

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma metodologia para determinar a estabilidade do processo no fresamento de topo de paredes finas. Para simplificar o estudo, foram utilizadas placas retangulares como corpos de provas. Na formulação considerou-se a região de engajamento da fresa e a variação das propriedades dinâmicas da peça de trabalho de acordo com a mudança da posição da ferramenta durante o processo. Devido à baixa velocidade de corte o amortecimento do processo também foi considerado. O diagrama de estabilidade foi numericamente determinado. Ensaio práticos para comprovação do método foram conduzidos. Verificou-se, através da observação das amplitudes de vibração e do acabamento superficial da peça, que a previsão do diagrama de lóbulos está de acordo com o aparecimento do fenômeno da vibração regenerativa.

Orientador: Joel Martins Crichigno Filho

Joinville, 2013

ANO  
2013

MARIANA PEIXOTO | ANÁLISE DE ESTABILIDADE DINÂMICA DO FRESAMENTO DE  
TOPO DE PLACAS CONSIDERANDO O AMORTECIMENTO DO PROCESSO



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA ADMINISTRAÇÃO E SOCIOECONÔMICAS – ESAG  
CURSO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE  
DINÂMICA DO FRESAMENTO DE  
TOPO DE PLACAS CONSIDERANDO  
O AMORTECIMENTO DO  
PROCESSO**

MARIANA PEIXOTO

JOINVILLE, 2013

**MARIANA PEIXOTO**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DINÂMICA DO FRESAMENTO  
DE TOPO DE PLACAS CONSIDERANDO O  
AMORTECIMENTO DO PROCESSO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Joel Martins Crichigno  
Filho

**JOINVILLE, SC  
2013**

P377a Peixoto, Mariana

Análise de Estabilidade Dinâmica do Fresamento de Topo de Placas Considerando o Amortecimento do Processo/ Mariana Peixoto. – Joinville, Brasil, 2013.  
139p.: il.; 21cm.

Orientador: Joel Martins Crichigno Filho

Dissertação – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Joinville, Brasil, 2013.

1. Fresamento. 2. Vibração Regenerativa. 3. Estabilidade Dinâmica. I. Joel Martins Crichigno Filho. II. Universidade do Estado Santa Catarina. III. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Mecânica. IV. Análise de Estabilidade Dinâmica do Fresamento de Topo de Placas Considerando o Amortecimento do Processo.

CDD 620.1

**MARIANA PEIXOTO**  
**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DINÂMICA DO FRESAMENTO**  
**DE TOPO DE PLACAS CONSIDERANDO O**  
**AMORTECIMENTO DO PROCESSO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de concentração "Modelagem e Simulação Numérica".

**Banca Examinadora**

Orientador:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Joel Martins Crichigno Filho  
CCT/UEDESC

**Membros**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso  
CCT/UEDESC

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Anselmo Eduardo Diniz  
UNICAMP

**Joinville, SC, 29 de agosto de 2013.**

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus!

À Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, por proporcionarem esta oportunidade de aperfeiçoamento.

Ao Prof. Joel Martins Crichigno Filho, pela sua orientação e disponibilidade para discussões sobre assuntos diversos durante o curso.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos bolsistas do Laboratório de Usinagem pela ajuda com relação aos ensaios realizados.

À empresa Tupy S.A., principalmente ao Eng. Cásio Luiz Francisco de Andrade e ao Eng. Josué Mota Luiz pelo suporte material para a realização do trabalho.

Ao CNPq e ao PROMOP, pelo apoio financeiro.

À Fapesc pelo suporte financeiro para a obtenção dos equipamentos necessários para o desenvolvimento dos estudos.

À minha família, e aos meus amigos Carlos e Caego, por todo o apoio e incentivo nos momentos bons e ruins.

“Não sou aquele que sabe, mas  
aquele que busca.”

