THIAGO ANDRÉ CARNIEL

MODELO VISCOELÁSTICO-VISCOPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO APLICADO EM ANÁLISES TRANSIENTES NÃO LINEARES DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas - CCT.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz-Rojas
Coorientador: Miguel Vaz Júnior

JOINVILLE, SC
2013

C288m Carniel, Thiago André

Modelo Viscoelástico-Viscoplástico com Dano Acoplado Aplicado em Análises Transientes Não Lineares de Treliças Tridimensionais/ Thiago André Carniel. – Joinville, Brasil, 2013.
168 p.: il.; 21 cm.

Orientador: Pablo Andrés Muñoz-Rojas
Coorientador: Miguel Vaz Júnior

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, Brasil, 2013.

1. Viscoelasticidade. 2. Viscoplasticidade. 3. Dano. 4. Elementos Finitos. I. Muñoz-Rojas, Pablo Andrés. II. Vaz Júnior, Miguel. III. Universidade do Estado Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Mecânica. IV. Modelo Viscoelástico-Viscoplástico com Dano Acoplado Aplicado em Análises Transientes Não Lineares de Treliças Tridimensionais.

CDD 620.1

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UDESC

THIAGO ANDRÉ CARNIEL

MODELO VISCOELÁSTICO-VISCOPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO APLICADO EM ANÁLISES TRANSIENTES NÃO LINEARES DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de concentração "Modelagem e Simulação Numérica".

Banca Examinadora

Orientador:

Prof. Dr. Pablo Andrés Muñoz Rojas
CCT/UDESC

Membros

Prof. Dr. Miguel Vaz Junior
CCT/UDESC

Profa. Dra. Marianna Coelho Lorencet
CCT/UDESC

Prof. Dr. Marco Lucio Bittencourt
UNICAMP

Joinville,SC, 12/07/2013.

Dedico este trabalho a quem chamo de Deus, pois acredito que sem a existência de uma de suas grandes criações, a matemática, não haveria harmonia no universo e consequentemente vida em nosso planeta.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos (amigos, familiares e professores) que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

Ao Professor, orientador e amigo Pablo Andrés Muñoz-Rojas que desde os tempos da graduação, durante os projetos de iniciação científica, até os últimos momentos do mestrado, esteve presente em todas as etapas de meu aprendizado, ajudando a moldar minha formação profissional e ética.

Do mesmo modo, aos Professores Eduardo Lenz Cardoso, Miguel Vaz Júnior e Joel Martins Crichigno Filho, os quais foram essenciais para que este projeto se tornasse realidade.

Em especial, agradeço a todos meus familiares, principalmente aos meus pais, Sr.ª Nádia e Sr. Tadeo, e ao meu irmão Giovani, pelo apoio incondicional durante o período de realização deste trabalho.

Agradeço, também, à Capes pela bolsa de estudo concedida.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação numérica para a análise transiente de estruturas treliçadas tridimensionais considerando não linearidade geométrica e material. O problema de equilíbrio é apresentado através do Princípio das Potências Virtuais segundo uma formulação Lagrangeana Corrente. O campo de deslocamentos e velocidades é discretizado através do Método dos Elementos Finitos. As equações não lineares de equilíbrio são resolvidas pelo método de Newton-Raphson, sendo apresentado o desenvolvimento da matriz de rigidez tangente consistente. Posteriormente, o problema transiente é formulado, sendo as equações do movimento solucionadas pelo método de integração implícito de Newmark. O modelo constitutivo proposto é viscoelástico-viscoplástico acoplado com o modelo de dano de Lemaitre. A formulação viscoelástica é representada pelo modelo generalizado de Kelvin-Voigt e a contribuição viscoplástica é dada pela equação de Perzyna. As leis de evolução do modelo material são integradas numericamente através do algoritmo implícito de Euler, resultando no algoritmo de retorno. Para obter a taxa de convergência quadrática do método iterativo de Newton-Raphson durante o equilíbrio estrutural, é apresentado o cálculo analítico do módulo tangente algoritmo consistente, o qual é validado através do método da derivada complexa. Os parâmetros materiais são encontrados através do ajuste entre as curvas experimental e teórica, visando a aplicação para materiais poliméricos. Para o ajuste das curvas utilizou-se o método de Otimização por Nuvem de Partículas – Particle Swarm Optimization (PSO). Ao final é realizada uma discussão dos resultados encontrados e comentado as particularidades do modelo proposto.

Palavras-chave: Viscoelasticidade. Viscoplasticidade. Mecânica do Dano Contínuo. Não Linearidade Geométrica. Elementos Finitos.

ABSTRACT

This work presents the development of a numerical formulation for the transient analysis of spatial truss structures considering geometrical and material nonlinearities. The equilibrium problem is formulated using the Principle of the Virtual Power in a current Lagrangian description. The displacement and velocity fields are discretized employing the Finite Element Method and the nonlinear equilibrium equations are solved by the full Newton-Raphson procedure. In order to obtain quadratic convergence, the algorithmic tangent matrix expression is developed and presented. Next, the transient problem is formulated and solved using the Newmark integration algorithm. The material model adopted is viscoelastic-viscoplastic coupled to Lemaitre's damage. The viscoelastic behavior is represented by the generalized Kelvin-Voigt rheological model and the viscoplastic contribution is introduced via Perzyna's equation. The evolution laws of the material model are integrated numerically using the implicit Euler scheme, resulting in the corresponding return mapping. The algorithmic tangent modulus for this material model is derived and validated by means of numerical differentiation using the complex variable approach. The constitutive parameters for the model are obtained by minimization of the difference between experimental and numerical curves, aiming at polymeric materials. Since non-uniqueness is expected for the minimization problem, the gradient free *Particle Swarm Optimization* method (PSO) is adopted for its solution. Finally, the results obtained and some particularities of the proposed model are discussed.

Key-words: Viscoelasticity, Viscoplasticity, Continuum Damage Mechanics, Nonlinear Analysis, Finite Element Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Decomposição multiplicativa do gradiente de deformação. 32

Figura 2 - Representação cinemática de um elemento de barra. 40

Figura 3 - a) *snap-through*; b) *snap-back.* 45

Figura 4 - Exemplo do processo iterativo de solução através do algoritmo de Newton-Raphson. 46

Figura 5 - Algoritmo Newton-Raphson..... 48

Figura 6 - Curvas experimentais de ensaios de compressão obtidas em taxas de deformação de engenharia constantes para o PEAD. 61

Figura 7 - Curvas experimentais de ensaios de fluência obtidas em tensões de engenharia constantes para o mPP. 62

Figura 8 - Representação do modelo material viscoelástico-viscoplástico..... 63

Figura 9 - Representação das estruturas amorfa (linhas curvas) e cristalina (linhas retas)..... 64

Figura 10 - Curva típica de fluência em polímeros mostrando as três fases do processo de deformação. 65

Figura 11 - Trabalho elástico e plástico. 71

Figura 12 - Elemento de Volume Representativo (EVR) em um corpo danificado. 73

Figura 13 - Equivalência de deformações. a) Danificado. b) Equivalente. 74

Figura 14 - Rotina de integração local do modelo material (algoritmo de retorno). 85

Figura 15 - Resumo das equações constitutivas discretizadas via integração implícita..... 90

Figura 16 - Algoritmo referente à rotina numérica do modelo material. 91

Figura 17 - Algoritmo Newton-Raphson local. 95
Figura 18 - Curva tensão-deformação-dano para 125 [mm/min] mostrando as regiões de deformação viscoelástica (VE), viscoplástica (VEP) e a região afetada pelo dano (VEPD). a) Curva total. b) Região VE ampliada. 101
Figura 19 - Curvas de validação do módulo tangente algorítmico referentes à simulação apresentada na Figura 18. a) Curva total. b) Região VE ampliada. 102
Figura 20 - Ensaios de compressão em taxas de deformação de engenharia constantes para o PEAD. 104
Figura 21 - Ensaios de fluência em tensões de engenharia constantes para o mPP. 104
Figura 22 - Sensibilidade do modelo teórico em relação ao coeficiente de Poisson em um ensaio de fluência em tensão de engenharia constante para o mPP..... 105
Figura 23 - Curva típica de polímeros sujeitos a ensaios uniaxiais de tração. a) Baixa taxa de deformação. b) Alta taxa de deformação..... 107
Figura 24 - Curva tensão-deformação-dano em taxa de deslocamento constante para o iPP. 109
Figura 25 - Curva tensão-deformação-dano em taxa de deslocamento constante para o PEAD. 110
Figura 26 - Estrutura de duas barras. Geometria inicial e histórico do carregamento. 112
Figura 27 - Análise 2D viscoelástica. Histórico do deslocamento vertical do nó de aplicação da força e geometria deformada em certos instantes de tempo. 113
Figura 28 - Análise viscoelástica. Curva tensão-deformação para ambas as barras. 114
Figura 29 - Análise 2D viscoelástica-viscoplástica. Histórico do deslocamento vertical do nó de aplicação da força e geometrias inicial e deformada para o tempo de 1.0 [s]. 115

Figura 30 - Análise viscoelástica-viscoplástica. Curva tensão-deformação para ambas as barras..... 115
Figura 31 - Análise 2D viscoelástica-viscoplástica acoplada com dano. Histórico do deslocamento vertical do nó de aplicação da força e geometrias em instantes de tempo específicos..... 116
Figura 32 - Análise viscoelástica-viscoplástica acoplada com dano. Curva tensão-deformação para ambas as barras..... 117
Figura 33 - Evolução da variável de dano em função da deformação viscoplástica acumulada para a análise 2D..... 117
Figura 34 - Histórico da variável de dano para a análise 2D... 118
Figura 35 - Histórico da taxa de deformação para ambos os elementos da estrutura..... 119
Figura 36 - Domo treliçado. Geometria inicial e histórico do carregamento..... 120
Figura 37 - Análise viscoelástica 3D. Histórico do deslocamento vertical do nó 7 e geometria deformada em certos instantes de tempo. 121
Figura 38 - Análise 3D viscoelástica-viscoplástica. Histórico do deslocamento vertical do nó 7 e geometrias inicial e deformada para o tempo de 1.0 [s]. 122
Figura 39 - Análise 3D viscoelástica-viscoplástica acoplada com dano. Histórico do deslocamento vertical do nó 7 e geometrias em instantes de tempo específicos.... 123
Figura 40 - Evolução da variável de dano em função da deformação viscoplástica acumulada referente os elementos 1 a 6. 123
Figura 41 - Histórico da variável de dano referente aos elementos 1 a 6. 124
Figura 42 - Histórico da taxa de deformação referente aos elementos 1 a 6. 125
Figura 43 - Algoritmo do método PSO..... 165
Figura 44 - Curva típica de fluência e recuperação para materiais poliméricos..... 166

Figura 45 - Contribuições viscoelástica e viscoplástica das curvas experimentais. a) Ensaio de tração. b) Ensaio de fluência. 167
Figura 46 - Curvas de ajuste dos parâmetros viscoplásticos e de dano. 168

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades materiais no SI propostas para a validação do módulo tangente algorítmico..... 99

Tabela 2 - Propriedades materiais no SI ajustadas para o iPP para um ensaio uniaxial de tração em taxa de 125 [mm/min]. 109

Tabela 3 - Propriedades materiais no SI ajustadas para o PEAD para um ensaio uniaxial de tração em taxa de 380 [mm/min]. 110

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS

A	Área na configuração espacial
A_k	Força termodinâmica conjugada a cada variável interna
$\boldsymbol{b}$	Tensor esquerdo de Cauchy-Green (Finger)
$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}$	Vetor do lado direito do sistema linear viscoelástico
$\boldsymbol{B_x}$	Matriz das derivadas de $\boldsymbol{N}$ na direção axial em relação a $\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{C}$	Matriz de amortecimento
$\mathcal{C}^{vepd}$	Módulo tangente viscoelástico-viscoplástico com dano acoplado
$\boldsymbol{d}$	Tensor taxa de deformação
d	Taxa de deformação unidimensional
D	Variável escalar de dano
$\mathcal{D}_{int}$	Dissipação intrínseca
D_c	Dano crítico
E_0, E_i	Rigidez das molas do modelo generalizado de Kelvin-Voigt
$\dot{e}$	Taxa da energia interna
$\boldsymbol{F}$	Gradiente de deformação
$\boldsymbol{f}$	Força de corpo
$\boldsymbol{f_{int}}$	Vetor de força interna na configuração espacial
$\boldsymbol{f_{ext}}$	Vetor de força externa na configuração espacial
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$	Vetor de equações do sistema não lineares do modelo material
F_{obj}	Função objetivo
$\dot{g}$	Fonte de geração de energia
H	Módulo de encruamento isotrópico
$\boldsymbol{H}$	Matriz do sistema linear viscoelástico
H_s	Função passo de Heaviside
$\boldsymbol{I}$	Tensor identidade de segunda ordem
J	Função fluência
$\boldsymbol{J}$	Matriz Jacobiana do sistema iterativo local do modelo material

K	Módulo de encruamento linear
$\boldsymbol{K_T}$	Matriz de rigidez tangente global
$\boldsymbol{l}$	Tensor gradiente de velocidade
L	Comprimento do elemento de barra na configuração espacial
$\boldsymbol{M}$	Matriz de massa
$\boldsymbol{N}$	Matriz das funções de interpolação
$\boldsymbol{n}_i$	Autovetor unitário referentes a configuração espacial
$\boldsymbol{N}_i$	Autovetor unitário referentes a configuração material
p_1, p_2	Parâmetro do amortecimento proporcional
$\boldsymbol{q}$	Vetor dos deslocamentos nodais do elemento
$\boldsymbol{r}$	Resíduo
r, S	Parâmetros materiais do modelo de dano de Lemaitre
s	Entropia
$\boldsymbol{t}$	Tração
$\boldsymbol{T}$	Matriz de rotação para o elemento de barra na configuração espacial
t	Variável de tempo
$\boldsymbol{u}$	Campo de deslocamento
$\boldsymbol{V}$	Tensor alongamento esquerdo
$\boldsymbol{v}$	Campo de velocidade
V	Volume na configuração espacial
W	Trabalho
w, c_p, c_g	Parâmetros do algoritmo de otimização PSO
$\boldsymbol{x}$	Coordenadas na configuração espacial
$\boldsymbol{X}$	Coordenadas na configuração material
$\boldsymbol{y}$	Vetor de incógnitas do sistema iterativo local do modelo material
Y	Taxa de liberação de densidade de energia de deformação por dano
α	Variável interna de encruamento isotrópico
β_1, β_2	Parâmetros do método de Newmark.
γ	Multiplicador plástico
Γ	Superfície do corpo
δ_{Dirac}	Delta de Dirac.

$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor deformação logarítmico
ε	Deformação logarítmica unidimensional
ε_c	Deformação plástica acumulada que modela a curvatura da curva exponencial da equação de Voce
$\boldsymbol{\varepsilon}^{(LA)}$	Parte linear do tensor deformação de Almansi
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{v}}$	Vetor do lado esquerdo do sistema linear viscoelástico
$\bar{\varepsilon}_D^{vp}$	Limiar de dano
$\boldsymbol{\mathcal{E}}$	Tensor alternante de terceira ordem
η_i	Viscosidade dos amortecedores do modelo generalizado de Kelvin-Voigt
η_{vp}	Viscosidade do amortecedor do modelo de Perzyna
θ	Temperatura
λ	Alongamento
ν	Coeficiente de Poisson
ω_i	Fator de rigidez do modelo generalizado de Kelvin-Voigt $(\omega_i = E_0/E_i)$
ρ	Densidade
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy
σ	Tensão de Cauchy unidimensional
σ_y	Função da tensão de escoamento
σ_{y_0}	Tensão inicial de escoamento da equação de Voce
σ_∞	Tensão de saturação da equação de Voce
τ_i	Tempo de relaxação do modelo generalizado de Kelvin-Voigt $(\tau_i = \eta_i/E_i)$
φ	Potencial de dissipação
$\boldsymbol{\phi_c}$	Fluxo de calor por condução
Φ	Função de escoamento
ψ	Energia livre de Helmholtz
Ψ	Função relaxação
Ω	Domínio do corpo

OPERADORES

$\otimes$	Produto tensorial
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	Contração simples os tensores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$	Contração dupla entre os tensores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$

$\nabla(\cdot)$	Gradiente de $(\cdot)$
$\delta(\cdot)$	Perturbação virtual de $(\cdot)$
$\partial(\cdot)$	Derivada parcial de $(\cdot)$
$\wedge$	Operador de montagem do sistema local-global para o sistema global
$\Delta(\cdot)$	Incremento de $(\cdot)$
$\|(\cdot)\|_2$	Norma Euclidiana (L_2) de $(\cdot)$
$\|(\cdot)\|$	Valor absoluto do escalar $(\cdot)$
$\langle(\cdot)\rangle$	Função rampa de $(\cdot)$
$\times$	Produto vetorial
$\mathrm{Im}[(\cdot)]$	Parte imaginária de $(\cdot)$
$\dot{(\cdot)}$	Primeira derivada temporal de $(\cdot)$
$\ddot{(\cdot)}$	Segunda derivada temporal de $(\cdot)$
$sign(\sigma)$	Sinal de $(\cdot)$
$ln(\cdot)$	Logaritmo natural de $(\cdot)$
$(\cdot)^T$	Transposto de $(\cdot)$
$(\cdot)^{-1}$	Inverso de $(\cdot)$

SUBSCRITOS

0	Em relação à configuração material
d	Referente ao dano
eng	Referente às medidas de deformação ou tensão de engenharia
G	Referente às coordenadas globais
n	Referente a um processo incremental
nbr	Número de blocos reológicos do modelo generalizado de Kelvin-Voigt
vp	Viscoplástico
$\boldsymbol{x}$	Em relação à configuração espacial
$\boldsymbol{X}$	Em relação à configuração material
γ	Referente ao multiplicador plástico

SOBRESCRITOS

d	Referente ao dano
e	Elástico
exp	Experimental

g	Referência local-global
H	Referente ao encruamento isotrópico
i	Inelástico
k	Referente a um processo iterativo
l	Referência local
num	Numérico
p	Plástico
t	Referente a um estado teste elástico
v	Referente à deformação viscosa do modelo generalizado de Kelvin-Voigt
ve	Viscoelástico
vp	Viscoplástico

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 27
1.1 SEQUÊNCIA DO TRABALHO 29
2 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 31
2.1 CONSIDERAÇÃO DE DEFORMAÇÕES FINITAS 32
2.2 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA CORRENTE 35
2.3 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO 38
2.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO 43
2.4.1 Método de Newton-Raphson Completo 46
2.5 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE CONSISTENTE DO ELEMENTO 49
2.6 FORMULAÇÃO TRANSIENTE NÃO LINEAR 55
3 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR MATERIAL 61
3.1 MODELO VISCOELÁSTICO-VISCOPLÁSTICO ACOPLADO COM DANO 62
3.1.1 Lei de Evolução do Modelo Viscoelástico 65
3.1.2 Lei de Evolução do Modelo Viscoplástico 68
3.1.3 Lei de Encruamento Isotrópico 70
3.1.4 Lei de Evolução do Modelo de Dano 72
3.1.5 Equações Constitutivas Contínuas com Dano Acoplado 76
3.2 CONSIDERAÇÕES TERMODINÂMICAS 77
3.3 ANÁLISE NUMÉRICA DO MODELO CONSTITUTIVO . 84
3.3.1 Algoritmo de Integração 85
3.3.2 Módulo Tangente Consistente 96
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES 103
4.1 AJUSTE DE CURVAS 103
4.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS 111
4.2.1 Estrutura de Duas Barras 112
4.2.2 Domo Treliçado em Forma de Estrela 119
5 CONCLUSÃO 127
5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 130
REFERÊNCIAS 133
APÊNDICES 143

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos cinquenta anos, grande parte da comunidade científica tem investido na elaboração de modelos materiais mais realistas, principalmente os que consigam representar de forma satisfatória a degradação material, quando estes forem submetidos à ação de agentes externos, tais como: carregamentos, campos de temperatura, radiação, magnetismo, envelhecimento, dentre outros. Tais modelos de degradação material são conhecidos como modelos de dano.

Com o advento da computação de alto desempenho e dos métodos de análise numéricos, além da necessidade crescente de se obter análises computacionais mais precisas, a formulação e aplicação de modelos de dano geram uma linha de pesquisa que hoje em dia está em pleno desenvolvimento.

A variável de dano nada mais é que um indicador de falha material, independente da sua natureza (escalar ou tensorial) e de como é acoplada ao processo físico de degradação. Deste modo, a aplicação destes modelos de degradação material abrange os mais diferentes tipos de materiais utilizados no campo da engenharia.

Visando a aplicação em materiais poliméricos, os mecanismos de deformação e de degradação material de muitos destes polímeros são altamente não lineares em relação ao tipo de carregamento externo e a taxa de deformação. Como exemplos podem-se citar o Polietileno de Alta Densidade (PEAD), o Polipropileno catalisado com Metaloceno (mPP), o Polipropileno Isostático (iPP), entre outros.

Atualmente, uma grande área de aplicação de materiais poliméricos é na fabricação de componentes ou estruturas sujeitas a altas taxas de deformação. Isto deve-se ao fato da grande capacidade de dissipação de energia apresentada por estes materiais. O campo de aplicação em tais condições é imenso, desde a utilização em tubos para transporte de água ou gás (CHOWDHURY, BENZERGA e TALREJA, 2008), blindagens balísticas (MORYE *et al.*, 2000), componentes aeroespaciais e automobilísticos até função estrutural no controle de impacto do salto de um sapato de mulher (LOUCHE *et al.*, 2009).

No âmbito de simulação numérica, além de um modelo material adequado, deve-se desenvolver uma formulação matemática consistente, a qual derive um algoritmo numérico robusto que consiga representar de forma satisfatória a cinemática e a cinética envolvidas no comportamento real observável das estruturas ou mecanismos mecânicos simulados.

Neste contexto, este trabalho tem por objetivo, apresentar a formulação de um modelo de degradação material unidimensional capaz de representar o comportamento de polímeros sujeitos a taxas de deformação relativamente altas. O modelo material é composto de uma parte viscoelástica e uma contribuição viscoplástica, considerando somente encruamento isotrópico, sendo a degradação material representada pelo modelo de dano de Lemaitre. A formulação viscoelástica é representada pelo modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt e a contribuição viscoplástica é dada pela equação de Perzyna.

Geralmente, em problemas sujeitos a altas taxa de deformação, as forças de inércia são significativamente importantes na resposta estrutural, podendo ocorrer grandes deformações e mudanças geométricas expressivas na estrutura. Deste modo, torna-se necessário formular o problema através das equações do movimento, segundo um enfoque não linear geométrico e considerando deformações finitas. Assim, consegue-se obter uma resposta transiente do campo de deformações e tensões.

O problema não linear geométrico é apresentado através do Princípio das Potências Virtuais, segundo uma formulação Lagrangeana Corrente, e aplicado no equilíbrio estrutural de treliças tridimensionais. O campo de deslocamentos e velocidades é discretizado através do Método dos Elementos Finitos e particularizado para o elemento de barra de dois nós. A formulação transiente das equações do movimento é obtida pelo método implícito de Newmark. A solução das equações não lineares do problema transiente é realizada através do método iterativo de Newton-Raphson, sendo apresentada a matriz de rigidez tangente consistente com a discretização realizada pelo Método dos Elementos Finitos e pelo método de Newmark.

O modelo material é apresentado segundo as equações diferenciais que regem a evolução do processo cinético de

deformação. Para considerar o modelo material no programa de elementos finitos, as leis de evolução são integradas numericamente através do método implícito de Euler. Devido o modelo ser viscoplástico, a metodologia de predição viscoelástica e correção viscoplástica é utilizada para a solução do problema material. Tal metodologia é conhecida como algoritmo de retorno. Para obter a taxa de convergência quadrática do método iterativo de Newton-Raphson é apresentado o cálculo analítico do módulo tangente algoritmo consistente, o qual é validado através do método da derivada complexa.

Após o modelo numérico ser formulado, apresenta-se uma metodologia para identificar os parâmetros materiais, onde é utilizado o método de Otimização por Enxame de Partículas – *Particle Swarm Optimization* (PSO), para realizar o ajuste entre as curvas experimental e teórica.

Ao final, são apresentados e discutidos alguns resultados numéricos de simulações de estruturas treliçadas sujeitas a altas taxas de deformação, com intuito de demonstrar algumas aplicações da formulação numérica desenvolvida.

1.1 SEQUÊNCIA DO TRABALHO

O presente trabalho é dividido em três partes principais. A primeira parte, referente ao Capítulo 2, apresentam-se a formulação do problema não linear geométrico transiente, as considerações para deformações finitas em um elemento de barra e a discretização do problema pelo Método dos Elementos Finitos. Após a discretização, o sistema de equações não lineares é resolvido pelo processo iterativo de Newton-Raphson, onde obtém-se a matriz de rigidez tangente consistente, a qual é desenvolvida de forma analítica pelo cômputo de suas derivadas direcionais.

No Capítulo 3 é apresentado o modelo material fenomenológico viscoelástico-viscoplástico acoplado com dano, sendo desenvolvidas as leis de evolução que regem o mesmo. A formulação material também é apresentada segundo um enfoque termodinâmico com variáveis internas. Posteriormente, as leis de evolução contínuas são integradas implicitamente pelo método

de Euler, sendo apresentado o desenvolvimento do algoritmo de retorno. Formulado o algoritmo de retorno, foi desenvolvido analiticamente o módulo tangente consistente, o qual é validado pelo método da derivada complexa.

No Capítulo 4 são discutidas algumas particularidades do modelo material, quando este é aplicado para representar o comportamento fenomenológico de polímeros. Ao final, são apresentados dois exemplos numéricos, sendo um 2D e outro 3D, sujeitos a altas taxas de deformação, deformações finitas e mudanças bruscas de geometria. Deste modo, toda a formulação apresentada é essencial para uma aproximação numérica razoável de estruturas treliçadas que apresentam tal comportamento.

2 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Neste capítulo são abordados os requisitos cinemáticos necessários para a análise numérica de estruturas treliçadas tridimensionais sujeitas a grandes deslocamentos (rotações) e deformações. A formulação não linear geométrica considera deformações finitas, onde mostra-se para um problema unidimensional, que a decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação é equivalente à decomposição aditiva do tensor deformação logarítmico. Posteriormente apresenta-se o equilíbrio estrutural através de uma formulação Lagrangeana Corrente, sendo esta discretizada via Método dos Elementos Finitos.

Apresentada a forma discreta do equilíbrio estrutural, aplica-se o método de Newton-Raphson para a solução do sistema de equações não lineares. Do procedimento de Newton-Raphson deriva-se a matriz de rigidez tangente, sendo apresentado seu desenvolvimento analítico, o qual é consistente com a discretização realizada pelo Método dos Elementos Finitos. Ao final do capítulo, o problema transiente é formulado e sua solução numérica apresentada através do algoritmo implícito de Newmark.

Vários conceitos clássicos da mecânica do contínuo e do cálculo tensorial são utilizados neste capítulo. Sendo assim, não é o objetivo do mesmo desenvolver a formulação destes, mas sim, utilizá-los como ferramentas para atingir os propósitos principais apresentados. Portanto, citam-se Bonet e Wood (1997), Malvern (1969) e Souza Neto, Peric e Owen (2008) como referências base para um melhor entendimento dos conceitos apresentados.

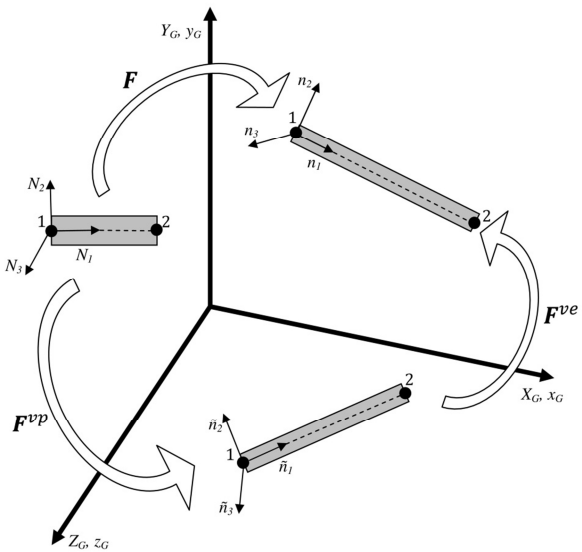
Neste trabalho, os símbolos minúsculos referem-se à configuração espacial, e os símbolos maiúsculos representam as variáveis materiais. Porém, a área e o comprimento do elemento de barra na configuração espacial serão mantidos em letras maiúsculas.

2.1 CONSIDERAÇÃO DE DEFORMAÇÕES FINITAS

Analisando a Figura 1, considera-se que a aplicação de um campo de deslocamentos no corpo indeformado (material) faz o mesmo atingir sua configuração final deformada (espacial). Deste modo, na análise cinemática deste movimento, define-se o gradiente de deformação $\boldsymbol{F}$ como o operador linear que relaciona uma fibra infinitesimal na configuração material com sua contraparte deformada na configuração espacial (SOUZA NETO, PERIC e OWEN, 2008). Matematicamente, esta definição pode ser expressa em função dos autovalores (alongamentos) λ_i referentes aos autovetores $\boldsymbol{n}_i$ e $\boldsymbol{N}_i$,

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\, \boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{N}_i) \tag{2.1}$$

Figura 1 - Decomposição multiplicativa do gradiente de deformação.



Fonte: produção do próprio autor.

Considerando que o material possui um comportamento viscoelástico e viscoplástico, o gradiente de deformação $\boldsymbol{F}$ pode ser decomposto pelo produto de suas componentes viscoelástica $\boldsymbol{F}^{ve}$ e viscoplástica $\boldsymbol{F}^{vp}$, dado por,

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{ve}\boldsymbol{F}^{vp} \tag{2.2}$$

Sendo que,

$$\boldsymbol{F}^{ve} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{ve}(\boldsymbol{n}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{n}}_i) \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{F}^{vp} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{vp}(\tilde{\boldsymbol{n}}_i \otimes \boldsymbol{N}_i) \tag{2.4}$$

onde λ_i^{ve} e λ_i^{vp} são os autovalores (alongamentos) referentes aos autovetores das configurações ($\boldsymbol{n}_i$ e $\tilde{\boldsymbol{n}}_i$) e ($\tilde{\boldsymbol{n}}_i$ e $\boldsymbol{N}_i$). Substituindo as equações (2.3) e (2.4) na equação (2.1) obtem,

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{N}_i) = \left[\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{ve}(\boldsymbol{n}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{n}}_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{vp}(\tilde{\boldsymbol{n}}_i \otimes \boldsymbol{N}_i)\right] \tag{2.5}$$

Sabendo que a deformação no elemento de barra é obtida somente na direção axial $(\cdot)_1$, reescreve-se a equação (2.5),

$$\lambda_1(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1) = [\lambda_1^{ve}(\boldsymbol{n}_1 \otimes \tilde{\boldsymbol{n}}_1)]\left[\lambda_1^{vp}(\tilde{\boldsymbol{n}}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1)\right]$$

$$\lambda_1(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1) = \left(\lambda_1^{ve}\lambda_1^{vp}\right)(\boldsymbol{n}_1 \otimes \tilde{\boldsymbol{n}}_1)(\tilde{\boldsymbol{n}}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1) \tag{2.6}$$

Conhecendo a propriedade do produto tensorial,

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c})$$

onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são vetores, pode-se rescrever a equação (2.6) como,

$$\lambda_1(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1) = \left(\lambda_1^{ve}\lambda_1^{vp}\right)(\tilde{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_1)(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1) \tag{2.7}$$

Sendo $\tilde{\boldsymbol{n}}_1$ um vetor unitário, tem-se que $\tilde{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_1 = 1$, e a equação (2.7) resulta em,

$$\lambda_1(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1) = \left(\lambda_1^{ve}\lambda_1^{vp}\right)(\boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{N}_1)$$

Assim, conclui-se que,

$$\lambda_1 = \lambda_1^{ve}\lambda_1^{vp} \tag{2.8}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da equação (2.8) tem-se,

$$\ln(\lambda_1) = \ln\left(\lambda_1^{ve}\lambda_1^{vp}\right) = \ln(\lambda_1^{ve}) + \ln\left(\lambda_1^{vp}\right) \tag{2.9}$$

Bonet e Wood (1997) e Souza Neto, Peric e Owen (2008) definem uma família de tensores deformação (espaciais), baseados no tensor alongamento esquerdo $\boldsymbol{V}$, obtidos através de,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^{-m}) & m \neq 0 \\ ln(\boldsymbol{V}) & m = 0 \end{cases}$$

onde o tensor deformação logarítmico, conhecido também como deformação de Hencky, é obtido para $m = 0$.

