**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA**
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS**
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNCIA**
**MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Nestor Juvenal Gianotti Terra Dias**

# UMA FORMULAÇÃO ALTERNATIVA E ENRIQUECIDA PARA ELEMENTOS DO TIPO HERMITIANO 2-SIMPLEX

**JOINVILLE / SC**
**2014**

**Nestor Juvenal Gianotti Terra Dias**

# UMA FORMULAÇÃO ALTERNATIVA E ENRIQUECIDA PARA ELEMENTOS DO TIPO HERMITIANO 2-SIMPLEX

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT

Orientador: Prof. Dr. Eng. Renato Barbieri

**JOINVILLE / SC**
**2014**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Dias, Nestor Juvenal Gianotti Terra

D541f Uma formulação alternativa e enriquecida para elementos do tipo hermitiano 2-simplex / Nestor Juvenal Gianotti Terra Dias. – 2014.

133 p. : il. ; 21 cm

Orientador: Renato Barbieri
Bibliografia: p. 106-112
Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, 2014.

1. Engenharia mecânica 2. Elementos Hermitianos 3. Triângulo de Hermite 4. Vibração livre de membrana 5. Elasticidade bidimensional. I. Barbieri, Renato II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título

CDD: 620.1 – 20.ed.

NESTOR JUVENAL GIANOTTI TERRA DIAS

# UMA FORMULAÇÃO ALTERNATIVA E ENRIQUECIDA PARA ELEMENTOS DO TIPO HERMITIANO 2-SIMPLEX

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de concentração "Modelagem e Simulação Numérica".

**Banca Examinadora**

Orientador: ______________________________
Prof. Dr. Renato Barbieri
CCT/UDESC

**Membros**

______________________________
Prof. Dr. Miguel Vaz Junior
CCT/UDESC

______________________________
Prof. Dr. Evandro Cardozo da Silva
UFSC

**Joinville,SC, 17 de julho de 2014.**

À minha família e a todos que me acompanham nesta jornada

## AGRADECIMENTOS

Muitos momentos e situações fazem parte do desenvolvimento de uma pessoa no decorrer da vida, nestes períodos turbulentos ou bons, temos exemplos de como agir e se sentir e começamos então a formar opinião e a pensar.

Agradeço aos familiares que desde cedo me acompanham. De casa trago a educação, amor e convívio em um ambiente familiar, exemplos de ética e trabalho.

Ao meu pai que me ensinou a não desistir e usar a cabeça para pensar. Minha mãe exemplo de batalha, sempre tentando sem desistir e que acredita na força do trabalho.

As minhas irmãs que sempre me motivaram e ajudaram na minha criação, de uma infância no Rio Grande do Sul a Goiás, a uma juventude em Santa Catarina.

Aos professores que tive e que me ensinaram matemática, geografia, biologia, e outras tantas matérias desde o básico. Pois cada matéria ao seu tempo foi um grande desafio, desde aprender a ler como a temida tabuada.

Agora tenho que agradecer aos professores desta universidade que me ensinaram engenharia, e proporcionam assuntos desafiadores para estudar e um futuro.

Um agradecimento aos professores do curso de mestrado em engenharia mecânica pela sabedoria que me repassaram nas disciplinas do curso. Em especial ao professor Renato Barbieri, pela paciência e conversas nas quais me orientou durante estes últimos anos, e também os desafios que me ajudou a superar, cada um ao seu tempo.

As empresas nas quais trabalhei durante o mestrado e que me liberaram para estudar, Biochamm Caldeiras em Agrolândia-SC e Urbano Agroindústria em Jaraguá do Sul-SC.

Ao Estado de Santa Catarina por proporcionar uma Universidade Estadual gratuita e com qualidade (FEJ), em Joinville, também por fornecer um curso de mestrado em mecânica, o qual ingresso como aluno especial e depois como aluno regular, por questões de tempo e necessidade de conciliar os estudos com o trabalho.

# RESUMO

O objetivo principal deste trabalho foi obter uma formulação alternativa para os chamados elementos *Hermitianos 2-simplex do tipo (3)* e enriquecer esta formulação adicionando funções com valor nulo em todos os nós do elemento, porém com derivadas parciais unitárias em apenas um destes nós. O elemento Hermitiano convencional é um elemento antigo na literatura, possui grau p=3 e os graus de liberdade do elemento são os deslocamentos e suas derivadas parciais em cada nó. O elemento formulado neste trabalho e sua versão enriquecida possuem continuidade $C^0$ (a continuidade $C^1$ só é assegurada nos nós do elemento). A formulação dos elementos é baseada no Princípio da Mínima Energia Potencial e por se tratar de uma formulação de deslocamento as condições de contorno de derivadas (Neumann) ou mistas (Cauchy-Robin) que são prescritas no contorno são satisfeitas sem nenhuma dificuldade. As tensões e/ou fluxos são obtidos sem nenhum pós-processamento adicional e com precisão semelhante à dos deslocamentos. Neste trabalho estes elementos foram aplicados para a solução de diversos problemas da elasticidade plana e axi-simétrica, problemas de vibração livre de membranas e problemas de potencial. A ênfase principal nestas análises foi o estudo das taxas de convergência com malhas homogêneas e com malhas distorcidas. Outro aspecto estudado foi a convergência para os problemas de *locking* de Poisson e especial atenção foi dada para as análises de erro em tensões (ou fluxos) pontuais que é o ponto forte deste tipo de elemento. Após diversas comparações realizadas ao longo deste trabalho concluiu-se que os resultados obtidos com este tipo de elemento são melhores do que a grande maioria de elementos triangulares disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Elementos Hermitianos, Triângulo de Hermite, enriquecimento, elasticidade bidimensional, vibração livre de membranas, QST.

# ABSTRACT

The main objective of this work was to obtain an alternative formulation for the so-called *Hermitian 2-simplex type-(3)* elements and enrich this formulation by adding functions with null value on all the nodes of the element, however with unitary partial derivatives one node. The conventional Hermitian element is an old element with degree p=3 and the degrees of freedom are the displacements and the partial derivatives in each node of the element. The element formulated in this work and their enriched versions have $C^0$ continuity ($C^1$ continuity is assured only at the element nodes). The formulation of the elements is based on the Principle of Minimum Potential Energy and because it is a displacement formulation, the prescribed Neumann (partial derivatives) or the Cauchy-Robin (mixed) boundary conditions are satisfied without any difficulty at the boundary nodes. Stresses and/or fluxes are obtained without any additional post-processing of finite element solution and with precision similar to the precision obtained for displacements. In this work these elements were applied to the solution of various problems of plane elasticity, axial-symmetric elasticity, free vibration of membranes and potential problems. The main emphasis in these analyzes was to study the rates of convergence obtained with homogeneous meshes and distorted meshes. Another aspect studied was the convergence for material locking problems (EPD) and special attention was given to the analysis of error in stress (or fluxes). After several comparisons made throughout this work it was concluded that the results obtained with this type of element is better than a large majority of triangular elements available in the literature.

**Keywords**: Hermitian elements, Hermite Triangle, enrichment, two-dimensional elasticity, free vibration of membranes, QST.

# LISTA DE TABELAS

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | | |
|---|---|---|
| *MEF* | - | Método dos elementos finitos |
| MVF | - | Método dos volumes finitos |
| EPT | - | Estado Plano de Tensão |
| EPD | - | Estado Plano de Deformação |
| CST | - | Constant Strain Triangle, Turner et. al (1956) |
| LST | - | Linear Strain Triangle |
| QST | - | Quadratic strain triangle |
| FE | - | Elementos Finitos |
| gdl | - | Graus de Liberdade |
| dof | - | *Degrees of freedom* (graus de liberdade) |
| el | - | Elemento |
| ngl | - | Número de Graus de Liberdade |
| Hermitiano | - | Elemento Hermitiano 2-simplex, enriquecimento N*=1 |
| ALL-3I | - | Allmann 88, integração 3 pontos interior, Felippa (2003) |
| ALL-3M | - | Allmann 88, integração 3 pontos médios, Felippa (2003) |
| ALL-EX | - | Allmann 88, integração exata, Felippa (2003) |
| LST-Ret | - | Retrofitted LST, Felippa (2003) |
| ALL-LS | - | Allmann 88, least square strain fit, Felippa (2003) |
| OPT | - | Elemento com gdl de rotação nos nós, Felippa (2003) |
| TE4 | - | Elemento com gdl de rotação, Piltner e Taylor (2000) |
| TE4_1 | - | Elemento com gdl de rotação, Piltner e Taylor (2000) |
| TE4_2 | - | Elemento com gdl de rotação, Piltner e Taylor (2000) |
| FF84 | - | *Free Formulation* 1984, Bergan e Felippa (1985) |
| FFQ | - | *Free Formulation Quadrilateral*, Nygard (1986) |
| HL | - | Elemento finito híbrido, Cook (1974) |
| HG | - | Elemento finito híbrido, Cook (1974) |
| Q4 | - | El. Lagrangeano conforme bilinear quadril., Cook (1974) |
| Q6 | - | El. não conforme bilinear quadrilateral, Taylor et al. (1976) |
| QM6 | - | El. conforme bi linear quadrilateral, Taylor et al. (1976) |
| ALL | - | El. triangular com rotação nos vértices, Allmann (1984) |
| T3 | - | Triângulo três nós, deslocamentos, Hughes et al. (1995) |
| T6 | - | Triângulo de seis nós, deslocamentos, Hughes et al. (1995) |
| T10 | - | Triângulo de dez nós, cúbico, Hughes et al. (1995) |

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $x$ | Sistema de coordenadas cartesianas |
| $y$ | Coordenada cartesiana |
| $\nu$ | Coeficiente de Poisson |
| $\rho$ | Densidade |
| E | Módulo de elasticidade |
| $\theta_a$ | Rotação da face A do triangulo em torno do nó |
| $\varepsilon_{xx}$ | Deformação em relação á x |
| $\varepsilon_{yy}$ | Deformação em relação á y |
| u | Deslocamento do nó na direção x |
| v | Deslocamento do nó na direção y |
| U | Energia, $kq^2/2$; q vetor deslocamento |
| $I_x$ | Momento de Inércia em relação x |
| $\partial/\partial x$ | Derivada parcial em relação á x |
| $\partial/\partial y$ | Derivada parcial em relação à y |
| $L_i(x,y)$ | Funções de Interpolação por coordenadas de área, i=1,2,3 |
| $\Gamma_e$ | Perímetro do Triangulo (fronteira) |
| $\Omega_e$ | Domínio do Triangulo |
| $\Re$ | Conjunto de números reais |
| $\approx$ | Aproximado |
| $\forall$ | Qualquer |
| $\sum$ | Somatório |
| [N] | Matriz das funções de interpolação |
| [B] | Matriz do gradiente das funções de interpolação |
| [**D**] | Matriz Constitutiva (propriedades material) |
| [K] | Matriz rigidez do elemento |
| {F} | Vetor Forças |
| {q} | Vetor deslocamentos |
| [M] | Matriz Massa |
| $\Phi_i$ | Função de interpolação, i=1,4,7 |
| $\varphi_i$ | Função de interpolação, continuidade em x, i=2,5,8 |
| $\psi_i$ | Função de interpolação, continuidade em y, i=3,4,9 |
| $\omega$ | Frequência natural [πrad/s] |
| N* | Enriquecimento do elemento Hermitiano Alternativo |
| m | Enriquecimento em $\partial/\partial x$ |
| n | Enriquecimento em $\partial/\partial y$ |
| $\kappa$ | Curvatura da viga, número característico da onda |

# SUMÁRIO

# Capítulo 1
## Introdução

Neste capítulo mostram-se os objetivos e as motivações para o desenvolvimento deste trabalho. O enfoque principal deste trabalho foi o estudo dos elementos finitos denominados *Hermitianos 2-simplex* e a sua utilização para a solução dos problemas da elasticidade, de vibração livre de membranas e problemas de potencial.

## 1.1 - MOTIVAÇÃO

Os elementos denominados de *Hermitianos do tipo 2-simplex* são elementos triangulares de lados retos com 3 nós e 10 graus de liberdade que são os deslocamentos e derivadas parciais em cada nó e o deslocamento do centroide do elemento. Trata-se de um elemento do grau p=3 e continuidade $C^0$. A continuidade $C^1$ é garantida apenas nos nós do elemento.

Desde a década de 1970 este elemento já foi bem detalhado na literatura com aplicações voltadas para o estudo de placas e cascas. São encontradas poucas aplicações deste elemento para o estudo de problemas elásticos, vibração livre de membranas e problemas de potencial. Um dos enfoques deste trabalho foi estudar a aplicação deste tipo de elemento para estas situações onde existem poucos registros na literatura do seu desempenho.

Por outro lado, os elementos Hermitianos unidimensionais são bastante conhecidos na literatura e extensamente utilizados nas análises da flexão de vigas. Dias e Barbieri (2011) propuseram uma formulação enriquecida para estes elementos para o estudo preferencialmente dos problemas com fortes gradientes na solução analítica (Anexo I). Os bons resultados obtidos por estes autores para fluxo e potencial gerou a expectativa de obter elementos Hermitianos bidimensionais enriquecidos e com resultados precisos para fluxos (tensões) nos nós do elemento. Esta foi a motivação principal para o desenvolvimento de uma nova formulação para o elemento *Hermitiano 2-simplex* prevendo o seu enriquecimento.

## 1.2 - OBJETIVOS

Geral:

O principal objetivo deste trabalho foi obter uma formulação alternativa para os chamados elementos *Hermitianos 2-simplex do tipo (3)* e enriquecer esta formulação de maneira análoga ao realizado para o elemento unidimensional de Hermite.

Específico:

Realizar análises de convergência com malhas homogêneas e malhas distorcidas para problemas da elasticidade, vibração livre de membranas e para problemas de potencial.

## 1.3 - ESCOPO DO TRABALHO

Este capítulo introdutório foi escrito para mostrar ao leitor a principal motivação que deu origem ao estudo das formulações convencionais e enriquecidas do chamado Triangulo de Hermite também conhecido como elemento *Hermitiano 2-simplex do tipo (3*) e os principais objetivos deste trabalho.

No capítulo 2 é mostrado um breve histórico e revisão da bibliografia descrevendo alguns trabalhos relevantes que marcaram o desenvolvimento deste tipo de elemento. Logo após esta etapa é mostrada uma formulação alternativa para estes elementos (uma nova base para o espaço de elementos finitos) e também uma formulação prevendo o enriquecimento do elemento.

O capítulo 3 foi destinado para os problemas da elasticidade. No início deste capítulo são mostrados alguns conceitos básicos da Teoria da Elasticidade aplicados aos problemas planos e aos problemas axi-simétricos. Neste capítulo são formulados os elementos e resolvidos diversos exemplos utilizando as hipóteses do estado plano de tensão (EPT), estado plano de deformação (EPD) e/ou problemas axi-simétricos. Somente são apresentados os conceitos suficientes para entender as formulações dos elementos finitos apresentadas neste texto para elasticidade. A parte final deste capítulo é composta por uma coletânea de resultados numéricos obtidos com a solução de diversos problemas característicos que muitas vezes considerados como *benchmark* para novos elementos. São realizadas diversas comparações com os resultados obtidos com outros elementos da literatura e análises da convergência *h* para deslocamento, tensão e energia. Para alguns problemas, especial atenção foi dada para as análises de erros nas tensões obtidas com malhas muito distorcidas ou elaboradas com elementos com razão de aspecto muito ruim.

No capítulo 4 são mostradas as formulações do elemento para os problemas de Vibração livre de Membranas e os problemas de Potencial. Especial ênfase é dada para os resultados obtidos com o elemento enriquecido e para as taxas de convergência do erro no fluxo (pontual) e o erro nas primeiras frequências naturais de membranas. No início do capítulo é mostrada a equação diferencial que governa a vibração livre de membranas. Logo na sequência são mostradas as formulações do elemento Hermitiano para os problemas de potencial e de vibração livre de membranas e é mostrada a formulação enriquecida do elemento Hermitiano para estes dois tipos de problemas. A parte final deste capítulo é focada no estudo da convergência *h* das soluções numéricas de alguns problemas típicos e para verificar a influência do enriquecimento do elemento na precisão dos cálculos.

O último capítulo, Capítulo 5, é destinado às considerações finais e sugestões para futuros trabalhos no tema desta dissertação.

# Capítulo 2
## As Formulações para o Elemento *'Hermitiano n-Simplex'*

## 2.1 – REVISÃO DE ELEMENTOS HERMITIANOS

Os elementos triangulares são muito estudados na literatura pela sua versatilidade para aproximar geometrias com contorno arbitrário (contorno com curvas) e porque possuem poucos graus de liberdade (poucos nós). A procura dos chamados elementos de alto desempenho, elementos com poucos graus de liberdade físicos e com boa precisão nos cálculos tem sido o objetivo de diversos autores desde que surgiu o MEF, Felippa (2003).

Os elementos triangulares mais comuns utilizados para a análise de tensões planas são os elementos Lagrangeanos com graus de liberdade (gdl) de deslocamento em cada um dos nós do elemento, os elementos mais conhecidos são o CST, o LST e o QST, Figura 2.1.

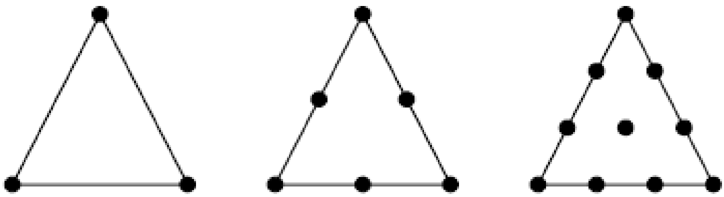


Figura 2.1 – Elementos CST (3 nós), LST (6nós) e QST (10 nós) Lagrangeanos

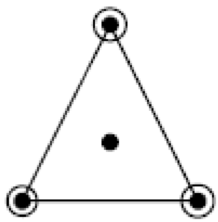
Fonte: Martha L.F. (1994)

O CST (*Constant Stress/Strain Triangle*) é o elemento linear com 3 nós e 6 gdl. Este elemento também é chamado de triangulo linear ou Triangulo de Turner. De acordo com Felippa (2003) este elemento foi desenvolvido por Jon Turner, Ray Clough e Harold Martin em 1952–1953 (Clough (1994)) e publicado em 1956 (Turner et al. (1956)).

O LST (*Linear Stress/Strain Triangle*) é o elemento quadrático com 6 nós e 12 gdl. Este elemento também é chamado de triangulo quadrático ou Triangulo de Veubeke. Foi desenvolvido por B. Fraeijs de Veubeke em 1962–1963 (Zienkiewicz (2001)) e publicado em 1965 (Fraeijs Veubeke (1965)).

O QST (*Quadratic Stress/Strain Triangle*) é o elemento cúbico com 10 nós e 20 gdl. Este elemento também é chamado de triangulo cúbico. Foi desenvolvido em 1965 por Felippa. O triângulo chamado de BCIZ é muito semelhante ao QST formulado por Felippa e apareceu na literatura em 1966 (o BCIZ também é conhecido na literatura como triangulo de Zienkiewicz).

Os chamados elementos *Hermitianos 2-simplex do tipo (3)* são elementos triangulares de lados retos com graus de liberdade ($u_i$, $\partial u_i/\partial x$, $\partial u_i/\partial y$) em cada um dos vértices do triangulo e $u_c$ no baricentro (ou centroide), Figura 2.2. Estes 10 gdl são suficientes para aproximar uma variável u(**x**) com polinômio cúbico *completo* para $\mathbf{x}\in\Omega_e$ ($\Omega_e$=triangulo). Apesar de possuir continuidade $C^1$ nos vértices do triangulo, este elemento possui apenas continuidade $C^0$ ao longo dos lados.



**Graus de Liberdade:**

• = $u_i$ ('deslocamento')
O = $\partial u_i/\partial x$ e $\partial u_i/\partial y$ ('gradiente)

Figura 2.2 – Elemento Hermitiano Cúbico

Segundo Felippa (2003), o elemento QST com 3 nós e 18 gdl foi desenvolvido por ele em 1965 em sua tese de doutorado, porém foi aplicado somente para a análise de flexão de placas. Ele adota a seguinte regra para dar nome aos elementos com funções de interpolação cúbicas: QST-nós/ngl## onde ## é igual a C (graus de liberdade convencionais de deslocamento), G (graus de liberdade de deslocamento e derivadas nos vértices do elemento) ou RS (graus de liberdade de deslocamento, rotação e deformação), ngl significa o numero total de gdl do elemento. Nas Figuras 2.3 e 2.4 estão ilustrados alguns destes elementos incluindo os seus nós e os graus de liberdade associados aos nós, observar que a notação deste autor é diferente da adotada neste trabalho: ($u_x$,$u_y$) indicam os deslocamentos no plano, $u_{x,x}$ e $u_{x,y}$ indicam as derivadas parciais de $u_x$, $\theta$ indica rotação perpendicular ao plano e ***e*** indica o tensor deformação.

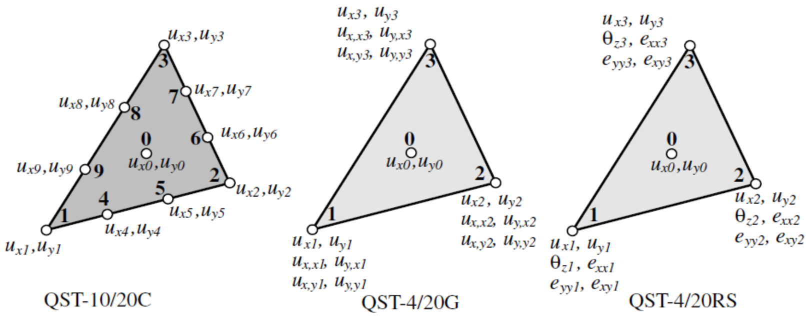



Figura 2.3 – QST incluindo o nó central
Fonte: Felippa (2003)

Este autor, Felippa (2003), cita que desde 1965 já foram apresentadas as funções de interpolação para os elementos QST-10/20RS e QST-3/18G, porém estas formulações só foram utilizadas para a flexão de placas e não para problemas planos da elasticidade.

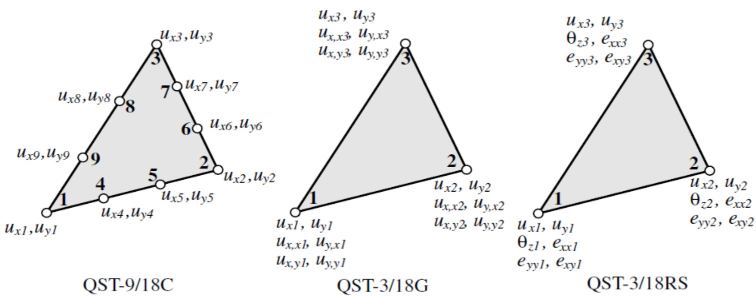



Figura 2.4 – QST sem o nó central
Fonte: Felippa (2003)

Na Figura 2.4 são mostrados os elementos QST sem gdl no nó do centroide. Em seu trabalho de 2003 também não foram apresentados resultados utilizando o elemento QST-3/18G nas suas comparações e tentativa de obter um elemento ótimo para análises elásticas.

Cowper et al. (1970) também mostra a formulação de um elemento para problemas planos com 18 gdl. Este elemento foi desenvolvido como sendo a parcela de membrana de um elemento triangular para casca e estes autores utilizaram o sistema de coordenadas $(\xi,\eta)$ ilustrado na Figura 2.5 para escrever as expressões das funções de interpolação do elemento. Os deslocamentos no plano (u,v) foram aproximados com polinômios cúbicos completos (10 termos em cada uma das componentes) e os graus de liberdade utilizados para aproximar a componente u do deslocamento foram $(u_i, \partial u_i/\partial\xi, \partial u_i/\partial\eta)$ para cada nó do elemento e $u_c$ no centroide do elemento. Similarmente, foram utilizados 10 gdl para aproximar v e a matriz de rigidez foi obtida em função destes 20 gdl. Após a obtenção da matriz de rigidez do elemento, os graus de liberdade do centroide foram eliminados e a matriz de rigidez resultante é escrita em função de 18 gdl associados apenas aos nós do elemento.

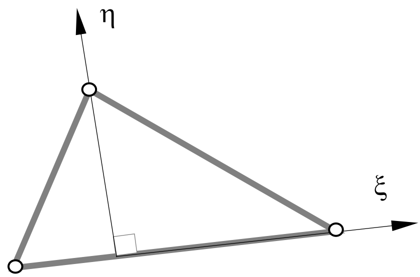



Figura 2.5 – Sistema de Referencia (ξ,η)
Fonte: Cowper et. al (1970)

Ferrante (1975) também mostra as funções de interpolação para um elemento triangular de lados retos com aproximação cúbica para os deslocamentos e empregando coordenadas de área (Figura 2.6). O uso destas coordenadas é mais prático para formular o elemento do que o uso das coordenadas $(\xi,\eta)$ de Cowper et al. (1970).

Para o triângulo ilustrado na Figura 2.6, $\mathbf{x}=(x,y)$ e as funções de coordenadas de área; $(L_i(\mathbf{x}),\ i=1,2,3)$; podem ser escritas na seguinte forma:

$$L_i(\mathbf{x})=A_i(\mathbf{x})/A \quad (i=1,2,3) \tag{2.1}$$

ou,

$$L_i(\mathbf{x})=(a_i+b_ix+c_iy)/2A \quad (i=1,2,3) \tag{2.2}$$

sendo,

$$A=[(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)+(x_1y_2-x_2y_1)]/2 \tag{2.3}$$

$$a_i=x_jy_k-x_ky_j \tag{2.4}$$

$$b_i=y_j-y_k \tag{2.5}$$

$$c_i=x_k-x_j \tag{2.6}$$

com i, j e k fazendo permutação cíclica entre 1,2 e 3.

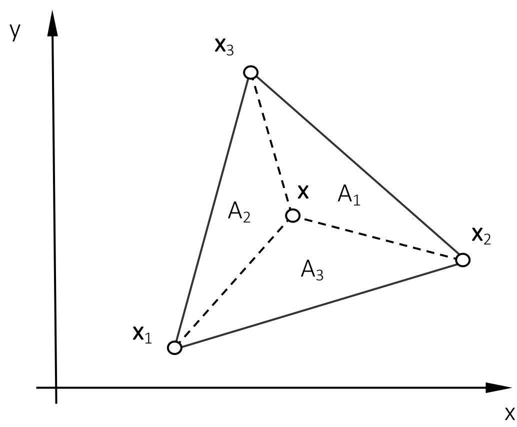



Figura 2.6 – Coordenadas de Área para **x**=(x,y)
Fonte: Ferrante (1975)

O elemento QST mostrado por Ferrante (1975) é um elemento do tipo Hermitiano 2-simplex com graus de liberdade dados por ($u_i$, $\partial u_i/\partial x$, $\partial u_i/\partial y$) em cada um dos vértices do triangulo e $u_4$ no nó central, elemento QST-3/20G da Figura 2.1. Este elemento utiliza 10 gdl para aproximar u(**x**) e a sua expressão matemática é a seguinte:

$$u(\mathbf{x}) \cong \sum_{i=1}^{4}\Phi_i(\mathbf{x})u_i + \sum_{i=1}^{3}\varphi_i(\mathbf{x})\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{3}\psi_i(\mathbf{x})\frac{\partial u_i}{\partial y} \tag{2.7}$$

onde $\Phi_i(\mathbf{x})$, $\varphi_i(\mathbf{x})$ e $\psi_i(\mathbf{x})$ são dadas por:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\mathbf{x}) &= L_1^3 + 3L_1^2(L_2 + L_3) - 7\, L_1L_2L_3 \\
\Phi_2(\mathbf{x}) &= L_2^3 + 3L_2^2(L_1 + L_3) - 7\, L_1L_2L_3 \\
\Phi_3(\mathbf{x}) &= L_3^3 + 3L_3^2(L_1 + L_2) - 7\, L_1L_2L_3 \\
\Phi_4(\mathbf{x}) &= 27\, L_1L_2L_3
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\mathbf{x}) &= c_3L_1^2L_2 - c_2L_1^2L_3 + (c_2 - c_3)L_1L_2L_3 \\
\varphi_2(\mathbf{x}) &= c_1L_2^2L_3 - c_3L_2^2L_1 + (c_3 - c_1)L_1L_2L_3 \\
\varphi_3(\mathbf{x}) &= c_2L_3^2L_1 - c_1L_3^2L_2 + (c_1 - c_2)L_1L_2L_3
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(\mathbf{x}) &= b_2L_1^2L_3 - b_3L_1^2L_2 + (b_3 - b_2)L_1L_2L_3 \\
\psi_2(\mathbf{x}) &= b_3L_2^2L_1 - b_1L_2^2L_3 + (b_1 - b_3)L_1L_2L_3 \\
\psi_3(\mathbf{x}) &= b_1L_3^2L_2 - b_2L_3^2L_1 + (b_2 - b_1)L_1L_2L_3
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Para aproximar v($\mathbf{x}$) também foram utilizados outros 10 gdl com expressão similar à Equação 2.7. Ferrante (1975) cita que a vantagem deste elemento com relação ao elemento Lagrangeano cúbico (10 nós) é que esta formulação proporciona redução na largura de banda do sistema final de equações. No entanto, nenhum resultado numérico utilizando este elemento foi apresentado neste trabalho.

A base matemática para obter elementos do tipo QST com “n+1” vértices foi proposta por Ciarlet e Raviart (1972) e Ciarlet (1978). Para obter funções de interpolações cúbicas para estes elementos estes autores empregam o sistema de coordenadas do baricentro (Anexo II) e o seguinte teorema:

‘**<u>Teorema:</u>** Seja K um n-simplex com vértices $a_i$, $(1\leq i \leq n+1)$, e seja $a_{ijk}=(a_i+a_j+a_k)/3$, $(1\leq i < j < k \leq n+1)$. Então um polinômio p($\mathbf{x}$) no espaço $P_3$ é unicamente determinado pelo seu valor e pelo valor das suas primeiras derivadas nos vértices $a_i$, $(1\leq i \leq n+1)$, e o seu valor no ponto $a_{ijk}$,$(1\leq i<j<k\leq n+1)$.’