*(Herman Hesse)*

## RESUMO

A otimização dos processos de usinagem na indústria metal-mecânica é permanente, pois o mercado globalizado requer menores custos e maior rapidez na produção. Na indústria automotiva, o fresamento é um dos processos mais empregados. Com o avanço no projeto de novos motores de combustão interna, estes passaram a ter paredes cada vez mais finas. Esse fator tem afetado o desempenho do fresamento devido ao aparecimento de vibrações regenerativas. Nos últimos anos tem sido desenvolvidos estudos no sentido de prever regiões estáveis do processo em função das características dinâmicas do sistema e das condições de usinagem. O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma metodologia para determinar a estabilidade do processo no fresamento de topo de paredes finas. Para simplificar o estudo, foram utilizadas placas retangulares como corpos de provas. Na formulação considerou-se a região de engajamento da fresa e a variação das propriedades dinâmicas da peça de trabalho de acordo com a mudança da posição da ferramenta durante o processo. Devido à baixa velocidade de corte o amortecimento do processo também foi considerado. O diagrama de estabilidade foi numericamente determinado. Ensaios práticos para comprovação do método foram conduzidos. Verificou-se, através da observação das amplitudes de vibração e do acabamento superficial da peça, que a previsão do diagrama de lóbulos está de acordo com o aparecimento do fenômeno da vibração regenerativa.

**Palavras-chave:** Fresamento de topo. Vibração regenerativa. Estabilidade.

## ABSTRACT

In order to answer the global market requirements the manufacturing industries need to produce goods faster and with lower costs. In the automotive industry milling is one of the most important process. With the improvement in the design of internal combustion engines the wall thickness became thinner. This factor has affected the performance of milling process due to the appearance of chatter vibrations. Studies have been conducted to predict stable regions according to the dynamic characteristics of the machining tool - tool - workpiece system and the machining conditions. The objective of this study was to develop a methodology to calculate the stability lobe diagram in the face milling process of thin walls. In order to simplify the analysis rectangular plates of steel were used as workpieces. The change of workpiece dynamics according to the tool position was considered. The tests were conducted under conditions recommended by the tool manufacturer and hence due to the low cutting speed the process damping model was included in the formulation. The stability diagram was determined numerically. The simulation results are verified experimentally by cutting tests. The signal of an accelerometer attached to the workpiece was acquired. The Fast Fourier Transformation (FFT) and the signal energy (RMS) were computed. The surface roughness of workpiece was measured. It was observed that the frequency of chatter vibration, the signal energy of the accelerometer and the surface roughness rise under unstable conditions. The improved model was also able to predict the increase in the limit of stability due to process damping.

**Keywords:** Milling. Regenerative vibration. Stability.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1– Bloco com estrutura de baixa rigidez dinâmica.....	18
Figura 2 – Modelo representativo .....	19
Figura 3 – Movimentos realizados no fresamento.....	23
Figura 4 – Geometria do cavaco.....	24
Figura 5 – Operações básicas no fresamento.....	25
Figura 6 – Fresamento tangencial ou periférico. ....	26
Figura 7 – Fresamento frontal ou de topo. ....	26
Figura 8 – Velocidade de corte ( $V_c$ ).....	27
Figura 9 – Velocidade de avanço ( $V_f$ ).....	28
Figura 10 – Profundidade de corte, penetração de trabalho e de avanço.....	28
Figura 11 – Força de usinagem .....	29
Figura 12 – Geometria do Corte Ortogonal. ....	30
Figura 13 – Modelo de cálculo da força de corte .....	31
Figura 14 – Geometria do Corte Oblíquo. ....	32
Figura 15 – Força de corte para uma rotação. ....	35
Figura 16 – Sistema de um grau de liberdade.....	37
Figura 17 – Resposta de um sistema submetido à vibração livre amortecida.....	39
Figura 18 – Vibração regenerativa no corte ortogonal. ....	44
Figura 19 – Obtenção dos parâmetros modais. ....	46
Figura 20 – Diagrama dos lóbulos de estabilidade. ....	51
Figura 21 – Forças de amortecimento.....	54
Figura 22 – Área de identificação.....	55
Figura 23 – Mecanismo de formação de cavaco no fresamento.....	57