A relação entre o tensor alongamento esquerdo e o tensor esquerdo de Cauchy-Green (Finger) $\boldsymbol{b}$ é representada como,

$$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \tag{2.10}$$

e substituindo o gradiente de deformação na equação (2.10) se deduz que,

$$\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i) \tag{2.11}$$

Deste modo, o tensor deformação logarítmico unidimensional na direção de $\boldsymbol{n}_1$ é obtido por,

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = ln(\lambda_1) \tag{2.12}$$

Assim, voltando para a equação (2.9), para o elemento de barra a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação é igual à decomposição aditiva da deformação logarítmica em suas parcelas viscoelástica e viscoplástica,

$$\varepsilon = \varepsilon^{ve} + \varepsilon^{vp} \tag{2.13}$$

Na equação (2.12), o subscrito 11 denotando a direção axial da barra e o sobrescrito (0) referente à deformação logarítmica são omitidos a fim de simplificar as futuras deduções. Bonet e Wood (1997) e Driemeier, Proença e Alves (2005) apresentam esta consideração de deformações finitas unidimensional através da formulação de um problema elastoplástico.

2.2 FORMULAÇÃO LAGRANGEANA CORRENTE

Denomina-se de formulação Lagrangeana Corrente quando o equilíbrio estrutural é definido na configuração espacial corrente do corpo. Alguns autores como Belytschko, Liu e Moran (2006), denominam esta formulação corrente, de formulação Lagrangeana Atualizada. Porém, Bathe (1996), Hinton (1992), Muñoz-Rojas e Duarte Filho (2001) e Reddy (2004) descrevem a formulação Lagrangeana Atualizada quando o equilíbrio é obtido em uma configuração intermediária, que geralmente é escolhida como a última configuração convergida do processo incremental-

iterativo de solução. Gadala, Dokainish e Oravas (1984) apresentam uma interessante revisão bibliográfica comentando as diferentes formulações para a solução de problemas não lineares geométricos.

Geralmente, na formulação Lagrangeana Atualizada unidimensional, após integrar as equações de equilíbrio na configuração intermediária, faz-se a consideração de pequenas deformações. Isto significa manter as áreas e comprimentos constantes durante a cinemática do corpo. Lembrando que quando se fala em pequenas deformações não significa dizer pequenos deslocamentos, sendo que grandes rotações são consideradas.

Assim, se a configuração intermediária de referência for escolhida como a configuração corrente, a formulação Lagrangeana Atualizada confunde-se com a formulação Lagrangeana Corrente.

Geralmente, o Método dos Elementos Finitos é apresentado em termos da forma fraca das equações diferenciais consideradas. No contexto da mecânica dos sólidos isto implica no uso das equações dos trabalhos virtuais ou das potências virtuais (BONET e WOOD, 1997). Ambas as formulações, trabalhos virtuais ou potências virtuais, após a discretização pelo Método dos Elementos Finitos, convergem para o mesmo sistema de equações não lineares de equilíbrio estrutural, como demonstrado em Carniel (2012). Porém, esta afirmação só é válida para a correta escolha dos pares tensão-deformação, os quais devem ser energeticamente conjugados. Sendo o equilíbrio energético, na formulação Lagrangeana Corrente, realizado na configuração deformada (espacial), a medida tensorial de tensão que efetivamente está agindo sobre o corpo, é chamada de tensão de Cauchy, também conhecida como tensão real. Tomando como exemplo a análise de um problema unidimensional, a interpretação física da tensão de Cauchy é apresentada pela razão entre a força e a área da seção transversal na configuração espacial do corpo.

Segundo Crisfield e Wood (1991) e Reddy (2004), para o princípio dos trabalhos virtuais formulado na configuração corrente, o par energeticamente conjugado do tensor tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ é a variável virtual da parte linear do tensor

deformação de Almansi, também chamado de tensor deformação Euler, dado por,

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(LA)} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{l}^T}\right) \tag{2.14}$$

sendo que a equação corrente dos trabalhos virtuais é apresentada como,

$$\delta W = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(LA)}\, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{l}}\, d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{t} \cdot \delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{l}}\, d\Gamma = 0 \tag{2.15}$$

Para o princípio das potências virtuais formulado na configuração corrente, o par energeticamente conjugado do tensor tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ é a variável virtual do tensor taxa de deformação, definido como,

$$\delta\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}^T}\right) \tag{2.16}$$

e consequentemente a equação das potências virtuais pode ser expressa por,

$$\delta\dot{W} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{d}\, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}\, d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{t} \cdot \delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}\, d\Gamma = 0 \tag{2.17}$$

Nas equações (2.15) e (2.17) Ω e Γ são o domínio e o contorno do corpo, respectivamente, $\boldsymbol{f}$ representa a força de corpo, $\boldsymbol{t}$ a tração, $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{l}}$ e $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}$ são os campos de deslocamento e velocidade, respectivamente, no sistema de referência local do elemento e $\delta(\cdot)$ é a variável virtual arbitrária considerada. O subscrito $(\cdot)_{\boldsymbol{x}}$ nas equações (2.14) e (2.16) refere-se a configuração deformada (vide Figura 2).

Deve-se lembrar que os conjugados energéticos do tensor tensão de Cauchy, definidos como $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(LA)}$ e $\delta\boldsymbol{d}$, não corresponde à variação destes tensores, devido à não distributividade do operador perturbação (MUÑOZ-ROJAS, 2003).

Neste trabalho optou-se por apresentar o equilíbrio estrutural segundo o princípio das potências virtuais. Contudo, para o caso unidimensional, a obtenção da equação de equilíbrio discretizada apresenta o mesmo nível de dificuldade matemática em ambas as formulações, segundo Carniel (2012).

Para facilitar o tratamento das equações discretizadas e a implementação da formulação em um programa de elementos finitos convencional torna-se conveniente organizar a equação (2.17) em uma forma matricial compacta, dada por,

$$\delta\dot{W} = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}^T} \boldsymbol{f}\, d\Omega - \int_{\Gamma} \delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}^T} \boldsymbol{t}\, d\Gamma = 0 \qquad (2.18)$$

Assim, particularizando para o caso unidimensional obtém-se,

$$\delta\dot{W} = \int_{V} \delta {d_{11}}^T \sigma_{11}\, dv - \int_{V} \delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}^T} \boldsymbol{f}\, dv - \int_{A} \delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}^T} \boldsymbol{t}\, da = 0 \qquad (2.19)$$

sendo que $\boldsymbol{f}$ é força por unidade de volume (força de corpo), $\boldsymbol{t}$ é força por unidade de área (tração). Na sequência do trabalho, omite-se na equação (2.19) o subscrito 11 referente à direção axial da barra.

2.3 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

Para obter a solução numérica da equação (2.19), primeiramente, aproximam-se os campos de deslocamento e velocidade, via elementos finitos, através de funções de interpolação definidas no domínio físico do elemento. Deste modo, obtém-se um sistema de equações para cada elemento finito, o qual pode ser montado em um sistema global e posteriormente resolvido através de um método numérico de solução, onde tem-se geralmente como solução os deslocamentos nodais da estrutura discretizada.

Sendo assim, apresenta-se primeiramente o tensor taxa de deformação $\boldsymbol{d}$, o qual é definido como a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade $\boldsymbol{l}$, e pode ser escrito como,

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T) \tag{2.20}$$

sendo que,

$$\boldsymbol{l} = \frac{\partial \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} \tag{2.21}$$

Substituindo a equação (2.21) na equação (2.20) e aplicando o operador perturbação, chega-se em,

$$\delta \boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \delta \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \delta \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}^T}\right) \tag{2.22}$$

Particularizando para o elemento de barra obtém-se,

$$\delta d = \delta d_{11} = \frac{\partial \delta {v^l}_1}{\partial x_1} \tag{2.23}$$

O campo de deslocamentos, no sistema de referência local espacial $\boldsymbol{x}$, para o elemento de barra de dois nós é aproximado por,

$$\begin{bmatrix} {u^l}_1 \\ {u^l}_2 \\ {u^l}_3 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{l}} \cong \boldsymbol{N}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}} \tag{2.24}$$

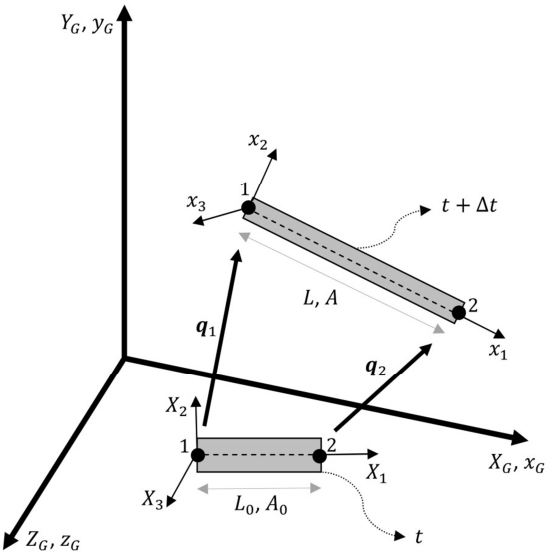
onde $\boldsymbol{N}$ é a matriz das funções de interpolação e $\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}$ os deslocamentos nodais locais do elemento. Analogamente, obtém-se o campo de velocidades discretizado, o qual é dado por,

$$\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} \cong \boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}} \tag{2.25}$$

sendo que uma perturbação virtual no campo de velocidades é escrita como,

$$\delta\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{l}} \cong \boldsymbol{N}\delta\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}} \tag{2.26}$$

Figura 2 - Representação cinemática de um elemento de barra.



Fonte: produção do próprio autor.

Obtendo somente a direção axial da equação (2.26) e derivando em relação à coordenada x_1, chega-se em,

$$\frac{\partial \delta v^{l}{}_{1}}{\partial x_1} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v^{l}{}_{1}^{1} \\ \delta v^{l}{}_{2}^{1} \\ \delta v^{l}{}_{3}^{1} \\ \delta v^{l}{}_{1}^{2} \\ \delta v^{l}{}_{2}^{2} \\ \delta v^{l}{}_{3}^{2} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Utilizando as funções de interpolação lineares comumente empregadas no Método dos Elementos Finitos para a discretização de problemas unidimensionais (vide Chandrupatla e Belegundu (2002)), reescreve-se a equação (2.27) como,

$$\frac{\partial \delta v^{l}{}_{1}}{\partial x_1} \cong \boldsymbol{B_x} \delta \dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}} \tag{2.28}$$

onde,

$$\boldsymbol{B_x} = \frac{1}{L}[-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] = \frac{1}{L}\boldsymbol{B_0} \tag{2.29}$$

sendo,

$$\boldsymbol{B_0} = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \tag{2.30}$$

Assim, substituindo a equação (2.28) na equação (2.23) obtém-se,

$$\delta d = \frac{\partial \delta v^{l}{}_{1}}{\partial x_1} \cong \boldsymbol{B_x} \delta \dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}} \tag{2.31}$$

Deste modo, a equação (2.19) das potências virtuais discretizadas é apresentada como,

$$\int_V \left(\boldsymbol{B_x}\delta\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}}\right)^T \sigma\, dv = \int_V \left(\boldsymbol{N}\delta\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}}\right)^T \boldsymbol{f}\, dv + \int_A \left(\boldsymbol{N}\delta\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}}\right)^T \boldsymbol{t}\, da \qquad (2.32)$$

Sendo esta equação válida para qualquer $\delta\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{l}}$, resulta em,

$$\int_V \boldsymbol{B_x}^T \sigma\, dv = \int_V \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{f}\, dv + \int_A \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t}\, da \qquad (2.33)$$

As mesmas funções de interpolação lineares utilizadas para discretizar os campos de deslocamento e velocidade são utilizadas para discretizar a geometria em relação às coordenadas $\boldsymbol{x}$ (formulação isoparamétrica (COOK, *et al.*, 2001)). Sendo assim, integrando no domínio do elemento de $-1 \leq \xi \leq 1$, e fazendo o mapeamento da geometria para o domínio de $\boldsymbol{x}$, reescreve-se a equação (2.33) como,

$$\int_A \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B_x}^T \sigma \frac{L}{2}\, d\xi\, \mathrm{d}a = \int_A \int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{f}\, \frac{L}{2} d\xi\, da + \int_\Gamma \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t}\, da \qquad (2.34)$$

e substituindo $\boldsymbol{B_x} = (1/L)\boldsymbol{B_0}$,

$$\underbrace{\int_A \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B_0}^T \sigma \frac{1}{2}\, d\xi\, \mathrm{d}a}_{\boldsymbol{f_{int}^l}} = \underbrace{\int_A \int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{f}\, \frac{L}{2} d\xi\, da + \int_\Gamma \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t}\, da}_{\boldsymbol{f_{ext}^l}} \qquad (2.35)$$

Como a equação (2.35) é definida no domínio local do elemento, esta deve ser rotacionada para o sistema de referência local-global. Isto é realizado para que a resposta da solução do sistema de equações não lineares seja obtida no sistema de coordenadas globais. Assim, faz-se a seguinte transformação,

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_{int}^g} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{f_{int}^l} \\ \boldsymbol{f_{ext}^g} = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{f_{ext}^l} \end{cases} \qquad (2.36)$$

onde $\boldsymbol{T}$ é a matriz de rotação para o elemento de barra, definida nas coordenadas espaciais como,

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} l^1 & m^1 & n^1 & 0 & 0 & 0 \\ l^2 & m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 \\ l^3 & m^3 & n^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l^1 & m^1 & n^1 \\ 0 & 0 & 0 & l^2 & m^2 & n^2 \\ 0 & 0 & 0 & l^3 & m^3 & n^3 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

sendo l^i, m^i e n^i, para $i = 1, 2, 3$, os cossenos diretores dos eixos locais espaciais x_1, x_2 e x_3 referentes aos eixos globais x_G, y_G e z_G, respectivamente, como ilustrado na Figura 2.

Para resolver numericamente o sistema de equações não lineares obtido através das equações (2.35) e (2.36), primeiramente deve-se montar a força interna e externa de cada elemento, dadas no sistema local-global e representadas pelo sobrescrito $(\cdot)^{\boldsymbol{g}}$, para o um sistema global, segundo a seguinte operação,

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_{int}} = \bigwedge_{i=1}^{nel} \left(\boldsymbol{f_{int}^{g}}\right)_i \\ \boldsymbol{f_{ext}} = \bigwedge_{i=1}^{nel} \left(\boldsymbol{f_{ext}^{g}}\right)_i \end{cases} \tag{2.38}$$

onde $\wedge$ é um operador de montagem do sistema local-global para o sistema global e *nel* é o número total de elementos da malha de elementos finitos. Deste modo, o sistema de equações de equilíbrio não lineares global é representado através um resíduo, dado por,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f_{int}} - \boldsymbol{f_{ext}} \tag{2.39}$$

2.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA NÃO LINEAR DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

Em um programa de elementos finitos que contempla uma formulação não linear geométrica e/ou material, geralmente o algoritmo de solução é incremental-iterativo. A parte

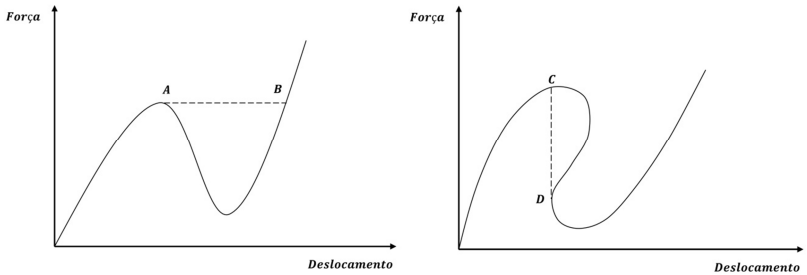
incremental define o incremento de tempo, informando o passo de carga, deslocamento ou ambos. Já a parte iterativa está relacionada com a solução do sistema não linear da equação de equilíbrio, equação (2.39), para o incremento de tempo corrente. Com incrementos de tempo menores, geralmente consegue-se obter maior estabilidade na solução do sistema não linear (principalmente utilizando o método de Newton-Raphson; vide seção 2.4.1). Outro benefício de um processo de solução incremental é obter o comportamento do campo de deslocamentos, deformações ou tensões com o passar do tempo.

A solução de problemas estruturais obtidos por análise de elementos finitos pode ser realizada utilizando diversos métodos numéricos. Dentre eles podem-se citar o método de Newton-Raphson com controle de carga e suas variantes (Completo, Modificado e com Preditor), método do Controle de Deslocamentos, método do Controle de Deslocamentos Generalizado e o método do Comprimento de Arco.

O método de Newton-Raphson com controle de carga é de fácil implementação, porém possui problemas de instabilidades numéricas e não obtém a solução completa de equilíbrio em problemas de *snap-through*, representado na Figura 3-a. Como o método é incremental com relação à força, nota-se na Figura 3-a que a solução pula do ponto A para o ponto B. Analogamente ocorre o mesmo problema com o método do Controle de Deslocamentos, porém em problemas envolvendo *snap-back,* Figura 3-b. Contudo, o método do Controle de Deslocamentos Generalizado e o método do Comprimento de Arco tratam problemas tanto em *snap-through* quanto em *snap-back*. Souza Neto, Peric e Owen (2008), Bonet e Wood (1997) e Crisfield e Wood (1991) apresentam a formulação do método do Comprimento de Arco, sendo que este último faz uma análise detalhada do método e apresenta uma variância do mesmo, chamado de método do Comprimento de Arco Cilíndrico. Sobre o método do Controle de Deslocamentos Generalizado, pode-se citar como referências Yang e Shieh (1990), Kuo e Yang (1995), Kuo e Yang (1994) e o trabalho de Cardoso e Fonseca (2006) o qual apresenta o método do Controle de Deslocamentos

Generalizado como sendo um método do Comprimento de Arco ortogonal.

Figura 3 - a) *snap-through*; b) *snap-back.*



a) b)

Fonte: produção do próprio autor.

Estruturas que têm geralmente um comportamento instável, do tipo *snap-through*, quando simuladas através de um procedimento quase-estático, obtêm-se “pseudo-soluções” do campo de deslocamentos, isto é, resultados não realistas. Este é o caso de soluções obtidas através do método do Comprimento de Arco e do método do Controle de Deslocamentos Generalizado para problemas que possuem pontos críticos. Deste modo, estruturas com este comportamento devem ser simuladas através de uma análise transiente, pois assim, considerando as forças de inércia, obtém-se um resultado mais condizente com o fenômeno físico observado.

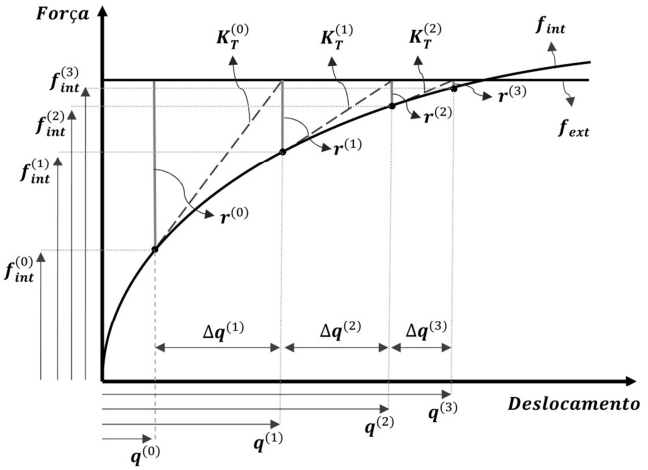
Analisando a Figura 3-a, na região do ponto A ocorre uma instabilidade estrutural. Isto significa, por exemplo, que se um incremento de força positivo for aplicado fará com que aquele determinado ponto da estrutura desloque-se para a região do ponto B. Dependendo do material e da geometria do corpo este deslocamento do ponto A ao ponto B pode ser abrupto e gerar altas acelerações.

2.4.1 Método de Newton-Raphson Completo

Devido à praticidade da formulação e da implementação, e pela posterior aplicação em problemas transientes não lineares (seção 2.6), utiliza-se neste trabalho o método de Newton-Raphson Completo para a solução numérica de sistemas de equações não lineares.

No método de Newton-Raphson Completo a matriz tangente $\boldsymbol{K_T}$ (inclinação da curva de força interna) é atualizada a cada passo iterativo durante o processo de solução, conforme a Figura 4.

Figura 4 - Exemplo do processo iterativo de solução através do algoritmo de Newton-Raphson.



Fonte: produção do próprio autor.

Um ponto positivo deste método é que para funções bem comportadas, obtém-se taxa de convergência, no mínimo quadrática, próximo ao ponto ótimo da solução do sistema de equações. Isto significa que próximo ao ponto de equilíbrio, o resíduo decresce de forma quadrática. Porém, o método possui algumas desvantagens, como oscilações entre pontos da curva de força interna ou problemas numéricos em funções muito

planas ou próximo a pontos de máximo ou mínimo, os quais tornam a matriz tangente singular ou mal condicionada.

Como comentado anteriormente, o algoritmo de solução apresentado é incremental-iterativo. Deste modo, padroniza-se neste trabalho o subscrito $(\cdot)_{n+1}$ como o passo incremental de tempo corrente e o sobrescrito $(\cdot)^{(k+1)}$ referente ao processo iterativo corrente.

Para a solução da equação (2.39) pelo método de Newton-Raphson, primeiramente lineariza-se a mesma em torno da última iteração convergida, em relação aos deslocamentos nodais globais $\boldsymbol{q}$, através de uma expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem,

$$\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)}\right) \cong \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)}\right) + \frac{\partial \boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)}\right)}{\partial \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)}} \Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} \tag{2.40}$$

Deste modo, procura-se um incremento $\Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)}$que zere a aproximação linear, chegando em,

$$\boldsymbol{K_T}\left(\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)}\right) \Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} = -\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)}\right)$$

$$\boldsymbol{K_T}_{n+1}^{(k)} \Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} = -\boldsymbol{r}_{n+1}^{(k)} \tag{2.41}$$

onde $\boldsymbol{K_T}$ é denominada de matriz de rigidez tangente, sendo esta referenciada ao sistema global de coordenadas, e dada por,

$$\boldsymbol{K_T}_{n+1}^{(k)} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)}} \tag{2.42}$$

Assim, para cada iteração (k) os deslocamentos são atualizados da seguinte forma,

$$\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} \tag{2.43}$$

sendo que o processo segue iterativamente até que certo critério de parada seja satisfeito. Neste trabalho o critério de parada escolhido é obtido pela norma Euclidiana (L_2) do resíduo,

$$\left\| \boldsymbol{r}_{n+1}^{(k+1)} \right\|_2 < Tolerância \tag{2.44}$$

Assim, o processo iterativo é resumido na Figura 5.

Figura 5 - Algoritmo Newton-Raphson.

$$\begin{array}{|l}
ENQUANTO\ \left(\left\| \boldsymbol{r}_{n+1}^{(k+1)} \right\|_2 > Tolerância \right) \\
\\
\quad \rightarrow Calcula: \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_{n+1}}^{(k)}\ e\ \boldsymbol{r}_{n+1}^{(k)} \\
\quad \rightarrow Resolve\ o\ Sistema\ Linear: \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_{n+1}}^{(k)}\ \Delta \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} = -\boldsymbol{r}_{n+1}^{(k)} \\
\quad \rightarrow Atualiza: \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k+1)} \\
\quad \rightarrow Calcula: \boldsymbol{r}_{n+1}^{(k+1)} \\
\\
FIM\ ENQUANTO
\end{array}$$

Fonte: produção do próprio autor.

A matriz de rigidez tangente global pode ser obtida pela montagem das matrizes tangentes local-global de todos os elementos, dada por,

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_{n+1}}^{(k)} = \bigwedge_{i=1}^{nel} \left(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}_{n+1}}^{\boldsymbol{g}(k)} \right)_i \tag{2.45}$$

Omitindo o intervalo de tempo corrente e a iteração anterior $(\cdot)_{n+1}^{(k)}$ na equação (2.45) tem-se,

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}} = \bigwedge_{i=1}^{nel} \left(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{g}} \right)_i \tag{2.46}$$

sendo que $\boldsymbol{K_T^g}$ é a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema referencial local-global, expressa por,

$$\boldsymbol{K_T^g} = \frac{\partial \boldsymbol{r^g}(\boldsymbol{q^g})}{\partial \boldsymbol{q^g}} \tag{2.47}$$

onde $\boldsymbol{q^g} = [\boldsymbol{q_1} \quad \boldsymbol{q_2}]^T$ são os deslocamentos nodais globais do elemento, como pode ser visualizado na Figura 2.

2.5 MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE CONSISTENTE DO ELEMENTO

Para garantir a alta taxa de convergência do procedimento de Newton-Raphson Completo, necessita-se do correto cômputo da matriz de rigidez tangente, a qual deve ser consistente com o a discretização realizada pelo Método dos Elementos Finitos.

Expandindo a equação (2.47) chega-se em,

$$\boldsymbol{K_T^g} = \frac{\partial \boldsymbol{r^g}(\boldsymbol{q^g})}{\partial \boldsymbol{q^g}} = \frac{\partial\left(\boldsymbol{f_{int}^g} - \boldsymbol{f_{ext}^g}\right)}{\partial \boldsymbol{q^g}} = \frac{\partial \boldsymbol{f_{int}^g}}{\partial \boldsymbol{q^g}} - \frac{\partial \boldsymbol{f_{ext}^g}}{\partial \boldsymbol{q^g}} \tag{2.48}$$

Neste ponto faz-se a consideração que o vetor de força externa não é função dos deslocamentos nodais, assim,

$$\boldsymbol{K_T^g} = \frac{\partial \boldsymbol{f_{int}^g}}{\partial \boldsymbol{q^g}} \tag{2.49}$$

Substituindo a equação (2.36) na equação (2.49) obtém-se,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K_T^g} &= \frac{\partial \boldsymbol{f_{int}^g}}{\partial \boldsymbol{q^g}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q^g}}\left(\mathbf{T}^T \boldsymbol{f_{int}^l}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q^g}}\left(\mathbf{T}^T \int_A \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B_0}^T \sigma \frac{1}{2}\, d\xi\, da\right) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Sendo o integrando constante, chega-se em,

$$\boldsymbol{K_T^g} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q^g}} \left(\mathbf{T}^T \boldsymbol{B_0}^T \, \sigma \, A \right) \tag{2.51}$$

onde A é a área da seção transversal do elemento na configuração deformada. Das equações (2.30) e (2.37) tem-se que o produto $\mathbf{T}^T \boldsymbol{B_0}^T$ resulta em,

$$\mathbf{T}^T \boldsymbol{B_0}^T = \begin{bmatrix} -l^1 \\ -m^1 \\ -n^1 \\ l^1 \\ m^1 \\ n^1 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Da definição dos cossenos diretos na direção axial da barra, tem-se,

$$\begin{cases} l^1 = \dfrac{x_G^2 - x_G^1}{L} \\ m^1 = \dfrac{y_G^2 - y_G^1}{L} \\ n^1 = \dfrac{z_G^2 - z_G^1}{L} \end{cases} \tag{2.53}$$

Substituindo a equação (2.53) na equação (2.52) chega-se em,

$$\mathbf{T}^T \boldsymbol{B_0}^T = \begin{bmatrix} -l^1 \\ -m^1 \\ -n^1 \\ l^1 \\ m^1 \\ n^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -(x_G^2 - x_G^1) \\ -(y_G^2 - y_G^1) \\ -(z_G^2 - z_G^1) \\ (x_G^2 - x_G^1) \\ (y_G^2 - y_G^1) \\ (z_G^2 - z_G^1) \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \boldsymbol{c_x} \tag{2.54}$$

onde $\boldsymbol{c_x}$ pode ser apresentado em função das coordenadas globais espaciais $\boldsymbol{x_G}$ como $\boldsymbol{c_x} = \boldsymbol{G x_G}$, onde,

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; \boldsymbol{x_G} = \begin{bmatrix} x_G^1 \\ y_G^1 \\ z_G^1 \\ x_G^2 \\ y_G^2 \\ z_G^2 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

Analisando a cinemática representada na Figura 2, nota-se que $\boldsymbol{x_G} = \boldsymbol{X_G} + \boldsymbol{q^g}$, onde $\boldsymbol{X_G}$ são as coordenadas globais materiais. Deste modo, $\boldsymbol{c_x}$ pode ser reescrito como,

$$\boldsymbol{c_x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x_G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X_G} + \boldsymbol{q^g}) \tag{2.56}$$

Substituindo a equação (2.54) na equação (2.51), tem-se,

$$\boldsymbol{K_T^g} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q^g}}\left(\boldsymbol{c_x}\, \sigma\, \frac{1}{L}\, A\right) \tag{2.57}$$

Assim, a matriz tangente consistente do elemento fica definida como,

$$\boldsymbol{K_T^g} = \boldsymbol{K_T^{c_x}} + \boldsymbol{K_T^\sigma} + \boldsymbol{K_T^L} + \boldsymbol{K_T^A} \;\rightarrow\; \begin{cases} \boldsymbol{K_T^{c_x}} = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\right)\sigma\dfrac{1}{L}\, A \\ \boldsymbol{K_T^\sigma} = \boldsymbol{c_x}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{q^g}}\right)\dfrac{1}{L} \\ \boldsymbol{K_T^L} = \boldsymbol{c_x}\, \sigma\left(\dfrac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\right) A \\ \boldsymbol{K_T^A} = \boldsymbol{c_x}\, \sigma\, \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^g}}\right) \end{cases} \tag{2.58}$$

faltando definir suas derivadas. Da equação (2.56) percebe-se que $\boldsymbol{c_x}$ é função explícita de $\boldsymbol{q^g}$. Porém, σ, L e A são funções dos deslocamentos locais $\boldsymbol{q^l}$. Assim, pela regra da cadeia chega-se em,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}} \frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} = \frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}} \frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} = \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}} \frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \tag{2.61}$$

A relação entre os deslocamentos no sistema referencial local e global do elemento é obtida como,

$$\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}} \tag{2.62}$$

e sua derivada em relação a $\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}$ fica,

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}} + \frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{T} \tag{2.63}$$

Substituindo a equação (2.63) nas equações (2.59) a (2.61) e posteriormente na equação (2.58) chega-se em,