Na demonstração do teorema, Ciarlet (1978) mostra que $\forall$ p(**x**) $\in P_3$ pode ser escrito em função do sistema de coordenadas do baricentro na seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) = \sum_{i}\Big(-2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 - 7\lambda_i \sum_{\substack{j\neq k \\ j\neq i,\, k\neq i}} \lambda_j\lambda_k\Big)p(\mathbf{a}_i) \\
+ \sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j(2\lambda_i + \lambda_j - 1)\, Dp(\mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) + 27\sum_{i<j<k}\lambda_i\lambda_j\lambda_k\, p(\mathbf{a}_{ijk})
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

sendo que p($\mathbf{a}_i$) designa o valor de p(**x**) no vértice i; Dp($\mathbf{a}_i$)($\mathbf{a}_j$-$\mathbf{a}_i$) é a derivada direcional de p(**x**) no vértice i (com o valor da derivada direcional de p(**x**) em cada vértice é possível obter o valor das suas derivadas parciais em cada vértice) e ($\lambda_1$,$\lambda_2$,$\lambda_3$) corresponde às coordenadas do baricentro (ver Anexo II) do conjunto com ‘n+1’ pontos ($0\le\lambda_i\le1$, $\sum\lambda_i=1$; i=1,2,3 para triângulos). Quando n=2 trata-se de um triângulo e quando n=3 trata-se de um tetraedro.

Segundo Kirby et al. (2012), os elementos do tipo ‘*Hermite n-simplex type (3)*’ estão disponíveis na literatura quase desde o surgimento do MEF; aparecendo, pelo menos desde o clássico trabalho de Ciarlet e Raviart (1972).

Outro elemento muito semelhante ao elemento Hermitiano em estudo é o chamado *Triangulo de Zienckiewcz* que apareceu na literatura em 1966 e às vezes também é chamado de triangulo BCIZ, Bazeley et al.(1966). Este elemento utiliza apenas os valores de p(**x**) e de suas derivadas nos 3 nós do elemento para construir a aproximação para p(**x**). É um elemento de continuidade $C^0$ e a interpolação de p(**x**) é dada por:

$$
\begin{aligned}
\{p(\mathbf{x}) \in P_3 : 6p(\mathbf{a}_{ijk}) - 2\sum_{i=1}^{3} p(\mathbf{a}_i) + \\
\sum_{i=1}^{3} \nabla p(\mathbf{a}_i)\cdot(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{ijk}) = 0\} \supset P_2
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Sengupta e Dasgupta (1990) utilizaram a mesma aproximação já citada por Ferrante (1975) para obter expressões explícitas para a matriz de rigidez de um elemento elástico plano com 18 gdl. Os graus de liberdade utilizados por estes autores foram ($u_i$, $\partial u_i/\partial x$, $\partial u_i/\partial y$, $v_i$, $\partial v_i/\partial x$, $\partial v_i/\partial y$) em cada nó do elemento e os deslocamentos ($u_c$, $v_c$) no centroide do triangulo. Neste trabalho foram apresentados apenas dois exemplos numéricos.

Embora os elementos Hermitianos sejam elementos antigos, é possível encontrar na literatura diversas aplicações recentes utilizando estes elementos para a solução de diversos problemas da mecânica do contínuo. Um exemplo destas aplicações é o trabalho de Ueda e Tabata (2007) que utilizaram este elemento para a solução de problemas de potencial bidimensionais. Estes mesmos autores Ueda e Tabata (2009), também analisaram problemas de potencial com elementos hermitianos tetraédricos dando ênfase também para as análises de erro e convergência *h*.

## 2.2 - FORMULAÇÃO ALTERNATIVA

Nesta formulação alternativa para os elementos do tipo '*Hermite 2-simplex*' também foram utilizadas as coordenadas de área para o triângulo, porém com uma pequena mudança. Os coeficientes, $a_i$, $b_i$ e $c_i$ das Equações 2.4 a 2.6 são divididos por 2A e as funções de interpolação lineares passam a ser escritas na seguinte forma:

$$L_i(\mathbf{x})=\phi_i(\mathbf{x})=a_i+b_ix+c_iy \quad (i=1,2,3) \tag{2.13}$$

Como já mencionado anteriormente, as aproximações cúbicas (QST) são obtidas utilizando 10 gdl para os triângulos. Neste trabalho é proposta a seguinte expressão para aproximar um polinômio cúbico em função dos valores de $(p_i,\partial p_i/\partial x,\partial p_i/\partial y)$ em cada um dos vértices do triangulo e de um *deslocamento generalizado* p*:

$$p(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{3}\Phi_i(\mathbf{x})p_i+\sum_{i=1}^{3}\varphi_i(\mathbf{x})\frac{\partial p_i}{\partial x}+\sum_{i=1}^{3}\psi_i(\mathbf{x})\frac{\partial p_i}{\partial y}+\Phi_4(\mathbf{x})p^* \tag{2.14}$$

sendo,

$$\begin{gathered}\Phi_j(\mathbf{x})=3\phi_j^2(\mathbf{x})-2\phi_j^3(\mathbf{x}) \qquad (j=1,2,3)\\ \Phi_4(\mathbf{x})=1-\Phi_1(\mathbf{x})-\Phi_2(\mathbf{x})-\Phi_3(\mathbf{x})\end{gathered} \tag{2.15}$$

$$\varphi_j(\mathbf{x})=(x-x_j)\,\phi_j^2(\mathbf{x}) \qquad (j=1,2,3) \tag{2.16}$$

$$\psi_j(\mathbf{x})=(y-y_j)\,\phi_j^2(\mathbf{x}) \qquad (j=1,2,3) \tag{2.17}$$

Note que as funções do tipo $\Phi_i(\mathbf{x})$ para i=1,2 ou 3 só dependem das funções $\phi_i(\mathbf{x})=L_i(\mathbf{x})$ e valem 1 no nó i e se anulam nos outros dois nós do triangulo. A função $\Phi_4(\mathbf{x})$ é uma função do tipo *bolha* obtida com a combinação linear de $\Phi_1(\mathbf{x})$, $\Phi_2(\mathbf{x})$ e $\Phi_3(\mathbf{x})$. O valor de $\Phi_4(\mathbf{x})$ é nulo em todos os nós e lados do elemento.

As derivadas parciais das funções $\Phi_j(\mathbf{x})$ para j=1,2 ou 3 são dadas por:

$$\frac{\partial \Phi_j(\mathbf{x})}{\partial x} = 6\,[\phi_j(\mathbf{x}) - \phi_j^2(\mathbf{x})]\,\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial x} \qquad (j = 1,2,3) \tag{2.18}$$

e,

$$\frac{\partial \Phi_j(\mathbf{x})}{\partial y} = 6\,[\phi_j(\mathbf{x}) - \phi_j^2(\mathbf{x})]\,\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial y} \qquad (j = 1,2,3) \tag{2.19}$$

Estas derivadas são nulas em todos os nós do elemento porque o termo entre colchetes é nulo em todos estes nós. Como $\Phi_4(\mathbf{x})$ é uma combinação linear destas funções, as derivadas de $\Phi_4(\mathbf{x})$ também são nulas em todos os nós do elemento.

As funções $\varphi_i(\mathbf{x})$ para i=1,2 ou 3 dependem das funções $\phi_i(\mathbf{x})=L_i(\mathbf{x})$ e de $(x-x_i)$. Estas funções se anulam em todos os nós do elemento e suas derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial x} = \phi_j^2(\mathbf{x}) + 2(x - x_j)\,\phi_j(\mathbf{x})\,\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial x} \qquad (j = 1,2,3) \tag{2.20}$$

e,

$$\frac{\partial \varphi_j(\mathbf{x})}{\partial y} = 2(x - x_j)\,\phi_j(\mathbf{x})\,\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial y} \qquad (j = 1,2,3) \tag{2.21}$$

Como $\phi_j(\mathbf{x})=1$ para $x=x_j$, então $\partial\varphi_j(\mathbf{x})/\partial x=1$ no vértice j e se anula nos outros dois vértices do triangulo, pois $\phi_j(\mathbf{x})=0$ nestes nós. A derivada parcial $\partial\varphi_j(\mathbf{x})/\partial y$ se anula em todos os vértices do triangulo.

As funções $\psi_i(\mathbf{x})$ para i=1,2 ou 3 dependem das funções $\phi_i(\mathbf{x})=L_i(\mathbf{x})$ e de $(y-y_i)$. Estas funções se anulam em todos os nós do elemento e suas derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial \psi_j(\mathbf{x})}{\partial x} = (y - y_j)\,\phi_j(\mathbf{x})\,\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial x} \qquad (j = 1,2,3) \tag{2.22}$$

e,

$$\frac{\partial \psi_j(\mathbf{x})}{\partial y} = \phi_j^2(\mathbf{x}) + 2(y - y_j)\,\phi_j(\mathbf{x})\,\frac{\partial \phi_j(\mathbf{x})}{\partial y} \qquad (j = 1,2,3) \tag{2.23}$$

Analogamente, $\partial\psi_j(\mathbf{x})/\partial x=0$ em todos os vértices do triangulo e $\partial\psi_j(\mathbf{x})/\partial y=1$ no nó j e igual a 0 nos outros dois nós.

Observe que o valor de $\Phi_4(1/3,1/3,1/3)$ não é unitário e nem o valor das outras funções que aparecem na Equação 2.13 são nulos neste ponto. Portanto, p* foi chamado de *deslocamento generalizado* e é incluído na aproximação da Equação 2.13 para assegurar a correta aproximação para p(**x**) quando todas as suas derivadas parciais são nulas nos vértices, isto é, p(**x**) é constante.

### 2.2.1 - Elementos com Lados Retos

Para os elementos de lados retos a relação entre as coordenadas cartesianas **x**=(x,y) com as coordenadas de área ($L_1$,$L_2$,$L_3$) são dadas por:

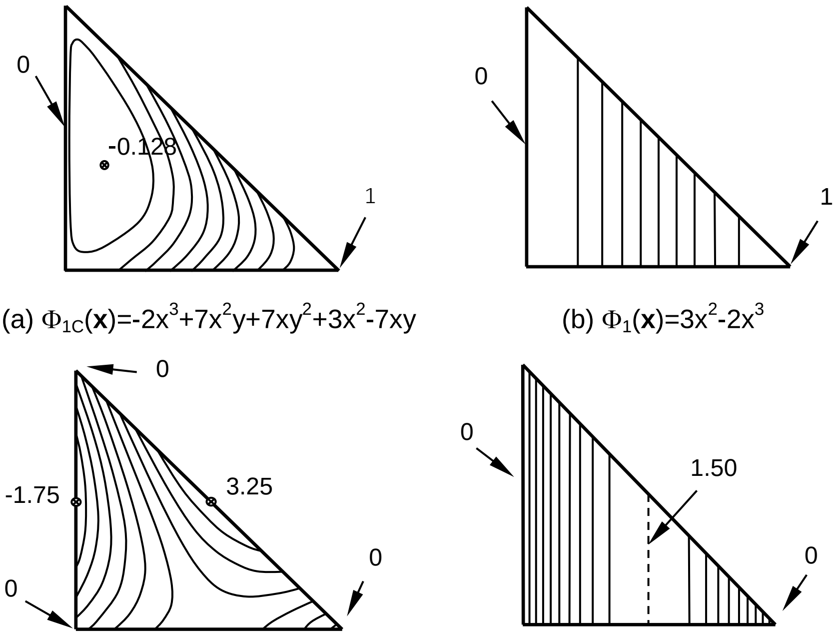
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} L_i(\mathbf{x})\,\mathbf{x}_i \tag{2.24}$$

e as derivadas parciais das funções de interpolação obtidas a partir da Equação 2.12 são constantes e valem $\partial\phi_i(\mathbf{x})/\partial x=b_i$ e $\partial\phi_i(\mathbf{x})/\partial y=c_i$.

## 2.3 – COMPARAÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Nas Figuras 2.7 e 2.8 estão mostradas algumas funções de interpolação associadas ao nó 1 de um elemento com vértices em (1,0), (0,1) e (0,0) , nós 1, 2 e 3, respectivamente.

Nestas figuras o subscrito ‘C’ indica as funções associadas ao elemento convencional de Ciarlet (1978). Para este triângulo as coordenadas de área da Equação 2.12 são dadas por $L_1$(**x**)=x, $L_2$(**x**)=y e $L_3$(**x**)=1-x-y.



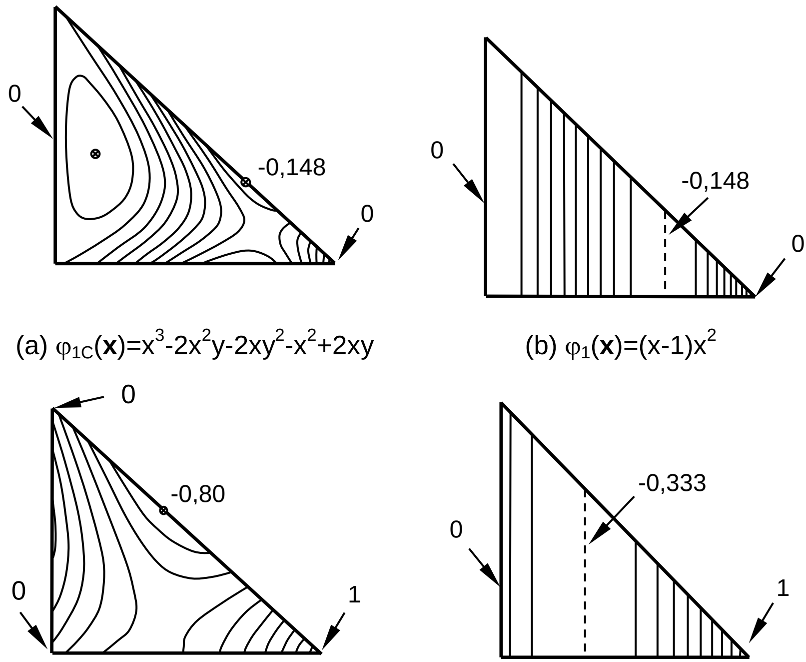

(a) $\Phi_{1C}(\mathbf{x})=-2x^3+7x^2y+7xy^2+3x^2-7xy$

(b) $\Phi_1(\mathbf{x})=3x^2-2x^3$

(c) $\partial\Phi_{1C}(\mathbf{x})/\partial x$

(d) $\partial\Phi_1(\mathbf{x})/\partial x$

Figura 2.7 – Funções de Interpolação de Ciarlet (1978), $\Phi_{1C}(\mathbf{x})$, e para a formulação alternativa, $\Phi_1(\mathbf{x})$




(a) $\varphi_{1C}(\mathbf{x})=x^3-2x^2y-2xy^2-x^2+2xy$ (b) $\varphi_1(\mathbf{x})=(x-1)x^2$

(c) $\partial\varphi_{1C}(\mathbf{x})/\partial x$ (d) $\partial\varphi_1(\mathbf{x})/\partial x$

Figura 2.8 – Funções de Interpolação de Ciarlet (1978), $\varphi_{1C}(\mathbf{x})$, e para a formulação alternativa, $\varphi_1(\mathbf{x})$

## 2.4 - ENRIQUECIMENTO DO ELEMENTO HERMITIANO

Com o objetivo de melhorar a qualidade de p(**x**) da Equação 2.13 e de suas derivadas parciais o enriquecimento da aproximação é realizado incluindo apenas novas funções de interpolação associadas às derivadas parciais em cada vértice do elemento. A expressão para a aproximação enriquecida para p(**x**) é a seguinte:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}\Phi_i(\mathbf{x})p_i + \sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{m^*(i)}\varphi_{mi}(\mathbf{x})\alpha_{mi} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{k^*(i)}\psi_{ki}(\mathbf{x})\beta_{ki} + \Phi_4(\mathbf{x})p^* \qquad (2.25)$$

sendo que as funções $\Phi_j(\mathbf{x})$ são as mesmas definidas anteriormente na Equação 2.15,

$$\varphi_{mj}(\mathbf{x}) = (x - x_j)\,\phi_j^{(1+m)}(\mathbf{x}) \qquad \left(j = 1,2,3;\ m = 1,2,\ldots, m^*(j)\right) \tag{2.26}$$

$$\psi_{mj}(\mathbf{x}) = (y - y_j)\,\phi_j^{(1+m)}(\mathbf{x}) \qquad \left(j = 1,2,3;\ m = 1,2,\ldots, k^*(j)\right) \tag{2.27}$$

$$\sum_{m=1}^{m^*(i)} \alpha_{mi} = \frac{\partial p(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \qquad \left(i = 1,2,3\right) \tag{2.28}$$

$$\sum_{k=1}^{k^*(i)} \beta_{ki} = \frac{\partial p(\mathbf{x}_i)}{\partial y} \qquad \left(i = 1,2,3\right) \tag{2.29}$$

e m*(j) e k*(j) indicam o número de funções associadas as derivada parciais do nó j. Deve-se notar que as Equações 2.28 e 2.29 foram obtidas avaliando o valor das derivadas parciais de $p(\mathbf{x})$ em cada vértice do elemento.

Para visualizar o comportamento das funções $\varphi_{mi}(\mathbf{x})$ e $\psi_{mi}(\mathbf{x})$ ao longo dos lados de um elemento as curvas para as primeiras 4 funções do tipo $\varphi_{mi}(\mathbf{x})$ ao longo do lado 3-1 do elemento padrão (também chamado de 2-simplex unitário) formado pelos vértices (1,0), (0,1) e (0,0) do item anterior estão ilustradas na Figura 2.9. Todas estas funções possuem derivada parcial com relação à x igual a 1 no nó 1 e derivadas parciais nulas no nó 3.

Observa-se que os graus de liberdade $\alpha_{mi}$ e $\beta_{ki}$ estão associados ao nó i. Portanto, com este tipo de aproximação é possível melhorar a interpolação de $p(\mathbf{x})$ utilizando apenas o enriquecimento de um nó do elemento. As funções não estão associadas aos lados do elemento.

Apesar de melhorar as aproximações para $p(\mathbf{x})$ e de suas derivadas parciais, o elemento ainda continua possuindo continuidade $C^0$.

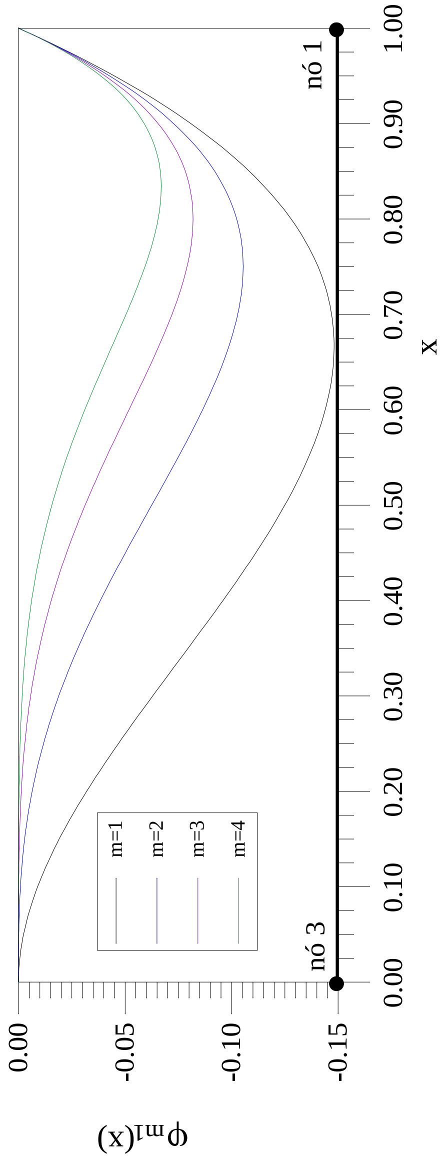



Figura 2.9 – Funções do tipo $\varphi_{m1}(\mathbf{x})$ ao longo do lado 3-1.

# Capítulo 3
## As Formulações do Elemento '*Hermitiano 2-simplex*' para a Elasticidade Plana

### 3.1 - PROBLEMAS PLANOS (EPT E EPD)

Seja um corpo elástico como o ilustrado na Figura 3.1 que é submetido a carregamentos externos. Cada ponto P deste corpo elástico é identificado pelas suas coordenadas com relação ao sistema de coordenadas cartesianas fixo e após a aplicação dos carregamentos externos este ponto passa a ocupar uma nova posição com relação ao sistema fixo, P*. O deslocamento do ponto P pode ser escrito na seguinte maneira:

$$\mathbf{u}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=(u,v) \tag{3.1}$$

sendo que (u,v) denotam as componentes dos deslocamentos nas direções x e y, respectivamente.

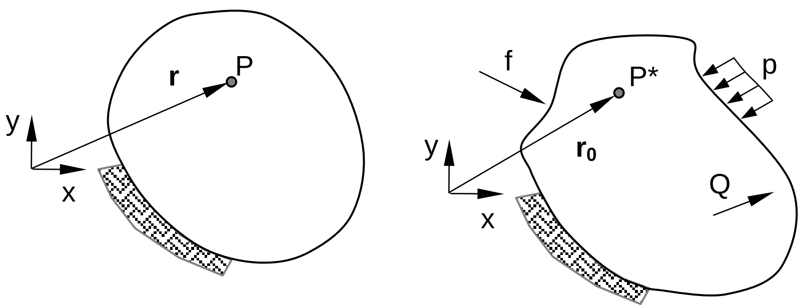



Figura 3.1 – Deformação do Corpo Elástico

Na Figura 3.1 estão indicados os carregamentos das forças concentradas no contorno, **f**, das pressões no contorno, **p,** e das forças concentradas no domínio, **Q**. Não estão ilustradas as forças de corpo, **b**, e os carregamentos oriundos de efeitos térmicos.

Para obter as equações de elementos finitos para os problemas planos, estado plano de tensão (EPT), e estado plano de deformação (EPD), é mais comum encontrar na literatura especializada o *vetor deformação* $\{\varepsilon\}$ sendo escrito na seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

sendo que $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$, e $\varepsilon_{xy}$,$=\gamma_{xy}/2$ denotam as componentes do tensor deformação de Cauchy.

3.1.1 - Estado Plano de Tensão (EPT)

O EPT normalmente é encontrado em corpos com espessura pequena e com carregamentos no plano. Nestes problemas não existe restrições para o deslocamento na direção transversal ao carregamento e a relação entre o *vetor tensão* e o *vetor deformação* é dada por:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \tag{3.3}$$

sendo que E e $\nu$ denotam o módulo de Young (módulo de elasticidade) e o Coeficiente de Poisson do material.

A componente $\varepsilon_{zz}$ do tensor de Cauchy não é nula e seu valor é obtido a partir da lei de Hook:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{3.4}$$

e o deslocamento na direção z é calculado com integração da Equação 3.4.

### 3.1.2 - Estado Plano de Deformação (EPD)

O EPD é encontrado em corpos longos com área da seção transversal pequena e com cargas transversais constantes e distribuídas ao longo do seu comprimento.

Neste caso $\varepsilon_{zz}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ e a relação $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$ é dada por:

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[D]\{\varepsilon\}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\{\varepsilon\} \qquad (3.5)$$

e $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$.

## 3.2 - PROBLEMAS AXI-SIMÉTRICOS

Os problemas elásticos axi-simétricos são caracterizados por corpos de revolução (eixo z é o eixo de simetria) submetidos a carregamentos também axi-simétricos. Nas equações que descrevem este tipo de problema normalmente é utilizado o sistema cilíndrico de coordenadas $(r,\theta,z)$ e o *vetor deformação* é dado por:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{rz}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u/\partial r\\ \partial w/\partial z\\ \partial u/\partial z+\partial w/\partial r\\ u/r\end{Bmatrix} \qquad (3.6)$$

sendo que (u,w) denotam os deslocamentos na direção x e z, respectivamente.

A relação entre o *vetor tensão*, $\{\sigma\}=\{\sigma_{rr},\sigma_{zz},\sigma_{\theta\theta},\tau_{rz}\}^t$, e o *vetor deformação* é dada por $\{\sigma\}=[\mathbf{D}]\{\varepsilon\}$ e a matriz constitutiva para materiais homogêneos isotrópicos vale:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

## 3.3 - FORMULAÇÃO PARA PROBLEMAS PLANOS (EPT E EPD)

Como já foi visto anteriormente no Capítulo 2, nos elementos do tipo '*Hermitiano 2-simplex*' as componentes do deslocamento são interpoladas utilizando a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \varphi_1 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Phi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_1 & \varphi_1 & \psi_1 & \dots & 0 & \Phi_4 \end{bmatrix}_{2\times 20} \{q\} \tag{3.8}$$

sendo que $\{q\}=\{u_1,\partial u_1/\partial x,\partial u_1/\partial y,v_1,\partial v_1/\partial x,\partial v_1/\partial y,..., u^*,v^*\}^t$ e $\Phi_i(x)$, $\varphi_i(x)$ e $\psi_i(x)$ são as funções de interpolação definidas nas Equações 2.15 a 2.17.

Para os problemas planos a relação entre o vetor deformação e as componentes do deslocamento pode ser escrita na seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \end{Bmatrix} \cong [B]\{q\} \tag{3.9}$$

sendo que **[B]** é uma matriz (3×20) que relaciona as três componentes do *vetor deformação* com os deslocamentos e é dada por:

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial\Phi_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial\Phi_4}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial\Phi_4}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_4}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

A matriz de rigidez do elemento, [**K**], é obtida utilizando a clássica expressão da literatura de elementos finitos (Chandrupatla e Belegundu, 2002):

$$[K]=\int_A [B]^t [D][B]\, t dA \tag{3.11}$$

sendo que t denota a espessura do elemento (constante), A denota a área do triangulo e [**D**] é a matriz (3×3) que correlaciona às tensões com as deformações, $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$.

## 3.4 - FORMULAÇÃO PARA PROBLEMAS AXI-SIMÉTRICOS

Para os problemas axi-simétricos à relação entre o vetor deformação $\{\varepsilon\}$ e as componentes do deslocamento u e w pode ser escrita na seguinte forma:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{zz}\\ \gamma_{rz}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u/\partial r\\ \partial w/\partial z\\ \partial u/\partial z+\partial w/\partial r\\ u/r\end{Bmatrix}\cong[B]\{q\} \tag{3.12}$$

onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\psi_1}{\partial r} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial\phi_4}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} & \cdots & 0 & \frac{\partial\phi_4}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\psi_1}{\partial z} & \frac{\partial\phi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\psi_1}{\partial r} & \cdots & \frac{\partial\phi_4}{\partial z} & \frac{\partial\phi_4}{\partial r} \\ \frac{\phi_1}{r} & \frac{\varphi_1}{r} & \frac{\psi_1}{r} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\phi_4}{r} & 0 \end{bmatrix}_{4\times 20} \tag{3.13}$$

e que $\{q\}=\{u_1,\partial u_1/\partial x,\partial u_1/\partial y,v_1,\partial w_1/\partial x,\partial w_1/\partial y,..., u^*,w^*\}^t$.

A partir desta definição para [**B**] a matriz de rigidez do elemento é calculada da maneira convencional, isto é:

$$[K] = 2\pi\int_A [B]^t[D][B]\, r\, drdz \tag{3.14}$$

## 3.5 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Observar que para elementos de lados retos as Equações 3.11 e 3.14 podem ser avaliadas analiticamente empregando a conhecida relação mostrada por Eisenberg e Malvern (1973) para integração em triângulos:

$$I = \int_A L_1^r L_2^s L_3^t\, dA = 2A\,\frac{r!\,s!\,t!}{(2+r+s+t)!} \tag{3.15}$$

Entretanto, neste trabalho as integrais das Equações 3.11 e 3.14 foram avaliadas numericamente e utilizando 16 pontos de integração que garantem precisão nos cálculos para polinômios até grau 8 (Akin, J.E.,2004; Zhang et al., 2009).

No Anexo III é detalhada a quadratura utilizada para estas integrais e são apresentados os pontos e pesos de integração listados por Zhang et al. (2009).

## 3.6 - VETOR FORÇA

Para os problemas planos o vetor força é calculado de maneira usual. Para carregamentos $\{f_x,f_y\}$ *distribuído no domínio* tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f^* \end{Bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} \Phi_1 & \varphi_1 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \Phi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_1 & \varphi_1 & \psi_1 & \ldots & 0 & \Phi_4 \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} dA \qquad (3.16)$$

e quando $\{f_x,f_y\}$ esta *distribuído no contorno* o vetor força é dado por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \int_\Gamma \begin{bmatrix} \Phi_{1\Gamma} & \varphi_{1\Gamma} & \psi_{1\Gamma} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{1\Gamma} & \varphi_{1\Gamma} & \psi_{1\Gamma} & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\Gamma \qquad (3.17)$$

sendo que $\Phi_{i\Gamma}(\mathbf{x})$, $\varphi_{i\Gamma}(\mathbf{x})$ e $\psi_{i\Gamma}(\mathbf{x})$ indicam o traço das funções $\Phi_i(\mathbf{x})$, $\varphi_i(\mathbf{x})$ e $\psi_i(\mathbf{x})$, respectivamente. Ressalta-se que neste caso as duas últimas componentes do vetor força são nulas porque a função $\Phi_4(\mathbf{x})$ é nula no contorno dos elementos.

## 3.7 - ELEMENTO REDUZIDO (CONDENSAÇÃO ESTÁTICA)

A matriz de rigidez da Equação 3.11 ou da Equação 3.14 possui dimensão igual a $20\times20$ para o elemento Hermitiano sem enriquecimento (N*=1). Para este elemento o modelo reduzido com ordem $18\times18$ é obtido empregando o processo de condensação estática de Guyan (1965) para eliminar os graus de liberdade associados aos deslocamentos generalizados u* e v*. Este processo reduz apenas 2 graus de liberdade do sistema de equações do elemento, entretanto, os outros graus de liberdade restantes estão associados somente aos nós do elemento.

O sistema de equações que representa o equilíbrio estático do elemento pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f^* \end{Bmatrix} \qquad (3.18)$$

sendo que {**q***} ={u*,v*}$^t$ e {**f***} representa as componentes do vetor força associadas a u* e v*.

Eliminando {**q***} desta equação é obtido o sistema reduzido de ordem 18×18:

$$[K_R]\{q_1\} = \{f_r\} \tag{3.19}$$

sendo que,

$$[K_R] = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}] \tag{3.20}$$

e,

$$\{f_R\} = \{f_1\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1}\{f^*\} \tag{3.21}$$

Este mesmo processo é repetido para os elementos Hermitianos enriquecidos.