Figura 24 – Faixa de frequência onde a vibração regenerativa pode ocorrer. ....	64
Figura 25 – Formação dos lóbulos de estabilidade. ....	64
Figura 26 – Processo de amortecimento. ....	66
Figura 27 – Fluxograma para determinação do diagrama de estabilidade. ....	70
Figura 28 – Chapa para ensaios. ....	74
Figura 29 – Sistema de fixação da chapa. ....	75
Figura 30 – Sistema de aquisição de dados. ....	76
Figura 31 - Máquina utilizada no ensaio. ....	76
Figura 32 – Fresa Coromill 345. ....	77
Figura 33 – Especificações do inserto. ....	77
Figura 34 – Montagem para determinação das pressões específicas de corte. ....	79
Figura 35 – Modelamento do processo de amortecimento. ....	80
Figura 36 – Parcelas de força devido ao amortecimento. ....	83
Figura 37 – Distribuição dos pontos de análise. ....	85
Figura 38 – FRF com as frequências e amplitudes necessárias para a determinação dos parâmetros. ....	87
Figura 39 – Espessura dinâmica devido à deflexão na direção z. ....	89
Figura 40 – Pontos de análise da primeira região de estudo. ....	90
Figura 41 – Forças de corte obtidas nos ensaios. ....	93
Figura 42 – Inserto utilizado nos estudos. ....	94
Figura 43 – Ponto de fixação do acelerômetro. ....	95
Figura 44 – FRF do ponto 3. ....	96
Figura 45 – Modos de vibração do corpo de prova. ....	97

Figura 46 – Comparação da FRF entre os pontos 1 e 3 de análise. (a) Ponto 1; (b) Ponto 3.....	98
Figura 47 – Comparação entre as FRFs dos pontos 1, 4, 7 e 10 de análise. (a) Ponto 1; (b) Ponto 4; (c) Ponto 7; (d) Ponto 10.	99
Figura 48 – Parte real e imaginária da FRF para o ponto 1.....	101
Figura 49 – Obtenção da FRF radial da fresa.....	103
Figura 50 – Obtenção da FRF axial da fresa.....	104
Figura 51 – Obtenção da FRF para o eixo x do sistema de fixação.....	105
Figura 52 – Obtenção da FRF para o eixo y do sistema de fixação.....	106
Figura 53 – Comparação da FRF entre o sistema de fixação e a chapa. (a) Fixação em x; (b) Ponto 1.....	107
Figura 54 – Regiões de análise para a chapa.....	109
Figura 55 – Diagrama de estabilidade para a região 1.....	110
Figura 56 – Diagrama de estabilidade para a região 2.....	110
Figura 57 – Diagrama de estabilidade para a região 3.....	111
Figura 58 – Influência do processo de amortecimento para a região 1. (a) Sem amortecimento; (b) Com amortecimento. ....	112
Figura 59 – Comparação dos diagramas de estabilidade. ....	113
Figura 60 – Diagrama de estabilidade com os pontos ensaiados. ....	115
Figura 61 – Sinal obtido pelo acelerômetro durante o ensaio à 800 RPM de rotação.....	115
Figura 62 – Sinal obtido no ensaio com $n=800$ RPM e $b=3$ mm. ....	116

Figura 63 – Espectro de frequências para o ensaio com $n=800$ RPM e $b=3\text{mm}$ .....	117
Figura 64 – Sinal obtido no ensaio com $n=1250$ RPM e $b=2,5\text{mm}$ . .....	117
Figura 65 – Espectro de frequências para o ensaio com $n=1250$ RPM e $b=2,5\text{mm}$ .....	118
Figura 66 – Sinal obtido no ensaio com $n=1250$ RPM e $b=3\text{mm}$ . .....	119
Figura 67 – Espectro de frequências para o ensaio com $n=1250$ RPM e $b=3\text{mm}$ .....	120
Figura 68 – Sinal obtido no ensaio com $n=1250$ RPM e $b=3,5\text{mm}$ . .....	120
Figura 69 – Espectro de frequências para o ensaio com $n=1250$ RPM e $b=3,5\text{mm}$ .....	121
Figura 70 – Parte real da FRF do corpo de prova.....	122
Figura 71 – Sinal obtido no ensaio com $n=2500$ RPM e $b=3\text{mm}$ . .....	122
Figura 72 – Espectro de frequências do ensaio com $n=2500$ RPM e $b=3\text{mm}$ .....	123
Figura 73 – Sinal obtido no ensaio com $n=3000$ RPM e $b=3\text{mm}$ . .....	124
Figura 74 – Espectro de frequências do ensaio com $n=3000$ RPM e $b=3\text{mm}$ .....	124
Figura 75 – Rugosidade do corpo de prova para os ensaios de validação.....	125
Figura 76 – Valor quadrático médio do sinal dos ensaios de validação.....	126