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{c_x}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}}\right) \sigma \frac{1}{L} A \\ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{c_x} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\right) \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}} + \frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{T}\right) \frac{1}{L} A \\ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{c_x}\, \sigma \left(\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\right) \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}} + \frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{T}\right) A \\ \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{c_x}\, \sigma \frac{1}{L} \left(\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\right) \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}} + \frac{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{g}}} \boldsymbol{T}\right) \end{cases} \tag{2.64}$$

As derivadas da equação (2.64) são realizadas através do conceito de derivada direcional. Segundo Bonet e Wood (1997) a derivada direcional de um campo tensorial $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ em relação a $\boldsymbol{x}$ na direção de $\boldsymbol{w}$ é obtida por,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{w} = \frac{d}{d\epsilon}\left[\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{x}+\epsilon\boldsymbol{w})\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{2.65}$$

Nos apêndices A, B, C e D são apresentados os desenvolvimentos das derivadas direcionais de $\partial \boldsymbol{c_x}/\partial \boldsymbol{q^g}$, $\partial\sigma/\partial \boldsymbol{q^l}$, $\partial L^{-1}/\partial \boldsymbol{q^l}$ e $\partial A/\partial \boldsymbol{q^l}$, respectivamente. Deste modo, apresenta-se,

$$\frac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q^g}} = \boldsymbol{G} \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{q^l}} = \mathcal{C}^{\sigma d}\left(\frac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}}\right) \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}} = -(L_0 e^{\varepsilon})^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}}\right) \tag{2.68}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}} = -\left[A_0 2\nu\left(\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right)^{2\nu}\right]\left(\frac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}}\right) \tag{2.69}$$

O escalar $\mathcal{C}^{\sigma d}$ é denominado de módulo tangente, o qual depende do modelo material e é obtido através da derivada da tensão em relação à deformação. Neste trabalho, o modelo material tem características viscoelástica, viscoplástica e acoplamento de dano, as quais serão apresentadas no capítulo 3. Deste modo, define-se o módulo tangente como,

$$\mathcal{C}^{vepd} = \mathcal{C}^{\sigma d} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \tag{2.70}$$

Substituindo as equações (2.66) a (2.69) na equação (2.64) chega-se nas matrizes constituintes da matriz de rigidez tangente global do elemento,

$$\begin{cases} \boldsymbol{K_T^{c_x}} = \boldsymbol{G}\left(\dfrac{\sigma A}{L}\right) \\ \boldsymbol{K_T^{\sigma}} = \boldsymbol{c_x}\left[\mathcal{C}^{vepd}\left(\dfrac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}}\right)\right]\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\boldsymbol{q^g} + \dfrac{\partial \boldsymbol{q^g}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\boldsymbol{T}\right)\dfrac{1}{L}\,A \\ \boldsymbol{K_T^{L}} = \boldsymbol{c_x}\,\sigma\left[-(L_0 e^{\varepsilon})^{-1}\left(\dfrac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}}\right)\right]\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\boldsymbol{q^g} + \dfrac{\partial \boldsymbol{q^g}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\boldsymbol{T}\right)A \\ \boldsymbol{K_T^{A}} = \boldsymbol{c_x}\,\sigma\,\dfrac{1}{L}\left\{-\left[A_0 2\nu\left(\dfrac{1}{e^{\varepsilon}}\right)^{2\nu}\right]\left(\dfrac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}}\right)\right\}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\boldsymbol{q^g} + \dfrac{\partial \boldsymbol{q^g}}{\partial \boldsymbol{q^g}}\boldsymbol{T}\right) \end{cases} \tag{2.71}$$

Neste ponto, considera-se que está sendo empregada uma descrição Lagrangeana Corrente. Isto implica que os deslocamentos nodais serão sempre nulos, uma vez que ele está medindo a distância de um ponto na última configuração até a posição que ele ocupava na configuração de referência, que neste caso, é a mesma (MUÑOZ-ROJAS e DUARTE FILHO, 2001). Assim, traz-se o referencial para a configuração corrente pela definição de *push forward* (BONET e WOOD, 1997). Sabendo que $\partial \boldsymbol{q^g}/\partial \boldsymbol{q^g} = \boldsymbol{I}$, onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade, e lembrando-se da equação (2.54) onde $\boldsymbol{c_x} = L\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{B_0}^T$, a equação (2.71) reduz-se a,

$$\begin{cases} \boldsymbol{K_T^{c_x}} = \left(\dfrac{\sigma\,A}{L}\right)\boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{K_T^{\sigma}} = \left(\dfrac{\mathcal{C}^{vepd}\,A}{L}\right)\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{B_0}^T\boldsymbol{B_0}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T\left(\boldsymbol{K_T^{\sigma^l}}\right)\boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{K_T^{L}} = \left(-\dfrac{\sigma\,A}{L}\right)\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{B_0}^T\boldsymbol{B_0}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T\left(\boldsymbol{K_T^{L^l}}\right)\boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{K_T^{A}} = \left(-\dfrac{2\,\sigma\,A\,\nu}{L}\right)\ \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{B_0}^T\boldsymbol{B_0}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T\left(\boldsymbol{K_T^{A^l}}\right)\boldsymbol{T} \end{cases} \tag{2.72}$$

Nota-se na equação (2.72) que $\boldsymbol{K_T^{\sigma^l}}$, $\boldsymbol{K_T^{L^l}}$ e $\boldsymbol{K_T^{A^l}}$, são matrizes referentes ao sistema local do elemento, que podem ser resumidas em,

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}^{(\cdot)^{\boldsymbol{l}}} = C \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

sendo que,

$$se \begin{cases} (\cdot) = \boldsymbol{\sigma} \;\rightarrow\; C = \dfrac{C^{vepd}\, A}{L} \\ (\cdot) = \boldsymbol{L} \;\rightarrow\; C = -\dfrac{\sigma\, A}{L} \\ (\cdot) = \boldsymbol{A} \;\rightarrow\; C = -\dfrac{2\,\sigma\, A\, \nu}{L} \end{cases}$$

2.6 FORMULAÇÃO TRANSIENTE NÃO LINEAR

O objetivo de empregar uma formulação transiente para a solução de problemas não lineares de elementos finitos é obter um resultado numérico condizente com o fenômeno físico observado, principalmente em problemas onde as forças inerciais são significativas.

A equação do movimento global discretizada para o instante de tempo t_{n+1} pode ser apresentada da seguinte forma,

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}_{n+1} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{int}}(\boldsymbol{q}_{n+1}) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{ext}_{n+1}} \tag{2.74}$$

onde $\boldsymbol{M}$ é a matriz de massa, $\boldsymbol{C}$ a matriz de amortecimento, $\ddot{\boldsymbol{q}}$ é o vetor de acelerações nodais e $\dot{\boldsymbol{q}}$ é o vetor de velocidades nodais, $\boldsymbol{q}$ é o vetor de deslocamentos nodais, $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{int}}$ é a força interna e $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{ext}}$ representa a força externa.

Segundo Wriggers (2008), para obter a integração numérica da equação (2.74) em função dos deslocamentos nodais, basicamente dois métodos podem ser utilizados, os quais são conhecidos como métodos de integração explícito ou implícito.

- <u>Métodos Explícitos:</u> são de fácil implementação, pois a solução no instante de tempo t_{n+1} depende somente dos valores já conhecidos do tempo t_n. Estes métodos são muito eficientes quando a matriz massa é obtida de forma diagonal (*lumped mass matrix*) desacoplando a solução do sistema de equações. Porém os métodos explícitos geralmente necessitam passos de tempo muito pequenos para evitar problemas de instabilidade numérica.

- <u>Métodos Implícitos:</u> nestes métodos a solução depende das variáveis do último instante de tempo conhecido t_n e também das soluções no instante t_{n+1}, o qual não é conhecido. Deste modo os métodos implícitos requerem a solução de um sistema de equações algébricas não lineares a cada passo de tempo. Contudo, a vantagem destes métodos é que podem ser formulados de modo a serem incondicionalmente estáveis, isto é, o tamanho do passo de tempo não é limitado. Porém, somente em problemas lineares os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis.

Como o intuito é avaliar o comportamento transiente de estruturas treliçadas, alguns problemas poderão necessitar que as simulações considerem períodos de tempo relativamente grandes. Neste caso, a fim de evitar a utilização de incrementos de tempo muito pequenos é apresentada somente a formulação do método implícito de integração no tempo. Ressaltando que um método ser incondicionalmente estável não significa que o mesmo terá boa precisão. Em outras palavras, se o método apresentar convergência no tempo t_{n+1}, não se tem garantia que os resultados estejam corretos.

O mais conhecido dos esquemas implícitos de integração no tempo é o Método de Newmark, o qual aproxima as velocidades e acelerações nodais em função dos deslocamentos, dadas por,

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{q}}_{n+1} = \alpha_1(\boldsymbol{q}_{n+1} - \boldsymbol{q}_n) - \alpha_2\dot{\boldsymbol{q}}_n - \alpha_3\ddot{\boldsymbol{q}}_n \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} = \alpha_4(\boldsymbol{q}_{n+1} - \boldsymbol{q}_n) + \alpha_5\dot{\boldsymbol{q}}_n + \alpha_6\ddot{\boldsymbol{q}}_n \end{cases} \tag{2.75}$$

onde as constantes $\{\alpha_i, i = 1, \dots, 6\}$ são,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{1}{\beta_1(\Delta t)^2}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta_1 \Delta t}; \quad \alpha_3 = \frac{1 - 2\beta_1}{2\beta_1} \\ &\alpha_4 = \frac{\beta_2}{\beta_1 \Delta t}; \quad \alpha_5 = 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}; \quad \alpha_6 = \left(1 - \frac{\beta_2}{2\beta_1}\right)\Delta t \end{aligned} \tag{2.76}$$

onde β_1 e β_2 são parâmetros do método de Newmark.

Substituindo a equação (2.75) na equação (2.74) obtém-se um sistema não linear de equações cuja incógnita é o deslocamento $\boldsymbol{q}_{n+1}$. Deste modo, o resíduo é escrito como,

$$\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{n+1}) = \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}_{n+1} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}_{n+1} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{int}}(\boldsymbol{q}_{n+1}) - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{ext}_{n+1}} \tag{2.77}$$

Utilizando o método de Newton-Raphson, (vide seção 2.4.1), para a solução do sistema não linear, chega-se em,

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{q}_{n+1})\Delta\boldsymbol{q}_{n+1} = -\bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{n+1}) \tag{2.78}$$

onde $\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}$ é a matriz de rigidez tangente para o sistema não linear transiente. Caso $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{ext}}$ não forem funções dos deslocamentos, $\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}$ fica definida como,

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{q}_{n+1}) = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{q}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{q}_{n+1}} = \alpha_1 \boldsymbol{M} + \alpha_4 \boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{q}_{n+1}) \tag{2.79}$$

sendo que $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}$ é a mesma matriz de rigidez tangente do problema quasi-estático, apresentada na equação (2.46).

O processo iterativo é análogo ao apresentado na Figura 5, somente substituindo $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}$ por $\bar{\boldsymbol{r}}$ e $\bar{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}$, respectivamente. Assim, soluciona-se o sistema não linear para $\boldsymbol{q}_{n+1}$, o qual é substituído na equação (2.75) para o cálculo das velocidades e acelerações no instante t_{n+1}.

De acordo com Cook *et al.* (2001), a matriz de massa local-global do elemento, consistente com a discretização em

elementos finitos, é obtida segundo a seguinte integral no domínio do corpo,

$$\boldsymbol{M^g} = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \, d\Omega \tag{2.80}$$

onde $\boldsymbol{N}$ é a matriz das funções de interpolação, definida na equação (2.24), e ρ é a densidade do material do elemento. Assim, utilizando funções de interpolação lineares, a matriz massa tridimensional do elemento de barra é dada por,

$$\boldsymbol{M^g} = \frac{\rho A_0 L_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

Como a massa da estrutura não muda com o processo de deformação, a matriz massa consistente global é montada uma única vez, seguindo a seguinte operação de montagem,

$$\boldsymbol{M} = \bigwedge_{i=1}^{nel} (\boldsymbol{M^g})_i \tag{2.82}$$

Caso o amortecimento global seja considerado, o mesmo pode ser obtido de vários modos. O método mais simples é obter uma matriz de amortecimento proporcional, também chamado de amortecimento de Rayleigh, (COOK *et al.*, 2001). Neste método o amortecimento é calculado através da soma de uma proporção da matriz massa e da matriz de rigidez,

$$\boldsymbol{C} = p_1 \boldsymbol{M} + p_2 \boldsymbol{K_T} \tag{2.83}$$

onde p_1 e p_2 são parâmetros estruturais que devem ser ajustados experimentalmente. Porém, em um modelo material viscoelástico-viscoplástico o amortecimento é considerado

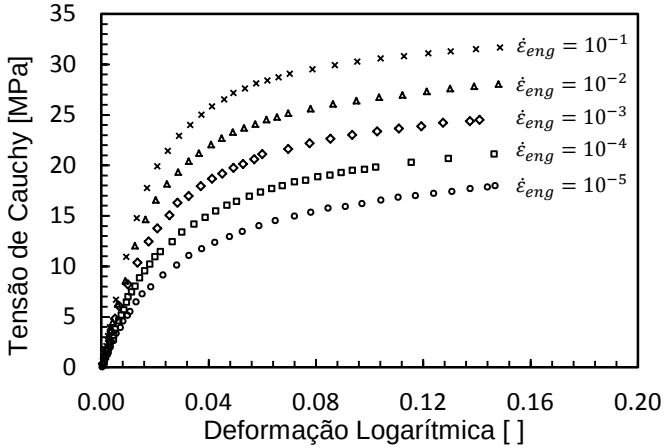
através de amortecedores que estão inseridos na parte viscosa de cada bloco reológico, como será mostrado na Figura 8 do capítulo 3. Deste modo o amortecimento global $\boldsymbol{C}$ não é considerado nas análises realizadas neste trabalho.

O método de Newmark, assim como outros métodos implícitos e explícitos, são por essência desenvolvidos para problemas lineares. Contudo, quando aplicados em problemas mecânicos não lineares tendem a não preservar todas as quantidades físicas relatadas na mecânica do contínuo. Estas quantidades físicas são as equações de momento linear, momento angular e energia mecânica. Por exemplo, se forem escolhidos os parâmetros $\beta_1 = 1/2$ e $\beta_2 = 0$ o método de Newmark é equivalente ao método explícito das diferenças centrais, conservando a equação de momento angular. Porém para obter estabilidade numérica os parâmetros devem ser $\beta_1 = 1/2$ e $\beta_2 = 1/4$. Deste modo não haverá amortecimento de amplitudes, contudo o momento angular não será conservado. Wriggers (2008) e Crisfield (1997) fazem uma discussão mais aprofundada sobre estratégias numéricas de contornar estes problemas.

3 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR MATERIAL

A premissa da formulação não linear material deste trabalho é desenvolver um modelo unidimensional que consiga representar o comportamento experimental de polímeros sujeitos a deformações pequenas a moderadas. O modelo deve ser capaz de representar, satisfatoriamente, ensaios experimentais uniaxiais, como os representados na Figura 6, para o Polietileno de Alta Densidade (PEAD), e na Figura 7 para o Polipropileno catalisado com Metaloceno (mPP).

Figura 6 - Curvas experimentais de ensaios de compressão obtidas em taxas de deformação de engenharia constantes para o PEAD.

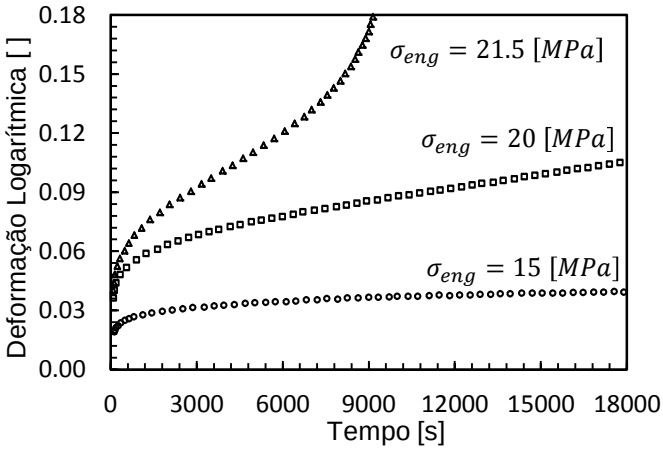


Fonte: produção do próprio autor. Dados obtidos de Zhang e Moore (1997).

Para representar estas curvas experimentais, é proposto um modelo de viscoelasticidade linear juntamente com um modelo de encruamento dependente do tempo (viscoplasticidade) e um modelo de dano acoplado para considerar a degradação material. Além da análise fenomenológica do comportamento material, um dos objetivos

deste capítulo é mostrar o tratamento das equações constitutivas em um enfoque numérico não linear aplicado a um programa de elementos finitos.

Figura 7 - Curvas experimentais de ensaios de fluência obtidas em tensões de engenharia constantes para o mPP.



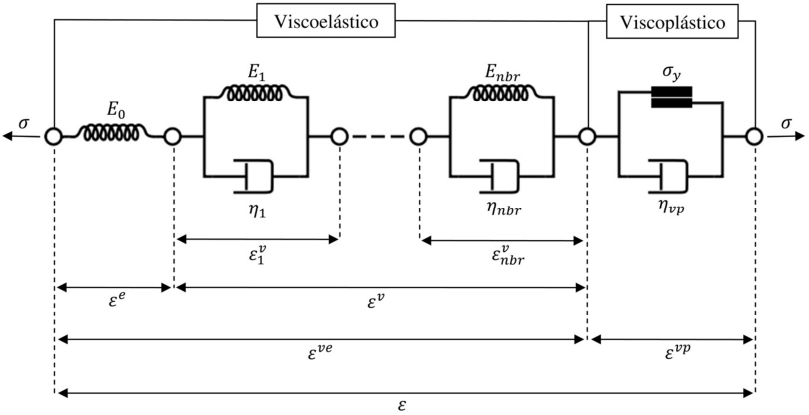
Fonte: produção do próprio autor. Dados obtidos de Drozdov, Christianses e Potarniche (2012).

3.1 MODELO VISCOELÁSTICO-VISCOPLÁSTICO ACOPLADO COM DANO

O modelo teórico proposto é representado esquematicamente na Figura 8. O modelo divide-se basicamente em duas partes, sendo uma viscoelástica e outra viscoplástica.

A parte viscoelástica é representada pelo modelo generalizado de Kelvin-Voigt (SHAW e MACKNIGHT, 2005). Este modelo é composto por uma mola de constante elástica E_0 em série com nbr blocos reológicos de Kelvin. Cada bloco reológico de Kelvin é composto por um arranjo em paralelo entre uma mola de constante elástica E_i e um amortecedor de viscosidade η_i, onde $i = 1, \dots, nbr$.

Figura 8 - Representação do modelo material viscoelástico-viscoplástico.



Fonte: produção do próprio autor.

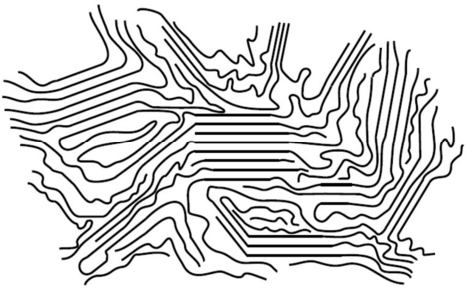
O bloco viscoplástico é formado por um amortecedor de viscosidade η_{vp} em paralelo com um dispositivo friccional, cujo coeficiente de atrito é dado por σ_y, como apresentado por Simo e Hughes (1998). Neste caso σ_y representa a função da tensão de escoamento do material, sendo definida juntamente com a lei de encruamento isotrópico na seção 3.1.3.

O modelo de dano acoplado à relação construtiva descreve a degradação das propriedades mecânicas do material com o aumento da deformação plástica. Deste modo, a evolução do dano está inserida no processo de encruamento do material. Para tal fim, é utilizado neste trabalho o modelo de dano de Lemaitre (LEMAITRE, 1984) para descrever o processo de degradação em materiais poliméricos. Segundo Lemaitre (1996) a formulação original do modelo de dano de Lemaitre é utilizada para descrever a falha dúctil de materiais metálicos, através da nucleação, crescimento e coalescência de vazios. No entanto, Oral e Anlas (2012) utilizaram o modelo de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) (TVERGAARD e NEEDLEMAN, 1984) para identificação dos parâmetros de materiais poliméricos.

Lembrando que o modelo GTN também é um modelo utilizado para a falha dúctil de metais, assim como o modelo de Lemaitre.

Contudo, o processo de degradação mecânica em materiais poliméricos não é análogo aos dos metais. Alvarado-Contreras, Polak e Penlidis (2012) descrevem que para polímeros semicristalinos o processo de degradação é diferente para as fases cristalina e amorfa, Figura 9.

Figura 9 - Representação das estruturas amorfa (linhas curvas) e cristalina (linhas retas).

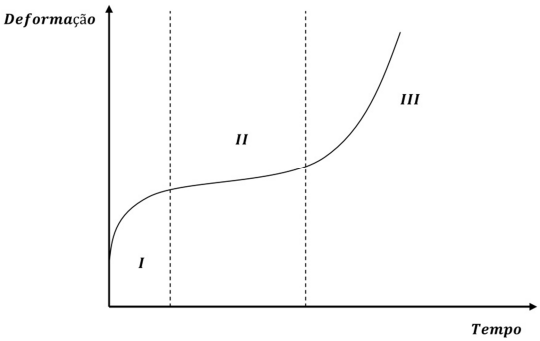


Fonte: Brinson e Brinson (2008).

Para a fase cristalina, o processo de degradação é descrito pela ruptura das ligações intermoleculares que mantem unida a estrutura cristalina. Já o dano na fase amorfa é considerado como um mecanismo que diminui o número de ligações moleculares.

Em ensaios de fluência em fibras de PEAD com grau de cristalinidade acima de 85%, realizados por da Costa Mattos e Chimisso (2011), relatam que o dano ocorre devido a ruptura progressiva das fibras. Deste modo, a evolução do dano é significativa na transição entre as fases secundária e terciaria da curva de fluência,
Figura 10.

Figura 10 - Curva típica de fluência em polímeros mostrando as três fases do processo de deformação.



Fonte: produção do próprio autor.

Assim, consegue-se perceber que a caracterização fenomenológica do processo de degradação mecânica em materiais poliméricos não é uma tarefa fácil.

3.1.1 Lei de Evolução do Modelo Viscoelástico

Na viscoelasticidade linear, para um dado conjunto de parâmetros constitutivos constantes, a resposta material depende somente do tempo (MUÑOZ-ROJAS *et al.*, 2011). Geralmente, em um modelo viscoelástico, as relações constitutivas unidimensionais entre a tensão e a deformação, equação (3.1), e entre a deformação e a tensão, equação (3.2), são apresentadas na forma integral através do princípio da superposição de Boltzmann, o qual é desenvolvido em detalhes por Brinson e Brinson (2008).

$$\sigma(t) = \int_0^t \Psi(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau \tag{3.1}$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau \tag{3.2}$$

Nas equações (3.1) e (3.2), Ψ e J são denominados de função relaxação e função fluência, respectivamente, e τ é a variável de integração com dimensão de tempo. Assim, segundo Silva (2009), tendo como referência o modelo viscoelástico linear de Kelvin-Voigt, o qual é mostrado na Figura 8, a função fluência representada em séries de Prony pode ser escrita como,

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{nbr} \frac{1}{E_i}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) \tag{3.3}$$

Em ensaios de fluência, onde a tensão é teoricamente constante, a equação (3.2) pode ser reescrita como,

$$\varepsilon(t) = \sigma_c\, J(t) \tag{3.4}$$

Para obter a equação (3.4) a representação de um pico de tensão é escrita através da função de Heaviside $H_s(t)$, assim tem-se,

$$\sigma(t) = \sigma_c\, H_s(t - 0) \tag{3.5}$$

sendo que a derivada da equação (3.5) em relação ao tempo é dada por,

$$\dot{\sigma}(t) = \sigma_c\, \delta_{Dirac}(t - 0) \tag{3.6}$$

onde δ_{Dirac} é denominado de Delta de Dirac. Substituindo a equação (3.6) na equação (3.2) e calculando a integral, obtém-se a equação (3.4).

Deste modo, a equação (3.4) pode ser utilizada para obter os parâmetros materiais presentes na equação (3.3) realizando um ajuste entre as curvas experimentais de fluência e do modelo teórico. Um meio de realizar este ajuste é através da utilização de algum método de otimização. Mais detalhes sobre a obtenção dos parâmetros materiais são apresentados no apêndice H.

A viscoelasticidade linear, além de sua forma integral, como demonstrado até o momento, pode ser apresentada através de equações diferenciais que representam uma lei de evolução do comportamento viscoso do modelo. Apesar da solução destas equações diferenciais serem mais tediosas se comparadas a sua forma integral, o modelo matemático torna-se mais elegante e propício para sua posterior discretização e utilização em um programa de elementos finitos.

Visualizando somente a parte viscoelástica da Figura 8 as tensões em cada mola e amortecedor dos blocos reológicos de Kelvin são obtidas por,

$$\begin{cases} \sigma_M = E_i \varepsilon_i^v \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr \quad \rightarrow \quad Tensão\ nas\ Molas \\ \sigma_A = \eta_i \dot{\varepsilon}_i^v \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr \quad \rightarrow \quad Tensão\ nos\ Amortece \end{cases} \tag{3.7}$$

sendo que neste caso os índices repetidos não representam somatório. Assim, a tensão em cada bloco reológico é dada por,

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_A = E_i \varepsilon_i^v + \eta_i \dot{\varepsilon}_i^v \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr \tag{3.8}$$

Tendo em mente a decomposição aditiva da deformação apresentada na seção 2.1, a tensão na mola E_0 é apresentada como,

$$\sigma = E_0 (\varepsilon^{ve} - \varepsilon^v) \tag{3.9}$$

onde ε^{ve} é a deformação total viscoelástica, a qual é conhecida a priori. Caso não haja deformação plástica, $\varepsilon^{ve} = \varepsilon$.

A deformação viscosa total é obtida pela soma de todas as deformações viscosas de cada bloco, como pode ser visto na Figura 8, e pode ser escrita como,

$$\varepsilon^v = \sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_j^v \tag{3.10}$$

Se aplicada uma tensão no modelo generalizado de Kelvin-Voigt, esta age igualmente tem todos os blocos reológicos

e na mola E_0. Deste modo, substituindo a equação (3.10) na equação (3.9) e igualando o resultado com a equação (3.8) chega-se em,

$$\sigma = E_0\left(\varepsilon^{ve} - \sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_j^v\right) = E_i\varepsilon_i^v + \eta_i\dot{\varepsilon}_i^v \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr \qquad (3.11)$$

Definindo as variáveis, $\tau_i = \eta_i/E_i$ e $\omega_i = E_0/E_i$, a equação (3.11) pode ser reescrita como,

$$\dot{\varepsilon}_i^v + \frac{1}{\tau_i}\varepsilon_i^v + \frac{\omega_i}{\tau_i}\left(\sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_j^v\right) = \frac{\omega_i}{\tau_i}\varepsilon^{ve} \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr \qquad (3.12)$$

onde τ_i é denominado de tempo de relaxação e ω_i de fator de rigidez. Deste modo, a equação (3.12) representa a lei de evolução para cada deformação viscosa do modelo viscoelástico generalizado de Kelvin-Voigt.

3.1.2 Lei de Evolução do Modelo Viscoplástico

Voltando para a Figura 8, analisa-se somente o bloco reológico que representa a parte viscoplástica. Se uma tensão aplicada a este bloco for superior à tensão de escoamento σ_y, tanto em tração como em compressão, o dispositivo friccional começará a “escorregar” e uma tensão será gerada no amortecedor. Holmes (2007), Andrade e Muñoz-Rojas (2005) e Simo e Hughes (1998) definem a tensão no amortecedor de tensão extra, a qual é representada matematicamente como,

$$\sigma_{ex} = \begin{cases} \sigma - \sigma_y & se \quad \sigma > \sigma_y \\ \sigma + \sigma_y & se \quad \sigma < \sigma_y \\ 0 & se \quad \sigma \in \left(-\sigma_y, \sigma_y\right) \end{cases} \qquad (3.13)$$

ou também pode ser reescrita através da função sinal $sign(\cdot)$, por,

$$\sigma_{ex} = \left(|\sigma| - \sigma_y\right) sign(\sigma) \tag{3.14}$$

A tensão no amortecedor também é obtida através de,

$$\sigma_{ex} = \eta_{vp} \dot{\varepsilon}^{vp} \tag{3.15}$$

Deste modo, igualando as equações (3.14) e (3.15) e resolvendo para $\dot{\varepsilon}^{vp}$ obtém-se,

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{1}{\eta_{vp}} \left(|\sigma| - \sigma_y\right) sign(\sigma) \tag{3.16}$$

Definindo a função de escoamento unidimensional por,

$$\Phi = |\sigma| - \sigma_y \geq 0 \tag{3.17}$$

sua derivada em relação a tensão é,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = sign(\sigma) \tag{3.18}$$

Assim, substituindo as equações (3.17) e (3.18) na equação (3.16) chega-se em,

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle \Phi \rangle}{\eta_{vp}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{\langle \Phi \rangle}{\eta_{vp}} sign(\sigma) \tag{3.19}$$

Devido ao fato de Φ ser não negativo, apresenta-se a notação de função rampa $\langle \Phi \rangle$, a qual é definida por,

$$\langle \Phi \rangle = \frac{(\Phi + |\Phi|)}{2} = \begin{cases} \Phi & \text{se} \quad \Phi > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \Phi \leq 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Deste modo, a equação de evolução da deformação viscoplástica obtida na equação (3.19) é conhecida como equação constitutiva de Perzyna.

Seguindo o desenvolvimento de Simo e Hughes (1998), define-se a lei de evolução do multiplicador plástico como,

$$\dot{\gamma} = \frac{\langle \Phi \rangle}{\eta_{vp}} \tag{3.21}$$

Finalmente, substituindo a equação (3.21) na equação (3.19), a lei de evolução do modelo de Perzyna pode ser apresentada como,

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\gamma}\, sign(\sigma) \tag{3.22}$$

3.1.3 Lei de Encruamento Isotrópico

Segundo Pires (2001), considerando apenas o encruamento isotrópico, pode-se estabelecer a variação da função da tensão de escoamento uniaxial σ_y em relação à deformação plástica de duas maneiras: através do trabalho plástico total w^p (*work hardening*) e pela deformação plástica acumulada $\bar{\varepsilon}^p$ (*strain hardening*). No primeiro caso, considerando um ensaio uniaxial monotônico, o trabalho plástico total, representado pela área sombreada da Figura 11, corresponde à energia dissipada pelos mecanismos plásticos.

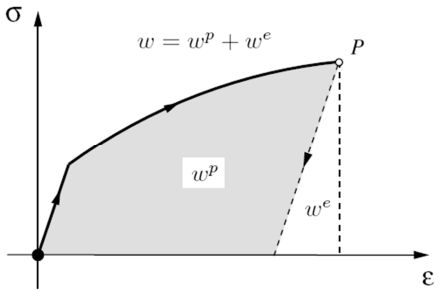
Deste modo, sua lei de evolução unidimensional é expressa por,

$$\dot{w}^p = \sigma \dot{\varepsilon}^p \tag{3.23}$$

sendo que a função da tensão de escoamento fica definida como,

$$\sigma_y = \sigma_y(w^p) \tag{3.24}$$

Figura 11 - Trabalho elástico e plástico.



Fonte: Souza Neto, Peric e Owen (2008).

