Esta dissertação apresenta uma solução para rastreamento de referências variantes no tempo para uma classe de sistemas chaveados não lineares. A considerada classe de sistemas pode incluir funções periódicas na dinâmica do sistema e o chaveamento é realizado através de um termo afim. A ideia é baseada no conceito de modos deslizantes para calcular a proporção de tempo em que cada modo de operação deve ficar ativo para manter o estado do sistema na trajetória desejada a cada instante de tempo através de uma estratégia de controle *Feedforward* baseada na modelagem instantânea. Além disso, um controlador do tipo *Feedback* é proposto para alcançar a estabilização, levando em consideração as limitações físicas do sistema (restrições no sinal de controle) e garantias de performance usando o modelo médio do sistema e a estrutura de Desigualdades Matriciais Lineares – *Linear Matrix Inequalities* (LMI). Devido à natureza particular do sinal de controle proposto, uma estratégia de modulação também é apresentada para sistemas com mais de dois modos de operação.

Orientador: Dr. Tiago Jackson May Dezuo

JOINVILLE, 2019

ANO 2019 LUCAS MOREIRA DE LACERDA

CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS VARIANTES NO TEMPO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA– PPGEEL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS VIA LMI PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS VARIANTES NO TEMPO

LUCAS MOREIRA DE LACERDA

JOINVILLE, 2019

LUCAS MOREIRA DE LACERDA

CONTROLE DE SISTEMAS CHAVEADOS VIA LMI PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS VARIANTES NO TEMPO

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Jackson May Dezuo

JOINVILLE

2019

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lacerda, Lucas Moreira de
Controle de Sistemas Chaveados via LMI para Seguimento de Referências Variantes no Tempo / Lucas Moreira de Lacerda. -- 2019.
98 p.

Orientador: Tiago Jackson May Dezuo
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Joinville, 2019.

1. Seguimento de referência. 2. Controle Feedforward. 3. Controle Feedback. 4. Lei de chaveamento. 5. Sistemas variantes no tempo. I. Dezuo, Tiago Jackson May. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Controle de Sistemas Chaveados via LMI para Seguimento de Referências Variantes no Tempo

por

Lucas Moreira de Lacerda

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Área de concentração em "Sistemas Eletroeletrônicos"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tiago Jackson May Dezuo
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)

Prof. Dr. Jose de Oliveira
CCT/UDESC

[VIDEOCONFERÊNCIA]

Prof. Dr. César Cataldo Scharlau
ENE/UFSC

Joinville,SC, 30 de setembro de 2019.

Dedico este trabalho à minha mãe Maria Antônia e ao meu pai José Carlos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as benções em minha vida, pois sem Ele esta jornada não seria cumprida. Em seguida, gostaria de expressar minha gratidão pela minha família, pelo apoio incondicional, compreensão e ternura. Em especial, para o meu pai José Carlos e minha mãe Maria Antônia.

Também sou grato ao professor Tiago Dezuo pela orientação nesta dissertação de mestrado. Seu entusiasmo, paciência, encorajamento e fé em mim nos últimos dois anos foram essenciais para essa caminhada, sempre dispondo generosamente do seu tempo e vasto conhecimento.

Agradeço o apoio dos colegas, professores e funcionários do CCT/UDESC que tiveram uma importante colaboração durante os anos do mestrado. Em especial ao Caíque Torres Santos, no qual foi uma grande amizade conquistada nesse período.

Meus agradecimentos a Eduardo Henrique Couto que desenvolveu este *template* da dissertação em LaTeX e foi adaptada por Arthur Garcia Bartsch.

Eu também gostaria de agradecer ao Programa de Bolsa de Monitoria de Pós-Graduação - PROMOP pelo financiamento deste trabalho durante sete meses sob a forma de bolsa de mestrado de monitoria de pós graduação.

“Alimente sua fé e os seus medos morrerão de fome."
— Romanos 10.17

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma solução para rastreamento de referências variantes no tempo para uma classe de sistemas chaveados não lineares. A considerada classe de sistemas pode incluir funções periódicas na dinâmica do sistema e o chaveamento é realizado através de um termo afim. Esta classe de sistemas geralmente é utilizada em aplicações de eletrônica de potência, especialmente em conversores CC/CA (inversores), comuns no acionamento de motores elétricos e presentes em sistemas de geração distribuída. A ideia é baseada no conceito de modos deslizantes para calcular a proporção de tempo em que cada modo de operação deve ficar ativo para manter o estado do sistema na trajetória desejada a cada instante de tempo através de uma estratégia de controle *Feedforward* baseada na modelagem instantânea. Além disso, um controlador do tipo *Feedback* é proposto para alcançar a estabilização, levando em consideração as limitações físicas do sistema (restrições no sinal de controle) e garantias de performance usando o modelo médio do sistema e a estrutura de Desigualdades Matriciais Lineares - *Linear Matrix Inequalities* (LMI). Devido à natureza particular do sinal de controle proposto, uma estratégia de modulação também é apresentada para sistemas com mais de dois modos de operação.

Palavras-chave: Seguimento de referência; Controle Feedforward; Controle Feedback; Lei de chaveamento, Sistemas variantes no tempo.

ABSTRACT

This dissertation presents a solution for time-varying reference tracking for a class of nonlinear switched systems. The class of systems considered may include periodic functions in the system dynamics and the switching is performed by an affine term. This class of systems is generally appears in power electronics applications, especially in DC/AC converters (inverters) common in electric motor drives and distributed generation applications. The idea is based on the concept of sliding modes to calculate the proportion of time each operation mode must be active to maintain system state at the desired trajectory at any given time through a Feedforward control strategy. In addition, a Feedback controller is proposed to achieve stabilization, taking into account physical system limitations (control signal constraints) and performance guarantees using the average system model and the Linear Matrix Inequalities (LMI) framework. Due to the particular nature of the proposed control signal, a modulation strategy is also presented for systems with more than two operation modes.

Keywords: Reference tracking; Feedforward control; Feedback control; Switching theory; Time-varying systems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DEE	Departamento de Engenharia Elétrica
CCT	Centro de Ciências Tecnológicas
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
CC	Corrente Contínua
DC	*Direct Current* - Corrente Contínua
CA	Corrente Alternada
AC	*Alternating Current* - Corrente Alternada
LMI	*Linear Matrix Inequality* - Desigualdade Matricial Linear
UPS	*Uninterruptible Power Supplies* - Fontes Ininterruptas de Energia
PWM	*Pulse Width Modulation* - Modulação por Largura de Pulso
MPT	Modulação por Proporção Temporal
TDH	Taxa de Distorção Harmônica
YALMIP	***Y**et **A**nother **LMI** **P**arser*
SeDuMi	***Se**lf **Du**al **Mi**nimization*

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÃO

$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano de dimensão n
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{I}_m$	Conjunto dos números inteiros de 1 até m
$\lvert\cdot\rvert$	Representa o valor absoluto de um número real
$\lVert\cdot\rVert$	Norma euclidiana de vetores e norma espectral induzida de matrizes
x	Estados do sistema
$\dot{x}$	Derivada de x em relação ao tempo
$\bar{x}$	Sinal de referência desejado
σ	Sinal de controle aplicado ao sistema
$\otimes$	Produto de Kronecker
θ_i	Proporção do período de chaveamento de cada modo i
I_n	Matriz identidade de dimensão n
$\arg\max$	Denota o índice para o subconjunto $\{1,...,z\}$, associado com o máximo elemento de $\{a_1,...,a_2\}$
A_i	Representa o i-ésimo elemento do conjunto A
$\mathbf{row}_j(M)$	Representa a j-ésima linha de M
$\mathbf{col}_j(M)$	Representa a j-ésima coluna de M
$\mathcal{P}$	Representa o politopo do controle limitado
$\mathcal{E}$	Representa a elipsoide da região invariante
$\vartheta(\mathcal{P})$	Representa o conjunto de todos os vértices de um politopo $\mathcal{P}$
$M > 0$	Matriz real M é simétrica e positiva-definida
$M < 0$	Matriz real M é simétrica e negativa-definida
M'	Transposto da matriz real (ou vetor) M
M^{-1}	Inverso da matriz real M

M^+	Pseudo-inversa da matriz M (inversa de Moore-Penrose)
$\succeq$	Desigualdade não-estrita em termos de elementos
$\lambda_{\min}(M)$	Menor autovalor da matriz real M
$\star$	Representa os termos dos blocos da matriz que podem ser deduzidos por simetria

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o aprimoramento tecnológico ao longo dos anos, a eletrônica, em seus mais diversos aspectos, tem ganhado espaço em setores diversificados, desde a eletrônica de mercado comum até aplicada a dispositivos de finalidades muito específicas (FLOYD, 2009). Nesse cenário, a eletrônica de potência também apresentou uma melhoria de performance, permitindo assim sua expansão, de maneira veloz, em aplicações relevantes no contexto de geração e transmissão de energia elétrica, processamentos de energia, eletrodomésticos, dispositivos veiculares, aeroespaciais, equipamentos médicos, controle de tráfego e dispositivos industriais. A evolução dos conversores de frequência baseados em dispositivos semicondutores proporcionaram o desenvolvimento de uma forma de acionamento com variação de velocidade também para motores de indução. Com isso, a tendência atual é a substituição de máquinas de corrente contínua por máquinas de indução acionadas por conversores de potência em praticamente todas as aplicações, já que sua grande vantagem é a maior robustez e manutenção menor.

Um exemplo notável disso é a tecnologia de sistemas fotovoltaicos, que tem mostrado potencial para se tornar uma das principais fontes de energia para o mundo, com crescimento contínuo e robusto, mesmo em tempos de crise econômica e financeira. Apesar de ainda incipiente no Brasil, a fonte solar fotovoltaica tem apresentado queda expressiva nos preços praticados em leilões, além de ter ultrapassado seus primeiros 700 MW instalados de forma distribuída no início de 2019, principalmente em residências e comércios (SIMONE, 2019). Visando ampliar o aproveitamento da energia gerada e até mesmo reduzir os custos do sistema, o projeto de técnicas de controle eficientes apresenta grande importância para este tipo de sistema.

Para os conversores que transformam níveis de corrente contínua em níveis de corrente contínua regulados (CC/CC), pode-se citar aplicações na geração de energia fotovoltaica. Nesse caso, o conversor CC/CC é responsável pelo isolamento galvânico dos painéis fotovoltaicos e pela adequação do nível da tensão aplicada à entrada do inversor, que deve ser superior ao pico da tensão da rede elétrica. Já para aplicações dos conversores de corrente contínua para corrente alternada (CC/CA) tem-se o controle de máquinas de indução (motores e geradores) (SCHARLAU, 2013) e também aplicações na área de energia fotovoltaica, onde os painéis fotovoltaicos geram tensão e corrente contínua (CC) e é necessária a conversão em alternada (CA) para o sincronismo com a rede da concessionária de energia (RODRIGUES; TEIXEIRA; BRAGA, 2003). Em sistemas de eletrônica de potência, o controle é realizado através de conversores, que são sistemas chaveados (DEZUO, 2014).

Sistemas chaveados é uma designação para uma extensa classe de aplicações em controle (MORSE, 1995). Esta classe de aplicações inclui os sistemas dinâmicos compostos por um número finito de sub-sistemas e uma lógica temporal ou associada ao estado que coordena o chaveamento entre estes subsistemas (SUN; GE, 2005). Cada um dos subsistemas que compõem um sistema chaveado apresenta propriedades e estrutura diferentes. Sistemas chaveados podem ser interpretados como uma classe particular de sistemas híbridos (LIBERZON, 2003) ou ainda sistemas de estrutura variável (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988).

Particularmente, uma subclasse especial composta pelos denominados sistemas chaveados foi colocada em destaque graças a sua grande aplicação em várias áreas da engenharia tais como: controle de sistemas mecânicos, controle de processos, sistemas de potência, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência, dentre outras (DEAECTO et al., 2010). Nos anos 50, o estudo de sistemas práticos de engenharia contendo relés e/ou histerese repercutiu no aparecimento de sistemas complexos exibindo comportamentos extremamente não lineares e caracterizados pela interação de dinâmicas contínuas e discretas. Estes sistemas, denominados híbridos, só atraíram a atenção da comunidade científica a partir de meados dos anos 90, devido ao desenvolvimento e a implementação dos microcontroladores digitais (LIN; ZHAI; ANTSAKLIS, 2006). O controle de sistemas chaveados é um tópico de pesquisa recente onde muito resta a ser feito, principalmente no que se refere ao desenvolvimento de técnicas de projeto de leis de chaveamento que possam ser determinadas de forma sistemática e numericamente eficiente.

É possível identificar várias aplicações de sistemas chaveados (MORSE, 1995). Como exemplo, é possível citar os sistemas de controle de tráfego urbano (PAPAGEORGIOU et al., 2003) e processos químicos (MHASKAR; EL-FARRA; CHRISTOFIDES, 2005). Outras aplicações de sistemas chaveados incluem os circuitos de eletrônica de potência que empregam chaves eletrônicas, como os conversores e inversores anteriormente mencionados (SCHARLAU, 2013).

Vários procedimentos de projeto de controle estão disponíveis na literatura atual para rastreamento de referências constantes. Entre elas, técnicas aplicadas a sistemas chaveados usando Desigualdades Matriciais Lineares - *Linear Matrix Inequalities* (LMI), com garantias de performance e robustez, conforme Liberzon (2003), Dai et al. (2016), Trofino et al. (2011). No entanto, para rastreamento de referências variantes no tempo, o aumento da complexidade dificulta a obtenção de condições viáveis sob a forma de LMI para o projeto do controlador. Isto é especialmente devido à presença de funções periódicas não lineares no sistema dinâmico, que muitas vezes levam a funções Lyapunov com decaimento não estrito Hu, Teel e Lin (2005). A referência Trofino et al. (2009) realiza uma tentativa de resolver o problema, embora não tenha considerado a possibilidade da existência de modos deslizantes instáveis no sistema de chaveamento em malha fechada. Uma solução para garantir que os modos deslizantes instáveis não ocorra é apresentada em Trofino et al. (2011) e Trofino, Scharlau e Coutinho (2012), isto é, as superfícies de chaveamento projetadas (solução das LMIs propostas) resultariam apenas em modos deslizantes estáveis. No entanto, esta nova solução não resolve o problema para sistemas não linearidades variantes no tempo. Pesquisas continuam a ser realizadas para a obtenção de LMIs menos conservadoras (SCHARLAU et al., 2014), (SCHARLAU; DEZUO; TROFINO, 2017).

Os métodos mencionados anteriormente consideram o modelo instantâneo do sistema, o qual não requer qualquer linearização implícita do sinal de controle. Uma diferente abordagem consiste em utilizar o modelo médio, no qual o controle aparece explicitamente, permitindo o uso de teorias de controle clássicas. Essa simplicidade vem com alguns custos. O modelo médio é obtido a partir do sistema chaveado instantâneo executando a combinação convexa dos modos de operação através do *duty cycle* variável. Portanto o controle deve ser restringido em um simplex, como em MICHELS et al. (2010) onde se propõe uma solução utilizando técnicas *anti-windup*. Outra questão é que o modelo médio pode ser não linear devido aos produtos do controle de estados, exigindo maior linearização ou aplicação de teorias de controle não linear (FRANK, 1990). Utilizando esta abordagem clássica de modelo médio, algumas soluções para rastreamento de referências variantes no tempo são propostas em MICHELS et al. (2010), Flores et al. (2011), Manjrekar e Venkataramanan (1996) com a introdução de controladores repetitivos e ressonantes, respectivamente. No entanto, estes métodos podem ter que lidar com atrasos de fase introduzidos por filtros e garantias de performance e robustez são comprometidas pelo uso do modelo médio.

Esta dissertação propõe uma solução para o rastreamento de referência periódica para uma classe de sistemas chaveados não lineares. A classe de sistemas considerados pode incluir funções periódicas nas dinâmicas do sistema, bem como o chaveamento é realizado apenas através do termo afim. Esta classe de sistemas é geralmente utilizada em aplicações de eletrônica de potência, especialmente em conversores CC/CA (inversores), comumente utilizados no acionamento de motores elétricos e em sistemas de geração distribuída.

A ideia é baseada no conceito de modos deslizantes para o cálculo da proporção de tempo de ativação de cada modo de operação que mantém o estado em cada instante de tempo na trajetória desejada. Para isso, utiliza-se de uma estratégia *Feedforward* baseada na modelagem instantânea. Além disso, um controlador por realimentação de estados (*Feedback*) é proposto para alcançar a garantia de estabilização e melhoria de performance, levando em consideração as limitações físicas do sistema (restrições no sinal de controle) usando o modelo médio do sistema. Para este propósito, LMIs que impõem restrições robustas no sinal de controle são apresentadas. A estratégia Feedback ajusta o desempenho transitório do sistema, lembrando que, como a referência pode ser variante no tempo, refere-se como transitório o tempo no qual ainda existe erro entre o estado e a trajetória desejada. Devido à natureza particular do sinal de controle, uma estratégia de modulação que minimize o número de chaveamentos também é apresentada.

1.1 OBJETIVOS

Esta dissertação tem seus objetivos destacados como:

- a apresentação das técnicas tradicionais de controle chaveado, com aplicação em conversores CC-CC, utilizando LMIs como ferramenta para determinação das funções de Lyapunov que caracterizem uma lei de chaveamento com estabilidade garantida em malha fechada;
- projeto da lei de chaveamento para rastreamento de referências variantes no tempo utilizando as estratégias de controle por realimentação de estados (*Feedback*), *Feedforward* e custo garantido;
- projeto de uma estratégia de modulação que minimize o número de chaveamentos do sistema, visando aumentar a viabilidade de implementação prática do método proposto.

1.2 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

Esta dissertação está organizada como descrito a seguir.

O Capítulo 2 tem como objetivo apresentar os conceitos preliminares necessários para o bom entendimento desta dissertação. Neste capítulo é abordada uma introdução sobre Desigualdades Matriciais Lineares (LMI) e alguns artifícios utilizados no projeto da lei de controle para sistemas chaveados.

O Capítulo 3 é dedicado a apresentar a introdução necessária sobre os sistemas chaveados e a representação de sistemas chaveados afins. A estabilidade destes sistemas e os pontos de equilíbrio também são abordados neste capítulo.

No Capítulo 4 é apresentada a lei de chaveamento para seguimento de referências constantes tratada em (TROFINO et al., 2011). Para ilustrar a lei de chaveamento, um exemplo do controle tradicional para seguimento de referência constante aplicado em um conversor CC/CC Buck é apresentado.

No Capítulo 5 é proposta uma estratégia de chaveamento para rastreamento de referências variantes no tempo. A estratégia de controle *Feedforward* e *Feedback* é apresentada neste capítulo, as quais são utilizadas em conjunto com as LMIs para o projeto da lei de chaveamento que garante seguimento da referência variante no tempo com restrições no sinal de controle. Devido à natureza do sinal de controle, uma estratégia de modulação com o objetivo de minimizar o número de chaveamentos do sistema é proposta neste capítulo.

No Capítulo 6 são apresentados resultados de simulação aplicando a lei de chaveamento apresentada no Capítulo 5 para seguimento de referência variante no tempo. É utilizado o conversor CC/CA monofásico para aplicação da lei de chaveamento que garante rastreamento com erro nulo para referências variante no tempo.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as conclusões gerais desta dissertação, publicações relacionadas e possibilidades de trabalhos futuros.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo é apresentada uma breve introdução sobre LMIs[1]. Esta ferramenta tem sido extensivamente utilizada para resolver os mais variados problemas de controle, em especial, por permitir o tratamento de sistemas híbridos e com garantias de robustez e performance. O conteúdo deste material é parcialmente baseado no Apêndice A da Referência (ZHANG; SWAIN; NGUANG, 2016) e no Capítulo 3 de (TROFINO; COUTINHO; BARBOSA, 201X). Mais informações sobre LMIs podem ser encontradas em (BOYD et al., 1994).

2.1 INTRODUÇÃO ÀS LMIS

LMIs são desigualdades matriciais que são lineares ou afins com relação às variáveis a serem determinadas (variáveis de decisão). Estas desigualdades essencialmente expressam restrições convexas e, portanto, muitos problemas de otimização com funções objetivo também convexas podem ser facilmente resolvidos usando um dos diversos pacotes computacionais disponíveis. Este método tem se tornado muito popular entre os engenheiros de controle recentemente, o que se deve à grande variedade de problemas de controle que podem ser formuladas em termos de LMIs.

Uma LMI pode ser escrita na forma $F(g) > 0$ onde

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^{q} g_i F_i \tag{2.1}$$

onde $g \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de variáveis de decisão e $F_0,\ F_1,\ldots,\ F_q$ são matrizes constantes simétricas e reais, *i.e.* $F_i = F_i'$, $i = 0,\ldots,q$. O símbolo de desigualdade em $F(g) > 0$ significa que $F(g)$ é positiva definida, ou seja, $x'F(p)x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero. Note que a desigualdade é linear[2] com relação às variáveis g_i.

Exemplo 1. *A restrição*

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0 \tag{2.2}$$

[1]Do inglês, *Linear Matrix Inequalities*.

[2]Na verdade é *afim*, mas a terminologia *linear* foi adotada por convenção, pois pode-se trocar de uma representação para a outra através de uma simples translação de coordenadas.

onde $P = P' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *é uma matriz a ser determinada, pode ser expressa na forma de LMI* (2.1) *com*

$$g = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \; F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Portanto, (2.2) *é uma LMI.* ■

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias formas e dificilmente aparece num problema na forma genérica afim (2.1). Por exemplo, dada uma matriz A, a função matricial $F(P) = A'P + PA$, que aparece em vários problemas de estabilidade, é afim na variável de decisão P e portanto a desigualdade $F(P) < 0$ é uma LMI que pode ser facilmente reescrita na forma (2.1) onde g é o vetor contendo os elementos da matriz P a ser determinada. A vantagem da representação genérica afim (2.1) é que toda LMI pode ser reescrita dessa forma e, por isso, todos os algoritmos de resolução de LMIs são desenvolvidos para essa representação. No entanto, a conversão de uma LMI para a forma afim é feita internamente pelos pacotes computacionais e o usuário não precisa se preocupar com isso. Um breve tutorial sobre como resolver LMIs usando o *parser* YALMIP (***Y**et **A**nother **LMI** **P**arser*) pode ser encontrado no Apêndice B de (ZHANG; SWAIN; NGUANG, 2016).

