



Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Centro de Ciências da Administração e Sócio Econômicas - ESAG

Departamento de Ciências Econômicas

# **CÁLCULO DE VALOR EM RISCO DE ATIVOS FINANCEIROS ATRAVÉS DA TEORIA DO VALOR EXTREMO**

**RAFAEL FELIPE BRESSAN**

**Florianópolis - SC, 2019**



RAFAEL FELIPE BRESSAN

**CÁLCULO DE VALOR EM RISCO DE ATIVOS  
FINANCEIROS ATRAVÉS DA TEORIA DO VALOR  
EXTREMO**

**Monografia** apresentada ao Departamento de Ciências Econômicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas, orientado pelo Prof. Dr. Daniel Augusto de Souza.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Augusto de Souza

Florianópolis - SC

2019



RAFAEL FELIPE BRESSAN

# **CÁLCULO DE VALOR EM RISCO DE ATIVOS FINANCEIROS ATRAVÉS DA TEORIA DO VALOR EXTREMO**

**Monografia** apresentada ao Departamento de Ciências Econômicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas, orientado pelo Prof. Dr. Daniel Augusto de Souza.

**Banca Examinadora:**

Orientador:

---

**Prof. Dr. Daniel Augusto de Souza**  
UDESC

Membros:

---

**Prof. Dr. Adriano de Amarante**  
UDESC

---

**Prof. Msc. Fernando Pozzobon**  
UDESC

Florianópolis - SC

29/11/2019



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha esposa, Fernanda, por toda a compreensão e apoio que obtive nesta jornada.

Agradeço ao meu orientador, professor Daniel, pela oportunidade que me foi apresentada para escrever este trabalho, por todos os conselhos, paciência e ajuda dispensada.

Um agradecimento especial ao professor Adriano, que foi um verdadeiro co-autor do presente trabalho. Sua dedicação, sugestões e críticas tornaram possível o resultado obtido.



# Resumo

Este trabalho avalia sete modelos univariados de estimativa de valor em risco para seis ativos. Modelos condicionais e incondicionais são testados em dois períodos de *backtesting*, cobrindo quatro anos de observações diárias cada. O primeiro período, cobrindo a grande crise financeira, é um regime de alta volatilidade, enquanto o segundo período se estende de meados de 2015 até o final de 2018 e é considerado como tendo um regime de volatilidade comum. Com base em três procedimentos de avaliação, cobertura incondicional, independência de violações e conjunto de confiança de modelos, os melhores resultados são apresentados pelo modelo que une a teoria dos valores extremos e o modelo de variância heterocedástica condicional, exceto para o período de alta volatilidade e cobertura de 2,5%, onde o modelo Riskmetrics apresentou resultados superiores.

**Palavras-chave:** Valor em Risco. Teoria do Valor Extremo. Picos acima de Limiar. modelos GARCH



# Abstract

This study evaluates seven univariate models of value at risk estimation for six assets. Conditional and unconditional models are tested in two backtesting periods covering four years of daily observations each. The first period, covering the great financial crisis is a high volatility regime, while the second period spans mid 2015 to end of 2018 and is considered as having an ordinary volatility regime. Based on three evaluation procedures, unconditional coverage, independence of violations and the model confidence set, the best results are presented by the model that joins the extreme value theory and conditional heteroscedastic variance model, except for the high volatility period and 2.5% coverage, where the Riskmetrics model showed superior results.

**Keywords:** Value-at-Risk. Extreme Value Theory. Peaks over Threshold. Conditional EVT. GARCH models



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Autocorrelação dos retornos de ativos financeiros . . . . .	30
Figura 2 – Perdas de VALE5 e sua distribuição no tempo . . . . .	31
Figura 3 – Função de distribuição e densidade de probabilidades de uma GPD . . . . .	42
Figura 4 – Séries de perdas dos ativos, período completo. Áreas sombreadas representam os períodos de <i>backtesting</i> . . . . .	81
Figura 5 – Análise de normalidade dos retornos através de gráficos quantil-quantil. . . . .	82
Figura 6 – Euro-Dólar. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra. . . . .	83
Figura 7 – MSCI-C. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra. . . . .	84
Figura 8 – MSCI-I. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra. . . . .	85
Figura 9 – MSCI-W. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra. . . . .	86
Figura 10 – NAREIT. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra. . . . .	87
Figura 11 – Treasuries. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra. . . . .	88
Figura 12 – Ajuste das inovações em excesso com relação a uma distribuição GPD de referência. Primeiro período dentro da amostra. . . . .	89
Figura 13 – $VaR_{0,99}$ para modelos EVT condicional (linha contínua) e incondicional (linha tracejada). VaR condicional é muito mais responsivo a mudanças na volatilidade do ativo. . . . .	90

Figura 14 – Comparação de violações ao $VaR_{0.99}$ para NAREIT. Violações ao EVT condicional (linha contínua) estão marcadas com triângulos enquanto que cruces marcam violações ao EVT incondicional (linha tracejada).	91
Figura 15 – Comparação de violações ao VaR para MSCI-W no período de alta volatilidade. Violações ao EVT condicional e Riskmetrics para as coberturas de 1.0% e 2.5%.	92

# Lista de tabelas

Tabela 1	– Estatísticas descritivas para as perdas durante os períodos dentro da amostra. Período 1 abrange 01/01/2003 a 30/06/2007 e período 2 de 01/01/2011 a 30/06/2015. . . . .	58
Tabela 2	– Teste aumentado de Dickey-Fuller para raiz unitária. . . . .	59
Tabela 3	– Seleção de especificação para cada ativo nos períodos dentro da amostra. . . . .	60
Tabela 4	– Parâmetros garch estimados para períodos dentro da amostra. . . . .	61
Tabela 5	– Resultados EVT e parâmetros da distribuição generalizada de Pareto para períodos dentro da amostra. . . . .	62
Tabela 6	– Porcentagem de violação para cada cobertura. . . . .	64
Tabela 7	– Testes estatísticos para VaR. Teste de Kupiec, $LRuc$ , teste de duração de Christoffersen e Pelletier, $LRdur$ . Modelos testados são: EVT condicional ( $cevt$ ), Normal condicional ( $cnorm$ ), t-Student condicional ( $ct$ ), Riskmetrics ( $riskmetrics$ ), EVT incondicional ( $uevt$ ), Normal incondicional ( $unorm$ ) e t-Student incondicional ( $ut$ ). . . . .	66
Tabela 8	– Sumário do número de rejeições de um modelo bem especificado. Nível de confiança a 95%. . . . .	68
Tabela 9	– Teste Conjunto de Confiança de Modelos. Para cada modelo, período e cobertura o valor p da estatística $range$ é apresentado. . . . .	69
Tabela 10	– Sumário de exclusões do conjunto superior. . . . .	71



# Lista de abreviaturas e siglas

APT	Teoria de precificação por arbitragem - <i>Arbitrage Pricing Theory</i>
BCBS	<i>Basel Committee on Banking Supervision</i>
BIS	<i>Bank for International Settlements</i>
CAPM	Modelo de precificação de ativos de capital - <i>Capital Asset Pricing Model</i>
$ES_\alpha$	<i>Expected Shortfall</i> com intervalo de confiança $\alpha$
EVT	Teoria do Valor Extremo
GEV	Distribuição de Valores Extremos Generalizada
GPD	Distribuição de Pareto Generalizada
MCS	Conjunto de Confiança de Modelos - <i>Model Confidence Set</i>
MSCI Barra	Modelo de precificação de ativos proprietário da <i>Morgan Stanley Capital International</i>
MDA	Domínio de Atração de Máximos
POT	Picos Acima de um Limiar - <i>Peaks over Threshold</i>
$VaR_\alpha$	Valor em Risco com intervalo de confiança $\alpha$
va	variável(eis) aleatória(s)
va iid	variável aleatória independente e igualmente distribuída



# Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	JUSTIFICATIVA	19
1.2	PROBLEMA DE PESQUISA	22
1.3	OBJETIVOS	23
2	REVISÃO DE LITERATURA	25
3	FATOS ESTILIZADOS DE SÉRIES FINANCEIRAS	27
3.1	ATIVOS ISOLADOS	27
3.1.1	<i>Clustering</i> de volatilidade	28
3.1.2	Caudas longas e assimetria	31
3.2	PORTFÓLIOS	32
3.2.1	Correlação entre ativos	32
3.2.2	Dependência nas caudas	33
4	MODELOS DE VOLATILIDADE	35
4.1	FORMALIZAÇÃO DOS MODELOS	35
5	TEORIA DO VALOR EXTREMO	39
5.1	FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE VALORES EXTREMOS GENERALIZADA	39
5.2	EXCESSOS ACIMA DE UM LIMIAR	41
5.3	MODELANDO CAUDAS E MEDIDAS DE RISCO ASSOCIADAS	45
5.4	MEDIDAS CONDICIONAIS DE RISCO	47
6	MODELOS IMPLEMENTADOS	51
6.1	EVT CONDICIONAL	51
6.2	NORMAL CONDICIONAL	53
6.3	T-STUDENT CONDICIONAL	53
6.4	RISKMETRICS	53
6.5	EVT INCONDICIONAL	54
6.6	NORMAL INCONDICIONAL	55
6.7	T-STUDENT INCONDICIONAL	55
7	RESULTADOS EMPÍRICOS	57
7.1	DADOS UTILIZADOS E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS	57
7.1.1	Filtro GARCH	59

7.1.2	Método POT . . . . .	61
7.2	<b>AVALIAÇÃO DOS MODELOS . . . . .</b>	<b>63</b>
7.2.1	Testes estatísticos . . . . .	65
7.2.2	Teste MCS de Hansen . . . . .	68
8	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>75</b>
	<b>ANEXO A – FIGURAS . . . . .</b>	<b>81</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A medição do risco de mercado ao qual os portfólios dos investidores está sujeito é objeto de devoção de esforços tanto por parte das instituições e investidores em geral como por parte dos reguladores. Instituições financeiras - IF em todo o mundo, de acordo com suas regulações locais e com os princípios de Basileia (*Basel Committee on Banking Supervision* - BCBS do Banco de Compensações Internacionais - BIS<sup>1</sup>) são obrigadas a reservar uma parcela de seu capital como provisionamento contra flutuações adversas do mercado, como forma de mitigar seu risco de insolvência.

Estas instituições devem manter seu risco de insolvência controlado, e a percepção externa deve ser tal que não haja desconfiança do público com sua habilidade em controlar este risco. Se a confiança na instituição se esvai e a percepção de risco é elevada, rapidamente uma crise de liquidez pode surgir, com depositantes sacando seus recursos ao mesmo tempo em que outras fontes de *funding* também se tornam escassas. Em tal situação, é natural o banco ou IF, ir ao mercado para vender seus ativos e levantar os recursos necessários. Neste momento uma crise de liquidez no mercado pode levar a uma possível insolvência da IF pois, não há garantias que no mercado aberto os ativos do banco serão justamente avaliados e arrematados.

Uma importante característica das séries de retornos financeiros é sua alta volatilidade, não constante e tampouco seguindo a distribuição Normal. Assim, eventos extremos, como perdas de grande magnitude, acontecem com uma grande frequência e não podem ser descartadas como meros *outliers*, e portanto passaram a atrair a atenção dos participantes do mercado, entre eles os investidores e também os reguladores. Estas observações induziram uma gama enorme de estudos, práticos e teóricos, voltados a explicar o comportamento dos retornos de séries financeiras e modelar de forma adequada as caudas da distribuição destes retornos. Não somente estes estudos são de grande relevância para o gerenciamento de risco nas instituições financeiras, como também são obrigatórios segundo o acordo de Basileia, uma vez que este requer o cálculo do Valor em Risco - VaR, para então a instituição poder projetar o seu nível requerido de capital.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

De acordo com os princípios de Basileia III, (BCBS, 2011; BCBS, 2013a; BCBS, 2014; BCBS, 2017), as instituições financeiras supervisionadas pelos Bancos Centrais devem manter reservas de capital contra riscos de mercado, crédito, liquidez, entre outros. Dentro

---

<sup>1</sup> <http://www.bis.org/bcbs/index.htm?m=3%7C14>

dos riscos de mercado, as duas formas mais usuais de fazer a quantificação destes são os métodos de Valor em Risco - VaR e o *Expected Shortfall* - ES. Este último relacionado ao primeiro, sendo definido como o valor esperado das perdas que excedem o valor VaR calculado para um determinado intervalo de confiança.

Os princípios de Basileia III surgem como uma resposta do sistema financeiro à crise vivida em 2008. Citando o próprio Comitê:

A estrutura de Basileia III é um elemento central da resposta do Comitê de Basileia à crise financeira global. Aborda uma série de deficiências com o marco regulatório pré-crise e fornece uma base regulatória para um sistema bancário resiliente que apoia a economia real. (BCBS, 2017, p. 01, tradução nossa) <sup>2</sup>

Mais recentemente o Comitê de Supervisão Bancária de Basileia se propôs a adotar o *Expected Shortfall* como medida de risco de mercado, (BCBS, 2013b; BCBS, 2016). O Comitê cita a grande importância da escolha da medida de risco e sua calibração, e portanto estas são relevantes para as decisões de política do Banco. Entre as dificuldades encontradas pelo VaR estão mais notadamente sua inabilidade em estimar o "risco de cauda" da distribuição de perdas, uma vez que o VaR não leva em conta a distribuição das perdas acima do valor de corte.

Com o advento da finalização da proposta de Basileia III em BCBS (2017), foi decidido que o ES seria a medida de risco favorita para a abordagem pelo banco chamada de Modelos Internos. Ou seja, os bancos supervisionados devem utilizar o ES para o cálculo do risco de mercado a que estão sujeitos em seus modelos internos. O comitê também se decidiu por um intervalo de confiança de 97,5% para o ES, em contraposição a 99% para o VaR. O comitê espera que esta abordagem para o cálculo da medida de risco de mercado trará benefícios se comparada a antiga abordagem pelo Var, entre elas um modelo com resultados mais estáveis e menor sensibilidade a observações extremas (*outliers*).

VaR é um quantil alto  $\alpha$  da distribuição de perdas de um ativo ou portfólio em um determinado período de tempo, ao passo que ES é o valor esperado das perdas que excedem VaR, para um mesmo período e nível de confiança  $\alpha$ .

O método VaR para cálculo de risco de mercado ao qual um portfólio está sujeito foi primeiramente introduzido através de RiskMetrics (1995), uma metodologia adotada pelo banco J. P. Morgan. Vem desde então sendo amplamente adotado pela indústria financeira e largamente estudado pela academia. Inúmeras variantes do modelo foram propostas e continuam sendo utilizadas com o passar dos anos. Para o cálculo do VaR é necessária

<sup>2</sup> The Basel III framework is a central element of the Basel Committee's response to the global financial crisis. It addresses a number of shortcomings with the pre-crisis regulatory framework and provides a regulatory foundation for a resilient banking system that supports the real economy.

uma suposição acerca da distribuição dos retornos, e por conseguinte do comportamento da cauda desta.

As variações na metodologia original de estimação do VaR surgem principalmente em função de críticas a abordagem proposta, a qual inclui a suposição de retornos independentes e igualmente distribuídos (*iid*), covariâncias constantes entre os ativos de um portfólio e a distribuição normal dos retornos.

Por meio de dois artigos [Artzner et al. \(1997\)](#) e [Artzner et al. \(1999\)](#), foi introduzido na literatura o conceito de medida coerente de risco. Para uma medida ser considerada coerente, primeiramente foram introduzidas quatro propriedades cunhadas através de axiomas, as quais estas medidas deveriam possuir, invariância translacional, sub-aditividade, homogeneidade positiva, e monotonicidade.

Seja  $\rho$  a medida de risco e  $\rho(L)$  o valor desta medida para uma variável aleatória  $L$  representante das perdas de um ativo. A propriedade da invariância a translação nos garante que a medida de risco é definida na mesma unidade que as perdas. Formalmente,  $\rho(L + l) = \rho(L) + l$  para  $l \in \mathbb{R}$ .

A sub-aditividade requer que a soma dos riscos de dois ativos tomados em separados seja maior que o risco destes ativos em conjunto em um portfólio. Assim,  $\rho(L_1) + \rho(L_2) \geq \rho(L_1 + L_2)$ .

Homogeneidade positiva é a propriedade que uma maior posição financeira deve possuir uma medida de risco maior que outra posição de menor valor e mesmo perfil. Matematicamente tem-se que  $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$ .

E por fim a monotonicidade, que guarda grande semelhança ao conceito microeconômico, ao qual prevê que se um ativo é mais arriscado que outro, sua medida de risco deve ser maior. Ou simplesmente,  $\rho(L_1) \geq \rho(L_2)$ , se  $L_1 \geq L_2$ .

O VaR especificamente não possui a propriedade da sub-aditividade para alguns casos. Para contornar este fato, [Acerbi e Tasche \(2002\)](#) propõe o *Expected Shortfall* e comprovam que este é uma medida coerente de risco. Além de ser coerente, o ES possui uma segunda vantagem com relação ao VaR, considerando que o ES nos informa uma medida de tendência central do tamanho das perdas que excedem o valor do quantil VaR. Ou seja, o VaR nos informa apenas que uma proporção  $\alpha$  das perdas serão menores que a medida, mas nada nos informa caso esta perda extraordinária de fato ocorra. Mesmo sendo criticado e demonstrada uma medida não coerente de risco, o VaR continua a ser amplamente utilizado mesmo que agora em conjunto com o ES.

Teoria do valor extremo - EVT, é um ramo da estatística que lida diretamente com eventos raros, extremos. Seu objetivo é modelar o comportamento assintótico de eventos que se distanciam muito da mediana de uma distribuição. Justamente por esta

característica, a EVT está sendo utilizada para modelar riscos que possuem distribuição com caudas longas, um dos fatos estilizados bem conhecidos sobre retornos de ativos financeiros.

Ao utilizar a EVT, e mais especificamente o método conhecido como *peaks over threshold* – POT, se está interessado em modelar apenas a parte da cauda da distribuição das perdas de um ativo financeiro maiores que um determinado valor de limiar  $u$ . É da modelagem desta cauda, portanto, que se calcula a estimativa de VaR.

A teoria do valor extremo vem sendo utilizada nas finanças a algum tempo. Devido as características das séries financeiras, por exemplo a leptocurtose, a distribuição normal para os retornos vem sendo rechaçada, enquanto outras distribuições mais adequadas assumem o posto para descrever o comportamento das perdas e retornos de séries financeiras. A EVT, ao modelar distribuições com caudas longas, pode ser utilizada para esta finalidade.

## 1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Considerando que existem diversas formas de se especificar um modelo de valor em risco, este trabalho busca avaliar através de testes estatísticos a capacidade preditiva de sete modelos distintos de cálculo desta métrica comumente encontrados na literatura, por meio da técnica de *backtesting*. Os modelos comparados são: EVT, normal e t-Student condicionais e incondicionais e o modelo *riskmetrics*. Os testes a serem aplicados abrangem características importantes do VaR como cobertura incondicional, independência entre violações e superioridade do modelo dada uma função de perda adequada.

Estes modelos serão comparados em dois períodos distintos, de 01/01/2003 a 30/06/2007 para o primeiro período dentro da amostra com respectivo período de *backtest* de 01/07/2007 a 31/12/2010, percorrendo a grande crise financeira. Este é um período em que os modelos foram ajustados sem regime de volatilidade corriqueira dos mercados e testados contra um ambiente de alta volatilidade. Chamaremos este primeiro período de alta volatilidade. O segundo período dentro da amostra cobre 01/01/2011 a 30/06/2015 e *backtest* realizado entre 01/07/2015 ao final de 2018, onde as volatilidades do período dentro e fora da amostra são comparáveis. Chamaremos este período de baixa volatilidade.

Os ativos financeiros para os quais os modelos serão testados são os seguintes: o par de moedas EUR/USD; dois índices amplos temáticos, MSCI's Commodity producers (MSCI-C) e Infrastructure (MSCI-I); um índice amplo do mercado de ações, MSCI-World; um índice global de fundos imobiliários, FTSE NAREIT; e finalmente, os rendimentos de 30 anos dos títulos do tesouro americano. Estes ativos foram selecionados por serem, dentro de suas respectivas categorias, os mais representativos em termos de capitalização e liquidez de negociação.

## 1.3 OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é avaliar qual o melhor modelo para aferição de valor em risco, para ativos financeiros de diversos segmentos, se existente tal modelo.

Como objetivo secundário, a partir da análise dos dois períodos distintos de teste, aferir se algum modelo é superior aos demais dados regimes diferentes de volatilidade. O interesse é determinar se em um período de alta volatilidade nos mercados um modelo apresenta performance melhor que os demais e se em regime de baixa volatilidade outro modelo seria mais adequado.

Este trabalho busca avaliar, através de testes estatísticos, a capacidade preditiva de sete modelos distintos de cálculo da métrica de valor em risco comumente encontrados na literatura, por meio da técnica de *backtest*. Os testes aplicados abrangem características importantes do VaR como cobertura incondicional, independência entre violações e superioridade do modelo dada uma função de perda adequada.

O restante desta monografia está assim organizada, uma revisão da literatura pertinente ao problema é apresentada no Capítulo 2, os fatos estilizados de séries temporais financeiras, tanto univariadas quanto séries de portfólios de diversos ativos estão no Capítulo 3, o Capítulo 4 apresenta uma breve revisão teórica de modelos GARCH e suas variantes, a teoria do valor extremo, pedra fundamental do principal modelo avaliado neste trabalho é apresentada no Capítulo 5, enquanto que os modelos implementados estão descritos em detalhes no Capítulo 6, os resultados obtidos destes modelos e os métodos de avaliação destes são apresentados no Capítulo 7 e por fim é apresentada uma conclusão e proposta para trabalhos futuros, em continuidade com os resultados aqui obtidos. Todas as figuras apresentadas neste trabalho, que servem para uma melhor compreensão e visualização dos resultados obtidos, quando referenciadas, estarão contidas no Anexo A.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

A introdução da EVT em dois estágios para a estimação de medidas condicionais de risco pode ser atribuída a [McNeil e Frey \(2000\)](#). Neste artigo os autores propuseram um modelo para a estimação do VaR e ES de forma condicional, tanto para período de um dia como para dez dias a frente, de acordo com o normativo de Basileia vigente a época. Seu modelo, que leva em conta as longas caudas e a natureza estocástica da volatilidade, se ajustam de forma mais fidedigna aos dados. [Daniélsson e Morimoto \(2000\)](#) fizeram uma crítica aos modelos condicionais de cálculo do VaR para o mercado japonês e chegaram a conclusão que um modelo EVT incondicional, inclusive sem o estágio de filtragem inicial, era mais adequado para fins práticos.

[Byström \(2004\)](#) encontrou que ambas abordagens da EVT, máximos em bloco como POT, combinadas com análise de séries temporais tradicional (ARIMA e GARCH), no que se configura uma abordagem condicional para a estimação do VaR, têm os melhores resultados tanto em períodos ditos tranquilos como em épocas de alta volatilidade. Voltando a aplicação da EVT para mercados emergentes, [Gencay e Selcuk \(2004\)](#) utilizaram a teoria de valor extremo para o cálculo de VaR e teste de estresse. Seus resultados apontam que a EVT se torna melhor a medida que o quantil utilizado para o cálculo se eleva. Além disso, encontraram que as caudas da distribuição de retornos se comportam de maneira diferente entre ganhos e perdas. Uma comparação entre diversos modelos de previsão de VaR foi realizada por [Kuester, Mittnik e Paoletta \(2006\)](#). Encontraram que a grande maioria dos modelos subestima o risco, mesmo sendo aceitáveis do ponto de vista regulatório, sendo que o modelo condicional GARCH-EVT está entre as melhores estimações.

[Karmakar e Shukla \(2014\)](#) retomam o modelo em dois estágios e fizeram uma comparação entre o modelo EVT condicional e outros modelos já consagrados no cálculo de VaR em 3 mercados desenvolvidos (EUA, Reino Unido e Japão) e 3 mercados emergentes asiáticos (Índia, Hong Kong e Coreia do Sul). O modelo GARCH adotado no primeiro estágio é diferente para cada mercado, porém com uma particularidade comum, todos são modelos assimétricos. Novamente encontram que o modelo EVT condicional é superior aos demais através de testes de cobertura incondicional e condicional.

[Chavez-Demoulin, Davison e McNeil \(2005\)](#) e [Herrera e Schipp \(2013\)](#) tomam um caminho diferente para modelar a EVT. Enquanto o primeiro adota o método de processos pontuais de auto-excitação<sup>1</sup>, que dadas algumas condições, converge para o método POT, o segundo modela explicitamente as durações de tempo entre as observações de extremos, ou seja, as perdas em excesso ao limiar escolhido. A magnitude destas perdas continua a

---

<sup>1</sup> Para maiores detalhes sobre processos pontuais de auto-excitação, [Hawkes \(1971\)](#) é a referência original.

ser modelada através da distribuição generalizada de Pareto - GPD. Seu modelo é então chamado de *autoregressive conditional duration peaks over threshold model* - ACD-POT.

