,55	24,5
	2,0	17,42	24,37	23,32	26,04
	2,5	17,24	24,76	23,5	26,6
	3,0	17,28	24,78	23,94	26,89

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

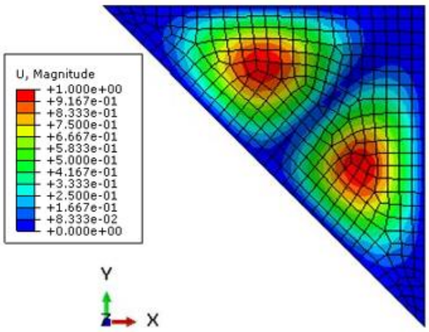
As Figuras C-1, C-2, C-3 e C-4 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 1 e, as Figuras C-5, C-6, C-7 e C-8 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 2, considerando a pré-tensão de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa. Fica evidente que os valores das frequências de cada modo aumentam conforme há um incremento no valor de pré-tensão e os valores tendem a estabilizar quando atingem 2,0 MPa de pré-tensão, esse comportamento é similar ao da geometria quadrada, sendo diferenciado pelo valor da pré-tensão que leva a estabilização da frequência natural.

Figura C-1: Forma modal membrana 1, geometria triangular, submetida a 1,5 MPa.

Modo 1, frequência 11,94Hz



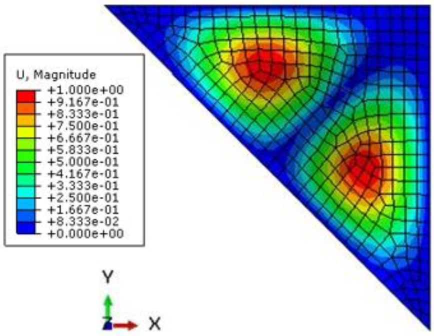
Modo 2, frequência 19,11Hz



Modo 3, frequência 18,82 Hz

Modo 4, frequência 22,21Hz

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.



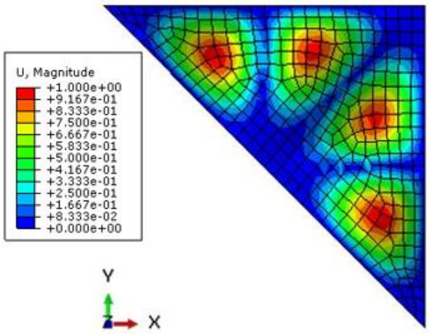
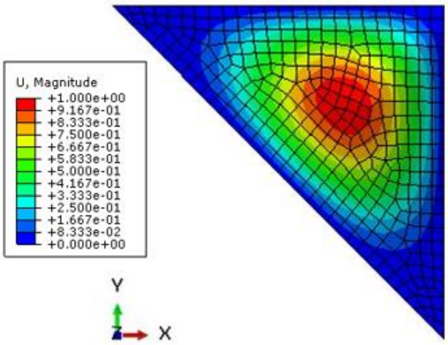
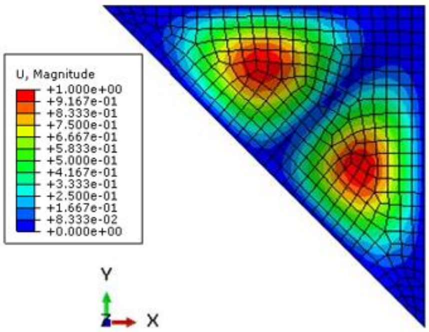


Figura C-2: Forma modal membrana 1, geometria triangular, submetida a 2,0 MPa.

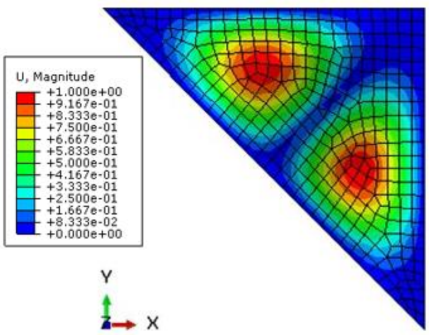
Modo 1, frequência 12,38 Hz



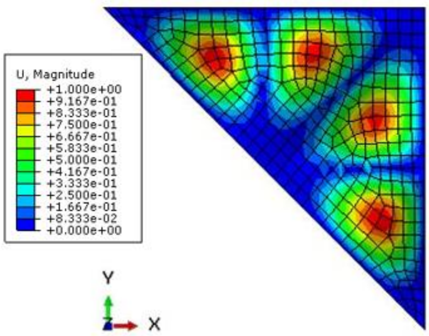
Modo 2, frequência 21,39 Hz



Modo 3, frequência 21,06 Hz

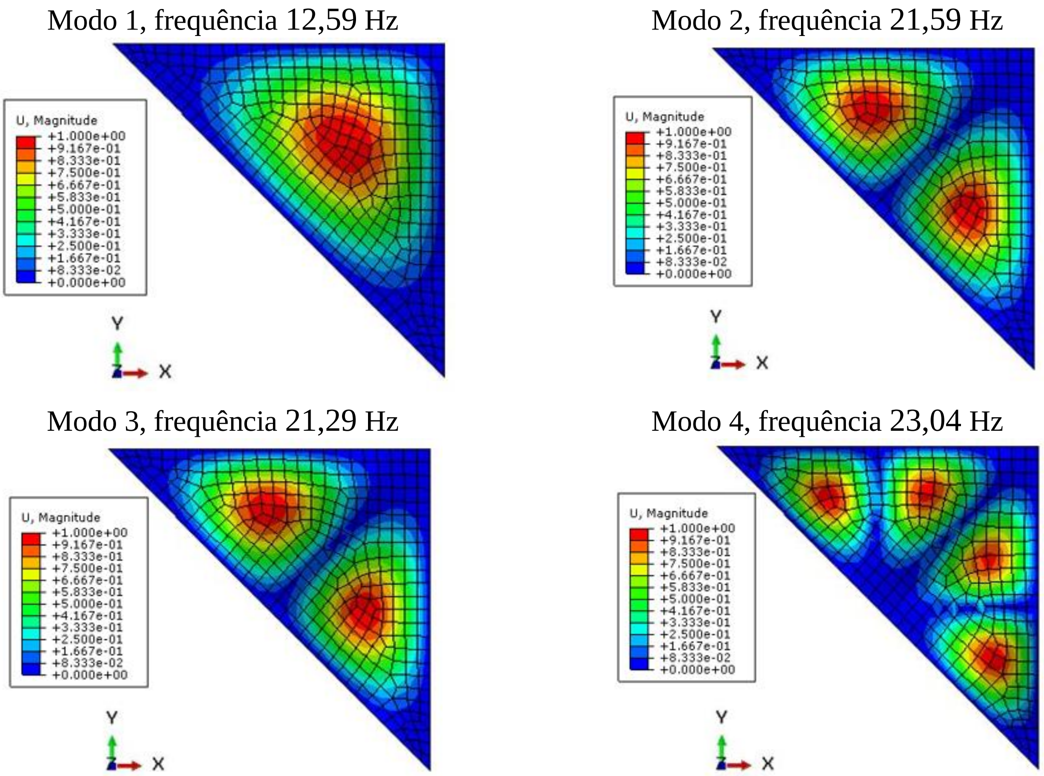


Modo 4, frequência 22,92Hz



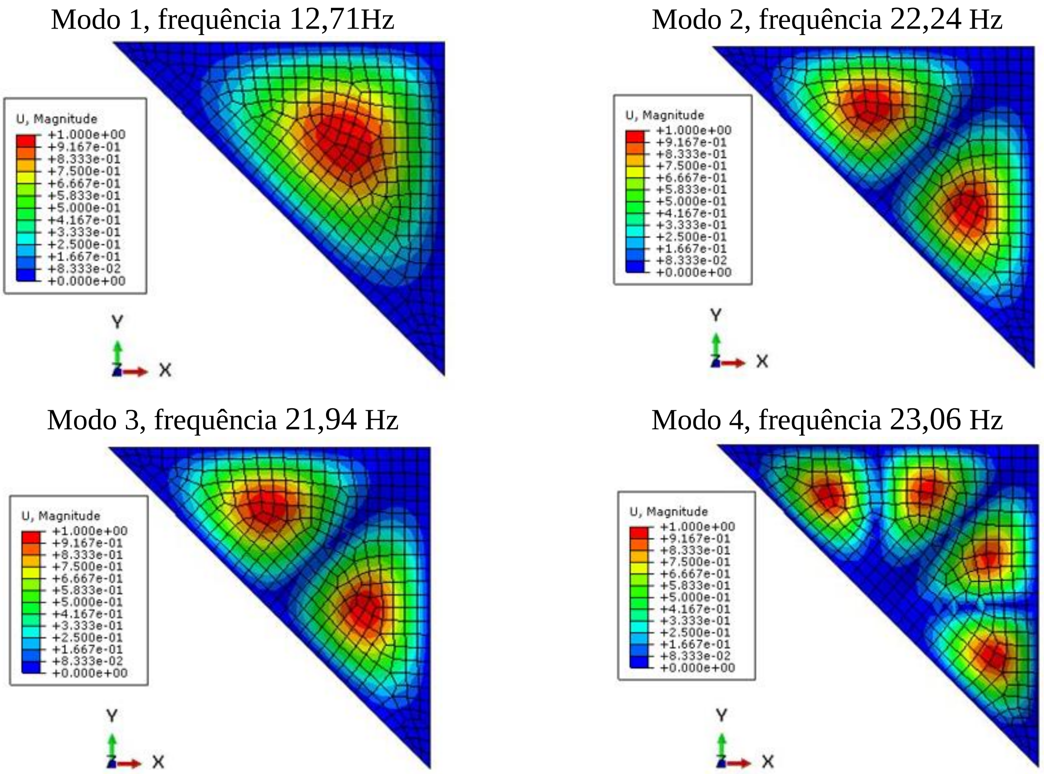
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura C-3: Forma modal membrana 1, geometria triangular, submetida a 2,5 MPa.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

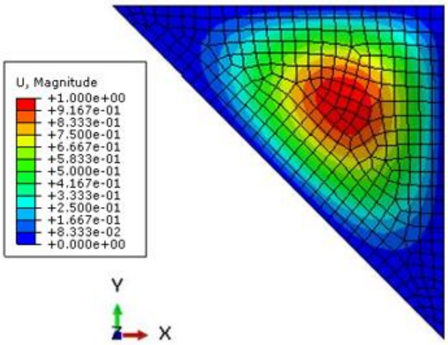
Figura C-4: Forma modal membrana 1, geometria triangular, submetida a 3,0 MPa.