## 3.8 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 3.8.1 - Alguns “*Patch Tests”*

Os chamados *patch tests* têm sido utilizados para a validação e análise de convergência de novos elementos finitos quando $h \to 0$ ou quando as discretizações são construídas com malhas distorcidas. O primeiro teste mostrado na sequencia foi proposto por Zienkiewicz e Taylor (2000) para um EPT cuja solução analítica para os deslocamentos é dada por:

$$\begin{aligned} u(x) &= 0{,}002x \\ v(x) &= -0{,}0006y \end{aligned} \tag{3.22}$$

Para estes deslocamentos as componentes de deformação valem $\varepsilon_{xx}(\mathbf{x})=0{,}002$, $\varepsilon_{yy}(\mathbf{x})=-0{,}0006$ e $\varepsilon_{xy}(\mathbf{x})=0$. Então, para $\nu=0{,}3$ e E=1000 as componentes de tensão são iguais a $\sigma_{xx}(\mathbf{x})=2{,}0$ e $\sigma_{yy}(\mathbf{x})=\tau_{xy}(\mathbf{x})=0$.

A malha de elementos triangulares ilustrada na Figura 3.3 possui os mesmos nós da malha original proposta por Zienkiewicz e Taylor (2000), Figura 3.2, e foram realizados dois testes com condições de contorno distintas:

<u>Teste 1:</u> Deslocamentos e derivadas prescritas nos nós do contorno de acordo com a solução analítica;

<u>Teste 2:</u> Deslocamentos e derivadas prescritas nos nós 1 e 4 e carregamento de pressão uniforme, p=$\sigma_{xx}(\mathbf{x})$=2,0; no lado 2-3.

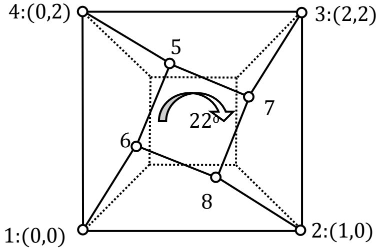



Figura 3.2 – Geometria e Malha de Elementos Finitos Quadrangulares
Fonte: Zienckiewicz e Taylor (2000)

Os resultados obtidos nestas análises estão resumidos nas Tabelas 3.1 a 3.3. Os erros para os deslocamentos para os dois testes foram iguais e pode-se observar nestas tabelas que todos os resultados de tensão e deslocamento praticamente coincidem com a solução analítica.

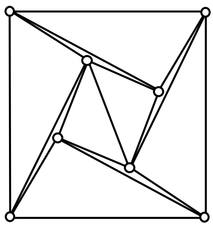


Figura 3.3 – Malha de Elementos Finitos Distorcida para Testes

Tabela 3.1 – Resultados de tensões para o Teste 1

| Nó | x | y | $\sigma_{xx}$ | $\sigma_{yy}\times10^{13}$ | $\tau_{xy}\times10^{13}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,723711 | 1,650895 | 2,000 | -0,767 | -0,884 |
| 6 | 0,349105 | 0,723711 | 2,000 | -0,249 | 0,364 |
| 7 | 1,650895 | 1,276288 | 2,000 | 0,191 | -0,104 |
| 8 | 1,276288 | 0,349105 | 2,000 | 0,178 | 0,114 |

Tabela 3.2 – Erros em deslocamentos para o Teste 1

| Nó | x | y | $\lvert u(x)-u_{MEF}(x)\rvert$ | $\lvert v(x)-v_{MEF}(x)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,723711 | 1,650895 | $6,875\times10^{-11}$ | $4,705\times10^{-11}$ |
| 6 | 0,349105 | 0,723711 | $3,316\times10^{-11}$ | $2,062\times10^{-11}$ |
| 7 | 1,650895 | 1,276288 | $1,568\times10^{-10}$ | $3,637\times10^{-11}$ |
| 8 | 1,276288 | 0,349105 | $1,214\times10^{-10}$ | $9,949\times10^{-12}$ |

Tabela 3.3 – Resultados de tensões para o Teste 2

| Nó | x | y | $\sigma_{xx}$ | $\sigma_{yy}\times10^{13}$ | $\tau_{xy}\times10^{13}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,723711 | 1,650895 | 2,000 | -1,569 | 0,569 |
| 6 | 0,349105 | 0,723711 | 2,000 | -0,277 | 0,669 |
| 7 | 1,650895 | 1,276288 | 2,000 | 0,475 | 0,116 |
| 8 | 1,276288 | 0,349105 | 2,000 | -0,761 | 0,686 |

### 3.8.2 - Placa com Carregamento Parabólico

O problema ilustrado na Figura 3.4 foi resolvido por Cowper et al. (1970) e depois por Sengupta e Dasgupta (1989) utilizando também os elementos Hermitianos. A solução de referencia, indicada como ‘Exata’ nas tabelas, é a de Cowper et al. (1970) e alguns resultados obtidos com diferentes malhas construídas utilizando o padrão M×M (M divisões em x e M divisões em y) estão mostrados nas Tabelas 3.4 a 3.10 (em todas as tabelas mostradas neste exemplo SeD indica a solução de Sengupta e Dasgupta (1989) e Cowper indica a solução de Cowper et al. (1970)).

Tabela 3.4 – Comparação de resultados do deslocamento u(**x**)

| | $u_B^* = \dfrac{10\,E\,t\,u_B}{[(1-\nu^2)\,N_0\,L]}$ | | | $u_C^* = \dfrac{10\,E\,t\,u_C}{[(1-\nu^2)\,N_0\,L]}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Malha | SeD | Cowper | Presente | SeD | Cowper | Presente |
| 1×1 | -1,50795 | -1,507941 | -1,50794 | 2,19341 | 2,1934 | 2,19344 |
| 2×2 | -1,51981 | -1,519812 | -1,52049 | 1,86841 | 1,8684 | 1,88129 |
| 3×3 | -1,51977 | -1,519773 | -1,51972 | 1,80463 | 1,8046 | 1,80305 |
| 4×4 | -1,51988 | -1,519862 | -1,51975 | 1,78967 | 1,7896 | 1,78666 |
| 5×5 | -1,51991 | -1,519900 | -1,51983 | 1,78513 | 1,7852 | 1,78591 |
| 10×10 | - | - | -1,51992 | - | - | 1,78264 |
| Exato | -1,519928 | | | 1,7837 | | |

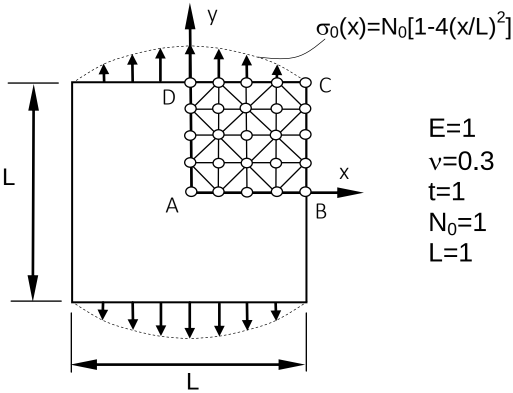



Figura 3.4 – EPT com distribuição parabólica de carregamento e malha 4×4 para 1/4 do domínio

Fonte: Adaptado de Cowper et. al (1970)

Tabela 3.5 – Comparação de resultados do deslocamento v(**x**)

| | $V_C^* = \dfrac{10\,E\,t\,v_C}{[(1-\nu^2)N_0\,L]}$ | | | $V_D^* = \dfrac{10\,E\,t\,v_D}{[(1-\nu^2)N_0\,L]}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Malha | SeD | Cowper | Presente | SeD | Cowper | Presente |
| 1×1 | 1,31824 | 1,31824 | 1,31824 | 5,08546 | 5,085466 | 5,08547 |
| 2×2 | 1,28574 | 1,28574 | 1,28703 | 5,07360 | 5,073595 | 5,07292 |
| 3×3 | 1,27936 | 1,27936 | 1,27921 | 5,07364 | 5,073633 | 5,07369 |
| 4×4 | 1,27787 | 1,27787 | 1,27757 | 5,07357 | 5,073544 | 5,07365 |
| 5×5 | 1,27743 | 1,27742 | 1,27749 | 5,07353 | 5,073507 | 5,07357 |
| 10×10 | - | - | 1,27717 | - | - | 5,07349 |
| Exato | 1,27727 | | | 5,073478 | | |

Tabela 3.6 – Comparação de resultados de $\sigma_{xx}$(**x**)

| | $\sigma_{xx}^*=10\sigma_{xx}(\mathbf{x}_A)/N_0$ | | | $\sigma_{xx}^*=\sigma_{xx}(\mathbf{x}_B)/N_0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Malha | SeD | Cowper | Presente | SeD | Cowper | Presente |
| 1×1 | -1,44190 | -1,44190 | -1,44190 | 0,039928 | 0,039928 | 0,039928 |
| 2×2 | -1,40138 | -1,40137 | -1,38107 | 0,004236 | 0,004235 | 0,001034 |
| 3×3 | -1,40559 | -1,40559 | -1,40191 | 0,000848 | 0,000848 | 0,000192 |
| 4×4 | -1,40791 | -1,40789 | -1,40707 | 0,000329 | 0,000329 | 0,000117 |
| 5×5 | -1,40880 | -1,40880 | -1,40805 | 0,000165 | 0,000166 | 0,000109 |
| 10×10 | - | - | -1,40947 | - | - | 0,000023 |
| Exato | -1,40954 | | | 0,0 | | |

Tabela 3.7 – Comparação de resultados para tensões

| | $\sigma_{xx}^*=10\sigma_{xx}(\mathbf{x}_D)/N_0$ | | $\sigma_{yy}^*=10\sigma_{yy}(\mathbf{x}_B)/N_0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Malha | SeD | Presente | SeD | Cowper | Presente |
| 1×1 | 4,70735 | 4,70735 | 4,70736 | 4,70735 | 4,70735 |
| 2×2 | 4,17499 | 4,08438 | 4,17501 | 4,17500 | 4,08438 |
| 3×3 | 4,11899 | 4,09362 | 4,11905 | 4,11902 | 4,09362 |
| 4×4 | 4,10967 | 4,10286 | 4,10976 | 4,10971 | 4,10286 |
| 5×5 | 4,10773 | 4,10534 | 4,10768 | 4,10767 | 4,10534 |
| 10×10 | - | 4,10668 | - | - | 4,10668 |
| Exato | 4,10670 | | 4,10670 | | |

Chama atenção na Tabela 3.7 o fato de que os resultados de Sengupta e Dasgupta (1989) para $\sigma_{xx}$* são diferentes dos resultados para $\sigma_{yy}$*. Para concluir este exemplo foram analisados os resultados obtidos com a malha 4x4 para o elemento enriquecido com 2 e 3 funções adicionais em cada nó, N*=2 e N*=3, respectivamente. Ressalta-se nas Tabelas 3.11 a 3.14 que a convergência para os deslocamentos e tensões não é monotônica.

Os resultados de deslocamento sempre indicam melhorias com o acréscimo das funções enriquecedoras e o mesmo não se verifica para tensões.

Tabela 3.8 – Comparação de resultados de tensões

| | $\sigma_{yy}^*=10\sigma_{yy}(\mathbf{x}_A)/N_0$ | | |
|---|---|---|---|
| Malha | SeD | Cowper | Presente |
| 1×1 | 8,55810 | 8,55810 | 8,55810 |
| 2×2 | 8,59864 | 8,59863 | 8,61893 |
| 3×3 | 8,59440 | 8,59441 | 8,59809 |
| 4×4 | 8,59219 | 8,59211 | 8,59293 |
| 5×5 | 8,59124 | 8,59120 | 8,59195 |
| 10×10 | - | - | 8,59053 |
| Exato | 8.59046 | | |

Tabela 3.9 – Comparativo das tensões $\sigma_{yy}(x,L/2)$

| x | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Exato | 1 | 0,96 | 0,84 | 0,64 | 0,36 | 0 |
| 1×1 | 1,03993 | - | - | - | - | 0,031810 |
| 5×5 | 1,00011 | 0,960291 | 0,840043 | 0,641148 | 0,359848 | -0,003140 |
| 10×10 | 1,00002 | 0,960023 | 0,840022 | 0,640010 | 0,360141 | -0,000195 |

Tabela 3.10 – Convergência para energia

| | $U^* = \dfrac{10Et^2U}{(1-\nu^2)L^2 N_0{}^2}$ | |
|---|---|---|
| Malha | Cowper | Presente |
| 1×1 | 2,7879813 | 2,7879813 |
| 2×2 | 2,7933662 | 2,7931087 |
| 3×3 | 2,7935404 | 2,7935164 |
| 4×4 | 1,7935617 | 2,7935596 |
| 5×5 | 2,7935667 | 2,7935655 |
| 10×10 | - | 2,7935696 |
| Exato | 2,7935695 | |

Tabela 3.11 – Comparação de resultados do deslocamento u(**x**)

| Elemento | $u_B$* | Erro % | $u_C$* | Erro % |
|---|---|---|---|---|
| SeD | -1,51988 | 0,003158 | 1,78967 | 0,334697 |
| N*=1 | -1,51975 | 0,011711 | 1,78666 | 0,165945 |
| N*=2 | -1,51989 | 0,002500 | 1,78502 | 0,074003 |
| N*=3 | -1,51995 | 0,001447 | 1,78413 | 0,024106 |
| Exato | -1,519928 | | 1,7837 | |

Tabela 3.12 – Comparação de resultados do deslocamento v(**x**)

| Malha | $v_C$* | Erro % | $v_D$* | Erro % |
|---|---|---|---|---|
| SeD | 1,27787 | 0,0464317 | 5,07357 | 0,0017695 |
| N*=1 | 1,27757 | 0,0229402 | 5,073653 | 0,0034142 |
| N*=2 | 1,27740 | 0,0096312 | 5,073514 | 0,0006698 |
| N*=3 | 1,27731 | 0,0025847 | 5,073454 | -0,0005144 |
| Exato | 1,27727 | | 5,07348 | |

Tabela 3.13 – Energia de Deformação Elástica

| Malha | U* | Erro % |
|---|---|---|
| N*=1 | 2,79355968 | $-3{,}5152\times10^{-4}$ |
| N*=2 | 2,79356146 | $-2{,}8780\times10^{-4}$ |
| N*=3 | 2,79356227 | $-2{,}5881\times10^{-4}$ |
| Exato | 2,7935695 | |

Tabela 3.14 – Análise de Tensões em função de N*

| Ponto | Elemento | $\sigma_{xx}$* | $\sigma_{yy}$* | $\tau_{xy}$* |
|---|---|---|---|---|
| A | N*=1 | -1,40707 | 8,59293 | 0,0 |
| | N*=2 | -1,41085 | 8,58915 | 0,0 |
| | N*=3 | -1,40639 | 8,59361 | 0,0 |
| | Exato | -1,40954 | 8,59046 | 0,0 |
| B | N*=1 | 0,00117 | 4,10286 | 0,0 |
| | N*=2 | -0,01825 | 4,13821 | 0,0 |
| | N*=3 | -0,00564 | 4,09358 | 0,0 |
| | Exato | 0,0 | 4,10670 | 0,0 |
| C | N*=1 | -0,04853 | -0,04853 | 0,04982 |
| | N*=2 | -0,02271 | -0,02271 | 0,02366 |
| | N*=3 | 0,01156 | 0,01156 | -0,00836 |
| | Exato | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| D | N*=1 | 4,10286 | 10,0012 | 0,0 |
| | N*=2 | 4,13821 | 9,98175 | 0,0 |
| | N*=3 | 4,09358 | 9,99436 | 0,0 |
| | Exato | 4,10670 | 10,0 | 0,0 |

### 3.8.3 - Viga Longa Engastada com Momento na Extremidade

A viga longa de comprimento L= 32mm mostrada na Figura 3.5 é engastada em x=0 e carregada com um momento fletor M= 100Nmm na outra extremidade. O valor do modulo de elasticidade é tomado como sendo E= 768 MPa de tal modo que a solução exata para o deslocamento vertical v(L,0) é igual a 100mm. Para este problema a solução analítica vale:

$$U(\mathbf{x})=-\kappa xy \ , \ v(\mathbf{x})=\kappa(x^2+\nu y^2) \tag{3.23}$$

sendo que $\kappa$ denota a curvatura da viga deformada, $\kappa$=M/EI com $I=hb^3/12$.

Para comparar resultados com os disponíveis na literatura foram construídas malhas com padrão de N divisões em x por M divisões em y variando desde 2×2 até 32×2. O objetivo da elaboração destas malhas é testar a qualidade dos resultados para elementos com razão de aspecto ruim. O problema foi resolvido empregando o EPT e no lado engastado foram prescritos deslocamentos e derivadas parciais de acordo com a solução analítica.

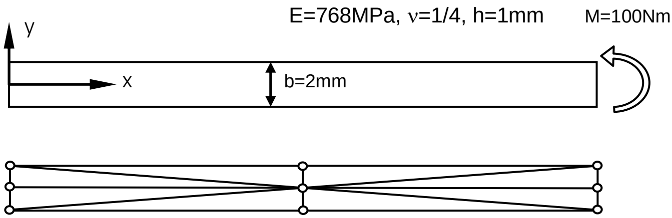



Figura 3.5- Viga loga engastada em flexão e malha 2×2

Os resultados mostrados na Tabela 3.15 são para o deslocamento v(L,0). Os resultados dos outros elementos ilustrados nesta tabela foram citados por Felippa (2003). Nota-se que para todas as malhas os resultados obtidos com o elemento Hermitiano coincidem com a solução analítica do problema.

Tabela 3.15 - Deslocamento vertical v(32,0)

| Elemento | Malhas com N subdivisões em x e M subdivisões em y | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 32×2 | 16×2 | 8×2 | 4×2 | 2×2 |
| ALL-3I | 87,08 | 76,48 | 38,32 | 5,42 | 0,39 |
| ALL-3M | 81,36 | 53,57 | 9,59 | 0,71 | 0,04 |
| ALL-EX | 84,90 | 69,09 | 24,23 | 2,47 | 0,16 |
| ALL-LS | 85,36 | 68,25 | 20,83 | 1,89 | 0,12 |
| CST | 54,05 | 36,36 | 15,75 | 4,82 | 1,28 |
| FF84 | 98,36 | 97,17 | 96,58 | 96,34 | 96,27 |
| LST-Ret | 89,05 | 81,04 | 59,58 | 28,93 | 9,46 |
| OPT | 99,99 | 99,99 | 99,99 | 99,96 | 100,07 |
| Hermitiano | Qualquer Malha: v(32,0)=100,00; v(32,1)=100,02441; u(32,1)=-6,2500000 | | | | |

Os resultados para tensões em x=L/2 obtidos com a malha grosseira 2×2 estão mostrados na Tabela 3.16. Novamente, todos os valores praticamente coincidem com a solução analítica ($\tau_{xy}=\sigma_{yy}=0$ e $\sigma_{xx}=-My/I$). O mesmo comportamento é observado para a energia de deformação elástica cujo valor exato é 312,50 e o valor obtido com todas as malhas foi 312,500000038.

Tabela 3.16 – Tensões em x=L/2 para a malha 2×2

| y | $\sigma_{xx}$ | $\sigma_{yy}$ | $\tau_{xy}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -150,000 | $-0{,}491085\times10^{-9}$ | $0{,}123450\times10^{-8}$ |
| 0 | $-0{,}12091\times10^{-11}$ | $0{,}746301\times10^{-11}$ | $-0{,}262344\times10^{-8}$ |
| -1 | 150,000 | $0{,}493444\times10^{-9}$ | $0{,}123314\times10^{-8}$ |

### 3.8.4 - Viga Engastada com Deslocamento nas Extremidades

O problema ilustrado na Figura 3.6 foi resolvido por Vaz Jr. et al. (2009) para comparar resultados de tensão obtidos com o método de volumes finitos (MVF) e MEF. Como foi mencionado por estes autores, não existe solução analítica para o problema e por este motivo foi tomada como referencia a solução obtida utilizando malha com 16.000 elementos finitos isoparamétricos lineares para as comparações de resultados.

A malha com 6 divisões em y e 60 divisões em x foi utilizada para as simulações numéricas deste exemplo. Além dos valores mostrados na Figura 3.6 foram prescritos também valores nulos para $u(\mathbf{x})$,$\partial u(\mathbf{x})/\partial y$ e $\partial v(\mathbf{x})/\partial y$ nos engastes. O problema foi resolvido empregando as hipóteses do EPT com E=210 GPa e $\nu$=0,30.

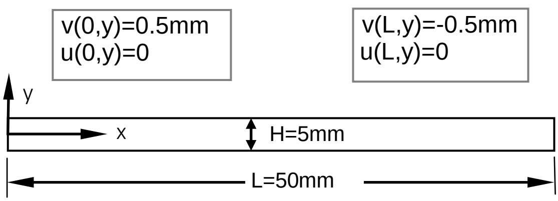



Figura 3.6- Viga bi-engastada com deslocamentos nas extremidades.

Na Figura 3.7 são mostrados os resultados obtidos para a tensão cisalhante ao redor do canto esquerdo superior da viga. Note que a solução do MEF aproxima-se bastante da curva de referencia e o refino da malha foi necessário para captar o efeito da elevada concentração de tensões existente no ponto (0;2,5). O comportamento das tensões cisalhantes ao longo de y obtidos nesta análise pode ser visto na Figura 3.8 e na Tabela 3.17. Estes resultados também estão muito próximos dos valores de referencia.

Tabela 3.17 – Resultados para $\tau_{xy}(x,0)$ e $\tau_{xy}(25,y)$, [MPa]

| a | Hermitiano $\tau_{xy}(a,0)$ | Referencia $\tau_{xy}(a,0)$ | Hermitiano $\tau_{xy}(25,a)$ | Referencia $\tau_{xy}(25,a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 76,2976 | 72,1660 | $2{,}522\times10^{-12}$ | $-9{,}171\times10^{-3}$ |
| 2.5 | -72,0845 | -72,4605 | -67,4478 | -67,4137 |
| 5.0 | -67,6363 | -67,6199 | $1{,}962\times10^{-12}$ | $-9{,}171\times10^{-3}$ |

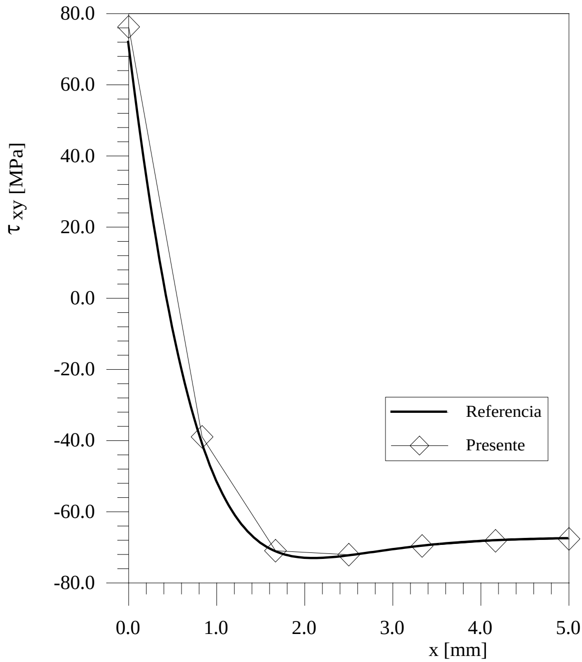



Figura 3.7 – Comparação dos resultados de $\tau_{xy}(\mathbf{x})$ para y=2,5 e 0≤x≤5

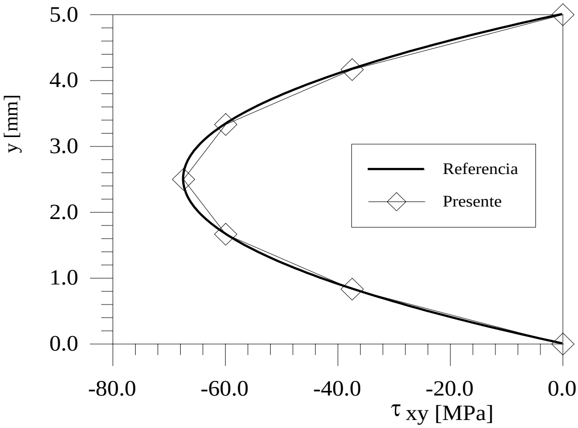



Figura 3.8 – Comparação dos resultados para $\tau_{xy}(L/2,y)$

## 3.8.5 - Problema de Cook

O chamado *problema de Cook* é muito conhecido na literatura e sempre é utilizado para testar novos elementos finitos. Este problema foi proposto por Cook (1974) e sua geometria, as condições de carregamento e as condições de contorno estão ilustradas na Figura 3.9. A condição de EPT é utilizada nas análises numéricas e a sua solução analítica não é conhecida. O valor $v_c$=23,956mm é tomado como referencia para efeito de comparações e foi obtido por Felippa (2003) utilizando o elemento OPT.

Na Tabela 3.18 estão mostrados os resultados de deslocamento do ponto C obtidos com o elemento QST3/18 proposto neste trabalho para malhas com M×M divisões. Os outros resultados mostrados nesta tabela são de alguns elementos conhecidos da literatura, os resultados da família TE4 foram mostrados por Piltner e Taylor (2000) e todos os outros por Felippa (2003).

Observa-se na Tabela 3.18 boa convergência dos resultados do elemento Hermitiano que mostra diferença de apenas -1,43% com relação ao valor de referencia para a malha 2×2 e 0,0125% para a malha 32×32. Os resultados para tensões para os pontos A e B indicados na Figura 3.9 também podem ser considerados muitos bons e estão mostrados nas Tabelas 3.19 e 3.20. Nestas tabelas os resultados da família TE4 e do elemento 'Allman' são citados por Piltner e Taylor (2000) e todos os outros por Bergan e Felippa (1985).

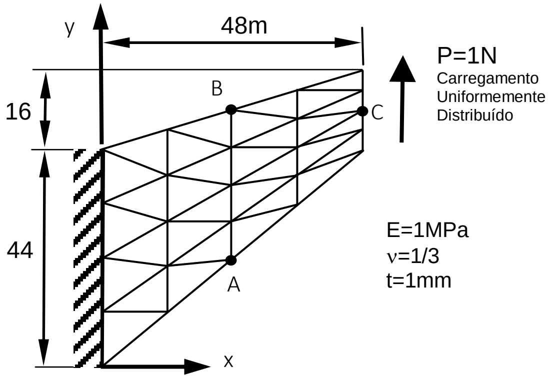



Figura 3.9 – Problema de Cook (1974) e malha 4×4
Fonte: Adaptado de Felippa (2003)

Tabela 3.18 – Convergência para $v_C$

| Elemento | Subdivisões da Malha | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2×2 | 4×4 | 8×8 | 16×16 | 32×32 | 64×64 |
| ALL-3I | 21,61 | 23,00 | 23,66 | 23,88 | 23,94 | |
| ALL-3M | 16,61 | 21,05 | 23,02 | 23,69 | 23,87 | |
| ALL-EX | 19,01 | 21,83 | 23,43 | 23,81 | 23,91 | |
| ALL-LS | 19,43 | 22,32 | 23,44 | 23,82 | 23,92 | |
| CST | 11,99 | 18,28 | 22,02 | 23,41 | | |
| FF84 | 20,36 | 22,42 | 23,41 | 23,79 | 23,91 | |
| LST-Ret | 19,82 | 22,62 | 23,58 | 23,86 | 23,94 | |
| OPT | 20,56 | 22,45 | 23,43 | 23,80 | 23,91 | 23,95 |
| FFQ | 21,66 | 23,11 | 23,79 | 23,88 | 23,94 | |
| HL | 18,17 | 22,03 | | 23,81 | | |
| HG | 22,32 | 23,23 | | 23,91 | | |
| Q4 | 11,85 | 18,30 | | 23,43 | | |
| Q6 | 22,94 | 23,48 | | | | |
| QM6 | 21,05 | 23,02 | | | | |
| TE4 | 20,27 | 22,49 | | 23,82 | | |
| TE4_1 | 20,74 | 22,64 | | 23,83 | | |
| TE4_2 | 21,14 | 22,64 | | 23,88 | | |
| Hermitiano | 23,615 | 23,827 | 23,905 | 23,945 | 23,959 | |

Tabela 3.19 – Tensão Máxima em A

| Elemento | Subdivisões da Malha | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2×2 | 4×4 | 8×8 | 16×16 | 32×32 |
| CST | 0,0760 | 0,1498 | 0,1999 | 0,2217 | |
| FF($\alpha$=1.5,$\beta$=0.5) | 0,1700 | 0,2129 | 0,2309 | 0,2333 | 0,2359 |
| HL | 0,1582 | 0,1980 | | 0,2294 | |
| HG | 0,0933 | 0,1628 | | 0,2225 | |
| Q4 | 0,1281 | 0,1905 | | 0,2358 | |
| Q6 | 0,1866 | 0,2210 | | | |
| QM6 | 0,1900 | 0,2239 | | 0,2364 | |
| Allman | 0,1523 | 0,2047 | | 0,2324 | |
| TE4 | 0,1640 | 0,2085 | | 0,2336 | |
| TE4_1 | 0,1587 | 0,2061 | | 0,2326 | |
| TE4_2 | 0,1491 | 0,1973 | | 0,2299 | |
| Hermitiano | 0,24773 | 0,23971 | 0,23709 | 0,23686 | 0,23686 |

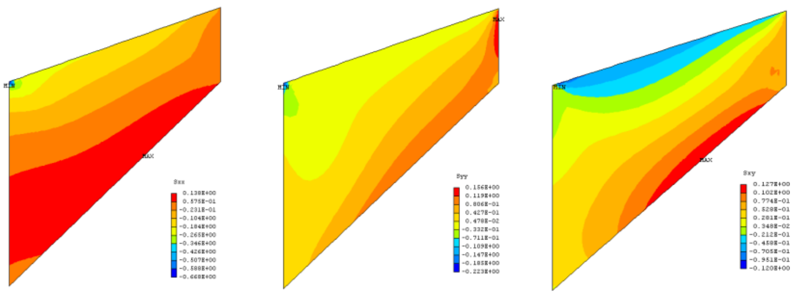
Felippa (2003) também comenta que são poucos os resultados na literatura que mostram as tensões em todo o domínio e que existe uma singularidade em **x**=(0,44). Resultados de tensão são mostrados na Figura 3.10 (obtidos com malha de 32×32 elementos).

| | | |
|---|---|---|
| ALL-3I | - | Allmann 88, integração 3 pontos interior, Felippa (2003) |
| ALL-3M | - | Allmann 88, integração 3 pontos médios, Felippa (2003) |
| ALL-EX | - | Allmann 88, integração exata, Felippa (2003) |
| LST-Ret | - | Retrofitted LST, Felippa (2003) |
| ALL-LS | - | Allmann 88, least square strain fit, Felippa (2003) |
| OPT | - | Elemento com gdl de rotação nos nós, Felippa (2003) |
| TE4 | - | Elemento com gdl de rotação, Piltner e Taylor (2000) |
| TE4_1 | - | Elemento com gdl de rotação, Piltner e Taylor (2000) |
| TE4_2 | - | Elemento com gdl de rotação, Piltner e Taylor (2000) |
| FF84 | - | Free Formulation 1984, Bergan e Felippa (1985) |
| FFQ | - | Free Formulation Quadrilateral, Nygard (1986) |
| HL | - | Elemento finito híbrido, Cook (1974) |
| HG | - | Elemento finito híbrido, Cook (1974) |
| Q4 | - | El. Lagrangeano conforme bilinear quadril., Cook (1974) |
| Q6 | - | El. não conforme bilinear quadrilateral, Taylor et al. (1976) |
| QM6 | - | El. conforme bi linear quadrilateral, Taylor et al. (1976) |
| ALL | - | El. triangular com rotação nos vértices, Allmann (1984) |

Tabela 3.20 – Tensão Mínima em B (compressão)

| Elemento | Subdivisões da Malha | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2×2 | 4×4 | 8×8 | 16×16 | 32×32 |
| CST | 0,0360 | 0,1002 | 0,1567 | 0,1844 | |
| FF(α=1.5,β=0.5) | 0,1804 | 0,1706 | 0,1902 | 0,1981 | 0,2012 |
| HL | 0,1335 | 0,1700 | | 0,2005 | |
| HG | 0,1394 | 0,1566 | | 0,1952 | |
| Q4 | 0,0916 | 0,1510 | | 0,2002 | |
| Q6 | 0,1936 | 0,1936 | | | |
| QM6 | 0,1565 | 0,1853 | | | |
| Hermitiano | 0,16755 | 0,19982 | 0,20326 | 0,20348 | 0,20351 |

Na Figura 3.11 é mostrado o resultado para a tensão equivalente de Von Mises em todo o domínio e ilustra a concentração de tensões ao redor do ponto singular. As ilustrações mostradas nestas figuras foram obtidas utilizando algoritmo próprio escrito em Fortran.



a) $\sigma_{xx}(\mathbf{x})$ b) $\sigma_{yy}(\mathbf{x})$ c) $\tau_{xy}(\mathbf{x})$

Figura 3.10 – Análise de tensões para a malha 32×32

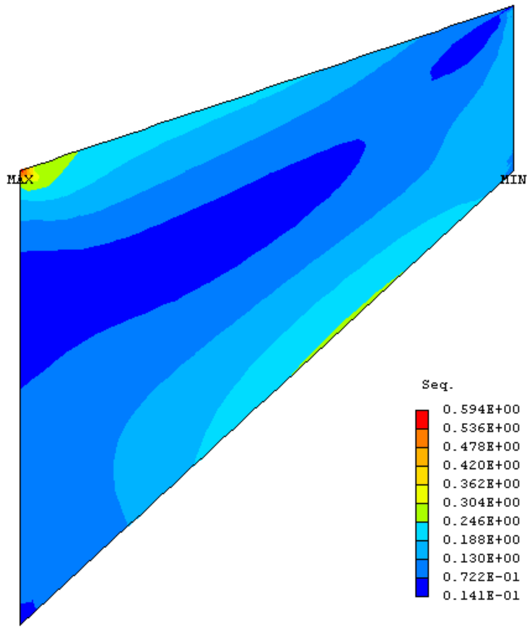



Figura 3.11 – Tensão de Von Mises para a malha 32×32

### 3.8.6 - Cubic

O problema denominado de '*Cubic*' é também muito utilizado na literatura para a validação de novos elementos finitos devido à existência de uma solução analítica, Li G. et al. (2003), Beckers et al. (1993), Yazdani et al. (1997), Vaz et al.(2009). Trata-se de um problema plano com carregamento parabólico de cisalhamento em um dos extremos, Fenner (1986). A geometria deste problema e as condições de carregamento estão ilustradas na Figura 3.12 e na extremidade x=L são prescritas condições de contorno de acordo com a solução analítica do problema.