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores médios das forças obtidos pelo dinamômetro .....	92
Tabela 2 – Coeficientes das equações das forças de corte.....	92
Tabela 3 – Constantes de pressão específicas de corte e de aresta de corte. ....	93
Tabela 4 – Parâmetros modais dos pontos de análise da chapa .....	102
Tabela 5 – Parâmetros modais para a fresa e para o sistema de fixação. ....	108

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_e$	Penetração de trabalho.
$a_f$	Penetração de avanço.
$a_p$	Comprimento da aresta de corte.
A	Seção de usinagem.
[A]	Matriz dos coeficientes direcionais dinâmicos.
b	Profundidade de corte.
$b_{lim}$	Profundidade de corte axial crítica.
[B]	Matriz direcional das forças relativas ao processo de amortecimento.
c	Coefficiente de amortecimento do modelo.
$C_d$	Fator de forma do amortecimento.
$C_a$	Coefficiente de amortecimento axial.
$C_r$	Coefficiente de amortecimento radial.
$C_t$	Coefficiente de amortecimento tangencial.
D	Diâmetro da fresa.
f	Força externa aplicada no modelo.
$f_z$	Avanço por dente.
$F_a$	Força axial.
$F_c$	Força de corte.
$F_r$	Força radial.
$F_t$	Força tangencial.
$F_x$	Força na direção x.
$F_y$	Força na direção y.
$F_z$	Força na direção z.
$g(\phi_j)$	Função degrau unitário.
$G(\omega)$	Função de resposta em frequência.
h	Espessura do cavaco.
k	Coefficiente de rigidez do modelo.

$K_a$	Coeficiente de força de corte na direção axial.
$K_r$	Coeficiente de força de corte na direção radial.
$K_t$	Coeficiente de força de corte na direção tangencial.
$K_{sp}$	Coeficiente de indentação específico.
$L$	Comprimento da aresta alisadora do inserto.
$m$	Massa do modelo.
$n$	Velocidade de rotação da fresa.
$n_p$	Pontos simultâneos de análise.
$N$	Número de dentes da fresa.
$S$	Área da secção transversal do material extrudado.
$[R]$	Matriz dos resíduos.
$T$	Período de passagem dos dentes.
$\dot{v}$	Vetor velocidade de vibração regenerativa.
$V_c$	Velocidade de corte.
$V_f$	Velocidade de avanço.
$W$	Largura de desgaste da ferramenta.
$x(t)$	Deslocamento do modelo na direção do movimento.
$\dot{x}(t)$	Velocidade do modelo na direção do movimento.
$\ddot{x}(t)$	Aceleração do modelo na direção do movimento.
$\gamma$	Ângulo de inclinação dos insertos.
$\epsilon$	Diferença de fase entre as odulações atual e anterior.
$\zeta$	Fator de amortecimento.
$\mu$	Coeficiente de atrito de Coulomb.
$\phi$	Ângulo instantâneo de imersão do inserto.
$\omega_n$	Frequência natural do sistema.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	17
1.1	OBJETIVOS .....	20
1.2	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	20
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	22
2.1	O PROCESSO DE FRESAMENTO .....	22
2.1.1	<b>Formação do Cavaco</b> .....	23
2.1.2	<b>Operações Básicas do Fresamento</b> .....	25
2.1.3	<b>Tipos Fundamentais de Fresamento</b> .....	25
2.1.4	<b>Parâmetros de Usinagem</b> .....	27
2.2	FORÇAS DE CORTE NO FRESAMENTO .....	29
2.2.1	<b>Corte ortogonal</b> .....	30
2.2.2	<b>Corte oblíquo</b> .....	32
2.3	VIBRAÇÕES NO FRESAMENTO .....	35
2.3.1	<b>Vibração Livre</b> .....	37
2.3.2	<b>Vibração Forçada</b> .....	39
2.3.3	<b>Vibração Regenerativa</b> .....	43
2.4	ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL .....	44
2.4.1	<b>Função Resposta em Frequência (FRF)</b> .....	47
2.4.2	<b>Parâmetros Modais (Método Peak Picking)</b> .....	49
<b>3</b>	<b>EMBASAMENTO TEÓRICO</b> .....	50
3.1	FORMULAÇÃO DO DIAGRAMA DE ESTABILIDADE NO FRESAMENTO .....	56
3.1.1	<b>Processo de Amortecimento</b> .....	65
3.1.2	<b>Formulação com múltiplos pontos de análise</b> .....	71