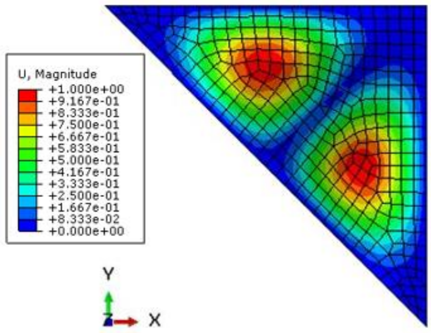
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura C-5: Forma modal membrana 2, geometria triangular, submetida a 1,5 MPa.

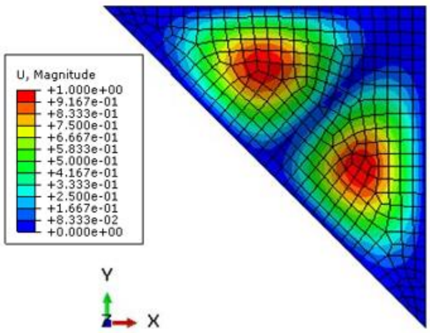
Modo 1, frequência 16,05 Hz



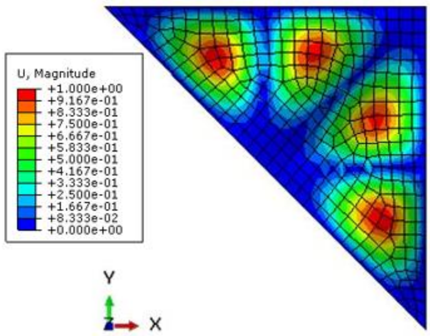
Modo 2, frequência 23,44 Hz



Modo 3, frequência 22,55 Hz



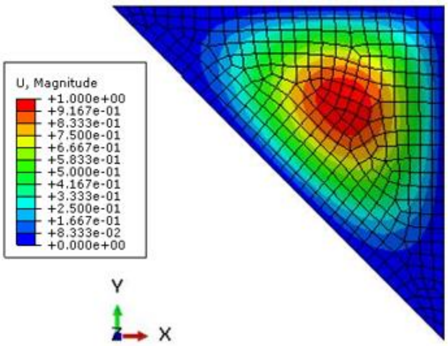
Modo 4, frequência 24,50 Hz



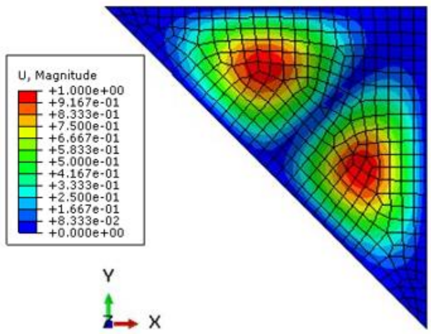
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura C-6: Forma modal membrana 2, geometria triangular, submetida a 2,0 MPa.

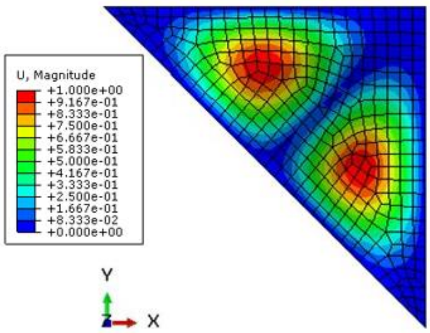
Modo 1, frequência 17,42 Hz



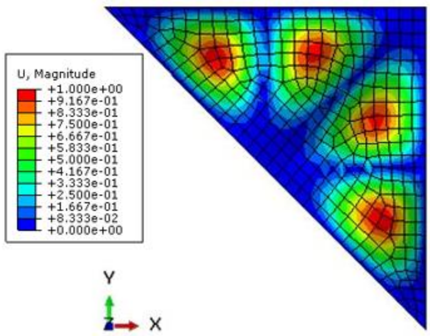
Modo 2, frequência 24,37 Hz



Modo 3, frequência 23,32 Hz



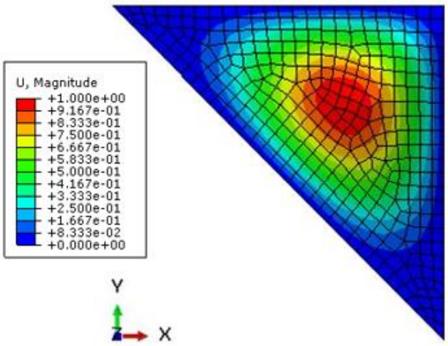
Modo 4, frequência 26,04 Hz



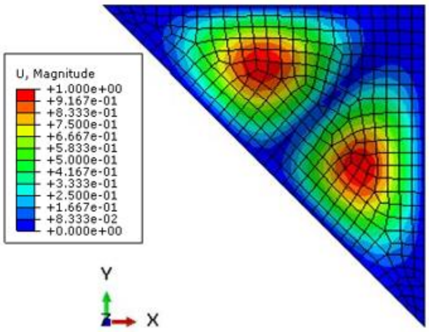
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura C-7: Forma modal membrana 2, geometria triangular, submetida a 2,5 MPa.

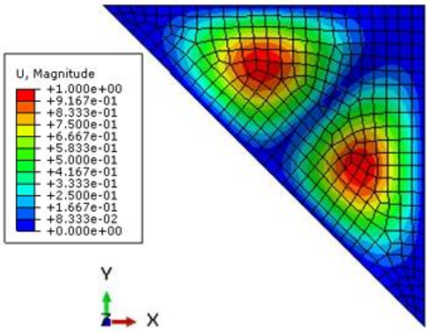
Modo 1, frequência 17,24 Hz



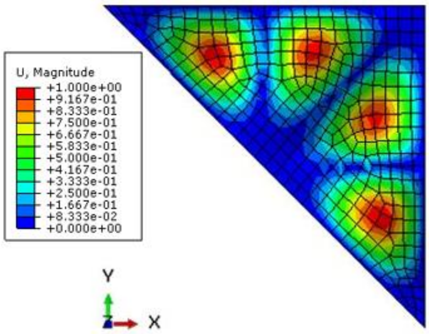
Modo 2, frequência 24,76 Hz



Modo 3, frequência 23,50 Hz



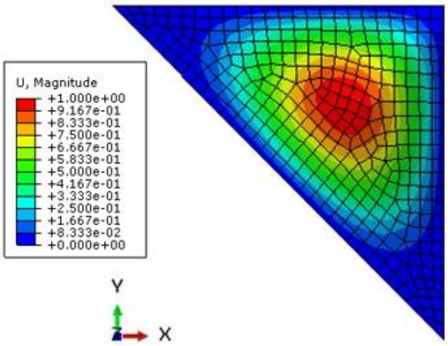
Modo 4, frequência 26,60 Hz



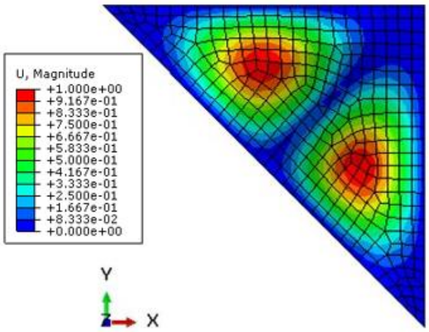
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura C-8: Forma modal membrana 2, geometria triangular, submetida a 3,0 MPa.

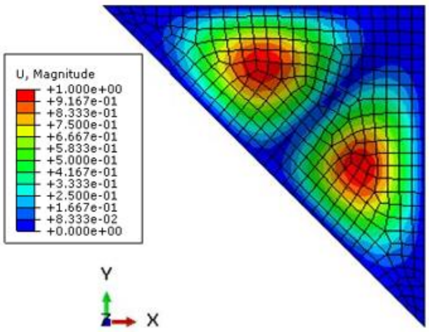
Modo 1, frequência 17,28 Hz



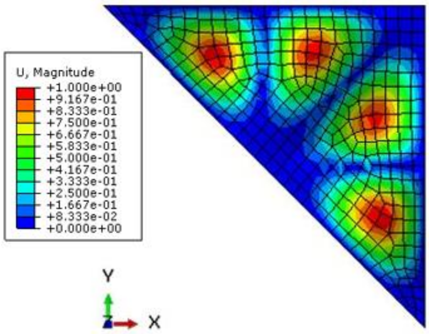
Modo 2, frequência 24,78 Hz



Modo 3, frequência 23,94 Hz



Modo 4, frequência 26,89 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Anexo D – Membrana Circular

A Tabela D-1 apresenta os resultados das frequências naturais para ambas as membranas 1 e 2, considerando a geometria circular e pré-tensão de 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa e 3,0 MPa.