Rocco (2014) fez uma grande revisão sobre o uso da EVT em finanças. As principais aplicações encontradas foram o teste de suposições para diferentes distribuições dos dados, cálculo de medidas de risco como o VaR e ES, alocação de ativos sob restrições e otimização de portfólios, e no estudo de contágio e dependência entre mercados sob condições de alto estresse.

Mais recentemente a EVT encontrou outras formas de aplicação e cálculo. Chavez-Demoulin, Embrechts e Hofert (2016) sugeriram um modelo onde a frequência e a severidade das perdas podem ser modeladas através da EVT com covariantes. Karmakar e Paul (2016) por sua vez, fizeram uma aplicação do modelo EVT condicional a retornos intra-diários de dezesseis mercados diferentes.

O cálculo de VaR em instituições financeiras e bancos comerciais vem sendo implementado e é requerimento do comitê de Basileia. A EVT entra como uma das metodologias utilizadas neste cálculo, Longin (2000) a utilizou e propôs um modelo para agregar o risco de uma posição de mercado, em contraste a modelos univariados apenas. Testes de estresse podem ser realizados através de sua técnica. Utilizando-se de dados reais de seis grandes bancos comerciais americanos, Berkowitz e O'Brien (2002) analisou a precisão de seus modelos VaR. Ele encontrou que os bancos são amplamente conservadores em suas estimativas de VaR, com níveis de cobertura muito acima dos valores nominais. Wong, Cheng e Wong (2003) promoveu um estudo sobre as implicações da precisão do modelo VaR no gerenciamento do risco de mercado em bancos. Ele adotou os critérios de Basileia para realizar um estudo de *backtest* e verificou que modelos baseados em previsões de volatilidade através de GARCH não estão de acordo com estes critérios por muitas vezes. Já em um estudo recente, O'Brien e Szerszeń (2017) fez uma avaliação dos modelos de risco de mercado de bancos no pré, durante e pós crise financeira de 2008. Encontrou que tanto no pré quanto no pós crise, os bancos se comportaram de maneira excessivamente conservadora, entretanto, durante a crise financeira as violações ao VaR excederam muito seu valor esperado assim como aconteceram de forma agrupada, um sinal de má especificação nos modelos adotados. O autor comparou estes resultados com um modelo baseado em GARCH e verificou que esta alternativa é muito superior aos atuais modelos.

# 3 FATOS ESTILIZADOS DE SÉRIES FINANCEIRAS

Este capítulo discorre acerca de algumas características encontradas em séries financeiras que serão de nosso interesse para a modelagem das medidas de risco. Fatos estilizados de séries financeiras são características comuns encontradas dentre vários ativos isolados ou portfólios de ativos financeiros que foram observadas de forma empírica. Estas características já foram extensamente documentadas e estão presentes em todas as séries financeiras e que portanto, fazem parte do arcabouço da econometria dos mercados financeiros e foram alçadas a condição de fatos.

Este trabalho, concentra-se principalmente nos fatos estilizados em frequências diárias de observação. Muito embora a maior parte destes fatos mantêm-se verdadeiros em outras frequências, para observações de altíssima frequência podem existir outro conjunto de dados e para baixíssimas frequências como plurianuais existe a dificuldade na observação de um conjunto relevante de dados para fazer as inferências necessárias.

Este capítulo será basicamente distribuído entre duas seções, uma contendo os fatos estilizados para ativos financeiros tomados isoladamente, e uma outra seção para fatos estilizados "multivariáveis", ou seja, fatos encontrados nos portfólios de ativos.

Para referências mais completas e aprofundadas acerca do tema em questão, ao leitor é sugerida a leitura do livro-texto, [Campbell et al. \(1997\)](#) e dos artigos, [Pagan \(1996\)](#) e [Cont \(2001\)](#). Em especial, este último artigo além de ser mais recente, trata também das implicações dos fatos estilizados para estimativas e métodos estatísticos usualmente utilizados para analisarmos séries temporais.

## 3.1 ATIVOS ISOLADOS

Para ativos tomados de forma isolada, suas séries temporais de retornos possuem as seguintes características:

- Ausência de autocorrelação;
- Grande autocorrelação nos retornos absolutos ou retornos ao quadrado;
- *Clusters* de volatilidade;
- Vagaroso decaimento nas autocorrelações dos retornos absolutos;
- Distribuição incondicional com caudas longas ou leptocúrticas;

- Distribuição condicional com algum grau de leptocurtose, e;
- Assimetria entre ganhos e perdas.

Ao se entrar na discussão mais detalhada de cada uma destas características adota-se a seguinte notação para séries de retornos financeiros  $X_t = X_1, \dots, X_n$  sendo que estes retornos são obtidos através das primeiras diferenças entre os logaritmos dos preços  $P_t$ , logo  $X_t = \ln(P_t/P_{t-1})$  e  $t = 1, \dots, n$ .

### 3.1.1 *Clustering* de volatilidade

É possível agrupar os fatos estilizados de séries temporais de retornos financeiros listados acima em 3.1 em poucos grupos relevantes. O primeiro destes, aqui chamado de *clustering* de volatilidade, está relacionado aos quatro primeiros itens daquela lista.

Primeiramente a ausência de autocorrelação linear na série de retornos. A função de autocorrelação (acf) de uma série é dada por

$$ACF(\tau) = \text{corr}(X_t, X_{t-\tau}) \quad (3.1)$$

onde *corr* significa a correlação da amostra. Ou seja, a autocorrelação de uma série mede a correlação entre seus componentes e suas defasagens no tempo. Para séries com períodos diários, ou mesmo mais curtos desde que não sejam menores que 15 minutos, a autocorrelação para basicamente todas as séries financeiras de interesse é zero para qualquer defasagem. Eventualmente alguma autocorrelação em defasagens pequenas pode aparecer em uma série, mas este fato está longe de ser observado em numerosos casos e portanto, não pode corresponder a um fato estilizado. Na figura 1 é apresentado o correlograma dos retornos de três ativos financeiros do Brasil, taxa de juros futuros embutida nos contratos de *swap* DI x pré - prazo de 360 dias, taxa *spot* de câmbio do Real brasileiro versus o Dólar norte-americano para venda e índice Bovespa. As séries abrangeram o período entre 01/04/2002 a 31/10/2016. Perceba que  $ACF(0) = 1$  por definição.

Pode-se notar que apesar de algumas defasagem apresentarem, nestas amostras, significância estatística, seus valores são em geral baixos e não existe um padrão claro com defasagens bem determinadas que sejam relevantes para os diversos ativos financeiros. Neste caso não se pode aceitar a autocorrelação linear dos retornos como um fato estilizado que caracterize uma série temporal financeira. Ao se comparar com relações não-lineares, fica bem claro que a relação de dependência intertemporal não existe nos retornos dos ativos. Esta constatação inclusive, ofereceu suporte empírico ao modelo de *random walk* para os preços de ativos, Campbell et al. (1997, capítulo 2) e por conseguinte a teoria da eficiência dos mercados, Fama (1991).

Esta ausência de correlação linear dos retornos dos ativos pode ser explicada pela existência da possibilidade de arbitragem, e um ganho sem o envolvimento de risco, caso

esta correlação existisse. Suponha que um investidor descobrisse esta correlação, ele poderia explorá-la de forma a obter um retorno esperado positivo de seu investimento. É claro que a medida que esta correlação fica evidente para outros investidores, todos estes também se adiantam em tentar explorá-la e a estratégia, juntamente com a correlação que a originou, se esvai. O fato de não existir correlação linear entre os retornos de ativos financeiros, não necessariamente implica que estes sejam independentes, uma vez que sempre é possível que uma relação não-linear exista entre estes. De fato, este é nosso segundo fato estilizado dos retornos financeiros, a correlação entre os retornos absolutos ou ao quadrado.

Os retornos em termos absolutos, ou elevados ao quadrado, exibem grande autocorrelação e persistência, significando que esta correlação decai lentamente. Esta é uma característica bastante conhecida de séries que apresentam volatilidade variável ao longo do tempo e em especial com tendências ao agrupamento (do inglês *clustering*) desta. Ou seja, grandes oscilações, positivas ou negativas, nos retornos de um ativo tendem a serem seguidos de novas grandes oscilações, em qualquer uma das duas direções. Diversos estudos empíricos demonstram esta característica nos retornos de ativos financeiros, [Bollerslev, Chou e Kroner \(1992\)](#), [Cont \(2001\)](#), [Ding, Granger e Engle \(1993\)](#) e [Engle \(1995\)](#). Na [Figura 1](#) a direita, verifica-se as autocorrelações dos retornos absolutos para as três séries anteriormente analisadas, verifique a diferença com relação a coluna a esquerda da mesma figura que apresenta as autocorrelações lineares dos mesmos ativos.

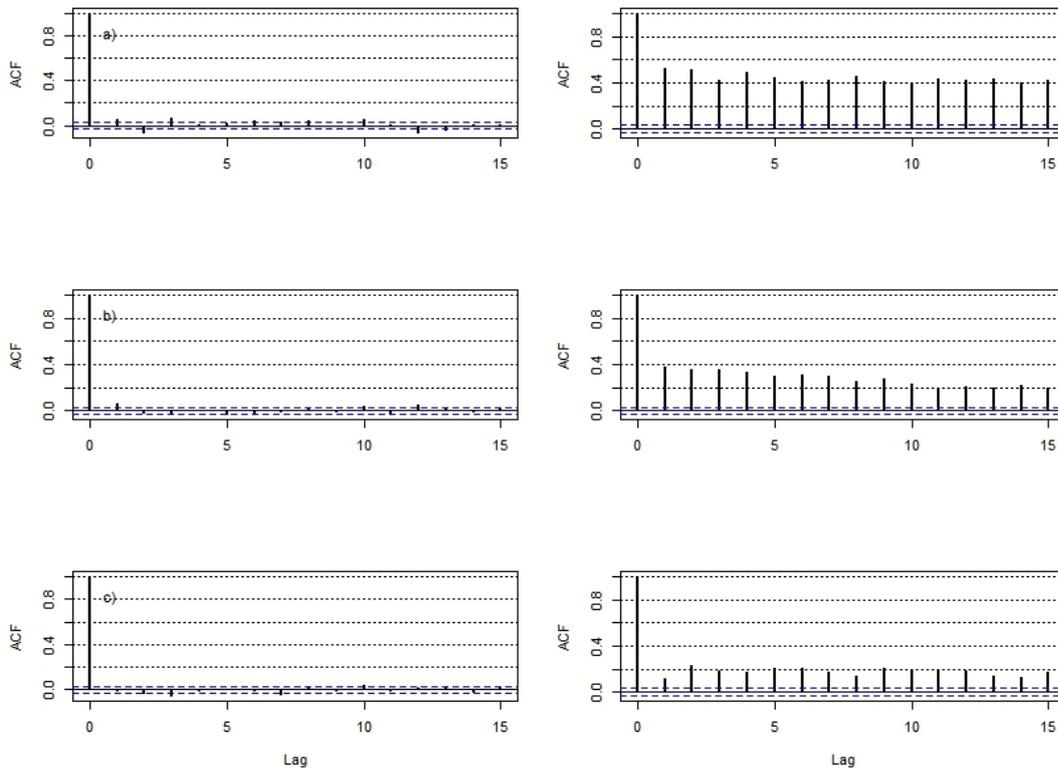
Uma outra relação não-linear nos retornos de ativos é o chamado "efeito alavancagem" ou correlação volatilidade-retorno, onde existe correlação entre os retornos e volatilidades (i.e. retornos ao quadrado) futuras. Esta relação é dada por:

$$L(\tau) = \text{corr}(X_{t+\tau}^2, X_t) \quad (3.2)$$

Esta relação inicia-se negativa e tende a zero para defasagens maiores sem possuir valores positivos significantes, o que sugere assimetria nas relações entre retorno e volatilidades. Enquanto retornos positivos têm pouca influência na volatilidade futura, os choques negativos elevam significativamente as volatilidades.

O fato estilizado de *clustering* de volatilidade pode ser entendido como a tendência a grandes variações nos retornos estarem agrupadas na linha do tempo. Este fato sugere que as volatilidades condicionais estão continuamente e, de alguma forma previsivelmente, mudando ao longo do tempo. Esta constatação deu origem aos modelos de heterocedasticidade condicional auto-regressiva e suas generalizações, inicialmente conhecidos como ARCH e GARCH, introduzidos por, [Engle \(1982\)](#) e [Bollerslev \(1986\)](#) respectivamente. Estes modelos hoje são largamente aceitos na comunidade acadêmica e derivaram inúmeras variantes, sendo talvez o modelo econométrico para retornos e volatilidades de ativos financeiros mais utilizados e encontrados em livros textos, como em [Tsay \(2010\)](#), [Pfaff \(2013\)](#) e [McNeil, Frey e Embrechts \(2015\)](#). Os modelos GARCH apresentam suportam

Figura 1 – Autocorrelação dos retornos de a) juros futuros, b) câmbio e c) índice de ações. À esquerda estão as autocorrelações lineares, pouco significativas. À direita, forte autocorrelação e lento decaimento nos retornos absolutos. As linhas tracejadas denotam o intervalo de confiança a 95%.

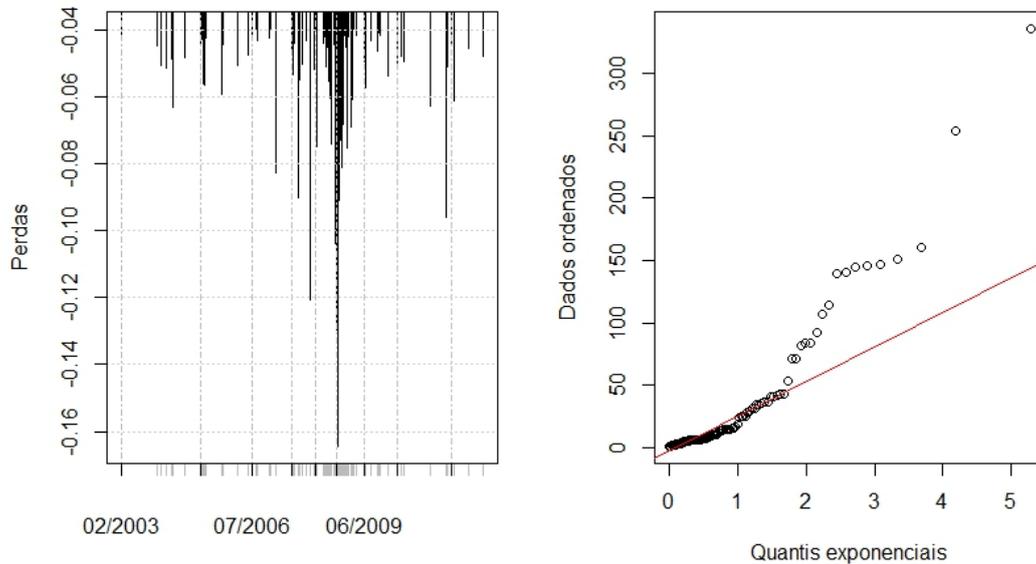


Fonte: Banco Central do Brasil e Yahoo! Finance, 2018.

vários dos fatos estilizados das séries de retornos financeiros, entre eles o *clustering* de volatilidade e caudas longas, com curtose em excesso à normal.

Uma forma de verificar o fenômeno de agrupamento de volatilidade é perceber que as grandes variações, acima de um determinado valor, nos retornos de um ativo **não** seguem um processo de Poisson homogêneo e portanto, os intervalos entre estes eventos (i.e. grandes retornos) não seguem uma distribuição exponencial como seria de se esperar. Se o processo atribuído a geração de retornos fosse de fato *iid*, estes retornos apresentariam valores extremos segundo um processo de Poisson, e como tal, o intervalo de tempo entre estes extremos deveria ser distribuído exponencialmente. Porém isto não ocorre na prática, e o que se verifica são eventos extremos agrupados de forma que não estão exponencialmente distribuídos. Na [Figura 2](#) são apresentadas as 100 maiores perdas para a Cia. Vale do Rio Doce e um gráfico QQ destes retornos contra uma distribuição exponencial de referência. Percebe-se como os pontos neste gráfico divergem consideravelmente da distribuição de referência.

Figura 2 – As 100 maiores perdas de VALE5 entre 2003 a 2013 e a distribuição do espaço temporal entre estas perdas. A distribuição do espaço entre as perdas extremas diverge largamente de uma distribuição exponencial.



Fonte: Yahoo! Finance, 2018.

### 3.1.2 Caudas longas e assimetria

O restante dos fatos estilizados de ativos isolados recaem sobre este grupo. De forma natural, as primeiras tentativas de modelagem de risco nos ativos financeiros supunha uma distribuição Normal de seus retornos, ([RISKMETRICS, 1995](#)), a qual provou-se ser um modelo precário, especialmente com relação a massa de probabilidade encontrada nas caudas.

Em outras palavras, a distribuição Normal não prevê eventos extremos com frequência, contrariando a prática em que perdas significativas ocorrem constantemente. Diversos testes podem ser aplicados para a verificação da normalidade de uma distribuição, desde um simples gráfico QQ, até testes numéricos como Jarque e Bera, e Shapiro e Wilk.

Em comum estes testes fazem uso da aferição do terceiro e/ou quarto momento em torno da média da amostra dos retornos. Enquanto o terceiro momento é a assimetria de uma distribuição, o quarto é chamado de curtose, e pode ser entendido como o quanto as caudas de uma distribuição possuem mais massa que uma Normal (i.e. curtose em "excesso", já que a Normal possui curtose igual a 3).

De forma geral os ativos financeiros apresentam tanto assimetria em seus retornos, sendo esta frequentemente negativa indicando uma quantidade maior de retornos abaixo da média, como também apresentam curtoses em excesso de forma quase incontestável

quando se está trabalhando com observações diárias ou até mesmo semanais, [McNeil, Frey e Embrechts \(2015\)](#), tabela 3.2, p. 86).

Esta constatação sugere que as caudas das distribuições de retornos não são gaussianas, e sim que se comportam segundo uma regra de potência para o seu decaimento, ao contrário do decaimento exponencial de uma Normal. Inúmeras candidatas a melhor distribuição de retornos são sugeridas na literatura, entre elas as distribuições hiperbólicas, generalizadas hiperbólicas, Normal inversa Gaussiana, etc.<sup>1</sup>

## 3.2 PORTFÓLIOS

Além dos fatos estilizados retratados na seção anterior para ativos tomados de forma isolada, o gerenciamento de risco também se interessa em como estes fatos interagem entre diversos ativos, que podem ser considerados em um portfólio. Nesta situação, o gerenciamento de risco deve fazer uma análise das propriedades estatísticas da distribuição conjunta dos retornos. Portanto, nesta seção serão adicionados alguns fatos estilizados encontrados em portfólios de ativos, que por sua natureza são multivariados.

Considere uma série multivariada de retornos,  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ . Sendo cada componente  $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$  para  $j = 1, \dots, d$ , onde  $d$  é o número de ativos no portfólio. Fatos estilizados de séries multivariadas incluem:

- Pouca evidência de correlação cruzada, a não ser em retornos contemporâneos;
- Alta correlação cruzada entre retornos absolutos;
- Correlação entre retornos contemporâneos varia ao longo do tempo, e;
- Dependência nas caudas. Retornos extremos geralmente são coincidentes dentre várias séries.

### 3.2.1 Correlação entre ativos

As primeiras duas observações acima são extensões dos casos univariados. O retorno de um ativo na data  $t$  apresenta pouca ou nenhuma correlação com o retorno de outro ativo em data  $t + h$  (com  $h > 0$ ), por exemplo. Ao passo que estas correlações cruzadas, quando tomadas em seus valores absolutos ou seus quadrados, apresentam alta significância. Este fato pode ser entendido que momentos de alta volatilidade entre os ativos são coincidentes, e como a volatilidade no caso univariado é autocorrelacionada, se torna evidente a correlação cruzada no caso multivariado.

---

<sup>1</sup> Ver em, [Pfaff \(2013\)](#).

Para os retornos contemporâneos, a correlação cruzada é relevante e denota o fato empírico que existem fatores em comum, dentro de um mercado, que afetam todos os ativos nele negociados. Entretanto esta correlação não é constante no tempo, de fato, a covariância entre os ativos não é constante no tempo e é objeto de intensos estudos, pois é uma importante ferramenta para a construção de portfólios.

A matriz de covariâncias  $\mathcal{C}$  entre os retornos dos ativos  $i$  e  $j$  pode ser definida como:

$$\mathcal{C} = \text{cov}(X_i, X_j). \quad (3.3)$$

A covariância entre dois ativos pode ser descrita através do produto entre suas volatilidades e sua correlação  $\rho_{ij}$  por:  $\mathcal{C} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ . De acordo com o fato estilizado de heterocedasticidade para o caso univariado, mesmo que a correlação entre os ativos seja constante, a covariância entre eles pode não ser, já que suas volatilidades são heterocedásticas.

A matriz de covariâncias pode ser decomposta em suas componentes, uma matriz diagonal com as volatilidades dos ativos  $\Sigma(t) = \text{diag}(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots)$  e uma matriz simétrica de correlações  $C = [\rho_{ij}]$ :

$$\mathcal{C} = \Sigma(t) C \Sigma(t). \quad (3.4)$$

Uma importante característica da matriz de correlações para portfólios com muitos ativos é sua decomposição em autovalores e autovetores, que tipicamente são interpretados através de fatores econômicos comuns aos ativos presentes na carteira. Estudos empíricos como em [Laloux et al. \(2000\)](#) mostram que, além do autovalor de maior magnitude, cujo autovetor em geral é interpretado como uma *proxy* de mercado, apenas outros dez ou pouco mais autovalores possuem relevância para determinar os retornos do portfólio, ou seja, apenas outros poucos fatores são determinantes para a observação dos retornos de ativos financeiros, isto em carteiras com centenas de ativos. Esta observação corrobora o racional por trás de modelos como CAPM, APT e, agora em voga, modelos de fatores como o MSCI Barra.

### 3.2.2 Dependência nas caudas

Uma das grandes críticas ao uso da matriz de correlações na construção de portfólios é a natureza não linear das dependências entre ativos. Se a relação de dependência entre dois ativos for, por exemplo, muito forte apenas para retornos extremos, mas insignificante no centro da distribuição, a correlação entre estes ativos será nula, mesmo estando bastante claro que em movimentos bruscos de mercado estes ativos caminham juntos.

O coeficiente de correlação de Pearson, tipicamente utilizado para estimar as correlações entre os ativos, tem por suposição implícita que as distribuições marginais das séries são do tipo elípticas, onde a distribuição Normal é um caso particular. Caso as distribuições dos retornos não esteja contemplada nesta classe, o coeficiente de correlação não captura a estrutura de dependência entre os ativos.

E a crítica é mais severa quando se está lidando com dependência nas caudas das distribuições de retorno, que é o objeto de análise principal do gerenciamento de risco. Nestes casos, de dependência apenas nas caudas, o coeficiente de correlação falha justamente onde ele é mais necessário.

Para contornar este problema, a literatura de finanças vem pesquisando o uso de Cópulas como uma forma de modelar as dependências nas caudas dos retornos dos ativos sem ter necessariamente de fazer suposições acerca da distribuição conjunta destes. Cópulas expressam a dependência com relação ao quantil que se está trabalhando, elas são especialmente úteis para nos informar a probabilidade condicional de uma grande perda em um ativo, dado que outro ativo também tenha um forte movimento adverso, por exemplo. Aplicações da teoria de Cópulas em finanças podem ser encontradas em [Cherubini, Luciano e Vecchiato \(2004\)](#) e [Bouyé et al. \(2000\)](#).

## 4 MODELOS DE VOLATILIDADE

Neste capítulo serão apresentados alguns dos modelos mais conhecidos para modelagem de volatilidade de séries temporais heterocedásticas. Sem dúvida o modelo mais utilizado é o GARCH, proposto por [Bollerslev \(1986\)](#) e suas variantes. Dentre estas variantes estão os conhecidos modelos *Threshold GARCH* de [Glosten, Jagannathan e Runkle \(1993\)](#) e *Exponential GARCH* de [Nelson \(1991\)](#). A volatilidade em séries temporais possui inúmeras aplicações em finanças, dentre elas o cálculo de medidas de risco, objeto de estudo deste trabalho.

Uma importante característica da volatilidade de ativos financeiros é que ela não é diretamente observável, sendo portanto, uma variável latente. Por não ser possível observá-la, a volatilidade deve ser necessariamente estimada, e sempre sujeita a erros de modelagem e incerteza das estimações, fatos inerentes a econometria.

Muito embora a volatilidade não seja diretamente observável, ela possui importantes características comuns entre os ativos, que foram estudadas no capítulo 3, dentre elas a presença de *clusters* de volatilidade, valores finitos de volatilidade, ou seja, estacionariedade e efeito alavancagem, quando a volatilidade reage diferentemente para choques positivos e negativos.