Segundo Souza Neto, Peric e Owen (2008), outra escolha adequada para representar a variável interna de encruamento α (vide seção 3.2) é uma medida escalar de deformação. Assim, escolhendo a deformação plástica acumulada $\bar{\varepsilon}^p$ como medida escalar de deformação, sua equação de evolução para o caso unidimensional é apresentada como,

$$\dot{\alpha} = \dot{\bar{\varepsilon}}^p = |\dot{\varepsilon}^p| \tag{3.25}$$

sendo que esta lei considera que o encruamento é linear em relação à quantidade de escoamento plástico e independente do sinal de $\dot{\varepsilon}^p$ (SIMO e HUGHES, 1998). Assim, a função da tensão de escoamento fica definida como,

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) \tag{3.26}$$

Neste trabalho considera-se apenas a formulação baseada na deformação viscoplástica acumulada (*strain hardening*). Como o modelo material é viscoplástico, as equações (3.25) e (3.26) ficam definidas como,

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} = |\dot{\varepsilon}^{vp}| \tag{3.27}$$

sendo que,

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{vp}) \tag{3.28}$$

A função da tensão de escoamento deve representar satisfatoriamente o comportamento do material durante o processo de plastificação. Miled (2011) utiliza uma lei de potência para representar o encruamento em polímeros. Porém, neste trabalho é utilizada uma equação exponencial com saturação juntamente com uma contribuição linear, dada por,

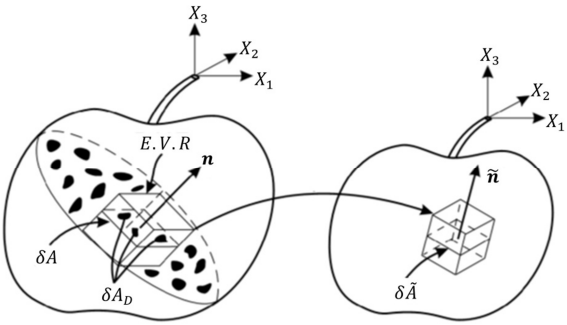
$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^{vp}) = \sigma_{y_0} + \left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right)\left[1 - e^{-(\bar{\varepsilon}^{vp}/\varepsilon_c)}\right] + K\bar{\varepsilon}^{vp} \tag{3.29}$$

onde σ_{y_0}, σ_∞ , ε_c e K são parâmetros materiais. σ_{y_0} é a tensão inicial de escoamento, σ_∞ é a tensão de saturação, ε_c é a deformação plástica acumulada que modela a curvatura da curva exponencial e K é o módulo referente a contribuição linear. A equação (3.29), sem a contribuição linear, foi proposta por Voce (1955) e também é descrita em Simo e Hughes (1998). No trabalho de Ponthot e Kleinermann (2006) esta mesma equação é utilizada para modelar o encruamento em processos de conformação de metais.

3.1.4 Lei de Evolução do Modelo de Dano

Modelos fenomenológicos são desenvolvidos, essencialmente, considerando que a degradação afeta o comportamento macroscópico material. Geralmente estes modelos são referenciados na bibliografia como modelos estudados pela Mecânica do Dano Contínuo, ((KRAJCINOVIC, 1996), (LEMAITRE, 1996)). Lange (2011) descreve a Mecânica do Dano Contínuo como sendo a teoria que proporciona um melhor entendimento dos problemas de ruptura em estruturas através da introdução de uma variável que represente a degradação mecânica dos materiais que ocorre antes da formação da macrotrinca. Para tal, essa variável deve ser local, ou seja, definida na mesma escala do Elemento de Volume Representativo (EVR), isto é, a macroescala. O EVR é ilustrado na Figura 12.

Figura 12 - Elemento de Volume Representativo (EVR) em um corpo danificado.



Fonte: modificado de Lemaitre e Desmorat (2005).

Desde os primeiros trabalhos realizados nesta área por Kachanov (1958), muitas formulações diferentes foram desenvolvidas até os dias de hoje. A primeira interpretação física da variável de dano foi realizada por Rabotnov (1963) que propôs uma redução da área da seção transversal de uma barra devido à microtrincas. Sendo assim, a variável de dano é expressa como,

$$D_{\boldsymbol{n}} = \frac{\delta A - \delta\tilde{A}}{\delta A} \tag{3.30}$$

onde δA é a área total de intersecção de um certo plano com o EVR e $\delta\tilde{A}$ é a área efetiva de resistência mecânica e $0 \leq D_{\boldsymbol{n}} \leq 1$. Considerando o material isotrópico, e sendo as microtrincas igualmente distribuídas em todas as direções, a variável de dano fica independente da direção $\boldsymbol{n}$ e pode ser considerada somente como uma variável escalar D. A variável de dano também pode ser tensorial (segunda ou quarta ordem), assim pode descrever a propriedade material de compósitos ou caminhos de carregamento. Besson (2010) apresenta algumas formulações que utilizam a variável de dano como sendo isotrópica e anisotrópica. Freitas (2010) apresenta uma formulação de

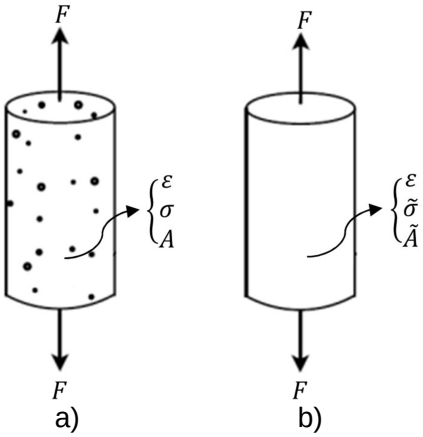
evolução do dano ortotrópico (tensorial de segunda ordem) aplicado a metais.

Um conceito também apresentado por Rabotnov (1968) foi o de tensão efetiva, a qual é a tensão que efetivamente está agindo sobre a área resistente do material. Para o caso unidimensional é dada por,

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \tag{3.31}$$

Para evitar as dificuldades de calcular a área de resistência efetiva $\delta\tilde{A}$, Lemaitre (1984) propõe a hipótese de equivalência de deformações, a qual nos diz que a deformação associada a um estado danificado em uma dada tensão é equivalente à deformação associada ao estado virgem sob ação da tensão efetiva, conforme Figura 13.

Figura 13 - Equivalência de deformações. a) Danificado. b) Equivalente.



Fonte: modificado de Freitas (2010).

Lemaitre afirma que este princípio resulta na seguinte conclusão: “Qualquer equação constitutiva de deformação para um material danificado pode ser derivada do mesmo modo que

para um material virgem, exceto que a tensão usual deve ser substituída pela tensão efetiva (LEMAITRE, 1996)".

A lei de evolução do dano de Lemaitre mostrada por Souza Neto, Peric e Owen (2008) e particularizada para o caso unidimensional por Esmaeili e Öchsner (2011), é apresentada como,

$$\dot{D} = \frac{\dot{\gamma}}{1-D}\left(\frac{-Y}{r}\right)^{S} \tag{3.32}$$

sendo que $\dot{\gamma}$ é o multiplicador plástico e r e S são parâmetros materiais de evolução do dano. A variável $(-Y)$ é denominada de taxa de liberação de densidade de energia de deformação por dano, e definida como,

$$(-Y) = \frac{1}{2}\frac{dw_e}{dD}\bigg|_{\sigma=const} = \frac{\sigma^2}{2E_0(1-D)^2} \tag{3.33}$$

onde w_e corresponde a densidade de energia de deformação elástica.

Neste trabalho considera-se que a evolução do dano está diretamente ligada ao processo de plastificação. Contudo, o mecanismo de dano pode ser significativo somente após certa quantidade de deformação plástica acumulada. Deste modo, a evolução do dano é representada por,

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & se \quad \bar{\varepsilon}^{vp} < \bar{\varepsilon}_D^{vp} \\ \dfrac{\dot{\gamma}}{1-D}\left(\dfrac{-Y}{r}\right)^{S} & se \quad \bar{\varepsilon}^{vp} \geq \bar{\varepsilon}_D^{vp} \end{cases} \tag{3.34}$$

sendo que $\bar{\varepsilon}_D^{vp}$ representa o limiar de dano, o qual é um parâmetro material a ser identificado.

3.1.5 Equações Constitutivas Contínuas com Dano Acoplado

Nos itens abaixo é apresentado um resumo das equações constitutivas contínuas e leis de evolução do modelo material. O acoplamento do dano é realizado segundo os conceitos de tensão efetiva e equivalência de deformações.

I. Relação Tensão-Deformação Elástica:

$$\sigma = (1-D)E_0\varepsilon^e = (1-D)E_0(\varepsilon - \varepsilon^v - \varepsilon^{vp}) \tag{3.35}$$

II. Lei de Evolução Viscoelástica (Modelo Generalizado de Kelvin-Voigt):

$$\dot{\varepsilon}_i^v + \frac{1}{\tau_i}\varepsilon_i^v + \frac{\omega_i}{\tau_i}\varepsilon^v = \frac{\omega_i}{\tau_i}\varepsilon^{ve} \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr \tag{3.36}$$

$$\varepsilon^v = \sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_j^v \tag{3.37}$$

III. Função de Escoamento:

$$\Phi = \frac{|\sigma|}{(1-D)} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{vp}) \geq 0 \tag{3.38}$$

$$\begin{gathered} \sigma_y(\bar{\varepsilon}^{vp}) = \sigma_{y_0} + H(\bar{\varepsilon}^{vp}) \\ H(\bar{\varepsilon}^{vp}) = \left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right)\left[1 - e^{-(\bar{\varepsilon}^{vp}/\varepsilon_c)}\right] + K\bar{\varepsilon}^{vp} \end{gathered} \tag{3.39}$$

IV. Lei de Evolução Viscoplástica (Modelo de Perzyna):

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = \dot{\gamma}\,\frac{sign(\sigma)}{(1-D)} \tag{3.40}$$

V. Multiplicador Plástico:

$$\dot{\gamma} = \frac{\langle \Phi \rangle}{\eta_{vp}} \tag{3.41}$$

VI. <u>Lei de Encruamento Isotrópico (*Strain Hardening*):</u>

$$\dot{\alpha} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} = |\dot{\varepsilon}^{vp}| = \frac{\dot{\gamma}}{(1-D)} \tag{3.42}$$

VII. <u>Lei de Evolução do Dano (Modelo de Lemaitre):</u>

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & se \quad \bar{\varepsilon}^{vp} < \bar{\varepsilon}_D^{vp} \\ \dfrac{\dot{\gamma}}{1-D}\left(\dfrac{-Y}{r}\right)^s & se \quad \bar{\varepsilon}^{vp} \geq \bar{\varepsilon}_D^{vp} \end{cases} \tag{3.43}$$

onde,

$$(-Y) = \frac{\sigma^2}{2E_0(1-D)^2}$$

3.2 CONSIDERAÇÕES TERMODINÂMICAS

Segundo Bonet e Wood (1997) uma formulação hiperelástica consiste em um caso especial quando o trabalho realizado pelas tensões durante o processo de deformação depende somente do estado de tempo inicial e da configuração final. Assim, o comportamento material é independente do caminho de deformação (*path-independent*), sendo denominado de material hiperelástico. Deste modo, as tensões são derivadas de uma função de energia elástica acumulada, a qual é denominada de potencial de energia livre.

Sabe-se que o processo de deformação plástico e viscoso é dissipativo. Deste modo, para uma formulação termodinamicamente consistente, necessita-se de um potencial de dissipação no qual se possam derivar as relações constitutivas que governarão o processo cinético. Além do potencial de dissipação, necessita-se de uma função de escoamento que represente satisfatoriamente o modelo material a ser representado.

Assim, uma formulação hiperelástica necessita dos seguintes requisitos:

I. Um potencial de energia livre;

II. Um potencial de dissipação;

III. Uma função de escoamento.

sendo que todos os itens citados acima devem representar o comportamento experimental do material.

As formulações termodinâmicas desenvolvidas nesta seção são baseadas nos trabalhos de Vaz Jr., Muñoz-Rojas e Lange (2011), Lange (2011), Souza Neto, Peric e Owen (2008), Pires (2005) e Bellenger e Bussy (2001) através de princípios básicos, como equações de equilíbrio, primeira e segunda leis da termodinâmica e a definição dos potenciais de energia livre e de dissipação.

A equação da conservação da quantidade de movimento em sua forma local espacial pode ser apresentada como,

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{t}\, d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{f}\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{\boldsymbol{u}}\, d\Omega \tag{3.44}$$

onde $\boldsymbol{f}$ é força de corpo agindo no domínio Ω, $\boldsymbol{t}$ é a tração agindo nos contornos do corpo Γ, $\ddot{\boldsymbol{u}}$ é a aceleração do corpo e ρ é a densidade do material na configuração espacial $\boldsymbol{x}$. Da equação (3.44) para $\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$, resulta a equação espacial local de equilíbrio,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} & em\ \Omega \\ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma n} & em\ \Gamma \end{cases} \tag{3.45}$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário normal à superfície deformada Γ.

A equação da conservação do momento da quantidade de movimento em sua forma local espacial pode ser escrita como,

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}\, d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}\, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \rho \ddot{\boldsymbol{u}}\, d\Omega \tag{3.46}$$

da qual chega-se na seguinte expressão,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{0} \tag{3.47}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ é denominado de tensor alternante, o qual é um tensor de terceira ordem. Assim, da equação (3.47) resulta a simetria do tensor tensão de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$.

A primeira lei da termodinâmica está relacionada à conservação da energia, e a segunda lei representa a irreversibilidade da geração de entropia. Deste modo, a primeira e a segunda lei para um sólido pode ser representada em sua forma local por,

$$\begin{cases} \rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho \dot{g} - \boldsymbol{\nabla_x} \cdot \boldsymbol{\phi_c} & \rightarrow \ 1^{\text{a}} \text{ Lei da Temodinâmica} \\ \rho \dot{s} - \dfrac{1}{\theta} \rho \dot{g} + \boldsymbol{\nabla_x} \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{\phi_c}}{\theta} \right) \geq 0 & \rightarrow \ 2^{\text{a}} \text{ Lei da Temodinâmica} \end{cases} \tag{3.48}$$

sendo estas válidas para cada ponto do domínio de Ω. Na equação (3.48) $\dot{e}$ é a taxa da energia interna por unidade de volume, $\dot{g}$ é uma fonte de geração de energia, $\boldsymbol{\phi_c}$ é o fluxo de calor por condução, s é a entropia por unidade de massa e θ é a temperatura.

Isolando $\rho \dot{g}$ na equação da primeira lei e substituindo na equação da segunda lei, chega-se em,

$$\rho \dot{s} + \boldsymbol{\nabla_x} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\phi_c}}{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\nabla_x} \cdot \boldsymbol{\phi_c}) \geq 0 \tag{3.49}$$

Define-se a energia livre de Helmholtz por unidade de massa como,

$$\psi = e - \theta s \tag{3.50}$$

sendo sua taxa obtida por,

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{\theta}s - \theta\dot{s} \tag{3.51}$$

Sabe-se que,

$$\boldsymbol{\nabla_x} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\phi_c}}{\theta}\right) = \left(\frac{1}{\theta}\right)\boldsymbol{\nabla_x} \cdot \boldsymbol{\phi_c} + \boldsymbol{\phi_c} \cdot \boldsymbol{\nabla_x}\left(\frac{1}{\theta}\right) \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{\nabla_x} \cdot \left(\frac{1}{\theta}\right) = -\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\boldsymbol{\nabla_x}\theta \tag{3.53}$$

Isolando $\dot{e}$ na equação (3.51) e substituindo na equação (3.49) juntamente com as definições das equações (3.52) e (3.53), e após algumas manipulações matemáticas, chega-se a seguinte inequação,

$$-\rho\left(\dot{\psi} + s\dot{\theta}\right) + \boldsymbol{\sigma}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{\theta}\boldsymbol{\phi_c} \cdot \boldsymbol{\nabla_x}\theta \geq 0 \tag{3.54}$$

a qual é denominada de desigualdade de Clausius-Duhem.

Neste ponto torna-se conveniente tratar o problema segundo o enfoque da termodinâmica com variáveis internas. Segundo Souza Neto, Peric e Owen (2008), o ponto inicial para a termodinâmica com variáveis internas é a hipótese que, para cada instante de um processo termodinâmico, o estado termodinâmico (definido por $\boldsymbol{\sigma}$, ψ, s e $\boldsymbol{\phi_c}$) para um dado ponto é totalmente determinado pelo conhecimento de um número finito de variáveis de estado. Deste modo, o estado termodinâmico depende somente dos valores instantâneos das variáveis de estado. Sendo assim, define-se um conjunto de variáveis de estado como,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}, \theta, \boldsymbol{\nabla_x}\theta, \boldsymbol{a}\} \tag{3.55}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$, θ e $\boldsymbol{\nabla_x}\theta$ são variáveis instantâneas e $\boldsymbol{a}$ é um conjunto de variáveis internas definidas como,

$$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_{nvi}\} \tag{3.56}$$

Estas variáveis internas estão associadas com mecanismos dissipativos e podem ser de natureza escalar, vetorial ou tensorial.

Como comentado anteriormente, as relações constitutivas, assim como as leis de estado, são obtidas através de potenciais de energia. Na termodinâmica dos processos irreversíveis, identificam-se os potenciais de estado e de dissipação.

Escrevendo a desigualdade de Clausius-Duhem para o caso unidimensional e isotérmico ($\dot{\theta} = 0$ e $\boldsymbol{\nabla_x}\theta = 0$), chega-se em,

$$\sigma\dot{\varepsilon} - \rho\dot{\psi} \geq 0 \tag{3.57}$$

Assume-se a energia livre de Helmholtz como potencial de estado. Este potencial deve ser uma função convexa de todas as variáveis de estado, dado por,

$$\psi = \psi(\varepsilon^e, \boldsymbol{a}) \tag{3.58}$$

Obtendo a taxa da energia livre de Helmholtz, pela regra da cadeia chega-se em,

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^e}\dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial\psi}{\partial a_k}\dot{a}_k\,, \qquad k = 1, \dots, nvi \tag{3.59}$$

Substituindo a equação (3.59) na equação (3.57) e considerando a decomposição aditiva do tensor deformação em uma parcela elástica e outra inelástica, $\dot{\varepsilon}^e = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^i$, chega-se em,

$$\left(\sigma - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^e}\right)\dot{\varepsilon} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^e}\dot{\varepsilon}^i - A_k\dot{a}_k \geq 0, \qquad k = 1, \dots, nvi \tag{3.60}$$

onde A_k é uma força termodinâmica conjugada a cada variável interna, definida como,

$$A_k \equiv \rho \frac{\partial \psi}{\partial a_k}\ , \qquad k = 1, \dots, nvi \tag{3.61}$$

O princípio do determinismo termodinâmico exige que as equações constitutivas sejam tais que a desigualdade da equação (3.60) deve respeitar todo e qualquer processo termodinâmico. Assim, esta deve ser válida para qualquer taxa de deformação total, resultando na seguinte relação constitutiva,

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \tag{3.62}$$

Neste ponto considera-se que os processos dissipativos relacionados à plasticidade estão associados ao encruamento isotrópico e ao dano. Deste modo, as forças termodinâmicas associadas a estes processos são dadas respectivamente por,

$$H = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \tag{3.63}$$

$$(-Y) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \tag{3.64}$$

onde H é chamado de módulo de encruamento isotrópico sendo α sua variável interna associada. $(-Y)$ é denominado de taxa de liberação de densidade de energia de deformação por dano, a qual representa a energia liberada por perda de rigidez do material devido à degradação mecânica. D é a variável de dano associada a $(-Y)$.

Da inequação (3.60) resulta a seguinte inequação,

$$\mathcal{D}_{int} = \sigma \dot{\varepsilon}^i - H\dot{\alpha} - (-Y)\dot{D} \geq 0 \tag{3.65}$$

a qual é denominada de dissipação intrínseca. Para satisfazer a equação (3.65) assume-se que existe um potencial de dissipação $\varphi = \varphi(\sigma, H, Y\ ;\ \varepsilon^e, \alpha, D)$ em que as variáveis de estado ε^e, α e D aparecem como parâmetros. Este potencial deve ser convexo em

relação a σ, H e Y, positivo e ter valor zero na origem $\{\sigma, H, Y\} = \{0,0,0\}$.

Assim, através do princípio da normalidade generalizada (LUBLINER, 2006), as leis de evolução das variáveis dissipativas são obtidas por,

$$\dot{\varepsilon}^i = -\dot{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial(-\sigma)} \tag{3.66}$$

$$\dot{\alpha} = -\dot{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial H} \tag{3.67}$$

$$\dot{D} = -\dot{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial(-Y)} \tag{3.68}$$

Para o modelo unidimensional, o potencial de estado é apresentado como,

$$\psi = \psi^{ed}(\varepsilon^e, D) + \psi^H(\alpha) = \frac{(1-D)E_0(\varepsilon^e)^2}{2\rho} + \psi^H(\alpha) \tag{3.69}$$

onde ψ^{ed} é a contribuição elástica afetada pelo dano é ψ^H é a parte referente ao encruamento isotrópico. Já o potencial de dissipação é expresso por,

$$\varphi = \varphi^i + \varphi^d \tag{3.70}$$

onde,

$$\begin{cases} \varphi^i = \dfrac{1}{\dot{\gamma}}\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{nbr}\left(\frac{\sigma^2}{2\eta_j} - \frac{\varepsilon_j^v}{\tau_i}\sigma\right)\right] + \left[\dfrac{|\sigma|}{(1-D)} - \sigma_{y_0} - \dfrac{H(\alpha)}{(1-D)}\right] \\ \varphi^d = \dfrac{r}{(1-D)(s+1)}\left(\dfrac{-Y}{r}\right)^{(s+1)} \end{cases}$$

sendo que φ^i é referente aos processos inelásticos de deformação é φ^d é a componente referente ao dano. Nota-se

nesta formulação que a teoria referente à plasticidade é não associativa. Isto significa que na equação (3.70), o potencial de dissipação proposto é diferente da função de escoamento, $\varphi \neq \Phi$.

3.3 ANÁLISE NUMÉRICA DO MODELO CONSTITUTIVO

Na seção 3.1.5 foram apresentas as equações na forma contínua que regem o modelo constitutivo unidimensional viscoelástico-viscoplástico acoplado com dano. Porém, no quadro de um programa de elementos finitos, onde as equações são tratadas de forma discreta, torna-se necessário a aplicação de algum método de integração numérico para a discretização das leis de evolução do modelo material.

Tendo o modelo material discretizado, seu conjunto de equações constitui uma rotina independente no programa de elementos finitos, a qual calcula a resposta cinética resultante da análise cinemática previamente realizada.

A localização da superfície de escoamento para um dado estado de deformações constitui um problema puramente local, dado pelas seguintes considerações:

I. Seja $\boldsymbol{x}$ um ponto de interesse, pertencente ao corpo, que obedece ao modelo constitutivo material;

II. Assume-se que o estado local do corpo no ponto $\boldsymbol{x}$, em certo tempo t_n, é completamente definido. Isto significa que os valores de

$$\left\{\varepsilon_n(\boldsymbol{x}), \varepsilon_n^v(\boldsymbol{x}), \varepsilon_n^{vp}(\boldsymbol{x}), \bar{\varepsilon}^p{}_n(\boldsymbol{x}), D_n(\boldsymbol{x})\right\} \tag{3.71}$$

e

$$\sigma_n(\boldsymbol{x}) \tag{3.72}$$

são conhecidos.

Supõe-se que é dado um incremento de deformação total $\Delta\varepsilon(\boldsymbol{x})$, que leva o estado ao tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. O objetivo é atualizar as variáveis da equação (3.71) para se obter um novo estado de tensões na equação (3.72) de maneira que as equações constitutivas do modelo sejam satisfeitas. Deste modo, a integração incremental sobre um passo de tempo $[t_n, t_n + \Delta t]$ é regida pela cinética do corpo, sendo a deformação total a variável básica independente. Neste trabalho, o processo de atualização das variáveis locais é obtido através de uma metodologia de predição elástica e posterior correção plástica, a qual é comentada com mais detalhes na próxima seção. Este processo de solução, através da correção de uma predição elástica, é conhecido como algoritmo de retorno. Ilustra-se na Figura 14 a solução de um problema clássico de plasticidade computacional, mostrando o papel do algoritmo de retorno, o qual será formulado adiante.

Figura 14 - Rotina de integração local do modelo material (algoritmo de retorno).

Fonte: produção do próprio autor.

3.3.1 Algoritmo de Integração

Para a formulação do algoritmo de retorno, deve-se primeiro revisar, sucintamente, a família de esquemas de integração numérica de equações diferenciais ordinárias, denominada de regra do ponto médio generalizada (SIMO e HUGHES, 1998).

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, considera-se o seguinte problema unidimensional,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\big(x(t)\big) \\ x(0) &= x_n \end{aligned}\right\} \quad em\ [0,T] \tag{3.73}$$

O algoritmo de integração da regra do ponto médio generalizado para um único parâmetro é definido como,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t\, f(x_{n+\vartheta}) \\ x_{n+\vartheta} = \vartheta x_{n+1} + (1-\vartheta) x_n\ ; \qquad \vartheta \in [0,1] \end{cases} \tag{3.74}$$

onde $x_{n+1} \cong x(\,t_{n+1})$ no tempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Esta família de algoritmos possui alguns esquemas de integração bem conhecido, em particular,

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0 \quad \Rightarrow \ Euler\ \text{à}\ frente\ (explícito) \\ \vartheta &= 1/2 \ \Rightarrow \ Regra\ do\ ponto\ médio \\ \vartheta &= 1 \quad \Rightarrow \ Euler\ \text{à}\ trás\ (implícito) \end{aligned} \tag{3.75}$$

Sendo assim, as equações contínuas do modelo constitutivo podem ser discretizadas através da aplicação de algum dos esquemas de integração apresentados na equação (3.75).

Para a integração das equações de governo do modelo material apresentado neste trabalho é adotado o algoritmo implícito completo, também conhecido com Euler à trás (*backward Euler)*. A utilização deste algoritmo possui as seguintes vantagens:

I. É incondicionalmente estável em problemas lineares. Isto significa que em conjunção com uma precisão de primeira ordem garante que o algoritmo seja convergente;

II. Geralmente tem uma boa precisão para passos finitos;

III. Pode-se obter um operador tangente consistente, o qual em conjunção com o procedimento Newton-Raphson Completo, geralmente consegue-se convergência quadrática perto do ótimo, para problemas bem comportados;

IV. Sua implementação computacional é relativamente simples.

Assim, realizando a integração implícita das equações (3.35) a (3.43) obtêm-se as equações discretizadas do modelo constitutivo, as quais são apresentadas abaixo.

I. <u>Relação Tensão-Deformação Elástica:</u>

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta t\left[(1 - D_{n+1})E_0\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{v} - \varepsilon_{n+1}^{vp}\right)\right]$$

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \Delta t \sigma_{n+1} = \Delta t\left[(1 - D_{n+1})E_0\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{v} - \varepsilon_{n+1}^{vp}\right)\right]$$

$$\sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1})E_0\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{v} - \varepsilon_{n+1}^{vp}\right)$$

II. <u>Lei de Evolução Viscoelástica (Modelo Generalizado de Kelvin-Voigt):</u>

O processo de integração implícito do modelo unidimensional generalizado de Kelvin-Voigt é adaptado da formulação tridimensional apresentada no trabalho de Nedjar e Le Roy (2012). Johnson (1999) e Zienkiewicz, Watson e King (1968) apresentam uma formulação alternativa para o modelo de Kelvin com aplicação em elementos finitos.

$$\varepsilon_{i\ n+1}^{v} = \varepsilon_{i\ n}^{v} + \Delta t\left[-\frac{1}{\tau_i}\varepsilon_{i\ n+1}^{v} - \frac{\omega_i}{\tau_i}\varepsilon_{n+1}^{v} + \frac{\omega_i}{\tau_i}\varepsilon_{n+1}^{ve}\right] \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr$$

$$\varepsilon_{i\ n+1}^{v} + \frac{\Delta t}{\tau_i}\varepsilon_{i\ n+1}^{v} + \frac{\Delta t\ \omega_i}{\tau_i}\varepsilon_{n+1}^{v} = \varepsilon_{i\ n}^{v} + \frac{\Delta t\ \omega_i}{\tau_i}\varepsilon_{n+1}^{ve} \quad ; \quad i = 1, \dots, nbr$$

sendo,

$$\varepsilon_{n+1}^{v} = \sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_{j\ n+1}^{v}$$

Deste modo,

$$[\tau_i + \Delta t(1+\omega_i)]\varepsilon_{i\ n+1}^{v} + \Delta t\ \omega_i \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{nbr} \varepsilon_{j\ n+1}^{v} \right) = \tau_i\ \varepsilon_{i\ n}^{v} + \Delta t\ \omega_i\ \varepsilon_{n+1}^{ve} \tag{3.76}$$

para $i = 1, \dots, nbr$.

A equação (3.76) representa um sistema linear dado por,

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{v} = \boldsymbol{b}$$

onde,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{v} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1\ n+1}^{v} \\ \varepsilon_{2\ n+1}^{v} \\ \vdots \\ \varepsilon_{(nbr-1)\ n+1}^{v} \\ \varepsilon_{nbr\ n+1}^{v} \end{bmatrix} \ ; \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \tau_1\ \varepsilon_{1\ n}^{v} + \Delta t\ \omega_1\ \varepsilon_{n+1}^{ve} \\ \tau_2\ \varepsilon_{2\ n}^{v} + \Delta t\ \omega_2\ \varepsilon_{n+1}^{ve} \\ \vdots \\ \tau_{(nbr-1)}\ \varepsilon_{(nbr-1)\ n}^{v} + \Delta t\ \omega_{(nbr-1)}\ \varepsilon_{n+1}^{ve} \\ \tau_{nbr}\ \varepsilon_{nbr\ n}^{v} + \Delta t\ \omega_{nbr}\ \varepsilon_{n+1}^{ve} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \tau_1 + \Delta t(1+\omega_1) & \Delta t\ \omega_1 & \cdots & \Delta t\ \omega_1 & \Delta t\ \omega_1 \\ \Delta t\ \omega_2 & \tau_2 + \Delta t(1+\omega_2) & \cdots & \Delta t\ \omega_2 & \Delta t\ \omega_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta t\ \omega_{(nbr-1)} & \Delta t\ \omega_{(nbr-1)} & \cdots & \tau_{(nbr-1)} + \Delta t\big(1+\omega_{(nbr-1)}\big) & \Delta t\ \omega_{(nbr-1)} \\ \Delta t\ \omega_{nbr} & \Delta t\ \omega_{nbr} & \cdots & \Delta t\ \omega_{nbr} & \tau_{nbr} + \Delta t(1+\omega_{nbr}) \end{bmatrix}$$

O vetor solução $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{v}$ contém as deformações viscosas de cada bloco reológico de Kelvin para o instante corrente. Nota-se que se Δt for constante, $\boldsymbol{H}$ mantém-se constante durante todo o processo de solução.