Tabela D-1: Frequências naturais da geometria Circular.

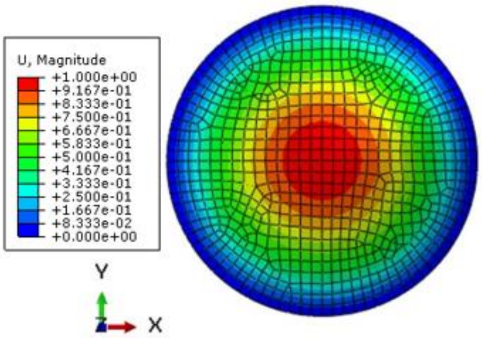
	Pré-tensão [MPa]	**Modo 1 [Hz]**	**Modo 2 [Hz]**	**Modo 3 [Hz]**	**Modo 4 [Hz]**
Membrana 1	1,0	7,79	12,51	12,51	15,90
	1,5	11,42	18,86	18,25	23,16
	2,0	11,87	19,58	18,97	24,07
	2,5	11,95	19,70	19,09	24,22
	3,0	11,99	19,72	18,11	24,25
Membrana 2	1,0	13,23	18,74	18,74	20,29
	1,5	15,51	21,64	20,55	27,55
	2,0	16,24	22,37	22,39	27,61
	2,5	16,57	22,68	22,65	27,81
	3,0	16,76	22,98	22,96	27,96

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

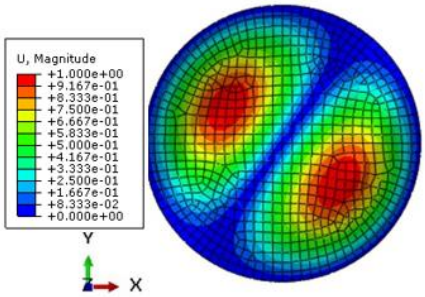
As Figuras D-1, D-2, D-3 e D-4 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 1 e, as Figuras D-5, D-6, D-7 e D-8 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 2, considerando a pré-tensão de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa.

Figura D-1: Forma modal membrana 1, geometria circular, submetida a 1,5 MPa.

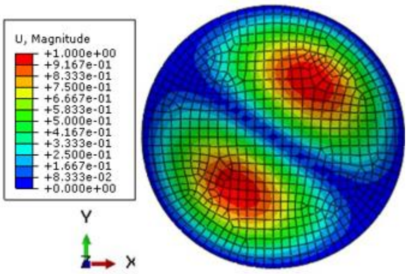
Modo 1, frequência 11,42 Hz



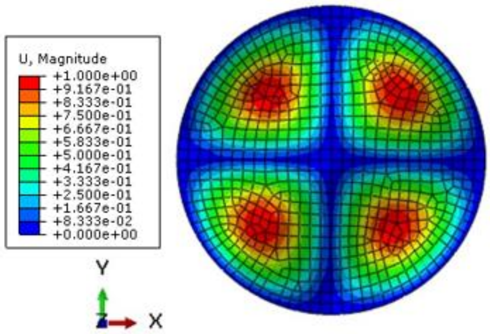
Modo 2, frequência 18,86 Hz



Modo 3, frequência 18,25 Hz



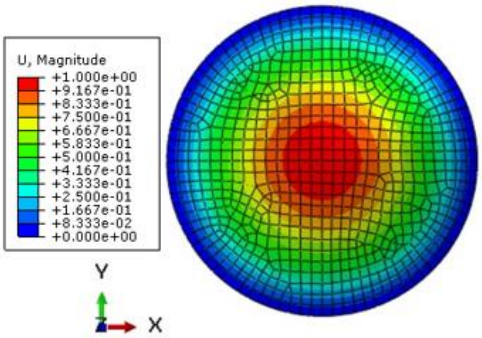
Modo 4, frequência 23,16 Hz



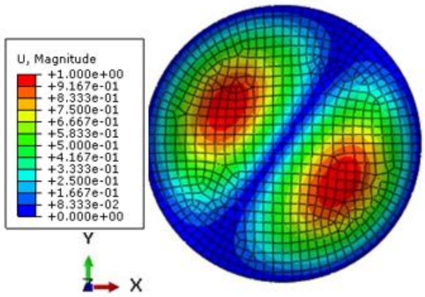
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura D-2: Forma modal membrana 1, geometria circular, submetida a 2,0 MPa.

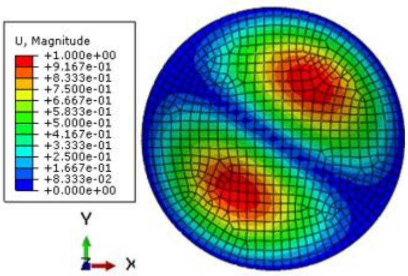
Modo 1, frequência 11,87 Hz



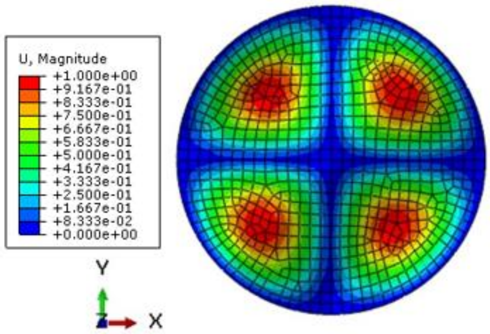
Modo 2, frequência 19,58 Hz



Modo 3, frequência 18,97 Hz



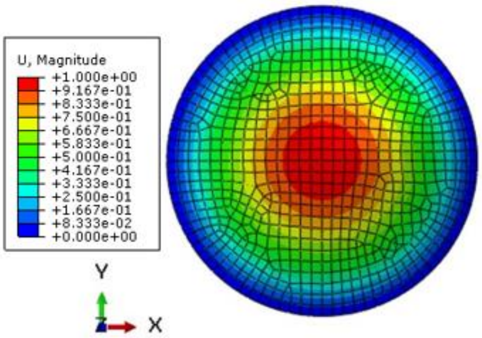
Modo 4, frequência 24,07 Hz



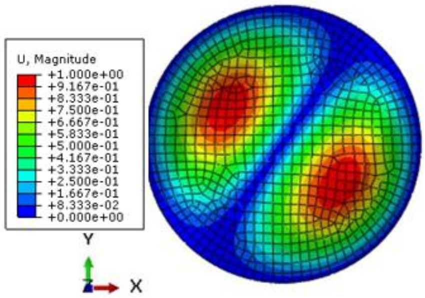
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura D-3: Forma modal membrana 1, geometria circular, submetida a 2,5 MPa.

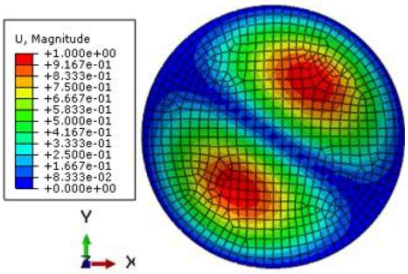
Modo 1, frequência 11,95 Hz



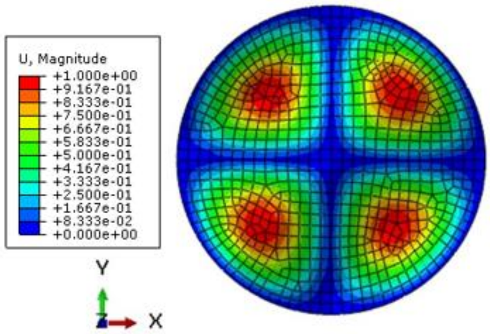
Modo 2, frequência 19,70 Hz



Modo 3, frequência 19,09 Hz



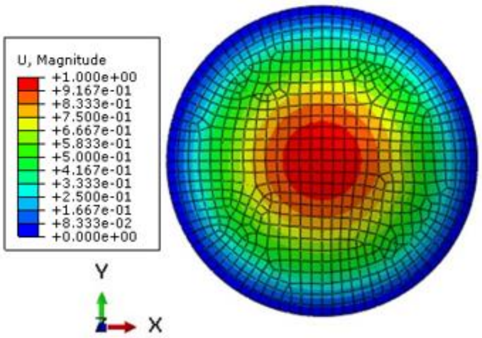
Modo 4, frequência 24,22 Hz



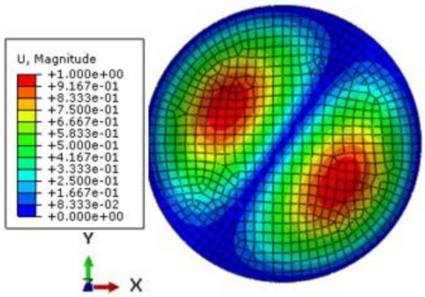
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura D-4: Forma modal membrana 1, geometria circular, submetida a 3,0 MPa.