Os efeitos garch são importantes por serem bastante gerais. Verifica-se empiricamente que a maioria das famílias de modelos atualmente em uso na econometria exibem erros condicionalmente heteroscedásticos quando aplicados a séries financeiras. A heteroscedasticidade destas séries não desapareceu com a adoção de modelos mais sofisticados que passaram a incorporar os efeitos garch e portanto, até os dias atuais a especificação de modelos GARCH permite fazer estimativas com maior precisão e prever a volatilidade.

### 4.1 FORMALIZAÇÃO DOS MODELOS

Os modelos do tipo GARCH partem do pressuposto que a variância de uma série temporal, e portanto sua volatilidade, é condicionalmente determinada por um modelo autorregressivo, sem que os retornos propriamente ditos destas séries sejam serialmente correlacionados. Desta forma é interessante analisar estes modelos a partir de suas equações descritivas da média e da variância condicional, onde a média é o retorno do ativo e a raiz da variância a sua volatilidade.

**Definição 4.1** (GARCH). Seja  $r_t$  o retorno de um ativo no período  $t$ ,  $\sigma_t^2$  a variância deste retorno e  $Z_t$  um choque aleatório do tipo ruído branco padronizado (i.e. média zero

e variância unitária), então um modelo GARCH(p, q) pode ser definido pelo conjunto de equações:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (4.2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.3)$$

onde  $\omega$ ,  $\alpha_i$  e  $\beta_j$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots\}$  são maiores que zero para garantir a positividade de  $\sigma_t^2$  e  $\varepsilon_t$  é conhecido como choque ou inovação da série de retornos.

Este modelo possui várias características desejáveis do ponto de vista de adequação aos fatos estilizados de séries temporais financeiras. Primeiramente é possível demonstrar que o valor esperado condicional para os retornos é  $E[r_t | \mathcal{G}_{t-1}] = \mu_t$ , onde  $\mathcal{G}_{t-1}$  é o conjunto de informações disponíveis ao fim do período  $t - 1$  e  $\mu_t$  é a modelagem para os retornos da série, por exemplo, um modelo ARMA. Para o retorno  $r_t$  não possuir autocorrelação serial, como sugere a evidência empírica, basta modelar  $\mu_t$  para que este não apresente a correlação indesejada.

A variância condicional das inovações  $\varepsilon_t$  é tal que  $E[\varepsilon_t^2 | \mathcal{G}_{t-1}] = E[\sigma_t^2 z_t^2 | \mathcal{G}_{t-1}] = \sigma_t^2$ , ou seja, a variância dos retornos é de fato determinada pela equação de  $\sigma_t^2$ .

A equação 4.3 pode ser rearranjada considerando uma nova variável,  $\eta_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ , com  $E[\eta_t] = 0$  e  $cov(\eta_t, \eta_{t-i}) = 0$  para  $i \geq 1$ , que resulta em:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_{t-j} \quad (4.4)$$

Ou seja, o modelo GARCH é uma aplicação de um modelo ARMA para o quadrado das inovações dos retornos. Através da equação 4.4 é possível demonstrar que a variância incondicional dos retornos, também conhecida como variância de longo prazo é:

$$var(\varepsilon) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)} \quad (4.5)$$

dado que os parâmetros  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  satisfaçam as condições para estacionariedade de um modelo ARMA, ou seja,  $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ .

Ademais, pode ser demonstrado, como em Tsay (2010, p. 165) que, dada algumas condições de regularidade, mesmo com uma inovação padrão  $Z_t$  normalmente distribuída, os retornos  $r_t$  apresentarão curtose em excesso, um dos fatos estilizados mais marcantes das séries financeiras.

Empiricamente é sabido que existe uma assimetria nos choques de volatilidade das séries financeiras, choques positivos e negativos possuem impactos diferenciados na volatilidade condicional estimada. Como este impacto assimétrico não é contemplado no modelo GARCH padrão, torna-se necessária a criação de modelos assimétricos, entre eles o TGARCH e EGARCH.

O modelo TGARCH é uma destas variantes que busca tratar o efeito alavancagem através da introdução de um novo parâmetro e uma função de sinalização caso a inovação seja negativa. Segue a definição de um modelo TGARCH.

**Definição 4.2** (TGARCH). Um modelo TGARCH(p, q) assume uma equação de variância conforme segue:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}^\varepsilon) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-1}^2 \quad (4.6)$$

onde  $I_{t-i}^\varepsilon$  é a função indicador de  $\varepsilon_{t-i} < 0$ , ou seja:

$$I_{t-i}^\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon_{t-i} < 0, \\ 0 & \text{se } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

onde  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$  e  $\beta_i$  são parâmetros não negativos e respeitam condições similares ao modelo GARCH quanto a estacionariedade.

Este modelo possui volatilidade assimétrica, para choques  $\varepsilon_{t-i}$  positivos, a contribuição marginal deste choque para  $\sigma_t^2$  é  $\alpha_i$ , enquanto que para  $\varepsilon_{t-i} < 0$  a contribuição deste choque para a variância é  $\alpha_i + \gamma_i$ .

Esta assimetria nos impactos causados por choques positivos ou negativos na variância consegue capturar o chamado efeito alavancagem, o qual se apresenta como períodos com retornos negativos, em geral, apresentam maior volatilidade que períodos com retornos positivos. Este modelo também é amplamente conhecido como GJR-GARCH, devido as iniciais dos nomes de seus autores.

O modelo EGARCH por sua vez, também trata os choques com impactos assimétricos na volatilidade através da função exponencial, daí seu nome.

**Definição 4.3** (EGARCH). Um modelo do tipo EGARCH(p, q), possui a seguinte equação de variância:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i Z_{t-i} + \gamma_i (|Z_{t-i}| - E[|Z_{t-i}|])) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2 \quad (4.7)$$

onde os coeficientes  $\alpha_i$  capturam o efeito de sinal do choque e os parâmetros  $\gamma_i$  encompassam o efeito tamanho.

Para uma inovação padrão normalmente distribuída,  $Z_t \sim N(0, 1)$ , o valor esperado de seu absoluto é:  $E[|Z_t|] = \sqrt{2/\pi}$  e a expressão  $|Z_t| - E[|Z_t|]$  forma uma sequência *iid* com média zero. A assimetria de  $\sigma_t^2$ , para um EGARCH(1, 1) por exemplo, pode ser verificada pela seguinte relação:

$$\sigma_t^2 = (\sigma_{t-1}^2)^{\beta_1} e^{\omega} \begin{cases} e^{(\alpha_1 + \gamma_1)Z_t - \gamma_1 E[|Z_t|]} & \text{se } Z_t \geq 0, \\ e^{(\alpha_1 - \gamma_1)Z_t - \gamma_1 E[|Z_t|]} & \text{se } Z_t < 0 \end{cases}$$

Algumas propriedades do modelo EGARCH podem ser prontamente verificadas, como sua variância incondicional que é dada por  $var(\varepsilon) = \exp[\omega/(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j)]$  e suas condições de estacionariedade e invertibilidade seguem aquelas de um modelo ARMA(p, q).

Uma das grandes vantagens ao se utilizar um modelo EGARCH é que não existe a necessidade de se restringir os valores dos parâmetros para a positividade apenas. Como a variância condicional é obtida através da exponenciação da equação 4.7, o valor encontrado sempre será positivo, independentemente do sinal dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$ .

Modelos GARCH têm encontrado diversas aplicações no mercado financeiro, dentre elas previsão de volatilidade, cálculo de medidas de risco, construção de índices, estratégias envolvendo compra ou venda de volatilidade e a criação e precificação de instrumentos derivativos, [Engle, Focardi e Fabozzi \(2012\)](#) apresenta uma concisa revisão desta literatura e aplicações. Neste trabalho, os modelos do tipo GARCH ou suas variantes devem ser utilizados como um filtro em primeiro estágio para o cálculo de Valor em Risco, conforme será explicitado no Capítulo [Capítulo 6](#).

# 5 TEORIA DO VALOR EXTREMO

Teoria do valor extremo (EVT da sigla em inglês) é um ramo da estatística que lida diretamente com eventos raros, extremos. Seu objetivo é modelar eventos que se distanciam muito da mediana de uma distribuição. Justamente por esta característica, a EVT está sendo utilizada para modelar riscos que possuem distribuição com caudas longas, um dos fatos estilizados dos retornos de ativos financeiros.

Ao se utilizar a EVT, e mais especificamente o método conhecido como *peaks over threshold* – POT, interessa modelar apenas a parte da cauda da distribuição das perdas de um ativo financeiro maiores que um determinado valor de limiar  $u$ . É da modelagem desta cauda, portanto, que são retiradas as estimativas de risco  $VarR_\alpha$  e  $ES_\alpha$ .

## 5.1 FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE VALORES EXTREMOS GENERALIZADA

Considere uma amostra de uma variável aleatória cujas observações sejam independentes e igualmente distribuídas (*va iid*)  $L_i, i \in \mathbb{N}$  que represente as perdas financeiras de um determinado ativo.

A EVT está interessada em investigar o comportamento da distribuição dos máximos desta *va iid* dados por  $M_n = \max(L_1, \dots, L_n)$  para vários valores de  $n$  e a medida que  $n \rightarrow \infty$ . A sequência  $M_n$  é chamada de máximos em bloco e é possível demonstrar que a única distribuição para a qual  $M_n$  converge com  $n \rightarrow \infty$  é a distribuição de valores extremos generalizada (GEV, da sigla em inglês).

Para tanto, é necessário normalizar esta sequência de máximos de forma que sua distribuição seja convergente para uma distribuição  $H(x)$  não-degenerada<sup>1</sup>. Seja  $F(x)$  a distribuição original de uma variável aleatória *iid*, é possível normalizar seus máximos em bloco através da relação  $M_n^* = (M_n - d_n)/c_n$  de forma que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x) \quad (5.1)$$

Em outras palavras, para determinadas sequências  $c_n$  e  $d_n$  a serem escolhidas, existe uma distribuição de  $H(x)$  não-degenerada a qual representa a distribuição dos máximos em bloco de  $F(x)$ .

<sup>1</sup> Distribuição degenerada é aquela cuja densidade de probabilidade está totalmente concentrada em apenas um ponto de seu domínio.

A potenciação de  $F$  em  $n$  deriva diretamente da suposição que a variável aleatória é iid, enquanto que a transformação de  $x \rightarrow c_n x + d_n$  é a normalização dos máximos em bloco.

**Definição 5.1** (MDA). Domínio de máxima atração, se a equação (5.1) é válida para uma  $H$  não-degenerada, então se diz que  $F \in MDA(H)$ ,  $F$  pertence ao domínio de máxima atração de  $H$ .

**Teorema 5.2** (Fisher-Tippett, Gnedenko). Se  $F \in MDA(H)$  para alguma  $H$  não-degenerada, então  $H$  deve ser uma distribuição do tipo de valores extremos generalizada – GEV.

O teorema 5.2 foi estabelecido através de três artigos, [Fisher e Tippett \(1928\)](#), [Gnedenko \(1941\)](#), [Gnedenko \(1943\)](#).

**Definição 5.3** (GEV). Distribuição de valores extremos generalizada, é definida por sua p.d.f (função densidade de probabilidades) a qual é dada por:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & \xi = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

O parâmetro  $\xi$  (leia-se qsi) é conhecido como o parâmetro de forma da distribuição e dependendo deste valor tem-se diferentes tipos de distribuição (casos particulares da GEV). Quando  $\xi = 0$  a distribuição resultante é uma Gumbel, quando  $\xi > 0$  uma Fréchet surge, e por fim quando  $\xi < 0$  tem-se uma Weibull.

Tome-se como exemplo a distribuição exponencial e calculando seu MDA verifica-se que este encontra-se entre umas das distribuições GEV. Uma distribuição exponencial é caracterizada pela seguinte função de distribuição (c.d.f):

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x}, \beta > 0 \text{ e } x \geq 0$$

Escolhendo as sequências  $c_n = 1/\beta$  e  $d_n = \ln n/\beta$  pode-se substituir diretamente na equação (5.1) e calcular  $H(x)$ .

$$F^n(c_n x + d_n) = \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\right)^n = H(x)$$

Fazendo uma simples substituição de variáveis,  $i = -e^{-x}$ , então:

$$H(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

Que é o limite fundamental  $e^i$ , o qual substituindo novamente  $i$  tem-se que:

$$H(x) = \exp(-e^{-x}) = H_0(x), \text{ Distribuição Gumbel}$$

Ou seja, a distribuição exponencial pertence ao *MDA* da distribuição Gumbel, a qual por sua vez é um dos casos particulares da *GEV* quando  $\xi = 0$ .

Para este trabalho não é necessário calcular a qual *MDA* pertencem nossas distribuições, bastando saber que basicamente todas as distribuições contínuas de utilidade prática estão contidas em  $MDA(H_\xi)$  para algum valor de  $\xi$ .

## 5.2 EXCESSOS ACIMA DE UM LIMIAR

O método conhecido como POT, para calcular a função de distribuição dos valores que excedem um determinado limiar de um conjunto de dados vem sendo empregado no mundo financeiro para ajustar as caudas das distribuições de retornos, ou perdas, dos ativos. Este método é preferido a teoria clássica de valores extremos (e.g. máximos em bloco), pois, desperdiça uma quantidade menor de dados da série original. Qualquer valor que exceda o limiar pré-determinado é considerado na distribuição dos excessos. Esta distribuição dos valores da série que estão acima de um determinado limiar  $u$  é definida como:

**Definição 5.4** (Distribuição dos excessos). Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição c.d.f  $F$ . A distribuição dos excessos sobre um limiar  $u$  tem a seguinte função de distribuição:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (5.3)$$

para  $0 \leq x < x_F - u$ , onde  $x_F \leq \infty$  é o limite direito da distribuição  $F$ .

Ou seja, a função distribuição dos excessos sobre um limiar  $u$  é a probabilidade condicional que um valor  $X$  retirado dos dados subtraído de  $u$  (o excesso) seja menor que um dado quantil  $x$ , sabendo-se que  $X$  é maior que  $u$ . Uma importante distribuição que surge na modelagem dos excessos sobre um limiar é a distribuição de pareto generalizada – GPD, que segue.

**Definição 5.5** (GPD). Distribuição de Pareto Generalizada é definida por sua função de distribuição:

$$G_{\xi, \beta(u)}(X) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta(u)}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta(u)}\right), & \xi = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $\beta > 0$ , e  $x \geq 0$  quando  $\xi \geq 0$  ou  $0 \leq x \leq -\beta/\xi$  quando  $\xi < 0$ .

Os parâmetros  $\xi$  e  $\beta$  são conhecidos respectivamente como parâmetros de forma e escala da distribuição. Na figura 3 abaixo, são mostradas três parametrizações para a função de distribuição acumulada (c.d.f) e para a densidade de probabilidades (p.d.f) de GPD com parâmetro  $\xi$  iguais a  $-0,5$ ,  $0$  e  $0,5$  enquanto que o parâmetro de escala  $\beta$  é mantido constante e igual a  $1$ . Perceba como para  $\xi < 0$  a p.d.f tem um limite direito que é dado por  $-\beta/\xi$  a partir do qual os valores de  $g(x)$  são zero.

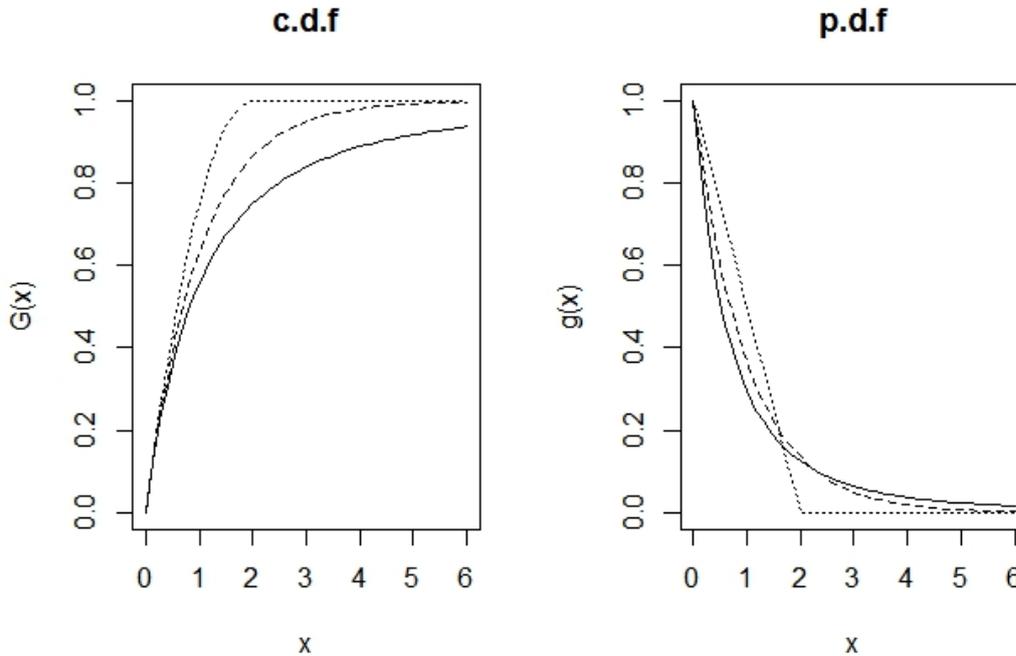


Figura 3 – Três parametrizações para uma GPD. A linha sólida corresponde a  $\xi = 0,5$ , a linha pontilhada a  $\xi = -0,5$  e a linha tracejada a  $\xi = 0$ .

A distribuição de Pareto generalizada tem papel fundamental na teoria de valor extremo em função do teorema de Pickands-Balkema-de Haan (Pickands (1975) e Balkema e Haan (1974)) conforme abaixo:

**Teorema 5.6** (Pickands-Balkema-de Haan). Pode ser encontrada uma função  $\beta(u)$  tal que:

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

se e somente se  $F \in MDA(H_\xi)$  para  $\xi \in \mathbb{R}$ .

O que este teorema nos diz é que para distribuições as quais os máximos em bloco normalizados convergem para uma GEV (na forma da equação (5.2)), então a distribuição dos excessos acima de um limiar destas mesmas distribuições convergem para uma GPD, dado um valor de limiar  $u$  adequado.

**Suposição 5.7.** Seja  $F$  a distribuição de perdas com limite direito  $x_F$ , assuma que para um valor limiar alto o suficiente  $u$  tem-se que  $F_u(x) = G_{\xi,\beta}(x)$ , onde  $F_u(x)$  denota a distribuição dos excessos de  $x$  em relação ao valor de limiar  $u$ , para  $0 \leq x < x_F - u$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $\beta > 0$ .

Esta é uma suposição, uma vez que a distribuição dos excessos não segue exatamente uma GPD, mas apenas tende a esta distribuição dado um limiar  $u$  alto e uma amostra de dados grande o suficiente.

Dada a parametrização de uma GPD, é interessante saber o valor esperado desta distribuição, uma vez que esta medida de valor central fornece importante informação sobre a quantidade de risco que se está buscando medir, assim como a informação de que a própria distribuição foi ajustada aos dados de forma satisfatória, como será demonstrado adiante.

O valor esperado de uma variável aleatória não negativa pode ser computado através da integral de sua cauda,  $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$ . A cauda da GPD é, para  $\xi \neq 0$ ,  $(1 + \xi x/\beta(u))^{-1/\xi}$

Bastando, portanto, integrar em relação a  $x$  sobre o domínio deste, que é de 0 a  $\infty$ .

$$\int_0^{\infty} (1 + \xi x/\beta(u))^{-1/\xi} dx$$

Desta forma, o valor esperado de uma GPD  $G_{\xi,\beta(u)}(X)$ , ou seja, sua média, converge para valores de  $\xi < 1$  e é dado pela seguinte equação:

$$E [G_{\xi,\beta(u)}(X)] = \frac{\beta(u)}{1 - \xi} \quad (5.5)$$

**Definição 5.8** (função média dos excessos). A função média dos excessos de uma variável aleatória  $X$  com média finita é dada por:

$$e(u) = E(X - u | X > u) \quad (5.6)$$

Ou seja, a equação (5.6) representa o valor esperado da função de distribuição dos excessos dada pela Definição 5.4. Ela representa a média de  $F_u$  como uma função do limiar  $u$ . Esta função por vezes também é conhecida como função média de vida residual (*mean*

*residual life function*), sendo encontrada esta denominação em alguns pacotes de *software* estatísticos.

Para uma variável distribuída na forma de uma GPD, o parâmetro de escala é uma função linear em  $u$  dado por  $\beta(u) = \beta + \xi u$ , Embrechts, Klüppelberg e Mikosch (1997, Teorema 3.4.13(e)). Utilizando-se deste fato e da equação (5.5) chega-se ao cálculo da função média dos excessos para uma GPD, dada por:

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \quad (5.7)$$

onde  $0 \leq u < \infty$  se  $0 \leq \xi < 1$  e  $0 \leq u \leq -\beta/\xi$  se  $\xi < 0$ . É possível observar que de fato a função média dos excessos em uma GPD é linear em  $u$ . Esta é uma característica importante de uma GPD e que nos auxilia a escolher um valor adequado do limiar  $u$  de tal forma que a Suposição 5.7 faça sentido.

Assim, quando analisando uma determinada distribuição de perdas  $F$  e deseja-se ajustar a cauda desta distribuição, ou seja, as perdas acima de um dado valor limiar  $u$  a uma GPD  $G_{\xi, \beta}(x)$  é necessário primeiramente determinar um valor adequado de  $u$  de modo que a Suposição 5.7 de que  $F_u(x) \rightarrow G_{\xi, \beta}(x)$  seja válida. Um método frequentemente utilizado é o gráfico da função média dos excessos com relação a  $u$ . Analisando este gráfico, escolhe-se o menor valor de  $u$  para o qual a partir deste ponto a relação  $e(u)$  vs  $u$  torna-se linear.

Deseja-se o menor valor de  $u$  para o qual a relação é linear pois, mesmo o método POT implica em grande perda de dados da série temporal, já que apenas os valores acima deste limiar são utilizados para fazer a estimação dos parâmetros  $\xi$  e  $\beta$  da GPD. Portanto, existe um *trade-off* na escolha do valor limiar  $u$ , escolhendo um valor muito baixo haverá uma boa quantidade de dados para estimar os parâmetros da GPD, mas a própria distribuição resultante não será GPD, uma vez que não se estará trabalhando na região onde a relação  $e(u)$  vs  $u$  é linear. Por outro lado, um valor limiar muito alto impõe o custo de trabalhar com poucos dados para fazer a estimação dos parâmetros da distribuição e por conseguinte, os erros padrões dessas estimativas serão elevados.

**Lema 5.9.** Sob a Suposição 5.7 segue que  $F_v(x) = G_{\xi, \beta + \xi(v-u)}(x)$  para qualquer valor limiar  $v \geq u$ .

Logo, a distribuição dos excessos sobre limiares mais altos que  $u$ , também segue uma GPD com o mesmo parâmetro de forma  $\xi$  e parâmetro de escala que cresce linearmente com este limiar mais alto  $v$ . Se  $\xi < 1$ , a média desta nova GPD converge e é dada por:

$$e(v) = \frac{\beta + \xi(v - u)}{1 - \xi} = \frac{\xi v}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \quad (5.8)$$

Esta é a função média dos excessos sobre limiares mais altos, e está definida para  $u \leq v < \infty$  se  $0 \leq \xi < 1$  e,  $u \leq v \leq u - \beta/\xi$  se  $\xi < 0$ .

Esta função é muito útil para calcular o  $ES_\alpha$  (*expected shortfall*), considerando que  $VaR_\alpha$  nada mais é que um quantil superior ao limiar  $u$  escolhido.

## 5.3 MODELANDO CAUDAS E MEDIDAS DE RISCO ASSOCIADAS

Através da modelagem da cauda da distribuição  $F$  de perdas por uma GPD, como feito na seção anterior, é possível calcular as medidas de riscos  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  para esta distribuição de perdas em função dos parâmetros da GPD estimada e também fazendo uso da distribuição empírica de  $F$ .

Sob a Suposição 5.7 tem-se que a cauda da distribuição  $F$ ,  $\bar{F}(x)$ , para  $x \geq u$  é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= P(X > u)P(X > x|X > u) \\ &= \bar{F}(u)P(X - u > x - u|X > u) \\ &= \bar{F}(u)\bar{F}_u(x - u) \\ &= \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\beta}\right)^{-1/\xi} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Da qual se fosse conhecida exatamente a distribuição  $F$  um modelo analítico para as probabilidades de perdas na cauda da distribuição poderia ser derivado. Aqui  $x$  são os valores a serem observados das perdas, e portanto  $x - u$  são as perdas em excesso ao limiar.

Através da equação (5.9) foi efetivamente separada a distribuição  $F$ , ou melhor, sua cauda, em duas partes. A primeira parte, para valores menores que  $u$ , não foi modelado analiticamente e portanto utiliza-se a distribuição empírica das perdas, aqui representada por sua cauda  $\bar{F}(u)$ , que nada mais é que o número observado de excessos de  $u$  sobre o número total de observações da amostra.