Considerando que $P(y)=6P_{max}(1/4–y^2/H^2)/H$, então a solução analítica para os deslocamentos é dada por:

$$u(x,y) = -\frac{P_{max}\,y}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(L^2 - x^2\right) + \frac{2+\nu}{6}\left(y^2 - \frac{H^2}{4}\right)\right] \tag{3.24}$$

e

$$v(x,y) = -\frac{P_{max}}{EI}\left[\frac{L^3}{3} - \frac{L^2 x}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{4+5\nu}{24}H^2(L-x) + \frac{\nu x y^2}{2}\right] \qquad (3.25)$$

sendo que I representa o momento de inércia da seção. A solução analítica para tensões é:

$$\sigma_{xx} = xy\,\frac{P_{max}}{I}; \quad \sigma_{yy} = 0 \ \text{ e } \ \tau_{xy} = \left(\frac{H^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)\frac{P_{max}}{I} \qquad (3.26)$$

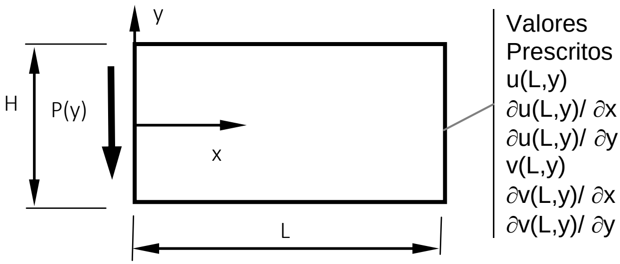



Figura 3.12 – Problema '*Cubic*'

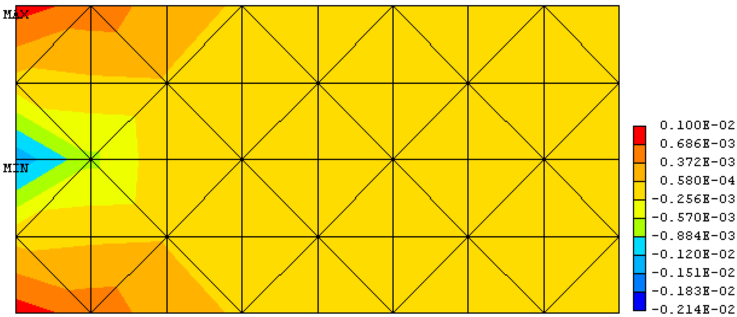
Este problema foi resolvido utilizando a hipótese de EPT e foram adotados os seguintes valores nas análises: $P_{max}$= 250N, E= 300GPa, L= 80mm, H= 40mm, $\nu$= 0,30 e t= 1mm (espessura).

Tabela 3.21 – Erros em Tensões

| y | Erro em $\tau_{xy}(L/2,y)$ | | x | Erro em $\sigma_{xx}(x,H/2)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Malha 8×4 | Malha 16×8 | | Malha 8×4 | Malha 16×8 |
| 0 | $-1{,}133\times10^{-3}$ | $-1{,}351\times10^{-10}$ | 0 | $0{,}940\times10^{-3}$ | $0{,}893\times10^{-11}$ |
| 5 | | $3{,}236\times10^{-10}$ | 10 | $-0{,}114\times10^{-2}$ | $0{,}217\times10^{-11}$ |
| 10 | $2{,}335\times10^{-4}$ | $5{,}411\times10^{-10}$ | 20 | $-0{,}428\times10^{-3}$ | $0{,}564\times10^{-11}$ |
| 15 | | $6{,}438\times10^{-10}$ | 30 | $0{,}187\times10^{-4}$ | $0{,}123\times10^{-10}$ |
| 20 | $-1{,}155\times10^{-4}$ | $6{,}846\times10^{-10}$ | 40 | $0{,}157\times10^{-4}$ | $0{,}319\times10^{-10}$ |
| 25 | | $6{,}398\times10^{-10}$ | 50 | $0{,}118\times10^{-5}$ | $0{,}111\times10^{-9}$ |
| 30 | $2{,}335\times10^{-4}$ | $5{,}261\times10^{-10}$ | 60 | $0{,}239\times10^{-7}$ | $0{,}262\times10^{-9}$ |
| 35 | | $3{,}223\times10^{-10}$ | 70 | $-0{,}171\times10^{-7}$ | $-0{,}549\times10^{-8}$ |
| 40 | $1{,}133\times10^{-3}$ | $-5{,}880\times10^{-11}$ | 80 | $-0{,}270\times10^{-7}$ | $-0{,}362\times10^{-8}$ |

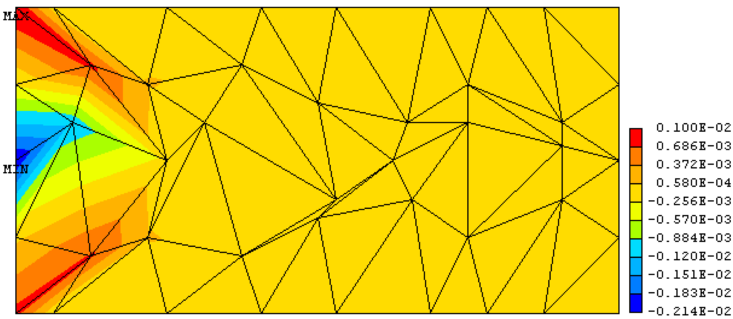
Na Tabela 3.21 estão mostrados alguns resultados obtidos com as malhas 8×4 e 16×8 (malha N×M; N divisões em x por M divisões em y) para $\tau_{xy}(L/2,y)$ e para $\sigma_{xx}(x,H/2)$. Estes resultados já eram esperados, pois o elemento Hermitiano possui aproximação cúbica para deslocamentos e a solução analítica deste problema também é cúbica.

Outro aspecto que também foi avaliado com este problema é a influência da distorção da malha nos resultados de tensão. Nas Figuras 3.13 a 3.16 estão ilustradas as diferenças entre a solução analítica e os valores de $\tau_{xy}(x,y)$ e $\sigma_{xx}(x,y)$ obtidos com malhas homogêneas e malhas distorcidas.




MIN.=-0.144E-2 MAX.=0.842E-3

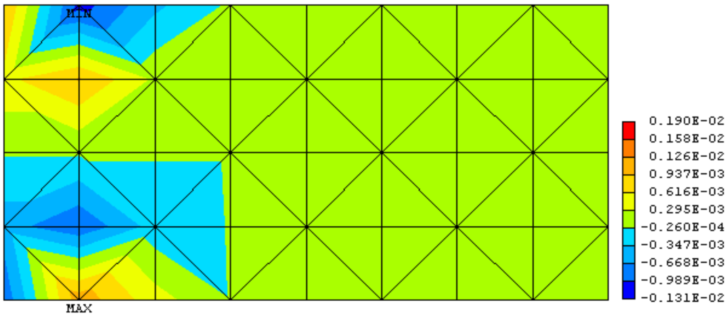
Figura 3.13 – Diferença em $\tau_{xy}$ para malha homogênea




MIN.=-0.214E-2 MAX.=0.100E-2

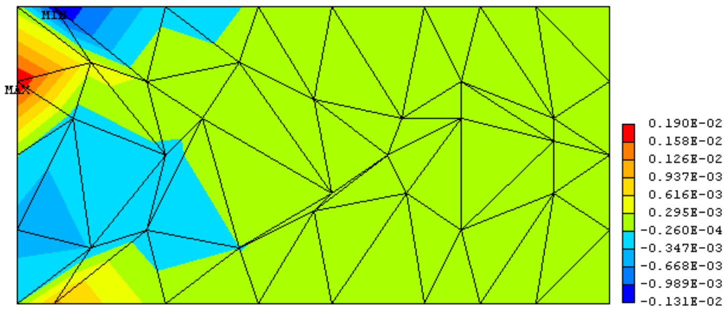
Figura 3.14 – Diferença em $\tau_{xy}$ para malha distorcida

Observe que a distorção da malha não influenciou de maneira significativa os resultados de tensão. Ainda, os erros obtidos para os deslocamentos (não mostrados) foram da mesma ordem de grandeza dos erros em tensões.




MIN.=-0.114E-2 MAX.=0.114E-2

Figura 3.15 – Diferença em $\sigma_{xx}$ para malha homogênea




MIN.=-0.131E-2 MAX.=0.190E-2

Figura 3.16 – Diferença em $\sigma_{xx}$ para malha distorcida

### 3.8.7 - Anel Composto

Neste exemplo são analisadas as tensões em anéis compostos obtidos a partir da montagem com interferência de um anel externo e um anel interno.

Para o anel interno antes da montagem o raio interno a=10mm e $c_i$=25.072mm, respectivamente.

O anel externo possui raio interno $c_o$=25mm e b=50mm, respectivamente.

As restrições de deslocamento na região de interferência são prescritas utilizando penalidades (*penalty approach*). Para a malha ilustrada na Figura 3.17 (malha 8×2) as condições de restrição de deslocamento são $u_{13}$-$u_{10}$=$\Delta$, $u_{14}$-$u_{11}$=$\Delta$ e $u_{15}$-$u_{12}$=$\Delta$.

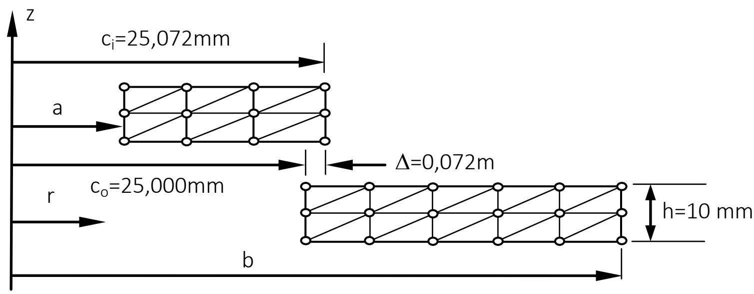



Figura 3.17 – Geometria e malha 8×2

Na literatura este tipo de restrição é chamado de '*multipoint constraints'*. Estas restrições são incluídas na formulação do problema introduzindo uma modificação na energia potencial total (energia potencial total é designada por $\Pi$). A energia potencial total modificada é escrita na seguinte forma:

$$\Pi_M = \Pi + C\,[(u_{13}-u_{10}-\Delta)^2 + (u_{14}-u_{11}-\Delta)^2 + (u_{15}-u_{12}-\Delta)^2] \qquad (3.27)$$

sendo que C é uma constante positiva grande ($C=10^{12}$ neste exemplo).

A influência destas restrições na matriz de rigidez e no vetor força é obtida a partir das derivadas parciais $\partial\Pi_M/\partial u_j$ para j=10,11,…,15. Maiores detalhes destes cálculos podem ser vistos em Chandrupatla e Belegundu (2002). Ainda, na região de contato não são prescritas restrições de deslocamento na direção z, isto é, trata-se de duas superfícies em contato e sem atrito.

Alguns resultados para o deslocamento radial u(r,z), para a tensão $\sigma_{rr}$ (r,z) e para $\sigma_{\theta\theta}$(r,z) que foram obtidos com 3 malhas diferentes estão ilustrados na Tabela 3.22. As Figuras 3.18 a 3.20 foram elaboradas com os dados obtidos com a malha 32×2 e mostram comparações de deslocamento e tensões com a solução analítica. Observa-se também na Tabela 3.22 que os resultados obtidos com as malhas mais grosseiras estão próximos dos valores da solução analítica e da malha mais refinada.

Tabela 3.22 – Resultados para $\sigma_{rr}(r,0)$, $\sigma_{\theta\theta}(r,0)$ e $u(r,0)\times 100$

| | Cilindro Interno | | | | Cilindro Externo | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r | 10 | 15 | 20 | 25,072 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| $\sigma_{rr}(r,0)$ 8×2 | -3,580 | -123,684 | -168,001 | -188,239 | -188,437 | -112,128 | -65,705 | -35,489 | -14,817 | -0,02910 |
| 16×2 | -0,670 | -124,553 | -168,212 | -188,600 | -189,095 | -112,101 | -65,630 | -35,469 | -14,791 | -0,00302 |
| 32×2 | -0,152 | -124,606 | -168,224 | -188,615 | -189,148 | -112,096 | -65,627 | -35,467 | -14,790 | -0,00048 |
| Analítico | 0 | -124,842 | -168,536 | -188,967 | -188,967 | -111,980 | -65,560 | -35,431 | -14,775 | 0,0 |
| $\sigma_{\theta\theta}(r,0)$ 8×2 | -450,151 | -323,676 | -280,273 | -259,832 | 315,564 | 238,188 | 191,708 | 161,566 | 140,888 | 126,095 |
| 16×2 | -448,889 | -323,963 | -280,370 | -259,974 | 315,297 | 238,201 | 191,734 | 161,575 | 140,898 | 126,106 |
| 32×2 | -448,663 | -323,987 | -280,375 | -259,981 | 315,274 | 238,203 | 191,735 | 161,575 | 140,898 | 126,107 |
| Analítico | -449,430 | -324,588 | -280,894 | -260,463 | 314,945 | 237,958 | 191,538 | 161,409 | 140,753 | 125,978 |
| $u(r,0)\times 100$ 8×2 | -2,24314 | -2,15943 | -2,31586 | -2,57343 | 4,62657 | 4,06066 | 3,68849 | 3,43722 | 3,26673 | 3,15270 |
| 16×2 | -2,24301 | -2,15888 | -2,31590 | -2,57343 | 4,62657 | 4,06066 | 3,68842 | 3,43722 | 3,26671 | 3,15269 |
| 32×2 | -2,24300 | -2,15889 | -2,31590 | -2,57343 | 4,62657 | 4,06066 | 3,68842 | 3,43722 | 3,26671 | 3,15269 |
| Analítico | -2,24715 | -2,16288 | -2,32018 | -2,57819 | 4,62181 | 4,05649 | 3,68463 | 3,43368 | 3,26335 | 3,14945 |

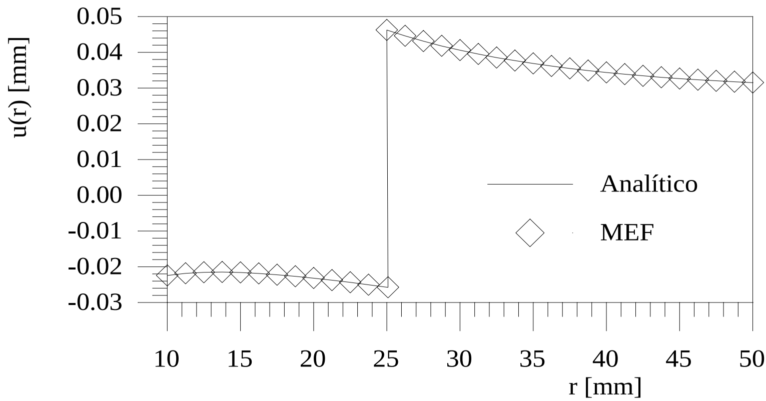



Figura 3.18 – Comparação dos resultados para u(r,0)

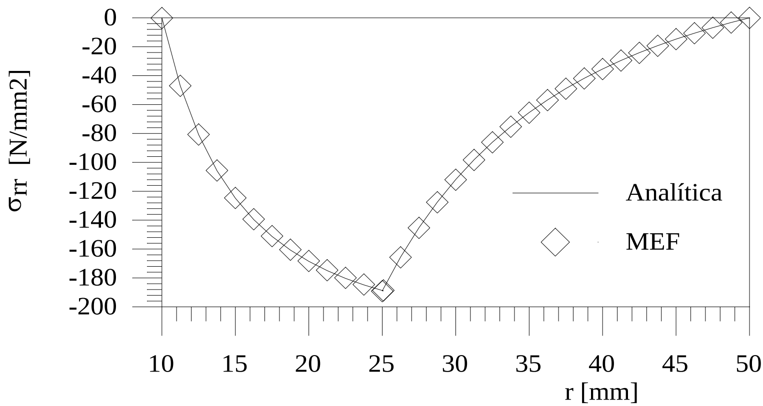



Figura 3.19 – Comparação dos resultados para $\sigma_{rr}(r,0)$

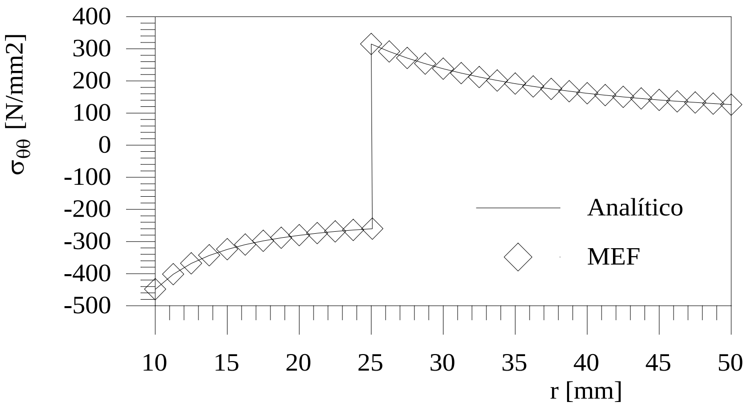



Figura 3.20 – Comparação dos resultados para $\sigma_{\theta\theta}$(r,0)

### 3.8.8 - Placa Semi-Espessa Circular com Carregamento Transversal

O objetivo desta aplicação é analisar a convergência para tensões, para o deslocamento transversal e para a energia de deformação de uma placa circular semi-espessa com carregamento unitário transversal e uniformemente distribuído, Figura 3.21. Trata-se de um problema axi-simétrico e nas analises foi utilizado R= 40mm, espessura t= 2mm, E= 210GPa e $\nu$=0,250.

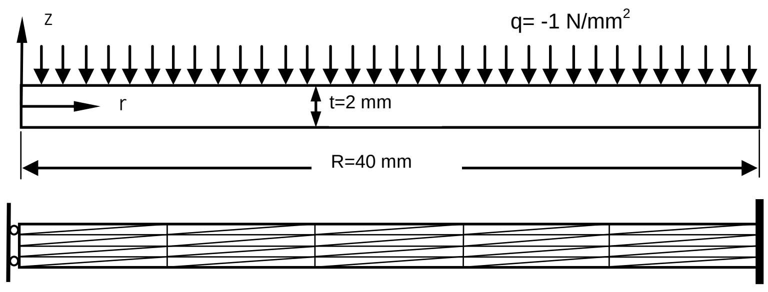



Figura 3.21 – Placa Circular com carregamento transversal unitário e malha de elementos finitos 5×4

Os valores tomados como referencia para o deslocamento transversal w(0,0) e para a energia de deformação U foram obtidos por

Weissman e Taylor (1990) utilizando a teoria de Reissner-Mindlin para placas. As expressões analíticas para estes dois valores são:

$$w(0,0)=\frac{qR^4}{64D}\left[\alpha+\frac{8}{3\kappa(1-\nu)}\left(\frac{t}{R}\right)^2\right] \qquad (3.28)$$

e

$$U=\frac{qR^6\varphi}{768D}\left[\beta+\frac{4}{\kappa(1-\nu)}\left(\frac{t}{R}\right)^2\right] \qquad (3.29)$$

sendo que $\alpha$=1 para placa engastada, $\alpha=(5+\nu)/(1+\nu)$ para placa simplesmente apoiada, $\kappa$=5/6, $\beta$=1 para placa engastada, $\beta=(7+\nu)/(1+\nu)$ para placa simplesmente apoiada, $\varphi$ denota o ângulo do setor circular analisado ($\varphi$=1 rad neste exemplo) e D é a rigidez de flexão, $D=Et^3/12(1-\nu^2)$.

Os resultados obtidos para o deslocamento transversal w(0,0) e para a energia de deformação elástica, U, estão mostrados na Tabela 3.23.

Os resultados para placa simplesmente apoiada obtidos com a malha 5$\times$4 mostram erros da ordem de 0,04354% para w(0,0) e -0,11906% para U ($||e||_E^{ER}$=0,0345). Para a placa engastada a convergência é um pouco mais lenta e com a malha 5$\times$4 obteve-se erros da ordem de 1,0523% para w(0,0) e 1,63218% para U($||e||_E^{ER}$=0,1277). Na Figura 3.22 é mostrada a curva para a convergência de $||e||_E^{ER}$ em função de *h* (*h*=R/M, M=número de elementos na direção r). Observa-se que a curva ajustada com coeficientes de determinação $R^2$=0,998723 para *h* < 8mm é uma reta e sua expressão matemática é $||e||_E^{ER} = 0{,}011427h+0{,}046742$. Isto indica que existe uma dependência linear deste parâmetro em função de *h,* mantendo o número de divisões constantes na direção "z".

Tabela 3.23 – Convergência *h* para Placa Engastada

| Malha | w(0.0) | Erro % | U | $\|e\|_E^{ER}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5×4 | 0,26786551 | 1,0523 | 35,693467 | 0,1277 |
| 10×4 | 0,26922911 | 0,5486 | 35,974225 | 0,0926 |
| 20×4 | 0,26990122 | 0,3003 | 36,110125 | 0,0695 |
| 40×4 | 0,27018129 | 0,1968 | 36,166703 | 0,0572 |
| 80×4 | 0,27027716 | 0,1614 | 36,186259 | 0,0523 |
| 160×4 | 0,27031171 | 0,1487 | 36,193429 | 0,0504 |
| Referência | 0,27071429 | - | 36,285714 | - |

Tabela 3.24 – Convergência *h* para Placa Apoiada

| Malha | w(0.0) | Erro % | U | $\|e\|_E^{ER}$ |
|---|---|---|---|---|
| 5×4 | 1,1273660 | 0,04354 | 207,466989 | 0,0345 |
| 10×4 | 1,1273405 | 0,04579 | 207,472392 | 0,0341 |
| 20×4 | 1,1273535 | 0,04464 | 207,478614 | 0,0336 |
| 40×4 | 1,1273737 | 0,04286 | 207,486759 | 0,0330 |
| 80×4 | 1,1273861 | 0,04176 | 207,491735 | 0,0327 |
| 160×4 | 1,1273904 | 0,04138 | 207,493430 | 0,0326 |
| Referência | 1,1278571 | - | 207,714286 | - |

A análise de convergência para tensões foi realizada tomando como referencia a solução obtida por Timoshenko e Goodier (1970) para placas simplesmente apoiadas. Os valores de referencia mostrados nas Tabelas 3.25 a 3.27 foram obtidos utilizando as seguintes expressões:

$$\sigma_{rr}(r,z) = q\left[\frac{2+\nu}{8}\frac{z^3}{c^3} - \frac{3(3+\nu)}{32}\frac{r^2 z}{c^3} - \frac{3(2+\nu)}{40}\frac{z}{c} + \frac{3(3+\nu)}{32}\frac{R^2 z}{c^3}\right] \tag{3.30}$$

$$\sigma_{zz}(r,z) = q\left[-\frac{z^3}{4c^3} + \frac{3}{4}\frac{z}{c} - \frac{1}{2}\right] \tag{3.31}$$

$$\tau_{rz}(r,z) = \frac{3qr}{8c^3}(c^2 - z^2) \tag{3.32}$$

sendo c=t/2

.

Tabela 3.25 - Convergência *h* para $\sigma_{rr}(0,z)$

| z | Referência | 5×4 | 10×4 | 20×4 | 40×4 | 80×4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | -487,61250 | -492,144 | -488,615 | -487,866 | -487,778 | -487.776 |
| 0.5 | -243,70078 | -246,320 | -244,297 | -243,901 | -243,872 | -243,880 |
| 0.0 | 0,0 | -0,31505 | -0,17418 | -0,16391 | -0,17832 | -0,19146 |
| -0.5 | 243,70078 | 245,723 | 243,969 | 243,577 | 243,515 | 243,499 |
| -1.0 | 487,61250 | 492,067 | 488,432 | 487,579 | 487,425 | 487,399 |

Observando os resultados da Tabela 3.25 nota-se que os erros para $\sigma_{rr}(0,1)$ são iguais a 0,929% para a malha 5×4, 0,205% para a malha 10×4 e 0,052% para a malha 20×4. Para a tensão $\sigma_{zz}(0,1)$, Tabela 3.26, foram obtidos erros da ordem de 2,736% para a malha 20×4 e erros da ordem de 0,087% para a malha 40×4. Finalmente, para a tensão cisalhante $\tau_{rz}(16,0)$ os erros obtidos também foram muito pequenos; 2,1935%, 0,33966%, 0,02833% e 0,00066% para as malhas 5×4, 10×4, 20×4 e 40×4, respectivamente.

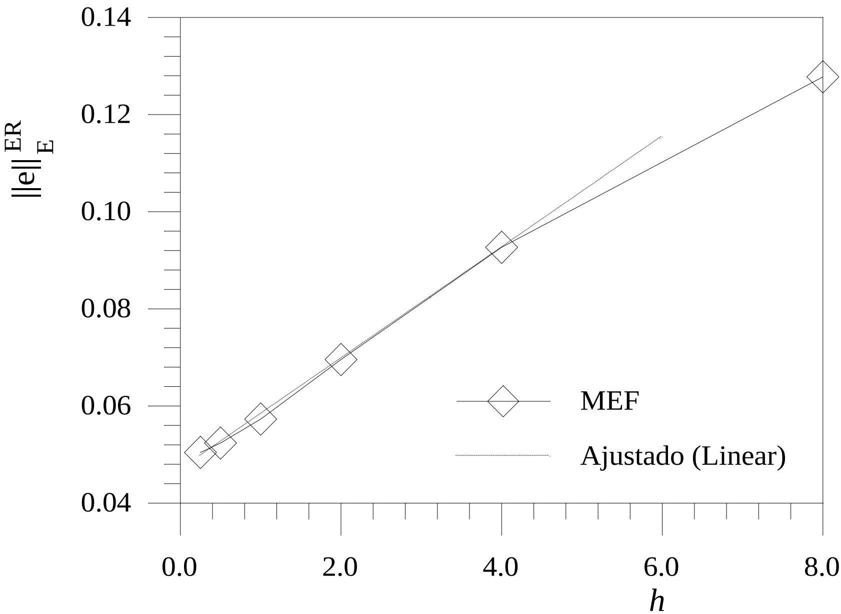



Figura 3.22 – Convergência *h* para $\|e\|_E^{ER}$ (Placa Engastada)

Tabela 3.26- Convergência *h* para $\sigma_{zz}(0,z)$

| z | Referência | 5×4 | 10×4 | 20×4 | 40×4 | 80×4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | -1,000000 | -2,76413 | -1,32105 | -1,02736 | -0,99913 | -0,99900 |
| 0,5 | -0,843750 | -2,56491 | -1,12810 | -0,86865 | -0,84466 | -0,84155 |
| 0,0 | -0,500000 | -0,80105 | -0,52110 | -0,50187 | -0,50300 | -0,49674 |
| -0,5 | -0,156250 | 0,90670 | 0,06252 | -0,13247 | -0,15809 | -0,15289 |
| -1,0 | 0,0 | 2,30213 | 0,46375 | 0,06553 | 0,005614 | 0,00251 |

Tabela 3.27- Convergência *h* para $\tau_{rz}(16,z)$

| z | Referência | 5×4 | 10×4 | 20×4 | 40×4 | 80×4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 0 | -0,18099 | -0,04557 | -0,00103 | 0,00290 | 0,00056 |
| 0,5 | 4,50 | 4,49433 | 4,48852 | 4,50097 | 4,50103 | 4,49970 |
| 0,0 | 6,00 | 6,13161 | 6,02038 | 6,00170 | 5,99996 | 5,99991 |
| -0,5 | 4,50 | 4,65832 | 4,53880 | 4,50138 | 4,49885 | 4,50015 |
| -1,0 | 0 | 0,11101 | 0,03855 | 0,00028 | -0,00310 | -0,00067 |

Outro fato observado a partir dos resultados da Tabela 3.27 é que os valores de $\tau_{rz}(16, z)$ não são simétricos com relação ao eixo z e isto é devido à orientação dos triângulos da malha. Análises realizadas com orientação invertida para a malha 20×4 mostraram $\tau_{rz}(16;0,5)$ e $\tau_{rz}(16;-0,5)$ iguais a 4,50138 e 4,50097, respectivamente. Estes resultados são o inverso dos valores mostrados na Tabela 3.27.