Um dos resultados que pode ser tratado via LMIs é mostrado a seguir.

Definição 1 (Estabilidade quadrática)**.** *O sistema* $\dot{x} = Ax$ *é quadraticamente estável se, e somente se, existe uma matriz simétrica P tal que as condições*

$$P > 0 \quad (2.4)$$

$$A'P + PA < 0 \quad (2.5)$$

são satisfeitas. Em caso afirmativo, $v(x) = x'Px$ *é uma função de Lyapunov para o sistema.* ■

2.2 O CONJUNTO DE SOLUÇÕES DE UMA LMI É CONVEXO

Seja S o conjunto de todas as soluções possíveis de uma dada LMI, isto é, $S = \{g \, : \, F(g) > 0\}$. É simples verificar que S é um conjunto convexo. Note que se g e h são duas soluções quaisquer da LMI, i.e., $F(g) > 0$ e $F(h) > 0$, então qualquer combinação convexa de g e h, representada por $\alpha g + (1-\alpha)h$ sendo $0 \leq \alpha \leq 1$ o coeficiente de combinação convexa, tem-se $F(\alpha g + (1-\alpha)h) = \alpha F(g) + (1-\alpha)F(h) > 0$ e portanto $\alpha g + (1-\alpha)h$ também é uma solução da LMI. Logo S, é convexo.

Esta propriedade é importante do ponto de vista numérico, pois tem-se garantia que o problema de encontrar uma solução qualquer de uma LMI consiste na busca de um elemento qualquer num conjunto convexo, problema que pode ser resolvido de forma eficiente, com convergência global e tempo polinomial. Detalhes sobre algoritmos e pacotes computacionais para resolução de LMIs podem ser encontrados em (EL GHAOUI; NICULESCU, 2000).

2.3 LMIS PARA SISTEMAS INCERTOS

Em muitos sistemas podem ocorrer flutuações nos elementos das matrizes do sistema. Isto acarreta em flutuações nas matrizes F_i da LMI $F(g) > 0$ em (2.1).

Exemplo 2. *Considere o sistema linear incerto*

$$\dot{x} = A(\delta)x \quad , \quad \delta \in \Delta \tag{2.6}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de parâmetros incertos, Δ é um politopo conhecido representando os valores admissíveis de δ e $A(\delta)$ é uma função afim desses parâmetros. Sejam v_i, $i = 1, \ldots, n_v$, os n_v vértices conhecidos do politopo Δ. Deseja-se verificar a estabilidade do sistema incerto supondo que os valores admissíveis dos parâmetros incertos são definidos pelo politopo Δ, mas a taxa de variação desses parâmetros são desconhecidas. Assim, a noção de estabilidade a ser empregada para estudar a estabilidade desse sistemas deve ser tal que não dependa da taxa de variação de δ, qualquer que seja esta. A noção de estabilidade desejada é a de estabilidade quadrática, da Definição 1, e as condições a serem satisfeitas são

$$\begin{cases} P > 0 \\ A(\delta)'P + PA(\delta) < 0 \;, \quad \forall \delta \in \Delta \end{cases} \tag{2.7}$$

As condições anteriores não podem ser numericamente testadas pois dependem do parâmetro incerto δ que pode assumir qualquer valor em Δ. No entanto, como $F(P,\delta) = A(\delta)'P + PA(\delta)$ é afim em δ, analisando de maneira semelhante à Seção 2.2, não é necessário resolver (2.7) *para todo δ em Δ, mas apenas para δ nos vértices de Δ, i.e. para $\delta = v_i$, $i = 1, \ldots, n_v$. Assim resolver* (2.7) *para todo $\delta \in \Delta$ é equivalente a resolver o conjunto de $n_v + 1$ LMIs simultâneas a seguir.*

$$\begin{cases} P > 0 \\ A(v_i)'P + PA(v_i) < 0 \;, \quad i = 1, \ldots, n_v \end{cases} \tag{2.8}$$

■

2.4 OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES LMI

Em muitos casos não basta encontrar uma solução qualquer do conjunto de soluções de uma LMI. Deseja-se encontrar uma solução que seja ótima segundo um dado critério. Em muitas situações o critério de otimização pode ser expresso através de uma função linear, dando assim origem ao problema de otimização

$$\begin{cases} \min\limits_{g} \; c'g \quad \text{sujeito a} \\ F(g) > 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

onde c é um vetor dado que define a direção de otimização e $F(g) > 0$ é uma LMI como em (2.1). Como o conjunto de soluções de $F(g) > 0$ é convexo, o problema (2.9) consiste em encontrar uma solução factível g tal que $F(g) > 0$ para o qual $c'g$ tenha o menor valor possível. Observe que nessas condições a solução ótima do problema consiste em se aproximar com a precisão desejada da fronteira do conjunto de soluções.

Sob certas condições, consultar o livro (EL GHAOUI; NICULESCU, 2000), é possível considerar restrições de igualdade no problema, isto é, pode-se considerar problemas do tipo $F(g) \geq 0$ ou ainda $F(g) > 0$ com $G(g) = 0$, sendo F e G funções afins. A ideia central é que as restrições de igualdade possam ser eliminadas, dando origem a um problema com um número menor de variáveis e sujeitas apenas a restrições com desigualdades estritas.

2.5 ARTIFÍCIOS USADOS EM LMIS

Embora muitos problemas de controle possam ser formulados como LMIs, alguns destes problemas resultam em desigualdades matriciais não lineares. Felizmente, exitem certas estratégias que podem ser usados para transformar estas desigualdades não lineares em um formato LMI apropriado. Alguns destes artifícios são descritos nesta seção com exemplos.

2.5.1 Mudança de variáveis

Definindo novas variáveis, às vezes é possível transformar desigualdades matriciais não lineares em LMIs.

Exemplo 3 (Realimentação de estados)**.** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad u = Kx \tag{2.10}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $u \in \mathbb{R}^m$. *O objetivo é determinar uma matriz* $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$*, tal que o sistema em malha fechada seja estável, ou seja, que todos os autovalores da matriz* $A + BK$ *estejam no semi-plano esquerdo do plano complexo.*

Usando a teoria de Lyapunov, pode se mostrar que isso é equivalente a encontrar uma matriz K *e uma matriz positiva definida* $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *tal que a seguinte desigualdade seja resolvida:*

$$(A+BK)'P + P(A+BK) < 0 \tag{2.11}$$

ou, reescrevendo,

$$A'P + PA + K'B'P + PBK < 0. \tag{2.12}$$

Note que os termos com produto entre K *e* P *são não lineares (ou bilineares, no caso).*

Considere a mudança de variáveis $Q = P^{-1}$*. Multiplicando* (2.12) *à esquerda e à direita por* Q *obtém-se*

$$QA' + AQ + QK'B' + BKQ < 0. \tag{2.13}$$

Esta é uma nova desigualdade matricial com relação a $Q > 0$ *e* K*. Entretanto, continua não linear.*

Considere uma segunda nova variável $Y = KQ$*. Isso resulta em*

$$QA' + AQ + Y'B' + BY < 0. \tag{2.14}$$

A desigualdade (2.14) *é uma LMI com relação às variáveis* $Q > 0$ *e* $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Depois de resolver a LMI (2.14)*, a matriz de realimentação* K *e a matriz de Lyapunov* P *podem ser recuperadas com* $K = YQ^{-1}$ *e* $P = Q^{-1}$*. Isso mostra que a partir de mudanças de variáveis é possível obter LMIs a partir de desigualdades matriciais não lineares.* ■

2.5.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur é usado na transformação de desigualdades não lineares do tipo convexas em LMIs.

Lema 1 (Complemento de Schur)**.** *Seja* $g \in \mathbb{R}^q$ *o vetor de variáveis de decisão e* $M_1(g)$*,* $M_2(g)$ *e* $M_3(g)$ *funções afins de* g *com* $M_1(g)$ *e* $M_2(g)$ *simétricas. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) $M_1(g) - M_3(g)'M_2(g)^{-1}M_3(g) > 0$ *com* $M_2(g) > 0$*;*

(b) $\begin{bmatrix} M_1(g) & M_3(g)' \\ M_3(g) & M_2(g) \end{bmatrix} > 0.$ ■

Note que ***(a)*** não é uma LMI pois $M(g) = M_1(g) - M_3(g)'M_2(g)^{-1}M_3(g)$ não é uma função afim em g. No entanto as desigualdades em ***(a)*** são equivalentes a ***(b)***, que é uma LMI. Note que para satisfazer ambas ***(a)*** e ***(b)*** devemos ter $M_1(g) > 0$ e $M_2(g) > 0$ como condições necessárias, porém não suficientes.

Exemplo 4 (Desigualdade de Riccati)**.** *Sejam A, B, C, R matrizes dadas e observe que*

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C < 0 \;\; com \;\; P > 0,\, R > 0 \tag{2.15}$$

não é uma LMI na variável P, pois é quadrática em P. Nem tampouco o complemento de Schur pode ser aplicado para eliminar o termo quadrático, devido ao sinal deste termo. Note que invertendo o sinal da desigualdade em (2.15) *obtém-se,*

$$-\left(A'P + PA + C'C\right) + PBR^{-1}B'P > 0 \;\; com \;\; P > 0,\, R > 0. \tag{2.16}$$

Como $R > 0$, o termo quadrático é positivo, não sendo assim possível aplicar o complemento de Schur.

Seja então $S = P^{-1}$, o que implica que $S > 0$. Portanto (2.15) *é equivalente a*

$$S\left(A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C\right)S < 0 \;\; com \;\; S > 0. \tag{2.17}$$

Como $S = P^{-1}$ tem-se

$$SA' + AS - BR^{-1}B' + SC'CS < 0 \;\; com \;\; S > 0. \tag{2.18}$$

Agora (2.18) *é quadrática em S e o sinal do termo não linear é coerente com o complemento de Schur, que ao ser aplicado fornece*

$$\begin{bmatrix} -SA' - AS + BR^{-1}B' & SC' \\ CS & I \end{bmatrix} > 0 \;\; com \;\; S > 0. \tag{2.19}$$

Note que (2.19) *é uma LMI em S e que, ao ser resolvida, fornece P, pois $P = S^{-1}$, e satisfaz* (2.15). ∎

2.5.3 Procedimento-S

A técnica que ficou conhecida como "*S-Procedure*" permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única. Para reduzir o conservadorismo, a técnica introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados.

Sejam $T_1, \ldots, T_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas dadas e $F(g) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma função afim em g. Considere o seguinte problema: encontre g, se possível, tal que

$$\xi' F(g)\xi > 0\ ,\ \forall \xi \neq 0\ :\ \xi' T_i \xi \geq 0\ ,\ i = 1, \ldots, p. \tag{2.20}$$

É fácil perceber que se existem escalares $\tau_i,\ i = 1, \ldots, p$, e algum g tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^{p} \tau_i T_i > 0, \tag{2.21}$$

então (2.20) está satisfeita. Porém não é trivial mostrar que (2.20) e (2.21) são equivalentes para $p = 1$. Existem variantes do Procedimento-S (ver livro (BOYD et al., 1994)).

Exemplo 5 (Sistema limitado em setor)**.** *Considere o sistema não linear*

$$\dot{x} = Ax + B\phi \tag{2.22}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(q) :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está no setor[3] $[l,u]$*, $q = Cx$, e A, B, C, l e u são matrizes dadas. Se ϕ está limitada no setor* $[l,u]$*, a seguinte condição está sempre satisfeita:*

$$-(\phi - lq)(\phi - uq) \geq 0. \tag{2.23}$$

Observe que a equação anterior pode ser reescrita como $\xi' T \xi \geq 0$ com

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}\ ,\ T = \begin{bmatrix} -C'(lu)C & (l+u)/2 \\ (l+u)/2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Considere $v(x) = x'Px$ como candidata a função de Lyapunov e tome sua derivada para a dinâmica do sistema (2.22)*, tem-se as condições a seguir $\forall x \neq 0$.*

$$\begin{cases} v(x) = x'Px > 0 \\ \dot{v}(x) = (Ax + B\phi)' Px + x'P(Ax + B\phi) < 0\ , \quad \forall x, \phi :\ -(\phi - lCx)(\phi - uCx) \geq 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Defina

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}\ ,\ T = \begin{bmatrix} -C'(lu)C & (l+u)/2 \\ (l+u)/2 & -1 \end{bmatrix}\ ,\ F(P) = \begin{bmatrix} A'P + PA & PB \\ B'P & 0 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

e reescreva (2.25) *na forma*

$$\begin{cases} P > 0 \\ \xi' F(P) \xi < 0\ ,\ \forall \xi :\ \xi' T \xi \geq 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

[3] A função não linear $\phi(q)$ está confinada entre a reta limitante inferior $\phi = lq$ e a reta limitante superior $\phi = uq$.

que pelo Procedimento-S é equivalente a

$$\begin{cases} P > 0 \\ \tau \geq 0 \\ F(P) + \tau T < 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

que é uma condição de estabilidade equivalente à (2.25) *em forma de LMI. Note que* $F(P) < 0$ *na condição* (2.27) *também é uma LMI, entretanto esta implica que* $\xi' F(P)\xi < 0,\ \forall \xi \neq 0$*, o que pode ser conservador. Além disso, observando a estrutura de* $F(P)$ *em* (2.26)*, há um zero na diagonal principal, o que torna impossível que* $F(P)$ *seja estritamente negativa definida, pois* $F(P)$ *é simétrica. Por outro lado,* $F(P) + \tau T < 0$ *em* (2.28) *é uma condição menos conservadora (note que a matriz* T *introduz um termo negativo na diagonal principal nula).* ■

Observação 1. *Perceba que o escalar* τ *no Exemplo 5 pode ser uma variável a determinar, pois* T *não contém variáveis de decisão. Caso contrário,* τ *deve ser fixado pelo projetista.* ■

2.5.4 Anuladores lineares

Condições não lineares, como as que serão vistas no projeto de leis de chaveamento na próxima seção, possuem conservadorismo adicional ao se limitar a representação da condição para a obtenção de uma LMI. Uma ferramenta que pode auxiliar na redução do conservadorismo é definida a seguir.

Definição 2 (Anulador Linear)**.** *Dada uma função vetorial* $f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^s$*, uma função matricial* $\aleph_f(\cdot) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^{r \times s}$ *será chamada de um* Anulador Linear de f *se este satisfaz as duas seguintes condições* **(i)** $\aleph_f(\cdot)$ *é linear e* **(ii)** $\aleph_f(z) f(z) = 0\ ,\ \forall z \in \mathbb{R}^q$ *de interesse.* ■

Observe que a representação matricial do Anulador Linear não é única. Levando em conta todos os possíveis pares z_i, z_j para $i \neq j$ sem repetição, isto é, para $\forall i, j \in \{1, \ldots, q\}$ com $j > i$, obtemos um anulador onde o número de linhas é $r = \sum_{j=1}^{q-1} j$.

Exemplo 6. *Um possível anulador linear* $\aleph_\theta$ *para o vetor* $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{bmatrix}'$ *é*

$$\aleph_\theta(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_1 & 0 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ 0 & \theta_3 & -\theta_2 \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

pois $\aleph_\theta(\theta) \cdot \theta = 0$*. Neste caso* $r = 3$*.* ■

2.5.5 Lema de Finsler

Este lema é muito útil pois permite que restrições de igualdade, como as dos anuladores lineares, sejam inseridas em uma única desigualdade que pode ser resolvida via LMI.

Lema 2 (Lema de Finsler)**.** *Seja $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz dada e C_0 uma base para o espaço nulo de C. Seja $F(g)$ uma função afim em $g \in \mathbb{R}^q$ com $F(g) = F'(g) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\exists g : \; x'F(g)x < 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n : \; Cx = 0, \; x \neq 0$*;*

(b) $\exists g, L : \; F(g) + LC + C'L' < 0, \;\; L \in \mathbb{R}^{n\times m}$*;*

(c) $\exists g : \; C_0'F(g)C_0 < 0$*;*

(d) $\exists g, \alpha : \; F(g) - \alpha C'C < 0, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$.

■

Algumas relações são facilmente verificadas. Por exemplo, a equivalência entre ***(c)*** e ***(a)*** é imediata uma vez que todo $x : \; Cx = 0$ possui a forma $x = C_0 y$ para algum y. Que ***(b)*** e ***(d)*** implicam em ***(a)*** também é imediato, uma vez que ***(b)*** e ***(d)*** implicam

$$\begin{cases} x'\left(F(g) - \alpha C'C\right)x < 0 \\ x'\left(F(g) + LC + C'L'\right)x < 0 \end{cases} \qquad \forall x \neq 0. \tag{2.30}$$

Logo, para $Cx = 0$ recupera-se ***(a)***. As demais relações possuem prova não trivial e podem ser encontradas em DE OLIVEIRA e Skelton (2001) e suas referências. Existem variações do Lema de Finsler conhecidas por outros nomes, como Lema da Projeção e Lema da Eliminação de Variáveis, bastante utilizadas na teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$.

Exemplo 7 (Sistema Algébrico-Diferencial)**.** *Considere o sistema Algébrico-Diferencial*

$$\dot{x} = A_1 x + A_2 z \tag{2.31}$$

$$0 = A_3 x + A_4 z \tag{2.32}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, A_1, A_2, A_3, A_4 são matrizes dadas, com A_4 inversível, e $z \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de variáveis algébricas.

A estabilidade desse sistema pode ser analisada com o auxílio da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$ de duas formas equivalentes.

(a) *Com eliminação da variável algébrica $z = -A_4^{-1}A_3x$:*

$$\dot{x} = \left(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3\right)x \tag{2.33}$$

que por sua vez leva às seguintes condições

$$\exists P > 0 \ : \ \left(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3\right)' P + P\left(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3\right) < 0. \tag{2.34}$$

Entretanto, para sistemas incertos, onde as matrizes A_1, A_2, A_3, A_4 possuem elementos incertos, a condição (2.34) *é trabalhosa, pois o termo $A_2A_4^{-1}A_3$ não é afim nos elementos incertos em geral.*

(b) *Sem eliminação da variável algébrica.*

Tomando a derivada de $v(x) = x'Px$ para o sistema (2.31) *temos as condições a seguir.*

$$\begin{cases} v(x) = x'Px > 0 \ , \ \forall x \neq 0 \\ \dot{v}(x) = (A_1x + A_2z)'Px + x'P(A_1x + A_2z) < 0 \ , \ \forall x \neq 0 \ \ e \ \ \forall z: \ A_3x + A_4z = 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

Defina

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} \ , \ F(P) = \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & PA_2 \\ A_2'P & 0 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

e reescreva (2.35) *na forma*

$$\begin{cases} P > 0 \\ \xi' F(P)\xi < 0 \ , \ \forall \xi \ : \ C\xi = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

que pelo Lema de Finsler é equivalente a

$$\begin{cases} P > 0 \\ F(P) + LC + C'L' < 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

que é uma condição de estabilidade equivalente à (2.35)*, porém as matrizes A_1, A_2, A_3, A_4 aparecem linearmente na expressão $F(P) + LC + C'L'$ e o caso onde estas matrizes possuem elementos incertos pode ser tratado como na Seção 2.3.* ■

2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou uma introdução dos conceitos preliminares necessários para o entendimento e projeto da lei de chaveamento proposta nos capítulos subsequentes. Inicialmente, foi feita a introdução sobre os conceitos de LMIs. Foram abordados também os artifícios utilizados em LMIs, as mudanças de variáveis, o Complemento de Schur, o Procedimento-S, os anuladores lineares e o Lema de Finsler.

Desta forma, buscou-se neste capítulo proporcionar ao leitor a bagagem mínima necessária para compreensão dos capítulos seguintes.

3 SISTEMAS CHAVEADOS

Como é o caso das aplicações do controle chaveado em UPS (*Uninterruptible Power Supplies* - Fontes Ininterruptas de Energia), o problema de controle de sistemas de eletrônica de potência pode ser visto como o de projetar uma lei de chaveamento para os conversores. Neste caso, os conversores podem ser representados como um sistema chaveado para o qual uma lei de chaveamento deve ser projetada para atingir alguns requisitos de desempenho para o sistema de malha fechada. Este será o foco dos próximos capítulos. O capítulo atual compreende alguns aspectos importantes dos sistemas chaveados, que são casos particulares de sistemas híbridos.

Sistemas híbridos é uma designação para sistemas onde dois tipos de dinâmica coexistem e interagem: uma dinâmica de tempo contínuo (tipicamente modelada por equações diferenciais) e outra composta de eventos discretos (tipicamente modelada por autômatos com estados finitos ou infinitos) (LIBERZON, 2003). Como exemplos de eventos que produzem um comportamento híbrido, é possível mencionar a abertura e o fechamento de uma válvula ou de um chave eletrônica, como as presentes nos dispositivos eletrônicos de potência. O fato de haver muitos exemplos práticos com recursos de sistemas híbridos é uma forte motivação para pesquisas nessa área.

As pesquisas envolvendo sistemas híbridos têm características muito interdisciplinares. Isso ocorre porque os estudos foram feitos por diferentes comunidades científicas, cada um tratando a questão dentro de suas próprias abordagens. Por exemplo, pesquisadores da área de ciência da computação concentram seu trabalho no comportamento discreto do sistema híbrido, tratando a dinâmica em tempo contínuo de forma simplificada. Por outro lado, pesquisadores da área de controle de sistemas enfatizam o trabalho nas propriedades dinâmicas do tempo contínuo de sistemas híbridos (LIBERZON, 2005). Nesta dissertação é enfatizada a segunda abordagem, tratando os sistemas híbridos como sistemas dinâmicos com tempo contínuo e representando os eventos discretos chaveados como eventos isolados. Assim, é possível distinguir uma classe particular de sistemas híbridos, chamados sistemas chaveados.