III. <u>Função de Escoamento:</u>

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Delta t \left[\frac{|\sigma_{n+1}|}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}\right) \right]$$

$$\Phi_{n+1} = \frac{|\sigma_{n+1}|}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}\right)$$

IV. <u>Lei de Evolução Viscoplástica (Modelo de Perzyna):</u>

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \Delta t \left[\gamma_{n+1} \frac{sign(\sigma_{n+1})}{(1 - D_{n+1})} \right]$$

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \Delta\gamma_{n+1} \frac{sign(\sigma_{n+1})}{(1 - D_{n+1})} \quad ; \quad \Delta\gamma_{n+1} = \Delta t\, \gamma_{n+1}$$

V. <u>Multiplicador Plástico:</u>

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \Delta t \left[\frac{\langle \Phi_{n+1} \rangle}{\eta_{vp}} \right]$$

$$\Delta\gamma_{n+1} = \frac{\Delta t}{\eta_{vp}} \langle \Phi_{n+1} \rangle$$

VI. <u>Lei de Encruamento Isotrópico (*Strain Hardening*):</u>

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \Delta t \left[\frac{\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} \right]$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})}$$

VII. <u>Lei de Evolução do Dano (Modelo de Lemaitre):</u>

$$D_{n+1} = D_n + \Delta t \left[\frac{\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} \left(\frac{-Y_{n+1}}{r} \right)^s \right]$$

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})}\left(\frac{-Y_{n+1}}{r}\right)^s \; ; \; (-Y_{n+1}) = \frac{\sigma_{n+1}^2}{2E_0(1 - D_{n+1})^2}$$

Figura 15 - Resumo das equações constitutivas discretizadas via integração implícita.

Relação Tensão-Deformação Elástica: $$\sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1})E_0\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^v - \varepsilon_{n+1}^{vp}\right) \quad (3.77)$$
Lei de Evolução Viscoelástica (Modelo Generalizado de Kelvin-Voigt): $$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^v = \boldsymbol{b} \;\; ; \;\; \varepsilon_{n+1}^v = \sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_{j\;n+1}^v \quad (3.78)$$
Função de Escoamento: $$\Phi_{n+1} = \frac{\lvert\sigma_{n+1}\rvert}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_y\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}\right) \quad (3.79)$$ sendo, $$\sigma_y\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}\right) = \sigma_{y_0} + \left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right)\left[1 - e^{-\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}/\varepsilon_c\right)}\right] + K\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp} \quad (3.80)$$
Lei de Evolução Viscoplástica (Modelo de Perzyna): $$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \Delta\gamma_{n+1}\frac{sign(\sigma_{n+1})}{(1 - D_{n+1})} \quad (3.81)$$
Multiplicador Plástico: $$\Delta\gamma_{n+1} = \frac{\Delta t}{\eta_{vp}}\langle\Phi_{n+1}\rangle \quad (3.82)$$
Lei de Encruamento Isotrópico (*Strain Hardening*): $$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} \quad (3.83)$$
Lei de Evolução do Dano (Modelo de Lemaitre): $$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})}\left(\frac{-Y_{n+1}}{r}\right)^s \quad (3.84)$$ sendo, $$(-Y_{n+1}) = \frac{\sigma_{n+1}^2}{2E_0(1 - D_{n+1})^2} \quad (3.85)$$

Fonte: produção do próprio autor.

Figura 16 - Algoritmo referente à rotina numérica do modelo material.

DADOS DE ENTRADA: $\{\varepsilon_n,\ \varepsilon_n^v,\ \varepsilon_n^{vp}, \bar{\varepsilon}_n^{vp},\ D_n\}$ e $\{\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon\}$

<u>Avaliação da Contribuição Viscosa da Parte Viscoelástica:</u>

$\rightarrow Calcula: \varepsilon_{n+1}^{ve} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}$

$\rightarrow Monta\ \boldsymbol{H}\ e\ \boldsymbol{b}\ e\ resolve\ o\ sistema\ linear: \boldsymbol{H}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{b}$

$$\rightarrow Calcula: \varepsilon_{n+1}^{v} = \sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_{j\ n+1}^{v}$$

<u>Estado Teste (Preditor Elástico)</u>: $(\cdot)_{n+1}^{t} \rightarrow \Delta\gamma_{n+1} = 0$

$\rightarrow \varepsilon_{n+1}^{vp\ \ t} = \varepsilon_n^{vp}$

$\rightarrow D_{n+1}^{t} = D_n$

$\rightarrow \bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp\ \ t} = \bar{\varepsilon}_n^{vp}$

$\rightarrow \sigma_{n+1}^{t} = (1 - D_n)E_0\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{v} - \varepsilon_n^{vp}\right)$

$$\rightarrow \Phi_{n+1}^{t} = \frac{|\sigma_{n+1}^{t}|}{(1 - D_n)} - \sigma_y\left(\bar{\varepsilon}_n^{vp}\right)$$

<u>Verificação da Condição de Escoamento:</u>

SE $\Phi_{n+1}^{t} \leq 0$ ENTÃO

$\rightarrow Passo\ elástico: (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{t}$

SENÃO

<u>Fase de Correção:</u>

$\rightarrow Passo\ plástico: Solução\ do\ sistema\ não\ linear\ da$ Figura 15

$\rightarrow Atualização\ das\ variáveis\ (\cdot)_{n+1}$

FIM SE

$\rightarrow Cálculo\ do\ Módulo\ Tangente\ Algoritmico: \mathcal{C}^{vepd}$

SAÍDA

Fonte: produção do próprio autor.

A metodologia utilizada na rotina do modelo material, obtida após a discretização das equações de governo, é conhecida como preditora-corretora. Define-se um estado auxiliar de teste, que é obtido através do ‘congelamento’ do fluxo plástico. Isto significa que o estado teste é puramente elástico para todo o incremento de deformação total recebido da análise cinemática de elementos finitos. Neste estado teste, avalia-se a condição de escoamento. Deste modo, se o passo for elástico, o estado teste é a solução atual do problema incremental. Por outro lado, se o passo for plástico, acessa-se o algoritmo de retorno, o qual fará uma correção plástica retornando o ponto à superfície de escoamento, definida pela equação (3.79).

Sendo assim, o algoritmo de retorno é responsável pela solução do sistema de equações não lineares referentes à plasticidade, apresentadas na Figura 15. Na Figura 16 é apresentado um esquema da lógica da rotina numérica do modelo material, onde nota-se que falta definir o procedimento de solução do sistema não linear de equações do algoritmo de retorno e a expressão para o módulo tangente algorítmico C^{vepd}.

Para resolver o sistema não linear definido pelas equações da Figura 15, é utilizado o método de Newton-Raphson, o qual é apresentado na seção 2.4.1. Analisando o problema, nota-se que o sistema é definido por nove equações, (3.77) a (3.85), onde σ_{n+1}, D_{n+1}, ε_{n+1}^{vp}, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$, $\Delta\gamma_{n+1}$ e Y_{n+1} são as incógnitas. Porém, rearranjando as equações e através de manipulações matemáticas simples, pode-se reduzir o sistema para no máximo duas equações. Através das equações (3.77), (3.79), (3.81), (3.82) e (3.83), pode-se obter,

$$\Delta\gamma_{n+1} = \frac{\Delta t}{\eta_{vp}}\left[\left|\frac{\sigma_{n+1}^{t}}{(1-D_n)} - \frac{\Delta\gamma_{n+1}\, E_0\, sign(\sigma_{n+1}^{t})}{(1-D_{n+1})}\right|\right] - \frac{\Delta t}{\eta_{vp}}\sigma_y(\Delta\gamma_{n+1}, D_{n+1}) \tag{3.86}$$

e com as equações (3.77), (3.81), (3.84) e (3.85) chega-se em,

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})}\left[\frac{1}{2rE_0}\left(\frac{\sigma_{n+1}^t}{(1 - D_n)} - \frac{\Delta\gamma_{n+1}\, E_0\, sign(\sigma_{n+1}^t)}{(1 - D_{n+1})}\right)^2\right]^s \tag{3.87}$$

Sendo assim, o novo sistema não linear é representado pelas equações (3.86) e (3.87), onde as incógnitas são $\Delta\gamma_{n+1}$ e D_{n+1}. Definem-se os vetores das equações e das incógnitas respectivamente por,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} F_{\Delta\gamma} \\ F_D \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \Delta\gamma_{n+1} \\ D_{n+1} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

onde,

$$\begin{cases} F_{\Delta\gamma} = \Delta\gamma_{n+1} + \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}}\sigma_y(\Delta\gamma_{n+1}, D_{n+1}) - \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}}|c_1| \\ F_D = D_{n+1} - D_n - \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})}\left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^s \end{cases} \tag{3.89}$$

sendo,

$$c_1 = \frac{\sigma_{n+1}^t}{(1 - D_n)} - \frac{\Delta\gamma_{n+1}\, E_0\, sign(\sigma_{n+1}^t)}{(1 - D_{n+1})} \tag{3.90}$$

Resolvendo o sistema não linear pelo método de Newton-Raphson, lineariza-se $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ por Séries de Taylor, truncando no termo de primeira ordem,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y}) \cong \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) + \frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{y}}\Delta\boldsymbol{y} \tag{3.91}$$

Deseja-se encontrar a solução para $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, deste modo,

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{y}}\Delta\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) \;\; ; \;\; \frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{y}} = \nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}) \tag{3.92}$$

onde $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})$ é denominada de matriz Jacobiana, expressa por,

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}) = \nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} & \dfrac{\partial F_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} \\ \dfrac{\partial F_D}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} & \dfrac{\partial F_D}{\partial D_{n+1}} \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

Calculando as derivadas da equação (3.93), chega-se em,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} = 1 + \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{\partial \sigma_y(\Delta\gamma_{n+1}, D_{n+1})}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} - \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{\partial |c_1|}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} \\ \dfrac{\partial F_{\Delta\gamma}}{\partial D_{n+1}} = \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{\partial \sigma_y(\Delta\gamma_{n+1}, D_{n+1})}{\partial D_{n+1}} - \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{\partial |c_1|}{\partial D_{n+1}} \\ \dfrac{\partial F_D}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} = -\dfrac{1}{(1-D_{n+1})} \left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^s - \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1-D_{n+1})} \left\{\dfrac{\partial}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} \left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^s\right\} \\ \dfrac{\partial F_D}{\partial D_{n+1}} = 1 - \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1-D_{n+1})^2} \left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^s - \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1-D_{n+1})} \left\{\dfrac{\partial}{\partial D_{n+1}} \left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^s\right\} \end{cases} \tag{3.94}$$

onde,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_y(\Delta\gamma_{n+1}, D_{n+1})}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} = \left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right) \dfrac{e^{-\left(\bar{\varepsilon}^{vp}_{n+1}/\varepsilon_c\right)}}{\varepsilon_c(1-D_{n+1})} + \dfrac{K}{(1-D_{n+1})} \\ \dfrac{\partial |c_1|}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} = -\dfrac{sign(c_1)\, E_0\, sign(\sigma^t_{n+1})}{(1-D_{n+1})} \\ \dfrac{\partial \sigma_y(\Delta\gamma_{n+1}, D_{n+1})}{\partial D_{n+1}} = \left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right) \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}\, e^{-\left(\bar{\varepsilon}^{vp}_{n+1}/\varepsilon_c\right)}}{\varepsilon_c(1-D_{n+1})^2} + \dfrac{K\, \Delta\gamma_{n+1}}{(1-D_{n+1})^2} \\ \dfrac{\partial |c_1|}{\partial D_{n+1}} = -\dfrac{sign(c_1)\, \Delta\gamma_{n+1}\, E_0\, sign(\sigma^t_{n+1})}{(1-D_{n+1})^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial \Delta\gamma_{n+1}} \left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^s = s\left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^{s-1} \left[-\dfrac{c_1\, E_0\, sign(\sigma^t_{n+1})}{rE_0(1-D_{n+1})}\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial D_{n+1}} \left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^s = s\left[\dfrac{1}{2rE_0}(c_1)^2\right]^{s-1} \left[-\dfrac{c_1\, E_0\, \Delta\gamma_{n+1}\, sign(\sigma^t_{n+1})}{rE_0(1-D_{n+1})^2}\right] \end{cases} \tag{3.95}$$

Assim, o algoritmo de solução do sistema não linear local da rotina do modelo material é apresentado na Figura 17.

Figura 17 - Algoritmo Newton-Raphson local.

$$
\begin{array}{l}
ENQUANTO\ \left(\left\|\boldsymbol{F}^{(k+1)}\right\|_2 > Tolerância\right) \\
\quad \rightarrow Calcula: \boldsymbol{J}^{(k)}\ e\ \boldsymbol{F}^{(k)} \\
\quad \rightarrow Resolve\ o\ Sistema\ Linear:\ \boldsymbol{J}^{(k)}\ \Delta\boldsymbol{y}^{(k+1)} = -\boldsymbol{F}^{(k)} \\
\quad \rightarrow Atualiza: \boldsymbol{y}^{(k+1)} = \boldsymbol{y}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{y}^{(k+1)} \\
\quad \rightarrow Calcula: \boldsymbol{F}^{(k+1)} \\
FIM\ ENQUANTO
\end{array}
$$

Fonte: produção do próprio autor.

Utilizando o modelo de dano de Lemaitre, para o caso tridimensional, Souza Neto (2002) apresenta o algoritmo de retorno do sistema local através da solução de uma única equação não linear. Esmaeili e Öchsner (2011) particularizam esta solução para um problema unidimensional. Porém, consegue-se obter uma única equação não linear, consistente com o procedimento de Newton-Raphson, considerando a lei de evolução da variável de encruamento isotrópico igual à lei de evolução do multiplicador plástico, e não através da definição do *strain hardening*. Isto implica que a função da tensão de escoamento é somente função do multiplicador plástico, equação (3.96), sendo que utilizando a definição do *strain hardening* a tensão de escoamento é função do multiplicador plástico e da variável de dano, como demonstrado na equação (3.97).

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha} = \dot{R} = \dot{\gamma} \\
R_{n+1} = R_n + \Delta\gamma_{n+1} \ \rightarrow\ \sigma_y(R_{n+1}) = \sigma_y(\Delta\gamma_{n+1})
\end{cases}
\tag{3.96}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha} = \dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} = |\dot{\varepsilon}^{vp}| \\
\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = \bar{\varepsilon}_n^{vp} + \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})} \ \rightarrow\ \sigma_y\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}\right) = \sigma_y(\Delta\gamma_{n+1}, D_{n+1})
\end{cases}
\tag{3.97}
$$

Na equação (3.97), nota-se que a variável de dano afeta o encruamento, e consequentemente a superfície de escoamento do modelo material. Deste modo, analisando o processo de plastificação, a aproximação da equação (3.97) é fisicamente mais consistente que a apresentada na equação (3.96). Mesmo assim, propõe-se um estudo mais detalhado comparando ambas as considerações para o encruamento isotrópico.

3.3.2 Módulo Tangente Consistente

Para a montagem da matriz de rigidez tangente obtida através do processo iterativo de equilíbrio incremental global, a escolha apropriada do módulo tangente deve ser realizada.

O modulo tangente pode ser contínuo ou algorítmico. O módulo contínuo é obtido quando a derivada da equação (3.98) é obtida através das equações constitutivas contínuas apresentadas na seção 3.1.5. Já o módulo algorítmico deve ser consistente com o algoritmo utilizado para discretizar as equações constitutivas, as quais são apresentadas na Figura 15.

$$\mathcal{C}^{vepd} = \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} & \rightarrow \ Contínuo \\ \dfrac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} & \rightarrow \ Algorítmico \end{cases} \tag{3.98}$$

Para manter a taxa de convergência do procedimento de Newton-Raphson global (a qual deve ser no mínimo quadrática próximo ao ponto de ótimo da solução do sistema não linear) deve-se utilizar o módulo tangente algorítmico, devido às equações constitutivas serem obtidas de modo incremental, como apresentado por Simo e Taylor (1985).

Analisando o algoritmo da rotina do modelo material apresentado na Figura 16, o módulo tangente algorítmico é obtido em três situações. A primeira é quando a solução está no regime viscoelástico (VE), isto é, o estado teste é a solução do problema incremental. A segunda é definida somente pelo modelo viscoelástico-viscoplástico (VEP). E finalmente a terceira

é quando se considera o modelo viscoelástico-viscoplástico com dano acoplado (VEPD).

$$\mathcal{C}^{vepd} = \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{n+1}^{t}}{\partial \varepsilon_{n+1}} & se \;\; \Phi_{n+1}^{t} \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; VE \\ \dfrac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} & se \;\; \Phi_{n+1}^{t} > 0 \;\; \rightarrow \;\; VEP \; (para \; \bar{\varepsilon}^{vp} < \bar{\varepsilon}_{D}^{vp}) \\ \dfrac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} & se \;\; \Phi_{n+1}^{t} > 0 \;\; \rightarrow \;\; VEPD \; (para \; \bar{\varepsilon}^{vp} \geq \bar{\varepsilon}_{D}^{vp}) \end{cases} \tag{3.99}$$

As expressões das derivadas da equação (3.99) são apresentadas nos apêndices E, F e G, respectivamente.

Tendo desenvolvido as derivadas da equação (3.99) deve-se avaliar se as mesmas foram calculadas de forma correta. Um método de realizar esta validação é implementar o algoritmo do modelo material em um programa de elementos finitos e avaliar se o resíduo decresce de forma quadrática durante o processo iterativo.

Porém, em problemas estruturais não lineares, onde utiliza-se o método de Newton-Raphson para a solução do passo incremental, se houver convergência, a mesma pode ser subquadrática, dependendo da tolerância ou do critério de parada estabelecido (BELYTSCHKO, LIU e MORAN, 2006). Deste modo, a validação do módulo tangente algorítmico, pela a análise de convergência quadrática pode não ser uma boa opção.

Outra maneira de avaliar o correto cômputo do módulo tangente algorítmico é realizando as derivadas da equação (3.99) através de algum método numérico. Geralmente os métodos de diferenciação numérica apresentam problemas de convergência, onde a solução fica dependente do incremento de perturbação utilizado para realizar a derivada. Este é o caso dos métodos das diferenças finitas à trás, centrais ou à frente. Contudo, esta instabilidade dos resultados, referente ao incremento de perturbação, pode ser resolvida utilizando um método, chamado neste trabalho de derivada complexa. O método da derivada complexa foi apresentado primeiramente por Lyness e Moler

(1967), os quais demonstram que a derivada de uma função $f(x)$ qualquer em relação a variável x pode ser aproximada por,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{\mathrm{Im}[f(x+hi)]}{h} \tag{3.100}$$

onde h é uma perturbação finita, $i = \sqrt{-1}$ e $\mathrm{Im}[f(x+hi)]$ representa a parte imaginária de $f(x+hi)$. Martins, Sturdza e Alonso (2003) realizam uma comparação entre os resultados das derivadas numéricas da função escalar $f(x) = e^x / \left(\sqrt{sen^3(x) + cos^3(x)}\right)$, obtidas com os métodos das diferenças finitas e o método da derivada complexa. Deste modo, é apresentado que mesmo com perturbações finitas muito pequenas (entre 10^{-16} a 10^{-300}!) onde o método das diferenças finitas falha, os resultados obtidos com o método da derivada complexa mantêm-se estáveis. Como aplicações deste método no âmbito de elementos finitos e Otimização, podem-se citar o trabalho de Mundstock (2006) em problemas lineares e o trabalho de Stahlschmidt (2013) para análises não lineares.

Assim, neste trabalho utiliza-se o método da derivada complexa para avaliar as derivadas da equação (3.99) e validar as expressões analíticas apresentadas nos apêndices E, F e G. Deste modo, o módulo tangente algorítmico numérico é calculado como,

$$\mathcal{C}^{vepd} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \approx \frac{\mathrm{Im}[\sigma_{n+1}(\varepsilon_{n+1} + hi)]}{h} \tag{3.101}$$

O problema proposto para a validação do módulo tangente algorítmico é obtido através da análise de um elemento finito de barra de dois nós, restrito em uma das extremidades, sendo que na outra extremidade está sujeito uma taxa de deslocamento constante de $\dot{q} = 125\,[mm/min]$. O elemento possui o comprimento inicial de $L_0 = 0.0508\,[m]$ e a área da seção transversal inicial $A_0 = 4.160 \times 10^{-5}\,[m^2]$. As propriedades materiais propostas, as quais correspondem a um polímero hipotético, são apresentadas na Tabela 1. Todas as propriedades

são informadas no Sistema Internacional de Unidades (SI). A simulação é realizada até uma deformação total $\varepsilon = 0.4$, sendo a análise transiente dividida em 1000 incrementos de tempo. Na Figura 18, apresentam-se a curva tensão-deformação e a curva de evolução do dano em função da deformação total. Já na Figura 19, plota-se o módulo tangente algorítmico calculado analiticamente e numericamente através da derivada complexa da equação (3.101) com $h = 10^{-20}$. Nota-se que o valor absoluto do erro relativo percentual entre os resultados numérico e analítico não ultrapassam 0.3%.

Tabela 1 - Propriedades materiais no SI propostas para a validação do módulo tangente algorítmico.

Poisson e Massa Específica	ν	ρ			
	0.50	950.00			
Propriedades Viscoelásticas	E_0	E_i	τ_i		
	2.0137E9	3.0376E9	1.0000E3		
		5.9522E9	1.0000E6		
		3.2205E9	1.0000E9		
Propriedades Viscoplásticas	σ_{y0}	K	σ_∞	ε_c	η_{vp}
	1.0000E7	1.0496	7.5089E7	1.2405E-1	1.0000E8
Propriedades do Dano	s	r	$\bar{\varepsilon}_D^{vp}$	D_c	
	0.95	1.2500E6	0.10	0.99	

Fonte: produção do próprio autor.

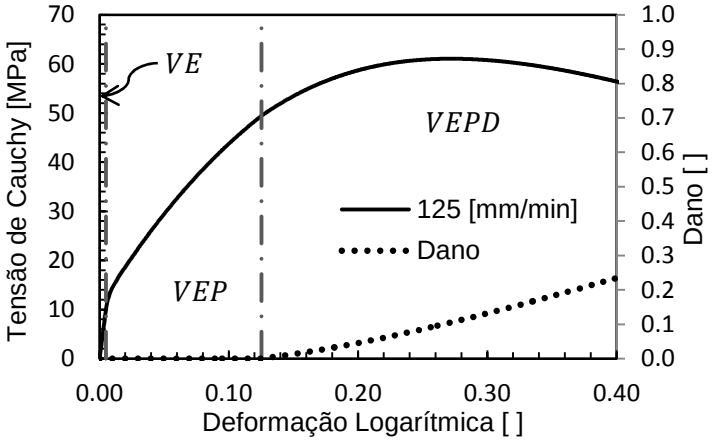
Durante a formulação numérica de um modelo material para a posterior aplicação em um programa de elementos finitos, a parte mais complicada, e/ou tediosa, do trabalho é obter a expressão analítica do módulo tangente algorítmico. Mesmo em um modelo unidimensional, como o apresentado neste trabalho, as derivadas implícitas e manipulações matemáticas são constantes durante o desenvolvimento da equação (3.99), exigindo muita atenção de quem o faz.

Deste modo, em um modelo material mais elaborado, com aplicações tridimensionais, pode-se imaginar o quão complexa é a tarefa de obtenção do módulo tangente algorítmico analítico.

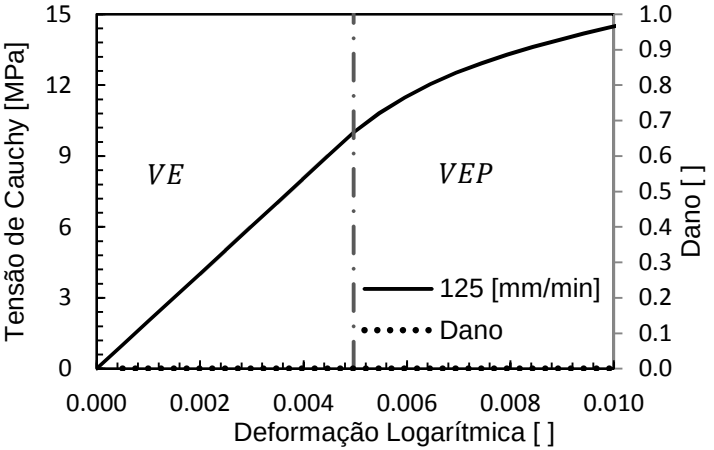
Portanto, a utilização da derivada complexa para o cálculo do módulo tangente algorítmico torna-se relevante, principalmente na formulação de modelos materiais mais complexos.

Para a avaliação da derivada complexa, as variáveis do código computacional necessitam ser declaradas como variáveis complexas. Isto implica no dobro de armazenamento de memória. Porém, as variáveis complexas ficam restritas à rotina do modelo material, sem alteração no código de elementos finitos. Para o modelo unidimensional apresentado neste trabalho, não se notou diferenças significativas de tempo computacional entre análises utilizando os módulos tangentes algorítmicos analítico ou numérico. Porém, sugere-se um estudo detalhado para aplicações tridimensionais.

Figura 18 - Curva tensão-deformação-dano para 125 [mm/min] mostrando as regiões de deformação viscoelástica (VE), viscoplástica (VEP) e a região afetada pelo dano (VEPD). a) Curva total. b) Região VE ampliada.



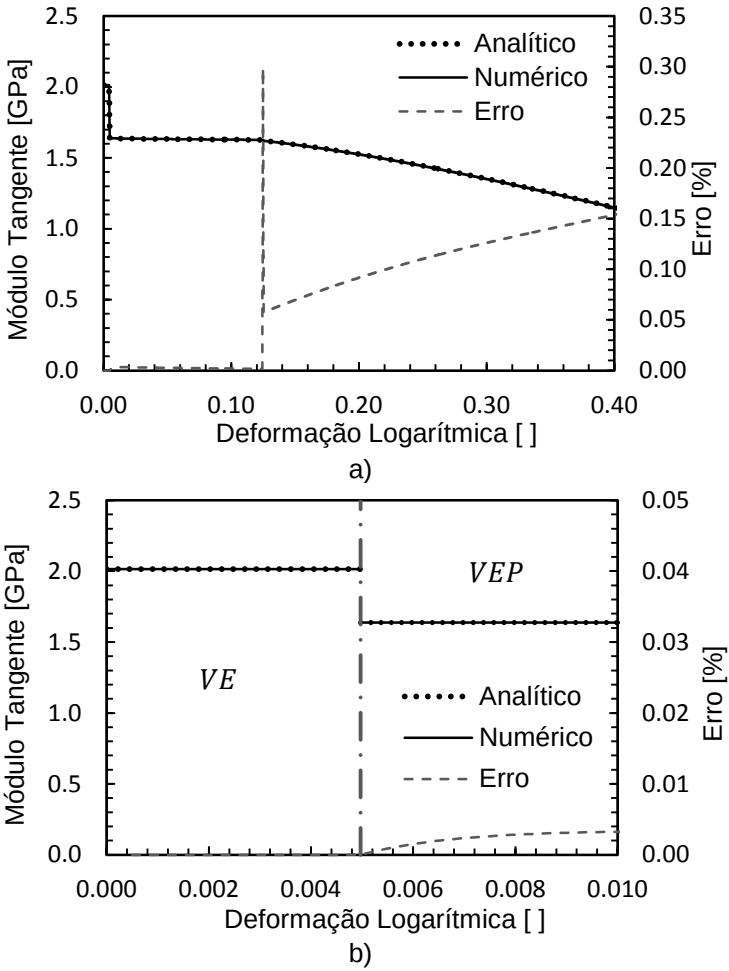
a)



b)

Fonte: produção do próprio autor.

Figura 19 - Curvas de validação do módulo tangente algorítmico referentes à simulação apresentada na Figura 18. a) Curva total. b) Região VE ampliada.



Fonte: produção do próprio autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo é dividido em duas seções. Na primeira parte apresentam-se os ajustes entre as curvas numéricas e experimentais para a obtenção dos parâmetros materiais do modelo teórico. Discutem-se algumas particularidades do modelo, e também, a característica não linear de alguns materiais poliméricos, como o mPP e o PEAD, em relação aos tipos de carregamentos externos aplicados.

O objetivo da segunda seção é apresentar e discutir alguns resultados numéricos obtidos através da simulação de estruturas treliçadas submetidas a carregamentos transientes.

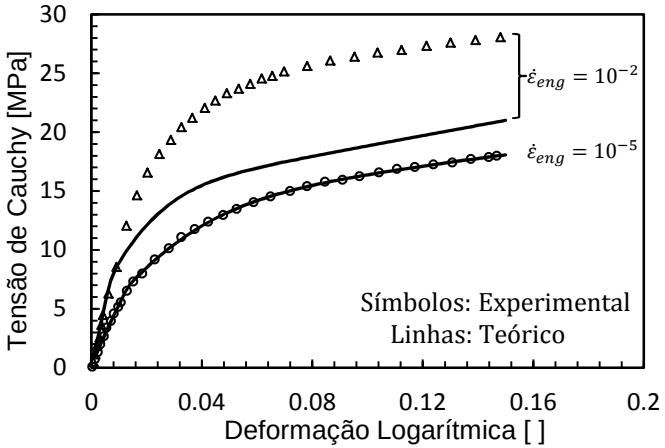
4.1 AJUSTE DE CURVAS

Em deformações finitas, o comportamento mecânico de diversos materiais poliméricos é não linear em relação ao tipo de carregamento externo. Esta afirmação é analisada através dos exemplos da Figura 20 e da Figura 21, sem a influência do dano.

Analisando a Figura 20 e aplicando a metodologia de identificação de parâmetros apresentada no apêndice H, ajustam-se primeiramente os parâmetros viscoelásticos para a curva de fluência em $\sigma_{eng} = 5.2\ [MPa]$, a qual é apresentada por Zhang e Moore (1997). Na sequência os parâmetros viscoplásticos são ajustados através do ensaio de $\dot{\varepsilon}_{eng} = 10^{-5}$. Mantendo as propriedades fixas, simula-se para $\dot{\varepsilon}_{eng} = 10^{-2}$. Neste caso, nota-se claramente que para o modelo teórico representar a curva experimental, um novo conjunto de parâmetros materiais deve ser ajustado.

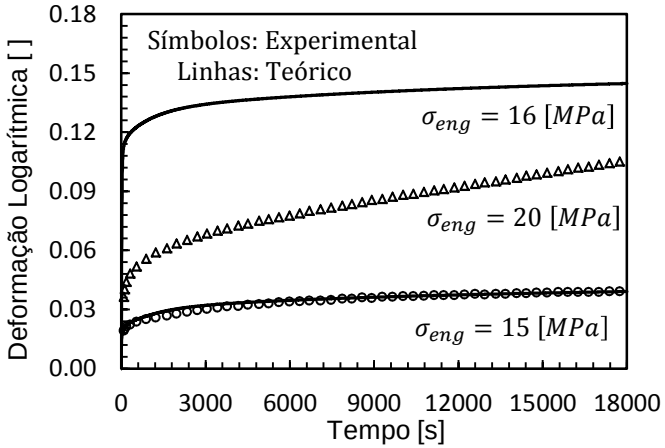
De forma análoga, é realizada a mesma análise em ensaios de fluência para o mPP, apresentados na Figura 21. Verifica-se uma alta não linearidade da resposta estrutural, sendo que uma predição para $\sigma_{eng} = 16\ [MPa]$, utilizando os parâmetros viscoplásticos ajustados para $\sigma_{eng} = 15\ [MPa]$, superestima significativamente a resposta experimental em $\sigma_{eng} = 20\ [MPa]$.

Figura 20 - Ensaios de compressão em taxas de deformação de engenharia constantes para o PEAD.



Fonte: produção do próprio autor. Dados experimentais obtidos de Zhang e Moore (1997).