<b>4</b>	<b>METODOLOGIA EXPERIMENTAL</b> .....	74
4.1	MATERIAIS .....	74
4.2	MÉTODOS .....	78
<b>4.2.1</b>	<b>Determinação das Constantes de Pressão específica de Corte</b> .....	78
<b>4.2.2</b>	<b>Determinação dos Coeficientes de Amortecimento</b> .....	80
<b>4.2.3</b>	<b>Teste modal</b> .....	83
4.2.3.1	Medição da excitação e resposta do sistema .....	86
<b>4.2.4</b>	<b>Determinação dos parâmetros modais</b> .....	86
<b>4.2.5</b>	<b>Determinação do diagrama de estabilidade</b> .....	88
<b>4.2.6</b>	<b>Validação do diagrama de lóbulos</b> .....	91
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	92
5.1	DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE PRESSÃO ESPECÍFICAS DE CORTE .....	92
5.2	DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO .....	93
5.3	ANÁLISE MODAL .....	94
<b>5.3.1</b>	<b>Corpos de Prova</b> .....	95
<b>5.3.2</b>	<b>Fresa e sistema de fixação</b> .....	103
5.4	DETERMINAÇÃO DO DIAGRAMA DE ESTABILIDADE .....	108
5.5	VALIDAÇÃO DO DIAGRAMA DE ESTABILIDADE POR MEIO DE ENSAIOS DE USINAGEM .....	114
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	128
<b>7</b>	<b>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b> .....	131
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	132

## 1 INTRODUÇÃO

Segundo Clark (1991), no ambiente competitivo e repleto de inovações gerado entre as empresas, os fabricantes que estiverem preparados para desenvolverem novos produtos de forma eficiente terão importante vantagem competitiva.

Dentro do contexto de desenvolvimento, uma importante e crescente área da indústria automobilística está na fabricação de motores de combustão interna. O bloco, o qual é responsável por dar estrutura ao motor, é desenvolvido de modo a atender as exigências de projeto com a máxima produtividade e mínimo custo.

Em uma linha de produção de componentes de motores, a usinagem representa uma parcela de alto custo e tempo significativos. O fresamento de topo é um dos mais importantes processos utilizados para usinar blocos de motores devido à sua versatilidade.

Apesar dos avanços recentes na tecnologia de usinagem, a produtividade no fresamento pode ser reduzida devido às limitações do processo. O aumento da produtividade durante a usinagem se dá principalmente através do aumento da quantidade de material removida por unidade de tempo. Maiores velocidades de corte e avanços aumentam a produtividade, mas elevam a temperatura do contato, o que acelera o desgaste da ferramenta. Por outro lado, em baixa velocidade de corte o amortecimento passa a ter uma influência significativa sobre o processo.

Segundo Hurmuzlu (2001), a precisão da peça depende do movimento entregue pela máquina-ferramenta sob cargas estáticas e dinâmicas. As deformações estáticas acontecem devido ao carregamento constante no tempo devido à massa da peça, da ferramenta ou devido à força do processo (força de corte) e força de fixação da peça (WECK, 2006).

Com relação às características dinâmicas, a vibração pode ser livre, forçada ou auto-excitada. A vibração durante os processos de usinagem é um dos principais problemas responsáveis pela limitação na produtividade da indústria (ALTINTAS, 2000).

A vibração do sistema pode levar à variação no tempo do posicionamento relativo entre ferramenta e peça. Vibrações com amplitudes excessivas podem causar vários distúrbios no

processo de usinagem, como a redução da vida útil, ou em alguns casos, a quebra da ferramenta de corte, a redução da qualidade superficial e ainda, em casos extremos, danificar o eixo-árvore da máquina-ferramenta (ALTINTAS, 2000).

Em estruturas de baixa rigidez dinâmica dois problemas principais podem ocorrer: um deles é a diminuição da qualidade superficial e o aumento do erro de forma devido à vibração forçada. O outro é uma instabilidade durante o processo de usinagem, conhecido como vibração regenerativa. Se as condições de usinagem não forem selecionadas adequadamente, o processo pode resultar em redução da qualidade da peça e da produtividade (ALTINTAS, 2000).