3.1 SISTEMAS CHAVEADOS

Um sistema chaveado pode ser definido como um sistema dinâmico composto por uma família de subsistemas dinâmicos com tempo contínuo e uma lei que organiza o chaveamento entre eles (LIBERZON; MORSE, 1999). Cada subsistema corresponde a um modo de operação do sistema chaveado. É possível obter um sistema chaveado a partir de um sistema híbrido desconsiderando os detalhes sobre o comportamento dos eventos discretos e, em vez disso, considerando todos os sinais de chaveamento possíveis para uma determinada classe. Portanto, sistemas chaveados podem ser vistos como uma abstração que corresponde a um caso particular de sistemas híbridos de nível superior. Normalmente, essa abstração gera um sistema com uma descrição mais simples, mas com mais soluções do que o sistema original (LIBERZON, 2005). Mais informações sobre a relação entre sistemas híbridos e sistemas chaveados podem ser vistas em (HESPANHA, 2004).

Um sistema chaveado pode ser matematicamente representado por uma equação diferencial da forma

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma}(x(t)) \tag{3.1}$$

onde $f_i, i \in \mathbb{I}_m$ é uma família de funções suficientemente regulares (pelo menos localmente Lipschitz[1]) de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{I}_m$ é um conjunto de índices e $\sigma(x(t)) : [0,\infty) \to \mathbb{I}_m$ é uma função constante por trechos[2], denominada sinal de chaveamento. Neste contexto, uma função constante por trechos é um sinal que possui as seguintes características: apresenta uma quantidade finita de descontinuidades em qualquer intervalo finito de tempo e é constante entre as descontinuidades consecutivas (HESPANHA, 2004). Quando um sistema chaveado tem apenas subsistemas lineares, ele é chamado de sistema chaveado linear

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) \tag{3.2}$$

com um conjunto de índices finitos $\mathbb{I}_m = \{1, 2, ..., m\}$, sendo m o número de subsistemas (ou modos de operação) do sistema chaveado. Por outro lado, quando um sistema chaveado é composto por subsistemas afins, é denominado sistema chaveado afim (SCHARLAU, 2013)

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma}. \tag{3.3}$$

3.1.1 Classificação de acordo com o tipo de chaveamento

Em relação ao chaveamento, os sistemas chaveados podem ser classificados como: chaveamento dependente dos estados *versus* chaveamento dependente do tempo; ou chaveamento autônomo *versus* chaveamento controlado (LIBERZON, 2003). Os principais aspectos de cada tipo de chaveamento são apresentados na sequência (SCHARLAU, 2013):

[1]Uma função $f(x)$ é dita localmente Lipschitz no domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ se cada ponto de D possui uma vizinhança D_0 de forma que f satisfaça a condição Lipschitz ($\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \|$) para todos os pontos em D_0 com alguma constante Lipschitz $L_0 > 0$. O símbolo $\| x \|$ corresponde a Norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$.

[2]Do inglês, *piecewise constant function.*

Chaveamento dependente do estado: sistemas em que o sinal de chaveamento mudará em função dos estados do sistema. Nesse caso, o espaço de estados é particionado em regiões, cada região correspondendo à ativação de um dos subsistemas que compõem o sistema chaveado. Os limites dessas regiões são chamados de superfícies de troca;

Chaveamento dependente do tempo: sistemas onde há uma mudança no sinal de chaveamento após um determinado intervalo de tempo. Para este tipo de chaveamento, o sinal de chaveamento é descrito como $\sigma(t)$ para enfatizar a dependência temporal;

Chaveamento autônomo: sistemas onde não há controle direto sobre o sinal de chaveamento. Neste grupo estão incluídos sistemas com chaveamento dependente de posição em que a localização das superfícies de chaveamento é predeterminada, ou sistemas com chaveamento dependente do tempo, onde a regra que define o sinal de chaveamento é desconhecida ou negligenciada na etapa de modelagem do sistema;

Chaveamento controlado: sistemas onde o sinal de chaveamento é imposto para alcançar um comportamento desejado. O mecanismo de chaveamento é controlado diretamente e pode ser dependente do estado ou dependente do tempo.

Para ilustrar a classificação quando ao tipo de comutação, considere como exemplo o sistema de transmissão de um veículo. No caso de uma transmissão automática, o sistema pode ser visto como um sistema chaveado com comutação autônoma e dependente dos estados. Já uma transmissão manual corresponde a uma comutação controlada e dependente dos estados.

3.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS CHAVEADOS

No tocante à análise de estabilidade de um sistema dinâmico, pode-se dizer que a estabilidade é a mais relevante propriedade. Muitas técnicas têm sido apresentadas para investigação matemática de estabilidade, mas independente da técnica empregada para avaliar a mesma, tem-se de ter por claro que esta é uma propriedade intuitiva de que o sistema não venha atingir a magnitude maior que sua capacidade. Também é importante deixar explícito que existe uma estreita relação entre estabilidade e energia (JOHANSSON, 1999). Uma vez tratada a importância da estabilidade de um sistema dinâmico, ao se projetar um controlador para uma determinada planta, faz-se necessário e fortemente relevante avaliar a estabilidade do sistema que se deseja controlar. Segundo Scharlau (2013), o estudo de estabilidade em sistemas chaveados tem obtido um grande destaque. Um exemplo disso é que mesmo com todos os subsistemas possuindo estabilidade exponencial isoladamente, o sistema chaveado segundo uma determinada lei de comutação pode apresentar trajetória divergente (DECARLO; ZAK; MATTHEWS, 1988). Outra perspectiva interessante e relevante que deve-se atentar é a possibilidade de chaveamento entre subsistemas instáveis e desse modo obter um sistema chaveado exponencialmente estável. Sob estas duas perspectivas, nota-se que a estabilidade de sistemas chaveados dependem tanto das dinâmicas presentes em cada subsistemas assim como do sinal de chaveamento que fomentará a alternância entre os possíveis modos. A estabilidade de sistemas chaveados é criteriosamente observada sob a ótica da chaveamento empregado para controlar o sistema. Para uma melhor compreensão, será abordada a estabilidade de sistemas submetidos a um chaveamento acíclico (arbitrário) e o chaveamento controlado.

3.2.1 Estabilidade sob condição de chaveamento arbitrário

Uma das grandes dificuldades presentes em sistemas chaveados com a característica de chaveamento arbitrário, se fundamenta sobre quais condições este apresenta estabilidade, tendo por base o desconhecimento de condições anteriores de chaveamento e que o mesmo não possui restrições. Uma ação para para definir o critério de estabilidade sob estas circunstâncias é a ocorrência da estabilidade assintótica dos subsistemas. Mas esta característica não é determinante para garantir que a estabilidade do sistema, visto que pode ocorrer a divergência da trajetória dinâmica de algum dos estados devido a condições iniciais específicas. Dessa forma, um critério que garante a estabilidade do sistema chaveado, sendo esta a estabilidade global exponencial sob comutação arbitrária, é a existência de uma Função Quadrática Comum de Lyapunov (*Common Quadratic Lyapunov Function*) para todo subsistema pertencente ao sistema avaliado em questão (SCHARLAU, 2013).

No entanto, encontrar funções de Lyapunov que descrevem a estabilidade para cada subsistema não é uma tarefa que possui solução trivial. De modo similar, a existência de uma função de Lyapunov é uma condição apenas suficiente para estabilidade do sistema que possui chaveamento arbitrário (SCHARLAU, 2013). Mas, faz-se necessário deixar documentada a existência de sistemas chaveados que manifestam estabilidade sob comutação arbitrária e que, no entanto não possuem função quadrática comum de Lyapunov (LIBERZON, 2003).

3.2.2 Estabilidade sob condição de chaveamento com restrição

Na presente subseção, será tratada a características de estabilidade sob chaveamento com restrição de superfícies especificadas, buscando dessa forma uma melhor compreensão sobre como interpretar o efeito da superfície no chaveamento dos sistemas. Segundo Liberzon (2003), um procedimento muito eficaz para atestar a estabilidade de sistemas chaveados sujeitos a restrições é a ideia de Múltiplas Funções de Lyapunov (*Multiple Lyapunov Functions*). Essa técnica propõe em vincular uma função de Lyapunov a cada modo de operação ou região do espaço de estados. Estas funções relacionadas, formam uma função de Lyapunov com aspectos peculiares, os quais não são comumente encontrados. Dentre essas características, pode-se destacar: a possibilidade de apresentar descontinuidades, a de não decrescer monotonicamente ao longo das trajetórias dos estados e a de ser diferenciável por partes (SCHARLAU, 2013).

De modo a tornar mais clara a abordagem, suponha que em um determinado sistema, todos os modos que compõem o mesmo sejam estáveis e logo pode-se associá-los a uma função de Lyapunov específica. No momento em que um determinado modo estiver ativo, entende-se que sua função Lyapunov deve decrescer. Adicionando uma restrição ao sinal de chaveamento, tal como tempo limite ou médio de residência em um determinado modo, de maneira que a cada ativação de um determinado modo o valor da função de Lyapunov correspondente possua menor valor que o modo anteriormente ativo, pode-se dizer que o sistema é assintoticamente estável (LIN; ANTSAKLIS, 2009).

Segundo Scharlau (2013), a utilização de diversos tipos de função de Lyapunov tem despertado o interesse de pesquisadores. Além disso, pode-se também tratar as funções de Lyapunov, sejam quais quer a natureza que as mesmas representem, como um problema de LMIs, peculiaridade que alberga ainda mais possibilidades e técnicas de solução para as funções de Lyapunov.

3.2.3 Estabilização de sistemas chaveados

Na subseção imediatamente anterior, algumas técnicas para estabilizar sistemas chaveados foram apresentadas. Nesta subseção, será destacada a problemática de se estabelecer uma lei de chaveamento que gerencie a entrada em operação de subsistemas e que promova a estabilidade do mesmo.

Segundo Scharlau (2013), na existência de que pelo menos um dos modos que compõe o sistema seja estável, basta operar somente neste modo para obter estabilidade sendo esta, segundo o autor, uma solução corriqueira. No entanto, quando nenhum dos subsistemas possui estabilidade isoladamente, faz-se necessário projetar uma lei de chaveamento que promova a estabilidade do sistema operando entre os modos. Esta abordagem permite uma tratativa muito interessante no que diz respeito a conversores eletrônicos, visto que são compostos de semicondutores, os quais possuem como característica intrínseca a função de chaves quando operando na região de saturação.

Considerando o projeto da lei de chaveamento para estabilizar um sistema chaveado, já foi apresentada nas subseções anteriores a validade dessa técnica quando há uma combinação convexa estável entre os modos dinâmicos. Assim, com a utilização de uma lei de controle predominantemente quadrática de Lyapunov, torna-se possível atingir a desejada estabilidade para o sistema.

Não obstante, minerar a solução da combinação convexa dinâmica que atenda ao requisito de estabilidade ainda é caracterizado por apresentar um elevado grau de complexidade computacional, o que a literatura caracteriza como um problema *NP-Hard* (SKAFIDAS et al., 1999). Além disso, pode-se dizer que os métodos que garantem uma solução por meio de uma função quadrática de Lyapunov são, de certa forma, conservadores, haja visto existirem sistemas chaveados que podem apresentar estabilidade sem que possuam uma função quadrática de Lyapunov.

Uma alternativa para solucionar o conservadorismo seria utilizar a ideia de múltiplas funções de Lyapunov para projeto de uma lei de chaveamento que visa estabilizar o sistema chaveado (SCHARLAU, 2013).

No que diz respeito ao projeto da lei de chaveamento em si, alguns resultados utilizam para o referido projeto as funções de mínimo (*min*) ou máximo (*max*) para determinar o modo ativo segundo um conjunto de funções auxiliares dependentes dos estados. Projetos que utilizam as vertentes supracitadas possuem vantagens e desvantagens, visto que ao se utilizar a função *min* tem-se uma maior facilidade em garantir a estabilidade em modos deslizantes. Por outro lado, a função *max* não promove a restrição de que as funções auxiliares de serem positivas, em contraste à técnica que utiliza *min* (SCHARLAU, 2013).

3.3 SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

Nesta subseção será abordada a representação dos sistemas chaveados afins, necessária para compreender a representação das dinâmicas dos principais conversores da eletrônica de potência exibidas nas seções subsequentes.

Uma função afim é dada pela disposição matemática $f(x) = Ax + b$ sendo A e b matrizes reais. De forma semelhante um sistema chaveado afim composto de m subsistemas possui a notação descrita pela Equação (3.4).

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \quad i \in \mathbb{I}_m := \{1, 2, ..., m\} \tag{3.4}$$

Ainda sobre a Equação (3.4), tem-se dizer que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa os estados do sistema, que supõe-se aqui poder ser medido ou estimado. Para caso de medição parcial, consultar Trofino et al. (2011). As matrizes A_i e b_i são matrizes de dinâmica dos subsistemas, reais e de dimensões compatíveis, ou seja, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b_i \in \mathbb{R}^n$ (TROFINO et al., 2011).

Considerando a Equação (3.5) e o caso em que $\sigma(x(t))$ possua apenas um elemento, pode-se então identificar qual o modo de operação em que se encontra. No entanto, e não menos comum, se $\sigma(x(t))$ possuir mais de um elemento em questão, pode-se afirmar que segundo (FILIPPOV, 1988) o sistema se encontra em modo deslizante. Sabe-se que $\sigma(x(t))$ é descrito pela Equação (3.5), ou seja, tem como entrada os estados e como saída o modo ativo.

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{I}_m \tag{3.5}$$

Considere que o objetivo do método de controle do sistema chaveado afim seja estabelecer uma lei de chaveamento que promova o seguimento de uma referência constante, representada por $\bar{x}$, e que possua convergência assintótica. A Equação (3.6) representa matematicamente o comportamento esperado dos estados do sistema chaveado em regime.

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x} \tag{3.6}$$

3.4 MODELAGEM DE SISTEMAS CHAVEADOS

A modelagem de sistemas chaveados em espaço de estados é realizada principalmente de três diferentes formas: instantâneo, médio e de pequenos sinais. A escolha entre uma das formas baseia-se em como é projetada e implementada a técnica de controle. Neste capítulo, tem-se o interesse em estudar técnicas de controle que utilizem como base o modelo instantâneo de sistemas chaveados.

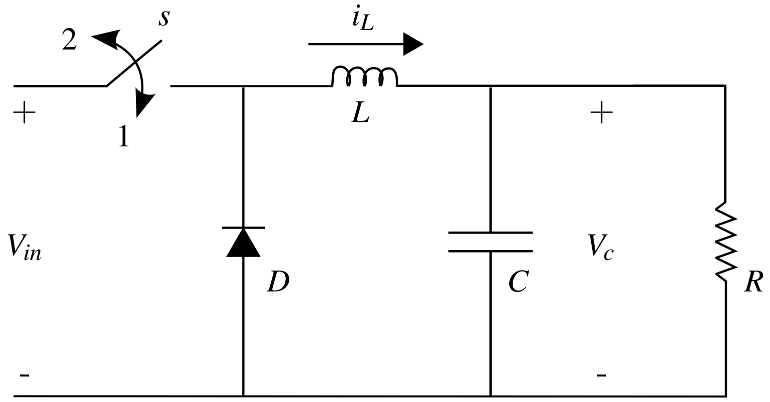
A modelagem de sistemas chaveados pode ser realizada para cada modo de operação individualmente utilizando métodos comuns de modelagem matemática, como a fenomenológica[3] ou por identificação de sistemas. Após obtidos os modelos de cada modo isolado, o modelo do sistema chaveado instantâneo está pronto. Para os modelos médio e de pequenos sinais, operações extras e possíveis linearizações se fazem necessárias.

Exemplo 8. *Considere o circuito conversor Buck apresentado na Figura 3.1 com uma carga linear (resistência R). Assuma que os parâmetros da indutância L e da capacitância C são constantes, que o circuito é alimentado por uma fonte de tensão constante V_{in} e que a chave s e o diodo D são ideais.*

Assuma como variáveis de estado a corrente elétrica fluindo através do indutor L (i_L) e a tensão sobre o capacitor de saída C (V_c). A dependência dessas variáveis com relação ao tempo será omitida para simplificar a notação. O modelo matemático ***instantâneo*** *pode ser obtido analisando-se o circuito para cada modo de operação possível. Note que para este sistema tem-se dois modos de operação, dependendo do estado de operação da chave s, ou seja,* $\mathbb{I}_m = \{1,2\}$.

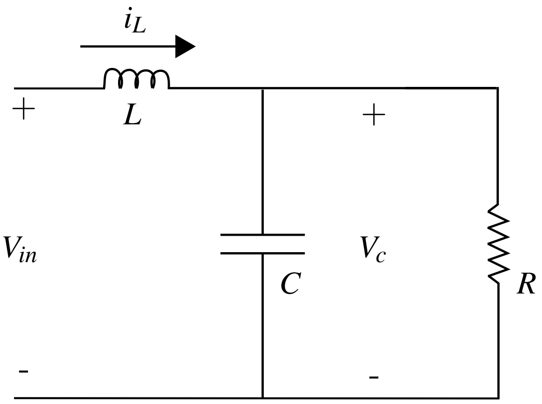
[3]Baseada em princípios básicos e leis naturais, como conservação de energia, por exemplo.

Figura 3.1 – Topologia do conversor Buck.



Modo 1 (chave s **conduzindo)** *Considerando o caso que a chave s está na posição* 1*, o diodo está polarizado reversamente e não conduz. Assim, o circuito pode ser representado como na Figura 3.2.*

Figura 3.2 – Topologia do conversor Buck com s conduzindo.



As equações dinâmicas que representam o comportamento deste circuito podem ser obtidas a partir das Leis de Kirchhoff das malhas e dos nós, que resultam respectivamente em

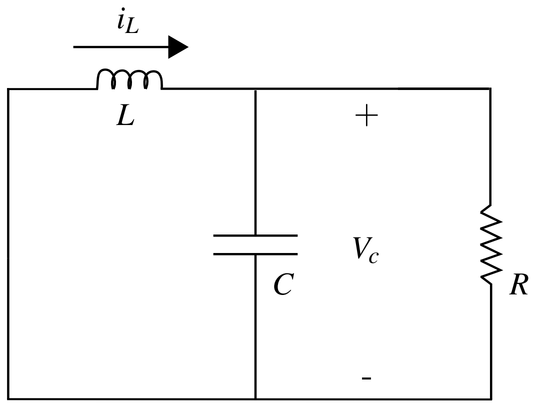
$$V_{in} = L\frac{di_L}{dt} + V_c, \qquad i_L = C\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{R}, \tag{3.7}$$

onde $L\frac{di_L}{dt}$ *é a tensão no indutor,* $C\frac{dV_c}{dt}$ *é a corrente no capacitor e* $\frac{V_c}{R}$ *é a corrente na carga. Definindo as variáveis de estado* $x_1 = i_L$ *e* $x_2 = V_c$*, as equações em* (3.7) *podem ser reescritas em formato matricial como*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Modo 2 (chave s não conduzindo) *Considerando o caso que a chave s está na posição 2, o diodo passa a conduzir para servir de caminho para a corrente do indutor. Assim, o circuito pode ser representado como na Figura 3.3.*

Figura 3.3 – Topologia do conversor Buck com s não conduzindo.



Aplicando novamente as Leis de Kirchhoff, tem-se

$$L\frac{di_L}{dt} + V_c = 0, \qquad i_L = C\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{R}. \tag{3.9}$$

As equações em (3.9) *podem ser reescritas em formato matricial como*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Finalmente, o modelo instantâneo completo do sistema chaveado pode ser representado na forma $\dot{x} = A_i x + b_i$ com $i \in \mathbb{I}_m = \{1,2\}$ e as matrizes

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, \; b_1 = \begin{bmatrix} V_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix}, \; b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

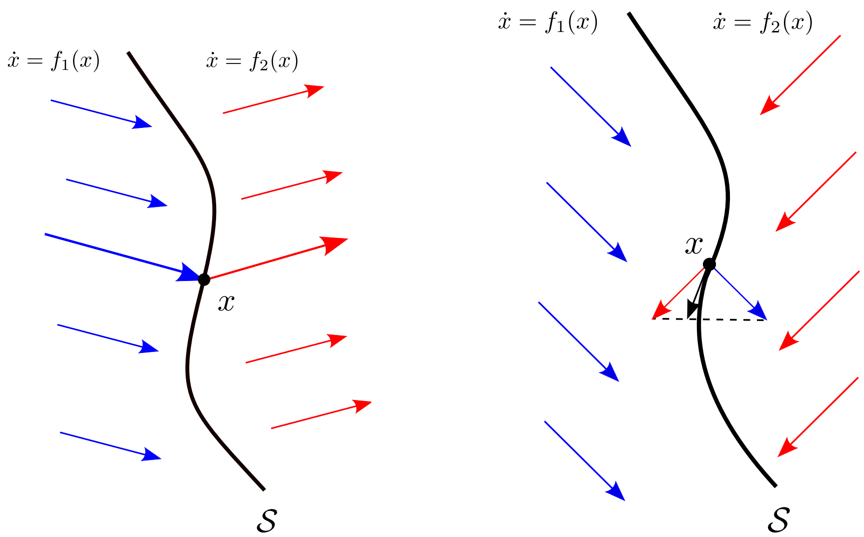
■

3.5 DINÂMICA EM MALHA FECHADA

Um aspecto relevante no estudo de sistemas chaveados diz respeito ao comportamento do sistema em modos deslizantes (*sliding modes*). Os modos deslizantes possuem um papel importante no estudo de sistema chaveados, pois os mesmos podem representar idealmente algumas dinâmicas complexas encontradas em aplicações reais (FILIPPOV, 1988).

Para definição de modos deslizantes, será considerado como exemplo um sistema chaveado com a comutação dependente dos estados definida pela superfície de comutação representada por $\mathcal{S}$ e dois modos de operação, ou seja, dois subsistemas $\dot{x} = f_i(x)$, $i \in \{1,2\}$, um ativo em cada lado de $\mathcal{S}$. Neste caso, supõe-se que não ocorram saltos nos valores dos estados no momento do chaveamento. Se os campos vetoriais $f_1(x)$ e $f_2(x)$ estiverem apontando para o mesmo sentido em relação à $\mathcal{S}$, a trajetória contínua atinge a superfície $\mathcal{S}$ e cruza para o outro lado. Esta situação é demostrada na Figura 3.4(a). Por outro lado, é possível que os campos vetoriais $f_1(x)$ e $f_2(x)$ apontem ambos em direção à superfície, o que pode ser visto na Figura 3.4(b). Neste caso, quando a trajetória atinge a superfície $\mathcal{S}$, ela não consegue mais sair desta região e se desloca sobre a superfície, isto é, o campo vetorial que define a dinâmica neste caso é tangente à superfície. Esse comportamento é denominado de modo deslizante (LIBERZON, 2003).