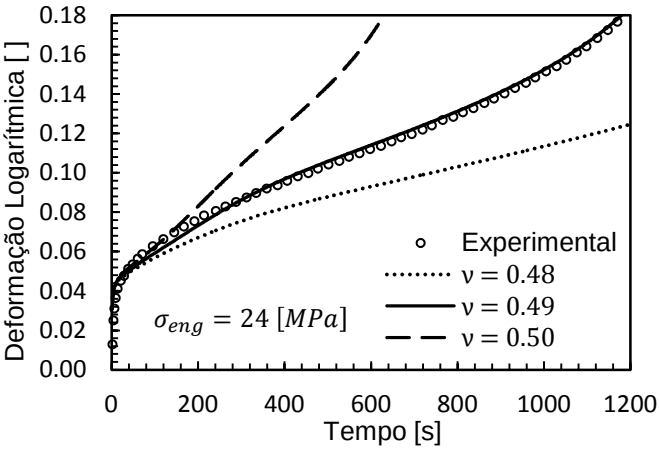
Figura 21 - Ensaios de fluência em tensões de engenharia constantes para o mPP.



Fonte: produção do próprio autor. Dados experimentais obtidos de Drozdov, Christianses e Potarniche (2012).

Os parâmetros viscoelásticos são ajustados para $\sigma_{eng} = 5\ [MPa]$, cuja curva experimental é apresentada por Drozdov, Christianses e Potarniche (2012).

Figura 22 - Sensibilidade do modelo teórico em relação ao coeficiente de Poisson em um ensaio de fluência em tensão de engenharia constante para o mPP.



Fonte: produção do próprio autor. Dados experimentais obtidos de Drozdov *et al.* (2010).

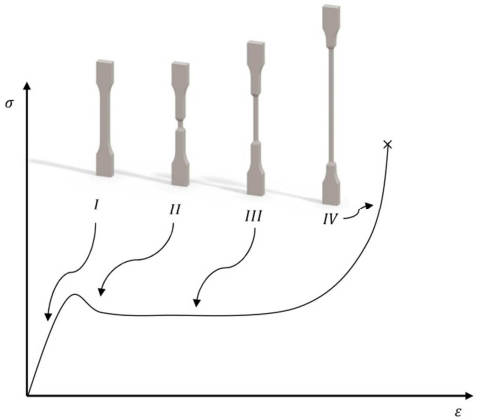
Uma característica importante do modelo teórico é a sensibilidade do histórico de deformação, em ensaios de fluência, com relação ao coeficiente de Poisson. No gráfico da Figura 22, o ajuste entre as curvas experimental e teórica foi realizado utilizando $\nu = 0.50$ e sem a influência do dano. Porém, quando simula-se o ensaio no programa de elementos finitos, com as propriedades previamente ajustadas, percebe-se que uma pequena variação no coeficiente de Poisson faz com que as curvas teórica e experimental divirjam significativamente, sendo que o melhor ajuste é encontrado para $\nu = 0.49$. Esta característica deve-se aos erros de aproximação, em relação aos deslocamentos, realizado pelo Método dos Elementos Finitos. Deste modo, entende-se que o melhor ajuste é realizado para

$\nu = 0.49$, pois este coeficiente corrige os erros relativos à aproximação do campo de deslocamentos durante a simulação do ensaio experimental no programa de elementos finitos. Notou-se, também, que esta sensibilidade é pouco significativa nas simulações uniaxiais de tração ou compressão, em taxas de deslocamento ou deformações constantes.

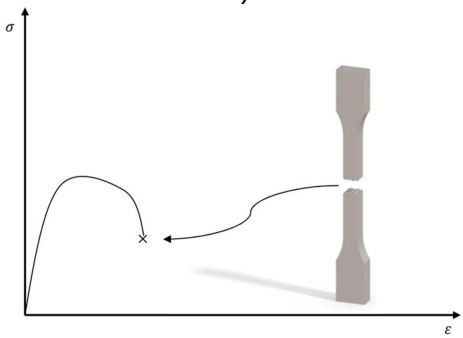
Diversas metodologias podem ser propostas para levar em consideração a resposta não linear viscoelástica e viscoplástica ao carregamento externo. Dentre algumas delas, podem-se citar os trabalhos de Muñoz-Rojas *et al.* (2011) e Liu (2007) os quais descrevem que as propriedades materiais são função do nível de tensão, e os trabalhos de Chehab e Moore (2004), Drozdov, Christianses e Potarniche (2012) e Dasari e Misra (2003) que dizem que as propriedades variam segundo a taxa de deformação. Para obter a correta resposta estrutural devem-se conhecer, a priori, quais são as tensões ou taxas de deformação para a escolha correta das propriedades materiais em um dado instante de tempo. Porém, analisando a implementação destas metodologias em um programa de elementos finitos, as tensões e taxas de deformação são computadas durante o processo iterativo de equilíbrio estrutural. Sendo assim, as propriedades materiais devem ser estipuladas e corrigidas durante o processo iterativo global de Newton-Raphson, possivelmente acarretando problemas de convergência. Contudo, não é objetivo deste trabalho apresentar o tratamento destas metodologias, pois a não linearidade em relação aos carregamentos não será considerada. Mesmo assim, sugere-se um estudo mais detalhado sobre como considerar esta não linearidade e sua posterior implementação em um programa de elementos finitos.

Para determinar os parâmetros de dano em ensaios uniaxiais de tração, primeiramente expõem-se o comportamento fenomenológico típico de muitos polímeros, como é o caso do PEAD, mPP e do Polipropileno Isostático (iPP) . A Figura 23-a exemplifica um ensaio de tração a uma baixa taxa de deformação. Seguindo o exposto por Diez (2009), nota-se a existência de basicamente quatro estágios de deformação.

Figura 23 - Curva típica de polímeros sujeitos a ensaios uniaxiais de tração. a) Baixa taxa de deformação. b) Alta taxa de deformação.



a)



b)

Fonte: produção do próprio autor.

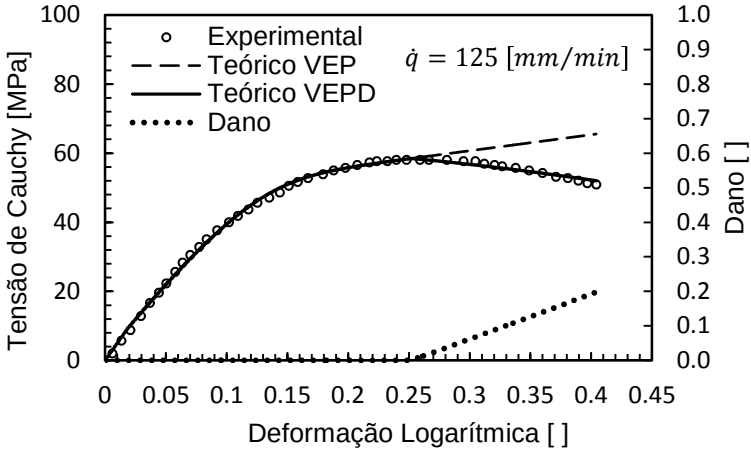
O primeiro estágio corresponde à deformação viscoelástica e a transição para a deformação viscoplástica. No segundo estágio há a ocorrência da estricção (*necking*) onde, geralmente, há uma queda da resistência mecânica. Já no estágio três ocorre uma propagação de fluxo plástico (*cold drawing*), onde a tensão mantem-se praticamente inalterada. Finalmente no estágio quatro há um aumento da resistência

mecânica até a fratura do corpo de prova. Neste processo de deformação, a evolução do dano pode ser identificada na região quatro, onde teoricamente começaria a degradação das cadeias moleculares. Porém, o modelo material proposto, quando submetido a baixas taxas de deformação, representa somente o fenômeno físico observado no primeiro estágio de deformação, onde a degradação material é irrelevante.

Calcagno *et al.* (2010) e Dasari e Misra (2003) avaliam experimentalmente o comportamento mecânico, em ensaios uniaxiais de tração, do PEAD, Policarbonato e Polipropilenos sujeitos a diferentes taxas de deformação. Assim, para taxas de deslocamento superiores a $\dot{q} = 100\ [mm/min]$ o PEAD, mPP e o iPP apresentam uma resposta estrutural análoga a representada na Figura 23-b. Nestes trabalhos é identificado, através do ensaio experimental, que a fratura do corpo de prova ocorre com a formação de uma pequena estricção ou até mesmo sem estricção. Deste modo, devido à alta taxa de deformação, considera-se que a degradação material ocorre sem o alinhamento das cadeias moleculares. Assim, o modelo teórico acoplado com dano pode ser utilizado para modelar individualmente o ensaio uniaxial de tais materiais, desde que estes estejam sujeitos a taxas de deslocamentos acima de $\dot{q} = 100\ [mm/min]$.

A determinação dos parâmetros viscoplásticos juntamente com os parâmetros do modelo de dano de Lemaitre é realizada através do ajuste das curvas experimentais obtidas no trabalho de Dasari e Misra (2003). Escolheu-se os ensaios uniaxiais de tração para o iPP e PEAD, sujeitos a taxas de deslocamento de $\dot{q} = 125\ [mm/min]$ e $\dot{q} = 380\ [mm/min]$, respectivamente. Na Figura 24 e na Figura 25 são apresentadas as curvas de tensão-deformação-dano ajustadas aos ensaios experimentais. Nota-se que o melhor ajuste é obtido para o iPP, sendo que para o PEAD o modelo não é capaz de representar as oscilações decorrentes da perda de rigidez devido a degradação do material. A evolução do dano em ambos os casos é quase linear em relação à deformação e a falha ocorre próximo a um dano crítico de $D_c = 0.20$ para o iPP e $D_c = 0.28$ para o PEAD.

Figura 24 - Curva tensão-deformação-dano em taxa de deslocamento constante para o iPP.



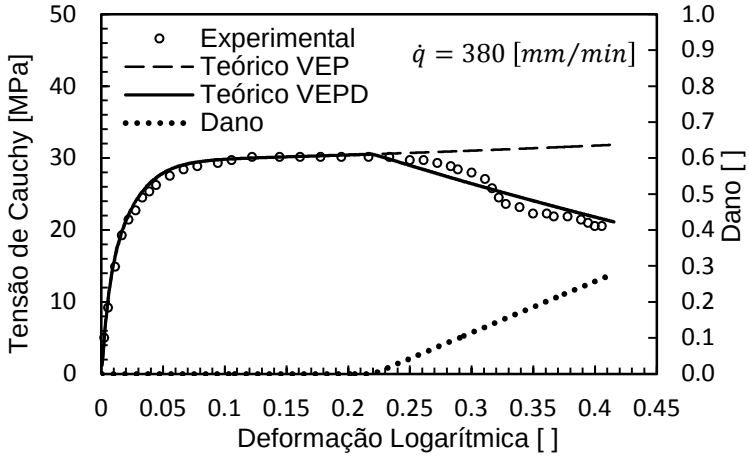
Fonte: produção do próprio autor. Dados experimentais obtidos de Dasari e Misra (2003).

Tabela 2 - Propriedades materiais no SI ajustadas para o iPP para um ensaio uniaxial de tração em taxa de 125 [mm/min].

Poisson e Massa Específica	ν	ρ			
	0.50	950.00			
Propriedades Viscoelásticas	E_0	E_i	τ_i		
	5.0000E8	1.0000E9	5.0000E2		
		7.0000E8	1.0000E4		
		2.0000E8	2.0000E5		
Propriedades Viscoplásticas	σ_{y0}	K	σ_∞	ε_c	η_{vp}
	8.1917E6	5.6369E7	4.6090E7	1.6113E-2	1.6739E8
Propriedades do Dano	s	r	$\bar{\varepsilon}_D^{vp}$	D_c	
	0.26	1.0019E6	0.13	0.2	

Fonte: produção do próprio autor.

Figura 25 - Curva tensão-deformação-dano em taxa de deslocamento constante para o PEAD.



Fonte: produção do próprio autor. Dados experimentais obtidos de Dasari e Misra (2003).

Tabela 3 - Propriedades materiais no SI ajustadas para o PEAD para um ensaio uniaxial de tração em taxa de 380 [mm/min].

Poisson e Massa Específica	ν	ρ
	0.46	950.00

Propriedades Viscoelásticas	E_0	E_i	τ_i
	2.1035E9	6.2728E8	1.0000E2
		9.7968E8	5.0000E3
		7.4721E8	1.0000E5

Propriedades Viscoplásticas	σ_{y0}	K	σ_∞	ε_c	η_{vp}
	6.0000E6	1.7007E7	1.5974E7	1.7586E-2	1.1166E8

Propriedades do Dano	s	r	$\bar{\varepsilon}_D^{vp}$	D_c
	0.12	1.0000E4	0.2	0.28

Fonte: produção do próprio autor.

Na Tabela 2 e na Tabela 3 apresentam-se as propriedades ajustadas para o iPP e para o PEAD, respectivamente. Como o trabalho do Dasari e Misra (2003) não apresenta curvas de fluência, as propriedades viscoelásticas do iPP foram determinadas por tentativa e erro. Já as propriedades viscoelásticas do PEAD foram ajustadas para a curva experimental de fluência em $\sigma_{eng} = 5.47\ [MPa]$ apresentada por Liu (2007).

4.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos, sendo um bidimensional e outro tridimensional. Ambos os exemplos são sujeitos a grandes deslocamentos e deformações. As geometrias das estruturas apresentam um comportamento instável (*snap-through*) durante o processo de deformação. Assim, as estruturas estão sujeitas a altas acelerações, sendo que as forças inerciais devem ser consideradas. Deste modo, num âmbito de elementos finitos, a formulação não linear geométrica transiente e a cinemática de deformações finitas, tornam-se essenciais para a obtenção de uma resposta estrutura condizente com o fenômeno físico que as estruturas devem apresentar.

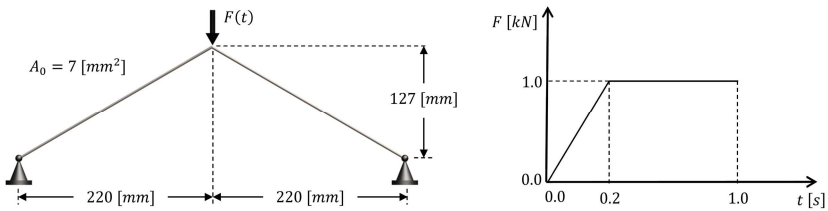
Para garantir a validade do modelo material em aplicações para polímeros, considerando a degradação material, as estruturas são submetidas a carregamentos que geram taxas de deformações elevadas. Porém, como comentado na seção 4.1, a resposta estrutural de alguns polímeros sujeitos a deformações finitas é não linear em relação ao carregamento. Pelo fato deste trabalho não apresentar um modelo teórico que engloba esta não linearidade, consideram-se as propriedades materiais fixas durante todo o processo de deformação.

As geometrias das estruturas foram obtidas no trabalho de Driemeier, Proença e Alves (2005).

4.2.1 Estrutura de Duas Barras

A análise numérica bidimensional é realizada considerando uma estrutura clássica de duas barras, onde a geometria inicial e o histórico do carregamento pontual são apresentados na Figura 26. As propriedades materiais utilizadas são apresentadas na Tabela 3. O intervalo de tempo de $0.0\,[s]$ até $0.2\,[s]$ foi discretizado em 2×10^3 incrementos, resultando em um $\Delta t = 1 \times 10^{-4}\,[s]$. Já o intervalo de tempo de $0.2\,[s]$ até $1.0\,[s]$ foi discretizado em 10^4 incrementos, acarretando um $\Delta t = 8 \times 10^{-5}\,[s]$.

Figura 26 - Estrutura de duas barras. Geometria inicial e histórico do carregamento.



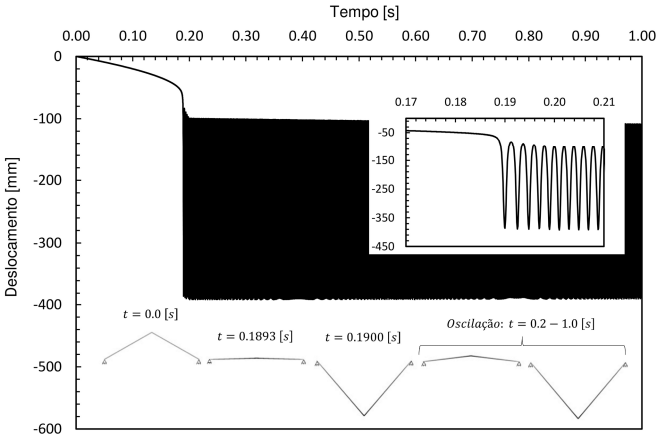
Fonte: produção do próprio autor.

Três análises são realizadas, sendo a primeira somente viscoelástica, a segunda levando em consideração o modelo viscoplástico e a terceira com a contribuição do modelo de dano acoplado.

Na Figura 27 é apresentado o histórico do deslocamento considerando somente a análise viscoelástica. Observa-se que a região de instabilidade está situada entre $0.18\,[s]$ e $0.19\,[s]$, sendo que para exatamente $0.1900\,[s]$ ocorre o *snap-through*. Após o *snap-through* a estrutura oscila entre as duas geometrias mostradas na Figura 27 nos intervalos de $0.2\,[s]$ até $1.0\,[s]$. Sabe-se que o modelo viscoelástico é dissipativo. Porém, quase não há amortecimento durante o tempo de simulação estipulado. Isto se deve as altas viscosidades dos amortecedores dos blocos reológicos de Kelvin, as quais foram identificadas pelo ajuste da

curva experimental da Figura 25. Na Figura 28 apresenta-se a curva tensão-deformação.

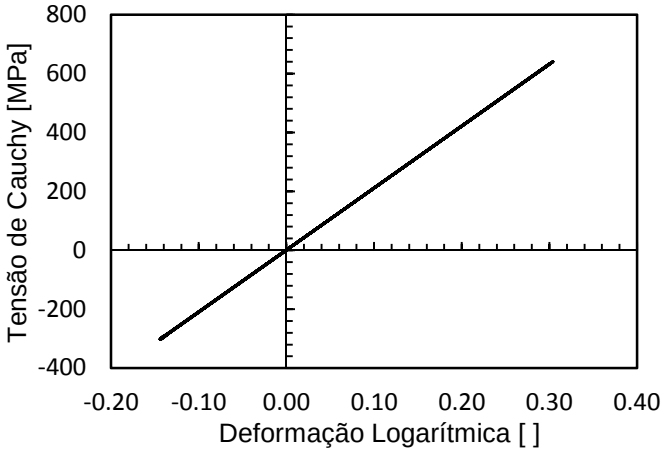
Figura 27 - Análise 2D viscoelástica. Histórico do deslocamento vertical do nó de aplicação da força e geometria deformada em certos instantes de tempo.



Fonte: produção do próprio autor.

A mesma análise é realizada, só que desta vez considera-se o modelo de encruamento. Na Figura 29 é apresentado o histórico do deslocamento considerando somente uma análise viscoelástica-viscoplástica. Nota-se que o modelo é altamente dissipativo, sendo que ao final de $1.0\ [s]$ quase não há oscilações da estrutura. O mesmo fato é observado na curva tensão-deformação da Figura 30.

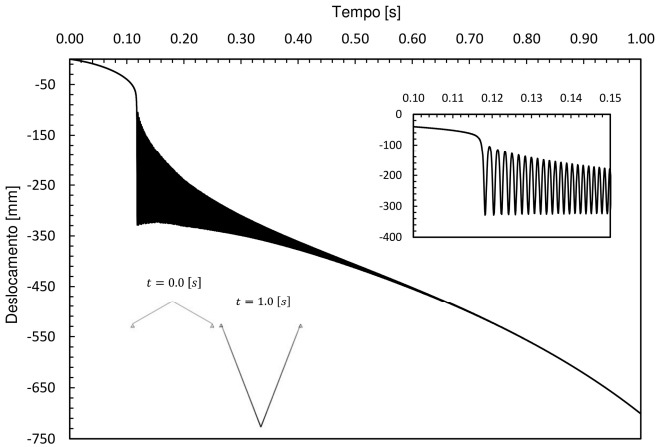
Figura 28 - Análise viscoelástica. Curva tensão-deformação para ambas as barras.



Fonte: produção do próprio autor.

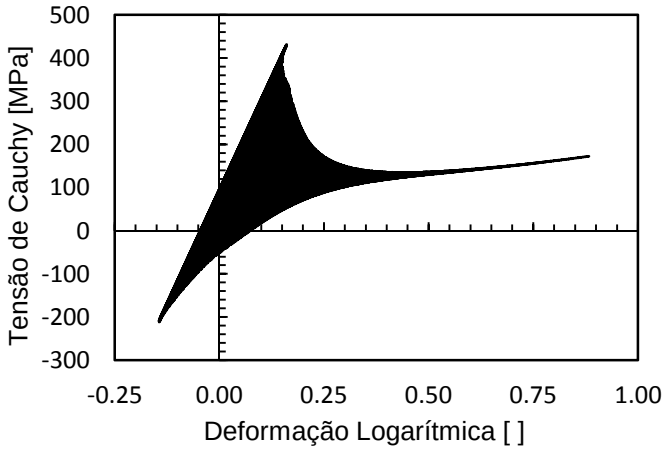
Na simulação considerando o modelo de dano, cujo histórico do deslocamento é apresentado na Figura 31, até o limiar de dano ser atingido a análise é representada pelo modelo viscoelástico-viscoplástico. Após o limiar, o dano é ativado e a degradação material afeta o histórico de deformação até o dano crítico ser obtido, o qual é um indicador da falha do material. Com intuito de avaliar o comportamento de degradação do material através do modelo de dano, na Figura 31 e na Figura 32 apresentam-se os resultados após o dano crítico. Nota-se que para os parâmetros de dano utilizados a degradação material ocorre rapidamente após o limiar de dano ser atingido. Na Figura 33, mostra-se que a evolução do dano em função da deformação viscoplástica acumulada é quase linear. Já na Figura 34 plota-se o histórico da variável de dano, o qual apresenta um comportamento não linear para a simulação realizada.

Figura 29 - Análise 2D viscoelástica-viscoplástica. Histórico do deslocamento vertical do nó de aplicação da força e geometrias inicial e deformada para o tempo de 1.0 [s].



Fonte: produção do próprio autor.

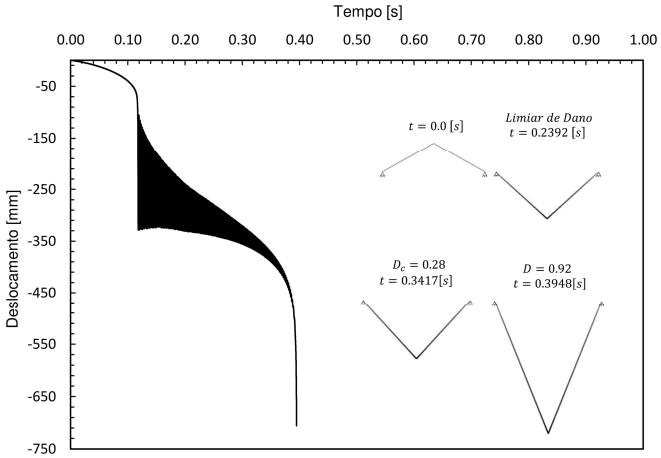
Figura 30 - Análise viscoelástica-viscoplástica. Curva tensão-deformação para ambas as barras.



Fonte: produção do próprio autor.

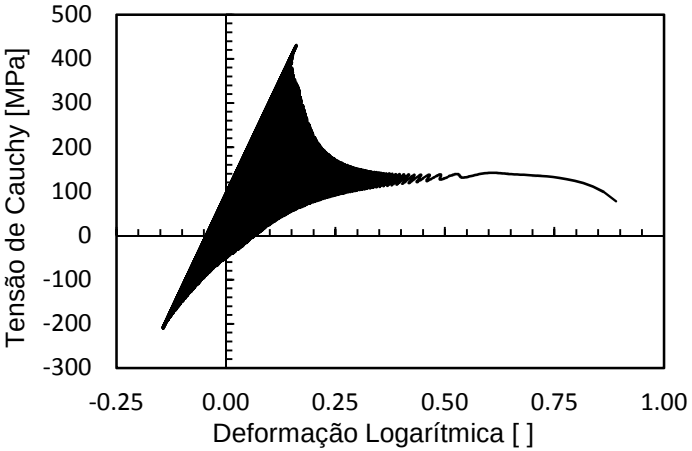
Sendo o modelo dano proposto neste trabalho válido somente para taxas de deformação relativamente altas, mostra-se na Figura 35 o histórico da taxa de deformação. Percebe-se que após o *snap-through* a estrutura é sujeita a taxas de deformação muito altas, as quais vão diminuindo gradativamente com o passar da deformação, devido à dissipação realizada pelo processo de deformação plástica.

Figura 31 - Análise 2D viscoelástica-viscoplástica acoplada com dano. Histórico do deslocamento vertical do nó de aplicação da força e geometrias em instantes de tempo específicos.



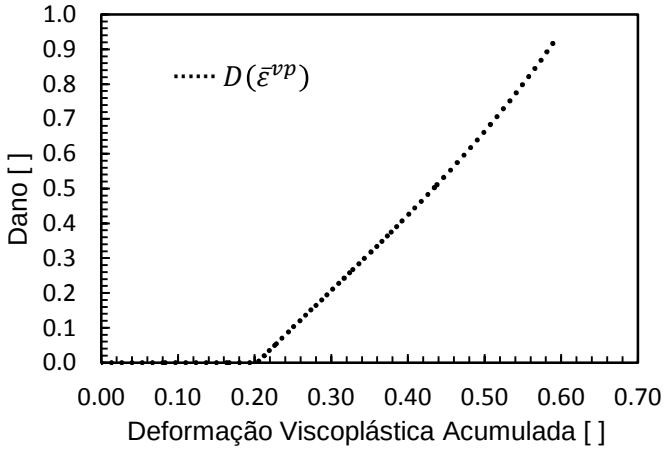
Fonte: produção do próprio autor.

Figura 32 - Análise viscoelástica-viscoplástica acoplada com dano. Curva tensão-deformação para ambas as barras.



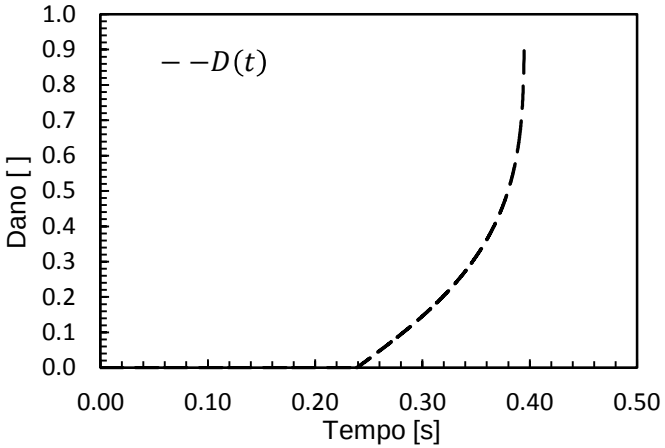
Fonte: produção do próprio autor.

Figura 33 - Evolução da variável de dano em função da deformação viscoplástica acumulada para a análise 2D.



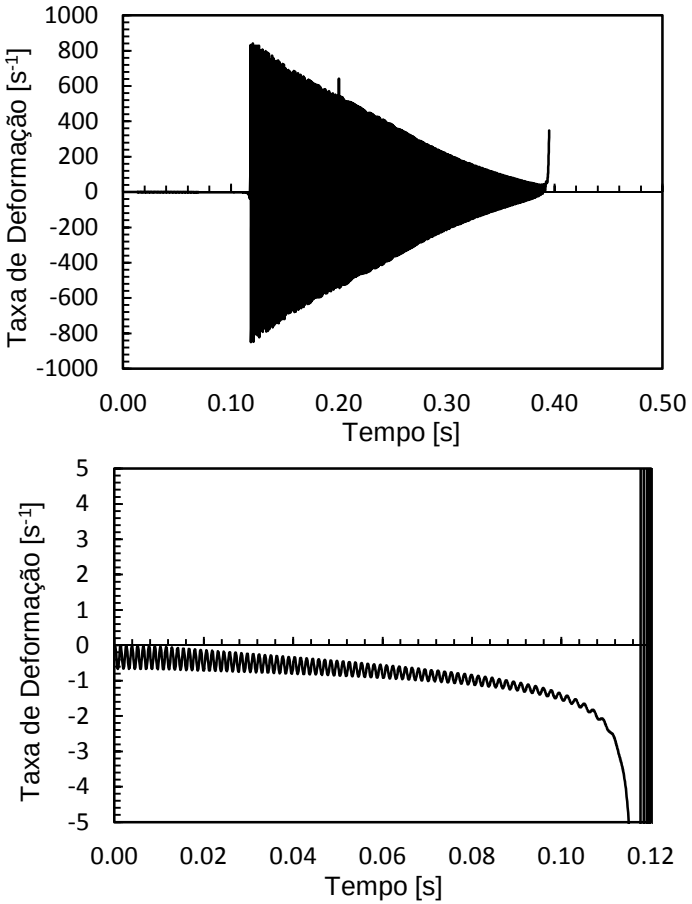
Fonte: produção do próprio autor.

Figura 34 - Histórico da variável de dano para a análise 2D.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 35 - Histórico da taxa de deformação para ambos os elementos da estrutura.



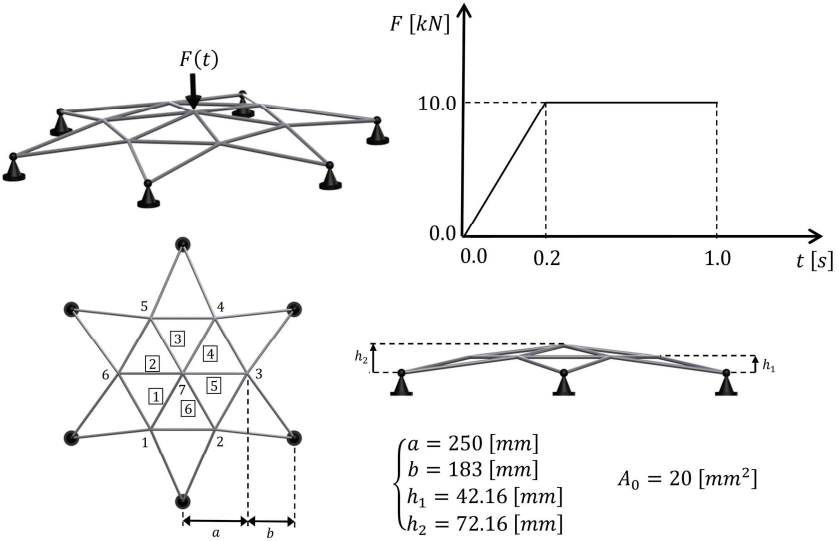
Fonte: produção do próprio autor.

4.2.2 Domo Treliçado em Forma de Estrela

O segundo problema consiste na análise numérica de um domo treliçado tridimensional cuja geometria inicial e o histórico do carregamento externo são mostrados na Figura 36. As

propriedades materiais e a discretização do tempo de simulação são as mesmas do exemplo bidimensional.

Figura 36 - Domo treliçado. Geometria inicial e histórico do carregamento.



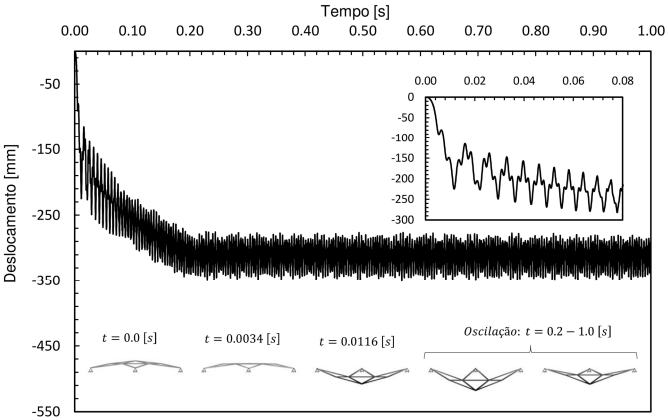
Fonte: produção do próprio autor.