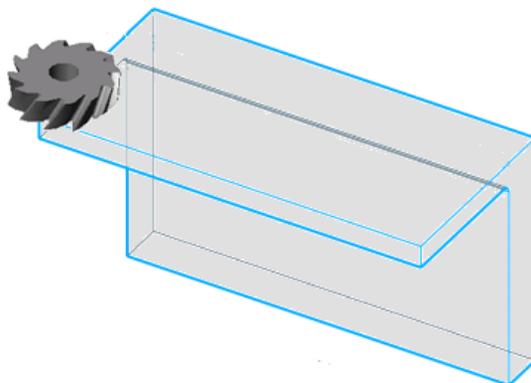
Em determinadas partes do bloco do motor, tais como visto na Figura 1, a estrutura de parede fina tem relativamente baixa rigidez comparada com o resto do corpo da peça, o que torna o processo sujeito à vibrações excessivas nestas regiões, causando limitações no processo de fresamento.

A estabilidade dinâmica de tais estruturas de baixa rigidez durante o processo de fresamento de topo pode ser estudada através de um modelo simplificado que possua condições de contorno e restrições semelhantes, como na Figura 2.

Figura 1- Bloco de motor com estrutura de baixa rigidez dinâmica



Figura 2 - Modelo representativo



No presente trabalho será utilizado um modelo como o visto na Figura 2, para que se possa analisar a estabilidade dinâmica de tais estruturas durante o processo de usinagem, e conseguir assim estender sua aplicação aos problemas decorrentes de instabilidade durante o fresamento de blocos de motor.

Nas análises, a peça a ser usinada é considerada como sendo a parte mais flexível do sistema, e a ferramenta é considerada como rígida. O material utilizado para a fabricação do modelo é aço SAE 1045 devido ao conhecimento prévio, através da literatura, de suas características e propriedades.

O estudo do processo de usinagem, como em qualquer outro processo de fabricação, é justificado pela marcante necessidade de assegurar uma eficiência adequada ao processo e, dessa forma, reduzir gastos de produção e aumentar a produtividade.

Conhecendo as limitações que são inerentes à peça e à ferramenta, podem-se determinar condições ótimas para o processo, considerando a dinâmica e mecânica da operação de corte e, assim, aumentar a taxa de remoção de material (MENDES, et al., 2008).

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral da presente dissertação consiste em analisar a estabilidade do processo de fresamento de topo de estruturas de baixa rigidez considerando os aspectos dinâmicos da estrutura, acompanhado de análises teóricas fundamentadas em métodos clássicos.

Portanto, este trabalho visa avaliar o aparecimento de vibração regenerativa durante o processo de usinagem sob diversas velocidades de rotação da fresa e profundidade de corte, e assim correlacionar os efeitos destas variáveis ao comportamento dinâmico da máquina através do diagrama de lóbulos de estabilidade, considerando o amortecimento do processo.

A análise será realizada considerando o processo de fresamento de topo. Para facilitar a análise, a peça será considerada como uma placa plana. Devido à necessidade de usinagem com baixa velocidade de corte, o amortecimento do processo será considerado nos cálculos para determinar os lóbulos de estabilidade.

## 1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A dissertação está estruturada da seguinte forma:

O capítulo 1 corresponde ao capítulo de introdução, onde são apresentados os objetivos desta dissertação, bem como a descrição do problema que motivou o desenvolvimento do estudo.

O capítulo 2 consta de uma revisão bibliográfica sobre os assuntos mais relevantes, com o objetivo de facilitar a compreensão do comportamento do sistema durante a formulação teórica e os ensaios experimentais.

O capítulo 3 aborda um breve histórico do estudo da vibração regenerativa no fresamento, além da formulação teórica para a determinação do diagrama de lóbulos de estabilidade.

No capítulo 4 serão apresentados os materiais, os equipamentos, os instrumentos de medição, os *softwares* e as metodologias de simulação e experimentais necessárias para o desenvolvimento e execução do trabalho.

No Capítulo 5 serão apresentadas as análises e discussões dos resultados obtidos através das simulações e ensaios experimentais descritos no capítulo anterior.

No Capítulo 6 serão mostradas as conclusões obtidas no presente trabalho.

No Capítulo 7 serão apresentadas sugestões para futuros projetos.