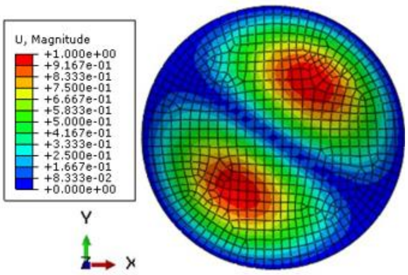
Modo 1, frequência 11,99 Hz



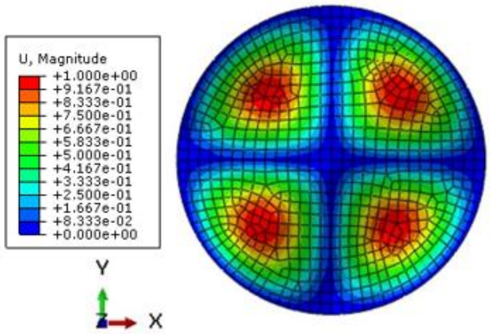
Modo 2, frequência 19,72 Hz



Modo 3, frequência 18,11 Hz



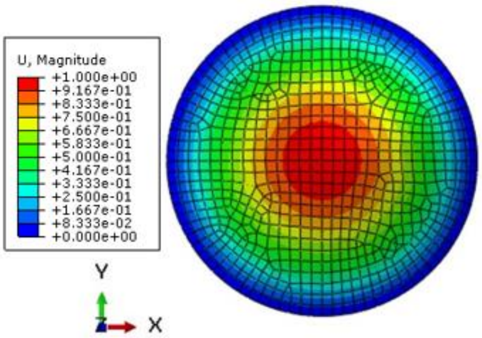
Modo 4, frequência 24,25 Hz



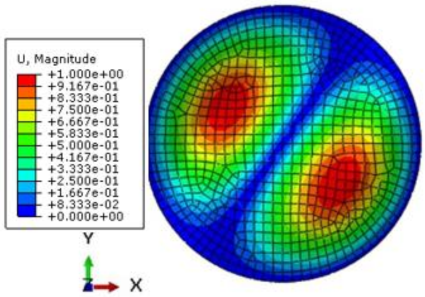
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura D-5: Forma modal membrana 2, geometria circular, submetida a 1,5 MPa.

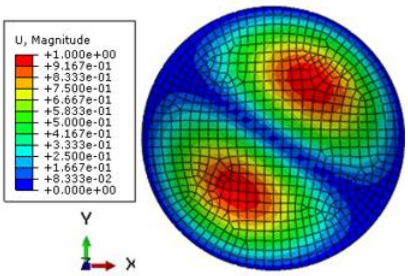
Modo 1, frequência 15,51 Hz



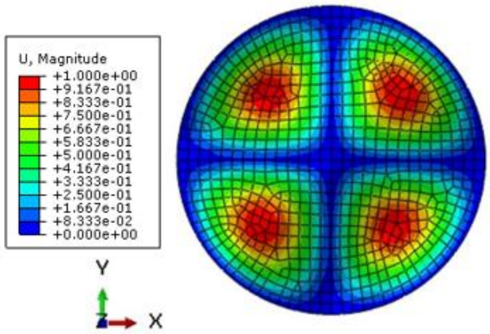
Modo 2, frequência 21,64 Hz



Modo 3, frequência 20,55 Hz



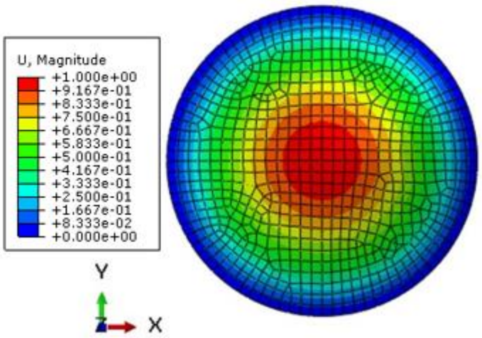
Modo 4, frequência 27,55 Hz



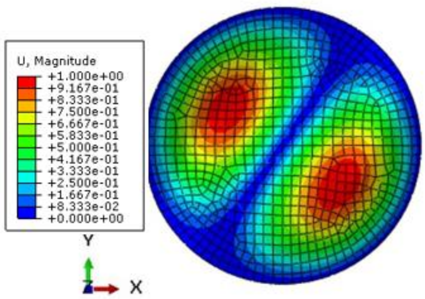
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura D-6: Forma modal membrana 2, geometria circular, submetida a 2,0 MPa.

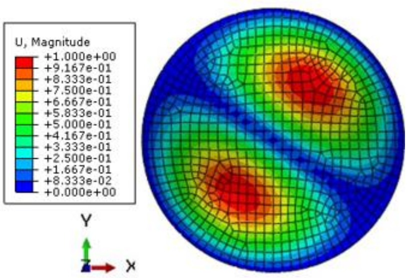
Modo 1, frequência 16,31 Hz



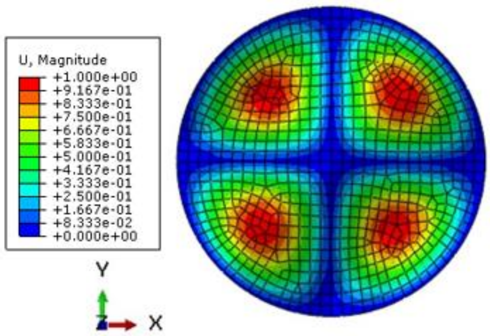
Modo 2, frequência 22,37 Hz



Modo 3, frequência 22,39 Hz



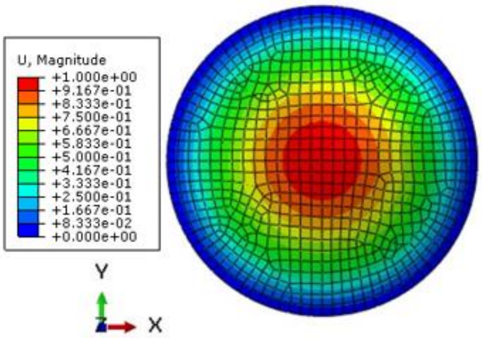
Modo 4, frequência 27,61 Hz



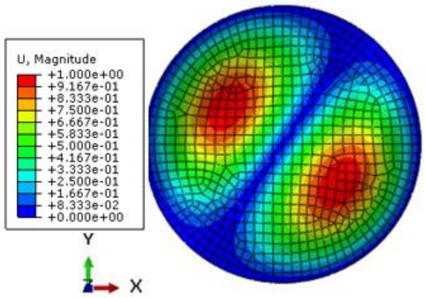
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura D-7: Forma modal membrana 2, geometria circular, submetida a 2,5 MPa.

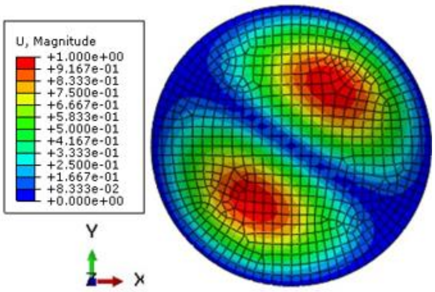
Modo 1, frequência 16,57 Hz



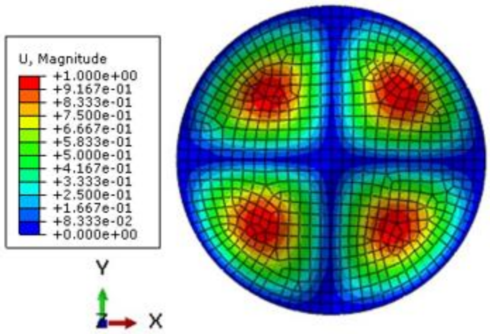
Modo 2, frequência 22,68 Hz



Modo 3, frequência 22,65 Hz



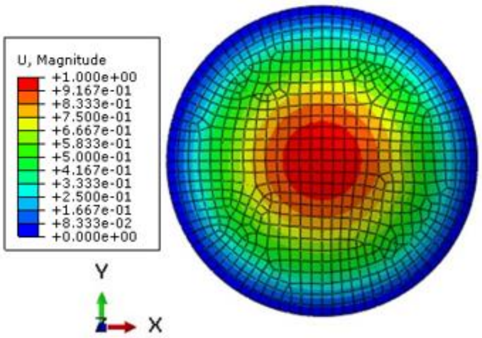
Modo 4, frequência 27,81 Hz



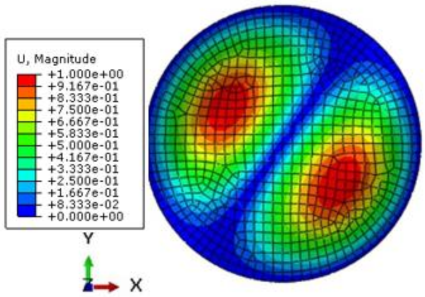
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura D-8: Forma modal membrana 2, geometria circular, submetida a 3,0 MPa.