Figura 3.4 – Exemplo das trajetórias de um sistema chaveado com dois modos de operação.



(a) Cruzamento da superfície de comutação

(b) Modo deslizante

O comportamento do sistema em modo deslizante pode ser descrito utilizando os conceitos introduzidos por Filippov (1988). De acordo com estes conceitos, o campo vetorial que define a dinâmica em modo deslizante deve ser tangente à superfície de chaveamento e existem várias formas de se definir este campo vetorial tangente. A forma mais simples e mais utilizada na literatura é definir o campo vetorial tangente através da combinação convexa dos campos vetoriais dos subsistemas em cada ponto da trajetória sobre a superfície. Por exemplo, na Figura 3.4(b) o campo vetorial tangente é dado por

$$f_\theta(x) := \theta(x) f_1(x) + (1 - \theta(x)) f_2(x), \quad \theta(x) \in [0,1] \tag{3.12}$$

onde $\theta(x)$ é o elemento de combinação convexa que pode ser obtido através de regras de projeção ortogonal (FILIPPOV, 1988, p.52). Note que esta forma de definir o campo vetorial tangente também permite definir a dinâmica do sistema nos modos isolados, isto é, para $\dot{x} = f_1(x)$, $\theta(x) = 1$ e para $\dot{x} = f_2(x)$, $\theta(x) = 0$.

Desta forma, a dinâmica de um sistema chaveado com ou sem modos deslizantes pode ser vista como uma inclusão diferencial

$$\dot{x} = f_\theta(x) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(x) f_i(x), \qquad \theta \in \Theta, \tag{3.13}$$

onde Θ é o simplex que representa as possíveis combinações convexas de θ, definido como

$$\Theta := \left\{ \ \theta \in \mathbb{R}^m : \ \ \textstyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \ \right\}. \tag{3.14}$$

Para uma apresentação mais formal e genérica dos modos deslizantes, veja Filippov (1988, p.50). Na página 54 desta mesma referência pode ser encontrada uma caracterização alternativa do campo vetorial tangente diferente da combinação convexa.

O modo deslizante pode ser interpretado como uma comutação infinitamente rápida. Este fenômeno não é desejado na prática pois corresponde a chaveamentos de alta frequência (*chattering*) que causam desgaste excessivo nos dispositivos (LIBERZON, 2003). Por esse motivo a limitação da frequência de chaveamento é um ponto importante envolvendo o controle de sistemas chaveados. Uma forma de se obter a limitação de frequência é através da introdução de um requisito adicional de tempo mínimo de residência em cada modo de operação do sistema (SUN, 2006). A introdução desse requisito adicional não é uma tarefa simples e o desenvolvimento de uma metodologia adequada para limitação da frequência encontra-se ainda como um problema em aberto no caso geral.

Uma outra forma de evitar a ocorrência de *chattering* consiste em introduzir uma histerese. A ideia básica consiste em definir duas regiões sobrepostas através do deslocamento da superfície de chaveamento $\mathcal{S}$. Mais detalhes sobre a introdução de histerese em sistemas chaveados podem ser vistos em Bolzern e Spinelli (2004), DeCarlo et al. (2000).

3.6 PONTOS DE EQUILÍBRIO POSSÍVEIS

Considere o sistema chaveado afim (3.4) em malha fechada de acordo com Filippov

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(x) \left(A_i x + b_i\right), \qquad \theta \in \Theta, \tag{3.15}$$

quando o sistema está em equilíbrio, seus estados não variam, ou seja $\dot{x} = 0$. Assim, tem-se que os pontos de equilíbrio de um sistema chaveado correspondem aos valores $\bar{x}$ de x tais que $\dot{x} = 0$. Portanto, pode-se definir o Lema 3, a seguir.

Lema 3. *Um ponto $\bar{x}$ é um equilíbrio possível para o sistema chaveado afim* (3.15) *se existem escalares $\overline{\theta}_i := \theta_i(\bar{x}) \in \Theta$ tais que*

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i \left(A_i \bar{x} + b_i\right) = 0. \tag{3.16}$$

■

Prova: Faça $\dot{x}(t) = 0$ em (3.15). ■

Note que, caso $\bar{x}$ seja constante, a combinação $\overline{\theta}$ que mantém o equilíbrio desejado também é constante. Tal combinação representa a proporção do tempo em que cada modo i fica ativo e, portanto, $\overline{\theta}$ pode ser associado ao ciclo de trabalho (*duty cycle*) que mantém a condição de equilíbrio em um sistema controlado por Modulação por Largura de Pulso (PWM[4]). Porém, o $\overline{\theta}$ não é restrito a esta interpretação, visto que os chaveamentos não precisam ocorrer de maneira síncrona.

A condição (3.16) implica que diferentes pontos de equilíbrio podem ser atingidos.

Exemplo 9. *Considere o circuito do conversor Buck apresentado no Exemplo 8. A partir do Lema 3, tem-se*

$$\overline{\theta}_1 \left(A_1 \bar{x} + b_1\right) + \overline{\theta}_2 \left(A_2 \bar{x} + b_2\right) = 0 \tag{3.17}$$

$$\overline{\theta}_1 \left(A_1 \bar{x} + b_1\right) + (1 - \overline{\theta}_1) \left(A_2 \bar{x} + b_2\right) = 0 \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \overline{\theta}_1 \begin{bmatrix} V_{in}/L \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{3.19}$$

Note que a partir da primeira linha da Equação (3.19) *tem-se que*

$$\overline{\theta}_1 = \frac{\bar{x}_2}{V_{in}}. \tag{3.20}$$

onde nota-se que $\overline{\theta}_1$ corresponde ao duty cycle correspondente a uma tensão de saída $\bar{x}_2$. Percebe-se também que o valor desejado para $\bar{x}_2$ deve respeitar $0 \leq \overline{\theta}_1 \leq 1$ e, através de (3.20), *isso representa $0 \leq \bar{x}_2 \leq V_{in}$.*

Além disso, da segunda linha da Equação (3.19) *tem-se uma relação entre $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ dada por*

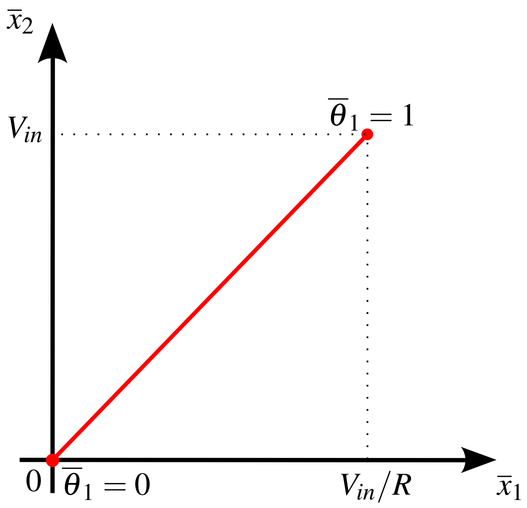
$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{x}_2}{R}, \tag{3.21}$$

que é uma restrição física imposta pela estrutura do circuito. Assim, não é possível escolher os valores de $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ arbitrariamente simultaneamente.

---

[4]Do inglês, *Pulse Width Modulation*.

Figura 3.5 – Pontos de equilíbrio possíveis para o conversor Buck.



A Figura 3.5 apresenta o conjunto de todos os pontos de equilíbrio possíveis para o conversor Buck. Qualquer ponto sobre a reta vermelha pode ser mantido por um chaveamento com uma combinação particular entre os modos.

3.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou uma breve revisão sobre os principais tópicos envolvendo a análise de sistemas chaveados. Inicialmente, foi feita a distinção de sistemas chaveados partindo da definição dos sistemas híbridos. Foram abordados também a classificação quanto ao tipo de comutação, a representação de sistemas chaveados afim e seu comportamento especial: o modo deslizante.

A estabilidade dos sistemas chaveados, ponto de suma importância, foi tratada neste capítulo. Por meio da função de Lyapunov de estrutura apropriada e segundo Trofino et al. (2011) e Scharlau (2013), é possível verificar estabilidade global exponencial para o sistema chaveado em malha fechada.

Desta forma, buscou-se neste capítulo dar ao leitor uma visão geral, porém introdutória, sobre os principais trabalhos já desenvolvidos na área de sistemas chaveados. Apresentou-se uma representação matemática para a dinâmica de sistemas chaveados do tipo afim o que auxiliará na compreensão das novas metodologias para o projeto de leis de comutação para sistemas chaveados a serem apresentadas nos próximos capítulos.

4 LEI DE CHAVEAMENTO PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIA CONSTANTE

Até a presente etapa do trabalho foi desenvolvida a dinâmica de chaveamento para condições de regime. Agora é preciso estabelecer qual a lei de controle que irá definir como a dinâmica de escolha entre o comportamento dos modos. Para tal proposta será utilizada a técnica elaborada por (TROFINO et al., 2011) na qual são utilizadas as LMIs.

4.1 SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

Considere o sistema chaveado composto de m subsistemas afins indicados a seguir

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i, \qquad i \in \mathbb{I}_m := \{1, \ldots, m\}, \tag{4.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados do sistema, supostamente disponível para medição, e $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$ são as matrizes de cada subsistema.

Supondo que a comutação entre os m subsistemas de (4.1) ocorra de acordo com uma lei de chaveamento representada pelo sinal de chaveamento

$$\sigma(x(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}_m \tag{4.2}$$

que pode ser visto como um mapeamento do vetor de estados, tomado a cada instante de tempo t, para o conjunto de índices $\sigma(x(t)) \in \mathbb{I}_m$ do modo de operação corrente (ativo). Se, em um dado instante de tempo, $\sigma(x(t))$ possuir somente um elemento, este elemento define o subsistema ativo. Caso contrário $\sigma(x(t))$ possui mais de um elemento e pode estar ocorrendo o fenômeno de modos deslizantes neste instante. Utilizando os resultados de Filippov (1988) para definir a dinâmica em modos deslizantes, $\sigma(x(t))$ se torna um sinal constante por trechos e descontínuo apenas nos instantes onde a trajetória do sistema entra ou sai de uma superfície de chaveamento.

O objetivo é projetar uma lei de chaveamento $\sigma(x(t))$ que conduz assintoticamente os estados do sistema chaveado para uma dada referência constante $\overline{x}$, ou seja

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \overline{x}. \tag{4.3}$$

Dado $\overline{x}$, é conveniente definir o erro de seguimento

$$e(t) := x(t) - \overline{x} \tag{4.4}$$

e desta forma reescrever (4.1) em termos de $e(t)$

$$\dot{e}(t) = A_i e(t) + k_i, \qquad k_i := b_i + A_i\bar{x}. \tag{4.5}$$

Como $\bar{x}$ é uma referência constante, é possível reformular o problema do projeto da lei de chaveamento em termos de $e(t)$, ou seja $\sigma(e(t))$. Com o objetivo de levar em consideração os modos deslizantes, caso os mesmos ocorram, assume-se que a dinâmica do erro de seguimento possa ser representada como uma combinação convexa dos campos vetoriais de cada subsistema em (4.5) (FILIPPOV, 1988), ou seja

$$\dot{e}(t) = \sum_{i\in\sigma(e(t))} \theta_i(e(t))\,(A_i e(t) + k_i), \qquad \theta(e(t)) \in \Theta \tag{4.6}$$

onde Θ é definido em (3.14) e $\theta(e(t))$ é um vetor com elementos $\theta_i(e(t))$ definidos de acordo com (FILIPPOV, 1988, p.50). Observe que $\theta_i(e(t)) = 0$ caso $i \notin \sigma(e(t))$. Os modos deslizantes podem ocorrer em um ponto $e(t)$ caso seja possível encontrar uma combinação convexa dos campos vetoriais dos subsistemas tal que $\dot{e}(t)$ seja um vetor que pertence ao hiperplano tangente da superfície de chaveamento no ponto $e(t)$.

Para atingir globalmente o objetivo de seguimento descrito por (4.3), é necessário que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (4.6). Sob este aspecto é possível estabelecer o seguinte lema.

Lema 4. *A origem é um ponto de equilíbrio de* (4.6) *somente se existir* $\overline{\theta} \in \Theta$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i k_i = 0. \tag{4.7}$$

■

Prova: Substitua $\dot{e}(t) = 0$ e $e(t) = 0$ em (4.6). Isso significa que o ponto de equilíbrio (onde o erro para de variar) ocorre na origem. ■

Com base nas considerações vistas anteriormente, o problema será reformulado como sendo o projeto de uma lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ que conduza os estados de (4.6) para a origem.

4.2 PROJETO DE LEIS DE CHAVEAMENTO PARA SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

Nesta seção será dada ênfase ao projeto utilizando a função 'max'. Por fim será apresentado de maneira breve o método para a função 'min'.

4.2.1 Metodologia utilizando a função 'max'

Nesta seção o estudo será particularizado para leis de chaveamento obtidas da aplicação da função 'max' na forma

$$\sigma(e(t)) := \arg \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e(t))\} \tag{4.8}$$

onde $v_i(e(t))$, $i \in \mathbb{I}_m$, são funções auxiliares associadas aos subsistemas de (4.5). Note que (4.8) é uma lei de chaveamento dependente dos estados que utiliza múltiplas funções de Lyapunov.

A lei de chaveamento $\sigma(e(t))$ deve fazer com que a origem da dinâmica do erro de seguimento seja globalmente assintoticamente estável. Portanto, estamos interessados em obter condições de projeto que resultam em uma lei de chaveamento que assintoticamente conduz os estados do sistema chaveado para a origem, mesmo com a ocorrência de modos deslizantes em qualquer superfície de chaveamento do sistema.

Na sequência, serão apresentadas condições suficientes para o protejo utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov e o processo para descrevê-las como um conjunto de LMIs. Considera-se que as funções auxiliares $v_i(e(t)) \in \mathcal{C}^1$, $i \in \mathbb{I}_m$, de (4.8) possuem a seguinte estrutura particular

$$v_i(e(t)) = e(t)'P_ie(t) + 2e(t)'S_i \tag{4.9}$$

onde $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $S_i \in \mathbb{R}^n$ são matrizes a serem determinadas. É possível verificar que as funções auxiliares possuem termos quadráticos e lineares. Os termos lineares adicionam graus de liberdade interessantes no problema de estabilidade de sistemas afins. No entanto estes termos geralmente são negligenciados (BOLZERN; SPINELLI, 2004; XU; ZHAI; HE, 2008).

Antes de apresentar o próximo teorema, é importante definir a notação auxiliar utilizada para expressar as condições. Considerando os seguintes vetores auxiliares θ, $\overline{\theta} \in \mathbb{R}^m$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}, \qquad \overline{\theta} = \begin{bmatrix} \overline{\theta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\theta}_m \end{bmatrix}, \qquad e_\theta = \theta \otimes e \tag{4.10}$$

onde $\theta_i \in \Theta$ e $\overline{\theta}_i \in \Theta$ é definido pela condição (4.7) do Lema 4. O símbolo "$\otimes$" representa o produto de Kronecker.

Seja $\aleph_\theta$ o anulador linear de θ conforme visto na Definição 2. Sejam as constantes positivas α_i dadas e escolhidas pelo projetista conforme as orientações da Observação 3. Considere as seguintes matrizes auxiliares.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_m \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_m \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & \cdots & S_m \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_n & \cdots & \alpha_m I_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_m = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times m} \tag{4.13}$$

$$I_a = \mathbf{1}_m \otimes I_n, \quad \overline{P} := \sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i P_i, \tag{4.14}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A'P + P'A & \star \\ K'P + S'A & K'S + S'K \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \alpha'\left(P - \overline{P} I_a\right) + \left(P' - I_a'\overline{P}\right)\alpha & \star \\ 2S'\alpha & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

As condições de projeto são sumarizadas no seguinte teorema.

Teorema 1. *(TROFINO et al., 2011) Seja $\overline{x}$ um dado vetor constante representando o equilíbrio desejado para o sistema chaveado afim* (4.1) *e supondo que os estados $x(t)$ possam ser medidos. Considere o sistema afim* (4.5) *cujo estado é o erro de seguimento e assumindo que exista $\overline{\theta} \in \Theta$ definido de acordo com o Lema 4. Utilizando a notação auxiliar (4.11)-(4.15), seja Q_a uma base do espaço nulo de C_a e seja L uma matriz a ser determinada com as dimensões de $C_b(\theta)'$, sendo*

$$C_a = \begin{bmatrix} 0_{1\times mn} & \mathbf{1}_m \end{bmatrix}, \qquad C_b(\theta) = \begin{bmatrix} \aleph_\theta \otimes I_n & 0_{rn\times m} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

com o anulador linear $\aleph_\theta$ conforme Definição 2. Sejam as constantes $\alpha_i > 0$ dadas e escolhidas conforme as orientações da Observação 3. Supondo que existam matrizes P, S e L que resolvam o seguinte problema LMI

$$\overline{P} > 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i S_i = 0, \tag{4.17}$$

$$Q_a'(\Psi + \Phi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L')Q_a < 0\,, \qquad \forall \theta \in \vartheta(\Theta) \tag{4.18}$$

então a origem de (4.6) *sob efeito da lei de chaveamento* (4.8) *é globalmente assintoticamente estável e*

$$V(e(t)) = \max_{i\in\mathbb{I}_m}\{v_i(e(t))\} \tag{4.19}$$

é uma função de Lyapunov para este sistema em malha fechada. ■

Prova: A prova formal completa pode ser encontrada em (TROFINO et al., 2011), mas será apresentada de maneira simplificada a seguir para completude e análises. Inicialmente, será demostrado que a escolha particular de $v_i(e(t))$ atende aos requisitos de estabilidade para a função de Lyapunov candidata $V(e(t)) = \max_{i\in\mathbb{I}_m}\{v_i(e(t))\}$, ou seja, que esta seja positiva e decrescente para as trajetórias do sistema chaveado.

Primeiramente, note que a função de Lyapunov (4.19) pode ser escrita como uma combinação convexa particular das funções auxiliares $v_i(e(t))$

$$V(e(t)) = \max_{i\in\mathbb{I}_m} \{v_i(e(t))\} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(e(t))\, v_i(e(t)), \qquad i \in \sigma(e(t)), \tag{4.20}$$

onde $\theta_j = 0$ se $j \notin \sigma(e(t))$. Porém, para garantir que (4.20) seja positiva para qualquer $\theta \in \Theta$ é necessário que todas as funções auxiliares $v_i(e(t))$ sejam positivas $\forall e(t) \neq 0$. Isso restringe as soluções possíveis. Dessa forma, uma solução menos conservadora será apresentada a seguir.

Considerando as funções auxiliares em (4.9), a função de Lyapunov para $\theta = \overline{\theta}$ é $\overline{V}(e(t)) = e(t)' \left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i P_i\right) e(t) + 2e(t)' \left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i S_i\right)$, $\forall e(t) \neq 0$. Logo, usando a notação (4.14) e as condições LMI (4.17) tem-se

$$V(e(t)) \geq \overline{V}(e(t)) = e(t)'\overline{P}e(t) > 0, \;\; \forall e(t) \neq 0. \tag{4.21}$$

Desta forma $V(e(t))$ é positiva definida e radialmente ilimitada, pois o lado direito de (4.21) é uma forma quadrática positiva definida em vista de (4.17). Adicionalmente, $v_i(e(t)) \leq \beta_i(\|e(t)\|)$ sendo[1] $\beta_i(\|e(t)\|) := \|P_i\|\|e(t)\|^2 + 2\|S_i\|\|e(t)\|$. Isso mostra que

$$\lambda_{min}(\overline{P})\|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq \max_{i\in\mathbb{I}_m}\{\beta_i(\|x(t)\|)\} \tag{4.22}$$

onde os limites inferiores e superiores são funções classe $\mathcal{K}_\infty$, o que significa, dentre outras coisas, que a função não apresenta singularidades. O símbolo $\lambda_{min}(\overline{P})$ representa o mínimo autovalor da matriz real simétrica $\overline{P}$.

Na sequência, é demostrada a obtenção da Desigualdade (4.18). A função (4.19) será decrescente se qualquer combinação entre as derivadas de v_i for negativa, ou seja

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i(e(t))\, \dot{v}_i(e(t)) < 0 \tag{4.23}$$

Para esta escolha particular de $v_i(e(t))$ em (4.9), tem-se

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A_\theta' P_\theta + P_\theta A_\theta & \star \\ K_\theta' P_\theta + S_\theta' A_\theta & K_\theta' S_\theta + S_\theta' K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.24}$$

considerando a seguinte notação

$$\begin{aligned} P_\theta &:= \sum_{i=1}^{m} \theta_i P_i, & A_\theta &:= \sum_{i=1}^{m} \theta_i A_i, \\ K_\theta &:= \sum_{i=1}^{m} \theta_i k_i, & S_\theta &:= \sum_{i=1}^{m} \theta_i S_i \end{aligned} \tag{4.25}$$

[1]Esta relação tem como base as seguintes propriedades de normas de vetores e matrizes: $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ e $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Entretanto, a condição anterior implica que nenhuma combinação de $\dot{v}_i(e(t))$ pode crescer, nem mesmo em modo isolado, o que não é necessário (portanto, é conservador). Note que o interesse é que a função máxima $V(e(t))$ decresça. Sabendo que a função 'max' sempre atende as condições (4.17) e (4.21), temos que (4.24) só precisa ser satisfeita quando

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i \left(e'P_ie + 2e'S_i\right) - e'\overline{P}e \geq 0. \tag{4.26}$$

Assim, podemos usar o Procedimento-S com uma constante α_θ definida como

$$\alpha_\theta := \sum_{i=1}^{m} \theta_i \, \alpha_i \tag{4.27}$$

onde α_i são constantes positivas definidas pelo projetista, para relaxar a condição (4.24) como

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta (P_\theta - \overline{P}) & \star \\ K'_\theta P_\theta + S'_\theta A_\theta + 2S'_\theta \alpha_\theta & K'_\theta S_\theta + S'_\theta K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.28}$$

onde a multiplicação por "2" servirá apenas para separar os termos simetricamente em um passo posterior.