### 3.8.9 - Locking de Poisson (*Locking* de Material)

O problema ilustrado na Figura 3.23 foi resolvido utilizando a condição de EPD com o objetivo de avaliar a convergência deste tipo de elemento com relação ao *locking* de Poisson que ocorre quando $\nu \rightarrow 0.5$ devido à singularidade da matriz [**D**].

O problema analisado é uma placa quadrada de lado igual a 2 e espessura unitária. Levando em consideração a antissimétrica do problema, apenas ¼ do domínio foi discretizado com malhas denominada de M×M como ilustrado na Figura 3.23.

De acordo com a teoria, Babuska e Szabó (1982), as soluções de elementos finitos $(u_h, v_h) \in H^k(\Omega)$ com k<1,76 para $\nu$=0,30 e k<1,69 para $\nu$=0,4999. Para k>1 e resultados de elementos finitos obtidos a partir de um conjunto de malhas uniformes é esperado obter a seguinte relação para o erro relativo, Babuska e Suri (1990):

$$\|e\|_E^{ER} \leq C\, h^{\beta} \tag{3.33}$$

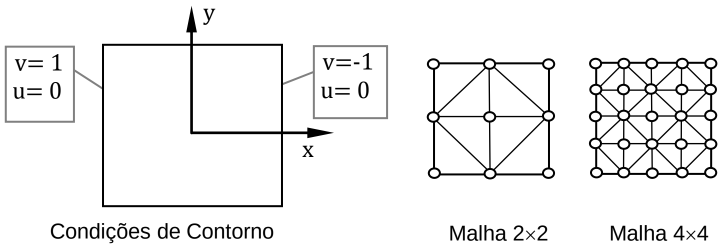



Figura 3.23 – Condições de Contorno e Malhas 2×2 e 4×4 utilizadas para discretizar 1/4 do domínio

sendo que $\beta$=min(p,k-1), p indica a ordem do elemento e $||e||_E^{ER}$ é a norma do erro relativo que é calculada utilizando os valores da energia de deformação obtidos com elementos finitos, $U_{MEF}$, e com o valor de referência, $U_{Ref.}$; $||e||_E^{ER}=|U_{MEF}/U_{Ref.}-1|^{1/2}$.

Os valores obtidos com diversas malhas para a energia de deformação estão mostrados na Tabela 3.28 e a convergência *h* para $||e||_E^{ER}$ é ilustrada na Figura 3.24. Os valores de referencia que aparecem na Tabela 3.28 foram obtidos por Babuska e Szabó (1982) para E=1 MPa.

Os valores da Tabela 3.28 foram utilizados para ajustar curvas do tipo $y=Cx^{\beta}$ com o método dos Mínimos Quadrados e os valores obtidos para $\beta$ foram: $\beta$=0,75911 para $\nu$=0,3 e $\beta$=0,63317 para $\nu$=0,4999. Estes resultados estão de acordo com o previsto na teoria e mostram que este elemento apresenta pouca sensibilidade com relação ao *locking* de Poisson até os valores de $\nu$ igual a 0,4999. Deve-se chamar a atenção que esta conclusão é válida para este exemplo e que mais investigações ainda são necessárias para estender esta afirmação para todos os problemas.

Tabela 3.28 – Convergência *h* para a Energia de Deformação

| malha | *h* | ν=0,3 | $\|e\|_E^{ER}$ | ν=0,4999 | $\|e\|_E^{ER}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1×1* | 2,0 | 0,1387465 | $2{,}485\times10^{-1}$ | 0,1666055 | $5{,}581\times10^{-1}$ |
| 2×2 | 0,5 | 0,1316771 | $8{,}735\times10^{-2}$ | 0,1313835 | $1{,}850\times10^{-1}$ |
| 4×4 | 0,25 | 0,1310299 | $5{,}175\times10^{-2}$ | 0,1288427 | $1{,}193\times10^{-1}$ |
| 6×6 | 0,166 | 0,1308711 | $3{,}824\times10^{-2}$ | 0,1281260 | $9{,}267\times10^{-2}$ |
| 8×8 | 0,125 | 0,1308044 | $3{,}085\times10^{-2}$ | 0,1277974 | $7{,}747\times10^{-2}$ |
| 10×10 | 0,1 | 0,1307689 | $2{,}608\times10^{-2}$ | 0,1276111 | $6{,}734\times10^{-2}$ |
| 20×20 | 0,05 | 0,1307099 | $1{,}513\times10^{-2}$ | 0,1272685 | $4{,}288\times10^{-2}$ |
| Referência | - | 0,130680 | - | 0,127035 | - |

* indica valor obtido com a malha distorcida da Figura 3.3

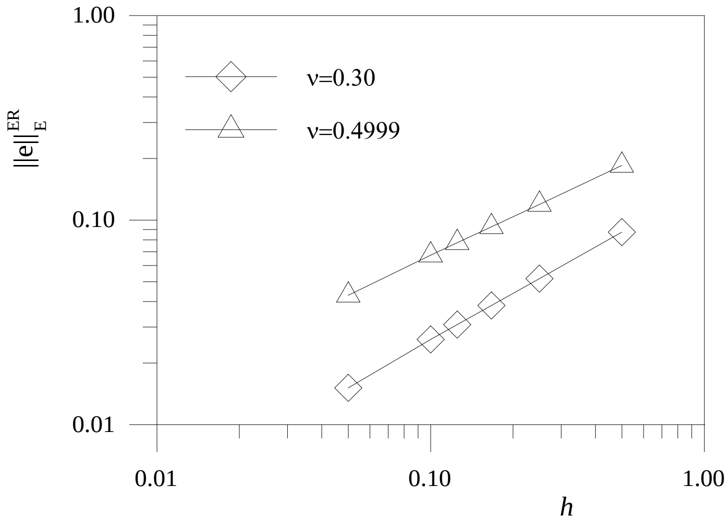



Figura 3.24 – Convergência $\|e\|_E^{ER} \times h$

### 3.8.10 - Placa Quadrada com Furo Central

A análise de uma placa quadrada com um furo central de raio *a* com carregamento de tração $\sigma_{yy}=\sigma_0$ uniformemente distribuído ao longo da linha y=±w é um problema clássico da elasticidade. Na Figura 3.25 é mostrada a geometria analisada neste exemplo com w=2 e *a*/w=1/2. Os valores de referencia para $\sigma_{yy}$ e $\sigma_{xx}$ mostrados na Tabela 3.29 foram obtidos por Hengst (1938), enquanto que o valor para a tensão equivalente de Von Misses, $\sigma_{eq}$, foi obtida utilizando elementos finitos isoparamétricos lineares com malha refinada (17.069 elementos e a versão educacional do aplicativo Algor).

Além de ser um problema clássico da elasticidade, este problema foi escolhido porque apresenta fator de concentração alto (muito acima de 3 que é o valor para placa infinita) e foi resolvido empregando a condição de EPT com E= 210GPa e $\nu$= 0,25. Duas malhas foram utilizadas nestas analises e os resultados para tensões estão mostrados na Tabela 3.29 (a malha 1 é mostrada na Figura 3.25 e a malha 2 foi obtida usando elemento com a metade do tamanho dos elementos da malha 1).

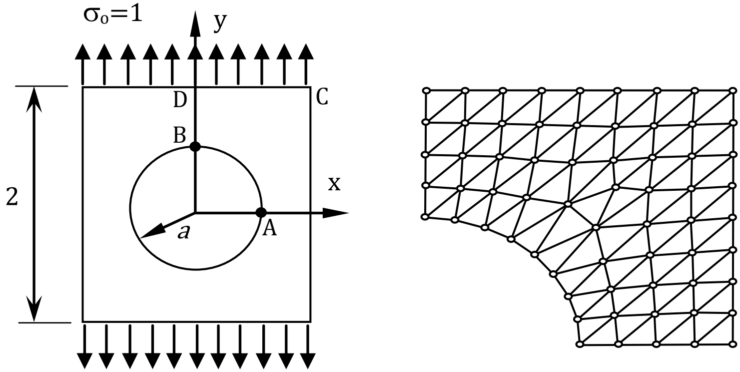



Figura 3.25 – Placa Quadrada com furo central e Malha 1 de elementos finitos (65 nós e 96 elementos)

Tabela 3.29 – Comparações para tensões

| | | Ref. | Malha 1<br>65 nós<br>96 el. | Dif. % | Malha 2<br>225 nós<br>384 el. | Dif. % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\sigma_{yy}$ | 6,328 | 6,23363 | 1,491 | 6,38619 | 0,919 |
| B | $\sigma_{xx}$ | -3,912 | -3,79403 | 3,016 | -3,95414 | 1,077 |
| A | $\sigma_{eq}$ | 6,368 | 6,21627 | 2,383 | 6,38313 | 0,238 |
| C | $\sigma_{yy}$ | 1,0 | 1,00202 | 0,202 | 1,00029 | 0,029 |
| D | $\sigma_{yy}$ | 1,0 | 1,00256 | 0,256 | 1,00061 | 0,061 |

### 3.8.11 - Análise do *Locking* de Poisson - Piltner & Taylor (2000)

Um problema resolvido por Piltner e Taylor (2000) para comparar o desempenho de alguns elementos finitos triangulares com relação ao *locking* de Poisson (EPD) é o ilustrado na Figura 3.26. Trata-se de uma viga com carga cisalhante igual a P=300N em uma extremidade e com deslocamentos restritos na outra extremidade. O problema foi resolvido com E=1500MPa, $\nu$=0,49/0,499/0,4999/0,49999 e espessura t= 0,5mm para comparação de resultados.

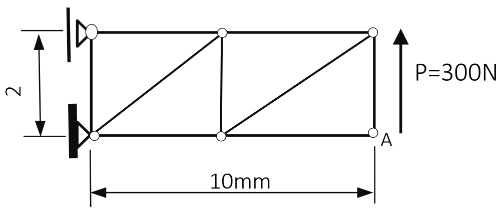



Figura 3.26 – Problema proposto por Piltner e Taylor (2000), EPD

O valor mostrado como exato na Tabela 3.30 para o deslocamento do ponto A foi citado por Piltner e Taylor (2000). Nesta tabela estão ilustrados os resultados do elemento Hermitiano com N*=1 e os resultados destes autores (todos os outros elementos). Mesmo com uso da malha grosseira ilustrada na Figura 3.26 os resultados do elemento Hermitiano (N*=1) para $\nu$=0,4999999999 apresentaram erro de apenas 2,15% com relação à solução exata. Nota-se pouca sensibilidade do elemento com relação ao *locking* de Poisson.

Tabela 3.30 – Deslocamento do ponto A quando $\nu \rightarrow 0{,}5$

| $\nu$ | CST | Allman | TE4 | TE4_1 | TE4_2 | Hermitiano N*=1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,49 | 12,27 | 22,25 | 51,25 | 41,25 | 75,27 | 77,75 |
| 0,499 | 12,13 | 13,43 | 50,78 | 39,94 | 74,64 | 76,84 |
| 0,4999 | 12,11 | 12,24 | 50,73 | 39,81 | 74,58 | 76,75 |
| 0,49999 | 12,11 | 12,12 | 50,73 | 39,80 | 74,57 | 76,74 |
| 0,4999999999 | - | - | - | - | - | 76,69 |

Valor Exato=78,375 (Piltner e Taylor, 2000)

# Capítulo 4
## As Formulações do Elemento 'Hermitiano 2-simplex' para Membranas e problemas de Potencial

### 4.1 – VIBRAÇÃO LIVRE DE MEMBRANAS

Seja u(**x**,t) o deslocamento transversal de uma membrana que é função do ponto **x**=(x,y) e do tempo, t. Então u(**x**,t) satisfaz a seguinte equação diferencial (Weaver et al., 1990):

$$T\left[\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial y^2}\right]-\rho\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}=f(\mathbf{x},t)\quad \forall\ \mathbf{x}=(x,y)\in\Omega,\ t\geq 0 \tag{4.1}$$

sendo que T denomina a *intensidade de tensão* (normalmente é constante em toda a membrana e o seu valor é igual ao produto da tração pela espessura), $\rho$ é a massa por unidade de área e f(**x**,t) é a força externa (carga de pressão que age na direção transversal).

Para f(**x**,t)=0 esta equação também pode ser escrita na seguinte forma (equação da onda):

$$\left[\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial y^2}\right]-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}=0\quad \forall\ \mathbf{x}=(x,y)\in\Omega,\ t\geq 0 \tag{4.2}$$

sendo $c=(T/\rho)^{1/2}$.

Assumindo a hipótese de que u(**x**,t) possui movimento harmônico no tempo com frequência $\omega$ [rad/s], isto é, $u(\mathbf{x},t)=u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, então a Equação 4.2 pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x)}{\partial y^2}+\kappa^2 u(x)=0\quad \forall\ x=(x,y)\in\Omega,\ \omega>0 \tag{4.3}$$

e que é conhecida como Equação de Helmholtz. Esta equação é escrita em função da frequência e $\kappa=\omega/c$ é conhecido como *número característico da onda*.

As condições de contorno para a Equação 4.1 são as condições homogêneas de deslocamento em todo o contorno da membrana.

## 4.2 - TORÇÃO ELÁSTICA DE BARRAS

Uma das abordagens empregadas para o estudo da torção elástica de barras é utilizando a *função tensão.* Normalmente a função tensão é denominada por $\phi(\mathbf{x})$ nos livros clássicos da elasticidade, porém, para não confundir com as funções de interpolação neste capítulo ela será chamada de $u(\mathbf{x})$. A equação diferencial para esta função pode ser escrita na seguinte forma (exemplo, Boresi e Lynn (1974)):

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y^2} = -2G\theta \quad \forall\ \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega \tag{4.4}$$

sendo que G denomina o módulo de cisalhamento do material e $\theta$ indica a taxa de torção da barra (ângulo/comprimento).

## 4.3 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO HERMITIANO

A variável $u(\mathbf{x})$ que representa o deslocamento transversal para os problemas de membrana ou a função tensão para a torção de barras prismáticas pode ser aproximada em um triângulo empregando a expressão matemática da Equação 2.14, isto é:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{3} \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u_i}{\partial y} + \Phi_4(\mathbf{x}) u^* \tag{4.5}$$

sendo que as funções $\Phi_i(\mathbf{x})$, $\varphi_i(\mathbf{x})$ e $\psi_i(\mathbf{x})$ já foram definidas nas Equações 2.15, 2.16 e 2.17.

A aproximação da variável $u(\mathbf{x})$ também pode ser escrita na forma matricial e sua expressão é:

$$u(\mathbf{x}) = \left[\Phi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_1(\mathbf{x}) \quad \psi_1(\mathbf{x}) \quad \ldots \quad \Phi_4(\mathbf{x})\right]_{1x10} \{q\} = [N]\{q\} \tag{4.6}$$

sendo $\{\mathbf{q}\}=\{u_1, \partial u_1/\partial x, \partial u_1/\partial y, ..., u^*\}^t$.

O gradiente de u(**x**) pode ser escrito na seguinte forma:

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u(x)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_1(x)}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_4(x)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_1(x)}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_4(x)}{\partial y} \end{bmatrix}_{2x10} \{q\} = [B]\{q\} \tag{4.7}$$

A matriz de rigidez e a matriz de massa com densidade unitária para os problemas de vibração livre de membranas são calculadas por Chandrupatla e Belegundu (2002) com as seguintes integrais:

$$[K] = \int_A [B]^t [B] \, dA \tag{4.8}$$

$$[M] = \int_A [N]^t [N] \, dA \tag{4.9}$$

## 4.4 - FORMULAÇÃO ELEMENTO HERMITIANO ENRIQUECIDO

A formulação para o Elemento Hermitiano enriquecido é obtida a partir da Equação 2.25. A variável u(**x**) é aproximada com a seguinte expressão:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x) u_i + \sum_{i=1}^{3} \sum_{m=1}^{m^*(i)} \varphi_{mi}(x) \alpha_{mi} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{k^*(i)} \psi_{ki}(x) \beta_{ki} + \Phi_4(x) u^* \tag{4.10}$$

sendo que as funções $\Phi_i(\mathbf{x})$, $\varphi_{mi}(\mathbf{x})$ e $\psi_{mi}(\mathbf{x})$ são as mesmas funções já definidas anteriormente nas Equações 2.15, 2.26 e 2.27.

Para os elementos Hermitianos convencionais onde m*(i)=k*(i)=1 foi dada a designação de N*=1 e para os elementos Hermitianos enriquecidos com m*(i)=k*(i)=2 foi dada a designação de N*=2 e assim por diante. Além de resultados para os elementos convencionais também são mostrados neste capítulo alguns resultados obtidos com elemento Hermitianos enriquecidos, N*=2 e N*=3.

Por exemplo, para o elemento Hermitiano N*=2 tem-se:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x)\, u_i + \sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{2} \varphi_{mi}(x)\alpha_{mi} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} \psi_{ki}(x)\,\beta_{ki} + \Phi_4(x)\, u^* \tag{4.11}$$

e

$$\nabla u(x) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u(x)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_{11}(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_{21}(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_{11}(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_{21}(x)}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_4(x)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_{11}(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_{21}(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_{11}(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_{21}(x)}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_4(x)}{\partial y} \end{bmatrix} \{q\} \tag{4.12}$$

Desta última expressão identifica-se a matriz [**B**] necessária para o cálculo da matriz rigidez do elemento:

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_{11}(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_{21}(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_{11}(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_{21}(x)}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_4(x)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_{11}(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_{21}(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_{11}(x)}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_{21}(x)}{\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_4(x)}{\partial y} \end{bmatrix}_{2\times 16} \tag{4.13}$$

e a matriz [**N**] necessária para o cálculo da matriz massa é dada por:

$$[N] = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) & \varphi_{11}(x) & \varphi_{21}(x) & \psi_{11}(x) & \psi_{21}(x) & \cdots & \Phi_4(x) \end{bmatrix}_{1\times 16} \tag{4.14}$$

## 4.5 - VETOR FORÇA PARA TORÇÃO ELÁSTICA

O vetor força local para os problemas de torção elástica de barras prismáticas é dado por (Chandrupatla e Belegundu (2002)):

$$\{\mathbf{f}\} = -\int_A [N]^t\, 2G\theta\, dA \tag{4.15}$$

e considerando $2G\theta=1$ tem-se:

$$\{\mathbf{f}\} = -\int_A [N]^t\, dA \tag{4.16}$$

## 4.6 - MODELO REDUZIDO

O grau de liberdade u* é eliminado do sistema de equações com uso do processo da *redução de ordem* de Guyan (1965). Esta etapa reduz apenas um gdl por elemento, entretanto, ele é desejável porque os outros graus de liberdade restantes estão associados apenas aos nós do elemento e possuem significado físico. As equações resultantes após este processo podem ser acopladas em aplicativos convencionais de elementos finitos e o tempo de processamento gasto para a execução desta etapa é praticamente nulo porque apenas 1 gdl é eliminado.

As equações do elemento para membranas podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & m^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{u}^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & k^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ u^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f^* \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

Após a eliminação do grau de liberdade u* o sistema de equações reduzido pode ser rescrito da seguinte maneira, Guyan (1965):

$$[M_R]\{\ddot{q}_1\} + [K_R]\{q_1\} = \{f_R\} \tag{4.18}$$

sendo

$$[\mathbf{M}_R] = [\mathbf{Q}]^t \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & m^* \end{bmatrix} [\mathbf{Q}], \tag{4.19}$$

$$[\mathbf{K}_R] = [\mathbf{Q}]^t \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & k^* \end{bmatrix} [\mathbf{Q}], \tag{4.20}$$

$$\{\mathbf{f}_R\} = [\mathbf{Q}]^t \begin{Bmatrix} f_1 \\ f^* \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

e

$$[Q] = \begin{bmatrix} I \\ -K_{21}/k^* \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

## 4.7 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

Quando não for citado, todos os cálculos de fluxo obtidos a partir dos resultados de elementos finitos convencionais foram realizados empregando a técnica de suavização global (*global smoothing technique*) descrita por Hinton e Campbell (1974).

Todas as análises de vibração livre de membranas foram realizadas utilizando $c=(T/\rho)^{1/2}=1$ e as frequências naturais foram obtidas com uso do Método da Iteração Sub Espacial (sub-rotina INVITR disponível em Chandrupatla e Belegundu, 2002).

4.7.1 - Torção de Quadrado

O problema da torção de barras prismáticas com seção transversal quadrada (ou membrana quadrada com carga estática uniforme) foi escolhido para testar os resultados do elemento Hermitiano enriquecido. Matematicamente este problema pode ser expresso na seguinte forma:

Encontrar a solução u(**x**) para,

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= -2G\theta = -1 \quad \forall\ (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= 0 \quad \forall\ (x,y) \in \Gamma \end{aligned} \tag{4.23}$$

sendo que $\Omega=\{(x,y)\in\Re^2: -1\leq(x,y)\leq 1\}$ e $\Gamma=\{(x,y)\in\Re^2: x,y=\pm 1\}$. A sua solução analítica é igual a (Boresi e Lynn, 1974):

$$u(x) = \frac{1}{2}(1-x^2) - \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{\cos(n\pi x/2)\ \cosh(n\pi y/2)}{n^3 \cosh(n\pi/2)} \tag{4.24}$$

Devido à simetria do problema apenas ¼ do domínio foi discretizado utilizando malhas com padrão M×M (M subdivisões em x e M subdivisões em y), Figura 4.1. Para obter as curvas ilustradas nas Figuras 4.2 e 4.3 foram tomados como referencia os seguintes valores U(u(**x**))=0,281154023289 (energia) e $u_{,n}(1,0)=-0{,}67531447504$ (neste texto também aparece $u_{,n}(\mathbf{x})$ indicando $\partial u(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n}$ e para este problema $u_{,n}(1,0)=u_{,n}(0,1)$). Os valores de referencia foram calculados a partir da solução analítica utilizando 500 termos na série da Equação 4.24. As normas utilizadas para medir as diferenças entre a solução analítica e os valores obtidos com as soluções do MEF foram as seguintes:

$$\|e\|_E = \left( \|u(x)\|_E^2 - \|u_h(x)\|_E^2 \right)^{1/2} \tag{4.25}$$

e

$$\|e_F\| = |u,_n(1,0) - u_h,_n(1,0)| \tag{4.26}$$

sendo que $\|u(x)\|_E = 2U(u(x))$, $\|u_h(x)\|_E = 2U(u_h(x))$ e $u_h(\mathbf{x})$ denota a solução de elementos finitos.

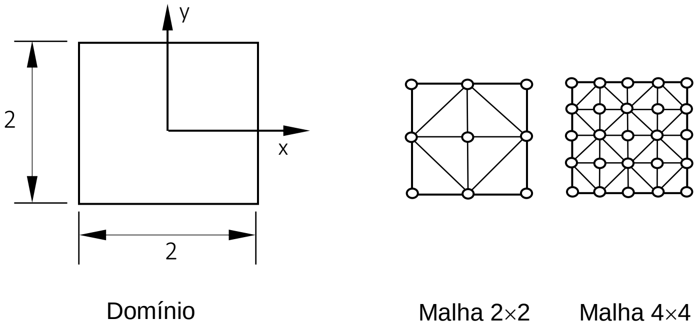



Figura 4.1 – Domínio e Malhas 2×2 e 4×4 utilizadas para discretizar ¼ do domínio

Nas Figuras 4.2 e 4.3 estão mostradas curvas obtidas para os elementos triangulares lineares (T3), quadráticos (T6), cúbicos (T10) e elementos Hermitianos N*=1 e N*=2 em função do número de grau de liberdade ativos das análises.

Todas as curvas ilustradas nestas Figuras podem ser aproximadas com curvas do tipo 'lei de potencia' (*Power Law*) e os valores ajustados para os parâmetros destas curvas estão mostrados nas Tabelas 4.1 e 4.2. Nestas tabelas também são mostrados os erro relativo em função do número de graus de liberdade, $e_R(N)$, que é calculado tomando como referencia o valor do obtido para o elemento Hermitiano convencional (N*=1).

---

| | | |
|---|---|---|
| T3 | - | Triangulo três nós, deslocamentos, Hughes et al. (1995) |
| T6 | - | Triangulo de seis nós, deslocamentos, Hughes et al. (1995) |
| T10 | - | Triangulo de dez nós, cúbico, Hughes et al. (1995) |

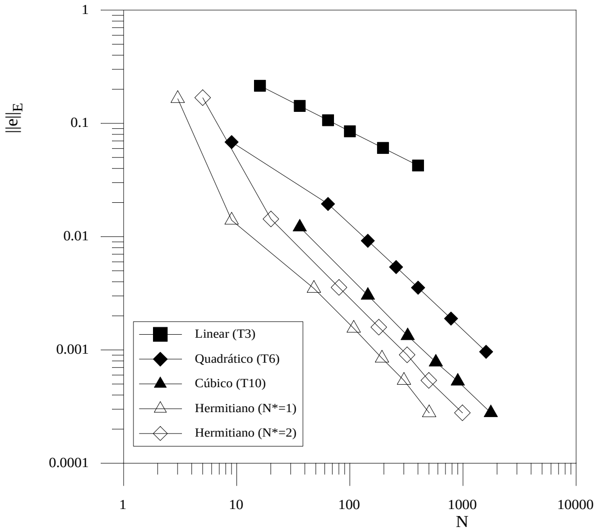



Figura 4.2 – Convergência para $\|e\|_E$ em função do número de gdl, N

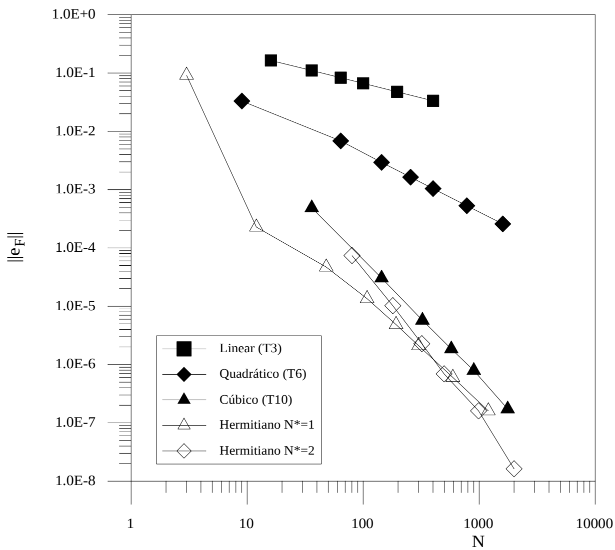



Figura 4.3 – Convergência para $\|e_F\|$ em função do número de gdl, N

Analisando os resultados para os erros na norma da energia nota-se que a razão de convergência obtida com os elementos Hermitianos N*=1 e N*=2 são praticamente as mesmas obtidas com o elemento triangular cúbico (T10). Entretanto, os resultados obtidos com o elemento N*=1 sempre foram melhores do que todos os outros da Tabela 4.1.

Para o fluxo em **x**=(1,0) este comportamento não se repete e a melhor taxa de convergência é observada para o elemento N*=2. Para malhas grosseiras os melhores resultados para o fluxo são obtidos com o elemento N*=1 que possui apenas 3 gdl por nó, enquanto que o elemento N*=2 possui 5 gdl por nó. Para malhas mais refinadas os resultados do elemento N*=2 são melhores porque ele apresenta a melhor taxa de convergência para o fluxo.

Tabela 4.1 – Parâmetros *a* e *b* para $\|e\|_E = a \times N^b$ e erro relativo, $e_R(N)$

| Elemento | *a* | *b* | $e_R(100)$ | $e_R(1000)$ |
|---|---|---|---|---|
| Linear (T3) | 0,867 | -0,504 | 51,19 | 168,74 |
| Quadrático (T6) | 0,951 | -0,934 | 7,75 | 9,49 |
| Cúbico (T10) | 0,397 | -0,979 | 2,63 | 2,90 |
| Hermitiano, N*=1 | 0,184 | -1,022 | 1 | 1 |
| Hermitiano, N*=2 | 0,318 | -1,023 | 1,72 | 1,71 |

Nas Figuras 4.4 e 4.5 são mostradas as curvas para a convergência *h* para $\|e\|_E$ e $\|e_F\|$, respectivamente. Estas curvas também podem ser interpoladas com uma lei de potencia e os parâmetros ajustados com o método dos mínimos quadrados estão ilustrados na Tabela 4.3. Salienta-se que as melhores taxas de convergência *h* foram obtidas com o elemento N*=2. Para o fluxo a taxa de convergência deste elemento é de 4,92491, enquanto obteve-se 4,05264 para o elemento T10 e 3,68053 para o elemento N*=1.