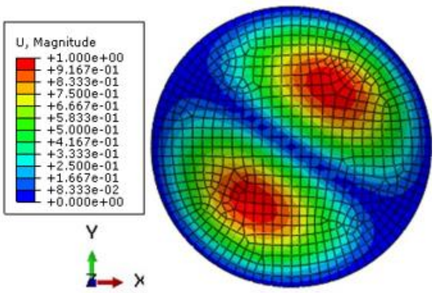
Modo 1, frequência 16,76 Hz



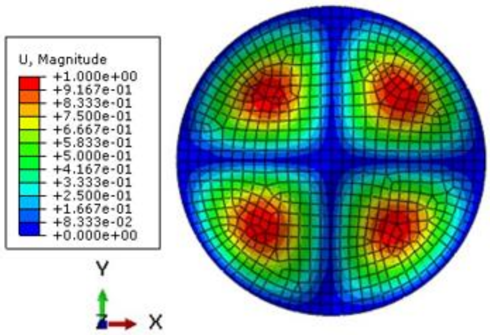
Modo 2, frequência 22,98 Hz



Modo 3, frequência 22,96 Hz



Modo 4, frequência 27,96 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Anexo E – Membrana Retangular Tipo 1

A Tabela E 1 mostra os valores das frequências naturais para ambas membranas 1 e 2, considerando a geometria retangular tipo 1 e pré-tensão de 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa e 3,0 MPa.

Tabela E-1: Frequências naturais da geometria Retangular Tipo 1.

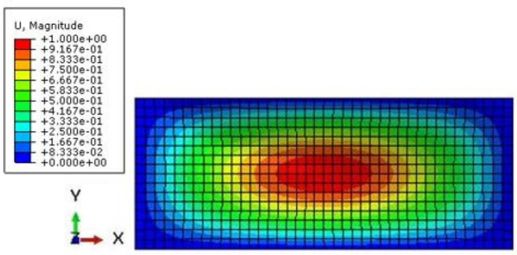
	Pré-tensão x [MPa]	Modo 1 [Hz]	Modo 2 [Hz]	Modo 3 [Hz]	Modo 4 [Hz]
Membrana 1	1,0	13,98	22,29	22,29	28,28
	1,5	20,37	33,01	32,40	41,07
	2,0	21,19	34,21	33,60	42,66
	2,5	21,30	34,48	33,86	43,01
	3,0	21,33	34,53	33,92	42,99
Membrana 2	1,0	17,37	25,68	25,68	31,67
	1,5	23,76	36,40	35,79	44,53
	2,0	24,58	37,60	36,99	46,05
	2,5	24,69	37,87	37,26	46,32
	3,0	24,72	37,92	37,31	46,38

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

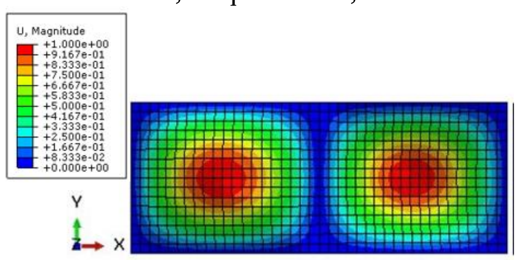
As Figuras E-1, E-2, E-3e E-4 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 1 e, as Figuras E-5, E-6, E-7 e E-8 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 2, considerando a pré-tensão de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa.

Figura E-1: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 1, submetida a 1,5 MPa.

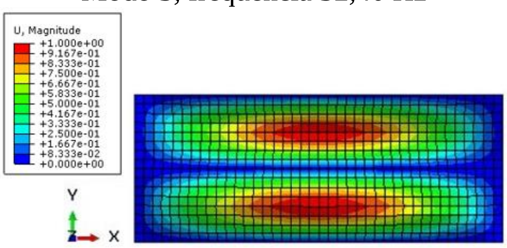
Modo 1, frequência 20,37 Hz



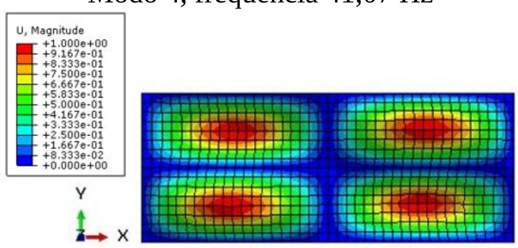
Modo 2, frequência 33,07 Hz



Modo 3, frequência 32,40 Hz



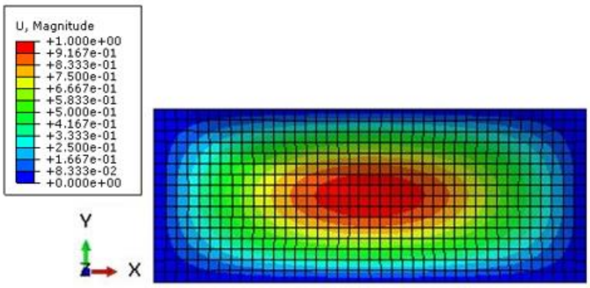
Modo 4, frequência 41,07 Hz



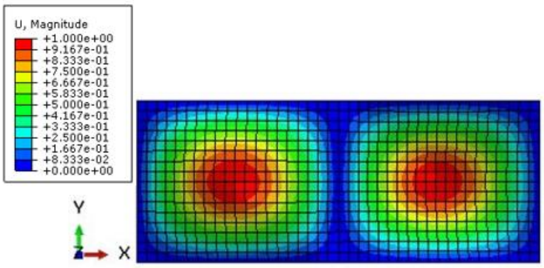
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura E-2: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 1, submetida a 2,0 MPa.

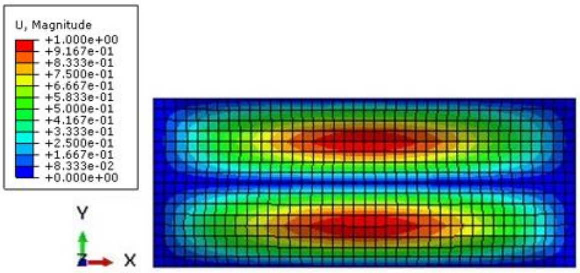
Modo 1, frequência 21,19 Hz



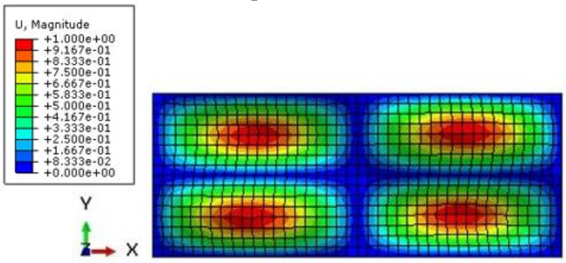
Modo 2, frequência 34,21 Hz



Modo 3, frequência 33,60 Hz



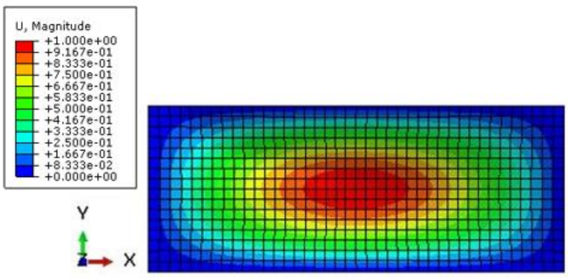
Modo 4, frequência 42,66 Hz



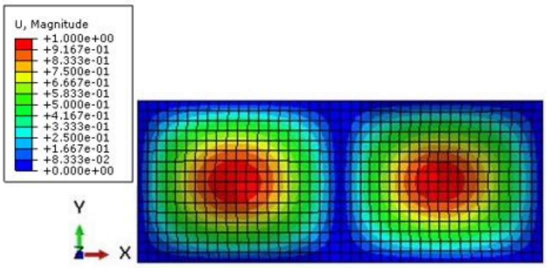
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura E-3: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 1, submetida a 2,5 MPa.

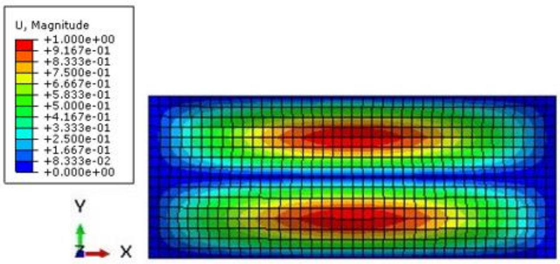
Modo 1, frequência 21,30 Hz



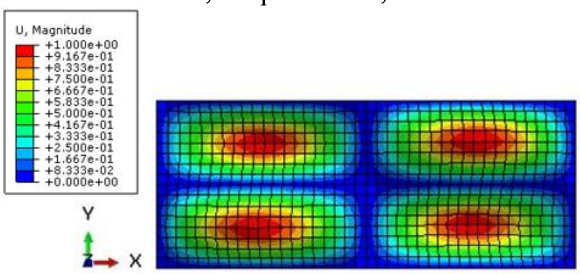
Modo 2, frequência 34,48 Hz



Modo 3, frequência 33,86 Hz



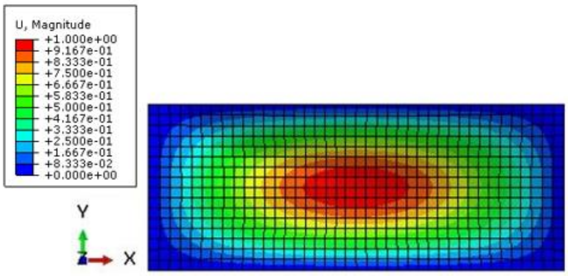
Modo 4, frequência 43,01 Hz



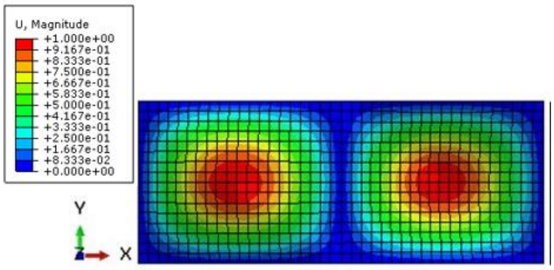
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura E-4: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 1, submetida a 3,0 MPa.