Assim como no exemplo anterior, três análises são realizadas, sendo a primeira somente viscoelástica, a segunda levando em consideração o modelo viscoplástico e a terceira com a contribuição do modelo de dano acoplado.

No gráfico da Figura 37 é apresentado o histórico do deslocamento vertical do nó 7 onde é aplicada a força pontual, considerando somente uma análise viscoelástica. Analisando o histórico do campo de deslocamentos da estrutura deformada, percebe-se que a partir de certo nível de carregamento, o domo apresenta duas regiões de instabilidade. O primeiro *snap-through*, correspondente ao nó 7, ocorre aproximadamente em $0.0034\ [s]$. Com o aumento do carregamento, ocorre o segundo *snap-through* em $0.0116\ [s]$, relativo aos nós 1 a 6. Visualizando

a ampliação realizada na Figura 37, nota-se um padrão de vibração não homogêneo. Isto deve-se ao fato, que a frequência de vibração do nó 7 é diferente da frequência em que os nós 1 a 6 oscilam.

Figura 37 - Análise viscoelástica 3D. Histórico do deslocamento vertical do nó 7 e geometria deformada em certos instantes de tempo.

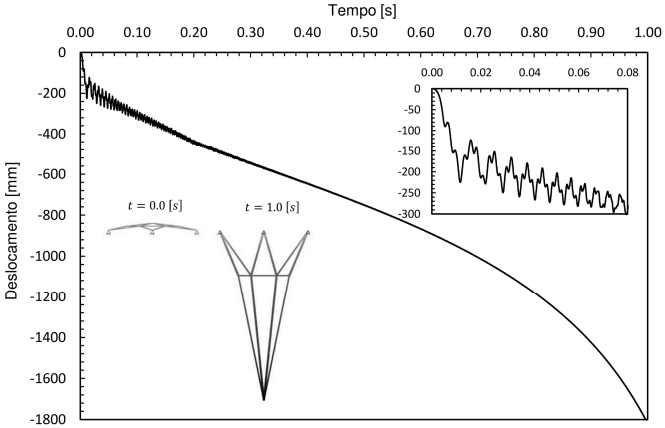


Fonte: produção do próprio autor.

Na Figura 38 é apresentado o histórico do deslocamento do nó 7 considerando somente uma análise viscoelástica-viscoplástica. Como no caso 2D, nota-se que o modelo é altamente dissipativo, sendo que ao final de $1.0\ [s]$ quase não há oscilações da estrutura e os deslocamentos e deformações são elevados.

Considerando a degradação material, observa-se na Figura 39 o histórico do deslocamento do nó 7, assim como os instantes de tempo para o limiar de dano e para o dano crítico. Durante todo o processo de deformação apresentado na Figura 39, notou-se que o dano afeta igualmente os elementos 1 a 6. Portanto, nesta simulação a falha teoricamente aconteceria nos elementos de 1 a 6 no tempo de $0.3212\ [s]$.

Figura 38 - Análise 3D viscoelástica-viscoplástica. Histórico do deslocamento vertical do nó 7 e geometrias inicial e deformada para o tempo de 1.0 [s].

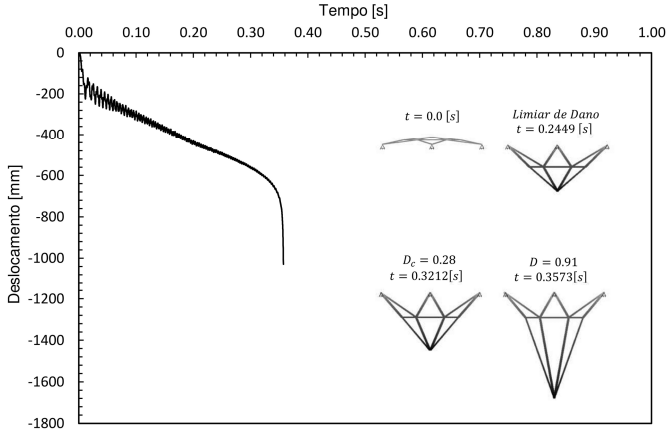


Fonte: produção do próprio autor.

Na Figura 40 mostra-se a evolução do dano em função da deformação viscoplástica acumulada, que assim como no exemplo 2D, é quase linear. Já na Figura 41 plota-se o histórico da variável de dano, onde percebe-se uma rápida evolução da degradação material de forma não linear.

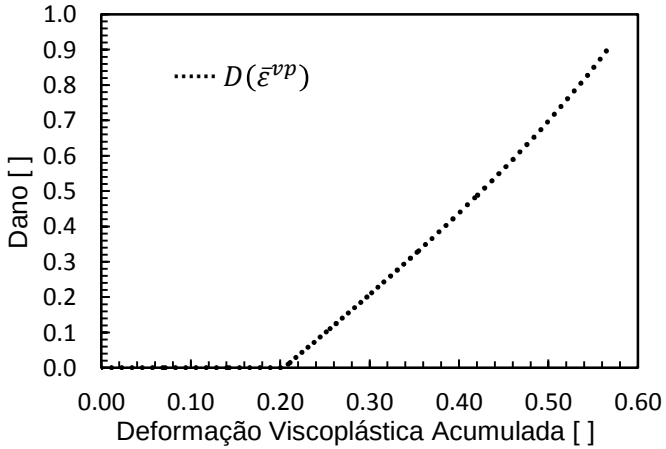
Salientando novamente que o modelo de dano proposto neste trabalho é válido somente para taxas de deformação relativamente altas, mostra-se na Figura 42 o histórico da taxa de deformação. Diferentemente da estrutura 2D, nota-se que as taxas de deformação mais elevadas não ocorrem instantaneamente após a ocorrência do *snap-through*, mas sim com o aumento do carregamento externo. Este resultado é decorrente da altura do domo ser consideravelmente menor que suas outras dimensões. Deste modo, durante o *snap-through* as forças de inércia são menos significativas que a aplicação transiente do esforço externo.

Figura 39 - Análise 3D viscoelástica-viscoplástica acoplada com dano. Histórico do deslocamento vertical do nó 7 e geometrias em instantes de tempo específicos.



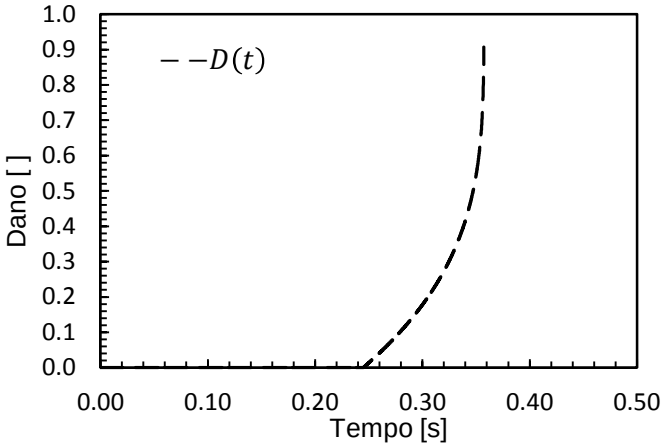
Fonte: produção do próprio autor.

Figura 40 - Evolução da variável de dano em função da deformação viscoplástica acumulada referente os elementos 1 a 6.



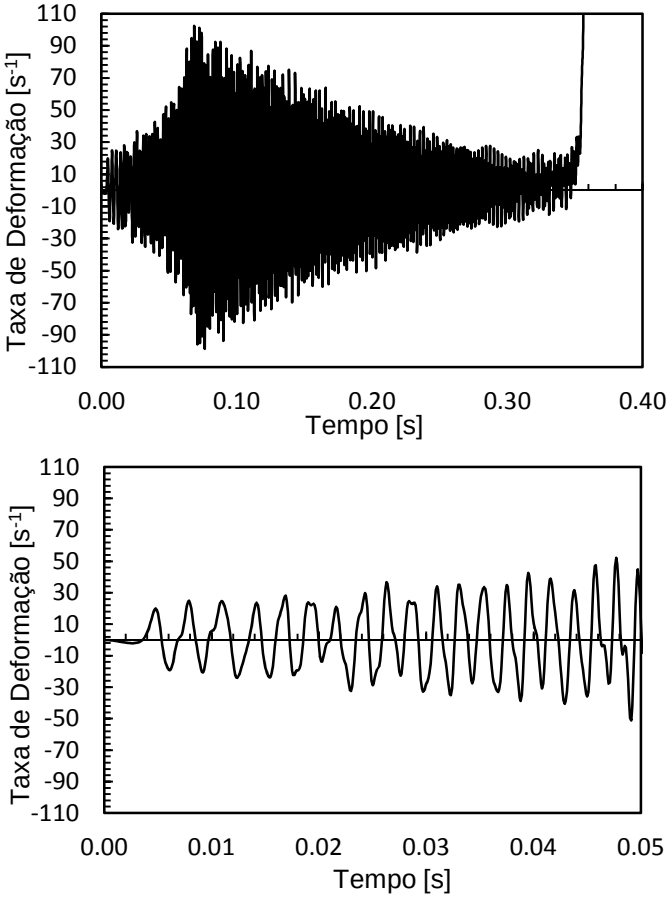
Fonte: produção do próprio autor.

Figura 41 - Histórico da variável de dano referente aos elementos 1 a 6.



Fonte: produção do próprio autor.

Figura 42 - Histórico da taxa de deformação referente aos elementos 1 a 6.



Fonte: produção do próprio autor.

5 CONCLUSÃO

A premissa deste trabalho era apresentar uma formulação contínua unidimensional não linear geométrica transiente e não linear material, e seu posterior tratamento numérico no quadro de um programa de elementos finitos. Dentre as diversas metodologias de expor o problema de equilíbrio e a consideração não linear geométrica, decidiu-se apresentar o problema segundo uma formulação Lagrangeana Corrente, utilizando o princípio das Potências Virtuais. Tendo a matriz de rigidez tangente consistente desenvolvida, o problema transiente foi formulado de forma relativamente fácil, onde as velocidades e acelerações foram aproximadas pelo método de Newmark.

Com o problema não linear geométrico transiente formulado, seguiu-se para a definição do modelo material. Para tal, decidiu-se utilizar o modelo viscoelástico linear generalizado de Kelvin-Voigt juntamente com o modelo viscoplástico de Perzyna acoplado com dano de Lemaitre para a simulação do comportamento uniaxial de materiais poliméricos. Contudo, após um estudo mais detalhado do comportamento fenomenológico dos polímeros, através do exposto na literatura, notou-se que o modelo proposto era capaz de representar as seguintes condições:

I. Ensaios experimentais uniaxiais onde a taxa de deformação é baixa, e para deformações abaixo de 20%, onde teoricamente os processos de degradação material são irrelevantes e podem ser desconsiderados;

II. Ensaios experimentais uniaxiais a altas taxas de deformação, onde o dano evolui rapidamente até a falha do corpo de prova, sem a ocorrência de fluxo plástico em tensão constante (*cold drawing*);

III. Não leva em consideração o comportamento não linear em relação ao carregamento externo.

Sendo definido o campo de validade do modelo material, apresentaram-se as leis de evolução e formulou-se o problema segundo um enfoque termodinâmico com variáveis internas. Para o acoplamento do modelo material no programa de elementos finitos, integraram-se numericamente as leis de evolução, através de método implícito de Euler, resultando o algoritmo de retorno e o módulo tangente consistente analítico. O módulo tangente consistente analítico foi validado através de método da derivada complexa, sendo obtida uma diferença relativa máxima de 0.3% no problema avaliado.

Na metodologia para a identificação dos parâmetros materiais, apresentada no apêndice H, utilizou-se o PSO para realizar o ajuste entre as curvas experimental e teórica. Devido à formulação material ser unidimensional, nesta metodologia não é necessário a chamada do programa de elementos finitos pelo programa de otimização para realizar o ajuste de curvas. Notou-se durante a otimização, que o PSO apresenta alta taxa de convergência. Um fato importante a ser comentado é a não unicidade de soluções durante o processo de identificação dos parâmetros materiais. Estes fatos não foram abordados a fundo no desenvolvimento deste trabalho, pois não é o objetivo do mesmo focar nos detalhes do processo de identificação de parâmetros e do PSO.

Ao final, apresentaram-se algumas particularidades do modelo e resultados numéricos, chegando-se nas seguintes conclusões:

I. Para aplicação em grande parte dos polímeros, o modelo não é capaz de representar a não linearidade em relação ao carregamento nem as regiões II, III e IV do ensaio uniaxial de tração em baixas taxas de deformação (vide Figura 23);

II. O modelo teórico é muito mais sensível a não linearidade em relação ao carregamento, nas simulações de ensaios de fluência do que nas simulações de ensaios uniaxiais de tração ou compressão;

III. As simulações de fluência no programa de elementos finitos, utilizando os parâmetros previamente identificados pela metodologia proposta, tornam-se altamente sensíveis ao coeficiente de Poisson.

IV. Nos ensaios uniaxiais em taxas de deformação relativamente altas, o modelo teórico conseguiu representar de forma adequada as curvas experimentais, sendo o melhor ajuste obtido para o iPP.

V. Notou-se que o melhor ajuste dos parâmetros do modelo de dano de Lemaitre, tanto para o iPP quanto para o PEAD, resultaram em um padrão quase linear da curva tensão-deformação e deformação-dano após o limiar de dano.

VI. Nos exemplos numéricos percebeu-se que em estruturas submetidas a carregamentos bruscos e com mudanças significativas na geometria, é imprescindível que as simulações considerem a não linearidade geométrica e a resposta transiente do campo de deformações e tensões.

VII. Percebeu-se que nas simulações realizadas considerando o modelo de dano acoplado, as respostas estruturais são intuitivamente muito mais realistas do que as resposta obtidas somente com o modelo viscoelástico ou considerando o modelo viscoelástico-viscoplástico sem dano.

VIII. Em ambos os exemplo numéricos apresentados, a evolução do dano ocorreu de forma abrupta e não linear, devido as altas taxas de deformação em que as estruturas estavam sujeitas. Porém o comportamento da variável de dano em função da deformação viscoplástica acumulada é quase linear em ambos os exemplos.

IX. Em ambos os exemplos apresentados, o amortecimento estrutural devido aos processo dissipativos relativos ao encruamento e a degradação material são muito mais significativos que os observados nas análises considerando somente o modelo viscoelástico.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados e dificuldades apresentados durante o desenvolvimento deste trabalho, sugere-se alguns tópicos para futuras contribuições que venham a ser realizadas nesta área.

I. Durante o processo iterativo de Newton-Raphson tanto global quanto local, constatou-se em muitos problemas dificuldades de convergência. Deste modo, sugere-se a implementação de um método mais robusto de solução, como, por exemplo, o método de Newton-Raphson com busca em linha (*line-search*);

II. Sugere-se desenvolver um modelo material acoplado com dano que consiga representar isoladamente o comportamento uniaxial de polímeros em diferentes taxas de deformação;

III. Propõe-se formular uma metodologia que leve em consideração a não linearidade material de certos polímeros referente ao carregamento externo e uma forma consistente de aplicá-la em um programa de elementos finitos.

IV. Em modelos materiais mais complexos torna-se conveniente realizar o cálculo do módulo tangente consistente através do método da derivada complexa. Assim, sugere-se um estudo sobre a viabilidade deste método, analisando o tempo computacional e possíveis problemas numéricos que venham ocorrer, principalmente em modelos 3D.

V. Em materiais onde o comportamento estrutural e os mecanismos de deformação e degradação material são altamente não lineares, como é o caso da maioria dos polímeros, recomenda-se previamente um estudo aprofundado e detalhado do comportamento experimental fenomenológico e, se possível, da característica micromecânica do material. Deste modo, têm-se o mínimo de subsídios para propor um modelo teórico que represente adequadamente a resposta estrutural observada.

REFERÊNCIAS

ALVARADO-CONTRERAS, J. A.; POLAK, M. A.; PENLIDIS, A. Numerical implementation of a damage-coupled material law for semicrystalline polyethylene. **International Journal for Computer-Aided Engineering and Software**, v. 29, p. 295-320, 2012. ISSN 3.

ANDRADE, F. X. C.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Geometric Nonlinear Analysis of 3D Elasto-Viscoplastic Trusses. **XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE**, Guarapari, Espirito Santo, Brasil, 2005.

ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 2ª. ed. San Diego: Elsevier Academic Press, 2004.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

BAZANT, Z. P.; GATTU, M.; VOREL, J. Work conjugacy error in commercial finite-element codes: its magnitude and how to compensate for it. **Proceedings of the Royal Society A: mathematical physical and engineering sciences**, v. 468, p. 3047-3058, 2012. ISSN 2146.

BELLENGER, E.; BUSSY, P. Phenomenological modeling and numerical simulation of different modes of creep damage evolution. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 577-604, 2001.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2006.

BESSON, J. Continuum Models of Ductile Fracture: A Review. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 19, p. 3-53, 2010.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. 1ª. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

BRINSON, H. F.; BRINSON, L. C. **Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction**. New York: Springer Science+Business Media, 2008.

CALCAGNO, B. et al. Comparison of Viscoplastic Properties for Polycarbonate, Polypropylene and High Density Polyethylene. **Journal of Plastics Technology**, n. 6, 2010.

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. O. The GDC method as an orthogonal arc-length method. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 263-271, 2006.

CARNIEL, T. A. **Análise Não Linear Geométrica de Treliças Tridimensionais**. Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville. 2012. Laboratório de Mecânica Computacional - LAMEC.

CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. 3ª. ed. [S.l.]: Prentice-Hall, 2002.

CHEHAB, A. G.; MOORE, I. D. **A Uniaxial Linear Viscoelastic-Viscoplastic Model for High Density Polyethylene**. 57TH CANADIAN GEOTECHNICAL CONFERENCE. Québec: [s.n.]. 2004. p. 1-6. Session 6D.

CHOWDHURY, K. A.; BENZERGA, A. A.; TALREJA, R. An analysis of impact-induced deformation and fracture modes in amorphous glassy polymers. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 75, p. 3328-3342, 2008.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures - Advanced Topics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, v. II, 1997.

CRISFIELD, M. A.; WOOD, R. D. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. 1ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, v. 1, 1991.

DA COSTA MATTOS, H. S.; CHIMISSO, F. E. G. Modelling creep tests in HMPE fibres used in ultra-deep-sea mooring ropes. **International Journal of Solids and Structures**, v. 48, p. 144-152, 2011.

DASARI, A.; MISRA, R. D. K. On the strain rate sensitivity of high density polyethylene and polypropylenes. **Materials Science and Engineering A358**, p. 356-371, 2003.

DE SOUZA NETO, E. A. A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 18, p. 541-554, 2002.

DIEZ, J. M. **Thermoviscoplasticity of Glassy Polymers: Experimental Characterization, Parameter Identification and Model Validation**. Tese de Doutorado. Universität Stuttgart., 2009.

DRIEMEIER, L.; PROENÇA, S. P. B.; ALVES, M. A contribution to the numerical nonlinear analysis of three-dimensional truss systems considering large straisn, damage and plasticity. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 10, p. 515-535, 2005.

DROZDOV, A. D. et al. Viscoelasticity and viscoplasticity of polypropylene/polyethylene blends. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, p. 2498-2507, 2010.

DROZDOV, A. D.; CHRISTIANSES, J. D. C.; POTARNICHE, C. G. Constitutive modeling of the viscoelastic and viscoplastic responses of metallocene catalyzed polypropylene. **Multidiscipline Modeling in Materials and Structures**, v. 8, p. 380-402, 2012. ISSN 3.

DUNNE, F.; PETRINIC, N. **Introduction to Computational Plasticity**. New York: Oxford University Press, 2006.

ESMAEILI, M.; ÖCHSNER, A. A one-dimensional implementation of a coupled elasto-plastic model for ductile damage. **Mat.-wiss. U. Werkstofftech**, v. 42, p. 444-451, 2011. ISSN 5.

FREITAS, A. **Modelagem da evolução do dano ortotrópico acoplado à elastoplasticidade em metais**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, Santa Catarina, 2010.

GADALA, M. S.; DOKAINISH, M. A.; ORAVAS, G. A. E. Formulation Methods of Geometric and Material Nonlinearity Problems. **International Journal for Numerical Method in Engineering**, v. 20, p. 887-914, 1984.

HINTON, E. **Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. [S.l.]: NAFEMS, 1992.

HOLMES, D. W. **Aspects of a Finite Strain Constitutive Model for Semicrystalline Polymers**. Tese de Doutorado. James Cook University., 2007.

JOHNSON, A. R. Modeling Viscoelastic Materials Using Internal Variables. **The Shock and Vibration Digest**, v. 31, p. 91-100, 1999. ISSN 2.

KACHANOV, L. M. Time of the Rupture Process Under Creep Conditions. **Ivz. Akad. Nauk**, Otdel, v. 8, p. 28-31, 1958. (em russo).

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. **Particle swarm optimization**. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway: [s.n.]. 1995. p. 1942-1948.

KRAJCINOVIC, D. **Damage Mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 1996.

KUO, S.; YANG, Y. **Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures**. 1ª. ed. Singapura: Simon and Schuster Pte. Ltd., 1994.

KUO, S.; YANG, Y. Tracing Postbuckling Paths of Structures Containing Multi-Loops. **International Journal for Numerical Method in Engineering**, v. 38, p. 4053-4075, 1995.

LANGE, M. R. **Efeitos Acoplados da Temperatura e Evolução de Dano em Meios Contínuos Elasto-Plásticos.** Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville, Santa Catarina, 2011.

LEMAITRE, J. How to use Damage Mechanics. **Nuclear engineering and design**, v. 80, p. 233-245, 1984.

LEMAITRE, J. **A Course on Damage Mechanics**. [S.l.]: Springer, 1996.

LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. **Engineering Damage Mechanics**. Berlim: Springer, 2005.

LIU, H. **Material Modelling for Structural Analysis of Polyethylene**. Dissertação de Mestrado. University of Waterloo. Waterloo, Ontario, 2007.

LOUCHE, H. et al. An experimental and modeling study of the thermomechanical behavior of an ABS polymer structural component during an impact test. **International Journal of Impact Engineering**, v. 36, p. 847-861, 2009.

LUBLINER, J. **Plasticity Theory**. [S.l.]: Pearson Education, 2006. Revised Edition (PDF).

LYNESS, J. N.; MOLER, C. B. Numerical Differentiation of Analytic Funtions. **SIAM Journal of Numerical**, v. 4, p. 202-210, 1967.

MALVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1969.

MARTINS, J. R. R. A.; STURDZA, P.; ALONSO, J. J. The Complex-Step Derivative Approximation. **ACM Transactions on Mathematical Software**, v. 29, p. 245-262, 2003. ISSN 3.

MILED, B. **Coupled viscoelastic-viscoplastic modeling of homogeneous and reinforced thermoplastic polymers**. Tese de Doutorado. Université Catholique de Louvain., 2011.

MORYE, S. S. et al. Modelling of the energy absorption by polymer composites upon ballistic impact. **Composites Science and Technology**, v. 60, p. 2631-2642, 2000.

MUNDSTOCK, D. C. **Otimização de Forma Utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Cálculo de Sensibilidade por Variáveis Complexas.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2006.

MUÑOZ-ROJAS, P. A. **Otimização de Pré-Formas e Matrizes em Problemas Bidimensionais de Forjamento**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2003.

MUÑOZ-ROJAS, P. A. et al. Modeling Nonlinear Viscoelastic Behavior of High Density Polyethylene (HDPE): Application of Stress-Time Equivalence Versus Interpolation of Rheological Properties. **III International Symposium on Solid Mechanics - MecSol 2011**, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 2011.

MUÑOZ-ROJAS, P. A.; DUARTE FILHO, L. **Análise Não-Linear Geométrica e Material de Treliças Espaciais**. UFRGS. [S.l.]. 2001.

NEDJAR, B.; LE ROY, R. An approach to the modeling of viscoelastic damage. Application to the long-term creep of gypsum rock materials. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2012.

ORAL, A.; ANLAS, G. Determination of Gurson-Tvergaard-Needleman Model Parameters for Failure of a Polymeric Material. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 21, p. 3-25, 2012.

PEDERSEN, M. E. H. **Good Parameters for Particle Swarm Optimization**. Hvass Laboratories. [S.l.]. 2010. (Technical Report no. HL1001).

PIRES, F. M. A. **Modelação por Elementos Finitos da Iniciação da Fractura Dúctil nos Processos de Enformação Plástica em Massa**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto., 2001.

PIRES, F. M. A. **Issues on the Finite Element Modelling of Degradation and Prediction of Failure in Finitely Straining Ductile Materials**. Tese de Doutorado. University of Wales. Swansea, 2005.

PONTHOT, J. P.; KLEINERMANN, J. P. A cascade optimization methodology for automatic parameter identification and shape/process optimization in metal forming simulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 5472-5508, 2006.

RABOTNOV, Y. N. On the Equations of State for Creep. **Progress in Applied Mechanics**, New York: Macmillan, 1963.

RABOTNOV, Y. N. Creep rupture. **In Proc.: XII International Congress on Applied Mechanics**, Standford, p. 342-369, 1968.

REDDY, J. N. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. New York: Oxford University Press, 2004.

ROSENDO, M. **Um Algoritmo De Otimização Por Nuvem De Partículas Para Resolução De Problemas Combinatórios**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, Paraná, 2010.

SHAW, M. T.; MACKNIGHT, W. J. **Introduction to Polymer Viscoelasticity**. 3ª. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005.

SILVA, H. N. **Caracterização Viscoelástica Linear de Misturas Asfálticas: Operacionalização Computacional e Análise pelo Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, Ceará, 2009.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. **Computational Inelasticity**. New York: Springer-Verlag, 1998.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. Consistant tangent operators for rate-dependent elastoplasticity. **Computer Methods in applied mecchanis and engineering**, v. 48, p. 101-118, 1985.

SOUZA NETO, E. A. D.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity:** Theory and Applications. 1ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2008.

STAHLSCHMIDT, J. **Análise De Sensibilidade Em Problemas Não Lineares Via Método Semi Analítico Utilizando Variáveis Complexas: Aplicação Em Parâmetros Materiais E Geométricos**. Dissertação de Mestrado. Universidade do Estado de Santa Catarina. Joinville, Santa Catarina, 2013.

TVERGAARD, V.; NEEDLEMAN, A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. **Acta metallurgica**, v. 32, p. 157-169, 1984. ISSN 1.

VAZ JR., M.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; LANGE, M. R. Damage evolution and thermal coupled effects in inelastic solids. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 53, p. 387-398, 2011. ISSN 5.

VOCE, E. A practical strain-hardening function. **Metallurgica**, v. 51, p. 219-226, 1955.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

YANG, Y.; SHIEH, M. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.

ZHANG, C.; MOORE, I. D. Nonlinear Mechanical Response of High Density Polyethylene. Part I: Experimental Investigation and Model Evaluation. **Polymer Engineering and Science**, v. 37, p. 404-413, 1997. ISSN 2.

ZIENKIEWICZ, O. C.; WATSON, M.; KING, I. P. A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 10, p. 807-827, 1968.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Cômputo de $\partial \boldsymbol{c_x} / \partial \boldsymbol{q^g}$

APÊNDICE B - Cômputo de $\partial \sigma / \partial \boldsymbol{q^l}$

APÊNDICE C - Cômputo de $\partial L^{-1} / \partial \boldsymbol{q^l}$

APÊNDICE D - Cômputo de $\partial A / \partial \boldsymbol{q^l}$

APÊNDICE E - Módulo tangente algorítmico viscoelástico

APÊNDICE F - Módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico

APÊNDICE G - Módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico com dano acoplado

APÊNDICE H - Metodologia para a identificação dos parâmetros materiais

APÊNDICE A - Cômputo de $\partial \boldsymbol{c_x}/\partial \boldsymbol{q^g}$

Pelo conceito da derivada direcional avalia-se a variação de $\boldsymbol{c_x}(\boldsymbol{q^g})$ em uma direção arbitrária $\boldsymbol{w}$ a partir da variação de $\boldsymbol{c_x}(\boldsymbol{q^g} + \epsilon \boldsymbol{w})$ em relação a ϵ para $\epsilon = 0$. Assim, a derivada direcional da equação (2.56) é apresentada como,

$$\frac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q^g}} \boldsymbol{w} = \frac{d}{d\epsilon} [\boldsymbol{c_x}(\boldsymbol{q^g} + \epsilon \boldsymbol{w})]\Big|_{\epsilon=0} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q^g}} \boldsymbol{w} &= \frac{d}{d\epsilon} [\boldsymbol{G}\boldsymbol{x_G}\,(\boldsymbol{q^g} + \epsilon \boldsymbol{w})]\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} [\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{X_G} + \boldsymbol{q^g} + \epsilon \boldsymbol{w})]\Big|_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q^g}} \boldsymbol{w} = \left[\boldsymbol{G}\,\frac{d}{d\epsilon}(\boldsymbol{X_G} + \boldsymbol{q^g} + \epsilon \boldsymbol{w})\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{A.3}$$

Realizando a derivada em relação a ϵ, chega-se em,

$$\frac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q^g}} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{w} \tag{A.4}$$

Comparando os dois lados da igualdade na equação (A.4) fica evidente que,

$$\frac{\partial \boldsymbol{c_x}}{\partial \boldsymbol{q^g}} = \boldsymbol{G} \tag{A.5}$$

APÊNDICE B - Cômputo de $\partial\sigma/\partial\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}$

Para o cálculo de $\partial\sigma/\partial\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}$ necessita-se, a priori, de uma relação da qual seja possível obter o campo de tensões a partir do movimento cinemático do corpo. Este movimento cinemático é obtido através de um campo de deslocamentos e pode ser descrito por alguma medida de deformação. Deste modo, as relações entre as medidas de tensão e de deformação são conhecidas como relações constitutivas, e apresentadas, genericamente, da seguinte forma,

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{B.1}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^*$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ são medidas tensoriais de segunda ordem de tensão e de deformação, respectivamente, as quais devem ser energeticamente conjugadas. $\mathbb{C}^*$ é denominado de tensor constitutivo material, o qual é um tensor de quarta ordem que contêm as propriedades do material.

No modelamento material fenomenológico, a relação constitutiva é utilizada para representar certos fenômenos físicos experimentais, como um ensaio de tração, por exemplo. Deste modo, independente de qual modelo material e quais os conjugados energéticos sejam utilizados, os parâmetros materiais do tensor constitutivo devem ser ajustados aos ensaios experimentais. Deste modo, pode-se representar de forma adequada simulações onde os fenômenos físicos observados nos experimentos sejam predominantes.