A segunda parte é justamente a modelagem através de uma GPD com parâmetros  $\xi$  e  $\beta$  dado o limiar  $u$ . Por esta modelagem paramétrica pode-se conhecer as probabilidades de cauda para valores de  $x$  maiores que  $u$ .

O quantil  $\alpha$  é a inversa da função distribuição e retorna o valor para o qual um percentual  $\alpha$  de observações da amostra é menor ou igual. Assim sendo,  $VaR_\alpha$  nada mais

é que um quantil alto para o qual é determinado que  $\alpha\%$  das perdas devem ser menores ou iguais a este valor.

Como a equação (5.9) fornece a probabilidade de cauda, então esta é igual a  $1 - \alpha$  para um valor de  $\alpha \geq F(u)$ . Fazendo  $\bar{F}(x) = 1 - \alpha$  na equação (5.9) o valor de  $x$  representará  $VaR_\alpha$  e nos basta manipular esta equação até isolar  $VaR_\alpha$  como função de  $\bar{F}(u)$ ,  $\alpha$  e dos parâmetros da GPD  $\xi$  e  $\beta$ . Garantindo a equação abaixo:

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\beta}{\xi} \left[ \left( \frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right] \quad (5.10)$$

A medida  $ES_\alpha$  pode ser entendida como a média das perdas que excedem o valor dado por  $VaR_\alpha$ . Como o próprio  $VaR_\alpha$  é um quantil acima do valor de limiar  $u$ ,  $ES_\alpha$  é dado pelo valor do  $VaR_\alpha$  somado a função média dos excessos dada pela equação (5.8) fazendo  $v = VaR_\alpha$ . Esta média é convergente para valores de  $\xi < 1$  conforme já demonstrado. Ou seja,  $ES_\alpha = VaR_\alpha + e(VaR_\alpha)$ . A qual nos rende de forma mais geral:

$$ES_\alpha = \frac{VaR_\alpha}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \quad (5.11)$$

Portanto, ambas medidas de risco  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$ , para distribuições de perdas que tiveram suas caudas modeladas através de uma GPD da forma  $G_{\xi, \beta(u)}$  com  $\xi < 1$  e  $\beta > 0$ , podem ser calculadas respectivamente através das equações dadas em (5.10) e (5.11). As estimativas destas medidas de risco serão encontradas através das estimativas dos parâmetros da GPD, assim como do limiar utilizado e de uma medida empírica de  $\bar{F}(u)$  que será o número de excessos verificados sobre o total de amostras. É claro que, ao adotar esta estimativa para  $\bar{F}(u)$  é implicitamente suposto que o número de amostras na série de perdas é significativa, assim como o número de excessos verificados. Daí a importância de se utilizar um valor  $u$  adequado, conforme explicitado na seção 5.2.

As estimativas de medidas de risco desenvolvidas nesta seção se qualificam como medidas incondicionais, no sentido que elas não dependem do estado atual das coisas, mas sim de todo o histórico de eventos de forma uniforme. Em outras palavras,  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  derivados a partir das equações (5.10) e (5.11) são medidas históricas de risco associado ao ativo em análise e não levam em consideração se nos eventos mais recentes a volatilidade das perdas pode ser diferente do valor histórico.

De fato, uma das características marcantes das perdas (ou retornos, como o leitor preferir) dos ativos financeiros é o chamado *clustering* de volatilidade, onde grandes volatilidades (retornos positivos ou negativos) têm tendência a ficarem próximas ao longo da linha temporal. Em geral estas aglomerações de volatilidades surgem a partir da autocorrelação destas, ou seja, a volatilidade em um período  $t$  é dependente das volatilidades

verificadas em períodos anteriores. Um modelo bastante encontrado na literatura que busca modelar estas dependências é o modelo GARCH e suas variantes.

Assim, ao passo que as estimativas de risco desenvolvidas nesta seção são valiosas para prazos mais longos, ainda é necessário desenvolver um modelo que lide com o fato das autocorrelações de volatilidades e portanto, que nossa variável aleatória não é independente e igualmente distribuída ao longo do tempo. O modelo proposto por [McNeil e Frey \(2000\)](#) pode ser utilizado para encontrar as medidas de risco  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  condicionais desejadas, ainda dentro da metodologia de *peaks over threshold* - POT.

## 5.4 MEDIDAS CONDICIONAIS DE RISCO

Conforme demonstrado no Capítulo 3 os ativos financeiros possuem características de autocorrelação, senão em seus retornos propriamente ditos, ao menos em suas volatilidades ou variações absolutas. Ou seja, dada uma grande variação no momento  $t$  é de se esperar novamente uma grande variação, não necessariamente na mesma direção daquela anterior, para o momento  $t+1$  e posteriores. Desta forma, medidas de risco incondicionais, conforme aquelas derivadas na seção 5.3 podem ser adequadas somente para horizontes temporais mais longos, pois implicitamente tomam em consideração os fatos mais recentes com o mesmo valor de predição que fatos mais longínquos.

Também já foi bastante estudado e demonstrado no Capítulo 2 que modelos que levem em conta riscos condicionais ao incorporarem as autocorrelações nas volatilidades, levam a resultados de testes melhores. Assim, nesta seção é adotado o modelo proposto por [McNeil e Frey \(2000\)](#) os quais fazem uma adequação dos retornos dos ativos a um modelo GARCH e posteriormente tratam os erros desta modelagem como *iid* e portanto, a metodologia de POT e ajuste de uma GPD pode ser feito. Este modelo pode ser entendido como um modelo condicional para medidas de risco pois, efetivamente, é levado em conta o estado atual da previsão para a média e principalmente para a volatilidade ao se calcular o VaR. Desta forma a medida responde rapidamente às variações nos humores do mercado e pode sinalizar de forma ágil uma inadequação de capital reservado pela instituição financeira.

Além desta vantagem de cunho prático, a técnica possui uma atratividade teórica. O método POT deve ser aplicado a séries *iid* que sabidamente não é o caso de perdas de ativos financeiros. Ao se utilizar a técnica POT nos resíduos padronizados de um modelo GARCH o que se está realizando é uma pré-filtragem destas perdas, de forma a obter resíduos padronizados que sejam *iid* e portanto, aplicável a teoria de valor extremo.

Primeiramente deve-se estabelecer um modelo GARCH para as perdas do ativo subjacente. Denote  $L_t$  como sendo a perda observada no período  $t$ ,  $\mu_t$  e  $\sigma_t$  são respecti-

vamente a média e o desvio padrão condicionais e mensuráveis através do conjunto de informações disponíveis em  $t-1$  e seja  $Z_t$  inovações *iid* com média zero e desvio padrão unitário, então tem-se que:

$$L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (5.12)$$

Seja  $F_L(l)$  a distribuição marginal de  $L_t$ , então  $F_{L_{t+1}}|\mathcal{G}_t(l)$  é a distribuição preditiva da perda para o próximo período, onde  $\mathcal{G}_t$  é o conjunto de informações disponíveis no período  $t$ , incluindo-o. Portanto, para o cálculo das medidas condicionais de risco é do interesse um quantil  $\alpha$  na cauda de  $F_{L_{t+1}}|\mathcal{G}_t(l)$ . Este quantil  $\alpha$ , que será o  $VaR_\alpha$ , é o ínfimo  $l$  tal que o valor da distribuição preditiva seja maior ou igual a  $\alpha$ . Ao passo que o valor condicional do  $ES$  será o valor esperado das perdas previstas que sejam maiores que VaR para o mesmo intervalo de confiança. Ou seja:

$$VaR_\alpha^t = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_{L_{t+1}}|\mathcal{G}_t(l) \geq \alpha\}, \quad (5.13)$$

$$ES_\alpha^t = E[L_{t+1} | L_{t+1} > VaR_\alpha^t] \quad (5.14)$$

Considerando que nossa distribuição de perdas é dada pela equação (5.12) e sabendo das propriedades de variáveis aleatórias e do operador de expectância, as equações dadas acima subsumem a:

$$VaR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} z_\alpha, \quad (5.15)$$

$$ES_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} E[Z | Z > z_\alpha] \quad (5.16)$$

onde  $z_\alpha$  é o quantil  $\alpha$  das inovações  $Z$ .

Falta ainda escolher um processo que modele a série temporal dada em (5.12), ou seja, é preciso especificar o comportamento de  $\mu_t$  e  $\sigma_t$ . Por suposição do modelo, foi especificado que o comportamento destas variáveis é dependente de acontecimentos passados, contidos no conjunto de informações  $\mathcal{G}_{t-1}$ . Dentre os diversos modelos já propostos para estimar médias e volatilidades condicionais, está o simples porém efetivo modelo GARCH(1,1) para a volatilidade condicional e o modelo AR(1) para a média condicional. Uma extensão destes modelos básicos para outros mais complexos pode ser facilmente obtida e é vasta na literatura, como exemplo modelos GARCH-M, *Threshold* GARCH, EGARCH, etc. para volatilidades condicionais e um modelo do tipo ARMA para a média.

Como critérios para a escolha deste modelo de filtro no primeiro estágio, deseje-se que as inovações  $Z_t$ , através de suas realizações na forma dos resíduos padronizados

estimados no modelo possuem 2 características, ausência de autocorrelação serial em seus valores e nos seus quadrados.

Neste trabalho, visando aplicar a teoria do valor extremo para o cálculo das medidas condicionais de risco, não são feitas maiores suposições acerca da distribuição das inovações, como por exemplo assumir uma determinada distribuição (e.g. Normal ou t de Student), mas está implícito que esta pertence ao *MDA* de uma GEV e portanto a distribuição de seus excessos sobre um limiar segue aproximadamente uma GPD.

Dadas estas considerações, o modelo adotado segue um formato em dois estágios para ser implementado, como segue.

- Ajustar um modelo ARMA-GARCH para os dados de perdas, sem fazer suposições sobre a distribuição de  $Z$ , porém, utilizando um método de pseudo máxima verossimilhança (PML). Deste modelo retira-se as estimativas de  $\mu_{t+1}$  e  $\sigma_{t+1}$  e portanto, calculam-se as inovações padronizadas implícitas resultantes através da [Equação 5.12](#).
- Considerando estas inovações calculadas como sendo as realizações da variável aleatória  $Z$ , a qual por suposição pode ter sua cauda ajustada a uma GPD utilizando o método descrito na [seção 5.3](#). Encontra-se por fim o valor de  $z_\alpha$  e  $E[Z|Z > z_\alpha]$ , com os quais finalizam-se os cálculos das medidas condicionais de risco dadas em [\(5.15\)](#) e [\(5.16\)](#).



## 6 MODELOS IMPLEMENTADOS

A partir de agora é possível juntar todas as peças anteriores para montar um completo modelo condicional de avaliação de risco de mercado, utilizando em conjunto a teoria de valor extremo e um modelo GARCH para determinar o nível de risco de um ativo financeiro.

O principal modelo a ser implementado e testado neste trabalho é aquele conhecido como EVT condicional (cevt), enquanto que outros seis modelos de estimação de valor em risco também serão implementados e testados para fins de comparação. Estes modelos são: Normal condicional (cnorm), t-Student condicional (ct), Riskmetrics (riskmetrics), EVT incondicional (uevt), Normal incondicional (unorm) e t-Student incondicional (ut).

Neste trabalho serão considerados três diferentes modelos GARCH para o filtro em primeiro estágio. O modelo GARCH padrão (sGARCH), exponencial (eGARCH) como proposto por [Nelson \(1991\)](#) e o modelo TGARCH (gjgGARCH) de [Glosten, Jagannathan e Runkle \(1993\)](#). Os dois últimos modelos são considerados pois, além da modelagem da heterocedasticidade condicional, eles captam o chamado efeito alavancagem, onde inovações positivas e negativas possuem efeitos diferentes no nível de volatilidade.

Este filtro em primeiro estágio foi aplicado a todos os modelos ditos condicionais, os quais necessitam primeiramente extrair os resíduos padronizados  $\hat{Z}_t$  para então fazer o cálculo do quantil de interesse.

### 6.1 EVT CONDICIONAL

O modelo EVT condicional para as medidas de risco  $VaR_\alpha$  e  $ES_\alpha$  condicionais dada a distribuição de perdas  $L_t$  de um ativo será, portanto:

$$L_t = \mu + \phi_1 L_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (6.2)$$

$$\sigma_t^2 = xGARCH(p, q) \quad (6.3)$$

$$Z_t \sim \mathcal{D}(0, 1) \text{ e } \mathcal{D} \in MDA(H_\xi) \quad (6.4)$$

onde xGARCH(p,q) denota o modelo GARCH adotado no filtro em primeiro estágio.

A equação (5.15) fornece o valor da medida  $VaR_\alpha$  quando utilizada em conjunto com aquela dada por (5.10). Este modelo é estimado impondo a restrição que o termo de erro  $\varepsilon_t$  deve ser estacionário e, portanto, a variância incondicional deve ser finita.

A estimação segue um algoritmo em dois estágios conforme delineado na [seção 5.4](#). No primeiro estágio utiliza-se o método de pseudo máxima verossimilhança, onde apesar de não se adotar a distribuição normal para reger as inovações  $Z_t$ , esta é utilizada apenas para estimar os parâmetros do modelo. É demonstrado em [Gouriéroux \(1997, Capítulo 4\)](#), que o método PML fornece estimadores consistentes e assintoticamente normais, sendo possível portanto, utilizar tal método para obter as estimativas de parâmetros e erros padrão, mesmo não aceitando a condição de normalidade das inovações.

Para o segundo estágio, uma vez obtidos os resíduos padronizados,  $\hat{Z}_t$ , aplica-se a estes a teoria do valor extremo descrita na [seção 5.3](#) para se obter o quantil de interesse  $z_\alpha$ . Para tanto, considerando a definição de uma GPD dada na [Equação 5.4](#) e denotando sua função densidade de probabilidades por  $g_{\xi,\psi}$ , a função logarítmica de verossimilhança, que deve ser maximizada para a obtenção dos parâmetros  $\xi$  e  $\psi$  é:

$$\begin{aligned} \ln L(\xi, \psi; Z_j^u) &= \sum_{j=1}^{N_u} \ln g_{\xi,\psi}(Z_j^u) \\ &= -N_u \ln \psi - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{j=1}^{N_u} \ln \left(1 + \xi \frac{Z_j^u}{\psi}\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde  $N_u$  é o número de excessos acima do valor de limiar escolhido e  $Z_j^u$  são as inovações em excesso, de acordo com a EVT que exige as perdas em excesso ao limiar. O quantil obtido,  $z_\alpha$  é aquele derivado de forma semi-paramétrica a partir da teoria EVT *para os resíduos padronizados*, que são tratados como realizações das inovações  $Z_t$  e portanto, ainda deve ser escalado e deslocado através da [Equação 5.15](#) para a obtenção da medida de risco de verdadeiro interesse,  $VaR_\alpha^t$ .

O modelo EVT condicional (cevt) é o principal modelo analisado e descrito em detalhe na [seção 5.3](#). A medida de risco é calcula diariamente utilizando-se o método POT após a filtragem dos dados através de um modelo AR(1)-xGARCH(p,q). As previsões de média,  $\mu_{t+1}$  e desvio padrão condicional,  $\sigma_{t+1}$  do modelo xGARCH são utilizados para calcular  $VaR_\alpha^t$ , conforme a equação [5.15](#). O quantil  $z_\alpha$  é aquele determinado pelo valor de  $\alpha$  após a aplicação do método POT para parametrização da cauda da distribuição das inovações e é calculado conforme a equação [\(5.10\)](#), onde  $z_\alpha$  toma o lugar de  $VaR_\alpha$ . O algoritmo deste modelo é o seguinte:

## 1. Filtro xGARCH

- 1.1. Selecionar o melhor modelo GARCH, incluindo ordem (p,q) de (1,1) a (2,2) para um ativo e período baseado no critério de informação Bayesiano.
- 1.2. Dada uma amostra de  $n$  observações  $\{t-n+1, \dots, t\}$ , estimar o modelo AR(1)-xGARCH(p,q) escolhido anteriormente;

- 1.3. Salvar os valores previstos para  $\mu_{t+1}$  e  $\sigma_{t+1}$  e a série de resíduos padronizados,  $\hat{Z}$ ;
2. Aplicação da EVT
  - 2.1. Aplicar a equação (5.10) aos resíduos padronizados salvos e obter o valor estimado de  $z_\alpha$ ;
  - 2.2. Calcular  $VaR_\alpha^t$  de acordo com a equação (5.15),  $VaR_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$ ;
3. Repetir os dois passos anteriores para cada  $t \in T = \{n, \dots, m - 1\}$

## 6.2 NORMAL CONDICIONAL

Neste modelo, Normal condicional (cnorm), o mesmo filtro AR(1)-xGARCH(p,q) é utilizado para obtenção das previsões  $\mu_{t+1}$  e  $\sigma_{t+1}$ , porém o quantil  $z_\alpha$  da equação 5.15 é substituído pelo valor adequado de uma distribuição normal padrão, por exemplo para  $\alpha = 99\%$ ,  $z_\alpha = 2,326$ . O restante do algoritmo segue conforme 6.1.

## 6.3 T-STUDENT CONDICIONAL

Semelhante ao Normal condicional, o modelo t-Student condicional (ct) utiliza um quantil  $z_\alpha$  oriundo de uma distribuição t-Student. O parâmetro de forma é calculado por máxima verossimilhança a partir dos resíduos padronizados do filtro. O restante do algoritmo segue conforme 6.1.

## 6.4 RISKMETRICS

O modelo Riskmetrics (riskmetrics) é aquele encontrado em RiskMetrics (1995), com o parâmetro  $\mu = 0$  e  $\lambda = 0,94$ , pois utiliza-se dados diários. O modelo completo para média e desvio padrão condicionais é:

$$x_t = \epsilon_t, \quad \epsilon_t | \mathcal{H}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (6.6)$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)\epsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2 \quad (6.7)$$

O algoritmo para seu cálculo, portanto, é direto.

1. Dada uma amostra de  $n$  observações  $\{t-n+1, \dots, t\}$ , estima-se um modelo GARCH(1,1) com parâmetros fixos,  $\alpha = 0,06$  e  $\beta = 0,94$ ;

2. os valores  $\mu_{t+1} = 0$  e  $\sigma_{t+1} = \sqrt{(1 - \lambda)\epsilon_t^2 + \lambda\sigma_t^2}$ , são salvos;
3. o valor de  $z_\alpha$  vem da normal padrão para o valor de  $\alpha$  sendo utilizado, por exemplo para  $\alpha = 99\%$ ,  $z_\alpha = 2,326$ ;
4. Calcular  $Var_\alpha^t$  de acordo com a equação (5.15),  $Var_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$ ;
5. Repetir os passos anteriores para cada  $t \in T = \{n, \dots, m - 1\}$ .

## 6.5 EVT INCONDICIONAL

O modelo EVT incondicional (uevt) continua a fazer uso da metodologia POT para a parametrização da cauda da distribuição dos resíduos padronizados oriundos do filtro. Entretanto, ao invés de utilizar a previsão mais recente para os valores de média e desvio padrão, ou seja, seus valores condicionais, são calculados a média e desvio padrão **incondicionais** do modelo AR(1)-xGARCH(p,q) e imputados na equação 5.15.

Este modelo também é chamado de EVT incondicional filtrada, pois, diferentemente de outras abordagens incondicionais para o método POT, ainda se faz uso do filtro em primeiro estágio, como uma forma de minimizar os problemas decorrentes de aplicar o dito método a dados que não sejam *iid*. O algoritmo de cálculo desta abordagem segue:

1. Filtro xGARCH
  - 1.1. Selecionar o melhor modelo GARCH, incluindo ordem (p,q) de (1,1) a (2,2) para um ativo e período baseado no critério de informação Bayesiano.
  - 1.2. Dada uma amostra de  $n$  observações  $\{t-n+1, \dots, t\}$ , estimar o modelo AR(1)-xGARCH(p,q) escolhido anteriormente;
  - 1.3. Salvar os valores incondicionais de média e desvio padrão calculados como  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\sigma}$  e a série de resíduos padronizados,  $\hat{Z}$ ;
2. Aplicação da EVT
  - 2.1. Aplicar a equação (5.10) aos resíduos padronizados salvos e obter o valor estimado de  $z_\alpha$ ;
  - 2.2. Calcular  $Var_\alpha^t$  de acordo com a equação (5.15),  $Var_\alpha^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_\alpha$ , onde  $\mu_{t+1} = \bar{\mu}$  e  $\sigma_{t+1} = \bar{\sigma}$ ;
3. Repetir os dois passos anteriores para cada  $t \in T = \{n, \dots, m - 1\}$ .

## 6.6 NORMAL INCONDICIONAL

O modelo Normal incondicional (unorm) não faz uso da filtragem em primeiro estágio. Dada uma amostra de  $n$  observações  $\{t-n+1, \dots, t\}$ , simplesmente ajusta-se esta amostra de dados a uma distribuição normal através de máxima verossimilhança da qual resultarão os valores de  $\mu$  e  $\sigma$  para o cálculo de  $Var_{\alpha}^t = \mu + \sigma z_{\alpha}$ . O quantil  $z_{\alpha}$  é aquele previsto por uma normal padrão para o nível de cobertura desejado.

## 6.7 T-STUDENT INCONDICIONAL

O modelo t-Student incondicional (ut) segue o mesmo procedimento que o modelo anterior, Normal incondicional. A única diferença é que os dados são ajustados a uma distribuição t-Student onde inclusive o parâmetro de forma é estimado e utilizado para obtenção do quantil  $z_{\alpha}$ .



# 7 RESULTADOS EMPÍRICOS

Neste capítulo são apresentados os dados utilizados para as estimações dos modelos e suas validações. São apresentadas estatísticas descritivas dos dados brutos e após filtragem inicial pelo modelo xGARCH. Os modelos de Valor em Risco implementados e testados, para seis índices de ativos, são estimados e então realizados testes fora da amostra para avaliar a adequação destes diferentes modelos aos dados. Toda a metodologia adotada está descrita neste capítulo e seus resultados apresentados.

## 7.1 DADOS UTILIZADOS E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

Neste trabalho serão analisadas as séries de perdas de seis importantes ativos financeiros amplamente negociados no mercado global, o par de moedas EUR/USD; dois índices amplos temáticos, MSCI's Commodity producers (MSCI-C) e Infrastructure (MSCI-I); um índice amplo do mercado de ações, MSCI-World; um índice global de fundos imobiliários, FTSE NAREIT; e finalmente, os rendimentos de 30 anos dos títulos do tesouro americano. Os retornos coletados foram entre as datas de 01/01/2003 a 31/12/2018 e divididos em dois períodos. De 01/01/2003 a 30/06/2007 para o primeiro período dentro da amostra com respectivo período de *backtest* de 01/07/2007 a 31/12/2010, percorrendo a grande crise financeira. Este é um período em que os modelos foram ajustados em regime de volatilidade corriqueira dos mercados e testados contra um ambiente de alta volatilidade. Este primeiro intervalo é chamado de período de alta volatilidade. O segundo período dentro da amostra cobre 01/01/2011 a 30/06/2015 e *backtest* realizado entre 01/07/2015 ao final de 2018, onde as volatilidades do período dentro e fora da amostra são comparáveis. Chama-se este período de baixa volatilidade. Em dias sem negociação nos mercados, os períodos iniciam-se na data útil seguinte e terminam em data útil imediatamente anterior. Foram utilizados as perdas logarítmicas dos ativos. A [Figura 4](#) no Anexo [A](#) apresenta as séries temporais completas para os seis ativos.

A [Tabela 1](#) apresenta algumas das estatísticas descritivas mais importantes para as séries de perdas dos ativos nos dois períodos dentro da amostra. É possível verificar que os retornos não podem ser considerados normais, com a estatística de Jarque-Bera rejeitando a hipótese nula e alto grau de curtose em excesso verificado para todos os mercados analisados.

Também é possível verificar autocorrelação serial entre estas perdas através da estatística  $Q(10)$  de Ljung-Box, calculadas com auxílio da metodologia dada por [Fisher e Gallagher \(2012\)](#). Entretanto, esta mesma correlação serial é muito mais significativa nos

quadrados das perdas, uma *proxy* para a heterocedasticidade, o que corrobora os fatos estilizados de séries financeiras.<sup>1</sup>

Tabela 1 – Estatísticas descritivas para as perdas durante os períodos dentro da amostra. Período 1 abrange 01/01/2003 a 30/06/2007 e período 2 de 01/01/2011 a 30/06/2015.