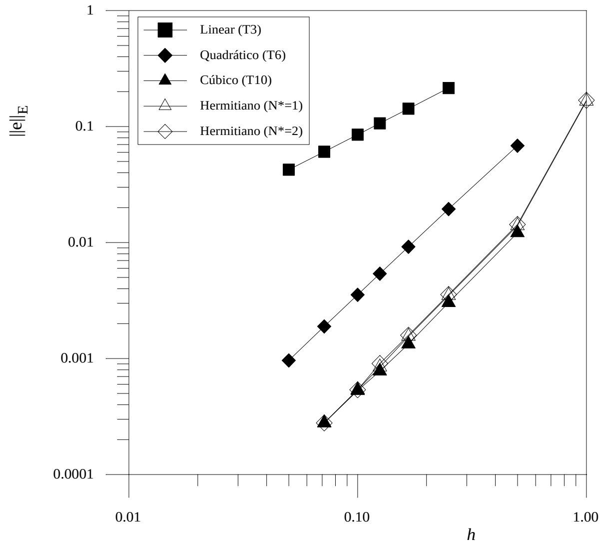



Figura 4.4 – Convergência *h* para $\|e\|_E$

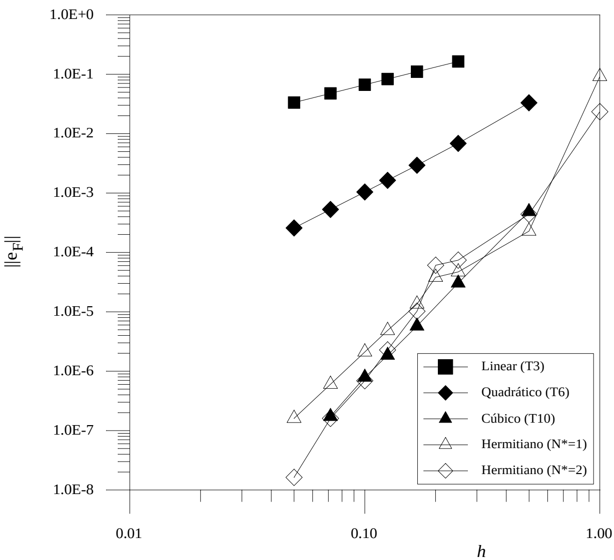



Figura 4.5 – Convergência *h* para $\|e_F\|$

Tabela 4.2 – Parâmetros *a* e *b* para $\|e_F\| = a \times N^b$ e erro relativo, $e_R(N)$

| Elemento | *a* | *b* | $e_R(100)$ | $e_R(1000)$ |
|---|---|---|---|---|
| Linear (T3) | 0,654 | -0,497 | 4076,93 | 93182,37 |
| Quadrático (T6) | 0,440 | -1,009 | 259,54 | 1824,77 |
| Cúbico (T10) | 0,629 | -2,002 | 3,83 | 2,74 |
| Hermitiano, N*=1 | 0,084 | -1,856 | 1 | 1 |
| Hermitiano, N*=2 | 3,647 | -2,470 | 2,57 | 0,63 |

Tabela 4.3 – Parâmetros *a* e *b* ajustados

| | $\|e\|_E = a \times h^b$ | | $\|e_F\| = a \times h^b$ | |
|---|---|---|---|---|
| Elemento | *a* | *b* | *a* | *b* |
| Linear (T3) | 0,86699 | 1,00815 | 0,65123 | 0,99205 |
| Quadrático (T6) | 0,25122 | 1,85229 | -2,02632 | 2,09803 |
| Cúbico (T10) | 0,04505 | 1,93917 | -4,79733 | 4,05264 |
| Hermitiano, N*=1 | 0,05680 | 2,01798 | -4,59309 | 3,68053 |
| Hermitiano, N*=2 | 0,05898 | 2,02609 | -2,72839 | 4,92491 |

### 4.7.2 - Vibração Livre de Membrana Elíptica

O objetivo desta aplicação é avaliar a convergência dos resultados obtidos com o elemento Hermitiano para as frequências naturais de vibração de uma membrana elíptica com semieixo maior a=4 e semieixo menor b=2,5. Os deslocamentos no contorno são nulos (condição de contorno) e devido à simetria do problema, apenas ¼ do domínio foi utilizado para obter as respostas numéricas.

Na Figura 4.6 estão ilustrados os quatros conjuntos de condições de contorno utilizadas para avaliar as frequências naturais (modos de vibração) utilizando apenas esta parcela do domínio. Nesta Figura a notação $u_{,n}=0$ indica a condição de simetria, isto é, $\partial u/\partial \mathbf{n}=0$ e esta condição de contorno é satisfeita exatamente nos nós do contorno.

As malhas de elementos finitos utilizadas para a solução deste problema foram ilustradas na Figura 4.7. Embora os elementos destas malhas apresentem boa razão de aspecto elas não são malhas homogêneas. Importante salientar que o contorno da elipse é aproximado por retas (elemento linear) e, portanto, existe um erro de aproximação da geometria da elipse.

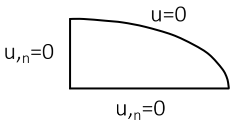
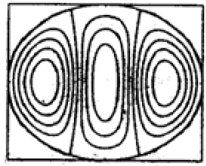
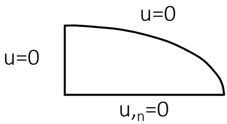
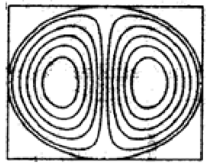
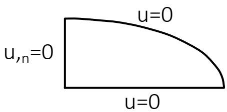
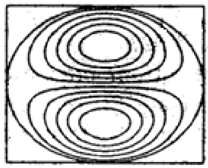
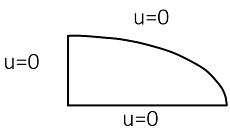
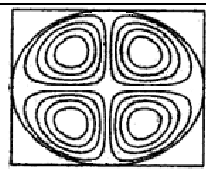
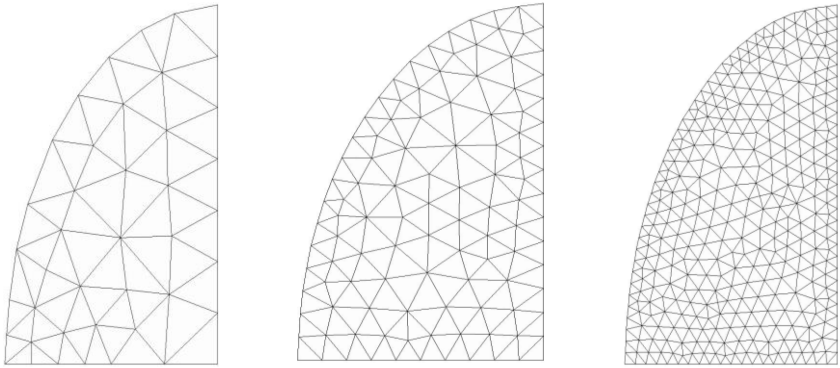
| Condições de Contorno | Tipo de Modo Esperado |
|---|---|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Figura 4.6 – Condições de Contorno para ¼ do domínio
Fonte: Adaptado de Gutiérrez-Vega et al. (2002)

Para as análises de erros foi tomado como referencia os resultados obtidos a partir do aplicativo numérico escrito em Matlab e disponibilizado por Wilson (2004) na internet.

Os modos de vibração para uma membrana elíptica com bordas fixas podem ser escritos como sendo o produto de funções de Mathieu e o valor das frequências naturais é obtida com o cálculo dos zeros das funções radiais, Wilson (2004). Este problema de vibração da membrana elíptica já foi resolvido por diversos autores e outras boas fontes de referencia podem ser encontradas na literatura, como Gutiérrez-Vega et al. (2002), Wilson e Scharstein (2007) e Troesch e Troesch (1973), dentre outros.



a) M1 nós=42 elementos=59 b) M2 nós=111 elementos=175 c) M3 nós=359 elementos=626

Figura 4.7 – Malhas para a Solução do Problema de Vibração Elíptica

Os resultados obtidos com as malhas da Figura 4.7 estão ilustrados nas Tabelas 4.4 e 4.5 e na Figura 4.8. As curvas ilustradas na Figura 4.8 mostram que os resultados do elemento Hermitiano N*=1 obtidos a partir de malhas grosseiras são melhores do que os resultados obtidos com o elemento Hermitiano N*=2. Entretanto, esta relação se inverte para malhas mais refinadas.

Tabela 4.4 – Diferença percentual para as primeiras frequências naturais obtidas com o elemento Hermitiano N*=1

| M1 | Dif. % | M2 | Dif. % | M3 | Dif. % | Referencia |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,7952430 | 0,554917 | 0,7996328 | 0,005977 | 0,7996822 | 0,000201 | 0,79968058 |
| 1,1146088 | 0,804521 | 1,1238480 | 0,017727 | 1,1237516 | 0,009155 | 1,12364876 |
| 1,3994872 | 0,424283 | 1,4068313 | 0,098254 | 1,4058588 | 0,029059 | 1,40545036 |
| 1,4667551 | 0,051282 | 1,4684665 | 0,065335 | 1,4678318 | 0,022087 | 1,46750768 |
| 1,6776783 | 1,254607 | 1,7014731 | 0,145914 | 1,6998716 | 0,051655 | 1,69899401 |
| 1,8183346 | 0,186594 | 1,8243505 | 0,143634 | 1,8225608 | 0,045393 | 1,82173386 |
| 1,9952015 | 0,625112 | 2,0119497 | 0,209069 | 2,0091447 | 0,069361 | 2,00775215 |
| 2,0306889 | 0,084264 | 2,0337838 | 0,236799 | 2,0303093 | 0,065545 | 2,02897929 |
| 2,1884542 | 0,335919 | 2,1857172 | 0,210432 | 2,1826410 | 0,069400 | 2,18112742 |
| 2,3047030 | 0,472585 | 2,3228531 | 0,311217 | 2,3179564 | 0,099757 | 2,31564631 |
| 2,3059306 | 0,917274 | 2,3344818 | 0,309528 | 2,3294598 | 0,093747 | 2,32727803 |

Tabela 4.5 – Diferença percentual para as primeiras frequências naturais obtidas com o Elemento Hermitiano N*=2

| M1 | Dif.% | M2 | Dif. % | M3 | Dif. % | Referencia |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,7944150 | 0,658462 | 0,7996105 | 0,008765 | 0,7996793 | 0,000164 | 0,79968058 |
| 1,1115969 | 1,072561 | 1,1236926 | 0,003904 | 1,1237301 | 0,007235 | 1,12364876 |
| 1,3962185 | 0,656857 | 1,4065998 | 0,081782 | 1,4058297 | 0,026989 | 1,40545036 |
| 1,4640427 | 0,236118 | 1,4682128 | 0,048049 | 1,4678018 | 0,020040 | 1,46750768 |
| 1,6667111 | 1,900121 | 1,7004711 | 0,086934 | 1,6997370 | 0,043726 | 1,69899401 |
| 1,8113450 | 0,570272 | 1,8237531 | 0,110844 | 1,8224862 | 0,041297 | 1,82173386 |
| 1,9786295 | 1,450513 | 2,0102846 | 0,126135 | 2,0089216 | 0,058246 | 2,00775215 |
| 2,0274826 | 0,073771 | 2,0335695 | 0,226235 | 2,0302841 | 0,064311 | 2,02897929 |
| 2,1813754 | 0,011379 | 2,1848422 | 0,170315 | 2,1825375 | 0,064657 | 2,18112742 |
| 2,2765742 | 1,687316 | 2,3215296 | 0,254063 | 2,3177715 | 0,091768 | 2,31564631 |
| 2,2919564 | 1,517726 | 2,3311780 | 0,167569 | 2,3290312 | 0,075328 | 2,32727803 |

Tabela 4.6 – Diferença percentual para as primeiras frequências naturais obtidas com o Elemento Linear (T3)

| M1 | Dif. % | M2 | Dif. % | M3 | Dif. % | Referencia |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,8056151 | 1,304 | 0,8013229 | 0,764 | 0,8001254 | 0,614 | 0,79968058 |
| 1,1399305 | 2,271 | 1,1285093 | 1,247 | 1,1249600 | 0,928 | 1,12364876 |
| 1,4352358 | 2,554 | 1,4157901 | 1,164 | 1,4083686 | 0,634 | 1,40545036 |
| 1,5069159 | 2,738 | 1,4793024 | 0,855 | 1,4706351 | 0,264 | 1,46750768 |
| 1,7615834 | 5,001 | 1,7199101 | 2,517 | 1,7044525 | 1,595 | 1,69899401 |
| 1,8938351 | 4,152 | 1,8443275 | 1,429 | 1,8279161 | 0,526 | 1,82173386 |
| 2,1109040 | 5,799 | 2,0394337 | 2,216 | 2,0163857 | 1,061 | 2,00775215 |
| 2,1214978 | 4,471 | 2,0601062 | 1,448 | 2,0375478 | 0,337 | 2,02897929 |
| 2,3114564 | 5,620 | 2,2180137 | 1,350 | 2,1913421 | 0,131 | 2,18112742 |
| 2,4552500 | 6,532 | 2,3651494 | 2,622 | 2,3295369 | 1,077 | 2,31564631 |
| 2,4958243 | 8,234 | 2,3792785 | 3,180 | 2,3407431 | 1,509 | 2,32727803 |

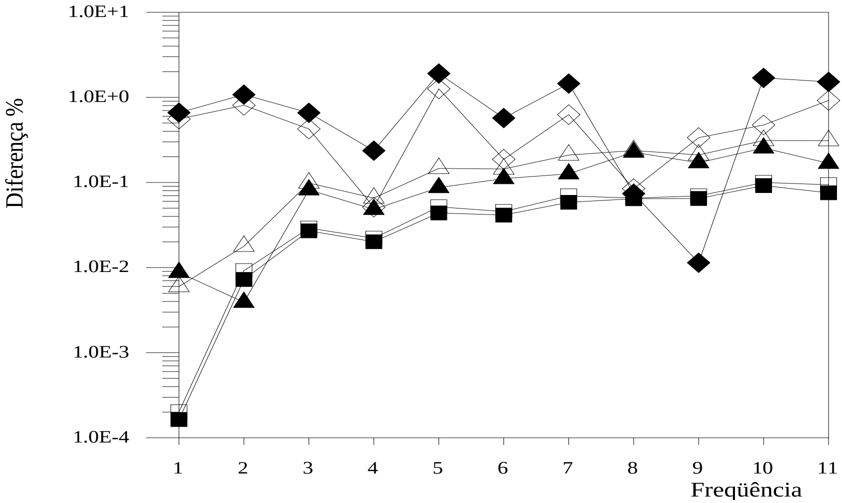



Figura 4.8 – Diferença percentual para as primeiras 11 frequências naturais da elipse em função da malha e do tipo de elemento Hermitiano (N*=1: M1=◇, M2=△, M3=□; N*=2: M1=◆, M2=▲, M3=■)

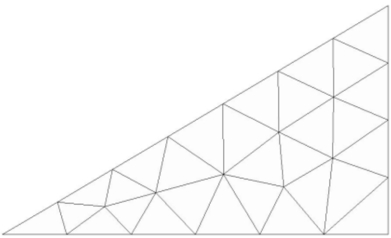
Para simples efeito de comparação, na Tabela 4.6 estão ilustrados os resultados para as primeiras frequências naturais da membrana elíptica obtida com as malhas M1, M2 e M3 utilizando o elemento triangular T3 nas análises. Na Tabela 4.7 é mostrada a diferença relativa destes resultados com relação aos resultados obtidos com os elementos N*=1 e N*=2.

Tabela 4.7 – Diferença relativa para as primeiras frequências

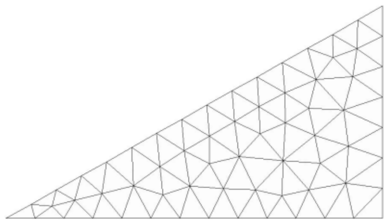
| Freq. | M1 | | M2 | | M3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N*=1 | N*=2 | N*=1 | N*=2 | N*=1 | N*=2 |
| 1 | 2,35 | 1,98 | 127,89 | 87,22 | 3050,74 | 3744,09 |
| 2 | 2,82 | 2,11 | 70,34 | 319,42 | 101,43 | 128,34 |
| 3 | 6,02 | 3,88 | 11,85 | 14,24 | 21,83 | 23,51 |
| 4 | 53,39 | 11,59 | 13,09 | 17,80 | 11,97 | 13,20 |
| 5 | 3,98 | 2,63 | 17,25 | 28,95 | 30,89 | 36,49 |
| 6 | 22,25 | 7,28 | 9,95 | 12,89 | 11,60 | 12,75 |
| 7 | 9,27 | 3,99 | 10,60 | 17,57 | 15,30 | 18,22 |
| 8 | 53,06 | 60,61 | 6,11 | 6,40 | 5,15 | 5,251 |
| 9 | 16,73 | 493,92 | 6,41 | 7,93 | 1,90 | 2,04 |
| 10 | 13,82 | 3,87 | 8,42 | 10,32 | 10,80 | 11,74 |
| 11 | 8,97 | 5,42 | 10,27 | 18,98 | 16,10 | 20,04 |

### 4.7.3 - Vibração Livre de Membrana Rômbica (60°)

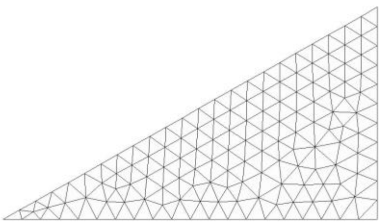
Nesta aplicação são obtidas as primeiras frequências naturais de vibração para uma membrana rômbica com lado igual a 1 e ângulo interno igual a 60$^{o}$. De maneira análoga ao realizado no exemplo anterior, apenas ¼ do domínio também foi discretizado e 4 análises foram realizadas com condições de contorno semelhantes às da Figura 4.6.



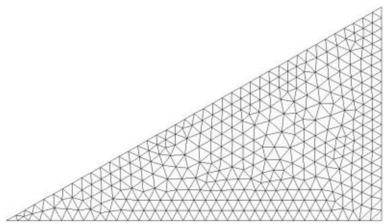
a) M1 (nós=24, elementos=29)



b) M2 (nós=66, elementos=95)



c) M3 (nós=149, elementos=242)



d) M4 (nós=380,elementos=664)

Figura 4.9 – Malhas para Membrana Rômbica (60°)

As malhas utilizadas nestas simulações são ilustradas na Figura 4.9 e como solução de referencia para a análise de erros foram adotados os resultados de Bauer e Reiss (1973). Os resultados de Bauer e Reiss também foram obtidos numericamente, porém alguns destes resultados praticamente coincidem com alguns valores analíticos obtidos por Lamé (citado por Bauer e Reiss, 1973).

Embora as malhas da Figura 4.9 não sejam uniformes os elementos destas malhas apresentam boa relação de aspecto e os resultados obtidos nas análises estão mostrados nas Tabelas 4.8 e 4.9. Na Tabela

4.8 é mostrada a convergência *h* para o elemento N*=1 e na Tabela 4.9 os resultados para o elemento N*=2.

Tabela 4.8 – Convergência para o elemento Hermitiano N*=1

| Exato Lamé | Bauer e Reiss (1973) | M1 | M2 | M3 | M4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2,52276 | 2,50986 | 2,52511 | 2,52393 | 2,52337 |
| 16/3 | 5,33333 | 5,32147 | 5,34516 | 5,33889 | 5,33613 |
| | 7,26589 | 7,17886 | 7,28892 | 7,27511 | 7,27033 |
| | 8,49364 | 8,43759 | 8,52465 | 8,50734 | 8,50003 |
| 112/9 | 12,4444 | 12,3305 | 12,4901 | 12,4688 | 12,4584 |
| | 14,2307 | 14,0823 | 14,3323 | 14,2697 | 14,2474 |
| | 17,1464 | 16,6422 | 17,2705 | 17,2063 | 17,1723 |
| | 17,2014 | 16,9706 | 17,3086 | 17,2477 | 17,2263 |
| 64/3 | 21,3333 | 21,8897 | 21,5029 | 21,4157 | 21,3744 |
| 208/9 | 23,1111 | 22,9176 | 23,2470 | 23,1829 | 23,1575 |
| | 23,7151 | 22,9275 | 23,9677 | 23,8212 | 23,7597 |
| | 27,0102 | 25,9446 | 27,2720 | 27,1383 | 27,0741 |
| | 29,4563 | 28,3568 | 29,7973 | 29,6249 | 29,5288 |
| | 29,6572 | 28,4504 | 29,9384 | 29,7967 | 29,7355 |
| 304/9 | 33,7777 | 32,2355 | 34,2072 | 33,9770 | 33,8765 |

Tabela 4.9 – Convergência para o elemento Hermitiano N*=2

| Exato Lamé | Bauer e Reiss (1973) | M1 | M2 | M3 | M4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2,52276 | 2,49577 | 2,52326 | 2,52330 | 2,52319 |
| 16/3 | 5,33333 | 5,25117 | 5,33505 | 5,33599 | 5,33543 |
| | 7,26589 | 7,05662 | 7,27482 | 7,27045 | 7,26921 |
| | 8,49364 | 8,28185 | 8,50332 | 8,50117 | 8,49851 |
| 112/9 | 12,4444 | 11,9836 | 12,4487 | 12,4568 | 12,4550 |
| | 14,2307 | 13,9091 | 14,3065 | 14,2609 | 14,2452 |
| | 17,1464 | 15,9794 | 17,1932 | 17,1812 | 17,1667 |
| | 17,2014 | 16,4691 | 17,1917 | 17,2126 | 17,2185 |
| 64/3 | 21,3333 | 20,3563 | 21,3601 | 21,3706 | 21,3653 |
| 208/9 | 23,1111 | 21,9828 | 23,1639 | 23,1555 | 23,1467 |
| | 23,7151 | 22,1754 | 23,8552 | 23,7858 | 23,7514 |
| | 27,0102 | 26,9608 | 27,0826 | 27,0762 | 27,0609 |
| | 29,4563 | 31,0354 | 29,5880 | 29,5640 | 29,5157 |
| | 29,6572 | 34,5022 | 29,6092 | 29,6886 | 29,7121 |
| 304/9 | 33,7777 | 33,9460 | 33,8883 | 33,8695 | 33,8537 |

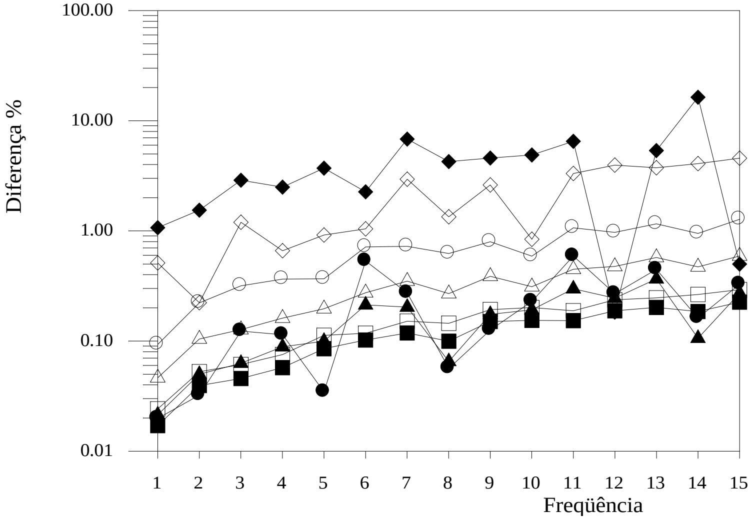



Figura 4.10 – Diferença percentual para as primeiras 15 frequências naturais da membrana em função da malha e do tipo de elemento Hermitiano (N*=1: M1=◇, M2=○,M3=△, M4=□; N*=2: M1=◆, M2=●,M3=▲, M4=■)

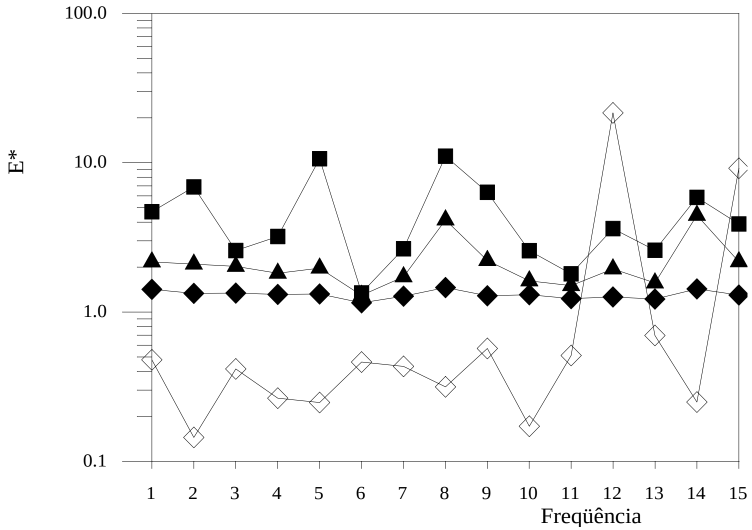



Figura 4.11 – Diferença relativa para as primeiras 15 frequências naturais da membrana (M1=◇, M2=■, M3=▲ e M4=◆)

Como pode ser visto nas Figuras 4.10 e 4.11, para as malhas mais grosseiras os resultados obtidos com o elemento N*=1 são os melhores. Para malhas mais refinadas os resultados melhores foram obtidos com o elemento N*=2.

### 4.7.4 - Vibração Livre de Membrana Quadrada

Neste último exemplo analisa-se uma membrana quadrada de lado 1. Como nos casos anteriores, apenas ¼ do domínio foi discretizado e as análises foram feitas também considerando condições de contorno como as mostradas na Figura 4.6.

Esta membrana foi analisada com as malhas M1, M2,...,M20 (mesmas malhas do Exemplo 3.8.1) e as soluções analíticas para as frequências naturais são dadas por:

$$\omega(n,m)=\pi(n^2+m^2)^{1/2} \quad [rad/s] \qquad (n,m=1,2,3....) \tag{4.27}$$

Os resultados da Tabela 4.10 foram obtidos utilizando a malha M14 e mostram os valores obtidos para as primeiras frequências naturais de uma membrana quadrada empregando os elementos N*=1 e N*=2.

Os resultados mostrados na Tabela 4.11 mostram a convergência *h* para as primeiras frequências naturais da membrana. Como podem ser observados nesta tabela, os resultados com malhas grosseiras apresentam erros negativos e os resultados com malhas mais refinadas apresentam erros sempre positivos. Após atingir a faixa de convergência assintótica (malhas mais refinadas) estes valores foram ajustados com a técnica dos mínimos quadrados e as taxas de convergência *h* obtidas foram iguais a 1,723; 1,714; 1,859 e 1,893 para os primeiros modos (linhas pontilhadas, Figura 4.12).

Como visualizado os resultados obtidos com o elemento N*=2 são melhores, no entanto, deve-se ressaltar que o número de graus de liberdade para o elemento N*=1 é igual a 675 e para o elemento N*=2 é igual a 1125.

Tabela 4.10 – Erro Relativo para as 8 primeiras frequências

| Freq. | Exato [Hz] | N*=1 | Erro % | N*=2 | Erro % | E* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ω(1,1) | 0,7071068 | 0,7071923 | -0,01209 | 0,7071638 | -0,00806 | 1,500 |
| ω(1,2) | 1,1180340 | 1,1183763 | -0,03061 | 1,1182741 | -0,02147 | 1,425 |
| ω(2,2) | 1,4142135 | 1,4146977 | -0,03423 | 1,4143157 | -0,00723 | 4,734 |
| ω(3,1) | 1,5811388 | 1,5822772 | -0,07200 | 1,5821805 | -0,06588 | 1,092 |
| ω(3,2) | 1,8027756 | 1,8040709 | -0,07185 | 1,8034931 | -0,03980 | 1,805 |
| ω(4,1) | 2,0615528 | 2,0640845 | -0,12280 | 2,0638548 | -0,11166 | 1,099 |
| ω(3,3) | 2,1213203 | 2,1236144 | -0,10814 | 2,1228343 | -0,07137 | 1,515 |
| ω(4,2) | 2,2360679 | 2,2385350 | -0,11100 | 2,2375211 | -0,06633 | 1,673 |

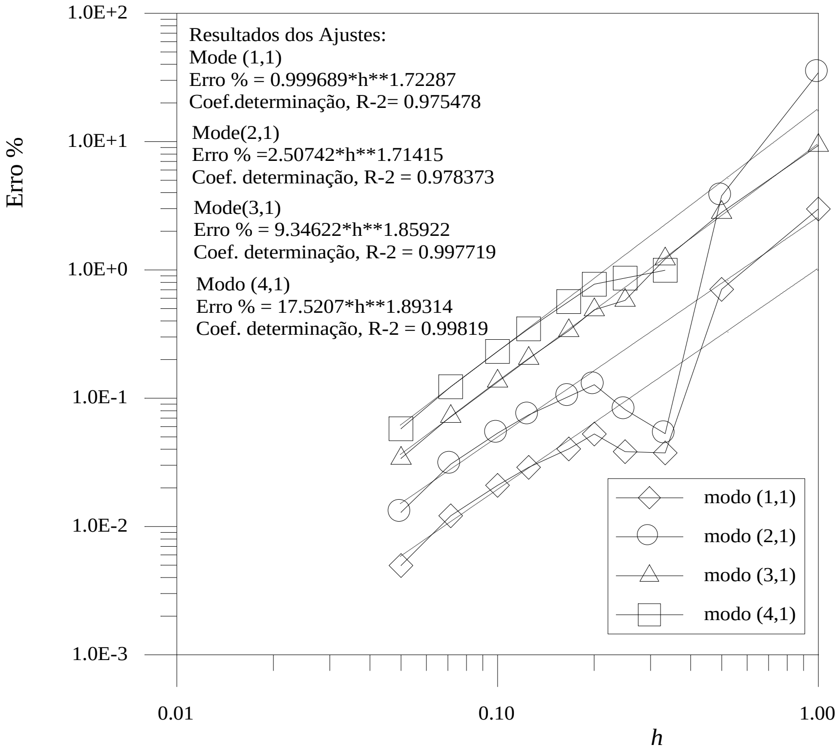



Figura 4.12 – Convergência *h* para as primeiras frequências naturais de uma membrana quadrada

Tabela 4.11 – Convergência *h* para $\omega_{(n,1)}$ [rad/s], elemento Hermitiano N*=1

| Malha | $\omega_{(1,1)}$ | Erro % | $\omega_{(2,1)}$ | Erro % | $\omega_{(3,1)}$ | Erro % | $\omega_{(4,1)}$ | Erro % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M1 | 4,31031 | 2,9834 | 4,60794 | 34,404 | 9,.00793 | 9,3277 | - | - |
| M2 | 4,41152 | 0,7052 | 6,75980 | 3,7724 | 9,65624 | 2,8016 | - | - |
| M3 | 4,44454 | 0,0374 | 7,02109 | 0,0529 | 10,05518 | 1,2138 | 13,08178 | 0,9933 |
| M4 | 4,44458 | 0,0383 | 7,03053 | 0,0813 | 9,99200 | 0,5779 | 13,06483 | 0,8624 |
| M5 | 4,44521 | 0,0525 | 7,03375 | 0,1272 | 9,98297 | 0,4870 | 13,05319 | 0,7725 |
| M6 | 4,44466 | 0,0401 | 7,03204 | 0,1029 | 9,96787 | 0,3351 | 13,02649 | 0,5665 |
| M8 | 4,44416 | 0,0289 | 7,03001 | 0,0739 | 9,95483 | 0,2038 | 12,99805 | 0,3469 |
| M10 | 4,44381 | 0,0209 | 7,02855 | 0,0532 | 9,94805 | 0,1356 | 12,98306 | 0,2311 |
| M14 | 4,44342 | 0,0120 | 7,02696 | 0,0306 | 9,94174 | 0,0720 | 12,96902 | 0,1228 |
| M20 | 4,44310 | 0,0049 | 7,02572 | 0,0129 | 9,93796 | 0,0339 | 12,96061 | 0,0578 |
| Exato | 4,44288 | - | 7,02481 | - | 9,93458 | - | 12,95312 | - |

# Capítulo 5
## As Conclusões Finais e Sugestões para Futuros Trabalhos

As principais conclusões obtidas com as análises realizadas durante a execução deste trabalho estão listadas na sequencia de acordo com a ordem dos capítulos do texto.