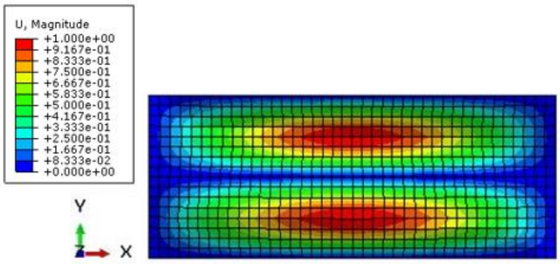
Modo 1, frequência 21,33 Hz



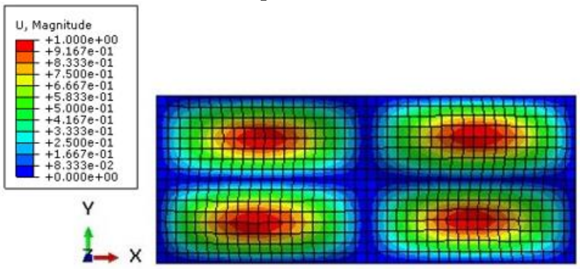
Modo 2, frequência 34,53 Hz



Modo 3, frequência 33,92 Hz



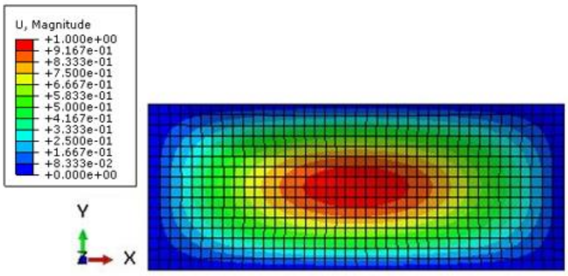
Modo 4, frequência 42,99 Hz



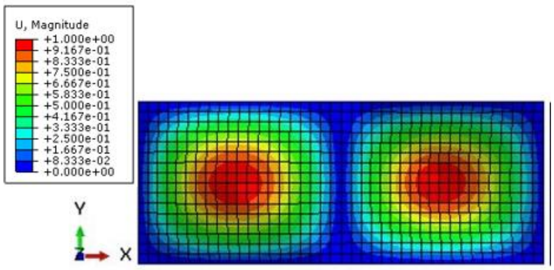
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura E-5: Forma modal membrana 2, geometria retangular tipo 1, submetida a 1,5 MPa.

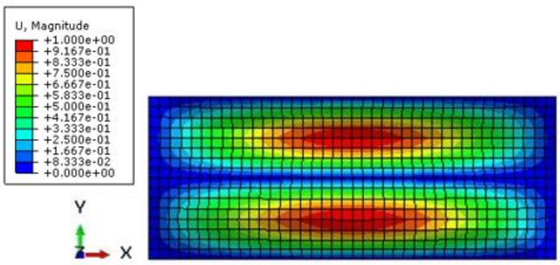
Modo 1, frequência 23,76 Hz



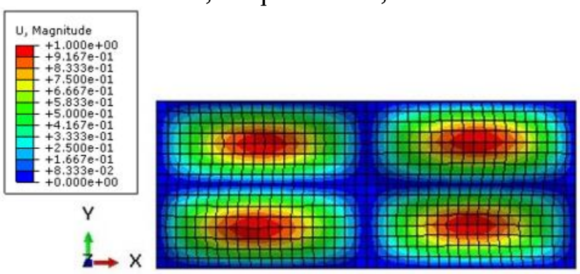
Modo 2, frequência 36,40 Hz



Modo 3, frequência 35,79 Hz



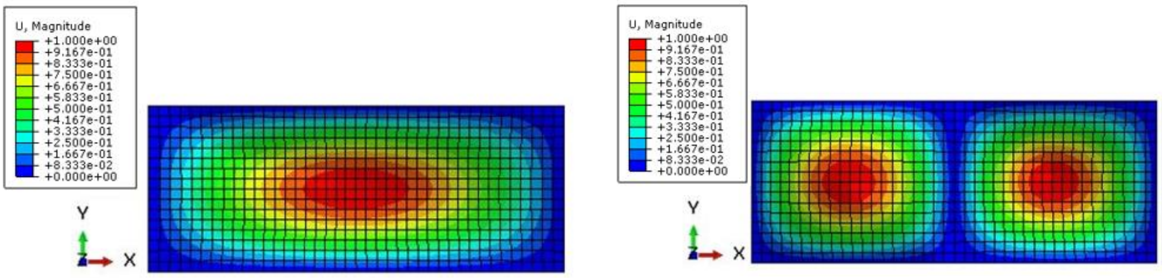
Modo 4, frequência 44,53 Hz



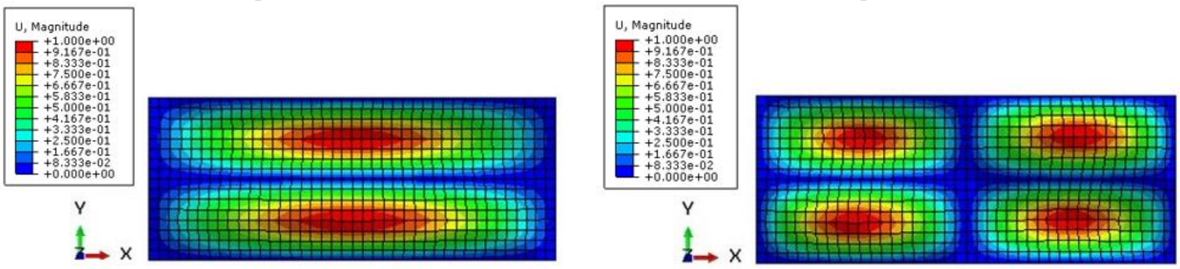
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura E-6: Forma modal membrana 2 com geometria retangular 1 e pré-tensão de 2,0 MPa.

Modo 1, frequência 24,58 Hz   Modo 2, frequência 37,60 Hz



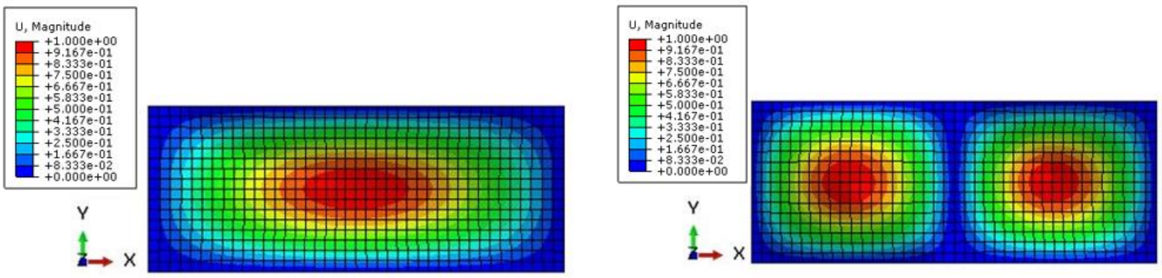
Modo 3, frequência 36,99 Hz   Modo 4, frequência 46,05 Hz



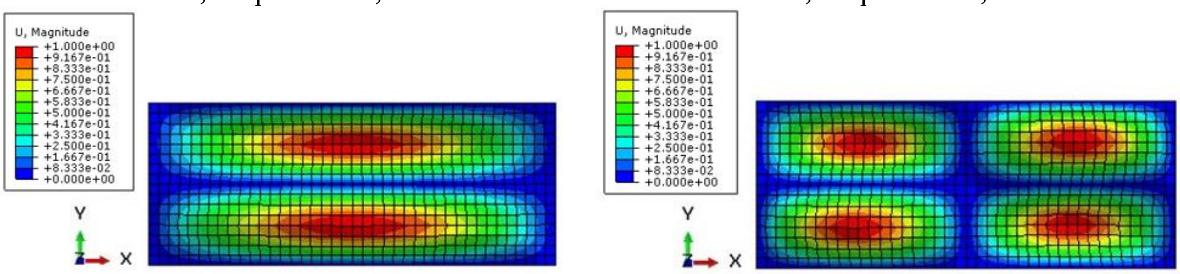
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura E-7: Forma modal membrana 2 com geometria retangular 1 e pré-tensão de 2,5 MPa.