Descrição	Euro/Dollar	MSCI-C	MSCI-I	MSCI-W	NAREIT	Treasuries
<b>Período 1</b>						
Média	-0.00022	-0.00089	-0.00059	-0.0006	-0.00062	-0.00003
Mediana	-0.000092	-0.0012	-0.00048	-0.0009	-0.00088	0.0006
Máximo	0.019	0.032	0.029	0.027	0.051	0.029
Mínimo	-0.018	-0.035	-0.037	-0.03	-0.034	-0.034
Desvio Padrão	0.0057	0.0093	0.0066	0.0065	0.0098	0.0092
Assimetria	0.0072	0.37	0.0056	0.14	0.57	-0.22
Curtose exc.	0.59	0.67	2.09	1.49	1.91	0.51
Jarque-Bera	17.14 ***	49.31 ***	215.59 ***	113.47 ***	236.45 ***	21.94 ***
Q(10)	6.35	39.78 ***	19.19 ***	26.93 ***	6.62	6.03
Q <sup>2</sup> (10)	22.76 ***	54.59 ***	114.51 ***	165.61 ***	118.56 ***	22.33 ***
N.obs	1172	1172	1172	1172	1142	1128
<b>Período 2</b>						
Média	0.00016	0.00026	-0.00012	-0.00026	-0.00027	0.0003
Mediana	0.00	-0.00011	-0.00042	-0.00064	-0.00043	0.001
Máximo	0.021	0.069	0.039	0.053	0.093	0.087
Mínimo	-0.025	-0.052	-0.03	-0.041	-0.091	-0.068
Desvio Padrão	0.0058	0.012	0.0075	0.0086	0.012	0.017
Assimetria	0.089	0.42	0.40	0.52	0.28	-0.049
Curtose exc.	1.38	3.69	2.95	4.66	9.44	1.71
Jarque-Bera	95.52 ***	703.69 ***	460.19 ***	1121.35 ***	4383.25 ***	138.79 ***
Q(10)	4.00	35.83 ***	18.91 ***	33.46 ***	44.71 ***	13.37 **
Q <sup>2</sup> (10)	103.06 ***	183.35 ***	244.81 ***	344.52 ***	455.31 ***	178.06 ***
N.obs	1172	1172	1169	1172	1170	1130

Nota: \* p < 0.1; \*\* p < 0.05; \*\*\* p < 0.001

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na [Figura 4](#) é possível visualizar as séries de perdas logarítmicas em estudo. Por inspeção visual simples é possível verificar a heterocedasticidade destes retornos, reforçando as estatísticas encontradas na [Tabela 1](#). A [Figura 5](#) constante no Anexo [A](#) é mais interessante para se apreciar a normalidade destes retornos. Tratam-se de gráficos quantil-quantil feitos entre a amostra completa dos retornos e uma distribuição normal de referência. Para todas as séries é observado um desvio da normalidade nas caudas, configurando distribuições leptocúrticas em todos os casos.

Antes de trabalhar com estas séries, é importante garantir a estacionariedade das mesmas. O teste aumentado de [Dickey e Fuller \(1979\)](#) foi utilizado para inferir a presença de raiz unitária nas perdas dos ativos sob análise. A seleção das defasagens a serem utilizadas no teste seguiu o critério de informação Bayesiano (BIC) e foram realizados os testes com inserção de constante apenas, e constante e tendência.

Com os dados apresentados na [Tabela 2](#) pode-se concluir que todos os índices estudados **não** apresentam raiz unitária ao nível de 95% de confiança em seus log-retornos

<sup>1</sup> Vide [Cont \(2001\)](#).

e, portanto, pode-se trabalhar com os modelos apropriados de séries temporais sem incorrer no risco de obtenção de estimativas espúrias.

Tabela 2 – Teste aumentado de Dickey-Fuller para raiz unitária.

Ativo	Constante	Tendência
<b>Período 1</b>		
EURUSD	-24.9634 ***	-24.9659 ***
FNER	-23.4494 ***	-23.4557 ***
MSDUWI	-22.7738 ***	-22.7636 ***
MXWO0CMP	-23.1238 ***	-23.1178 ***
MXWO0INF	-22.4479 ***	-22.4481 ***
TYX	-24.2833 ***	-24.2793 ***
<b>Período 2</b>		
EURUSD	-24.0299 ***	-24.0688 ***
FNER	-23.3131 ***	-23.3074 ***
MSDUWI	-21.9813 ***	-21.9748 ***
MXWO0CMP	-21.7683 ***	-21.7628 ***
MXWO0INF	-22.6722 ***	-22.6638 ***
TYX	-23.6719 ***	-23.6794 ***

*Nota:* \*  $p < 0.1$ ; \*\*  $p < 0.05$ ; \*\*\*  $p < 0.001$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

### 7.1.1 Filtro GARCH

Neste trabalho três diferentes filtros foram considerados para o primeiro estágio, GARCH padrão, exponencial e GJR. As ordens destes modelos foram todas as quatro combinações indo de (1,1) a (2,2). Em todas as especificações a equação da média no modelo GARCH é um processo autorregressivo de ordem um, AR(1), que mostrou-se suficiente para retirar qualquer autocorrelação presente nas perdas. No total, doze especificações foram implementadas dentro da amostra para cada ativo e período, sendo o modelo com o menor valor para o critério Bayesiano (BIC) é escolhido para a fase de *backtesting*. Uma vez nesta fase, a especificação do modelo é mantida constante. Os modelos e ordens selecionados para cada ativo e período são apresentados na [Tabela 3](#).

A [Tabela 3](#) apresenta novamente as estatísticas Ljung-Box ( $Q$  e  $Q^2$ ) desta vez para os resíduos padronizados resultantes da filtragem das perdas no primeiro estágio. As estatísticas de autocorrelação agora estão todas em favor da ausência desta.

Para todos os ativos analisados, não é possível rejeitar  $H_0$  nos testes de autocorrelação, tanto para os resíduos (estatística  $Q(10)$ ) como para os seus quadrados (estatística  $Q^2(10)$ ) em evidente contraste com os valores apresentados na [Tabela 1](#) quando foram analisadas as perdas destes ativos.

Tabela 3 – Seleção de especificação para cada ativo nos períodos dentro da amostra.

	BIC	Modelo	Q(10)	Q <sup>2</sup> (10)
<b>Período 1</b>				
Euro/Dollar	-7.56	sGARCH(1, 1)	1.69	5.21
NAREIT	-6.48	sGARCH(1, 1)	4.96	7.86
MSCI-W	-7.37	gjrGARCH(2, 1)	5.92	6.65
MSCI-C	-6.57	sGARCH(1, 1)	6.64	4.39
MSCI-I	-7.33	sGARCH(1, 1)	6.31	6.96
Treasuries	-6.56	sGARCH(1, 1)	6.86	4.67
<b>Período 2</b>				
Euro/Dollar	-7.62	gjrGARCH(1, 1)	2.94	6.16
NAREIT	-6.48	gjrGARCH(1, 1)	2.24	4.80
MSCI-W	-7.00	eGARCH(1, 1)	3.13	8.89
MSCI-C	-6.38	eGARCH(1, 1)	1.82	4.99
MSCI-I	-7.14	eGARCH(1, 1)	2.34	3.11
Treasuries	-5.53	eGARCH(1, 1)	8.42	4.46

*Nota:* \* p < 0.1; \*\* p < 0.05; \*\*\* p < 0.001

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

O filtro xGARCH escolhido foi ajustado ao ativo em análise com os dados da amostra e seus coeficientes estimados são mostrados na [Tabela 4<sup>2</sup>](#). O papel do primeiro estágio é filtrar as perdas para que os resíduos padronizados resultantes não sejam autocorrelacionados e não apresentem heterocedasticidade. Conforme mostrado pelas estatísticas de Ljung-Box na [Tabela 3](#) e conforme demonstrado através dos gráficos de autocorrelação nas figuras [6](#) a [11](#) todas presentes no Anexo [A](#), este resultado foi alcançado.

Os gráficos ACF das figuras [6](#) a [11](#) das distribuições de perdas e seus quadrados na parte superior, e na parte inferior os correlogramas são apresentados para os resíduos padronizados e seus quadrados oriundos do modelo xGARCH escolhido, sendo utilizado o segundo período, baixa volatilidade, para fins ilustrativos. Através destes gráficos fica bastante evidente como a filtragem foi bem sucedida em retirar a autocorrelação encontrada originalmente na volatilidades das perdas, o que demonstra a natureza heterocedástica das séries sob análise e a eficácia do filtro proposto.

Sendo assim, com retornos padronizados que após filtragem não apresentam mais autocorrelação ou heterocedasticidade, pode-se passar ao segundo estágio do modelo GARCH-POT, ou seja, aplicar a teoria do valor extremo através do método *peaks over threshold* para parametrizar a cauda direita das distribuições de perdas dos ativos.

<sup>2</sup> Como esperado, nem todos os coeficientes estimados são significativos no nível de confiança de 5% (alguns nem mesmo em 10%), o que não invalida o filtro.

Tabela 4 – Parâmetros garch estimados para períodos dentro da amostra.

Parâmetro	Euro/Dollar	MSCI-C	MSCI-I	MSCI-W	NAREIT	Treasuries
<b>Período 1</b>						
$\mu$	-0.0002 *	-0.0011 ***	-0.0008 ***	-0.0005 ***	-0.0009 ***	0.0000
$\phi_1$	-0.0312	0.1722 ***	0.1013 ***	0.1446 ***	0.0521	0.0177
$\omega$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\alpha_1$	0.0232 ***	0.0605 ***	0.0885 ***	0.0404 ***	0.1005 ***	0.0209 ***
$\beta_1$	0.9758 ***	0.8876 ***	0.8778 ***	0.9340 ***	0.8502 ***	0.9730 ***
$\gamma_1$				-0.1798 ***		
$\alpha_2$				0.0381 ***		
$\gamma_2$				0.1118 ***		
<b>Período 2</b>						
$\mu$	0.0002	0.0004 **	0.0000	0.0000	-0.0003 *	0.0004
$\phi_1$	-0.0298	0.1025 ***	0.0882 ***	0.1194 ***	-0.0513 **	0.0105
$\omega$	0.0000	-0.0893	-0.1841	-0.1447	0.0000	-0.0425
$\alpha_1$	0.0490 ***	0.0854 ***	0.0980 ***	0.1396 ***	0.1554 ***	0.0550 ***
$\beta_1$	0.9691 ***	0.9900 ***	0.9812 ***	0.9848 ***	0.8835 ***	0.9948 ***
$\gamma_1$	-0.0409 ***	0.0721 ***	0.0798 ***	0.0770 ***	-0.1138 ***	0.1061 ***

Nota: \*  $p < 0.1$ ; \*\*  $p < 0.05$ ; \*\*\*  $p < 0.001$

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

## 7.1.2 Método POT

Os resíduos padronizados são tratados como as realizações do processo de inovação no modelo xGARCH escolhido dentro da amostra. Estas inovações serão então analisadas sob a ótica da EVT para a obtenção dos parâmetros da GPD que definem a cauda direita de sua distribuição.

Para tanto, deve ser estabelecido um limiar  $u$  adequado para cada uma das séries, de modo que seja satisfeito o teorema de Pickands-Balkema-de Haan. Este valor de limiar será diferente para cada série e sua escolha deve seguir os princípios delineados na [seção 5.2](#) através da função média dos excessos. Entretanto, considerando o *trade-off* existente entre o viés e a variância dos parâmetros da GPD estimados com relação a escolha do valor deste limiar, pode-se abordar o problema desta escolha de outra forma.

Neste trabalho foi utilizado o quantil empírico a 90% para a escolha do valor do limiar. Conforme visto anteriormente, um valor de limiar que resulte em um número de excessos observados ( $N_u$ ) entre 100 e 120 é o limiar que minimiza o erro quadrático médio e deve ser escolhido, (MCNEIL; FREY; EMBRECHTS, 2015). Considerando o tamanho da janela de dados dentro da amostra para os índices sob análise, este quantil resulta em número de excessos nesta quantidade.

A escolha do limiar através de um quantil empírico fixo também é mais adequada considerando que para a fase de *backtest* do modelo é necessário reavaliar o valor deste limiar para cada dia dentro do período fora da amostra, o que se tornaria inviável de ser feito através da análise gráfica da função média dos excessos.

Escolhido o limiar  $u$ , trata-se de obter a série de inovações em excesso ao limiar

$Z_t^u : \{Z_t^u = Z_t - u | Z_t > u\}$ , onde  $Z_t$  são as inovações, em que os resíduos padronizados encontrados são suas realizações e  $Z_t^u$  são portanto, as inovações em excesso, conforme teorizado na [seção 5.3](#). A esta série de inovações em excesso é aplicada a função log-verossimilhança dada em (6.5) que por sua vez é maximizada em relação aos parâmetros  $\xi$  e  $\psi$  para a obtenção de suas estimativas.

A [Tabela 5](#) apresenta os valores destes parâmetros para cada um dos ativos, com a estimação feita com os dados do período dentro da amostra. Também são apresentados o número de excessos observados ( $N_u$ ) para o limiar escolhido ( $u$ ). Observa-se como o número de excessos varia de acordo com o ativo, porém todos ficam em torno de 118 excessos.

Tabela 5 – Resultados EVT e parâmetros da distribuição generalizada de Pareto para períodos dentro da amostra.

	$N_u$	$u$	$\xi$	$\psi$	$z_{0.975}$	$z_{0.990}$
<b>Período 1</b>						
Euro/Dollar	118	1.254	-0.119	0.546	1.955	2.356
NAREIT	115	1.272	-0.016	0.630	2.140	2.700
MSCI-W	118	1.251	0.081	0.444	1.905	2.378
MSCI-C	118	1.296	0.022	0.539	2.058	2.573
MSCI-I	118	1.258	-0.067	0.600	2.056	2.541
Treasuries	113	1.218	-0.129	0.552	1.919	2.318
<b>Período 2</b>						
Euro/Dollar	118	1.277	0.017	0.547	2.048	2.565
NAREIT	117	1.207	-0.142	0.797	2.211	2.774
MSCI-W	118	1.247	-0.111	0.747	2.211	2.768
MSCI-C	118	1.275	0.059	0.555	2.080	2.647
MSCI-I	117	1.265	-0.128	0.734	2.198	2.729
Treasuries	113	1.232	-0.197	0.569	1.922	2.285

*Nota:* Significado das colunas:  $N_u$  é o número de excessos,  $u$  é o valor do limiar,  $\xi$  e  $\psi$  são respectivamente os parâmetros de forma e escala da GPD, e finalmente  $z_{0.975}$  e  $z_{0.990}$  são os quantis dos resíduos padronizados  $\hat{Z}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na [Figura 12](#) do Anexo A é possível visualizar os gráficos de ajuste das inovações em excesso de cada um dos ativos contra suas distribuições GPD de referência, ou seja, aquelas com os parâmetros de forma e escala estimados para os respectivos ativos. Verifica-se que a distribuição destes excessos pouco se desvia com relação a curva de referência, denotando um bom ajuste dos dados ao modelo teórico. Em contraste, quando modelados diretamente através de uma distribuição normal, as séries de retornos se afastavam consideravelmente de suas referências como já apresentado na [Figura 5](#). Ao se utilizar um método semi-

paramétrico como o proposto, modelando apenas uma parte da cauda da distribuição, a parte que interessa para a modelagem de risco, obtém-se uma estimação muito mais próxima da realidade que os dados apresentam.

## 7.2 AVALIAÇÃO DOS MODELOS

A avaliação aqui referida concentra-se em testar através de *backtest* os modelos: EVT condicional, o qual utiliza a metodologia em dois estágios proposta por McNeil e Frey (2000) com um filtro do tipo xGARCH e o método POT, assim como o Normal e t-Student condicionais, EVT, Normal e t-Student incondicionais e o modelo proposto por RiskMetrics (1995), em um total de sete modelos sendo testados e comparados para fins de estimação do VaR.

O modelo EVT incondicional aqui proposto é diferente daquele encontrado nas outras referências. A filtragem através de uma especificação xGARCH é realizada e os resíduos padrão resultantes são utilizados para estimar o quantil desejado através da EVT, entretanto, ao se calcular a medida de risco são utilizados a média e o desvio padrão *incondicionais* do filtro, resultando em suavização do VaR. Uma vantagem teórica deste método é que se está aplicando a teoria de valor extremo a uma série *iid*, os resíduos padronizados, conforme preconizado pela teoria. Outra vantagem de cunho mais prático é que nesta abordagem o modelo não possui a alta variabilidade dos modelos condicionais e apresenta de forma mais branda que modelos incondicionais (às vezes chamados de estáticos) os agrupamentos nas violações ao VaR.

Para fazer o *backtest*, considere a série  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , com  $m \gg n$  e o conjunto de dias  $T = \{n, \dots, m - 1\}$ . Uma janela de dados de tamanho fixo contendo as últimas  $n$  observações é utilizada e para cada dia  $t \in T$  é reestimado o valor de  $VaR_\alpha^t$ . Os períodos de teste fora da amostra estão divididos em dois e vão respectivamente de 01/07/2007 a 31/12/2010 e 01/07/2015 ao final de 2018, com dados diários para as perdas dos ativos sob análise. O número de observações,  $n$ , dentro da janela de dados utilizada para fazer a estimação dos modelos para cada um dos índices é aquele apresentado na Tabela 5 (N.obs.), esse valor é fixo para cada série. Portanto, a partir do início do período de teste, esta janela fixa avança um dia e o modelo é estimado, resultando, com auxílio da equação (5.15), no valor estimado de  $VaR_\alpha^t$ , ou seja, a medida de risco calculada ao final do dia  $t$  que deverá ser comparada a perda incorrida no dia a frente,  $t + 1$ .

O quantil para a definição do limiar  $u$  é fixo em 0,90, que resultará em valores distintos de limiar para cada rodada do teste, e possivelmente um número diferente de excessos observados. Entretanto essas diferenças, considerando o tamanho fixo da janela de dados, será muito pequeno em torno de uma unidade apenas. Mantém-se assim, um número de excessos em torno de 120 observações, valor adequado para se fazer as estimativas dos

parâmetros da GPD.

A [Figura 13](#) do Anexo A apresenta o resultado do *backtest* para dois modelos EVT, condicional e incondicional. Entende-se por modelos incondicionais aqueles em que a volatilidade histórica de toda a janela de dados é utilizada para calcular as medias de risco. É nítido como o modelo condicional, que utiliza a previsão para a média e volatilidade das perdas e então utiliza-os para obter a medida de risco, é muito mais responsivo a alterações no regime de volatilidade do ativo. Um modelo incondicional, por sua vez, não responde de forma acentuada a variações de curto-prazo na volatilidade do ativo, pois estas observações mais extremas são atenuadas em meio a todas as outras observações utilizadas da janela de dados.

Tabela 6 – Porcentagem de violação para cada cobertura.

Modelo	Euro/Dollar	MSCI-C	MSCI-I	MSCI-W	NAREIT	Treasuries
<b>Cobertura de 1.0%</b>						
<i>período 1</i>						
Cond. EVT	1.967	1.967	1.749	2.623	1.435	1.699
Cond. Normal	2.295	3.388	2.623	3.497	2.097	2.152
Cond. Student-t	2.295	3.497	2.842	3.716	2.097	2.152
RiskMetrics	1.421	2.732	2.514	2.404	1.545	1.812
Uncond. EVT	3.497	4.262	3.388	5.137	6.623	4.077
Uncond. Normal	3.934	5.792	4.372	6.011	7.837	4.417
Uncond. Student-t	2.295	4.699	3.388	4.590	6.512	3.284
<i>período 2</i>						
Cond. EVT	0.547	1.205	0.875	0.875	0.794	1.362
Cond. Normal	0.766	1.643	1.969	1.751	2.041	1.249
Cond. Student-t	0.766	1.643	2.188	1.860	2.154	1.135
RiskMetrics	1.094	1.972	2.188	2.298	2.268	1.476
Uncond. EVT	0.547	1.314	1.094	1.422	1.020	0.681
Uncond. Normal	0.766	1.752	1.532	2.298	1.927	0.568
Uncond. Student-t	0.438	0.767	1.094	1.422	1.247	0.568
<b>Cobertura de 2.5%</b>						
<i>período 1</i>						
Cond. EVT	3.607	4.481	3.934	4.699	2.870	3.284
Cond. Normal	3.825	6.011	5.464	5.137	3.863	3.171
Cond. Student-t	3.607	6.011	5.137	5.027	3.532	3.058
RiskMetrics	3.279	4.153	3.934	4.044	2.980	3.284
Uncond. EVT	6.339	7.322	6.120	9.290	9.051	6.116
Uncond. Normal	6.667	8.525	7.760	9.290	10.486	6.342
Uncond. Student-t	6.339	8.962	8.197	9.727	11.038	5.889
<i>período 2</i>						
Cond. EVT	1.969	2.519	2.516	2.188	2.721	2.043
Cond. Normal	1.751	3.395	3.063	2.626	3.628	2.043
Cond. Student-t	1.641	3.176	3.063	2.735	3.628	1.930
RiskMetrics	2.188	3.724	3.720	3.611	3.855	2.611
Uncond. EVT	1.094	3.724	2.079	2.626	2.494	1.476
Uncond. Normal	1.094	4.272	2.626	3.829	3.175	1.476
Uncond. Student-t	0.985	3.834	2.407	3.611	3.175	1.249

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Uma violação é dita ocorrida quando a perda observada é maior que a medida de risco estimada no dia anterior,  $x_{t+1} > VaR_{\alpha}^t$  para um  $\alpha$  dentro do conjunto de níveis de

significância, neste artigo  $\alpha \in \{0,975; 0,990\}$ . A [Tabela 6](#) apresenta em termos percentuais as violações ocorridas para cada um dos modelos para os níveis de cobertura dados.

No primeiro período analisado, todos os modelos subestimaram o real risco de grandes perdas, sendo que modelos incondicionais foram os casos mais graves. Quando analisado o segundo período, de baixa volatilidade, os modelos incondicionais passaram a superestimar o risco, enquanto que as contrapartes condicionais para a cobertura de 1% tenderam a subestimá-lo, exceção feita ao EVT condicional que apresentou resultados em torno do nível de cobertura esperado.

Entretanto, esta simples visualização de percentual de violações não é uma ferramenta definitiva para averiguar a qualidade de um modelo, necessita-se de testes estatísticos formais para tanto.

### 7.2.1 Testes estatísticos

Pode ser realizado um teste estatístico para verificar se o modelo para  $VaR_\alpha$  foi corretamente especificado levando-se em consideração o seu nível de cobertura,  $1 - \alpha$ . Este teste foi originalmente proposto por [Kupiec \(1995\)](#) e pretende derivar propriedades estatísticas formais do teste utilizado para verificar a precisão de modelos VaR. Este teste permite inferir se a frequência de violações ao VaR é consistente com o valor esperado destas, o nível de cobertura. Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado o número de violações segue uma distribuição binomial e o teste toma a forma de razão de verossimilhança com a seguinte estatística:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left( \frac{(1-p)^{N-X} p^X}{\left(1 - \frac{X}{N}\right)^{N-X} \left(\frac{X}{N}\right)^X} \right) \quad (7.1)$$

onde  $p$  é o nível de cobertura,  $N$  é o número de observações do período fora da amostra e  $X$  neste caso é o número de violações ocorridas.

Este teste não faz nenhum tipo de assunção, e por conseguinte não testa, a hipótese de independência entre as violações, sendo considerado um teste de cobertura *incondicional* para o VaR.

Um teste condicional é aquele proposto, entre outros, por [Christoffersen e Pelletier \(2004\)](#). A hipótese de independência entre as violações está relacionada a duração entre as observações destas. O tempo que se passa entre uma violação e outra deve ser independente e não formar agrupamentos (*clusters*). Sob a hipótese nula de um modelo corretamente especificado, a duração não deve possuir memória. Como a única distribuição contínua que não possui memória é a distribuição exponencial, os autores propuseram ajustar os dados a uma distribuição Weibull da qual a exponencial é um caso particular quando o parâmetro  $b = 1$  e, portanto, o teste é feito sobre este parâmetro. O teste de duração de

Christoffersen é feito sob a forma de razão de verossimilhança, sendo a função densidade de uma Weibull:

$$f_W(D; a, b) = \begin{cases} a^b b D^{b-1} e^{-(aD)^b}, & D \geq 0 \\ 0, & D < 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

onde  $D$  é a duração entre as violações e  $a$  e  $b$  são os parâmetros da distribuição.

Nota-se que este teste é destinado apenas a verificação da hipótese de independência das violações. Em conjunto com o teste de Kupiec, a [Tabela 7](#) fornece um panorama completo sobre a adequação das especificações de modelos VaR.

Tabela 7 – Testes estatísticos para VaR. Teste de Kupiec,  $LRuc$ , teste de duração de Christoffersen e Pelletier,  $LRdur$ . Modelos testados são: EVT condicional (cevt), Normal condicional (cnorm), t-Student condicional (ct), Riskmetrics (riskmetrics), EVT incondicional (uevt), Normal incondicional (unorm) e t-Student incondicional (ut).