Neste ponto, é importante reforçar que a dependência do $\theta(e(t))$ com relação ao $e(t)$ não é levada em consideração. Devido à dificuldade de se incluir essa dependência, será adotada uma condição mais conservadora onde $\theta(e(t))$ é substituído por um parâmetro arbitrário e variante no tempo, denominado θ, livre para ter qualquer valor pertencente ao simplex unitário Θ.

Na sequência, é demostrada a obtenção da Desigualdade (4.18). Inicialmente, (4.28) é reescrita com a notação (4.11)-(4.15) como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (A+\alpha)'P + P'(A+\alpha) - \alpha'\overline{P}I_a - I'_a\overline{P}\alpha & \star \\ K'P + S'A + 2S'\alpha & K'S + S'K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} < 0. \tag{4.29}$$

Considerando $K\overline{\theta} = 0$ devido à condição (4.7) e $S\overline{\theta} = 0$ devido à (4.17), é possível verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\theta} \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\theta} \end{bmatrix} = 0. \tag{4.30}$$

Desta forma é possível reescrever (4.29) como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \overline{\theta} \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \overline{\theta} \end{bmatrix} < 0. \tag{4.31}$$

Com $C_a, C_b(\theta)$ em (4.16) tais que

$$C_a \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \overline{\theta} \end{bmatrix} = 0, \qquad C_b(\theta) \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \overline{\theta} \end{bmatrix} = 0. \tag{4.32}$$

Aplicando o Lema de Finsler é possível reescrever (4.31) inserindo a matriz $C_b(\theta)$ que contém os anuladores lineares como

$$\begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \overline{\theta} \end{bmatrix}' (\Psi + LC_b(\theta) + C_b(\theta)'L') \begin{bmatrix} e_\theta \\ \theta - \overline{\theta} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.33}$$

para qualquer matriz L de dimensões adequadas. Considerando o espaço nulo de C_a e aplicando novamente o Lema de Finsler, é possível obter a LMI em (4.18) como uma condição suficiente para a estabilidade do sistema chaveado. ■

Observação 2. *Verifica-se que, para o problema de estabilidade global considerado neste capítulo, $A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \overline{P}) < 0$ é uma condição necessária para que* (4.28) *seja satisfeita. Como $\overline{\theta} \in \Theta$, esta condição implica, para $\theta = \overline{\theta}$, que $A'_{\overline{\theta}} P_{\overline{\theta}} + P_{\overline{\theta}} A_{\overline{\theta}} < 0$, o que de fato implica que $A_{\overline{\theta}}$ deve ser Hurwitz estável*[2]*, pois $P_{\overline{\theta}} = \overline{P} > 0$.* ■

Observação 3. *Pode-se observar que a condição* (4.18) *não é, de fato, uma LMI com relação às constantes escalares positivas α_i. No entanto, algumas orientações para escolha dessas constantes podem ser obtidas através da análise do problema. Conforme visto anteriormente, $A'_\theta P_\theta + P_\theta A_\theta + 2\alpha_\theta(P_\theta - \overline{P}) < 0$ é uma condição necessária para que* (4.28) *seja satisfeita. É possível reescrever essa desigualdade como $(A_\theta + \alpha_\theta I_n)' P_\theta + P_\theta (A_\theta + \alpha_\theta I_n) - 2\alpha_\theta \overline{P} < 0$. Como $\alpha_\theta \overline{P} > 0$, esta condição indica que as constantes α_i possam ser escolhidas, conforme abordado em (TROFINO; SCHARLAU; COUTINHO, 2012; TROFINO et al., 2009), no intervalo $0 < \alpha_i < |\underline{\lambda}_i|$, onde $\underline{\lambda}_i$ representa a parte real do autovalor estável de A_i mais próximo do eixo imaginário e $|\underline{\lambda}_i|$ seu valor absoluto. A ideia é ter decrescimento exponencial de $V(e(t))$ nas direções onde o termo negativo $-2\alpha_\theta e(t)'\overline{P}e(t)$ em* (4.28) *possa ser negligenciado. Neste caso* (4.28) *se torna o requisito de performance exponencial de Trofino et al. (2009), Trofino, Scharlau e Coutinho (2012).* ■

4.3 EXEMPLO DO CONTROLE TRADICIONAL VIA LMI PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIA CONSTANTE

O controle tradicional via LMIs abordado em Trofino et al. (2011) é aplicado nesta seção para o seguimento de referência constante.

[2]Essa é apenas outra forma de dizer que todos os seus autovalores devem ter parte real negativa.

Nesta seção, é apresentada de maneira sucinta a aplicação da técnica de controle para o conversor CC/CC abaixador de tensão (Buck). O conversor teve seu comportamento modelado por equações diferenciais ordinárias para os dois modos (chave aberta e fechada) e representado em espaço de estados na forma $\dot{x} = A_i x + b_i$.

Nesta modelagem, assume-se que as comutações da chave e do diodo D são ideais (instantâneas) e que o conversor opera em modo de condução contínua, ou seja, durante o chaveamento a corrente no indutor não atinge o valor nulo no tempo em que o circuito opera no modo 2.

Para exemplificar a técnica de chaveamento, será considerado o caso de realimentação total dos estados do conversor Buck com a topologia vista na Figura 3.1. O conjunto de parâmetros utilizados na resolução numérica são dados pela Tabela 4.1. Será considerada uma referência constante para a tensão de saída $V_{ref} = 9V$.

Tabela 4.1 – Parâmetros do conversor Buck.

Parâmetro	Valor
V_{in}	$15\ V$
L	$1\ mH$
C	$1\ \mu F$
R	$30\ \Omega$
m	2
V_{ref}	$9\ V$

Para o processamento do controle por LMIs, são definidas como variáveis de decisão P_1, P_2, S_1 e S_2. O ponto de equilíbrio desejado $\bar{x}$ é dado a seguir:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{V_{ref}}{R} \\ V_{ref} \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

A relação entre o valor médio da função de chaveamento que aciona a chave s com o período de comutação é denominada razão cíclica ou ciclo de trabalho (*duty cycle*). O valor da razão cíclica ($\bar{\theta}$) varia de 0 (quando a chave s está permanentemente aberta e o sistema opera no modo 2) a 1, que corresponde à chave permanentemente fechada (modo 1). Idealmente, para o caso do conversor *Buck* seria possível regular a tensão média da saída para valores entre zero até o valor da tensão de entrada através da variação de $\bar{\theta}$.

A expressão análoga ao *duty cycle*, que relaciona a tensão média na saída com a tensão da entrada e a razão cíclica nos conversores *Buck*, são dadas pelas Equações (4.35) e (4.36) que são utilizadas nas inequações do controle.

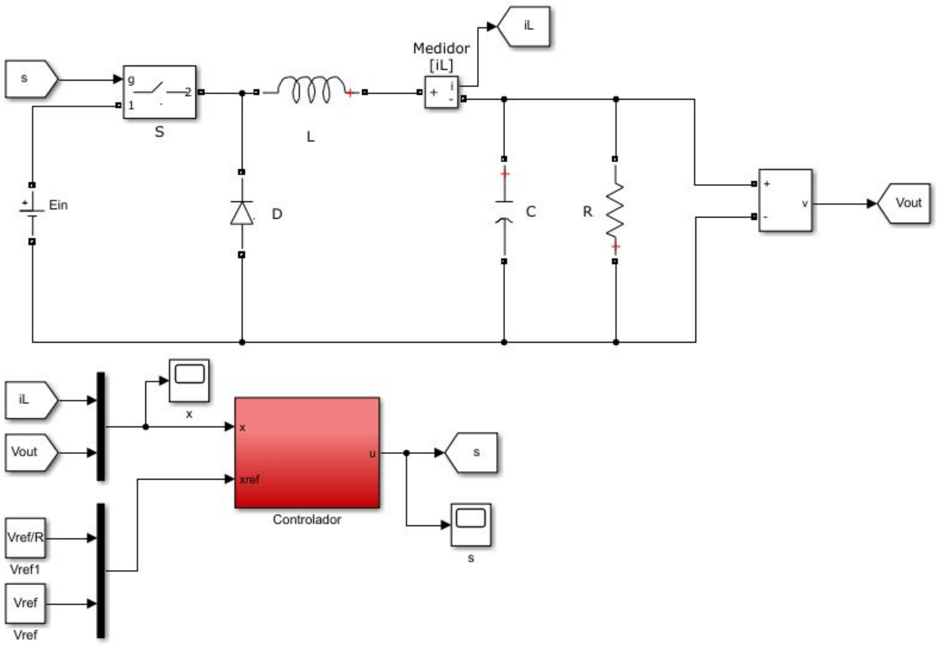
$$\bar{\theta}_1 = \frac{V_{ref}}{E_{in}} \tag{4.35}$$

$$\bar{\theta}_2 = 1 - \bar{\theta}_1 \tag{4.36}$$

Tendo em vista que as matrizes A_1 e A_2 são iguais, independente do valor de $\theta := \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}'$, é necessário considerar apenas um dos dois vértices do politopo. Para este sistema em particular, o sistema seria estável mesmo sem considerar a LMI de modo deslizante estável e fazendo P_1 e P_2 iguais, pois o sistema é estável nos dois modos e, portanto, a sua combinação convexa também. Entretanto, embora o sistema não atinja magnitudes maior do que sua capacidade, sem uma lei de chaveamento adequada o seguimento de referência não acontece.

O diagrama do sistema do conversor Buck com o controlador, montado no Matlab/Simulink para a simulação, é apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Diagrama de blocos do sistema conversor Buck e controlador.



O bloco controlador tem como entradas os estados do sistema, corrente do indutor i_L e tensão de saída do capacitor V_{out}, e a referência desejada dada pela Equação (4.34). Sua saída é o sinal de controle que é aplicado na chave S na qual realiza a comutação do sistema.

A diferença entre os estados desejados e a referência é dada como o erro (e) e é representada na Equação (4.37).

$$e = \begin{bmatrix} i_L(t) - i_{ref}(t) \\ V_{out}(t) - V_{ref}(t) \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

A partir da Equação (4.37) são calculados as funções auxiliares das Equações (4.38) e (4.39) que são determinados os valores máximos de cada modo de operação.

$$v_1 = e'P_1 e + 2{S_1}'e \tag{4.38}$$

$$v_2 = e'P_2 e + 2{S_2}'e \tag{4.39}$$

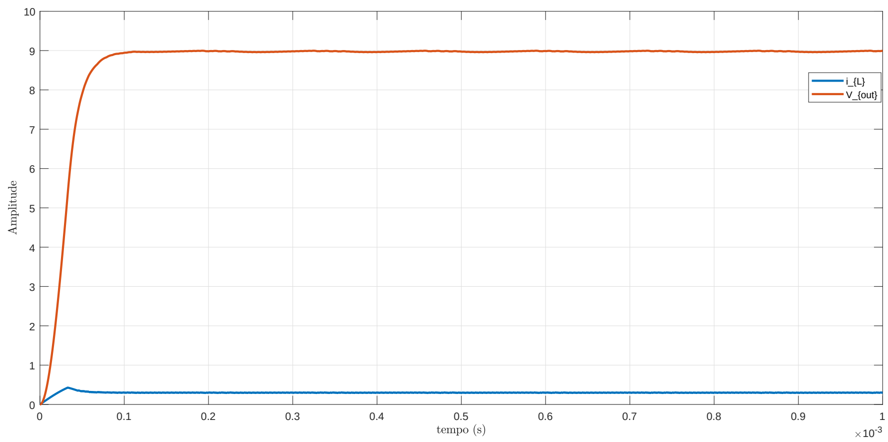
A solução das LMIs no Matlab é realizada com o auxílio do pacote computacional SeDuMi através do *parser* YALMIP. Os valores de P_1, P_2, S_1 e S_2 são dados pelas Equações (4.40) e (4.41), respectivamente.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0572 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0001 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0.0576 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0001 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -0.0109 \\ -0.0004 \end{bmatrix}, \; S_2 = \begin{bmatrix} 0.0163 \\ 0.0005 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

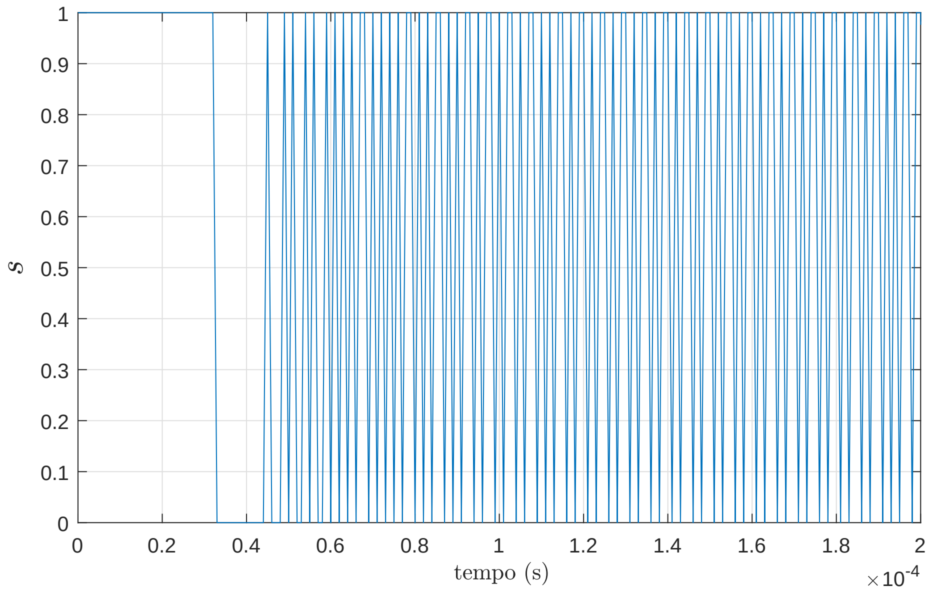
Os resultados de simulação do conversor CC/CC Buck com a lei de chaveamento projetada são projetadas a seguir. Na Figura 4.2 é apresentado o comportamento dos estados x_1 e x_2, sendo a tensão de saída no capacitor e a corrente no indutor, respectivamente.

Figura 4.2 – Comportamento dos estados do conversor Buck com a lei de chaveamento projetada.



O sinal de controle determinado pela lei de chaveamento projetada, representado pela Figura 4.3, é o responsável pela comutação da chave s afim de levar os estados do sistema para a referência desejada, onde $s = 1$ representa o modo 1 e $s = 0$ representa o modo 2. Foi utilizado um passo de simulação de 1×10^{-6}.

Figura 4.3 – Sinal de controle da lei de chaveamento projetada para o conversor Buck.



Analisando os resultados obtidos em simulação, verifica-se que o requisito de erro nulo em regime permanente foi atingido. Os estados do sistema foram levados para os valores pré-determinados de referência.

4.3.1 Metologia utilizando a função 'min'

Trabalhos já publicados oferecem uma abordagem alternativa para a lei de chaveamento através do uso da função 'min'. Por exemplo, em Bolzern e Spinelli (2004) os resultados são baseados em uma função quadrática $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$ positiva e comum a todos os modos. Nesse caso $\dot{V}(x(t))$ é definida como

- $\dot{V}(x(t)) = \dot{V}_i(x(t)) = x'(A_i'P + PA_i)x + 2b_i'Px$ para $\sigma(x(t))$ composto por um elemento, neste caso $\{i\}$;
- $\dot{V}(x(t)) = \sup_{\gamma\in[0,1]}\{\gamma\dot{V}_i(x(t)) + (1-\gamma)\dot{V}_j(x(t))\}$ para $\sigma(x(t))$ é composto por mais de um elemento, neste caso $\{i,j\}$, ou seja, o sistema chaveado encontra-se em modo deslizante.

O chaveamento é feito com base na escolha do subsistema cuja função $V(x)$ apresente maior taxa de decaimento, ou seja

$$\sigma(x(t)) := \arg\min_{i\in\mathbb{I}_m}\{\dot{V}_i(x(t))\}. \tag{4.42}$$

Essa lei de chaveamento também permite a ocorrência de modos deslizantes. Adicionalmente, é apresentada em Bolzern e Spinelli (2004) uma estratégia para evitar a ocorrência de modos deslizantes através da introdução de uma histerese. Mais detalhes e provas podem ser vistos nessa referência.

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou a técnica de controle tradicional utilizando LMI, melhor abordada em Trofino et al. (2011), para o projeto de um controlador que visa impor comportamento sobre sistemas chaveados do tipo afim. Tal estratégia pôde ser utilizada para o projeto da lei de chaveamento do conversor CC/CC apresentado com o objetivo de seguimento de referência constante com erro nulo em regime permanente.

De acordo com Dezuo (2014), a extensão desta lei de chaveamento para seguimento de referências variantes no tempo ainda é um problema em aberto. Sendo assim, será proposta no Capítulo 5 uma solução para este problema através de uma mudança de paradigma onde o chaveamento assíncrono (dependente do estado) passa a ser um chaveamento síncrono (dependente do tempo).

5 EXTENSÃO PARA REFERÊNCIA VARIÁVEL

Exitem diversas técnicas de controle disponíveis na literatura para o seguimento de referências de valor fixo em regime permanente. Dentre estas, encontram-se técnicas que se aplicam a sistemas chaveados e têm garantias de robustez ou inclusão de requisitos de performance, como as de Trofino et al. (2009), Trofino et al. (2011), Deaecto et al. (2010), Deaecto, Geromel e Daafouz (2011). Estas técnicas de controle são baseadas em LMIs. Entretanto, para seguimento de referências variantes no tempo, surge uma complexidade matemática que dificulta a obtenção de LMIs factíveis para o projeto do controlador. Em Trofino et al. (2009) é realizada uma tentativa de solução do problema que, embora aparentemente funcionasse em simulação para o sistema considerado, não considerava a possibilidade de existência de modos deslizantes no sistema chaveado em malha fechada. Em Trofino et al. (2011) e Trofino, Scharlau e Coutinho (2012) foi apresentada uma solução que garante a estabilidade do sistema chaveado mesmo sob a ocorrência de modos deslizantes, ou seja, as superfícies de chaveamento projetadas (solução das LMIs) nunca seriam superfícies instabilizantes. Entretanto, a nova solução proposta não resolve o problema de seguimento de referências variantes no tempo. Pesquisas continuam sendo desenvolvidas para a obtenção de LMIs menos restritivas, por exemplo, utilizando funções de Lyapunov (nas quais os métodos se baseiam) mais complexas, com mais graus de liberdade, porém sem sucesso até então.

Pensando neste problema, é proposta uma solução para o problema de seguimento de referências variantes no tempo para sistemas chaveados de dinâmica afim no estado. A ideia proposta tem como base usar o conceito de modo deslizante para calcular o *duty cycle* ideal a cada instante de tempo através da estratégia de controle *Feedforward*. Além disso, é proposto um controle do tipo *Feedback* para promover a estabilização do sistema (garantia de estabilidade), levando em conta as limitações físicas do *duty cycle* (sinal de controle). Para isso, pretende-se projetar o ganho de realimentação de estados com base em LMIs que imponham restrição no sinal de controle e que otimizem a performance de transitório do sistema em malha fechada. Neste caso, como a referência é variante no tempo, refere-se à transitório como sendo o período onde há erro entre o estado real e a referência.

5.1 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS PARA REFERÊNCIA VARIÁVEL

Considere a dinâmica do sistema chaveado não linear composto por m subsistemas como é exposto a seguir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_i + Ez(t)\,, \quad i \in \mathbb{I}_m, \tag{5.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $z(t) \in \mathcal{Z}$ é um sinal externo, onde $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n_z}$ é um conjunto limitado[1] e as dinâmicas de $z(t)$ são conhecidas e dadas por

$$\dot{z}(t) = Wz(t), \tag{5.2}$$

com a matriz constante $W \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$ são matrizes de estrutura.

Considere o objetivo de fazer com que os estados rastreiem uma determinada referência $x_{ref}(t)$. Em outras palavras, a trajetória desejada $x_{ref}(t)$ do sistema chaveado (em malha fechada) deve ser estável. Suponha $x_{ref}(t)$ possa ser representada como

$$x_{ref}(t) = \bar{x} + Zz(t), \tag{5.3}$$

onde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de deslocamento constante determinado e $Z \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$ é uma matriz constante fornecida.

O problema pode ser reformulado como o projeto de uma estratégia de controle que conduza o erro do estado do sistema

$$e(t) := x(t) - x_{ref}(t) \tag{5.4}$$

para a origem $e(t) = 0$, $\forall z(t) \in \mathcal{Z}$. Substituindo $x(t) = e(t) + x_{ref}(t)$ na Equação (5.1) e observando nas Equações (5.3), (5.2) que $\dot{x}_{ref}(t) = Z\dot{z}(t) = ZWz(t)$, temos a dinâmica do erro de rastreamento como os seguintes subsistemas.

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_{ref}(t) \tag{5.5}$$

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + A\bar{x} + b_i + \underbrace{(AZ + E - ZW)}_{U}z(t)\,, \quad i \in \mathbb{I}_m \tag{5.6}$$

Supondo que a dinâmica do modo deslizante do sistema possa ser representada como as combinações convexas dos subsistemas, como em Filippov (1988), o sistema chaveado global, que inclui as dinâmicas dos subsistemas e as dinâmicas do modos deslizantes que pode eventualmente ocorrer em qualquer superfície de chaveamento, é representado por

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(e(t), z(t)) \cdot \Big(Ae(t) + A\bar{x} + b_i + Uz(t)\Big), \qquad \theta_i(e(t), z(t)) \in \Theta, \tag{5.7}$$

[1] Existe uma constante c de tal modo que $c \succeq z$, $\forall z \in \mathcal{Z}$.

onde Θ é o simplex unitário definido em (3.14) e $\theta_i(e(t),z(t))$ são definidos de acordo com os resultados de Filippov (FILIPPOV, 1988, p.50).