Por fim as referências bibliográficas utilizadas para a realização deste trabalho serão apresentadas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta um estudo dos assuntos mais relevantes com o objetivo de facilitar a compreensão e correlação entre as duas grandes áreas envolvidas neste trabalho, usinagem e análise dinâmica.

Desta forma, primeiramente os aspectos mais importantes da usinagem dos materiais; particularmente relacionados com o desgaste da ferramenta e a qualidade superficial, serão descritos. Em seguida, os fundamentos e o processo da análise dinâmica estrutural serão evidenciados.

### 2.1 O PROCESSO DE FRESAMENTO

Usinagem é o termo usado para descrever processos de fabricação onde uma camada de material, o cavaco, é removida da superfície de uma peça por uma ferramenta em forma de cunha (TRENT, et al., 2000).

O fresamento, ainda que complexo, é um dos processos de usinagem com maior emprego na indústria atual, devido a aspectos como alta taxa de remoção de material e produção de formas com boa precisão dimensional e geométrica, além de ser um processo de elevada flexibilidade, sendo utilizado na fabricação de superfícies planas, contornos, ranhuras e cavidades, entre outras (MARCELINO, et al., 2004).

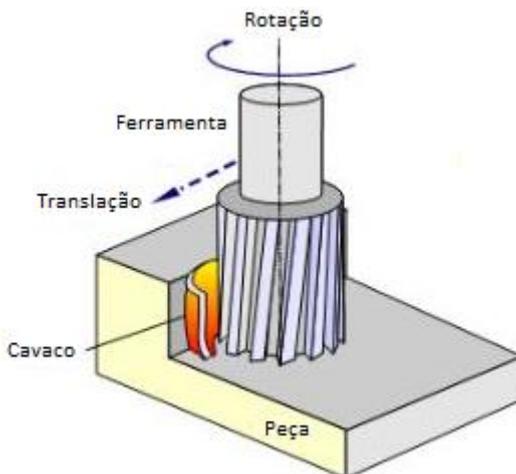
Segundo Diniz (2006), o fresamento é a operação de usinagem que tem as seguintes características:

- A ferramenta, chamada fresa, é provida de arestas cortantes dispostas simetricamente em torno de um eixo.
- O movimento de corte é proporcionado pela rotação da fresa ao redor de seu eixo.
- O movimento de avanço é geralmente feito pela própria peça em usinagem, que está fixada na mesa da máquina, o qual obriga a peça a passar sob a ferramenta em rotação, que lhe dá forma e dimensão desejadas.

Uma fresa pode apresentar as mais variadas formas, conferindo a esta operação um caráter versátil em termos de geometrias possíveis de serem geradas (SHAW, 2004).

No fresamento, a remoção do sobremetal da peça é feita pela combinação de dois movimentos, realizados ao mesmo tempo a fim de dar a esta uma forma e acabamentos desejados, como mostrado na Figura 3. Um dos movimentos é o de rotação da ferramenta, o outro movimento é o da mesa, onde é fixada a peça a ser usinada. Sendo assim tem-se uma máquina elaborada para execução facilitada de peças complexas (SCHMITZ, et al., 2008).

Figura 3 - Movimentos realizados no fresamento.



Fonte:

<http://engenhariadeproducao081.blogspot.com.br/2009/10/fresadora.html>

### 2.1.1 Formação do Cavaco

O cavaco é definido como uma porção de material removido da peça pela ferramenta, caracterizando-se por apresentar forma geométrica irregular (FERRARESI, 1977). O processo de formação do cavaco influencia diversos fatores relacionados à usinagem dos metais, tais como o desgaste de ferramenta e suas causas, os esforços de corte, o calor gerado na usinagem, entre outros.

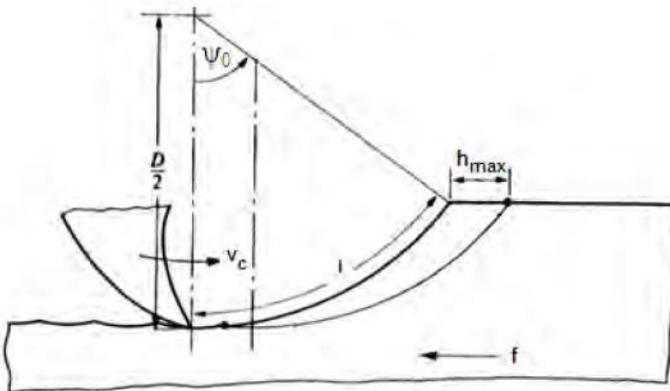
Uma característica importante do processo de fresamento é o fato da espessura de corte ser variável no tempo, com a

progressão do ângulo de imersão da ferramenta na peça, à medida que esta rotaciona (ROSSI, 2008).