Modelo	Estatística	Euro/Dollar	MSCI-C	MSCI-I	MSCI-W	NAREIT	Treasuries
<b>Cobertura de 1.0%</b>							
<i>período 1</i>							
cevt	LRuc	6.74 ***	6.74 ***	4.23 **	16.83 ***	1.53	3.60 *
	LRdur	0.77	1.31	0.12	0.42	0.71	1.93
cnorm	LRuc	11.35 ***	32.49 ***	16.83 ***	35.01 ***	8.37 ***	8.90 ***
	LRdur	1.21	0.12	0.38	3.04 *	3.14 *	2.31
ct	LRuc	11.35 ***	35.01 ***	20.92 ***	40.25 ***	8.37 ***	8.90 ***
	LRdur	1.21	0.32	1.90	4.96 **	3.14 *	2.31
riskmetrics	LRuc	1.45	18.84 ***	14.91 ***	13.08 ***	2.33	4.74 **
	LRdur	0.24	0.01	0.69	0.13	0.24	0.07
uevt	LRuc	35.01 ***	54.38 ***	32.49 ***	79.73 ***	127.93 ***	47.70 ***
	LRdur	7.69 ***	37.96 ***	37.49 ***	34.02 ***	34.69 ***	7.39 ***
unorm	LRuc	45.73 ***	100.65 ***	57.37 ***	107.95 ***	172.85 ***	56.58 ***
	LRdur	9.92 ***	30.90 ***	36.90 ***	34.42 ***	37.42 ***	5.59 **
ut	LRuc	11.35 ***	66.66 ***	32.49 ***	63.51 ***	124.05 ***	29.10 ***
	LRdur	13.82 ***	37.05 ***	37.49 ***	33.23 ***	34.04 ***	14.64 ***
<i>período 2</i>							
cevt	LRuc	2.27	0.36	0.15	0.15	0.41	1.05
	LRdur	2.03	0.67	0.03	0.15	0.01	0.58
cnorm	LRuc	0.55	3.19 *	6.76 ***	4.25 **	7.42 ***	0.51
	LRdur	6.20 **	0.96	2.51	0.03	0.26	0.14
ct	LRuc	0.55	3.19 *	9.73 ***	5.45 **	8.92 ***	0.16
	LRdur	6.20 **	0.96	2.13	0.36	0.68	0.03
riskmetrics	LRuc	0.08	6.78 ***	9.73 ***	11.37 ***	10.53 ***	1.76
	LRdur	0.40	0.49	0.68	3.55 *	0.04	0.00
uevt	LRuc	2.27	0.83	0.08	1.46	0.00	1.02
	LRdur	2.03	1.68	0.02	12.57 ***	3.91 **	2.59
unorm	LRuc	0.55	4.27 **	2.25	11.37 ***	6.03 **	1.97
	LRdur	2.64	1.99	7.68 ***	14.49 ***	1.62	3.68 *
ut	LRuc	3.70 *	0.55	0.08	1.46	0.50	1.97
	LRdur	0.39	0.13	0.02	12.57 ***	3.92 **	3.68 *

Tabela 7 – (continuação)

Modelo	Estatística	Euro/Dollar	MSCI-C	MSCI-I	MSCI-W	NAREIT	Treasuries
<b>Cobertura de 2.5%</b>							
<i>período 1</i>							
cevt	LRuc	4.05 **	11.97 ***	6.59 **	14.49 ***	0.49	2.03
	LRdur	0.59	0.33	5.62 **	6.27 **	2.75 *	0.02
cnorm	LRuc	5.69 **	33.42 ***	24.78 ***	20.10 ***	5.94 **	1.51
	LRdur	0.23	0.58	2.69	7.91 ***	1.10	0.06
ct	LRuc	4.05 **	33.42 ***	20.10 ***	18.63 ***	3.52 *	1.05
	LRdur	0.31	0.58	3.21 *	9.26 ***	0.34	0.04
riskmetrics	LRuc	2.08	8.58 ***	6.59 **	7.56 ***	0.81	2.03
	LRdur	1.05	0.41	0.59	0.38	0.02	0.70
uevt	LRuc	39.08 ***	57.97 ***	35.27 ***	103.32 ***	96.38 ***	33.96 ***
	LRdur	4.64 **	38.80 ***	35.96 ***	18.11 ***	0.00	7.72 ***
unorm	LRuc	45.06 ***	84.59 ***	67.23 ***	103.32 ***	133.80 ***	37.77 ***
	LRdur	5.27 **	23.85 ***	22.40 ***	18.44 ***	0.00	6.62 **
ut	LRuc	39.08 ***	95.13 ***	76.97 ***	114.61 ***	149.28 ***	30.31 ***
	LRdur	4.59 **	20.07 ***	21.08 ***	17.60 ***	0.00	8.90 ***
<i>período 2</i>							
cevt	LRuc	1.14	0.00	0.00	0.38	0.17	0.80
	LRdur	0.01	0.12	0.72	0.77	0.07	0.00
cnorm	LRuc	2.35	2.71	1.11	0.06	4.05 **	0.80
	LRdur	0.32	0.05	0.48	1.81	0.14	0.00
ct	LRuc	3.14 *	1.58	1.11	0.20	4.05 **	1.27
	LRdur	1.27	0.02	0.48	2.46	0.14	0.01
riskmetrics	LRuc	0.38	4.89 **	4.86 **	4.07 **	5.71 **	0.04
	LRdur	0.09	2.27	0.86	3.70 *	0.18	0.42
uevt	LRuc	9.36 ***	4.89 **	0.71	0.06	0.00	4.44 **
	LRdur	0.01	14.87 ***	8.30 ***	21.05 ***	2.27	2.09
unorm	LRuc	9.36 ***	9.73 ***	0.06	5.71 **	1.52	4.44 **
	LRdur	0.01	17.46 ***	11.10 ***	25.85 ***	2.85 *	2.09
ut	LRuc	11.14 ***	5.74 **	0.03	4.07 **	1.52	6.92 ***
	LRdur	0.01	15.80 ***	11.73 ***	23.46 ***	2.85 *	0.63

Nota: \* p < 0.1; \*\* p < 0.05; \*\*\* p < 0.001

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Inspecionando a [Tabela 7](#), pode-se verificar novamente que no período 1 todos os modelos tiveram um desempenho ruim, especialmente os incondicionais. Em geral, os modelos tiveram mais rejeições na primeira janela de *backtesting* quando comparados ao segundo período, exceção feita ao *riskmetrics*, que teve um desempenho melhor no período 1. Esse modelo não teve rejeições no período 1 para ativos em Euro/Dólar e NAREIT em ambos os níveis de cobertura. Modelos incondicionais, por outro lado, foram rejeitados em ambos os testes para todos os ativos durante o primeiro *backtesting*, sinalizando clara inadequação desses modelos para esse período.

Ao olhar para a segunda janela fora da amostra, *riskmetrics* apresenta rejeições no teste de cobertura incondicional, em quatro ativos em ambos os níveis de cobertura. Foi o modelo condicional mais rejeitado para esse período, mostrando que a aparentemente

melhor especificação de modelo de risco para um ambiente de volatilidade crescente não mantém suas propriedades em condições normais. Para esta segunda janela, o modelo de risco EVT condicional teve um desempenho claramente melhor que seus concorrentes, já que não apresentou rejeições de um modelo bem especificado sob níveis de cobertura de 1% e 2,5%.

A [Tabela 8](#) apresenta um resumo contendo o número de rejeições de hipóteses nulas nos dois períodos, níveis de cobertura e ativos. Enquanto *riskmetrics* teve o menor número de rejeições no período 1, seguido de *cevt*; durante o segundo período o modelo EVT condicional não apresentou rejeições e foi aquele com melhor desempenho. Modelos condicionais apresentam bons resultados no teste de independência (LRdur) em oposição aos modelos incondicionais. Para o teste de cobertura incondicional (LRuc), os resultados são menos evidentes, no entanto, para o período 2, parece haver uma vantagem dos modelos condicionais, dentre os quais *cevt* se destaca.

Tabela 8 – Sumário do número de rejeições de um modelo bem especificado. Nível de confiança a 95%.

Modelo	Cobertura de 1.0%		Cobertura de 2.5%		Total
	LRdur	LRuc	LRdur	LRuc	
<b>Período 1</b>					
<i>cevt</i>	0	4	2	4	<b>10</b>
<i>cnorm</i>	0	6	1	5	<b>12</b>
<i>ct</i>	1	6	1	4	<b>12</b>
<i>riskmetrics</i>	0	4	0	3	<b>7</b>
<i>uevt</i>	6	6	5	6	<b>23</b>
<i>unorm</i>	6	6	5	6	<b>23</b>
<i>ut</i>	6	6	5	6	<b>23</b>
<b>Período 2</b>					
<i>cevt</i>	0	0	0	0	<b>0</b>
<i>cnorm</i>	1	3	0	1	<b>5</b>
<i>ct</i>	1	3	0	1	<b>5</b>
<i>riskmetrics</i>	0	4	0	4	<b>8</b>
<i>uevt</i>	2	0	3	3	<b>8</b>
<i>unorm</i>	2	3	3	4	<b>12</b>
<i>ut</i>	2	0	3	4	<b>9</b>

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

### 7.2.2 Teste MCS de Hansen

Outra forma de avaliar os modelos e buscar identificar aqueles superiores para um determinado nível de confiança e uma dada função de perda, é o *Model Confidence Set* - MCS de [Hansen, Lunde e Nason \(2011\)](#). O MCS é um conjunto de modelos construído

de tal forma que contenha apenas os melhores modelos dado um nível de confiança. O MCS é, de certa forma, o análogo do intervalo de confiança para um parâmetro escalar. O "melhor" modelo é avaliado através de uma função de perda a ser definida pelo pesquisador.

A função de perda adotada neste trabalho é aquela definida em [González-Rivera, Lee e Mishra \(2004\)](#) como uma medida de ajuste para um modelo de VaR. A função  $\tilde{Q}$  ajustada para suavidade é definida no citado artigo como sendo:

$$\tilde{Q} = N_o^{-1} \sum_{t=n}^{m-1} \left[ m_\delta(x_{t+1}, VaR_\alpha^t) - (1 - \alpha) \right] (x_{t+1} - VaR_\alpha^t) \quad (7.3)$$

onde  $N_o = (m - 1) - n$  é o número de observações fora da amostra menos uma observação, garantindo que o teste é feito para as estimativas de  $VaR_\alpha^t$  apenas no período fora da amostra. A função  $m_\delta(a, b) = \{1 + \exp[-\delta(a - b)]\}^{-1}$  toma o lugar da função indicador de ocorrência de uma violação e o parâmetro  $\delta > 0$  controla a suavidade da curva. Esta é uma função assimétrica que penaliza mais fortemente as violações ao VaR, sendo que valores mais baixos de  $\tilde{Q}$  sinalizam um melhor ajuste.

O procedimento MCS é realizado de tal forma que é definido um conjunto  $M^0$  contendo todos os  $i$  modelos a serem testados, sendo  $t$  o indexador de tempo e  $L_{i,t}(\cdot)$  a função de perda. A ordenação dos modelos é então baseada na diferença, par a par, das funções de perdas dos modelos,  $d_{ij,t} = L_{i,t} - L_{j,t}$ ,  $\forall i, j \in M^0$ . O conjunto de melhores modelos, chamado conjunto superior, pode ser definido como,  $M^* \equiv \{i \in M^0 : E[d_{ij,t}] \leq 0, \forall j \in M^0\}$  e é calculado de forma iterativa através de uma sequência de testes de significância, com os modelos inferiores sendo retirados do conjunto.

Os valores p, que podem ser utilizados para o ranqueamento dos modelos, com o melhor modelo possuindo valor  $p = 1$  e modelos excluídos do conjunto superior com  $p < \alpha$ , sendo  $\alpha$  o nível de significância escolhido para o teste, se baseiam na estatística  $T_{R,M}$  proposta pelos autores, a qual mede a performance relativa de um modelo com relação a média dos modelos contidos em  $M^*$ . A [Tabela 9](#) apresenta estes valores p para todos os modelos dado um nível de cobertura da medida de risco, para cada um dos ativos estudados.

Tabela 9 – Teste Conjunto de Confiança de Modelos. Para cada modelo, período e cobertura o valor p da estatística *range* é apresentado.

Modelo	Euro/Dollar	MSCI-C	MSCI-I	MSCI-W	NAREIT	Treasuries
<b>Cobertura de 1.0%</b>						
<i>período 1</i>						
cevt	0.749	1.000	1.000	1.000	0.988	0.488
cnorm	0.251	0.038	0.129	0.013	0.266	0.039
ct	0.251	0.002	0.017	0.003	0.155	0.488
riskmetrics	1.000	0.221	0.301	0.964	1.000	1.000
uevt	0.032	0.001	0.007	0.000	0.000	0.004

Tabela 9 – (continuação)

	Modelo	Euro/Dollar	MSCI-C	MSCI-I	MSCI-W	NAREIT	Treasuries
	unorm	0.000	0.000	0.007	0.000	0.000	0.000
	ut	0.251	0.000	0.007	0.000	0.000	0.005
<i>período 2</i>							
	cevt	0.513	1.000	1.000	1.000	1.000	0.939
	cnorm	1.000	0.911	0.607	0.682	0.614	0.939
	ct	0.968	0.911	0.273	0.412	0.294	1.000
	riskmetrics	0.968	0.911	0.273	0.412	0.294	0.000
	uevt	0.307	0.911	0.273	0.236	0.294	0.000
	unorm	0.513	0.911	0.273	0.232	0.294	0.857
	ut	0.307	0.911	0.273	0.412	0.294	0.000
<b>Cobertura de 2.5%</b>							
<i>período 1</i>							
	cevt	0.242	1.000	1.000	0.403	0.681	0.096
	cnorm	0.103	0.001	0.014	0.020	0.681	0.781
	ct	0.069	0.021	0.056	0.056	0.681	0.781
	riskmetrics	1.000	0.450	0.328	1.000	1.000	1.000
	uevt	0.030	0.001	0.002	0.000	0.000	0.015
	unorm	0.000	0.001	0.002	0.000	0.000	0.015
	ut	0.030	0.001	0.002	0.000	0.000	0.015
<i>período 2</i>							
	cevt	0.485	1.000	1.000	0.641	1.000	1.000
	cnorm	1.000	0.340	0.895	0.641	0.402	0.510
	ct	0.182	0.655	0.895	1.000	0.492	0.510
	riskmetrics	0.485	0.282	0.835	0.127	0.402	0.510
	uevt	0.136	0.143	0.698	0.014	0.402	0.510
	unorm	0.182	0.138	0.835	0.019	0.402	0.510
	ut	0.000	0.143	0.835	0.019	0.402	0.086

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

A [Tabela 10](#) apresenta um resumo para o número de exclusões do conjunto superior para cada modelo. O teste MCS parece estar de acordo com os testes estatísticos apresentados anteriormente na subseção [7.2.1](#). No período 1, os modelos *riskmetrics* e *cevt* não tiveram exclusões do conjunto superior, embora, ao se examinar mais atentamente a [Tabela 9](#), é possível ver que *riskmetrics* foi considerado o melhor modelo (valor p igual a 1) um número maior de vezes e, em uma ocasião, para Treasuries e uma cobertura de 2,5% *cevt* estava na margem a ser excluído do conjunto superior com um valor p de 0,09.

No período 2, *riskmetrics* não é mais o melhor modelo e parece haver um empate entre *cevt*, *cnorm* e *ct*, todos sem exclusões do conjunto superior. Mas, novamente, analisando a [Tabela 9](#), verifica-se que, para ambas as coberturas, o modelo *cevt* foi selecionado como o melhor em 4 de 6 ativos.

Tabela 10 – Sumário de exclusões do conjunto superior.

Modelo	Cobertura de 1.0%	Cobertura de 2.5%	<b>Total</b>
<b>Período 1</b>			
cevt	0	0	<b>0</b>
cnorm	3	3	<b>6</b>
ct	3	1	<b>4</b>
riskmetrics	0	0	<b>0</b>
uevt	6	6	<b>12</b>
unorm	6	6	<b>12</b>
ut	5	6	<b>11</b>
<b>Período 2</b>			
cevt	0	0	<b>0</b>
cnorm	0	0	<b>0</b>
ct	0	0	<b>0</b>
riskmetrics	1	0	<b>1</b>
uevt	1	1	<b>2</b>
unorm	0	1	<b>1</b>
ut	1	2	<b>3</b>

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Todos estes testes convalidam o que tem sido encontrado na literatura recente sobre a teoria do valor extremo quando aplicada a séries de ativos financeiros para o cálculo de Valor em Risco, o modelo EVT condicional apresenta melhores resultados que as demais especificações tanto em testes de cobertura incondicional quanto de duração entre violações. De forma surpreendente e não encontrada em outra referência, obteve-se um resultado em que a metodologia Riskmetrics apresentou resultados melhores quando tomado um período de teste de alta volatilidade.



## 8 CONCLUSÕES

Este estudo teve como objetivo estimar e comparar sete modelos de VaR para seis ativos de diferentes classes em dois períodos distintos. O primeiro período, cobrindo a grande crise financeira, é um regime de alta volatilidade, enquanto o segundo período se estende de meados de 2015 até o final de 2018 e é considerado como tendo um regime de volatilidade comum. Modelos condicionais e incondicionais foram estudados e comparados com base em três tipos de testes. Ênfase especial foi dada ao modelo EVT condicional, que utiliza a teoria dos valores extremos para obter a medida de risco. Ao comparar o número de violações ao VaR com seus níveis de cobertura, foi possível observar que todos os modelos para todos os seis ativos subestimaram o risco durante o primeiro período, enquanto os resultados foram distribuídos de maneira mais uniforme no período 2.

Em testes estatísticos de cobertura incondicional e independência da duração das violações, o modelo *riskmetrics* apresentou melhor desempenho durante o período 1, de alta volatilidade, o modelo EVT condicional o seguiu em número de rejeições de um modelo bem especificado. Quanto ao período 2, *cevt* teve um desempenho melhor que qualquer outro modelo e não apresentou rejeições. Resultados semelhantes foram encontrados ao aplicar o procedimento Conjunto de Confiança de Modelos, onde *riskmetrics* foi o melhor modelo para o período 1, com uma pequena vantagem sobre *cevt*, enquanto que o último obteve vantagem sobre os demais concorrentes durante a segunda janela de *backtesting*.

Diferentemente da literatura encontrada, concluímos que não é para toda classe de ativos e regime de volatilidade que um modelo EVT condicional seja o melhor para a estimativa do VaR. Ao lidar com volatilidades consideravelmente mais altas no período fora da amostra do que aquelas observadas durante o ajuste, o modelo Riskmetrics apresentou desempenho superior.

Embora os modelos condicionais se mostrem mais adequados para estimar o VaR através dos testes estatísticos apresentados, esse tipo de modelo, devido à sua grande variabilidade ao longo do tempo na estimativa do VaR, impõe uma barreira prática para a sua implementação. Para alterar o VaR tão drasticamente e em curto período de tempo, as instituições financeiras devem poder alterar rapidamente a alocação de ativos de suas carteiras, o que pode não ser viável devido a restrições de mercado quanto à liquidez ou profundidade necessárias para executar essas operações, sem mencionar os custos envolvidos.

O modelo EVT incondicional aqui proposto une duas abordagens, tornando-se um modelo intermediário entre condicional e incondicional. A filtragem através de um modelo xGARCH ainda é realizada e os resíduos padrão resultantes são utilizados para

estimar o quantil desejado através da EVT, entretanto, ao se calcular a medida de risco são utilizados a média e o desvio padrão *incondicionais* do filtro, resultando em menor variabilidade do VaR. Este procedimento ainda apresenta algum grau de agrupamento das violações, porém possui cobertura melhor que os demais modelos incondicionais, conforme a [Tabela 8](#).

Além deste *trade-off* entre superioridade teórica do modelo EVT condicional e sua implementação prática, a medida de risco VaR atualmente está sendo utilizada em conjunto com a *Expected Shortfall*. Esta última pode ser derivada a partir do modelo EVT condicional com facilidade e deve ser abordada em outro trabalho, juntamente com testes específicos para o ES com intuito de averiguação do melhor modelo.

## Referências

- ACERBI, C.; TASCHE, D. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 1487–1503, 2002. Citado na página 21.
- ARTZNER, P. et al. Thinking Coherently. *RISK*, v. 10, n. 11, p. 68–71, 1997. Citado na página 21.
- ARTZNER, P. et al. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999. Citado na página 21.
- BALKEMA, A. A.; HAAN, L. de. Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, v. 2, n. 5, p. 792–804, 1974. Citado na página 42.
- BCBS. *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*. revised ve. [S.l.], 2011. Disponível em: <<http://www.bis.org/publ/bcbs189.pdf>>. Citado na página 19.
- BCBS. *Basel III: The liquidity coverage ratio and liquidity risk monitoring tools*. [S.l.], 2013. Disponível em: <<http://www.bis.org/publ/bcbs238.pdf>>. Citado na página 19.
- BCBS. *Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*. [S.l.], 2013. Disponível em: <<http://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf>>. Citado na página 20.
- BCBS. *Basel III: The net stable funding ratio*. [S.l.], 2014. Disponível em: <<http://www.bis.org/bcbs/publ/d295.pdf>>. Citado na página 19.
- BCBS. *Standards: Minimum capital requirements for market risk*. [S.l.], 2016. Disponível em: <<https://www.bis.org/bcbs/publ/d352.pdf>>. Citado na página 20.
- BCBS. *Basel III: Finalising post-crisis reforms*. [S.l.], 2017. Disponível em: <<https://www.bis.org/bcbs/publ/d424.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- BERKOWITZ, J.; O'BRIEN, J. How accurate are value-at-risk models at commercial banks? *The Journal of Finance*, Blackwell Publishers, Inc., v. 57, n. 3, p. 1093–1111, 2002. ISSN 1540-6261. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/1540-6261.00455>>. Citado na página 26.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 35.
- BOLLERSLEV, T.; CHOU, R. Y.; KRONER, K. F. ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 52, n. 1-2, p. 5–59, 1992. Citado na página 29.
- BOUYÉ, E. et al. Copulas for finance—a reading guide and some applications. 2000. Disponível em: <<https://ssrn.com/abstract=1032533>>. Citado na página 34.
- BYSTRÖM, H. N. Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 133–152, 2004. Citado na página 25.

- CAMPBELL, J. Y. et al. *The econometrics of financial markets*. [S.l.]: princeton University press Princeton, NJ, 1997. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- CHAVEZ-DEMOULIN, V.; DAVISON, A. C.; MCNEIL, A. J. Estimating value-at-risk: a point process approach. *Quantitative Finance*, v. 5, n. 2, p. 227–234, 2005. Citado na página 25.
- CHAVEZ-DEMOULIN, V.; EMBRECHTS, P.; HOFERT, M. An Extreme Value Approach for Modeling Operational Risk Losses Depending on Covariates. *Journal of Risk and Insurance*, v. 83, n. 3, p. 735–776, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/jori.12059>>. Citado na página 26.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. *Copula methods in finance*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado na página 34.
- CHRISTOFFERSEN, P.; PELLETIER, D. Backtesting value-at-risk: A duration-based approach. *Journal of Financial Econometrics*, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 84–108, 2004. Citado na página 65.
- CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, v. 1, n. 2, p. 223–236, 2001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/713665670>>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 29 e 58.
- DANIELSSON, J.; MORIMOTO, Y. Forecasting extreme financial risk: a critical analysis of practical methods for the japanese market. *Monetary and Economic Studies*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, v. 2, n. 18, p. 25–48, 2000. Citado na página 25.
- DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis, v. 74, n. 366a, p. 427–431, 1979. Citado na página 58.
- DING, Z.; GRANGER, C. W. J.; ENGLE, R. F. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 83–106, 1993. Citado na página 29.
- EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer, 1997. Citado na página 44.
- ENGLE, R. *ARCH: selected readings*. [S.l.]: Oxford University Press, 1995. Citado na página 29.
- ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987, 1982. Citado na página 29.
- ENGLE, R. F.; FOCARDI, S. M.; FABOZZI, F. J. Arch/garch models in applied financial econometrics. In: \_\_\_\_\_. *Encyclopedia of Financial Models*. American Cancer Society, 2012. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118182635.efm0062>>. Citado na página 38.
- FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: II. *Journal of Finance*, v. 46, n. 5, p. 1575–1617, 1991. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2328565?origin=JSTOR-pdf>>. Citado na página 28.

FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 24, p. 180–190, 1928. Citado na página 40.

FISHER, T. J.; GALLAGHER, C. M. New weighted portmanteau statistics for time series goodness of fit testing. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 107, n. 498, p. 777–787, 2012. Citado na página 57.

GENCAY, R.; SELCUK, F. Extreme value theory and value-at-risk: Relative performance in emerging markets. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 20, n. 2, p. 287–303, 2004. Citado na página 25.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 1779–1801, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 51.

GNEDENKO, B. V. Limit theorems for the maximal term of a variational series. *Comptes Rendus (Doklady) de L'Académie des Sciences de l'URSS*, v. 32, p. 7–9, 1941. Citado na página 40.

GNEDENKO, B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, v. 44, p. 423–453, 1943. Citado na página 40.

GONZÁLEZ-RIVERA, G.; LEE, T.-H.; MISHRA, S. Forecasting volatility: A reality check based on option pricing, utility function, value-at-risk, and predictive likelihood. *International Journal of forecasting*, Elsevier, v. 20, n. 4, p. 629–645, 2004. Citado na página 69.

GOURIÉROUX, C. *ARCH Models and Financial Applications*. New York, NY: Springer New York, 1997. (Springer Series in Statistics). ISBN 978-1-4612-7314-1. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1860-9>>. Citado na página 52.