Para atingir o objetivo de rastreamento, a origem deve ser um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (5.7). Define-se $\overline{\theta}(z(t)) = \theta(0,z(t))$. Portanto, o seguinte lema é estabelecido.

Lema 5. *A origem é um ponto de equilíbrio da Equação (5.7) se e somente se existe $\overline{\theta}(z(t)) \in \Theta$ que satisfaça*

$$A\overline{x} + Uz(t) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i(z(t))\, b_i = 0. \tag{5.8}$$

■

Prova: Dado $\dot{e}(t) = 0$ e $e(t) = 0$ em (5.7). ■

A seguir, a dependência de θ em (e,z) será omitida para simplificação da representação. Observando que θ_i representa a contribuição de cada modo de operação na dinâmica em malha fechada, sua representação é semelhante à ideia de *duty cycle* (para sistemas de dois modos). Assim, pode-se interpretar $\overline{\theta}_i(t)$ como a porcentagem de um período de chaveamento no qual cada modo deve ser ativado para manter o estado na trajetória $x_{ref}(t)$ quando o erro cessar. Assume-se nesta dissertação que $\overline{\theta}_i(t)$, $\forall i \in \mathbb{I}_m$, são funções contínuas do tempo.

Observação 4 (Exemplos de $z(t)$)**.** *Várias funções não lineares dependentes do tempo podem ser expressas como na Equação (5.2). Por exemplo, o vetor $z(t) = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}'$ pode ser representado como na Equação (5.2) com*

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

e observa-se que $\mathcal{Z} := \{z(t) \ : \ z(t)'z(t) = 1\}$ é um conjunto limitado porque $1 \succeq z(t)$, $\forall z(t) \in \mathcal{Z}$. Para algumas funções, $\mathcal{Z}$ pode caracterizar um conjunto invariante, i.e. um conjunto de pontos $z(t_0)$ de tal forma que $z(t)$ não saia do conjunto $\forall t \geq t_0$. Por exemplo, $z(t) = \exp(-\alpha t)$ pode ser representado como a Equação (5.2) com $W = -\alpha$, e $\mathcal{Z} := \{z(t),\ \exp(-\alpha t_0) \succeq z(t),\ \forall t \geq t_0\}$ é um conjunto limitado. Além disso, $z(t)$ pode ser utilizado para representar parâmetros ou perturbações constantes. Observe que uma constante z é representada com $W = 0$, englobando a classe de sistemas tratada no Capítulo 4 como um caso particular. ■

5.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

De acordo com a seção anterior, é necessária a existência de uma proporção de ativação de cada modo a cada instante para manter a trajetória desejada. Embora também seja necessário garantir estabilidade (convergência para a trajetória). Portanto, esta seção está dividida em duas partes para o projeto do controle: **(i)** imposição da condição de equilíbrio por meio de uma estratégia *Feedforward* e **(ii)** garantia de requisitos de estabilidade e desempenho por meio de uma estratégia de controle *Feedback*. A seção termina com considerações sobre a estrutura de controle completa e sua implementação.

5.2.1 Estratégia Feedforward

As estratégias de controle baseadas no conceito *Feedforward* são comuns para cancelamento dos efeitos de perturbações conhecidas (VILANOVA; ARRIETA; PONSA, 2009), (DAI et al., 2016), (BAO et al., 2017). Em Lacerda, Cardoso e Souza (2018) foi utilizada a estratégia de controle digital *Feedforward* a fim de se rejeitar perturbações de entrada em um conversor CC/CC abaixador de tensão Buck.

Uma das desvantagens deste método é a necessidade de ter o modelo do sistema e perturbações bem conhecidos. Isso ocorre porque o *Feedforward* é baseado em modelo e geralmente atua como um pré-compensador (estático ou dinâmico). Existem outros métodos de controle, como o Controle Preditivo por Modelo (MPC - *Model Predictive Control*) (KOTHARE; BALAKRISHNAN; MORARI, 1996) e os métodos de detecção e identificação de falhas baseados em modelo (FRANK, 1990), que também contam com um sistema bem conhecido.

Nesta dissertação, em vez de perturbações, pretende-se cancelar os efeitos de não linearidades e referências periódicas na dinâmica de erros em malha fechada, conforme a Equação (5.7). Como afirmado anteriormente, estes termos não lineares com dinâmica não atenuada costumam ser um desafio para as técnicas de projeto de controle por realimentação de estados (*Feedback*), especialmente para as LMIs baseadas em funções de Lyapunov. Existem exemplos de controle *Feedforward* sendo utilizado para o rastreamento de referências variantes no tempo, como em Castañeda, Luviano-Juárez e Chairez (2014), por exemplo. No entanto, que seja do conhecimento do autor, não existem na literatura estratégias para seguimento de referência variante no tempo para sistemas chaveados utilizando o controle *Feedforward*. Os sistemas chaveados têm complicações adicionais, pois o modelo do sistema é naturalmente não linear e a linearização do modelo médio baseada no *duty cycle* é limitada para sistemas com mais de dois modos de operação.

Assuma que as matrizes do sistema sejam bem conhecidas. Suponha também que $z(t)$ seja conhecido em tempo real $\forall t \geq 0$. Portanto, a estratégia *Feedforward* pode ser utilizada para determinar, em tempo real, o valor de $\overline{\theta}(t)$ que satisfaça a Equação (5.8).

Resolver a Equação (5.8) é equivalente a resolver o sistema linear para $\overline{\theta}_i(t)$ sob a restrição $\sum_{i=1}^{m} \overline{\theta}_i = 1$. Para simplificar o problema, observe que a Equação (5.8) pode ser reescrita como

$$A\overline{x} + Uz(t) + \sum_{i=1}^{m-1} \overline{\theta}_i(t)\, b_i + \overline{\theta}_m(t)\, b_m = 0. \tag{5.10}$$

Lembrando da Equação (3.14) que $\forall \overline{\theta} \in \Theta$ tem-se

$$\overline{\theta}_m(t) = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} \overline{\theta}_i(t). \tag{5.11}$$

Assim, a Equação (5.10) pode ser reescrita como

$$A\overline{x} + Uz(t) + \sum_{i=1}^{m-1} \overline{\theta}_i(t)\, b_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \overline{\theta}_i\right) b_m = 0 \tag{5.12}$$

$$A\overline{x} + b_m + Uz(t) + \sum_{i=1}^{m-1} \overline{\theta}_i(t)\, (b_i - b_m) = 0 \tag{5.13}$$

que pode ser reescrita na forma de um sistema matricial linear variante no tempo como

$$B\,\overline{\theta}(t) = -\left(A\overline{x} + b_m + Uz(t)\right), \tag{5.14}$$

onde

$$B = \left[\begin{array}{ccc} b_1 - b_m & \cdots & b_{m-1} - b_m \end{array}\right] \tag{5.15}$$

$$\overline{\theta}(t) := \left[\begin{array}{ccc} \overline{\theta}_1(t) & \cdots & \overline{\theta}_{m-1}(t) \end{array}\right]'. \tag{5.16}$$

A solução da Equação (5.14) para $\overline{\theta}$, com $\overline{\theta}_m$ determinada pela Equação (5.11), mantém a trajetória desejada quando aplicada como uma entrada de controle no sistema. Essa solução pode ser obtida, por exemplo, através do cálculo da inversa de Moore-Penrose (também conhecido como pseudo-inversa) de $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ como $\overline{\theta}(t) = -B^{+}\left(A\overline{x} + b_m + Uz(t)\right)$.

A Equação (5.14) pode ser sobre-determinada, ou seja, com mais equações do que variáveis ($n > m-1$), a solução pela pseudo-inversa é ideal no sentido dos mínimos quadrados (a solução que minimiza a norma) (PETERS; WILKINSON, 1970). Para o caso do sistema sub-determinado ($n < m-1$), a solução será a mais curta, no sentido da norma euclidiana, entre todas as soluções possíveis (PLANITZ, 1979). Ambos os casos são interessantes para os sistemas chaveados, pois $\overline{\theta}_i(t)$ deve estar dentro do intervalo $[0,1]$. Observe que para o caso sobre-determinado, mais equações do que variáveis podem implicar que o conjunto alcançável seja limitado, ou seja, não é possível especificar todas as referências dos estados independentemente, pois elas devem resolver a Equação (5.14).

Observe que o sistema apenas com a implementação do *Feedforward* permanece em malha aberta. O rastreamento de referência é mantido apenas se o sistema for naturalmente estável $\forall\overline{\theta}(t)$ aplicado. Além disso, não há ajuste de desempenho. Por esses motivos, a estrutura de controle é complementada pela estratégia de realimentação de estados (*Feedback*) apresentada a seguir.

5.2.2 Controle por realimentação de estados - *Feedback*

A realimentação de estados é uma técnica de controle que permite impor autovalores quaisquer para matrizes de estado do sistema em malha fechada, objetivando modificar a dinâmica do sistema. Para a sua aplicação em uma planta, deve-se assumir que todas as suas variáveis de estado são mensuráveis e estão disponíveis para serem utilizadas na realimentação (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2014).

Como ponto de partida para seu uso, os polos de malha fechada devem ser determinados com base nas especificações da resposta temporal e/ou da resposta em frequência. Supõe-se então que os polos estão alocados em $p = \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ e que, escolhendo uma matriz de ganhos apropriada para a realimentação de estados, é possível forçar o sistema a ter os polos de malha fechada nas posições desejadas, desde que o sistema original seja completamente controlável (OGATA; YANG, 2002).

Antes de prosseguir com a formulação da teoria de realimentação de estados é necessário conceituar a controlabilidade. Um sistema representado em espaço de estados é dito controlável, se sempre for possível conduzi-lo, em um tempo finito, de um estado inicial, $x(0) = x_0$, para um estado final qualquer, x_f (CHEN, 1998). A matriz de controlabilidade é representada por

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

O sistema é controlável se, e somente se, a matriz M_c têm n colunas linearmente independentes, isto é, se o posto (*rank*) da matriz de controlabilidade for igual a n. Portanto, se o número de colunas linearmente independentes da matriz de controlabilidade for igual a dimensão da matriz de estado, a técnica de realimentação de estados pode ser utilizada.

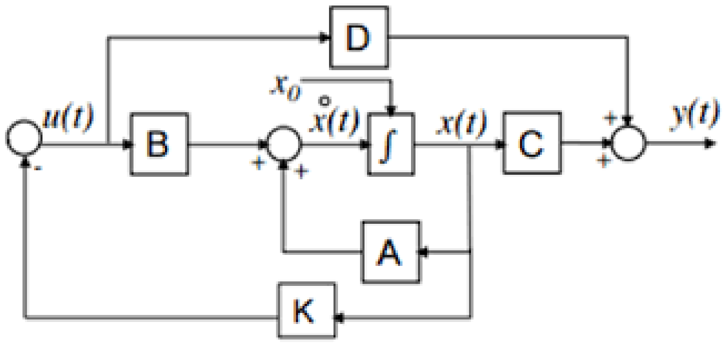
Retomando a formulação teórica da técnica, pode-se dizer que a sua ideia básica consiste em multiplicar cada variável de estado por um ganho fixo e, em seguida, realimentá-la para o terminal de entrada, a fim de se implementar a lei de controle dada por

$$u(t) = -Kx(t) \tag{5.18}$$

em que K é um vetor linha denominado matriz de ganho de realimentação.

Portanto, desde que o sistema seja controlável, pode-se alocar todos os autovalores de forma a tornar o sistema em malha fechada estável e fazer com que a resposta temporal do sistema siga as especificações de projeto. A Figura 5.1 representa graficamente o diagrama de blocos do sistema em malha fechada com realimentação de estados aplicando a lei de controle da Equação (5.18).

Figura 5.1 – Representação do diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com realimentação de estados.



A escolha dos polos de malha fechada assegura que o sistema terá a dinâmica desejada, por exemplo, a garantia de estabilidade. Porém, isto não é suficiente para que o sistema seja capaz de seguir uma determinada referência, apresentando erro nulo. Uma das formas de garantir que o erro em estado estacionário seja nulo, é adicionar um integrador a ação de controle. Esta extensão pode ser melhor detalhada em Franklin, Powell e Emami-Naeini (2014), (OGATA; YANG, 2002) e Dorf e Bishop (2011).

A idéia de implementar um *Feedback* e um *Feedforward* juntos permite combinar suas vantagens, introduzindo estabilização, desempenho e robustez em malha fechada. Além disso, restrições de sinal de controle, como a limitação de que $\theta(t) \in [0,1]$, são necessárias para evitar a saturação, o que poderia implicar na perda de garantias de estabilidade ou rastreamento de referência incorreta.

Observando que a Equação (5.8) é uma identidade zero, pode-se subtraí-la da Equação (5.7) que resulta em

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + \sum_{i=1}^{m} (\theta_i(t) - \overline{\theta}_i(t)) \cdot b_i \quad , \quad \theta_i, \overline{\theta}_i \in \Theta. \tag{5.19}$$

Usa-se o mesmo artifício da Equação (5.11) para eliminar as variáveis θ_m, $\overline{\theta}_m$ como

$$\theta_m(t) - \overline{\theta}_m(t) = -\sum_{i=1}^{m-1} \left(\theta_i(t) - \overline{\theta}_i(t)\right). \tag{5.20}$$

Esta manobra é importante porque elimina uma entrada de controle linearmente dependente. Assim, a Equação (5.19) pode ser reescrita na forma padrão de sistema de controle linear

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + B\Delta\theta(t), \quad \Delta\theta(t) \in \Gamma_a(t) \tag{5.21}$$

em que B é definido na Equação (5.16) e a entrada de controle é

$$\Delta\theta(t) := \begin{bmatrix} \theta_i(t) - \overline{\theta}_1(t) \\ \vdots \\ \theta_{m-1}(t) - \overline{\theta}_{m-1}(t) \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

e o conjunto $\Gamma_a(t)$ depende do valor de $\overline{\theta}$ no instante t e é definido como

$$\Gamma_a(t) := \left\{\Delta\theta_i(t) \ : \ -\overline{\theta}_i(t) \leq \Delta\theta_i(t) \leq 1 - \overline{\theta}_i(t)\right\} \tag{5.23}$$

que resulta em $\theta(t) \in [0,1]$.

Lembre-se de que $\overline{\theta}(t)$ é o resultado da estratégia *Feedforward* proposta na Seção 5.2.1. Portanto, calculando uma estratégia de realimentação de estados para determinar $\Delta\theta(t)$, obtém-se o quanto $\theta(t)$ pode se desviar de $\overline{\theta}(t)$.

Considera-se o objetivo de projetar uma realimentação de estado

$$\Delta\theta(t) = Ke(t) \quad , \quad K \in \mathbb{R}^{(m-1)\times n}, \tag{5.24}$$

que estabilize o sistema e minimize a energia da variável de desempenho

$$h(t) = C_z e(t) + D_z \Delta\theta(t), \tag{5.25}$$

onde $C_z \in \mathbb{R}^{n_h \times n}$, $D_z \in \mathbb{R}^{n_h \times (m-1)}$ são matrizes constantes escolhidas pelo projetista, similares à abordagem do Regulador Quadrático Linear (LQR - *Linear Quadratic Regulator*). Nesta dissertação, é considerada a estrutura LMI devido às suas interessantes propriedades e facilidade de incluir critérios de desempenho e restrições de controle. O objetivo proposto pode ser alcançado pelo controle com custo garantido no seguinte teorema.

Teorema 2 (Controle com custo garantido)**.** *Suponha que $x(t)$, $x_{ref}(t)$ estejam disponíveis em tempo real e considere o sistema do erro da Equação (5.21) com uma determinada condição inicial $e(0)$. Suponha que $\exists Q = Q', Y$ resolvendo o seguinte problema de LMI.*

min τ *sujeito a:*

$$\begin{bmatrix} \tau & e(0)' \\ e(0) & Q \end{bmatrix} > 0 \tag{5.26}$$

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + Y'B' + BY & \star \\ (C_z Q + D_z Y) & -I_{n_h} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.27}$$

Então o sistema da Equação (5.21) é globalmente assintoticamente estável e a função de custo

$$J = \min_{\Delta\theta(t)} \int_0^\infty h(t)'h(t)\ dt \tag{5.28}$$

é minimizada com $\Delta\theta(t) = Ke(t)$, onde

$$K = YQ^{-1} \tag{5.29}$$

e $V(e(t)) = e(t)'Q^{-1}e(t)$ é uma função Lyapunov para o sistema em malha fechada.

*Prova: A prova está na literatura padrão e pode ser encontrada com detalhes em **??**, p.100), por exemplo. Primeiro, o sistema em malha fechada da Equação (5.21) é quadraticamente estável com uma entrada de controle fornecida por (5.24) se e somente se existir a função $V(e(t)) > 0$ de modo que $\dot{V}(e(t)) < 0$. O requisito de custo garantido pode ser incluído impondo a seguinte condição à desigualdade de Lyapunov (**??**):*

$$\dot{V}(e(t)) + h(t)'h(t) < 0 \tag{5.30}$$

onde $\dot{V}(e)$ é a derivada temporal da função candidata Lyapunov $V(e(t)) = e(t)'Q^{-1}e(t)$. Ao integrar a Equação (5.30) de 0 até ∞ tem-se

$$V(e(\infty)) - V(e(0)) + \int_0^\infty h(t)'h(t) < 0. \tag{5.31}$$

Assumindo que o sistema da Equação (5.21) é estável, $\lim_{t\to} e(\infty) = 0$ e portanto $V(e(\infty)) = 0$. Então, a Equação (5.31) é equivalente a

$$\int_0^\infty h(t)'h(t) < e(0)'Q^{-1}e(0) = V(e(0)). \tag{5.32}$$

Isso significa que ao minimizar $e(0)'Q^{-1}e(0)$, estamos minimizando um limite superior para a função de custo J definida na Equação (5.28). Definindo o escalar τ tal que $\tau > e(0)'Q^{-1}e(0)$, obtem-se a condição

$$\tau - e(0)'Q^{-1}e(0) > 0. \tag{5.33}$$

Aplicando o Complemento de Schur na Equação (5.33), obtém-se a condição LMI da Equação (5.26). Observe que a Equação (5.26) implica $Q > 0$ portanto $V(e(t)) > 0$ é garantido $\forall e(t) \neq 0$.

Agora considerando as Equações (5.21), (5.24) e (5.25), podemos reescrever (5.32) como

$$e(t)'(A+BK)'Q^{-1}e(t)+e(t)'Q^{-1}(A+BK)e(t)+e(t)'(C_z+D_zK)'(C_z+D_zK)e(t)<0. \quad (5.34)$$

que é satisfeita $\forall e(t) \neq 0$ se

$$(A+BK)'Q^{-1}+Q^{-1}(A+BK)+(C_z+D_zK)'(C_z+D_zK)<0 \quad (5.35)$$

é satisfeita. Finalmente, multiplicando a Equação (5.35) por Q pela esquerda e pela direita, utilizando o Complemento de Schur e realizando a mudança de variáveis $Y = KQ$ em (5.35) obtemos a condição LMI (5.27). ■

Observação 5. *Observe que*

$$h(t)'h(t) = e(t)'C_z'C_ze(t)+e(t)'C_z'D_z\Delta\theta(t)+\Delta\theta(t)'D_z'C_ze(t)+\Delta\theta(t)'D_z'D_z\Delta\theta(t) \quad (5.36)$$

portanto, a função de custo da Equação (5.28) se torna idêntida ao problema do Regulador Quadrático Linear (LQR) se a escolha de C_z e D_z apresentar posto (rank) completo tal que $C_z'D_z = 0$, o que implica que $C_z'Cz > 0$ e $D_z'D_z > 0$ são as matrizes de ponderação LQR. ■

No entanto, o projeto pode levar a ganhos K que saturam a ação de controle, pois $\Delta\theta$ pode resultar em $\theta(t) \notin [0,1]$, dependendo do valor atual de $\overline{\theta}(t)$. Assim, é proposta a aplicação de um projeto de controle baseado em LMI que impõe limitações ao sinal de controle.

Observe que os limites de $\Gamma_a(t)$ na Equação (5.23) dependem do tempo e estão em um intervalo não necessariamente simétrico em $\Delta\theta_i(t)$. Suponha $0 \leq \overline{\theta}_i^{min} \leq \overline{\theta}_i(t) \leq \overline{\theta}_i^{max} \leq 1$, onde os limites $\overline{\theta}_i^{min} := \min_{t\geq 0}\overline{\theta}_i(t)$, $\overline{\theta}_i^{max} := \max_{t\geq 0}\overline{\theta}_i(t)$ podem ser determinados pelo controle *Feedforward*, Equação (5.14), para a trajetória desejada. Assim sendo,

$$\Delta\theta(t) \in \Gamma_b := \left\{\Delta\theta_i(t) \ : \ -\overline{\theta}_i^{min} \leq \Delta\theta_i(t) \leq 1-\overline{\theta}_i^{max}\right\} \quad (5.37)$$

garante $\theta(t) \in [0,1]$, $\forall t \geq 0$. Para tornar o intervalo possível de $\Delta\theta_i(t)$ simétrico, defina

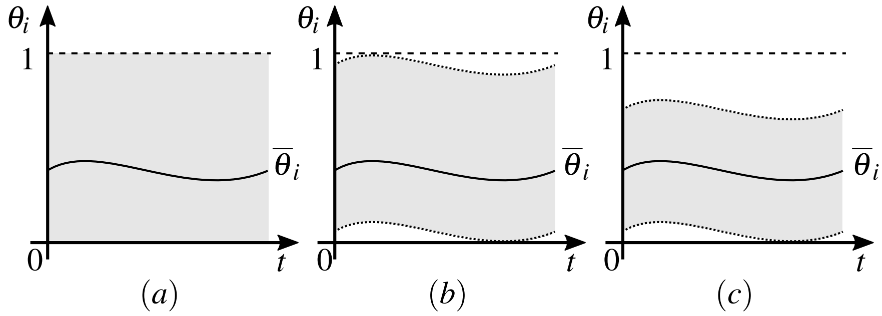
$$\mu_i := \min\left\{\left|-\overline{\theta}_i^{min}\right|, \left|1-\overline{\theta}_i^{max}\right|\right\}. \quad (5.38)$$

Então,

$$\Delta\theta(t) \in \Gamma_c := \{\Delta\theta_i(t) \ : \ -\mu_i \leq \Delta_i\theta(t) \leq \mu_i\}, \quad (5.39)$$

é simétrico e garante $\theta \in [0,1]$, $\forall t \geq 0$. Observe que $\Gamma_c \subseteq \Gamma_b \subseteq \Gamma_a(t)$, $\forall t \geq 0$, pode impor restrições mais rígidas no intervalo de $\Delta\theta(t)$, como mostra a Figura 5.2. Isso pode tornar o problema mais conservador, no entanto, possibilita a aplicação do corolário a seguir.