Modo 1, frequência 24,69 Hz   Modo 2, frequência 37,87 Hz



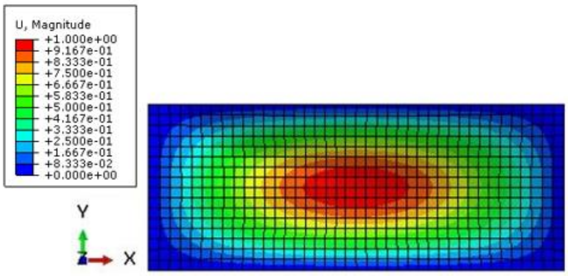
Modo 3, frequência 37,26 Hz   Modo 4, frequência 46,32 Hz



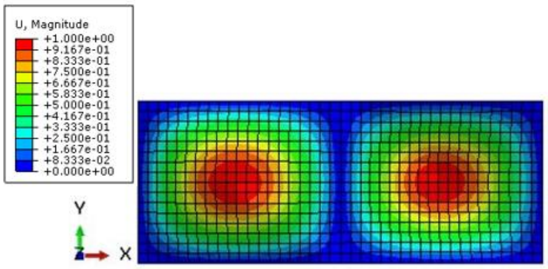
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura E-8: Forma modal membrana 2 com geometria retangular 1 e pré-tensão de 3,0 MPa.

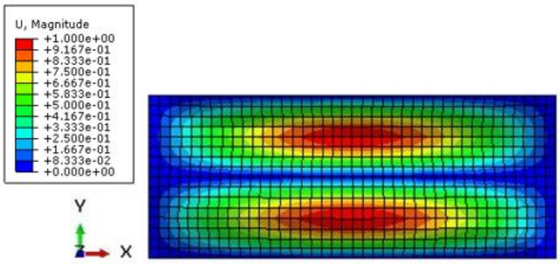
Modo 1, frequência 24,72 Hz



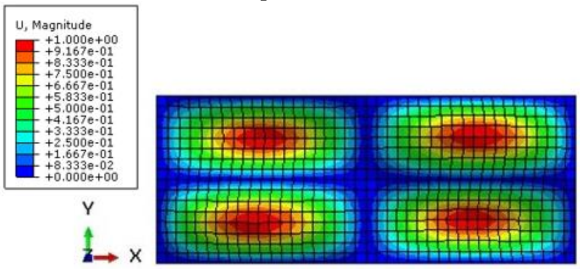
Modo 2, frequência 37,92 Hz



Modo 3, frequência 37,31 Hz



Modo 4, frequência 46,38 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Anexo F – Membrana Retangular Tipo 2

A Tabela F-1 mostra os valores das frequências naturais para ambas membranas 1 e 2, considerando a geometria retangular tipo 2 e pré-tensão de 1,0 MPa; 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa e 3,0 MPa.

Tabela F-1: Frequências naturais da geometria Retangular Tipo 2.

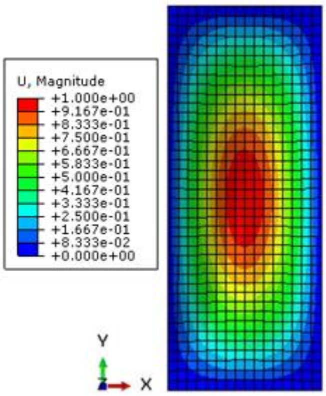
	Pré-tensão x [MPa]	Modo 1 [Hz]	Modo 2 [Hz]	Modo 3 [Hz]	Modo 4 [Hz]
Membrana 1	1,0	5,40	8,72	8,72	11,12
	1,5	7,96	13,18	12,78	16,24
	2,0	8,28	13,60	13,28	16,88
	2,5	8,33	13,76	13,36	16,97
	3,0	8,34	13,78	13,38	17,00
Membrana 2	1,0	8,79	12,11	12,11	14,51
	1,5	11,35	16,57	16,17	19,63
	2,0	11,67	16,99	16,67	20,27
	2,5	11,72	17,15	16,75	20,36
	3,0	11,73	17,17	16,77	20,39

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

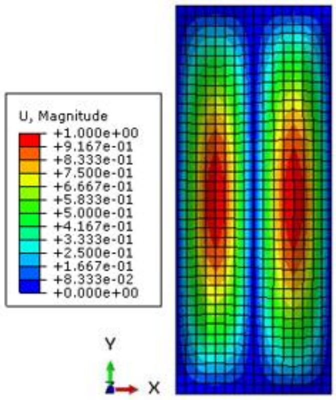
As Figuras F-1, F-2, F-3e F-4 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 1 e, as Figuras F-5, F-6, F-7 e F-8 mostram o comportamento dos modos de vibrar da membrana 2, considerando a pré-tensão de 1,5 MPa; 2,0 MPa; 2,5 MPa; 3,0 MPa.

Figura F-1: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 2, submetida a 1,5 MPa.

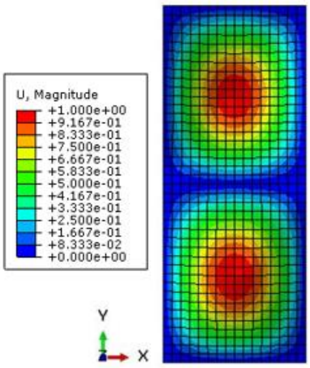
Modo 1, frequência 7,96 Hz



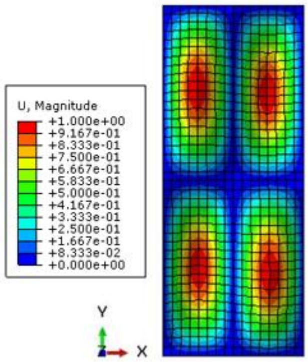
Modo 2, frequência 13,18 Hz



Modo 3, frequência 12,78 Hz



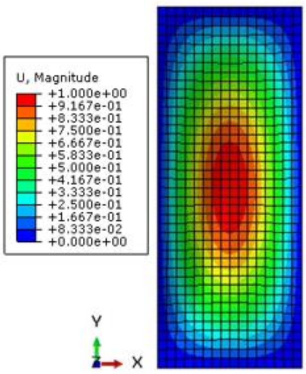
Modo 4, frequência 16,24 Hz



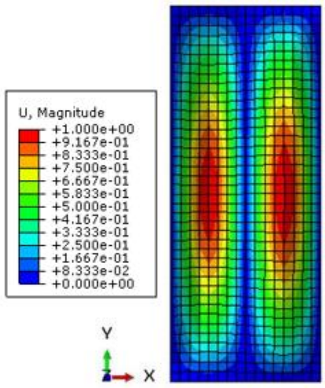
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura F-2: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 2, submetida a 2,0 MPa.

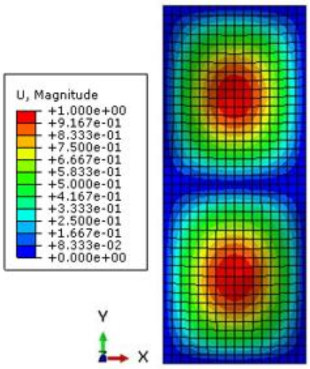
Modo 1, frequência 8,28 Hz



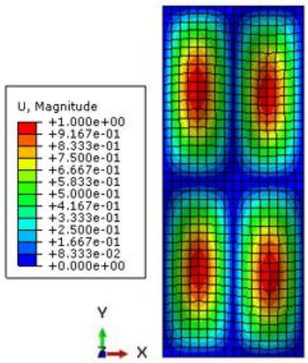
Modo 2, frequência 13,60 Hz



Modo 3, frequência 13,28 Hz



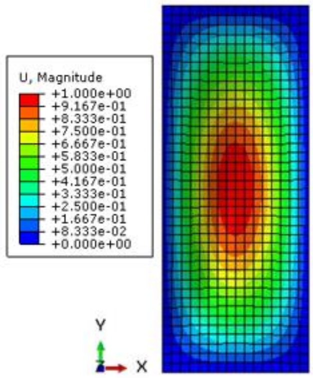
Modo 4, frequência 16,88 Hz



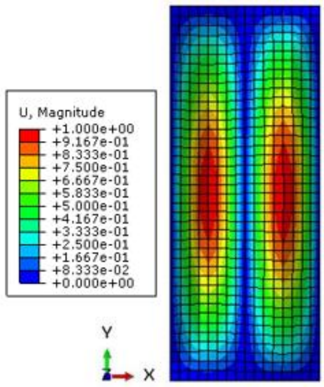
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura F-3: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 2, submetida a 2,5 MPa.

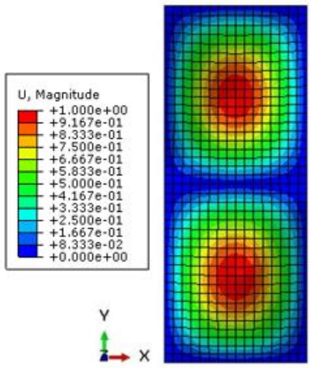
Modo 1, frequência 8,33 Hz



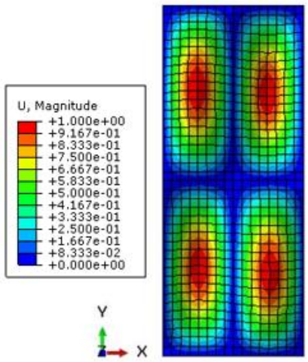
Modo 2, frequência 13,76 Hz



Modo 3, frequência 13,36 Hz



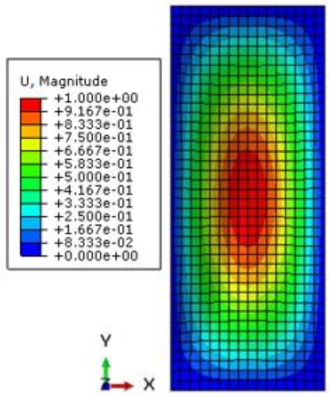
Modo 4, frequência 16,97 Hz



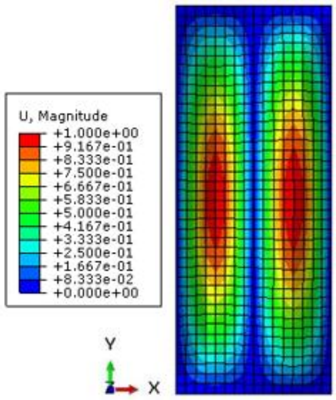
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura F-4: Forma modal membrana 1, geometria retangular tipo 2, submetida a 3,0 MPa.