HANSEN, P. R.; LUNDE, A.; NASON, J. M. The model confidence set. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 79, n. 2, p. 453–497, 2011. Citado na página 68.

HAWKES, A. G. Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes. *Biometrika*, v. 58, n. 1, p. 83–90, apr 1971. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2334319?origin=crossref>>. Citado na página 25.

HERRERA, R.; SCHIPP, B. Value at risk forecasts by extreme value models in a conditional duration framework. *Journal of Empirical Finance*, v. 23, p. 33–47, 2013. Citado na página 25.

KARMAKAR, M.; PAUL, S. Intraday risk management in international stock markets: A conditional evt approach. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 44, p. 34–55, 2016. Citado na página 26.

KARMAKAR, M.; SHUKLA, G. K. Managing extreme risk in some major stock markets: An extreme value approach. *International Review of Economics and Finance*, 2014. Citado na página 25.

- KUESTER, K.; MITTNIK, S.; PAOLELLA, M. S. Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, v. 4, n. 1, p. 53–89, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/jjfinec/nbj002>>. Citado na página 25.
- KUPIEC, P. H. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The Journal of Derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 3, n. 2, p. 73–84, 1995. Citado na página 65.
- LALOUX, L. et al. Random matrix theory and financial correlations. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, World Scientific, v. 3, n. 03, p. 391–397, 2000. Citado na página 33.
- LONGIN, F. M. From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, v. 24, n. 7, p. 1097 – 1130, 2000. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426699000771>>. Citado na página 26.
- MCNEIL, A. J.; FREY, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, v. 7, n. 3-4, p. 271–300, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 25, 47 e 63.
- MCNEIL, A. J.; FREY, R.; EMBRECHTS, P. *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*. Revised ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 29, 32 e 61.
- NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, v. 59, n. 2, p. 347–370, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 51.
- O'BRIEN, J.; SZERSZEŃ, P. J. An evaluation of bank measures for market risk before, during and after the financial crisis. *Journal of Banking & Finance*, v. 80, n. Supplement C, p. 215 – 234, 2017. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426617300511>>. Citado na página 26.
- PAGAN, A. The econometrics of financial markets. *Journal of Empirical Finance*, v. 3, n. 1, 1996. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0927539895000208>>. Citado na página 27.
- PFAFF, B. *Financial risk modelling and portfolio optimization with R*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 32.
- PICKANDS, J. Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Annals of Statistics*, v. 3, p. 119–131, 1975. Citado na página 42.
- RISKMETRICS. *Technical Document - 3rd Edition*. New York, NY, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 20, 31, 53 e 63.
- ROCCO, M. Extreme Value Theory in Finance: a Survey. *Journal of Economic Surveys*, Wiley Online Library, v. 28, n. 1, p. 82–108, jul 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-6419.2012.00744.x>>. Citado na página 26.
- TSAY, R. S. *Analysis of financial time series*. 3. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 36.

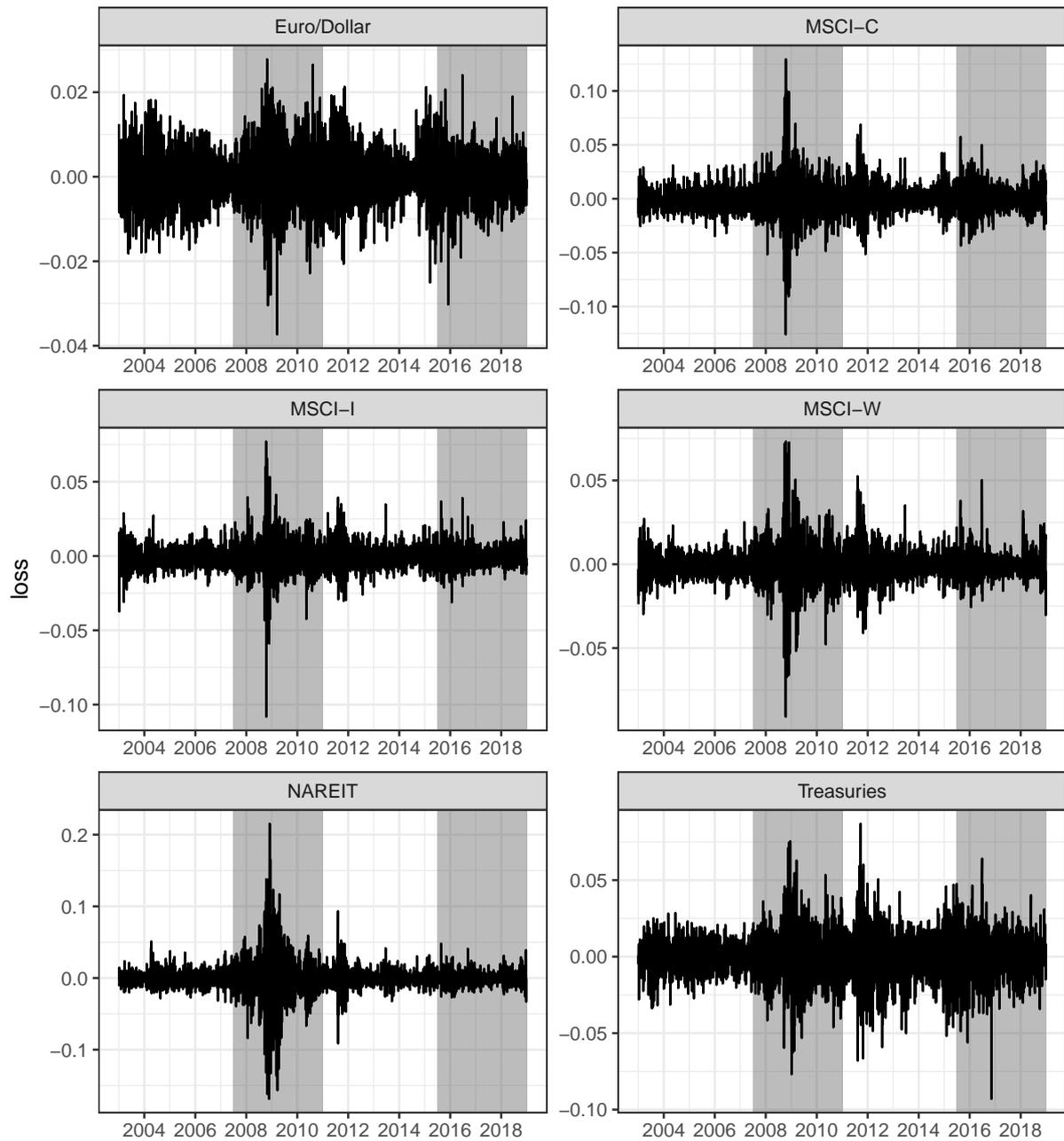
---

WONG, M. C. S.; CHENG, W. Y.; WONG, C. Y. P. Market risk management of banks: implications from the accuracy of value-at-risk forecasts. *Journal of Forecasting*, Wiley Online Library, v. 22, n. 1, p. 23–33, 2003. Citado na página 26.



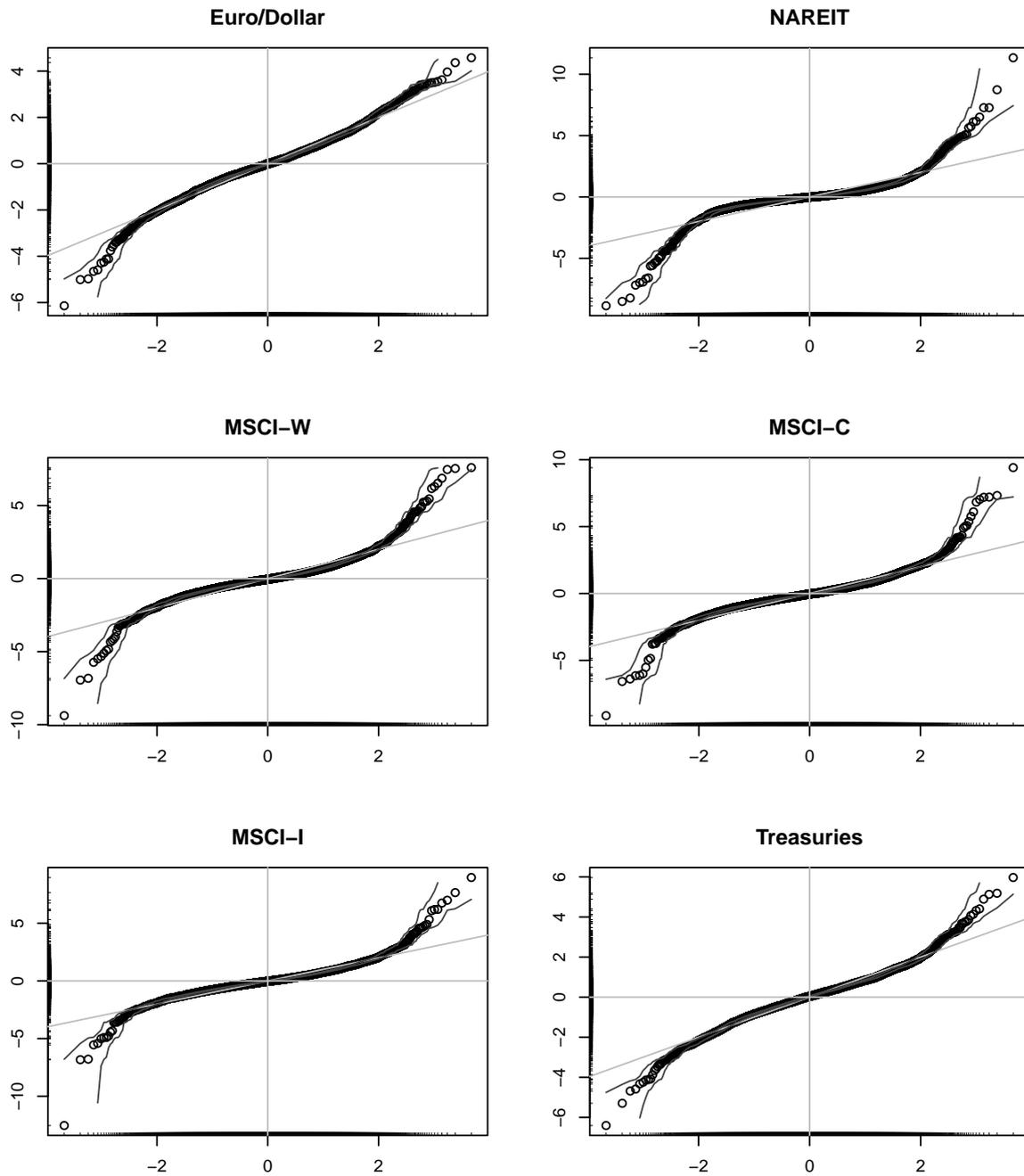
# ANEXO A – FIGURAS

Figura 4 – Séries de perdas dos ativos, período completo. Áreas sombreadas representam os períodos de *backtesting*.



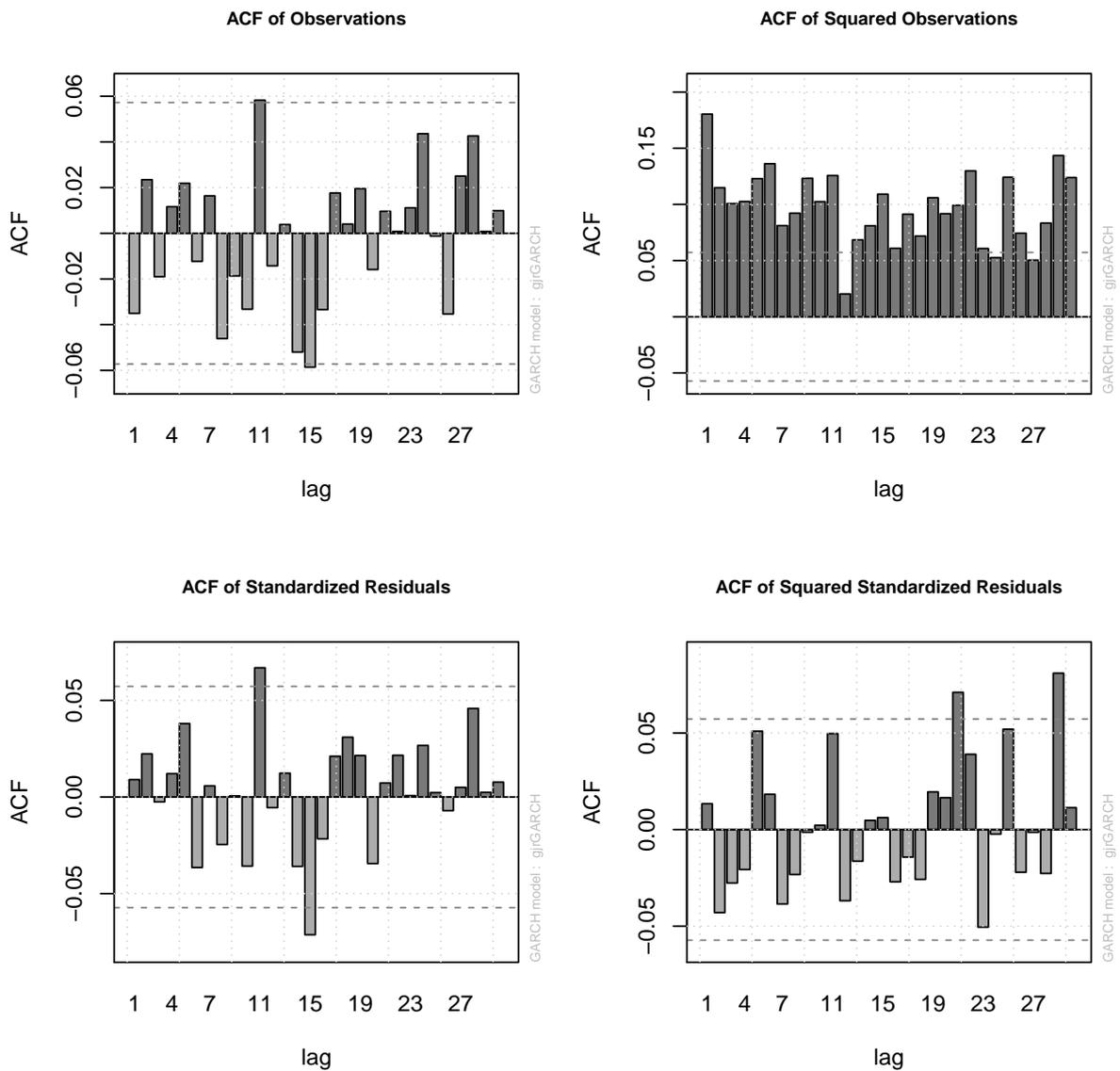
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 5 – Análise de normalidade dos retornos através de gráficos quantil-quantil.



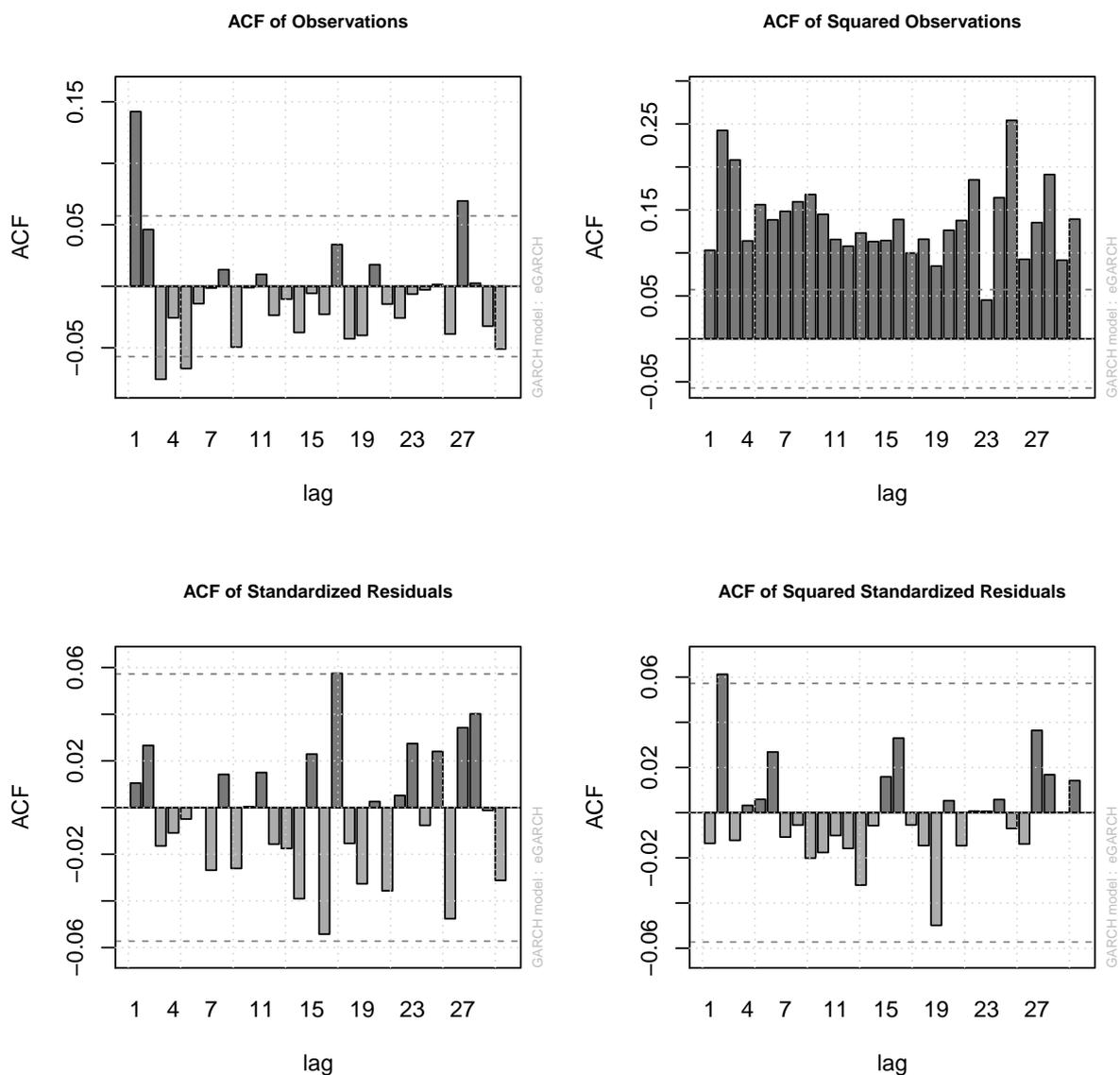
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 6 – Euro-Dólar. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra.



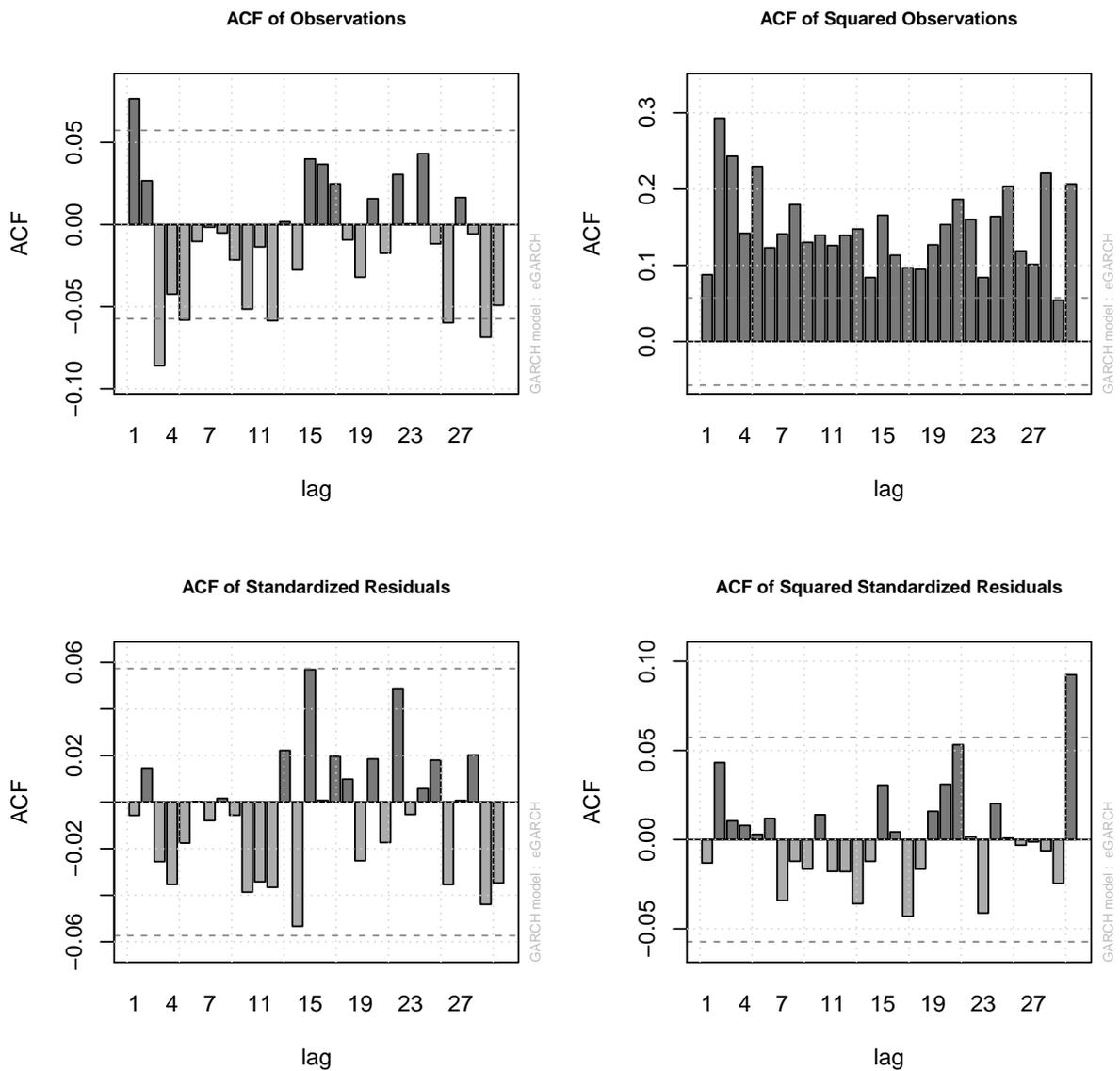
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 7 – MSCI-C. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra.



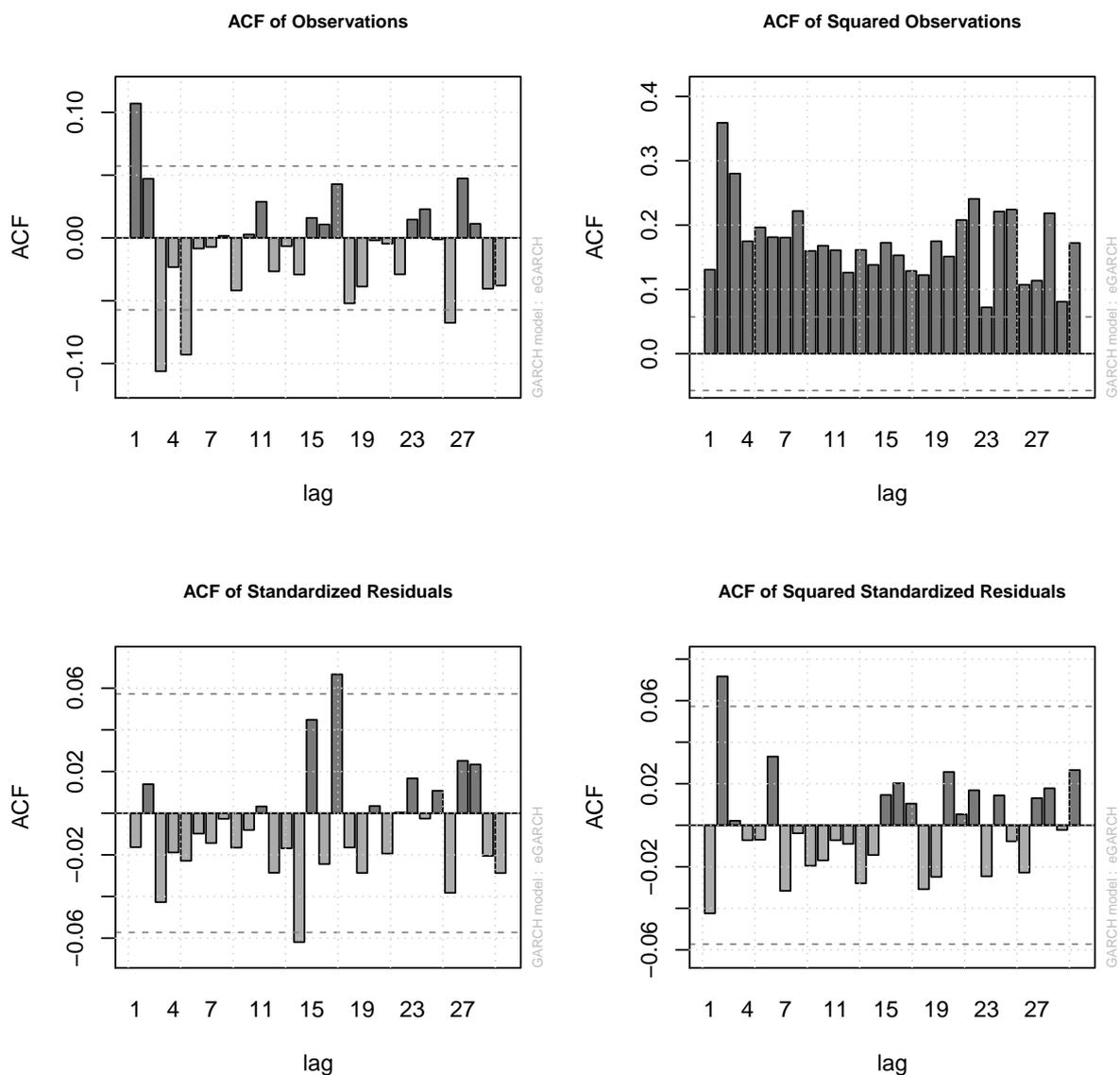
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 8 – MSCI-I. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra.