Figura 5.2 – Possível excursão de $\theta_i(t)$ (área sombreada) com $\Delta\theta_i(t)$ limitada dentro de (a) $\Gamma_a(t)$, (b) Γ_b e (c) Γ_c, para um determinado $\overline{\theta}_i(t)$.



O projeto do controlador com restrição pode ser convertido em um problema LMI padrão. Suponha que a condição inicial $e(0)$ seja delimitada dentro de um politopo

$$\mathcal{P} := \left\{ e(t) \in \mathbb{R}^n \ : \ |\varepsilon' e(t)| \leq 1 \right\} \tag{5.40}$$

onde $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n]'$ é um dado vetor constante. Então, é possível encontrar um limite superior na norma da entrada de controle

$$\|\Delta\theta_i(t)\| \leq \mu_i, \quad \forall i \in \mathbb{I}_{m-1}, \tag{5.41}$$

apresentado no próximo corolário.

Corolário 1 (Restrições de entrada)**.** *Suponha que* ε_j, $\forall j \in \mathbb{I}_n$, *e* μ_i, $\forall i \in \mathbb{I}_{m-1}$, *são constantes que representam os limites das Equações (5.40), (5.41) e que existem* $\exists Q, Y$ *resolvendo as LMIs das Desigualdades (5.26), (5.27) e*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_j^{-2} & \mathbf{col}_j(I_n)' \\ \star & Q \end{bmatrix} \geq 0\,, \quad \forall j \in \mathbb{I}_n, \tag{5.42}$$

$$\begin{bmatrix} Q & \mathbf{row}_i(Y)' \\ \star & \mu_i^2 \end{bmatrix} \geq 0\,, \quad \forall i \in \mathbb{I}_{m-1}. \tag{5.43}$$

Então o sistema da Equação (5.21) é globalmente assintoticamente estável e a restrição $\|\Delta\theta_i(t)\| \leq \mu_i$, $\forall i \in \mathbb{I}_{m-1}$, *é respeitada* $\forall e(0) \in \mathcal{P}$. ■

Prova: A prova segue linhas semelhantes de (**??**). Primeiro, considere $Q > 0$ e Y que atendam às condições de estabilização quadrática dos Teoremas (5.26) e (5.27). Portanto, a elipsóide

$\mathcal{E} := \left\{ e(t) \; : \; e(t)' Q^{-1} e(t) \leq 1 \right\}$ é uma região invariante de atração, ou seja, $e(t) \in \mathcal{E}$, $\forall t \geq 0$, se $e(0) \in \mathcal{E}$. A seguir, mostramos que o Teorema (5.42) implica $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$ e (5.43) implica (5.41) $\forall e(t) \in \mathcal{E}$.

Em ordem, para se ter $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$, é suficiente resolver

$$e' Q^{-1} e \leq 1, \quad \forall e \in \vartheta\left(\mathcal{P}\right). \tag{5.44}$$

Observe que o politopo $\mathcal{P}$ tem seus vértices dados por $e = \pm \varepsilon_j^{-1} \mathbf{col}_j(I_n)$, $\forall j \in \mathbb{I}_n$, portanto a Equação (5.44) pode ser expressa como $\varepsilon_j^2 - \mathbf{col}_j(I_n)' Q^{-1} \mathbf{col}_j(I_n) \geq 0$, que é equivalente à LMI (5.42) aplicando o complemento de Schur. Assim sendo, (5.42) implica $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$.

Agora, aplicando o complemento de Schur no Teorema (5.43), resultando em $Q - \mathbf{row}_i(Y)' \mu_i^{-2} \mathbf{row}_i(Y) \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{I}_{m-1}$. Multiplicando por $Q^{-1} e(t)$ pela direita e por sua transposta pela esquerda, obtemos

$$e(t)' Q^{-1} \mathbf{row}_i(Y)' \mu_i^{-2} \mathbf{row}_i(Y) Q^{-1} e(t) \leq e(t)' Q^{-1} e(t), \quad \forall i \in \mathbb{I}_{m-1}. \tag{5.45}$$

Lembrando que $K = Y Q^{-1}$ da Equação (5.29), $\Delta\theta(t) = K e(t)$ e $e(t)' Q^{-1} e(t) \leq 1$, $\forall e(t) \in \mathcal{E}$, então

$$\Delta\theta_i(t)' \mu_i^{-2} \Delta\theta_i(t) \leq 1, \quad \forall e(t) \in \mathcal{E},\, \forall i \in \mathbb{I}_{m-1}, \tag{5.46}$$

$$\Delta\theta_i(t)' \Delta\theta_i(t) \leq \mu_i^2, \quad \forall e(t) \in \mathcal{E},\, \forall i \in \mathbb{I}_{m-1}, \tag{5.47}$$

$$\|\Delta\theta_i(t)\| \leq \mu_i, \quad \forall e(t) \in \mathcal{E},\, \forall i \in \mathbb{I}_{m-1}. \tag{5.48}$$

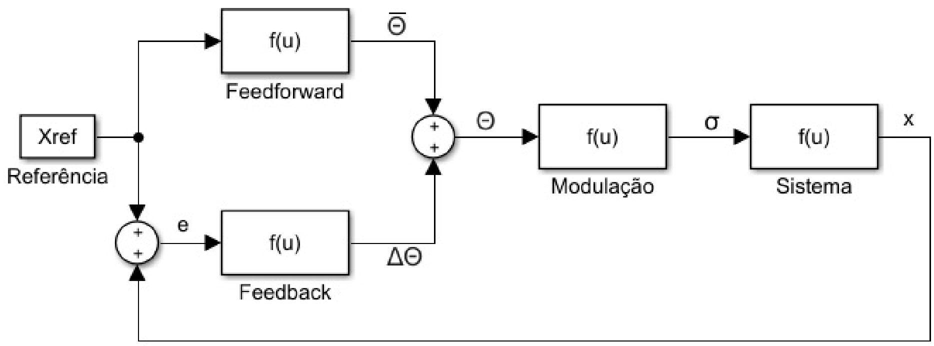
Portanto, a restrição da Equação (5.48) é aplicada a todo momento $t \geq 0$ se as LMIs (5.42), (5.43) são satisfeitas e se $e(0) \in \mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$. ∎

Observação 6. *Graças ao fato de que as condições no Corolário 1 não dependem de $x_{ref}(t)$ e que $x_{ref}(t)$ é conhecido em tempo real, mudanças abruptas na trajetória de equilíbrio são possíveis, desde que mudanças consecutivas ocorram lentamente o suficiente quando comparadas com a dinâmica do sistema. Ou seja, $x_{ref}(t)$ pode ser contínuo por partes desde que sua derivada de tempo exista para quase todo t (não incluindo o ponto de mudança de descontinuidade) e haja tempo suficiente entre as mudanças para estabilização. Uma mudança repentina em $x_{ref}(t)$ é percebida pelo controlador como uma nova condição inicial para que $e(t)$ seja estabilizado, portanto deve estar dentro do politopo $\mathcal{P}$. Como o Teorema (5.26) depende de $e(0)$, esta LMI deve ser resolvida para todos os vértices de um politopo contendo a faixa possível de condições iniciais, a fim de manter as garantias de estabilização e desempenho.* ∎

5.2.3 Implementação completa da estrutura de controle

O esquema de controle completo é representado pela Figura 5.3. Nesta figura, $\overline{\theta}(t)$ contém a proporção de um período de chaveamento que cada modo de operação i permanece ativo, o bloco de modulação traduz essa informação para a sequência ideal na qual os modos devem ser ativados e essa informação é então traduzida para quais chaves devem ser ativadas durante o período de chaveamento T começando no instante t. A sequência ótima depende do objetivo do projetista, por exemplo, para minimizar o número de chaveamentos que minimizem perdas de comutação ou para reduzir a presença de distorção harmônica (RECH; PINHEIRO, 2007).

Figura 5.3 – Estrutura completa do controle proposto implementada no Simulink.



Note que para um sistema com dois modos possíveis de operação, pode-se tratar $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ como o *duty cycle* e seu complemento, assim o bloco de modulação pode ser uma simples Modulação por Largura de Pulso (PWM). Sistemas com mais de dois modos de operação geralmente dependem de estratégias de modulação complicadas para atingir o objetivo de controle (RECH; PINHEIRO, 2007), (MANJREKAR; VENKATARAMANAN, 1996). Como traduzir a informação $\theta(t)$ para o comportamento de cada chave individual, gerando um PWM para cada chave, é um desafio.

Neste trabalho, é então proposta uma forma de modulação alternativa ao PWM. A modulação aqui apresentada é baseada na proporção temporal de ativação de cada modo e por isso será designada Modulação por Proporção Temporal (MPT).

Lembre-se que $\theta_i(t)$ representa a proporção do período de chaveamento que cada modo i deve ficar ativo. Assim, será proposta uma estratégia de modulação simples na qual os modos são ativados em sequência, ocupando uma porcentagem θ_i, $i \in \mathbb{I}_m$, do período de chaveamento T. Assim, a modulação pode ser executada pelo Algoritmo 1.

Basicamente, o algoritmo calcula a proporção p do período T que já passou. Considerando que o período T é dividido em m partições, com duração ponderada por θ_i, o algoritmo verifica em qual partição p está, o qual é o modo de operação σ a ser ativado.

Algoritmo 1 MPT

Entrada: θ, t
Dado: m, T
Saída: σ
$p \leftarrow \texttt{resto}(t/T)/T$
$\theta_0 \leftarrow 0$
for $k \leftarrow 1$ **para** m **do**
  if $\sum_{i=0}^{k-1} \theta_i \leq p \leq \sum_{i=1}^{k} \theta_i$ **then**
    $\sigma \leftarrow k$

No entanto, a sequência de modos de operação pode incluir chaveamentos desnecessários, que aumentam as perdas de comutação e a necessidade de mais tempo de permanência entre as chaves, se for comutar a mesma chave consecutivamente. Por esta razão, propõe-se que o Algoritmo 1 ative os modos seguindo a sequência de Gray.

A sequência de Gray é aquela em que há apenas um estado de mudança de chaveamento quando o modo de operação muda. Essa sequência é ideal no sentido de que realiza o número mínimo de chaveamentos (no máximo m chaveamentos) durante um período de chaveamento. Isso é ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 10 (Sequência de chaveamento)**.** *Suponha que um sistema contendo duas chaves independentes (s_1 e s_2) tenha seus modos de operação $(m = 4)$ organizados em duas sequências diferentes como na Tabela 5.1: (a) binário e (b) Gray. Suponha que o bloco de modulação tenha que executar a sequência de chaveamento com o θ dado.*

Tabela 5.1 – Exemplo de duas sequências de chaveamento diferentes.

(a) Binário

i	s_1	s_2	θ_i
1	0	0	0.3
2	0	1	0.4
3	1	0	0.2
4	1	1	0.1

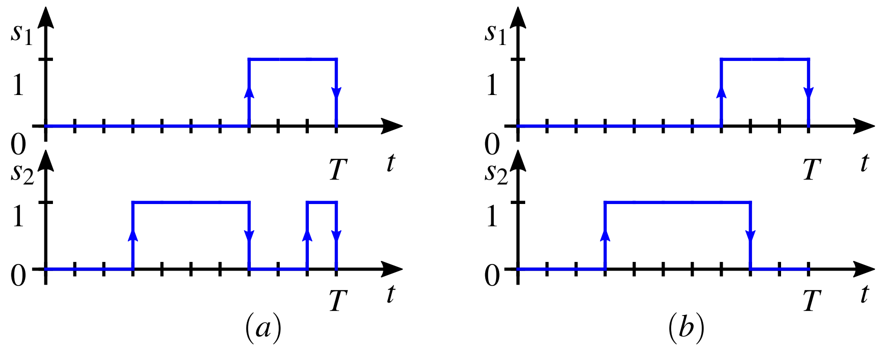
(a) Gray

i	s_1	s_2	θ_i
1	0	0	0.3
2	0	1	0.4
3	1	1	0.1
4	1	0	0.2

A evolução temporal do comando de chaveamento para cada chave para a sequência binária é mostrada na Figura 5.4 (a) e para a sequência de Gray na Figura 5.4 (b). Observe que há menos transições (chaveamentos) para o último. Este efeito é amplificado quanto mais modos de operação o sistema possui.

■

Figura 5.4 – Comandos de chaveamento para (a) a sequência binária e (b) a sequência de Gray.



5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo propôs uma lei de chaveamento para uma classe de sistemas chaveados que tenha como requisito o seguimento assintótico de referências variantes no tempo.

Primeiramente foi apresentada a representação dos sistemas utilizados na extensão para referência variável. Logo após, foi apresentada a estratégia Feedforward, a qual tem a peculiaridade de se conhecer muito bem o modelo da dinâmica do sistema e das perturbações. Em seguida, o controle por realimentação de estados (*Feedback*) foi abordado, o qual é utilizado para fechar a malha do sistema e tornar possível a imposição do controle por custo garantido.

Por fim, foi proposta uma alternativa para a modulação PWM já consolidada, sendo um decodificador de θ denominado MPT. Esta estratégia de modulação é baseada na proporção temporal de ativação de cada modo do sistema chaveado afim. Nesta modulação foi utilizada a sequência de Gray, com o objetivo de evitar chaveamentos desnecessários, os quais aumentam as perdas por comutação.

A lei de chaveamento abordada neste capítulo será projetada e aplicada por meio de simulações em circuitos de conversores da eletrônica de potência no próximo capítulo.

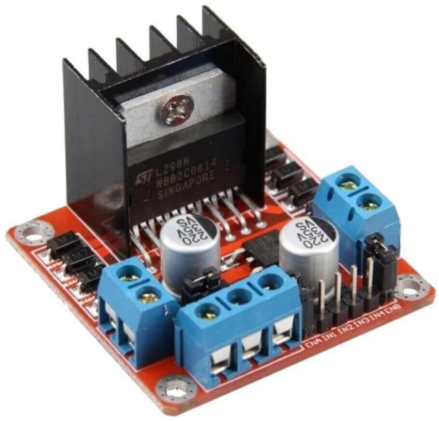
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem como objetivo a apresentação da simulação para o controle de sistemas chaveados estendido ao seguimento de referências variantes no tempo com a teoria tratada no Capítulo 5.

O inversor deve fornecer uma tensão (ou corrente) alternada, com frequência, forma e amplitude definidas por algum sistema de controle. Em princípio, a saída deve ser independente de: alterações limitadas na tensão (ou corrente) presente no barramento CC; nas cargas alimentadas pela rede CA (situação de operação ilhada) ou na própria rede CA (mudanças na tensão e, em menor escala, na frequência). O inversor deve ser capaz de fornecer uma tensão de qualidade aceitável, ou seja, em conformidade com as normas pertinentes. Quando estiver conectado a uma rede CA, dado que a tensão é definida pelo sistema, o conversor é responsável pela injeção (ou absorção) de corrente e, consequentemente, de potência na rede. O principal papel dos inversores nos sistemas de geração distribuída e de acumuladores de energia é entregar energia elétrica à rede de distribuição em corrente alternada, dentro de padrões de qualidade adequados. Isso requer, principalmente, que a forma de onda da corrente resultante na rede tenha mínima distorção, ou seja, que se aproxime o máximo possível da forma senoidal.

Um conversor CC/CA, também conhecido como inversor ou ponte H, é um circuito da eletrônica de potência tipicamente utilizado para determinar o sentido da corrente e valor da tensão no controle de um motor de corrente contínua. Esse circuito integrado é utilizado pela sua facilidade de controlar o sentido de rotação do motor, além da simplicidade de instalação e utilização. O módulo *driver* Ponte H - L298N, apresentado na Figura 6.1 como ilustração de um conversor CC/CA monofásico, é um módulo comercial de controle capaz de trabalhar com dois motores DC ou um motor de passo. Ele é baseado no *driver* L298N, sendo muito útil para o controle em aplicações de robótica e mecânica. Este circuito é apropriado para a realização de experimentos futuros relacionados à técnica desenvolvida este trabalho, pois ele tem terminais próprios para a alimentação de sinais de *duty-cycle*, como os produzidos pelo controlador proposto no Capítulo 5. Entretanto, neste trabalho serão apresentados apenas resultados de simulação.

Figura 6.1 – Módulo driver Ponte H - L298N.

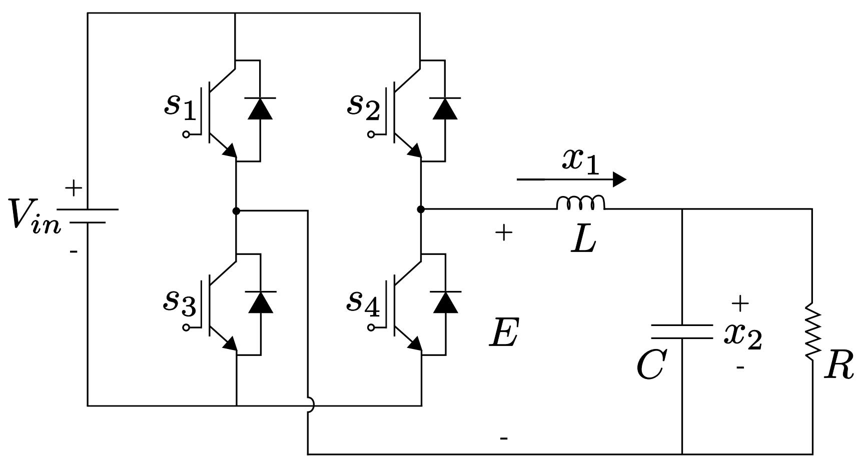


6.1 SIMULAÇÕES DA LEI DE CHAVEAMENTO PARA REFERÊNCIA VARIÁVEL

No exemplo a seguir, foi utilizado o *software* Matlab®, com o pacote computacional SeDuMi (STURM, 2001), através do *parser* YALMIP (LOFBERG, 2004), para solução das LMIs e o Simulink para obtenção das trajetórias do sistema chaveado não linear.

Para ilustrar a estratégia de rastreamento de referência apresentada, considere a estrutura do conversor CC/CA monofásico, mostrada na Figura. 6.2. As chaves são operadas tal que $V_{in} = V_{dc}$ se as chaves $s_2,\ s_3$ estão conduzindo e $s_1,\ s_4$ estão abertas, e $V_{in} = -V_{dc}$ se $s_1,\ s_4$ estão conduzindo e $s_2,\ s_3$ estão abertas. A representação em espaço de estados terá a forma dada pela Equação (4.1) com as matrizes apresentadas a seguir.

Figura 6.2 – Estrutura do conversor CC/CA monofásico.



O conversor tem dois modos de operação, onde $E = 0_{n \times n_z}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad , \quad b_1 = -b_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{V_{dc}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Os estados do sistema são a corrente do indutor ($x_1(t)$) e a tensão de saída do capacitor ($x_2(t)$), ambos assumidos como disponíveis para medições. O objetivo é manter a tensão de saída o mais próxima possível do sinal de referência desejado $x_{ref_2}(t) = V_p \sin(\omega t)$. Os parâmetros do conversor são dados na Tabela 6.1, retirados de (TROFINO et al., 2009).

Tabela 6.1 – Dados do conversor CC/CA monofásico da Figura 6.2.

Parâmetro	Valor
V_{dc}	330 V
L	2.6 mH
C	10 μF
R	30.3 Ω
ω	377 rad/s
V_p	175 V

Dado $x_{ref_2}(t)$, pode-se utilizar a Equação (5.14) para determinar um $x_{ref_1}(t)$ acessível, que resulta no seguinte sistema de equações, que pode ser facilmente resolvido à mão.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{V_{dc}}{L}\left(2\overline{\theta}_1(t) - 1\right) - \dfrac{V_p}{L}\sin(\omega t) - \dot{x}_{ref_1}(t) \\ \dfrac{x_{ref_1}(t)}{C} - \dfrac{V_p}{RC}\sin(\omega t) - V_p \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} = 0 \tag{6.2}$$

Observe que a Equação (6.2) é um sistema de equações sobre-determinado em relação a $\overline{\theta}_1(t)$, mas apenas implica que nem todas as entradas de $x_{ref}(t)$ podem ser arbitrariamente escolhidas. Resolvendo a segunda linha da Equação (6.2) para $x_{ref_1}(t)$, tem-se

$$x_{ref_1}(t) = \frac{V_p}{R}\sin(\omega t) + V_p \omega C \cos(\omega t). \tag{6.3}$$

Observe que $x_{ref_1}(t)$, $x_{ref_2}(t)$ são funções dos termos não lineares $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ e portanto pode-se definir $z(t) := \begin{bmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}'$, que resulta na matriz W definida na Equação (5.9). Portanto, é possível reescrever $x_{ref}(t) = \overline{x} + Zz(t)$ com $\overline{x} = 0_{n \times 1}$ e Z definido como

$$Z = \begin{bmatrix} \dfrac{V_p}{R} & V_p \omega C \\ V_p & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Como $\dot{x}_{ref_1}(t) = \frac{V_p\omega}{R}\cos(\omega t) - V_p\omega^2 C\sin(\omega t)$, a partir da primeira linha da Equação (6.2) obtém-se a seguinte solução algébrica para a estratégia Feedforward.

$$\overline{\theta}_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{V_p}{2V_{dc}}\left(\left(1-\omega^2 LC\right)\sin(\omega t) + \frac{\omega L}{R}\cos(\omega t)\right) \tag{6.5}$$

A partir da Equação (6.5), é possível determinar que seus valores máximos e mínimos são dados por

$$\frac{1}{2} \pm \frac{V_p}{2V_{dc}}\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} = \begin{cases} 0.7643 \\ 0.2357 \end{cases} \tag{6.6}$$

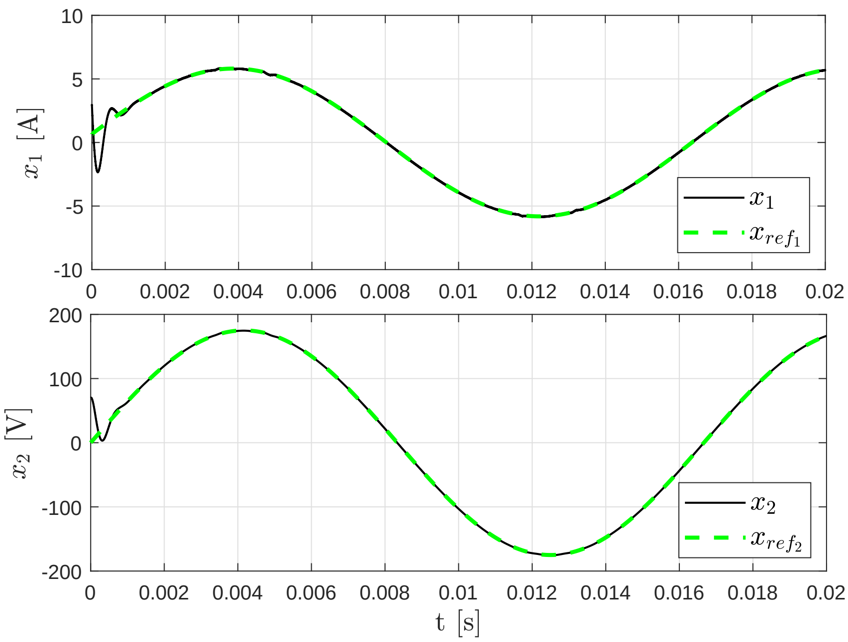
e, assim, $\mu_1 = 0.2357$ da Equação (5.38).