## 5.1 - TRATAMENTO MATEMÁTICO E NOVAS FORMULAÇÕES

No Capítulo 2 deste trabalho foi mostrado um breve histórico contemplando as primeiras formulações do elemento Hermitiano e o rigor matemático demonstrado nos trabalhos de Ciarlet (1978) e Ciarlet e Riviart (1972).

Foi proposta uma formulação alternativa para este elemento e verificou-se que os resultados obtidos com esta nova formulação foram muito semelhantes aos resultados obtidos com a formulação convencional do elemento para alguns problemas da elasticidade.

A formulação enriquecida que foi uma das principais etapas deste trabalho também produziu bons resultados. Os resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4 mostraram esta característica do elemento enriquecido.

## 5.2 - PROBLEMAS DA ELASTICIDADE

Como comentado anteriormente, o elemento Hermitiano é um elemento antigo, porém pouco estudado para as aplicações da elasticidade e os problemas de membrana e potencial. Assim sendo, diversos exemplos foram resolvidos durante o desenvolvimento desta dissertação para verificar a convergência deste tipo de elemento e apontar seus pontos positivos e negativos.

Aspectos **negativos**:
- o elemento Hermitiano 2-simplex possui apenas continuidade $C^0$.
- mesmo a formulação enriquecida continua com continuidade $C^0$.

-o número de graus de liberdade por nó para o elemento convencional é igual a 3 para os problemas de membrana e potencial e 6 para os problemas da elasticidade.

-a continuidade $C^1$ só é assegurada nos nós do elemento.

Aspectos **positivos** marcantes deste tipo de elemento:

-o elemento pode ser acoplado em aplicativos convencionais de elementos finitos e existe a possibilidade (com ou pouco de trabalho) de obter as matrizes dos elementos na sua forma explícita;

-as deformações são imediatamente obtidas a partir dos resultados dos nós e calculadas com precisão semelhante aos deslocamentos;

-tem poucos nós (3 apenas) e todos com graus de liberdade físicos (mesmo para as formulações enriquecidas). A largura de banda da matriz rigidez final é menor do que a obtida com o elemento cúbico Lagrangeano (T10);

-o elemento é pouco sensível à distorção da malha, conforme resultados para elasticidade apresentados no item 3.8.1 e 3.8.6, para membranas o problema da membrana elíptica;

-o elemento é pouco sensível ao *locking* de Poisson, conforme analisado para EPD nos itens 3.8.9 e 3.8.11;

-foram obtidos excelentes resultados para carregamentos de flexão em vigas, mesmo utilizando malhas distorcidas;

-foram obtidos excelentes resultados para carregamentos de cisalhamento, mesmo utilizando malhas distorcidas;

-no estudo da convergência *h* ficou evidenciado que os resultados obtidos com o(s) elemento(s) Hermitiano(s) são muito melhores do que a maioria dos resultados divulgados na literatura utilizando outros elementos. Os resultados obtidos na solução do ‘Problema de Cook’ no item 3.8.5 ilustram muito bem esta característica do elemento; e

-as soluções obtidas com o elemento enriquecido também foram satisfatórias e indicaram melhorias nos valores de deslocamento e tensão, embora não apresente característica monotônica de convergência.

## 5.3 - PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO LIVRE DE MEMBRANAS E DE POTENCIAL

No estudo da torção elástica de barras (problema de potencial) com os elementos Hermitianos convencionais e enriquecidos ficaram evidenciados os seguintes aspectos:

-as taxas de convergência *h* obtidas com os elementos Hermitianos (convencional e enriquecidos) nas análises do erro utilizando a norma da energia estão próximas das taxas de convergência do elemento T10 (Lagrangeano cúbico).

-o enriquecimento melhora de maneira significativa a taxa de convergência *h* para o fluxo (norma $L_\infty$).

-analisando as taxas de convergência em função do ngl com enriquecimento uniforme da malha verificou-se que o elemento Hermitiano convencional é mais apropriado para ser utilizado com malhas grosseiras e o enriquecido produz melhores resultados com malhas mais refinadas.

-as taxas de convergência do erro em função de N seguem o mesmo padrão comentado anteriormente para a convergência *h*. Análises adaptativas não foram analisadas neste trabalho; e

-a convergência para o fluxo não é monotônica com o enriquecimento uniforme do elemento.

O estudo da vibração livre de membranas utilizando os elementos Hermitianos convencionais e enriquecidos foi realizado para verificar a convergência destes elementos para problemas dinâmicos. Ficou evidenciada nestes estudos a boa convergência dos resultados obtidos para as primeiras frequências naturais das membranas e que para malhas mais refinadas o enriquecimento é uma boa alternativa para obter resultados mais precisos.

## 5.4 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões para futuros trabalhos relacionadas com o tema desenvolvido nesta dissertação:

-todos os estudos de enriquecimento mostrados neste trabalho foram realizados com enriquecimento uniforme de todos os nós da malha. Assim sendo, sugere-se que se utilize um processo adaptativo associado ao enriquecimento dos nós da malha;

-uma extensão natural deste trabalho é a implementação do elemento Hermitiano tridimensional convencional (Ueda e Tabatta, 2009) e do elemento enriquecido;

-realizar estudos em análises dinâmicas relacionando o número de elementos por comprimento de onda e a precisão dos cálculos das frequências naturais do sistema;

-formular o elemento com lados curvos;

-elaborar a forma explícita para a matriz rigidez para os problemas da elasticidade, membrana e potencial para o elemento N*=1;

-estudos para comparar os tempos de computação para o elemento com enriquecimento;

-utilizar o elemento formulado neste trabalho para o estudo de problemas da acústica linear e

-utilizar este elemento em análises não lineares, pois as tensões são calculadas com precisão semelhante à precisão dos deslocamentos e sem pós-processamento.

## Bibliografia e Referências

Akin J. E., *Integration Methods*, Rice University; 2004; disponível em:
www.clear.rice.edu/mech517/Books/n10.pdf
www.clear.rice.edu/mech517/Books/n1.pdf
Pg 49,130.

Allman D.J., *A Compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis*, Computers & structures vol. 19, pp1-8; 1984. Pg 63.

Allman D.J., *Evaluation of the Constant Strain Triangle with drilling rotations*, Int. J. Numer. Methods Eng. 26, 2645-2655; 1988. Pg 63.

Argyris JH, Fried I, Scharpf DW. *The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method*. Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, (692):701–709; 1968.

Babuska I., Szabó, *On the rates of Convergence of the Finite Element Method*. Int. Journal of Numerical Methods in Eng. vol. 18; 1982. Pg 76,77.

Babuska, I., Suri, M., *The p- and h-p versions of the Finite Element Method, and Overview*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 80, pp.5-26; 1990. Pg 76.

Bauer L., Reiss E.L., *Free vibrations of rhombic plates and membranes*, The journal of the Acoustical society of America, 1373-1375; 1973. Pg 96.

Bazeley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C., *Triangular elements in bending-conforming and nonconforming solutions*, Proceedings Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F.B. Ohio; 1965. Pg 31,36.

Beckers P., Zhong H.G., Maunder E.A.W., *Numerical comparison of several a posteriori error estimators for 2D stress analysis*. Rev. Europèenne Èléments Finis; 1993. Pg 65.

Bergan P.G., Felippa C.A., *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Paper appeared in Vol. 50, pp.25-69; 1985. Pg 62,63.

Boresi A.P., Lynn P.P, *Elasticity in Engineering Mechanics, Published by Prentice-Hall*, Englewood Cliffs; 1974. Pg 82,86.

Chandrupatla T. R., Belegundu A. D., *Introduction to Finite Elements in Engineering*, third edition, Prentice Hall; 2002. Pg 48,69,83,84,86.

Ciarlet P.G. and Raviart P.A., *General Lagrange and Hermite interpolation in Rn with applications to finite element methods*. Arch. Rational Mech. Anal., 46:177-199; 1972. Pg 35,36,102.

Ciarlet Ph.; *Lectures on the Finite Element Method*, Tata Institute of Fundamental Research Bombay; 1975.

Ciarlet P.G., *The finite element method for elliptic problems,* North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford; 1978. Pg 35,36,39,40,41,102,129.

Clough,R.W., *The Finite element Method – a personal view of its original formulation*, in: K. Bell (Ed.), From Finite Elements to the Troll Platform-the Ivar Holand 70th Anniversary Volume, Tapir, Trondheim, Norway, ppg.89-100; 1994. Pg 30.

Cook R.D., *Improved two-dimensional finite element*, Journal of the structural Division, ASCE, 100; 1974. Pg 61,63.

Cook R.D., *Ways to improve the bending response of finite elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, pp. 1029–1039; 1977.

Cowper G.R., Lindberg G.M. and Olson M.D., *A shallow shell finite element of triangular shape*. Int. J. Solids Struct. 6, pp 1133-1156; 1970. Pg 33,53,54.

Dias A. P. C., Barbieri R., *Análise de Convergência das Soluções Numéricas da Equação de Burgers com Elementos Finitos Generalizados*. Relatório IC. Depto Eng. Mecânica. UDESC; 2011. Pg 27,113.

Eisenberg M.A. e Malvern L.E., *On infinite integration in natural coordinates*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 7, 574-575; 1973. Pg 49.

Felippa C.A., *Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures*, Ph.D. Dissertations, Berkeley, CA; 1966.

Felippa C. A., *A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms*, Computer Methods Appl. Engrg; 2003. Pg 30,31,32,58,61.

Fenner R.T., *Engineering Elasticity: application of numerical and analytical techniques*. New York: Wiley; 1986. Pg 65.

Ferrante A.J., *Application to plane strain-plane stress problems, in "The Finite Element Technique: An Introduction for Engineers".* Editado por Brebbia C.A. and Ferrante A.J. Editora da UFRGS (Universidade Federal do Rio Grande do Sul); 1975. Pg 33,34,35,36.

Filippini G., Maliska C.R., Vaz Jr. M., *A physical perspective of the element-based finite volume method and FEM-Galerkin methods within the framework of the space of finite elements*, Int. Jour. for Num. Met. in Engineering; 2014.

Fischer, P.; Mergheim, J. e Steinmann, P., On the $C^1$ continuous discretization of non-linear gradient elasticity: a comparison of NEM and FEM based on Bernstein–Bezier patches. Int. J. Numer Methods Eng. 2010; 82(10):1282–307.; 2010.

Fraeijs de Veubeke, B.M. *Displacement and equilibrium models*, in: O.C. Zienkiewicz, G. Hollister (Eds.) Stress Analysis, Wiley, London, 1965, pp.145-197, Int. J. Numer. Meth. Engrg. 52, 287-342; 2001. Pg 31.

Gutiérrez-Vega J. C., Rodríguez-Dagnino R. M., Meneses-Nava M. A. e Chávez-Cerda S., *Mathieu functions, a visual approach*. Am. J. Phys. 71, pg. 233-242; 2003. Pg 92.

Guyan R.I., *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*, AIAA Journal, vol. 3, no2, pg. 380; 1965. Pg 50,84,85.

Hengst V.H., *Beitrag zur Beurteilung des Spannungszustandes einer gelochten Scheibe (Stress in a square plate with circular hole*). Ztschr. F. angew. Math. und Mech. 18. 44-48; 1938. Pg 78.

Hinton E., Campbell JS., *Local and Global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method.* Int. J. Numer. Meth. Eng.; 1974. Pg 85.

Hughes T.J.R., Masud A., Harari I., *Numerical Assessment of some Membrane Elements with drilling degrees of freedom*, Comp. & Struct. Vol. 55 No. 2; 1995. Pg 87.

Hutton D. V., *Fundamentals of Finite Element Analysis*, McGraw-Hill; 2004.

Irons B. M., Ahmad S., *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Chichester, England; 1980.

Kelly, D.W., Nakazawa S., Zienckiewicz O.C., *A note on anisotropic balancing dissipation in the finite element method approximation to convective diffusion problems*. Int. J. Num. Meth. Eng., 15, 1705-11; 1980. Pg 124.

Kirby R.C., Logg A., Rognes M.E., Terrel R., *Common and unusual finite elements, in: Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, Lectures Notes in Computational Science and Engineering 84; 2012. Pg 36.

Lamé G., *Leçons sur la théorie Mathematique de l´´elasticité des corps solides*, Gauthier-Villars, Paris, pg. 131; 1866.

Lascaux P., Lesaint P.; *Some nonconforming finite elements for the plate bending problem*, Revue française d'automatique, informarique, recherché, P. 9-53; 1975.

Li G., Paulino G.H., Aluru N.R., *Coupling of the mesh-free finite cloud method with the boundary element method: a collocation approach*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.; 2003. Pg 65.

Martha L.F., *Método Elementos Finitos*, Tecgraf PUC-Rio, 1994, disponível em:
www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/ApostilaMEF-cap1-LFMartha.pdf
www.tecgraf.puc-rio.br/ftp_pub/lfm/ApostilaMEF-cap2-LFMartha.pdf
Pg 30.

Martin H. Sadd., *Elasticity Theory, Applications and Numerics*. Elsevier Butterworth-Heinemann; 2005.

Novotny, A.A.; Pereira, J. T.; E.A. Fancello, E.A. e Barcellos, C.S., *A fast hp adaptive Finite element mesh design*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190; 2000. Pg 117.

Nygard M.K., *The Free Formulation for nonlinear finite elements with applications to shells*, Ph.D. Dissertation, Div. of Struct. Mechanics, NTH, Trondheim, Norway; 1986.

Papanicolopulos, S. –A. and Zervos A., *A method for creating a class of triangular $C^1$ finite elements*. Int. J. Numer. Meth. Eng., 89:1437–1450.; 2012.

Papanicolopulos S.-A.; Zervos A., *Polynomial C1 shape functions on the triangle*, Computers and Structures 118, 53-58; 2013.

Piltner R., Taylor R.L., *Triangular finite elements with rotational degrees of freedom and enhanced strain modes*, Computers and Structures 75, 361-368, Elsevier; 2000. Pg 61,62,80.

Popov E.P., *Introdução à mecânica dos sólidos*, ed. Edgard Blucher; 1978.

Rachowicz W., Oden J.T., Demkowicz L., *Toward a universal hp adaptive Finite element strategy - Part 3*. Design of hp meshes, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 77; 1989. Pg 117.

Ruas V., *Hermite finite elements for second order boundary value problems with sharp gradient discontinuities*, Computational and applied Mathematics; 2013.

Samuel L. Weissman, Robert L. Taylor, *Resultant Fields for Mixed Plate Bending Elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol.79, pg. 321-355.; 1990.

Sengupta D., Dasgupta S., *Stiffness matrix for a quadratic strain triangle using area coordinates, west Bengal*, India. Computes & structures vol. 36, no. 5, pp. 963-970; 1990. Pg 36,53,55.

Shangyou. *"A C1-P2 finite element without nodal basis*." ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 42.2, 175-192. disponível em: http://eudml.org/doc/194403; 2008.

Taig I.C., Kerr R.I., *Some problems in the discrete element representation of aircraft structures, in Matrix Methods of Structural Analysis*, ed. By B.M. Fraeijs de Veubeke, Pergamon Press, London; 1964.

Taylor R.L., Beresford P.J., Wilson E.L, *A non-conforming element for stress analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10; 1976. Pg 63.

Timoshenko. S. P. and Goodier. J.N., *Theory of Elasticity*. 3 ed. Singapore. Mcgraw-Hill Book Co.; 1970. Pg 74.

Troesch B.A., Troesch H.R., *Eigen frequencies of an Elliptic Membrane, Mathematics of Computation*, vol. 27, num. 124, pg. 755-765; 1973. Pg 92.

Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J., *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aero, Sci. 23; 1956. Pg 30.

Ueda Y., and Tabata M., *Construction of variant Hermite elements of degree 3 for the Dirichlet boundary conditions*, Transaction of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, **17**,pp. 469–479 (in Japanese); 2007. Pg 37.

Ueda Y., and Tabata M., *A set of variant Hermite Tetrahedral elements for three-dimensional problems*, Jour. of Math-for-Industry vol.1,pp. 131-138; 2009. Pg 37,104.

Varma A. H., *Finite Element Modeling and Analysis*, CE 595:coursepart2. Disponível em:
*https://engineering.purdue.edu/~ahvarma/.../CE595%20Section%205.ppt*

Vaz Jr. M., Muñoz-Rojas P.A., Filippini G., *On the accuracy of nodal stress computation in plane elasticity using finite volumes and finite elements*, Computers and Structures 87, 1044-1057; 2009. Pg 59,65.

Weaver, W.; Jr., Timoshenko, S.P. e Young, D.H., *Vibrations Problems in Engineering*, 5$^{th}$ Ed., Wiley, New York; 1990.

Weissman S. L., Taylor R.L, *Resultant Fields for Mixed Plate Bending Elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol. 79; 1990. Pg 73.

Wilson H., *Vibration Modes of an Elliptic Membrane*, disponível em, http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/6500-vibration-modes-of-an-elliptic-membrane; 2004. Pg 92.

Wilson H.B., Scharstein R.W., *Computing elliptic Membrane high frequencies by Mathieu and Galerkin methods*, J. Eng. Math.57,pg. 41-55; 2007. Pg 92.

Yazdani A.A., Gakway A., Dhatt G., *A posteriori error estimator based on the second derivative of the displacement fiel for two-dimensional elastic problems*. Comput. Struct.; 1997. Pg 65.

Zhang L., Cui T., Liu H., *A set of symmetric quadrature rules on triangles and tetrahedral*, Journal of Computational Mathematics, vol. 27; 2009. Pg 49,130.

Zienkiewicz O. C., Taylor R.L., *The Finite Element Method- Volume 1: Basis*, 5. ed., BH; 2000. Pg 51,52,124,133.

Zienckiewicz, O.C. e Taylor, R.L., *The Finite Element Method - Volume 3: Fluid Dynamics*, Fifth edition, Butterworth Heinemann; 2000.

Zienkiewicz, O.C. (2001). Preface to reprint of B.M. *Fraeijs de Veubeke´s Displacement and equilibrium models*, Int. J. Numer. Methods Engrg., 52, 287-342; 2001. Pg 31.

# Anexo I - Elementos Hermitianos Enriquecidos

Os *elementos Hermitianos unidimensionais* são conhecidos na literatura e talvez a sua principal aplicação seja para o estudo de flexão de vigas. São elementos cúbicos (*p*=3) com dois nós e dois graus de liberdade em cada nó que são o deslocamento ($u_i$) e sua derivada ($du_i/dx$). Este elemento possui continuidade $C^1$ e para um elemento de comprimento L, uma variável u(x) suficientemente contínua pode ser aproximada utilizando a seguinte expressão:

$$u(x) \cong H_1(x)u_1 + H_2(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + H_3(x)u_2 + H_4(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} \quad 0 \le x \le L \qquad \text{(AI.1)}$$

sendo que $H_i(x)$ denotam os conhecidos polinômios de Hermite ilustrados na Figura AI.1 e suas expressões matemáticas são dadas por:

$$H_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad \text{(AI.2)}$$

$$H_2(x) = x\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)\right]^2 \qquad \text{(AI.3)}$$

$$H_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad \text{(AI.4)}$$

$$H_4(x) = x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right] \qquad \text{(AI.5)}$$

Uma maneira de *enriquecer* a aproximação da Equação AI.1 foi à realizada por Dias e Barbieri (2011). Estes autores introduziram funções com valores nulos nas extremidades (nós), porém com derivadas unitárias em cada nó do elemento. O objetivo deste enriquecimento foi melhorar o grau da aproximação de u(x) e da sua derivada mantendo a principal característica deste elemento que é a continuidade $C^1$. Como pode ser visto na sequencia, as funções de enriquecimento estão associadas aos nós do elemento e isto permite melhorar a aproximação de u(x) para um nó da malha apenas (se for desejado).

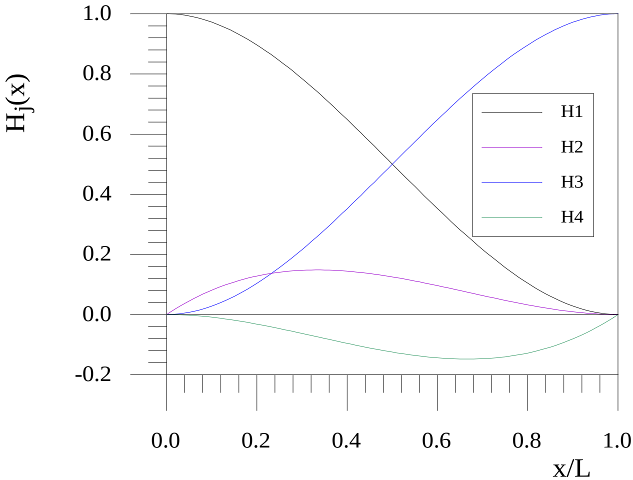



Figura AI.1 – Polinômios de Hermite unidimensionais

O enriquecimento foi realizado com a seguinte aproximação para u(x):

$$u(x) \cong \underbrace{\phi_1(x)u_1 + \sum_{j=1}^{m}\varphi_j(x)\alpha_j}_{\text{valores associados ao nó 1}} + \underbrace{\phi_2(x)u_2 + \sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)\beta_k}_{\text{valores associados ao nó 2}} \quad 0 \le x \le L \qquad \text{(AI.6)}$$

sendo que as funções de interpolação associadas ao nó 1 são:

$$\phi_1(x) = H_1(x) \qquad \text{(AI.7)}$$

$$\varphi_1(x) = H_2(x) \qquad \text{(AI.8)}$$

$$\varphi_j(x) = H_2(x) \times \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{j-1} \qquad (j = 2,\ldots, m) \qquad \text{(AI.9)}$$

e as funções de interpolação associadas ao nó 2 são:

$$\phi_2(x) = H_3(x) \qquad \text{(AI.10)}$$

$$\psi_1(x) = H_4(x) \tag{AI.11}$$

$$\psi_j(x) = H_4(x) \times \left(\frac{x}{L}\right)^{j-1} \qquad (j = 2, \ldots, n) \tag{AI.12}$$

As funções enriquecedoras para o nó 1 estão ilustradas nas Figuras AI.2 e AI.3 de onde observa-se que todas elas possuem derivadas unitárias no nó 1.

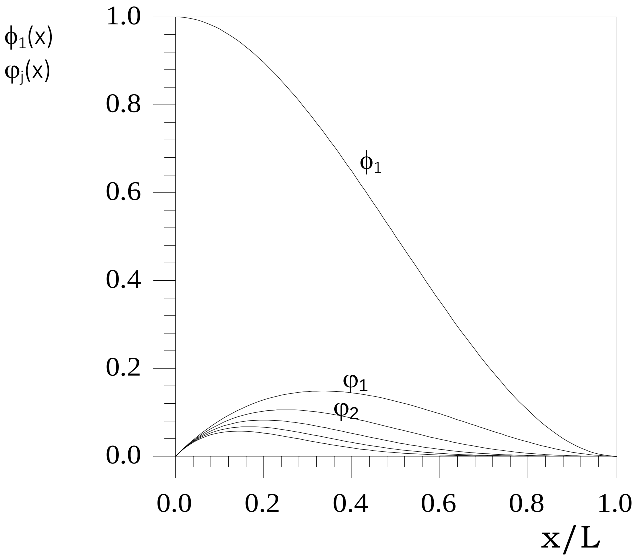



Figura AI.2 – Funções de Interpolação Associadas aos Graus de Liberdade do nó 1

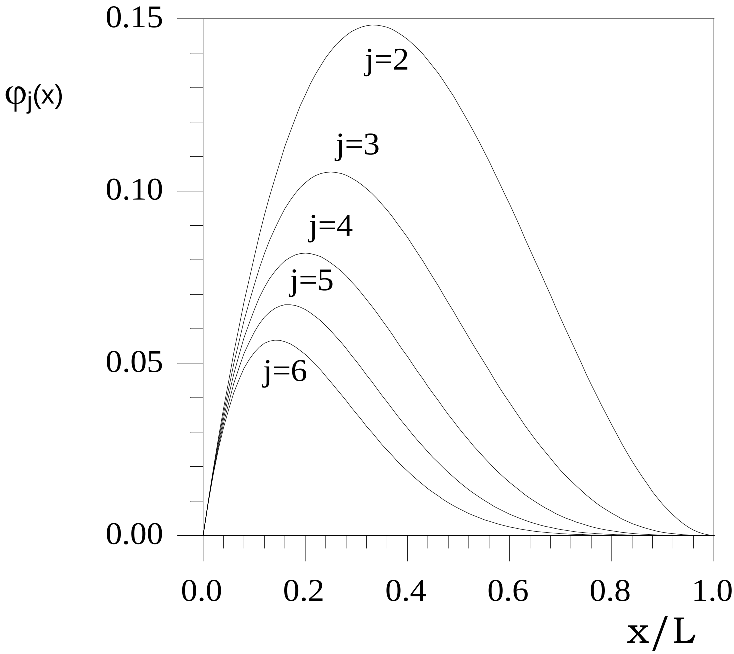



Figura AI.3 – Detalhe das funções $\varphi_j(x)$, $j \geq 2$

Então, a partir da Equação AI.6 pode-se avaliar a derivada de u(x) no nó 1 e que é dado por:

$$\frac{du(0)}{dx} \cong \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tag{AI.13}$$

e esta é a interpretação física dos parâmetros $\alpha_j$ que aparecem na aproximação de u(x). Analogamente, a derivada de u(x) em x=L (nó 2) é dada por:

$$\frac{du(L)}{dx} \cong \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tag{AI.14}$$

**<u>Problema 1</u>** Encontrar a solução u(x) para a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f(x) = 0 \quad \forall \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{AI.15}$$

com condições de contorno homogêneas e f(x) igual a:

$$f(x) = 2\alpha\left[\frac{1}{1+\alpha^2(x-x_o)^2} + \frac{\alpha^2(x-x_o)(1-x)}{[1+\alpha^2(x-x_o)^2]^2}\right] \tag{AI.16}$$

Este problema já foi resolvido por Novotny et al.(2000) utilizando técnicas *hp* adaptativas e com malhas construídas com a finalidade de minimizar o número de graus de liberdade para alcançar o valor um erro pré-especificado (erro medido na norma $H^1(\Omega)$). Outra solução empregando técnicas *hp* adaptativas encontrada na literatura é a de Rachowicz et al. (1989) e estas duas soluções foram tomadas como referencia para as comparações de resultados mostradas na sequência. A solução analítica para u(x) é dada por:

$$u(x) = (1-x)[\tan^{-1}\alpha(x-x_o) + \tan^{-1}\alpha x_o] \tag{AI.17}$$

e pode ser visualizada na Figura AI.4 para $x_o$=4/9. Note que existe um forte gradiente da função u(x) ao redor de $x_o$ para valores altos de $\alpha$.

O problema foi resolvido com duas malhas diferentes:

**Malha 1:**

<u>12 elementos,</u> nós posicionados **x**=[0;2;3,25;3,75;3,9;4;4,1;4,25;4,45; 5,25;6,5;7,5;9]/9

**Malha 2:**

<u>7 elementos, n</u>ós posicionados **x**=[0;3,0;3,75;4,0;4,25;4,85;6,25;9]/9.

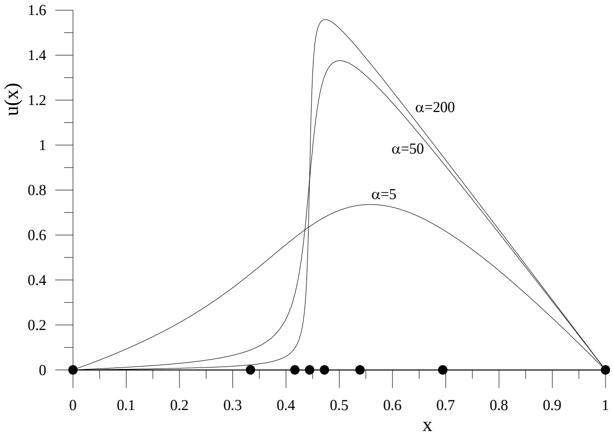



Figura AI.4 – Solução Analítica e nós da malha com 7 elementos finitos; ($x_o$=4/9; $\alpha$=5, 50 e 200)

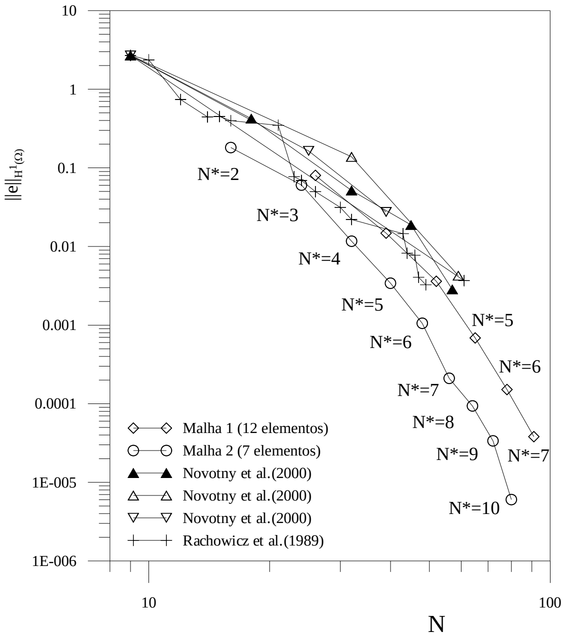



Figura AI.5 – Convergência para $||e||=||e||_{H^1(\Omega)}$;($x_o$=4/9 e $\alpha$=50) (N*=m=n)

Na Figura AI.5 estão ilustrados os comparativos do erro medido na norma $H^1(\Omega)$ obtido nestas duas análises quando $\alpha$=50. Observa-se que os erros obtidos com o elemento enriquecido da Equação AI.6 utilizando N*=1+m=1+n (p=constante) são melhores do que os valores de referencia que foram obtidos utilizando técnicas *hp* adaptativas.