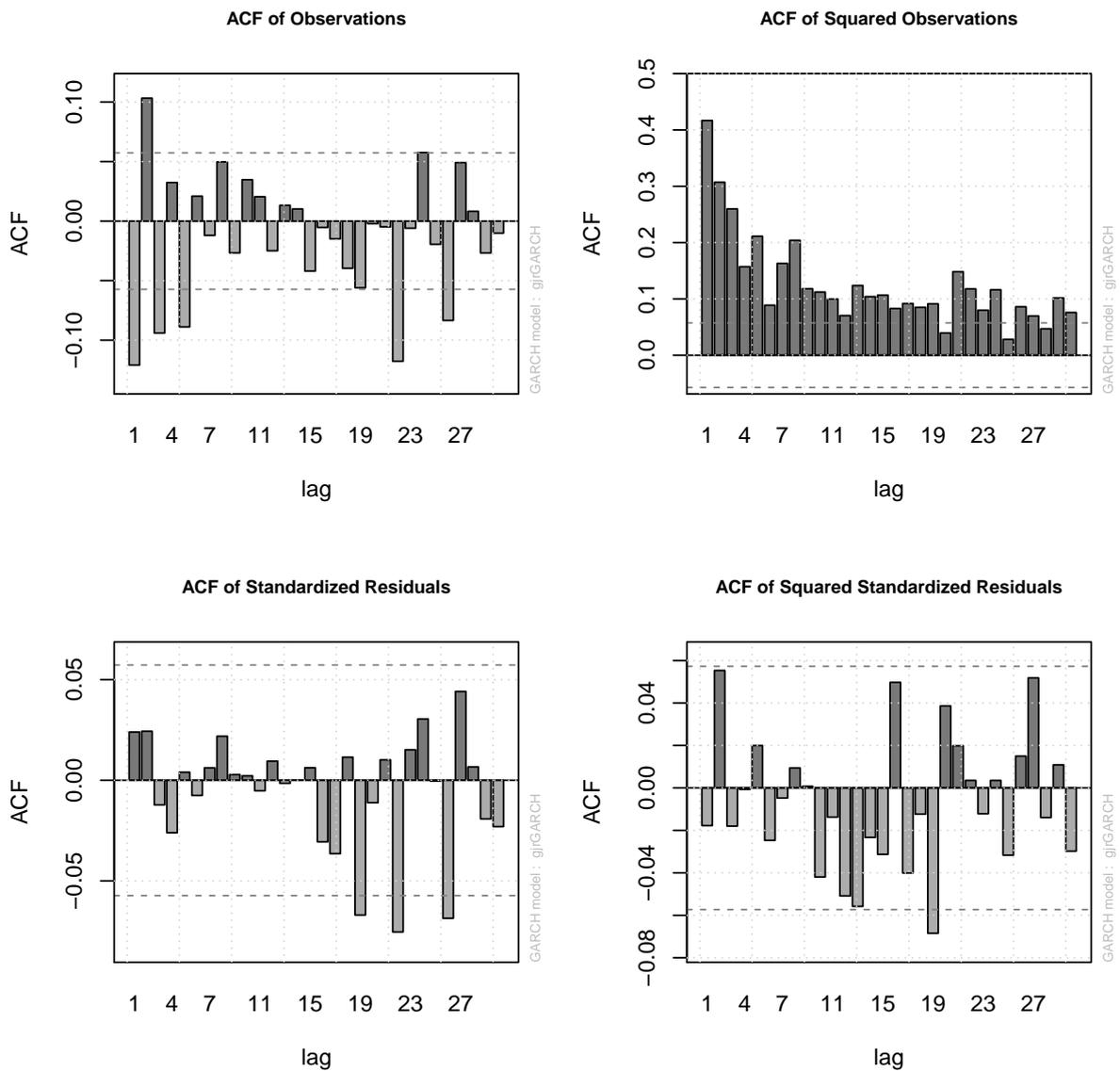
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 9 – MSCI-W. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra.



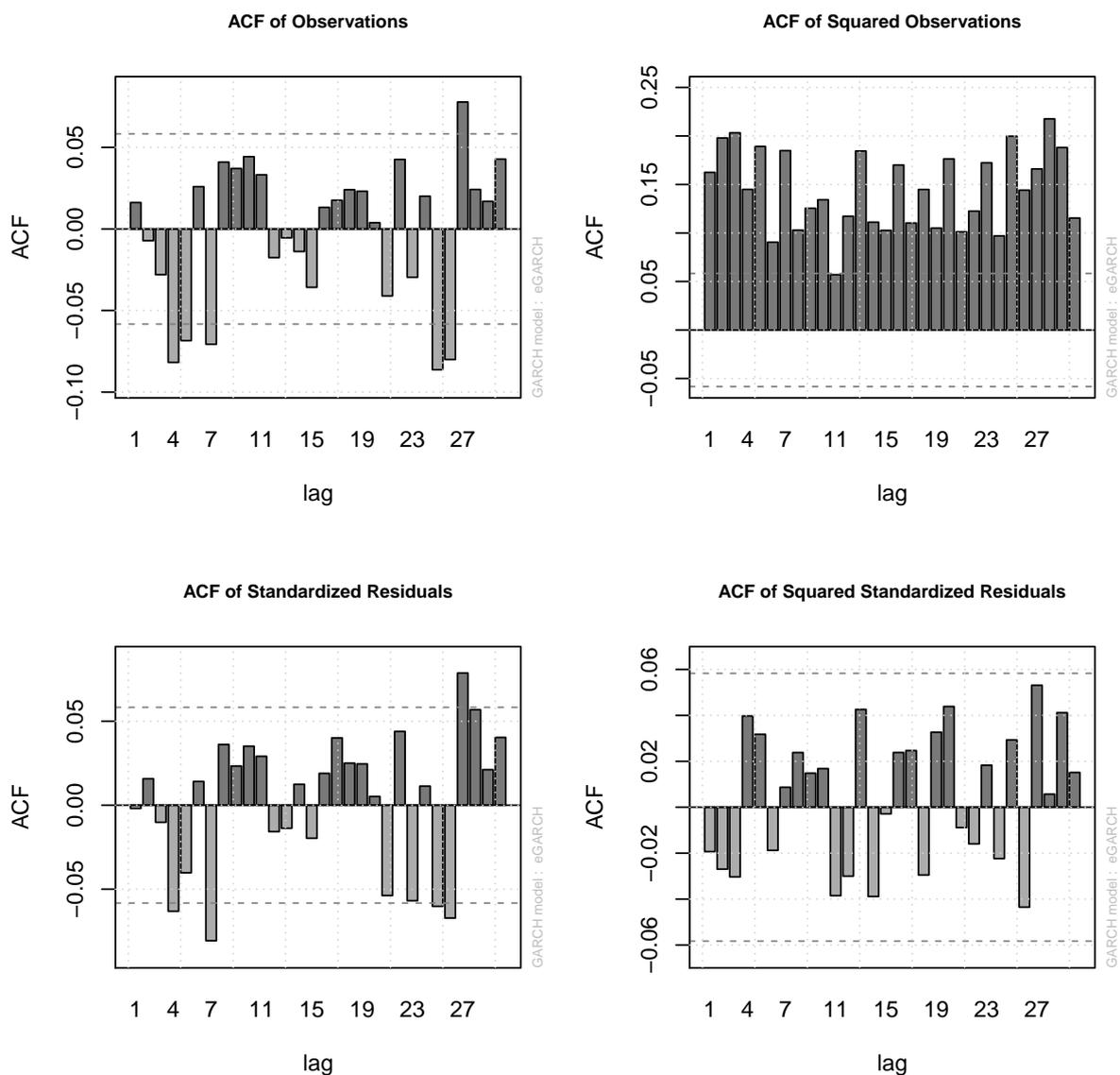
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 10 – NAREIT. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra.



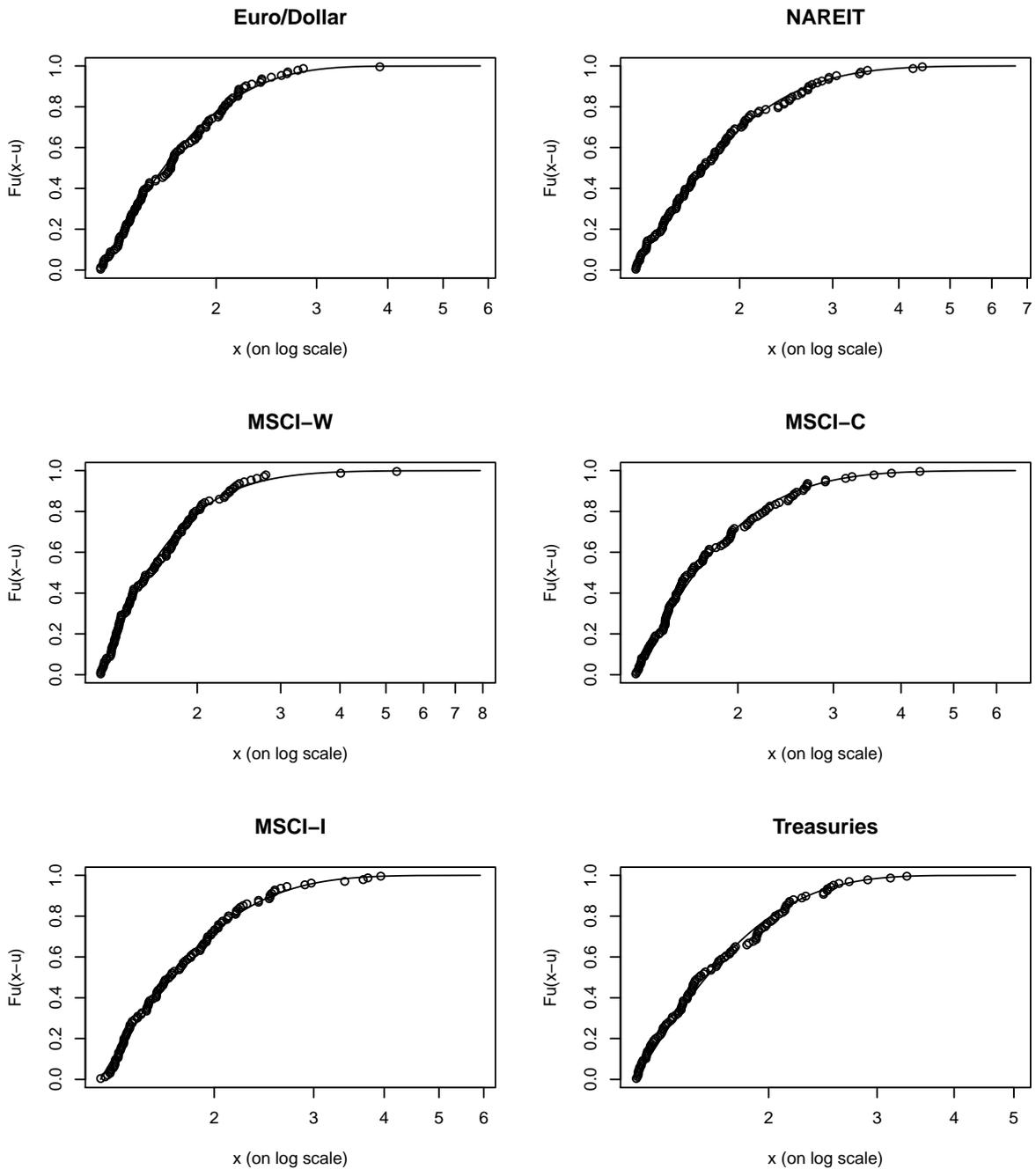
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 11 – Treasuries. Na parte superior está o ACF das perdas observadas e seus quadrados, enquanto que na parte inferior os resíduos padronizados e seus quadrados após a filtragem GARCH. Segundo período dentro da amostra.



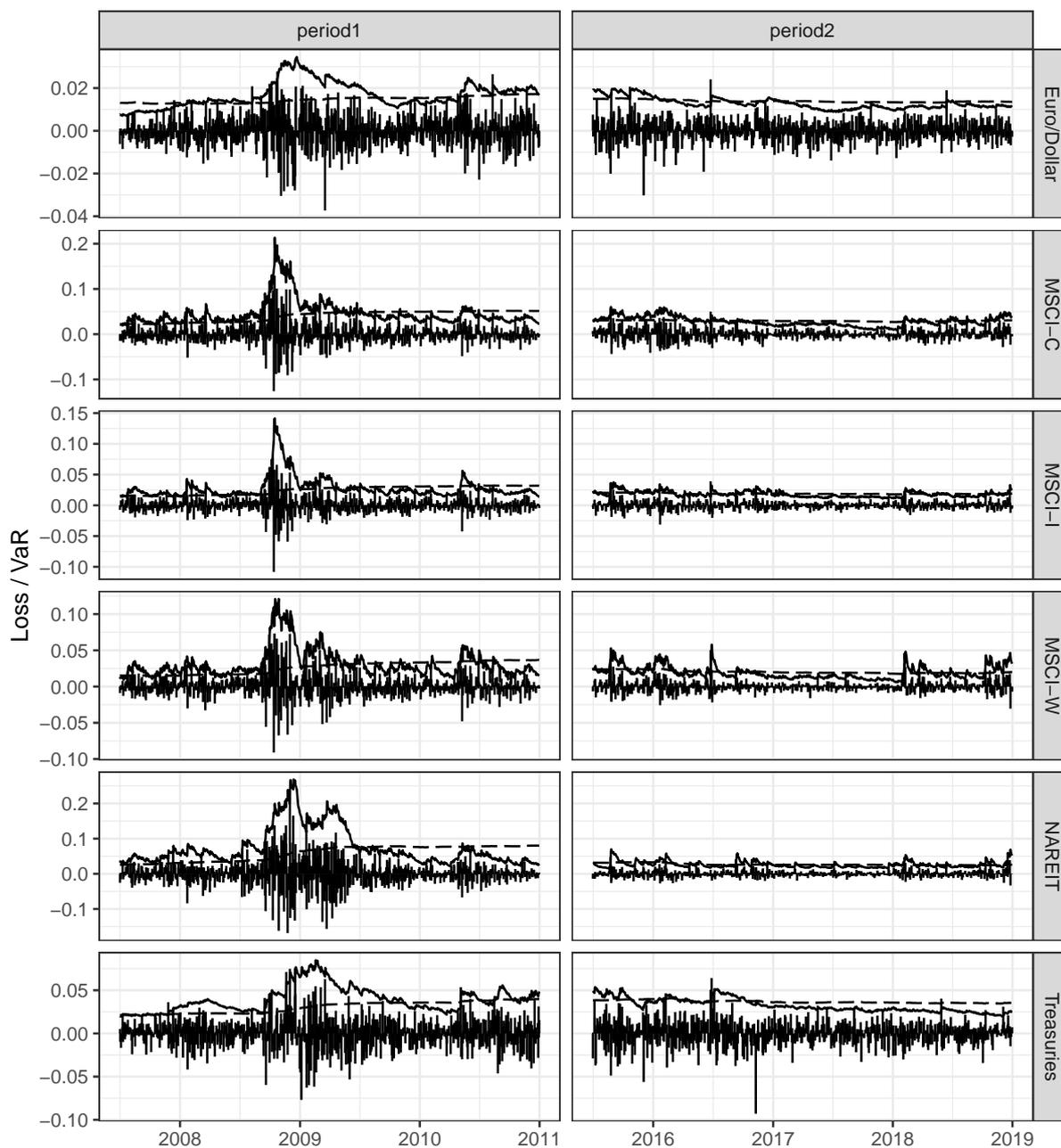
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 12 – Ajuste das inovações em excesso com relação a uma distribuição GPD de referência. Primeiro período dentro da amostra.



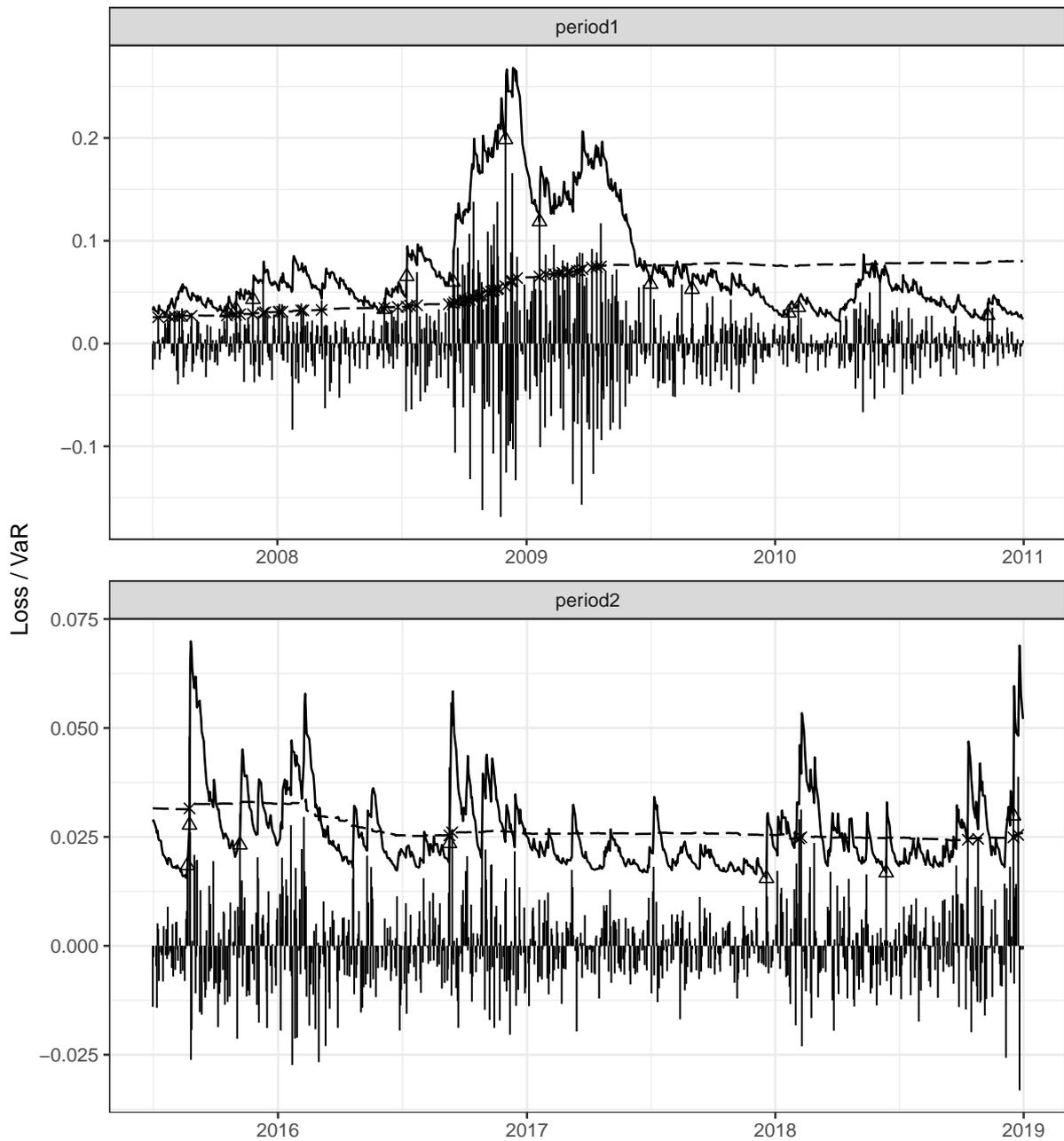
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 13 –  $VaR_{0.99}$  para modelos EVT condicional (linha contínua) e incondicional (linha tracejada). VaR condicional é muito mais responsivo a mudanças na volatilidade do ativo.



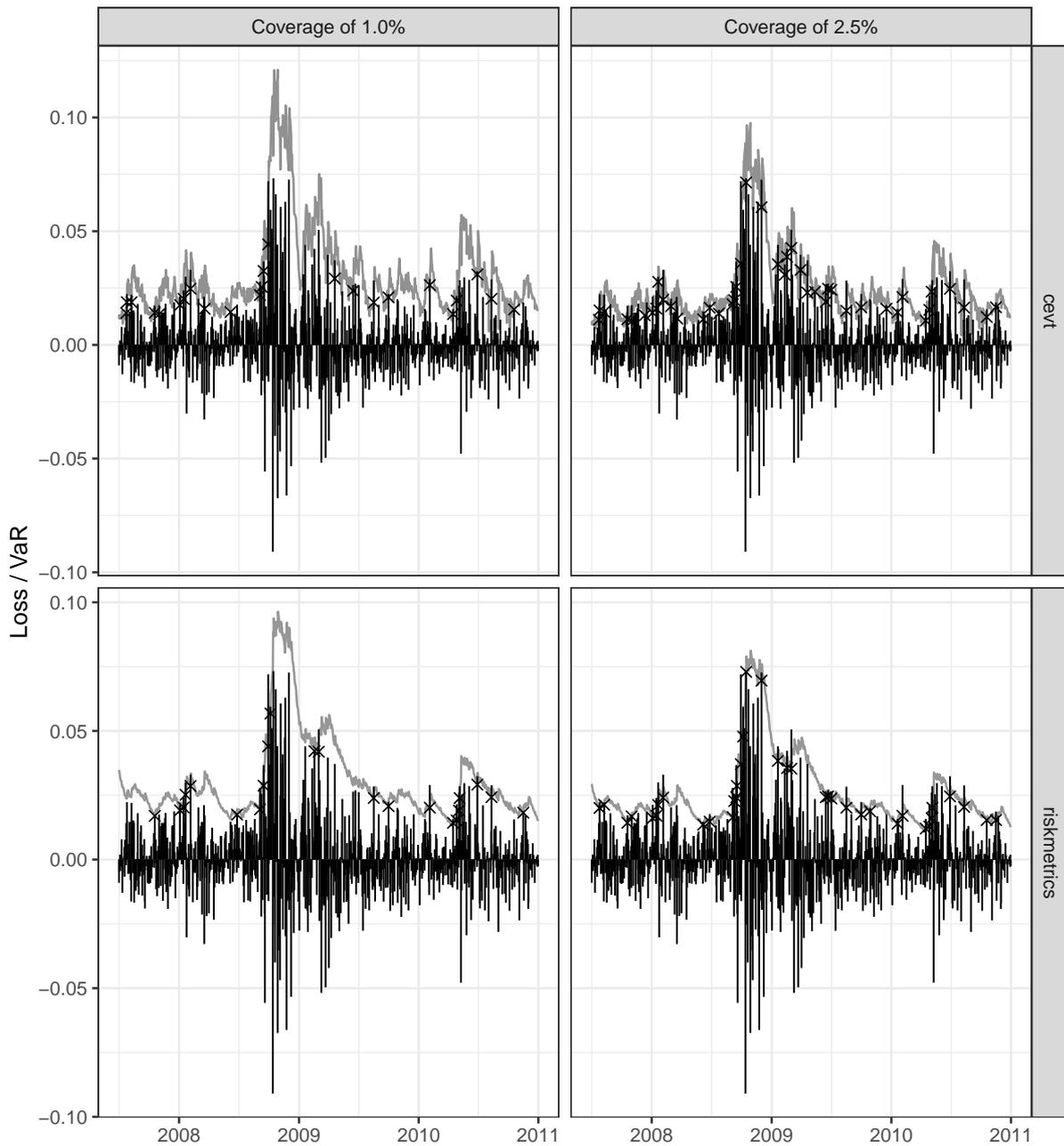
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 14 – Comparação de violações ao  $VaR_{0.99}$  para NAREIT. Violações ao EVT condicional (linha contínua) estão marcadas com triângulos enquanto que cruzeiros marcam violações ao EVT incondicional (linha tracejada).



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Figura 15 – Comparação de violações ao VaR para MSCI-W no período de alta volatilidade. Violações ao EVT condicional e Riskmetrics para as coberturas de 1.0% e 2.5%.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.