Resolvendo as LMIs do Corolário 1 com $\varepsilon_1 = 0.1,\ \varepsilon_2 = 0.01,\ C_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_z = 0$ escolhidos pelo projetista, obtemos a matriz de ganho

$$K = \begin{bmatrix} -1.6960 & -0.1683 \end{bmatrix} \times 10^{-2}, \tag{6.7}$$

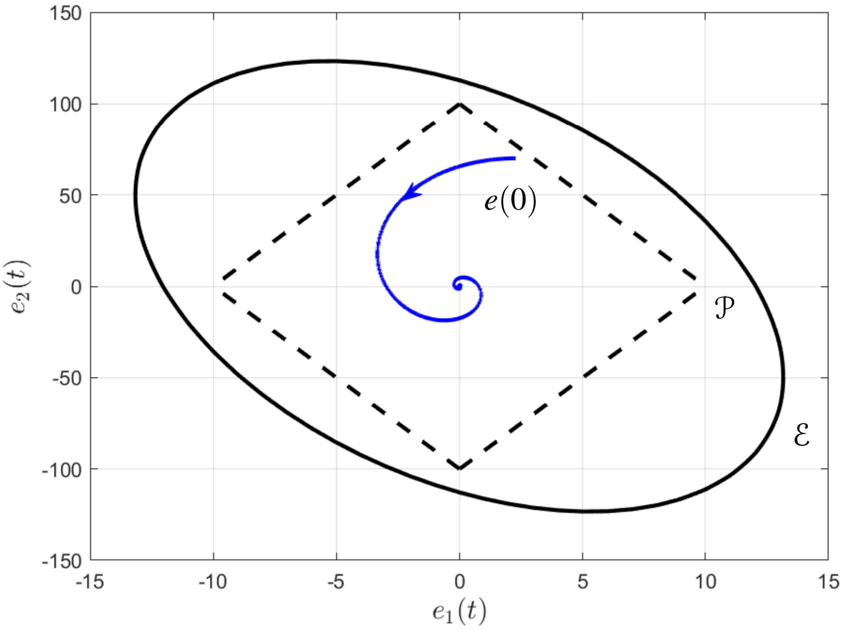
que produz um limite superior de desempenho de custo garantido $\tau = 0.5138$.

Figura 6.3 – Trajetórias dos estados e seus respectivos sinais de referência.



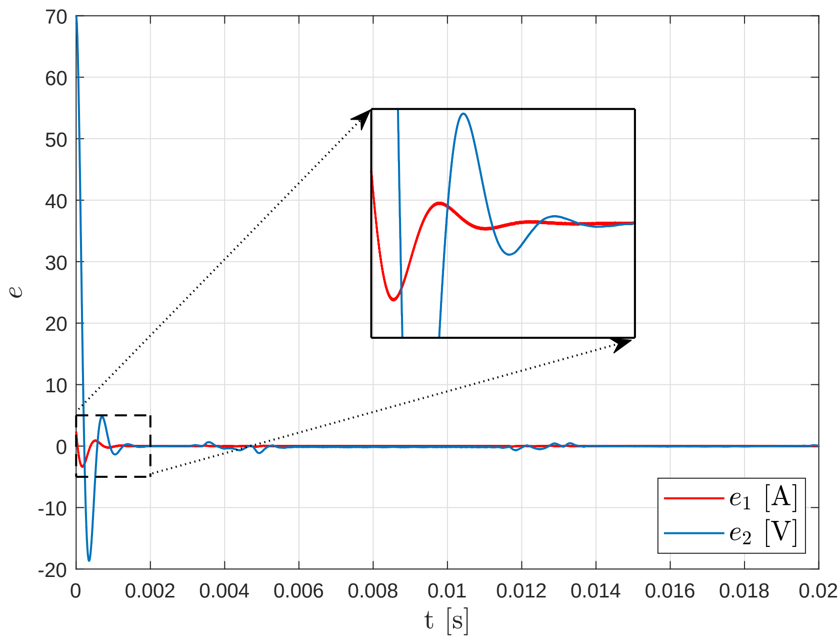
O rastreamento correto dos sinais de referência obtidos a partir da lei de chaveamento pode ser observado na Figura 6.3 para a condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 2.92 & 70 \end{bmatrix}'$, que corresponde a $e(0) \in \mathcal{P}$ como mostrado na Figura 6.4. Observe que $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

Figura 6.4 – Retrato de fase com a região invariante $\mathcal{E}$ e o controle limitado pelo politopo $\mathcal{P}$. A trajetória simulada para o $e(0)$ dado é mostrada na cor azul.



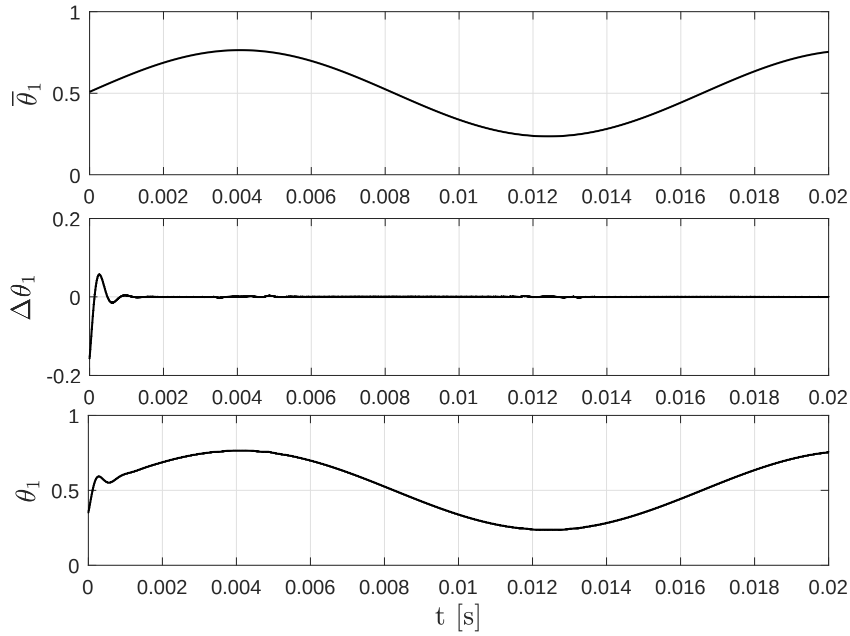
A dinâmica do erro de rastreamento da referência pode ser vista com mais detalhes na Figura 6.5, que possui uma rápida estabilização devido à estratégia ótima de realimentação de estados (Feedback) empregada.

Figura 6.5 – Dinâmicas do erro.



Finalmente, a Figura 6.6 mostra a evolução temporal dos sinais de controle. Observe que a restrição $\theta_1 \in [0, 1]$ está satisfeita graças às limitações impostas em $\Delta\theta_1$ através do projeto do controlador por realimentação de estados (Feedback).

Figura 6.6 – Feedforward $\overline{\theta}_1$, feedback $\Delta\theta_1$ e as ações de controle combinadas θ_1.



6.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou uma simulação na qual é aplicada estratégia de controle para seguimento de referências variantes no tempo em um conversor CC/CA monofásico. O método proposto combina as estratégias Feedforward e Feedback. O Feedforward é utilizado para moldar o tempo de controle a fim de igualar o equilíbrio desejado e isso é baseado na estratégia de modos deslizantes ideais. O Feedback tem como objetivo impor estabilidade, desempenho de custo garantido, restrições de controle e seu projeto é realizado resolvendo um problema de LMI.

Desta forma, buscou-se neste capítulo proporcionar ao leitor a melhor compreensão das técnicas de controle abordadas nesta dissertação e demonstrar a sua eficácia por meio de simulações.

7 CONCLUSÕES

Esta dissertação apresentou uma metodologia para análise e controle de sistemas chaveados. Os resultados apresentados incluem condições de projeto de lei de chaveamento para sistemas chaveados afins e para sistemas com não linearidades temporais e referências variantes no tempo.

Para uma melhor compreensão dos aspectos que envolvem o tema em estudo neste trabalho, o Capítulo 2 abordou os conceitos preliminares necessários ao entendimento da dissertação. Foi apresentada uma introdução sobre as LMIs e alguns artifícios utilizados para o projeto da lei de controle dos capítulos subsequentes.

O Capítulo 3 apresentou um referencial teórico em relação às propriedades, características e ferramentas utilizadas na análise de sistemas chaveados. Logo após, a análise de estabilidade para sistemas chaveados foi abordada.

No Capítulo 4 foram apresentadas as estratégias de chaveamento para seguimento de referência constante. Foi aplicada a técnica de Trofino et al. (2011) via LMI para o projeto da lei de chaveamento do conversor CC/CC Buck com o objetivo de seguimento de referência constante. Por meio de simulação, comprovou-se que a estratégia cumpriu o requisito de seguimento de referência com erro nulo em regime permanente. Entretanto tal técnica não atende referências variantes no tempo.

O Capítulo 5 apresentou o controle Feedforward utilizado no projeto da lei de chaveamento para seguimento de referências variantes no tempo foi tratado neste capítulo. A técnica de controle via LMI e realimentação de estados que foram utilizadas em conjunto na extensão para referência variável também foi abordada. Foi apresentada também uma estratégia de modulação alternativa ao PWM utilizando uma Modulação por Proporção Temporal (MPT) utilizada para evitar os chaveamentos desnecessários, que são prejudiciais à vida útil da chave.

No Capítulo 6 foi apresentada a simulação em um sistema chaveado comum da eletrônica de potência, o conversor CC/CA monofásico, para ilustrar a aplicação da lei de chaveamento abordada para seguimento de referências variante no tempo.

A lei de controle LMI utilizada para seguimento de referência constante não é suficiente nessa abordagem, sendo necessária a utilização em conjunto com o controle Feedforward e Feedback. O controle em questão apresentou resultado satisfatório, seguindo a referência senoidal com erro praticamente nulo em regime permanente.

Para prospecções futuras de novos trabalhos, uma possibilidade de pesquisa seria, a partir das estratégias abordadas neste documento, realizar a análise de limites de frequência da referência. A análise da Taxa de Distorção Harmônica (TDH) e como otimizar esse importante requisito de qualidade de energia também pode ser explorado. Além das extensões de pesquisa sugeridas, a implementação prática a fim de se confrontar os resultados de simulações é muito interessante.

7.1 PUBLICAÇÕES

As pesquisas desenvolvidas ao longo do período de curso do mestrado acadêmico geraram resultados para os artigos publicados (ou estão nos tramites de publicação):

- DE LACERDA, L. M.; CARDOSO, F. L.; DE SOUZA, M. S.; *Rejection of Input Distributions in the Buck Converter through the Feedforward Digital Controller.* **International Journal of Engineering Research and Technology**, 2018.
- DEZUO, T; SANTOS, C. T. ; LACERDA, L. M.; (aceito para publicação) *Routing Algorithm for Switch Fault Tolerant Switched Systems.* **13th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications (INDUSCON)**, 2018, São Paulo.
- DEZUO, T. J. M.; LACERDA, L. M. ; IJUIM, F. K.; (a ser submetido) *Trajectory Tracking Feedforward and Feedback Control for a Class of Switched Systems.* **Automatica**, Elsevier.

Espera-se, contudo, a publicação em periódicos científicos de outros resultados contidos no presente trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAO, Y.; WANG, L. Y.; WANG, C.; JIANG, J.; JIANG, C.; DUAN, C. Adaptive feedforward compensation for voltage source disturbance rejection in dc–dc converters. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, 2017. IEEE, v. 26, n. 1, p. 344–351, 2017.

BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: **Proc. of the 2004 American Control Conference**. Boston, MA, EUA: [s.n.], 2004. v. 5, p. 3890 – 3895.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: Siam, 1994.

CASTAÑEDA, L. A.; LUVIANO-JUÁREZ, A.; CHAIREZ, I. Robust trajectory tracking of a delta robot through adaptive active disturbance rejection control. **IEEE Transactions on control systems technology**, 2014. IEEE, v. 23, n. 4, p. 1387–1398, 2014.

CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1998.

DAI, C.; YANG, J.; WANG, Z.; LI, S. Universal active disturbance rejection control for nonlinear systems with multiple disturbances via a high-order sliding mode observer. **IET Control Theory & Applications**, 2016. IET, v. 11, n. 8, p. 1194–1204, 2016.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. O. R. (Ed.). **Perspectives in Robust Control Design**. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 268). p. 241–257.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Dynamic output feedback h∞ control of switched linear systems. **Automatica**, 2011. Elsevier, v. 47, n. 8, p. 1713–1720, 2011.

DEAECTO, G. S. et al. **Projeto de controladores dinâmicos com comutação aplicação em sistemas mecânicos e conversores de potência CC-CC**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC) - Unicamp, Campinas, 2010.

DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, 2000. v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000.

DECARLO, R. A.; ZAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. **Proceedings of the IEEE**, 1988. IEEE, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.

DEZUO, T. J. M. **Design of switching strategies with applications in photovoltaic energy generation**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, 2014.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern control systems**. [S.l.]: Pearson, 2011.

EL GHAOUI, L.; NICULESCU, S. I. **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. Philadelphia, USA: SIAM, 2000.

FILIPPOV, A. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1988.

FLORES, J. V.; JUNIOR, J. M. G. d. S.; PEREIRA, L. F. A.; COUTINHO, D. F.; BONAN, G. Síntese de controladores repetitivos chaveados: uma aplicação a fontes ininterruptas de energia {UPS}. **Controle & automação [recurso eletrônico]. Campinas, SP. v. 22, n. 2,(mar./abr. 2011), p. 184-200**, 2011. 2011.

FLOYD, T. **Sistemas digitais: fundamentos e aplicações**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.

FRANK, P. M. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy: A survey and some new results. **automatica**, 1990. Elsevier, v. 26, n. 3, p. 459–474, 1990.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback control of dynamic systems**. [S.l.]: Prentice Hall Press, 2014.

HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle's invariance principle. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2004. IEEE, v. 49, n. 4, p. 470–482, 2004.

HU, T.; TEEL, A. R.; LIN, Z. Lyapunov characterization of forced oscillations. **Automatica**, 2005. Elsevier, v. 41, n. 10, p. 1723–1735, 2005.

JOHANSSON, M. **Piecewise linear control systems**. Tese (Doutorado) — Ph. D. Thesis, Lund Institute of Technology, Sweden, 1999.

KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, 1996. Elsevier, v. 32, n. 10, p. 1361–1379, 1996.

LACERDA, L.; CARDOSO, F. L.; SOUZA, M. S. D. Rejection of input distributions in the buck converter through the feedforward digital controller. **International Journal of Engineering Research and Technology**, 2018. V7, 01 2018.

LIBERZON, D. **Switching in systems and control**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.

LIBERZON, D. Switched systems. In: **Handbook of networked and embedded control systems**. [S.l.]: Springer, 2005. p. 559–574.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. **IEEE Control systems**, 1999. IEEE, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. **IEEE Transactions on Automatic control**, 2009. IEEE, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009.

LIN, H.; ZHAI, G.; ANTSAKLIS, P. J. Optimal persistent disturbance attenuation control for linear hybrid systems. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, 2006. Elsevier, v. 65, n. 6, p. 1231–1250, 2006.

LOFBERG, J. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE. **Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on**. [S.l.], 2004. p. 284–289.

MANJREKAR, M.; VENKATARAMANAN, G. Advanced topologies and modulation strategies for multilevel inverters. In: IEEE. **PESC Record. 27th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference**. [S.l.], 1996. v. 2, p. 1013–1018.

MHASKAR, P.; EL-FARRA, N. H.; CHRISTOFIDES, P. D. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2005. IEEE, v. 50, n. 11, p. 1670–1680, 2005.

MICHELS, L.; RECH, C.; ALMEIDA, R. D. S.; SOARES, C. E.; MEZAROBA, M. Técnicas anti-windup para controladores repetitivos empregados em inversores pwm. In: **Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automtica**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 845–851.

MORSE, A. S. Control using logic-based switching. In: ISIDORI, A. (Ed.). **Trends in Control**. London: Springer London, 1995. p. 69–113. ISBN 978-1-4471-3061-1.

OGATA, K.; YANG, Y. **Modern control engineering**. [S.l.]: London, 2002.

PAPAGEORGIOU, M.; DIAKAKI, C.; DINOPOULOU, V.; KOTSIALOS, A.; WANG, Y. Review of road traffic control strategies. **Proceedings of the IEEE**, 2003. IEEE, v. 91, n. 12, p. 2043–2067, 2003.

PETERS, G.; WILKINSON, J. H. Review of road traffic control strategies. **The Computer Journal**, 1970. v. 13, n. 3, p. 309–316, 1970.

PLANITZ, M. Inconsistent systems of linear equations. **The Mathematical Gazette**, 1979. Mathematical Association, v. 63, n. 425, p. 181–185, 1979.

RECH, C.; PINHEIRO, J. R. Impact of hybrid multilevel modulation strategies on input and output harmonic performances. **IEEE Transactions on Power Electronics**, 2007. v. 22, n. 3, p. 967–977, May 2007.

RODRIGUES, M. d. C. B.; TEIXEIRA, E. C.; BRAGA, H. A. C. Uma visão topológica sobre sistemas fotovoltaicos monofásicos conectados á rede de energia elétrica. In: **Proc. 5th Latin-Amer. Congress: Eletr. Gen. Transm.(5th CLAGTEE)**. [S.l.: s.n.], 2003.

SCHARLAU, C. C. **Controle de sistemas chaveados e aplicações**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, 2013.

SCHARLAU, C. C.; DEZUO, T. J.; TROFINO, A. Comments on “state feedback $\mathcal{H}\infty$ control design of continuous-time switched affine systems”. **IET Control Theory & Applications**, 2017. IET, v. 11, n. 15, p. 2668–2669, 2017.

SCHARLAU, C. C.; OLIVEIRA, M. C. de; TROFINO, A.; DEZUO, T. J. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. **Systems & Control Letters**, 2014. Elsevier, v. 68, p. 1–8, 2014.

SIMONE, L. F. C. **Inserção da micro e minigeração distribuída solar fotovoltaica: impactos na receita das distribuidoras e nas tarifas dos consumidores.** Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.

SKAFIDAS, E.; EVANS, R. J.; SAVKIN, A. V.; PETERSEN, I. R. Stability results for switched controller systems. **Automatica**, 1999. Elsevier, v. 35, n. 4, p. 553–564, 1999.

STURM, J. F. **Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones**. Tilburg, Netherlands, 2001.

SUN, Z. Combined stabilizing strategies for switched linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2006. IEEE, v. 51, n. 4, p. 666–674, 2006.

SUN, Z.; GE, S. S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. **Automatica**, 2005. Elsevier, v. 41, n. 2, p. 181–195, 2005.

TROFINO, A.; ASSMANN, D.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2009. IEEE, v. 54, n. 9, p. 2215–2222, 2009.

TROFINO, A.; COUTINHO, D.; BARBOSA, K. A. **Sistemas multivariáveis: uma abordagem via LMIs**. 201X. Apostila do curso de Controle Robusto. Disponível em: <http://www.das.ufsc.br/trofino>.

TROFINO, A.; REGINATTO, R.; de Oliveira, J.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. A reference tracking strategy for affine switched systems. In: **IEEE International Conference on Control and Automation**. Christchurch, New Zealand: [s.n.], 2009. p. 1744–1750.

TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; COUTINHO, D. F. Corrections to "switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields". **IEEE Transactions on Automatic Control**, 2012. IEEE, v. 57, n. 4, p. 1080–1082, 2012.

TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; DEZUO, T. J.; OLIVEIRA, M. C. de. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. In: IEEE. **Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on**. [S.l.], 2011. p. 1183–1188.

VILANOVA, R.; ARRIETA, O.; PONSA, P. IMC based feedforward controller framework for disturbance attenuation on uncertain systems. **ISA transactions**, 2009. Elsevier, v. 48, n. 4, p. 439–448, 2009.

XU, X.; ZHAI, G.; HE, S. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, 2008. v. 2, n. 1, p. 196 – 208, 2008.

ZHANG, J.; SWAIN, A.; NGUANG, S. K. **Robust Observer-Based Fault Diagnosis for Nonlinear Systems Using MATLAB**. [S.l.]: Springer, 2016.