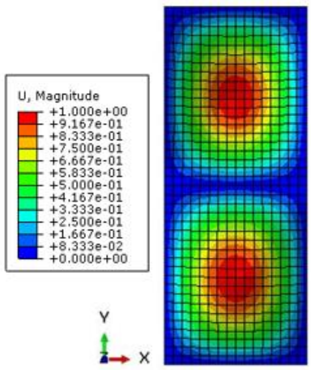
Modo 1, frequência 8,34 Hz



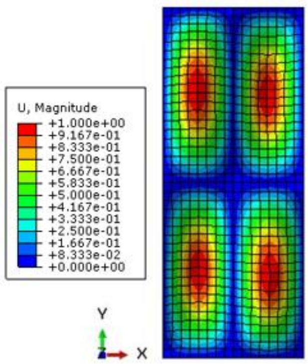
Modo 2, frequência 13,78 Hz



Modo 3, frequência 13,38 Hz



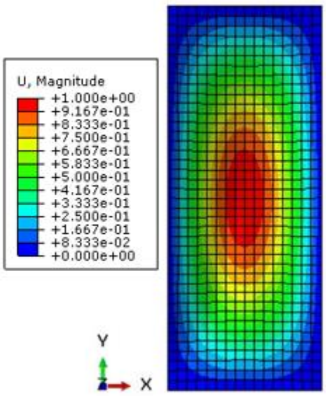
Modo 4, frequência 17,00 Hz



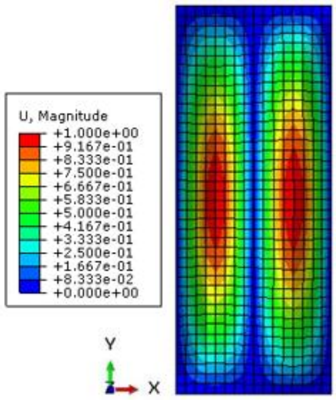
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura F-5: Forma modal membrana 2, geometria retangular tipo 2, submetida a 1,5 MPa.

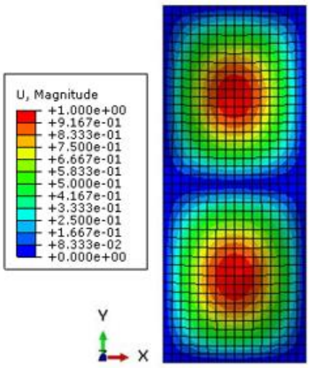
Modo 1, frequência 11,35 Hz



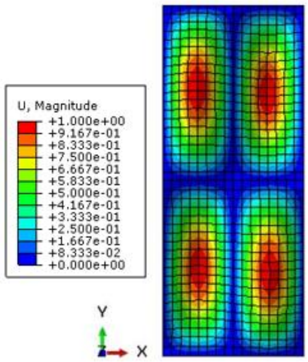
Modo 2, frequência 16,57 Hz



Modo 3, frequência 16,17 Hz



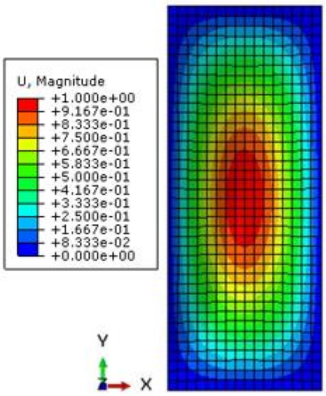
Modo 4, frequência 19,63 Hz



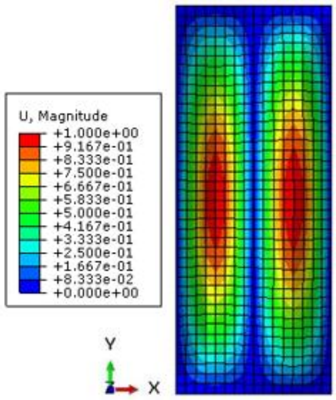
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura F-6: Forma modal membrana 2, geometria retangular tipo 2, submetida a 2,0 MPa.

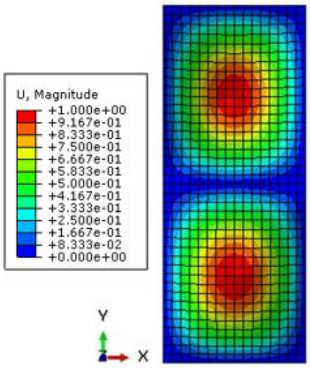
Modo 1, frequência 11,67 Hz



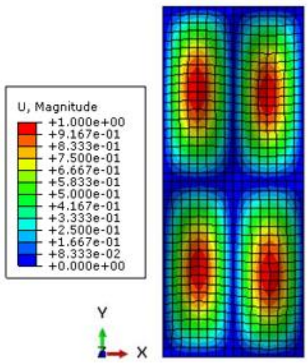
Modo 2, frequência 16,99 Hz



Modo 3, frequência 16,67 Hz



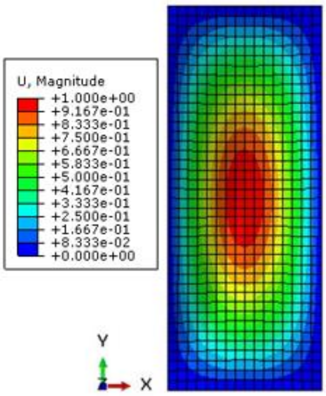
Modo 4, frequência 20,27 Hz



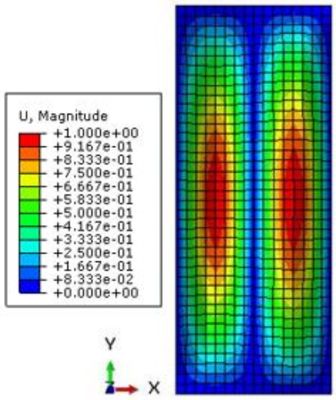
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura F-7: Forma modal membrana 2, geometria retangular tipo 2, submetida a 2,5 MPa.

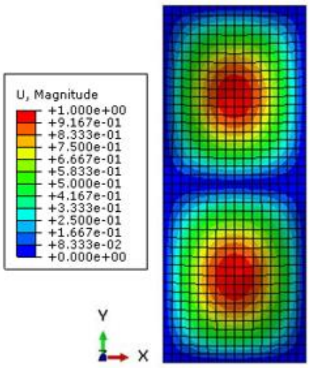
Modo 1, frequência 11,72 Hz



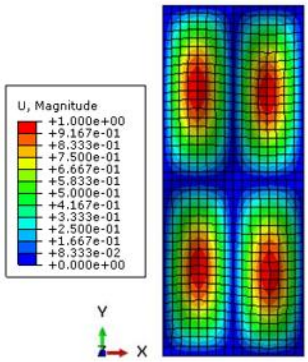
Modo 2, frequência 17,15 Hz



Modo 3, frequência 16,75 Hz



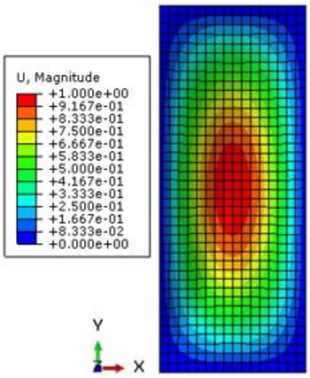
Modo 4, frequência 20,36 Hz



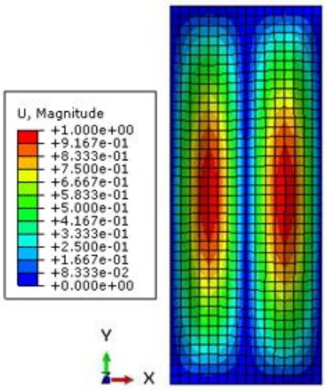
Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Figura F-8: Forma modal membrana 2 com geometria retangular 2 e pré-tensão de 3,0 MPa.

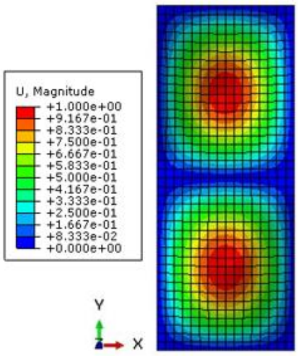
Modo 1, frequência 11,73 Hz



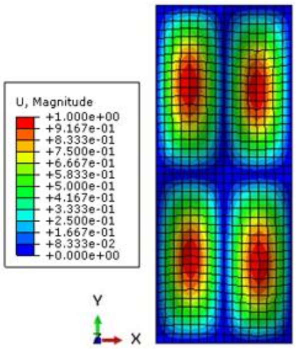
Modo 2, frequência 17,17 Hz



Modo 3, frequência 16,77 Hz



Modo 4, frequência 20,39 Hz



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.