Na Figura AI.6 repete-se a análise de convergência para o erro medido na norma $H^1(\Omega)$ quando $\alpha$=200 (nesta figura os círculos vazios indicam soluções obtidas para N* constante para todos os nós da malha e crescente N*=2,3,...,11). Os mesmos comentários anteriores também são válidos para este caso.

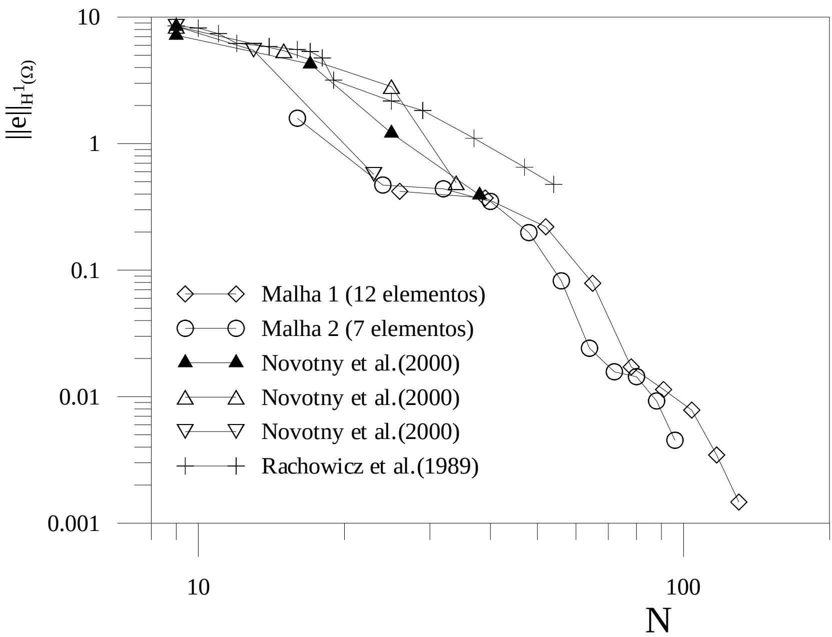



Figura AI.6 – Análise de convergência para $\|e\|=\|e\|_{H^1(\Omega)}$ ($x_o$=4/9 e $\alpha$=200)

A convergência para o fluxo em $x=x_0$ pode ser vista na Figura AI.7 onde os símbolos indicam soluções obtidas com N* crescente (N*=2,3,...;como na figura AI.6). Observa-se que a convergência não é monotônica, porém na medida em que são acrescidas funções enriquecedoras o fluxo tende ao seu valor analítico.

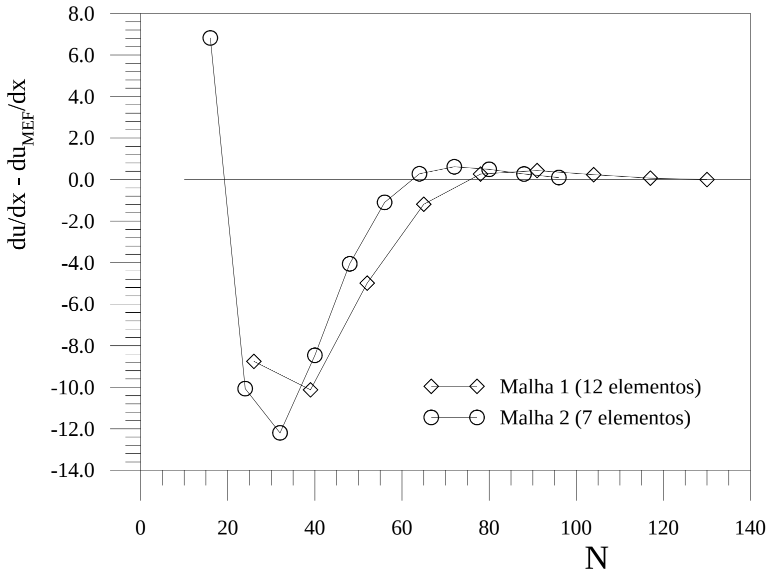



Figura AI.7 – Convergência para o Fluxo em $x=x_o$ ($x_o$=4/9 e $\alpha$=200).

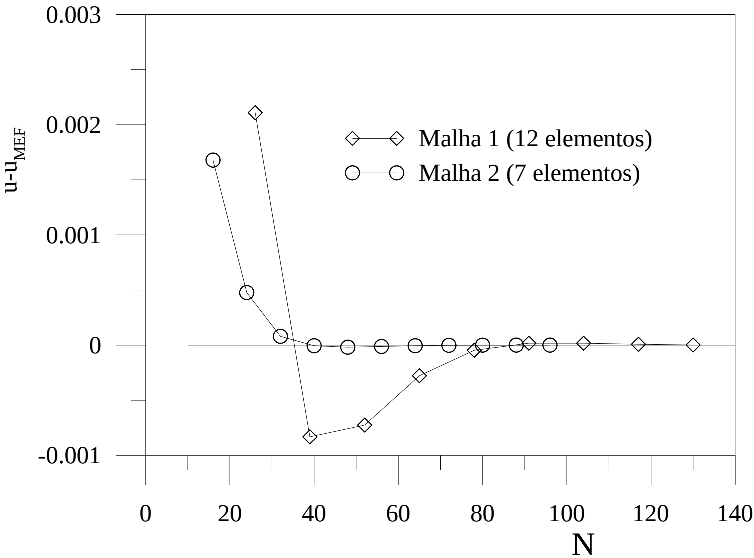



Figura AI.8 – Convergência para $u(x_o)$; ($x_o$=4/9 e $\alpha$=200)

A convergência para o $u(x_0)$ pode ser vista na Figura AI.8 onde os símbolos indicam soluções obtidas com N* crescente (N*=2,3,...;como na figura AI.7). Salienta-se que a convergência também não é monotônica, porém na medida em que são acrescidas funções enriquecedoras o valor de $u(x_0)$ tende ao seu valor analítico.

Todos os resultados mostrados nas Figuras AI.5 a AI.8 indicam que a malha 2 com 7 elementos foi a mais eficiente para a solução do problema. Nos dois casos, malha 1 e malha 2, os resultados sempre foram melhores do que os resultados tomados como referencia para comparações.

*A solução com malhas homogêneas*

O problema em estudo com $x_o$=4/9 e $\alpha$=200 foi resolvido empregando malhas homogêneas com o objetivo de verificar a convergência com relação ao refino *h*.

Os resultados ilustrados na Figura AI.9 mostram a convergência do erro no fluxo em $x=x_o$ em função do número de elementos e do grau de enriquecimento de u(x). Nota-se que esta convergência não é monotônica e que a razão de convergência também é variável. Para poucos elementos (malhas mais grosseiras) a convergência é mais acentuada do que para as malhas mais refinadas.

Por exemplo, para o elemento com N*=3 a convergência para o fluxo em $x_o$ é bastante lenta quando o número de elementos varia entre 40 e 60. Como os erros medidos na norma $H^1(\Omega)$ são bastante influenciados pelos valores ao redor de $x_o$, este comportamento também aparece na Figura AI.9.

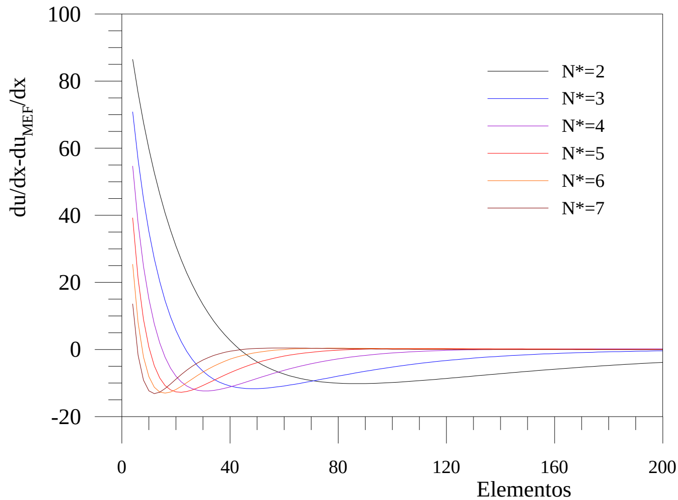



Figura AI.9 – Convergência para o Fluxo em $x=x_o$ ($x_o=4/9$ e $\alpha=200$)

Tomando como referencia a curva para N*=3 na Figura AI.9 nota-se claramente que existe um primeiro intervalo onde a razão de convergência é grande (até 40 elementos), depois esta taxa de convergência é praticamente nula entre 40 e 60 elementos e depois ela volta a crescer, porém com taxa menor do que a inicial. Este comportamento se repete para todas as curvas ilustradas na Figura AI.10 e pode estar associado ao erro ao redor de $x_o$.

Como pode ser observada na Figura AI.11, a convergência do erro medido na norma $H^1(\Omega)$ também é afetada pela existência do grande (forte) gradiente da solução em torno de $x_0$.

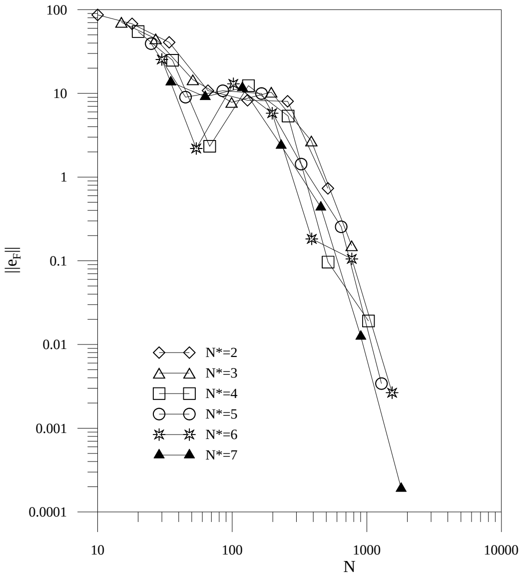



Figura AI.10 – Convergência para o Fluxo em $x=x_o$ ($x_o$=4/9 e $\alpha$=200)

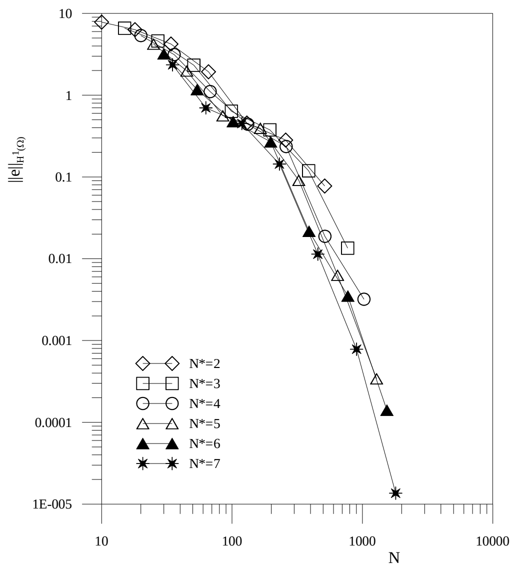



Figura AI.11 – Convergência para $||e||=||e||_{H^1(\Omega)}$ ( $x_o$=4/9 e $\alpha$=200)

**Problema 2:** Encontrar u(x) para o problema,

$$\frac{60}{x}\frac{du(x)}{dx}-\frac{d^2u(x)}{dx^2}=x^2 \quad \forall\ 1\le x\le 2 \tag{AI.18}$$

para u(1)=1 e u(2)=0.

Este é um problema condutivo-convectivo e já foi resolvido anteriormente por Kelly et al. (1980) e também citado por Zienckiewicz e Taylor (2000). A sua solução analítica esta ilustrada na Figura AI.12 e nota-se que existe forte gradiente ao redor de x=2. Nesta figura também é mostrada a posição dos nós para a malha de 3 elementos finitos utilizada nas soluções numéricas.

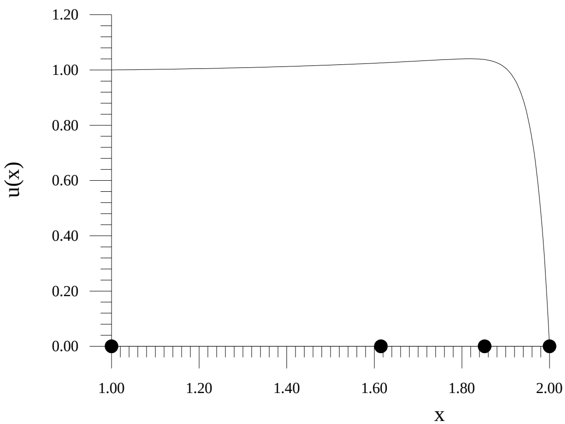



Figura AI.12 – Solução analítica e malha com 3 elementos finitos

As curvas ilustradas na Figura AI.13 mostram a convergência para o erro no fluxo, $||e_F||=|du(2)/dx-du_{MEF}(2)/dx|$, e para o erro em deslocamento u(x) medido na norma $H^1(\Omega)$, $||e||=||e||_{H^1(\Omega)}$. As linhas pontilhadas que aparecem nesta figura indicam curvas ajustadas a partir de uma regra exponencial, 'ln(Y)=AX+B'. Estas curvas ajustadas podem ser escritas em função do número de graus de liberdade de cada análise (N=4×N*-2) e os coeficientes para as suas expressões matemáticas estão mostrados na Tabela AI.1.

Tabela AI.1 – Valores Ajustados para A e B

| Curva | A | B | $R^2$ |
|---|---|---|---|
| $\ln \|\|e\|\|_{H^1(\Omega)}=A\times N+B$ | -1,1072 | 0,4683 | 0,9812 |
| $\ln \|\|e_F\|\|_{L\infty} = A\times N+B$ | -2,3055 | 9,1781 | 0,9989 |

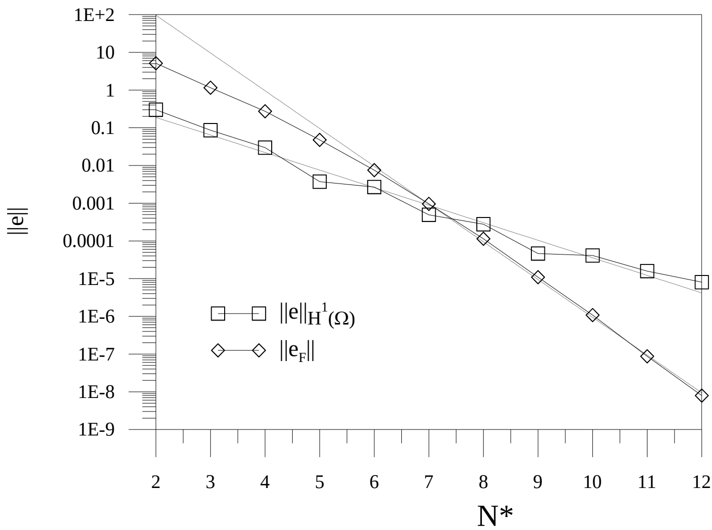



Figura AI.13 – Convergência para $||e_F||$ e $||e||=||e||_{H^1(\Omega)}$ em função de N*

As Figuras AI.14 e AI.15 foram inseridas neste texto para mostrar os valores os erros no fluxo, $||e_F||=|du(x)/dx-du_{MEF}(x)/dx|$, e do erro para o *deslocamento*, $||e_u||=|u(x)-u_{MEF}(x)|$, e, em todo o domínio. Calculado com enriquecimento (m=n=2), resultando em 12 gdl para o modelo, N*=12. Constata-se que os erros no fluxo ao longo de todo o domínio são comparáveis com os erros em deslocamento.

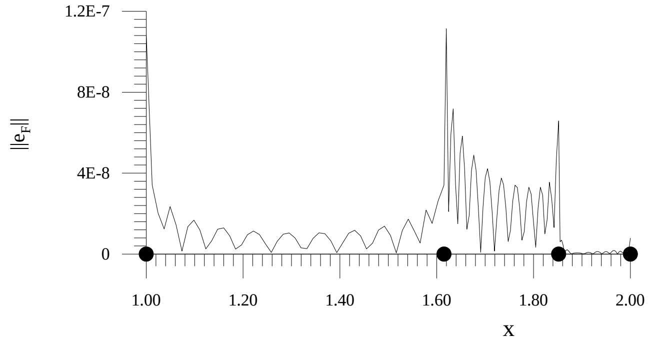



Figura AI.14 – Erro no fluxo $||e_f||$ obtido com N*=12

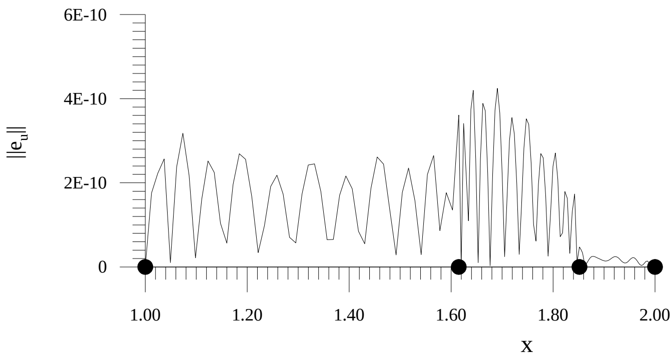



Figura AI.15 – Erro no *deslocamento* $||e_u||$ obtido com N*=12

*A solução do Problema 2 com malhas homogêneas*

As mesmas análises de convergência para o erro no fluxo, $||e_F||=|du(2)/dx - du_{MEF}(2)/dx|$, e para o erro em u(x) medido na norma $H^1(\Omega)$, $||e_u||=||e||_{H^1(\Omega)}$, foram realizadas com malhas homogêneas (malhas com 2,4,8,16,32...elementos) e N* variável. As curvas da Figura AI.16 mostram os resultados para $||e||_{H^1(\Omega)}$ em função de N*. As curvas podem ser ajustadas com uma lei de potencia do tipo 'ln(Y)=Aln(X)+B' e os valores obtidos (mínimos quadrados) para A, B e para o coeficiente de determinação R  estão resumidos na Tabela AI.2.

Tabela AI.2 – Ajustes com Mínimos Quadrados para $\ln(||e||_{H^1(\Omega)})=A\ln(N)+B$

| Curva | A | B | $R^2$ |
|---|---|---|---|
| N*=2 | -2,8055 | 4,9497 | 0,9997 |
| N*=3 | -3,7149 | 7,3857 | 0,9982 |
| N*=4 | -4,3838 | 9,1045 | 0,9837 |
| N*=5 | -5,6511 | 12,9976 | 0,9687 |
| N*=6 | -6,9127 | 17,1090 | 0,9922 |
| N*=7 | -7,8562 | 20,1522 | 0,9892 |

Assim como para o erro mensurado na norma $H^1(\Omega)$, o comportamento do erro pontual no fluxo em x=2 em função de $N_{gl}$ (N*) também segue lei de potencia quando são utilizadas malhas homogêneas mais refinadas para a solução do problema. Estes resultados podem ser vistos na Figura AI.17 e na Tabela AI.3. Nota-se que os valores de A das Tabelas AI.2 e AI.3 são muito próximos.

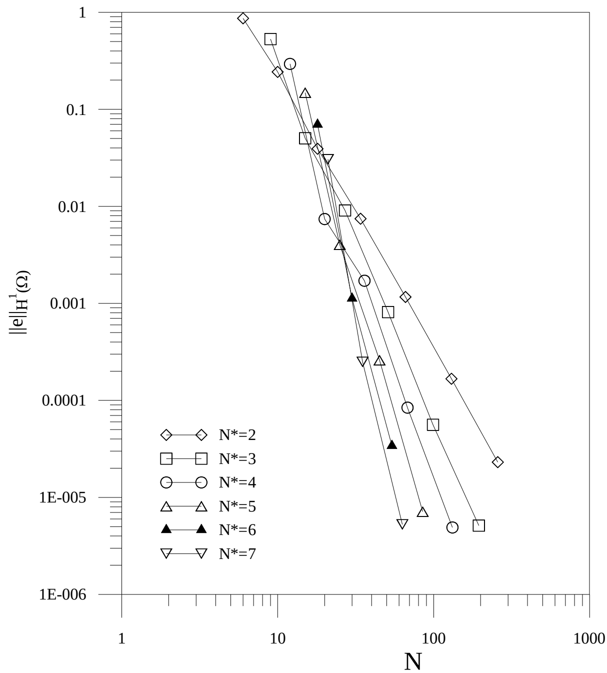



Figura AI.16 – Convergência para $||e||=||e||_{H^1(\Omega)}$ em função de N*

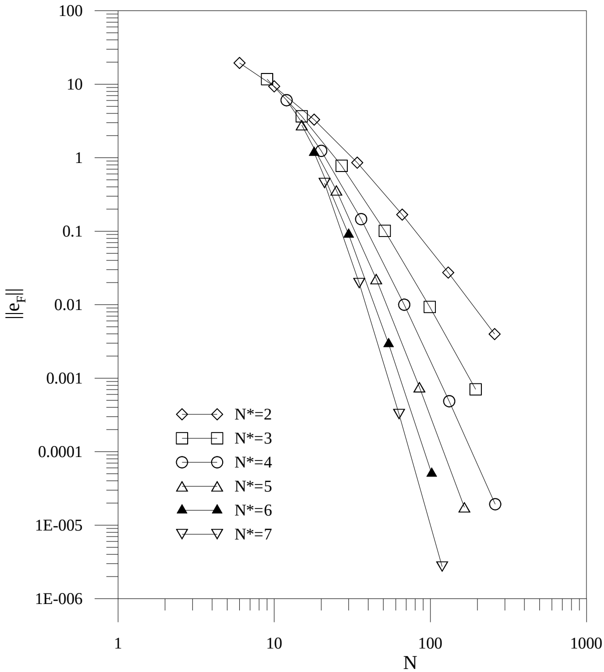



Figura AI.17 – Convergência para $||e_f||$ em função de N

Tabela AI.3 – Ajustes com Mínimos Quadrado para $\ln(||e_F||)=A \ln(N)+B$

| Curva | A | B | $R^2$ |
|---|---|---|---|
| N*=2 | -2,7454 | 9,7338 | 0,9998 |
| N*=3 | -3,7044 | 12,2994 | 0,9997 |
| N*=4 | -4,6602 | 15,0809 | 0,9998 |
| N*=5 | -5,5073 | 17,2055 | 0,9997 |
| N*=6 | -6,1247 | 18,4834 | 0,9993 |
| N*=7 | -7,2611 | 21,9423 | 0,9996 |

# Anexo II - Sistema de Coordenadas do Baricentro

Ciarlet (1978), A denominação de *n-simplex* no espaço $\Re^n$ é dada ao conjunto convexo e fechado denominado por *K* com (n+1) pontos $\mathbf{a}_i \in \Re^n$ que são chamados de vértices. Por hipótese assume-se que este conjunto de pontos não seja *degenerado*, isto é:

$$K = \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{a}_i \,,\ 0 \le \lambda_i \le 1, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\} \qquad \text{(AII.1)}$$

e

$$[\mathbf{A}]\{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{Bmatrix},\ [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_{n+1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(AII.2)}$$

é um sistema não singular.

Quando n=2 o conjunto *K* representa um triangulo e quando n=3 *K* é um tetraedro. A única solução $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+1}\}^t$ para:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{a}_{ij} \lambda_j = x_i \\ &\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \end{aligned} \qquad \text{(AII.3)}$$

é chamada de sistema de *coordenadas do baricentro* para $\mathbf{x} \in \Re^n$.

O baricentro ou centro de gravidade do simplex *K* é um ponto de *K* com todas as coordenadas dadas por 1/(n+1).

# Anexo III - Integração em Triângulos

Os cálculos das integrais de área (triângulo) necessários para avaliar a matriz de rigidez e a matriz de massa foram realizados utilizando uma regra de quadratura. Uma regra de quadratura pode ser definida como sendo o conjunto de pontos $\mathbf{x}_i$ e pesos $w_i$, i=1,2...n de tal modo que a integral de uma função f($\mathbf{x}$) definida no triângulo é aproximada por:

$$\int_A f(\mathbf{x})\,dA \cong A\sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}_i)\mathbf{w}_i \qquad \text{(AIII.1)}$$

sendo que n indica o número de pontos, $\mathbf{x}_i$ são os pontos da quadratura, $\mathbf{w}_i$ são pesos de integração associados aos pontos $\mathbf{x}_i$ e **A** denota a área do triângulo.

A quadratura é dita de ordem p se a integral da Eq.(AIII.1) for exata para todos os polinômios até ordem p. De acordo com Zhang et al.(2009) a quantidade de pontos utilizadas na regra de quadratura para triângulos segue a quantidade mostrada na Tabela AIII.1.

Tabela AIII.1 – Número de Pontos para Quadratura de ordem p em Triângulos

| p | n | p | n | p | n |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 16 | 15 | 52 |
| 2 | 3 | 9 | 19 | 16 | 55 |
| 3 | 6 | 10 | 25 | 17 | 61 |
| 4 | 6 | 11 | 28 | 18 | 72 |
| 5 | 7 | 12 | 33 | 19 | 73 |
| 6 | 12 | 13 | 37 | 20 | 88 |
| 7 | 15 | 14 | 46 | 21 | 91 |

As integrais deste trabalho foram avaliadas com 16 pontos de integração disponibilizados por Zhang et al. (2009) seguindo a regra de permutação indicada na Tabela AIII.2 e os valores da Tabela AIII.3. Akin (2004) também disponibiliza 16 pontos de integração, porém com precisão inferior aos pontos e pesos da Tabela AIII.3.

Tabela AIII.2 – Regra de Permutação para Triângulos

| Tipo de Permutação | ($L_1$,$L_2$,$L_3$) | Número de pontos |
|---|---|---|
| $S_3$(1/3) | (1/3,1/3,1/3) | 1 |
| $S_{21}$(a) | (a,a,1-2a) | 3 |
| $S_{111}$(a,b) | (a,b,1-a-b) | 6 |

Tabela AIII.3-Quadratura com 16 pontos para Triângulos

| Permutação: $S_{21}$(a) | |
|---|---|
| a | 0,17056930775176020662229350149146450 |
| w | 0,10321737053471825028179155029212903 |
| pontos | 3 |
| Permutação: $S_{21}$(a) | |
| a | 0,050547228317030975458423550596598947 |
| w | 0,032458497623198080310925928341780647 |
| pontos | 3 |
| Permutação: $S_{21}$(a) | |
| a | 0,45929258829272315602881551449416932 |
| w | 0,095091634267284624793896104388584326 |
| pontos | 3 |
| Permutação: $S_{111}$(a,b) | |
| a | 0,26311282963463811342178578628464359 |
| b | 0,0083947774099576053372138345392944 |
| w | 0,027230314174434994264844690073908908 |
| pontos | 6 |
| Permutação: $S_3$(a) | |
| a | 1/3 |
| w | 0,14431560767778716825109111048906462 |
| pontos | 1 |

# Anexo IV – Normas de Erro

Os erros das soluções de elementos finitos são avaliados utilizando a diferença entre a solução exata e a solução numérica do MEF. Os erros em deslocamento, $\mathbf{e}_u$, são avaliados empregando da seguinte maneira:

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u}_{exata} - \mathbf{u}_{MEF} \tag{AIV.1}$$

e os erros em tensões (ou fluxo) são iguais a:

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{exata} - \boldsymbol{\sigma}_{MEF} \tag{AIV.2}$$

A norma $L_\infty$ foi utilizada neste trabalho para quantificar os erros para os deslocamentos, tensão (fluxo) e energia das soluções de elementos finitos. As expressões matemáticas para estas normas são:

$$\left\|\mathbf{e}_u\right\|_{L\infty} = \left|\mathbf{u}_{exato} - \mathbf{u}_{MEF}\right| \tag{AIV.3}$$

$$\left\|\mathbf{e}_\sigma\right\|_{L\infty} = \left|\boldsymbol{\sigma}_{exato} - \boldsymbol{\sigma}_{MEF}\right| \tag{AIV.4}$$

$$\left\|\mathbf{e}_U\right\|_{L\infty} = \left|U_{exato} - U_{MEF}\right| \tag{AIV.5}$$

sendo que U denota energia.

A norma $L_2(\Omega)$ é outra norma que também foi utilizada nas avaliações do erro para os deslocamentos e tensões (fluxos). Sua expressão matemática é:

$$\|\,\mathbf{e}_u\,\|_{L_2} = \left[\int_\Omega \mathbf{e}_u{}^{\mathbf{t}} \mathbf{e}_u \, d\Omega\right]^{1/2} \tag{AIV.6}$$

$$\|\,\mathbf{e}_\sigma\,\|_{L_2} = \left[\int_\Omega \mathbf{e}_\sigma{}^{\mathbf{t}} \mathbf{e}_\sigma \, d\Omega\right]^{1/2} \tag{AIV.7}$$

Para os problemas da elasticidade também foi utilizada a norma da energia nas medidas do erro e sua expressão é dada por, Zienkiewicz e Taylor (2000),

$$||\mathbf{e}_u||_E = \left[ \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{e}_u)^t \ \mathbf{D} \ \mathbf{B}\mathbf{e}_u \ d\Omega \right]^{1/2} \tag{AIV.8}$$

sendo que **D** é a matriz constitutiva do material e **B** é a matriz que correlaciona as deformações com os deslocamentos, Eqs. (3.10) e (3.13).

Para os problemas de potencial o erro na normal da energia é obtido com a mesma expressão da Eq.(AIV.8) trocando a matriz constitutiva **D** pela matriz identidade **I** e utilizando a matriz **B** para os problemas de potencial definida na Eq.(4.13).

A norma relativa da energia, denominada por $||\mathbf{e}_u||_E^{ER}$, é avaliada utilizando a norma da energia da solução exata e a norma da Eq.(AIV.8). Sua expressão matemática é:

$$||\mathbf{e}_u||_E^{ER} = 100\sqrt{||\mathbf{e}_\mathbf{u}||_E \ / \ ||\mathbf{e}_{exata}||_E} \tag{AIV.9}$$

sendo

$$||\mathbf{u}_{exata}||_E = \left[ \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{u}_{exata})^t \ \mathbf{D} \ \mathbf{B}\mathbf{u}_{exata} \ d\Omega \right]^{1/2} \tag{AIV.10}$$