Neste trabalho, o equilíbrio estrutural foi obtido através do princípio das potências virtuais. Deste modo o conjugado energético da tensão de Cauchy é a perturbação virtual da taxa de deformação, sendo que a relação constitutiva unidimensional em forma de taxas é apresentada como,

$$\dot{\sigma} = \mathcal{C}^{\sigma d} d \tag{B.2}$$

Como esta relação constitutiva está em forma de taxas recebe o nome de relação hipoelástica. Com frequência a equação (B.2), com um $\mathcal{C}^{\sigma d}$ conveniente, é usada como a

equação constitutiva fundamental que define o comportamento material. Porém, para modelos bidimensionais ou tridimensionais, tal aproximação não garante um caráter hiperelástico ao material, sendo que as tensões não podem ser obtidas diretamente de um potencial elástico (vide seção 3.2). Nestes casos, as equações em formas de taxas devem ser integradas no tempo, causando assim, dificuldades substanciais em uma análise de elementos finitos, devido a problemas associados com a objetividade sobre incrementos finitos de tempo (BONET e WOOD, 1997). Outro problema relatado por Bazant, Gattu e Vorel (2012) é o uso de relações constitutivas hipoelásticas utilizando pares energeticamente não conjugados, o que é comum em programas comerciais de elementos finitos. Porém, segundo Belytschko, Liu e Moran (2006) e Dunne e Petrinic (2006), integrando a equação (B.2) em relação ao tempo, a mesma é transformada em uma relação hiperelástica, dada por,

$$\sigma = \mathcal{C}^{\sigma\varepsilon} ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \mathcal{C}^{\sigma\varepsilon}\,\varepsilon \tag{B.3}$$

onde ε é o tensor deformação logarítmico. Uma observação importante é que a transformação da relação constitutiva hipoelástica (B.2) em uma relação hiperelástica somente resultará na medida de deformação logarítmica para problemas unidimensionais. Isto se deve ao fato de que as relações constitutivas hiperelásticas são obtidas através de funções potenciais, como abordado na seção 3.2, e não através da integração temporal de relações constitutivas hipoelásticas.

Como a cálculo de $\partial\sigma/\partial\boldsymbol{q^l}$ não é direto, o mesmo pode ser obtido através da regra da cadeia em relação ao tensor deformação logarítmico. Deste modo,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\boldsymbol{q^l}} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\boldsymbol{q^l}} \tag{B.4}$$

Utilizando a relação constitutiva obtida na equação (B.3), o primeiro termo da equação (B.4) fica,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \mathcal{C}^{\sigma\varepsilon} \tag{B.5}$$

Para realizar a derivada do segundo termo da equação (B.4), necessita-se escrever a deformação logarítmica em função dos deslocamentos nodais locais. Deste modo, escrevendo a deformação logarítmica em função da componente axial do tensor alongamento esquerdo $\boldsymbol{V}$, tem-se,

$$\varepsilon = ln(V_{11}) \tag{B.6}$$

onde V_{11} é definido na equação (2.10) e dado por,

$$V_{11} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \tag{B.7}$$

Analisando a equação (2.24) o deslocamento local no sentido axial da barra é aproximado por,

$$u^l{}_1 \cong \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

Se neste caso as funções de interpolação lineares N_1 e N_2 forem referenciadas ao sistema de referência local material $\boldsymbol{X}$, a derivada da equação (B.8) em relação à coordenada X_1 e obtida por,

$$\frac{\partial u^l{}_1}{\partial X_1} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X_0}} \boldsymbol{q^l} \tag{B.9}$$

onde,

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X_0}} = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

Substituindo a equação (B.9) em (B.7) e posteriormente na equação (B.6), chega-se em,

$$\varepsilon \cong ln\left(1 + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X_0}} \boldsymbol{q^l}\right) \tag{B.11}$$

Derivando a equação (B.11) pelo conceito da derivada direcional,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{q^l}} \boldsymbol{w} = \frac{d}{d\epsilon} \left[\varepsilon\left(\boldsymbol{q^l} + \epsilon \boldsymbol{w}\right)\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{B.12}$$

Substituindo a equação (B.11) na equação (B.12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{q^l}} \boldsymbol{w} &= \frac{d}{d\epsilon} \left[ln\left(1 + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X_0}} \boldsymbol{q^l} + \epsilon \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X_0}} \boldsymbol{w}\right)\right]\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left[ln(D)\right]\Big|_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{B.13}$$

onde $D = 1 + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X_0}} \boldsymbol{q^l} + \epsilon \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X_0}} \boldsymbol{w}$. Derivando em relação a ϵ, chega-se em,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\boldsymbol{w} = \left[\frac{1}{D}\frac{dD}{d\epsilon}\right]\Bigg|_{\epsilon=0} = \left[\left(\frac{1}{1+\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}+\epsilon\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{w}}\right)\left(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{w}\right)\right]\Bigg|_{\epsilon=0} \tag{B.14}$$

e para $\epsilon = 0$,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\boldsymbol{w} = \left[\left(\frac{1}{1+\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\right)\left(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{w}\right)\right] = \left(\frac{\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}}{1+\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\right)\boldsymbol{w} \tag{B.15}$$

Assim,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}} = \left(\frac{\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}}{1+\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\right) \tag{B.16}$$

Finalmente, substituindo as equações (B.5) e (B.16) na equação (B.4), chega-se em,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}} = \mathcal{C}^{\sigma\varepsilon}\left(\frac{\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}}{1+\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}_0}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{l}}}\right) \tag{B.17}$$

APÊNDICE C - Cômputo de $\partial L^{-1}/\partial \boldsymbol{q^l}$

Das equações (B.3) e (B.6) a deformação logarítmica pode ser escrita como,

$$\varepsilon = ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = ln(V_{11}) \tag{C.1}$$

Da equação (B.7) sabe-se que $V_{11} \cong 1 + \boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}$. Substituindo na equação (C.1) e isolando para L, chega-se em,

$$L = L_0 e^{ln\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}\right)} \tag{C.2}$$

Aplicando a definição da derivada direcional em L^{-1},

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \frac{d}{d\epsilon}\left[L^{-1}\left(\boldsymbol{q^l} + \epsilon \boldsymbol{w}\right)\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \frac{d}{d\epsilon}\left\{\left[L_0 e^{ln\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}+\epsilon\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}\right)}\right]^{-1}\right\}\Big|_{\epsilon=0} \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \frac{d}{d\epsilon}\left\{\left[L_0 e^{ln(D)}\right]^{-1}\right\}\Big|_{\epsilon=0} \tag{C.5}$$

onde $D = 1 + \boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l} + \epsilon\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}$. Derivando em relação a ϵ, chega-se em,

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left\{-\left[\left(L_0 e^{ln(D)}\right)^{-2}\left(\frac{d}{d\epsilon}L_0 e^{ln(D)}\right)\right]\right\}\Big|_{\epsilon=0} \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left\{-\left[\left(L_0 e^{ln(D)}\right)^{-2}\left(L_0 e^{ln(D)}\right)\left(D^{-1}\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}\right)\right]\right\}\Big|_{\epsilon=0} \tag{C.7}$$

Para $\epsilon = 0$,

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = -\left[(L_0 e^{\varepsilon})^{-2}(L_0 e^{\varepsilon})\left(\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}\right)^{-1}\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}\right)\right] \qquad \text{(C.8)}$$

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = -\left[(L_0 e^{\varepsilon})^{-1}\left(\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}\right)^{-1}\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}\right)\right] \qquad \text{(C.9)}$$

Assim, conclui-se que,

$$\frac{\partial L^{-1}}{\partial \boldsymbol{q^l}} = -(L_0 e^{\varepsilon})^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}}\right) \qquad \text{(C.10)}$$

APÊNDICE D - Cômputo de $\partial A/\partial \boldsymbol{q^l}$

Para obter a derivada da área em relação aos deslocamentos locais nodais, necessita-se primeiramente obter uma relação de atualização das mesmas em função dos deslocamentos. Deste modo, Crisfield e Wood (1991) apresentam uma relação de atualização das áreas baseando-se na definição do coeficiente de Poisson ν. Esta consideração leva em conta deformações perpendiculares ao eixo axial da barra. Deste modo, toda a seção transversal ao longo do comprimento da barra é atualizada de forma homogênea, segundo a seguinte expressão,

$$A = A_0 \left(\frac{L_0}{L}\right)^{2\nu} \tag{D.1}$$

O comprimento discretizado a partir da deformação logarítmico, obtido pela equação (C.2) é dado por $L = L_0 e^{\varepsilon} \cong L_0 e^{ln\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q}\right)}$. Substituindo na equação (D.1),

$$A = A_0 \left(\frac{L_0}{L_0 e^{\varepsilon}}\right)^{2\nu} = A_0 \left(\frac{1}{e^{ln\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}\right)}}\right)^{2\nu} \tag{D.2}$$

Aplicando a definição da derivada direcional,

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \frac{d}{d\epsilon}\left[A\left(\boldsymbol{q^l} + \epsilon \boldsymbol{w}\right)\right]\Big|_{\epsilon=0} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} &= \frac{d}{d\epsilon}\left[A_0\left(\frac{1}{e^{ln\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}+\epsilon\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}\right)}}\right)^{2\nu}\right]\Bigg|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon}\left[A_0\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)^{2\nu}\right]\Bigg|_{\epsilon=0}\end{aligned} \tag{D.4}$$

onde $D = 1 + \boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l} + \epsilon\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}$. Derivando em relação a ϵ, obtêm-se,

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left[A_0 \frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)^{2\nu}\right]\Bigg|_{\epsilon=0} \tag{D.5}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left\{A_0\left[2\nu\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)^{2\nu-1}\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\epsilon=0}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left\{A_0\left[2\nu\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)^{2\nu-1}\left(-\frac{d}{d\epsilon}e^{ln(D)}/\left(e^{ln(D)}\right)^2\right)\right]\right\}\Bigg|_{\epsilon=0}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left\{-A_0\left[2\nu\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)^{2\nu-1}\left(e^{ln(D)}\frac{d}{d\epsilon}ln(D)/\left(e^{ln(D)}\right)^2\right)\right]\right\}\Bigg|_{\epsilon=0}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left\{-A_0\left[2\nu\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)^{2\nu-1}\left(\frac{1}{D}\frac{dD}{d\epsilon}/e^{ln(D)}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\epsilon=0}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = \left\{-A_0\left[2\nu\left(\frac{1}{e^{ln(D)}}\right)^{2\nu-1}\left(\frac{1}{D}\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{w}/e^{ln(D)}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\epsilon=0} \tag{D.6}$$

Aplicando $\epsilon = 0$,

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}}\boldsymbol{w} = -A_0\left[2\nu\left(\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right)^{2\nu-1}\left(\frac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}\right)}\boldsymbol{w}/e^{\varepsilon}\right)\right] \tag{D.7}$$

Assim, nota-se que,

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q^l}} = -\left[A_0 2\nu\left(\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right)^{2\nu}\right]\left(\frac{\boldsymbol{B_{X_0}}}{\left(1+\boldsymbol{B_{X_0}}\boldsymbol{q^l}\right)}\right) \tag{D.8}$$

APÊNDICE E - Módulo tangente algorítmico viscoelástico

O módulo tangente algoritmo viscoelástico é obtido por,

$$\mathcal{C}^{vepd} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{t}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \;\; se \;\; \Phi_{n+1}^{t} \leq 0 \tag{E.1}$$

Segundo a Figura 16, a tensão teste é obtida por,

$$\sigma_{n+1}^{t} = (1 - D_n) E_0 \left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{v} - \varepsilon_{n}^{vp} \right) \tag{E.2}$$

Realizando a derivada em relação a deformação total, chega em,

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{t}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = (1 - D_n) E_0 \left(1 - \frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{v}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) \tag{E.3}$$

Sendo,

$$\varepsilon_{n+1}^{v} = \sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_{j\;\;n+1}^{v} \tag{E.4}$$

sua derivada em relação a deformação total é,

$$\frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{v}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left(\sum_{j=1}^{nbr} \varepsilon_{j\;\;n+1}^{v} \right) = \sum_{j=1}^{nbr} \frac{\partial \varepsilon_{j\;\;n+1}^{v}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \tag{E.5}$$

Da equação (3.78), tem-se que a deformação viscosa de cada bloco reológico de Kelvin é obtido por,

$$\boldsymbol{H} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{v} = \boldsymbol{b} \tag{E.6}$$

onde o vetor $\boldsymbol{b}$ pode ser escrito como,

$$\boldsymbol{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1\ \varepsilon^v_{1\,n} \\ \tau_2\ \varepsilon^v_{2\,n} \\ \vdots \\ \tau_{(nbr-1)}\ \varepsilon^v_{(nbr-1)_n} \\ \tau_{nbr}\ \varepsilon^v_{nbr_n} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b_1}} + \varepsilon_{n+1} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta t\ \omega_1 \\ \Delta t\ \omega_2 \\ \vdots \\ \Delta t\ \omega_{(nbr-1)} \\ \Delta t\ \omega_{nbr} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b_2}} \tag{E.7}$$

O sistema da equação (E.6) pode ser reescrito como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{v}}_{n+1} = \boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{b_1} + \varepsilon_{n+1}\boldsymbol{b_2}) \tag{E.8}$$

Assim, a derivada de cada deformação viscosa em relação à deformação total é obtida por,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{v}}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{b_2} \tag{E.9}$$

onde $\boldsymbol{a}$ é o vetor correspondente a solução do sistema linear. Deste modo, o módulo tangente algoritmo viscoelástico é apresentado como,

$$\mathcal{C}^{vepd} = \frac{\partial \sigma^t_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = (1 - D_n)E_0\left(1 - \sum_{j=1}^{nbr} a_j\right)\ se\ \ \Phi^{\mathrm{t}}_{n+1} \leq 0 \tag{E.10}$$

APÊNDICE F - Módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico

O módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico é obtido abaixo do limiar de dano.

$$\mathcal{C}^{vepd} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \;\; se \;\; \Phi_{n+1}^{t} > 0 \;\; \rightarrow \; \left(para \; \bar{\varepsilon}^{vp} < \bar{\varepsilon}_{D}^{vp}\right) \qquad \text{(F.1)}$$

Deste modo, a relação tensão-deformação é escrita como,

$$\sigma_{n+1} = E_0\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{v} - \varepsilon_{n+1}^{vp}\right) \qquad \text{(F.2)}$$

Realizando a derivada em relação à deformação total, chega em,

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = E_0\left(1 - \frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{v}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{\partial \varepsilon_{n+1}^{vp}}{\partial \varepsilon_{n+1}}\right) \qquad \text{(F.3)}$$

Assim, obtendo as derivadas da equação (F.3), o módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico é apresentado por,

$$\mathcal{C}^{vepd} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\mathcal{A}_5}{\mathcal{A}_4} \;\; se \;\; \Phi_{n+1}^{t} > 0 \;\; \rightarrow \; \left(para \; \bar{\varepsilon}^{vp} < \bar{\varepsilon}_{D}^{vp}\right) \qquad \text{(F.4)}$$

sendo que,

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \dfrac{\left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right)}{\varepsilon_c} e^{-\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}/\varepsilon_c\right)} + K \\ \mathcal{A}_2 = 1 + \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_3 = \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} sign(\sigma_{n+1}^t) \\ \mathcal{A}_4 = 1 + \dfrac{E_0 \mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_2} sign(\sigma_{n+1}^t) \\ \mathcal{A}_5 = E_0 \left(1 - \sum_{j=1}^{nbr} a_j \right) \end{cases} \tag{F.5}$$

onde a_j é definido na equação (E.9).

APÊNDICE G - Módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico com dano acoplado

O módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico com dano acoplado deve ser calculado a partir do limiar de dano.

$$\mathcal{C}^{vepd} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad se \;\; \Phi^{\mathrm{t}}_{n+1} > 0 \;\; \rightarrow \; \left(para \; \bar{\varepsilon}^{vp} \geq \bar{\varepsilon}^{vp}_{D}\right) \qquad \text{(G.1)}$$

Deste modo, a relação tensão-deformação é escrita como,

$$\sigma_{n+1} = (1 - D_{n+1}) E_0 \left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon^{v}_{n+1} - \varepsilon^{vp}_{n+1}\right) \qquad \text{(G.2)}$$

Realizando a derivada em relação à deformação total, chega em,

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = (1 - D_{n+1}) E_0 \left(1 - \frac{\partial \varepsilon^{v}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} - \frac{\partial \varepsilon^{vp}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}\right) - \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \, E_0 \, \varepsilon^{e}_{n+1} \qquad \text{(G.3)}$$

onde $\varepsilon^{e}_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon^{v}_{n+1} - \varepsilon^{vp}_{n+1}$.

Assim, obtendo as derivadas da equação (G.3), o módulo tangente algorítmico viscoelástico-viscoplástico levando em consideração o dano, é apresentado por,

$$\mathcal{C}^{vepd} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\mathcal{B}_{15}}{\mathcal{B}_{14}} \quad se \;\; \Phi^{\mathrm{t}}_{n+1} > 0 \;\; \rightarrow \; \left(para \; \bar{\varepsilon}^{vp} \geq \bar{\varepsilon}^{vp}_{D}\right) \qquad \text{(G.4)}$$

sendo que,

$$
\begin{cases}
\mathcal{B}_1 = \dfrac{\left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right)}{\varepsilon_c} e^{-\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{vp}/\varepsilon_c\right)} + K \\
\mathcal{B}_2 = 1 + \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{\mathcal{B}_1}{(1 - D_{n+1})} \\
\mathcal{B}_3 = \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{sign(\sigma_{n+1}^t)}{(1 - D_{n+1})} \\
\mathcal{B}_4 = \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{|\sigma_{n+1}|}{(1 - D_{n+1})^2} - \dfrac{\Delta t}{\eta_{vp}} \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}\, \mathcal{B}_1}{(1 - D_{n+1})^2} \\
\mathcal{B}_5 = -\dfrac{\sigma_{n+1}}{4E_0^3 (1 - D_{n+1})^6} \\
\mathcal{B}_6 = \dfrac{\sigma_{n+1}^2}{4E_0^3 (1 - D_{n+1})^7} \\
\mathcal{B}_7 = \dfrac{1}{(1 - D_{n+1})} \left(\dfrac{-Y_{n+1}}{r}\right)^s \dfrac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_2} \\
\mathcal{B}_8 = \dfrac{1}{(1 - D_{n+1})} \left(\dfrac{-Y_{n+1}}{r}\right)^s \dfrac{\mathcal{B}_4}{\mathcal{B}_2} \\
\mathcal{B}_9 = \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}}{(1 - D_{n+1})^2} \left(\dfrac{-Y_{n+1}}{r}\right)^s \\
\mathcal{B}_{10} = -\dfrac{s\, \Delta\gamma_{n+1}}{r\, (1 - D_{n+1})} \left(\dfrac{-Y_{n+1}}{r}\right)^{s-1} \mathcal{B}_5 \\
\mathcal{B}_{11} = -\dfrac{s\, \Delta\gamma_{n+1}}{r\, (1 - D_{n+1})} \left(\dfrac{-Y_{n+1}}{r}\right)^{s-1} \mathcal{B}_6 \\
\mathcal{B}_{12} = \dfrac{\mathcal{B}_7 + \mathcal{B}_{10}}{1 - \mathcal{B}_8 - \mathcal{B}_9 - \mathcal{B}_{11}} \\
\mathcal{B}_{13} = \dfrac{sign(\sigma_{n+1}^t)}{(1 - D_{n+1})} \left[\dfrac{\mathcal{B}_3}{\mathcal{B}_2} + \dfrac{\mathcal{B}_4 \mathcal{B}_{12}}{\mathcal{B}_2} + \dfrac{\Delta\gamma_{n+1}\, \mathcal{B}_{12}}{(1 - D_{n+1})}\right] \\
\mathcal{B}_{14} = 1 + \mathcal{B}_{12}\, E_0\, \varepsilon_{n+1}^e + (1 - D_{n+1})\, E_0\, \mathcal{B}_{13} \\
\mathcal{B}_{15} = (1 - D_{n+1}) E_0 \left(1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{nbr} a_j\right)
\end{cases}
\tag{G.5}
$$

onde a_j é definido na equação (E.9).

APÊNDICE H - Metodologia para a identificação dos parâmetros materiais

Para saber se o modelo teórico proposto consegue representar de forma satisfatória o comportamento uniaxial de polímeros, deve-se encontrar um conjunto de parâmetros materiais fisicamente consistentes com o ensaio experimental. O procedimento para encontrar este conjunto de parâmetros materiais é conhecido, geralmente, com ajuste de curvas ou ajuste de parâmetros.

Tendo em mãos a curva experimental, simula-se o mesmo ensaio numericamente e através de algum método de otimização, minimiza-se o erro entre as curvas experimental e numérica. Deste modo, os parâmetros materiais são ajustados de maneira que os pontos da curva teórica se aproximem ao máximo dos pontos da curva experimental.

No contexto de otimização, o problema de ajuste de parâmetros pode ser posto como,

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{x}}{\text{Min}} \qquad F_{obj}(\boldsymbol{x}) \\ &T.q. \qquad \underline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{x} \leq \overline{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{H.1}$$

onde $F_{obj}(\boldsymbol{x})$ é denominada de função objetivo, $\boldsymbol{x}$ é o vetor de variáveis a serem otimizadas, que neste caso são os parâmetros materiais. $\underline{\boldsymbol{x}}$ e $\overline{\boldsymbol{x}}$ são os limites laterais inferior e superior, os quais definem a região viável de busca. A função objetivo pode ser definida de vários modos. Porém, neste trabalho decidiu-se minimizar a norma euclidiana da diferença entre os pontos das curvas experimental $\boldsymbol{f_{exp}}$ e numérica $\boldsymbol{f_{num}}$. Assim, a função objetivo é apresentada como,

$$F_{obj} = \left\| \boldsymbol{f_{exp}} - \boldsymbol{f_{num}} \right\|_2 \tag{H.2}$$

Diferentes métodos e estratégias de otimização podem ser utilizados para realizar o ajuste de parâmetros. Em Arora (2004) pode-se encontrar inúmeros métodos de otimização que

podem ser utilizados para solucionar o problema proposto na equação (H.1), sendo alguns deles baseados em gradientes e outros heurísticos, como é o caso dos Algoritmos Genéticos. Cada método de otimização tem suas peculiaridades e não é o objetivo explorar estes detalhes.

Neste trabalho decidiu-se utilizar o método de Otimização por Enxame de Partículas – *Particle Swarm Optimization* (PSO) para realizar o ajuste dos parâmetros materiais. Segundo Rosendo (2010) o PSO é um método de otimização desenvolvido nos anos 90 por Kennedy e Eberhart (1995) baseado na análise do comportamento inteligente de revoadas de pássaros. Sendo o PSO um algoritmo de ordem zero, isto é, que não é baseado em derivadas, o processo de solução é mais custoso se comparado aos algoritmos baseados em gradientes. Porém, para problemas não convexos, envolvendo poucas variáveis de projeto e onde a obtenção dos gradientes não é trivial, o PSO torna-se uma boa alternativa. Como características principais, o algoritmo apresenta uma alta taxa de convergência, evita mínimos locais e é de fácil implementação. O código do PSO foi implementado seguindo o trabalho de Pedersen (2010), sendo o algoritmo apresentado na Figura 43. As variáveis w, c_p e c_g são parâmetros estipulados pelo usuário. Neste trabalho utilizou-se $c_p = c_g = 0.5$, $w = 1.2$ e 100 partículas.

Como o modelo material é uniaxial, o ajuste de parâmetros pode ser realizado sem a necessidade da simulação do ensaio no programa de elementos finitos. Considerando o comportamento material viscoelástico linear, primeiramente ajustam-se os parâmetros viscoelásticos da equação (3.3) através de um ensaio de fluência a uma tensão baixa. Porém, para garantir que esta tensão esteja abaixo da tensão de escoamento inicial, um ensaio experimental de fluência e recuperação deve ser realizado para detectar a ocorrência de deformação viscoplástica acumulada $\bar{\varepsilon}^{vp}$, como apresentado na Figura 44.

Figura 43 - Algoritmo do método PSO.

DADOS DE ENTRADA: $\{w,\ c_p,\ c_g, \overline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{x}}\}$

<u>Inicializar cada posição e velocidade das partículas com valores randômicos no domínio viável de busca:</u>

$\boldsymbol{x} \leftarrow Rand(\underline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}})$;

$\boldsymbol{v} \leftarrow Rand(\underline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{v}})\ onde\ \begin{cases} \underline{\boldsymbol{v}} = -|\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}| \\ \overline{\boldsymbol{v}} = |\overline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}| \end{cases}$;

<u>Assumir a melhor posição conhecida de cada partícula com sendo a posição inicial:</u>

$\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{x}$;

<u>Encontrar a melhor posição conhecida inicial da nuvem:</u>

$\boldsymbol{g} \leftarrow \boldsymbol{x}\ \ para\ o\ menor\ valor\ de\ \ F_{obj}(\boldsymbol{x})$;

ENQUANTO $(assumir\ algum\ critério\ de\ parada)$:

LAÇO sobre as partículas da nuvem:

<u>Obter valores randômicos:</u>

$r_p, r_g \leftarrow Rand(0,1)$;

<u>Calcular a velocidade da partícula:</u>

$\boldsymbol{v} \leftarrow w\boldsymbol{v} + c_p r_p(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{x}) + c_g r_g(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{x})$;

<u>Manter a velocidade dentro dos limites viáveis:</u>

$\underline{\boldsymbol{v}} \leq \boldsymbol{v} \leq \overline{\boldsymbol{v}}$;

<u>Atualizar a posição da partícula:</u>

$\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$;

<u>Manter a posição dentro dos limites viáveis:</u>

$\underline{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{x} \leq \overline{\boldsymbol{x}}$;

SE $\left(F_{obj}(\boldsymbol{x}) < F_{obj}(\boldsymbol{p})\right)$ ENTÃO

$\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{x}$;

FIM SE;

SE $\left(F_{obj}(\boldsymbol{x}) < F_{obj}(\boldsymbol{g})\right)$ ENTÃO

$\boldsymbol{g} \leftarrow \boldsymbol{x}$;

FIM SE;

FIM LAÇO;

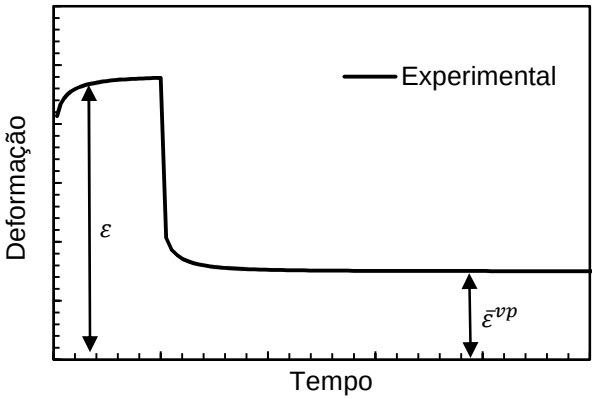
A melhor posição está armazenada em $\boldsymbol{g}$.

FIM ENQUANTO;

SAÍDA.

Fonte: produção do próprio autor.

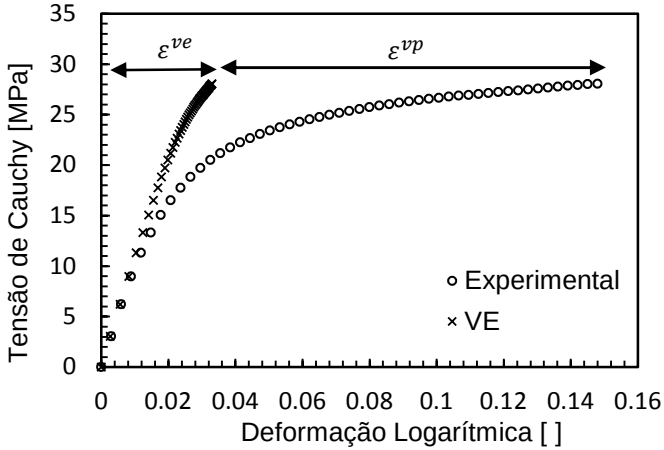
Figura 44 - Curva típica de fluência e recuperação para materiais poliméricos.



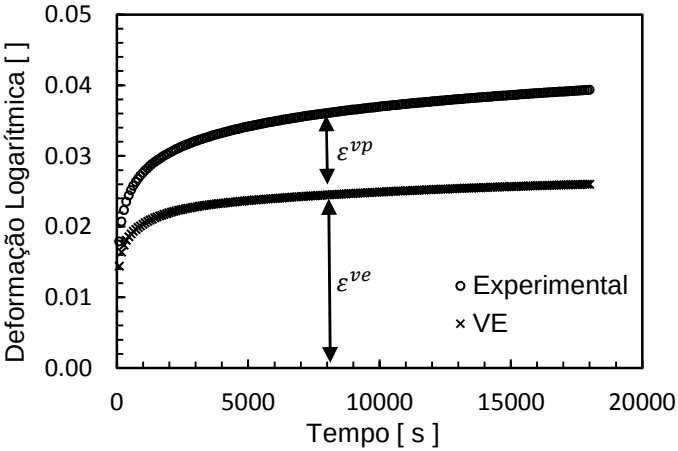
Fonte: produção do próprio autor.

Analogamente ao procedimento proposto por Chehab e Moore (2004), tendo os parâmetros viscoelásticos identificados, com o auxílio do princípio da superposição de Boltzmann, equações (3.1) e (3.2), e com o histórico experimental de tensões, pode-se avaliar a contribuição viscoelástica das curvas experimentais, tanto em ensaios de tração, com em ensaios de fluência, conforme mostrado na Figura 45.

Figura 45 - Contribuições viscoelástica e viscoplástica das curvas experimentais. a) Ensaio de tração. b) Ensaio de fluência.



a)



b)

Fonte: produção do próprio autor.

A função da tensão de escoamento pode ser avaliada em função da deformação viscoplástica acumulada, segundo equação (H.3), e também em função taxa da deformação viscoplástica acumulada, equação (H.4). A equação (H.4) é

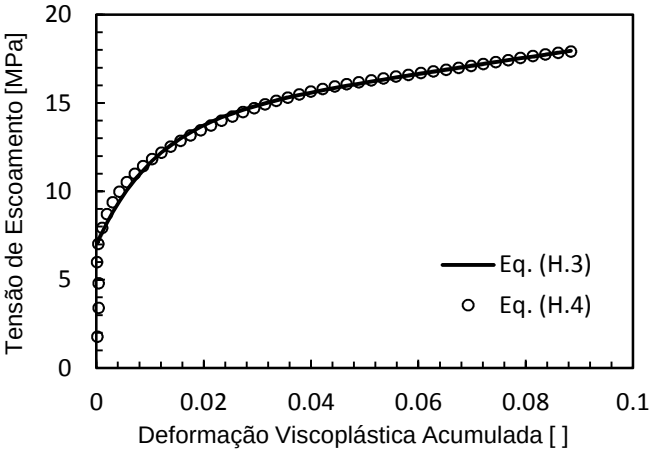
obtida rearranjando as equações (3.38), (3.40) e (3.41) e considerando um ensaio monotônico positivo.

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^{vp}) = \sigma_{y_0} + \left(\sigma_\infty - \sigma_{y_0}\right)\left[1 - e^{-(\bar{\varepsilon}^{vp}/\varepsilon_c)}\right] + K\bar{\varepsilon}^{vp} \qquad \text{(H.3)}$$

$$\sigma_y(\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}) = \frac{\sigma}{(1-D)} - \eta_{vp}(1-D)\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp} \qquad \text{(H.4)}$$

Tomando como exemplo o ensaio de tração da Figura 45-a, têm-se os dados experimentais para σ, $\bar{\varepsilon}^{vp}$ e $\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}$, onde $\dot{\bar{\varepsilon}}^{vp}$ é calculado numericamente através do histórico de $\bar{\varepsilon}^{vp}$ por diferenças finitas centrais. Deste modo, para encontrar os parâmetros viscoplásticos e de dano, ajusta-se as curvas das equações (H.3) e (H.4), conforme ilustrado na Figura 46.

Figura 46 - Curvas de ajuste dos parâmetros viscoplásticos e de dano.



Fonte: produção do próprio autor.

Na equação (H.4), o histórico da variável de dano é obtido resolvendo a equação não linear da lei de evolução de dano, equação (3.84), utilizando o método de Newton-Raphson.