A formação do cavaco na operação de fresamento obedece ao mesmo mecanismo de formação de cavacos de outros processos de usinagem. Cumpre salientar, porém, que a forma do cavaco gerado no fresamento possui espessura de corte “h” variável.

De acordo com Shaw (2004), os cavacos do processo de fresamento são geralmente curtos e de segmentos descontínuos, que são decorrentes da geometria do processo. Segundo Altintas (2000), no fresamento a espessura instantânea do cavaco varia periodicamente como função da imersão da ferramenta variável com o tempo, como se observa na Figura 4.

Figura 4 - Geometria do cavaco.

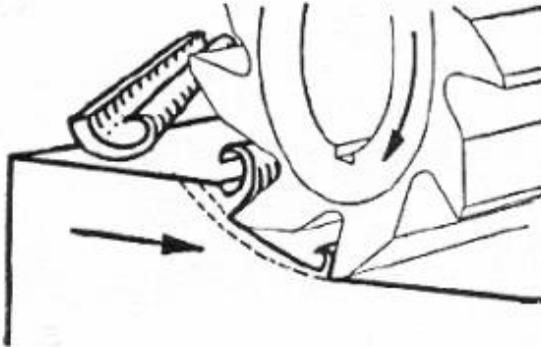


Fonte: (SHAW, 2004)

Segundo Stemmer (2001), a forma dos cavacos produzidos nos processos de usinagem pode variar devido a uma série de fatores, dentre eles o avanço, a profundidade e a velocidade de corte, geometria da ferramenta, material da peça, etc.



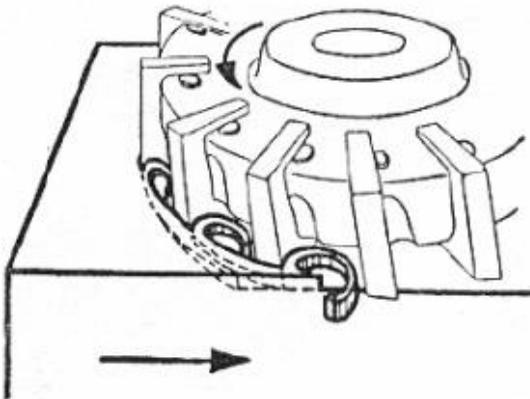
Figura 6 - Fresamento tangencial ou periférico.



Fonte: (FERRARESI, 1977).

- Fresamento frontal ou de topo: dentes ativos estão na superfície frontal da ferramenta, cujo eixo é perpendicular à superfície a ser usinada, conforme Figura 7.

Figura 7 - Fresamento frontal ou de topo.



Fonte: (FERRARESI, 1977)

### 2.1.4 Parâmetros de Usinagem

No fresamento, assim como nos demais processos de usinagem, existe uma série de importantes parâmetros de corte a considerar. Eles descrevem quantitativamente os movimentos, as dimensões e outras características da operação de corte.

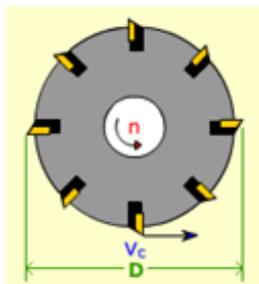
São diversos os parâmetros de usinagem que se deve conhecer na operação de fresamento. Entre eles tem-se:

- Velocidade de corte ( $V_c$ ): de acordo com Stemmer é a velocidade instantânea do ponto selecionado sobre o gume, no movimento de corte, em relação a peça (STEMMER, 2001). A velocidade de corte é, então, uma velocidade tangencial. Têm-se a seguinte relação:

$$V_c [m/min] = \frac{\pi \cdot D [mm] \cdot n [rpm]}{1000} \quad (2.1)$$

onde D é o diâmetro da fresa e n a velocidade de rotação do eixo-arvore, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 - Velocidade de corte ( $V_c$ ).



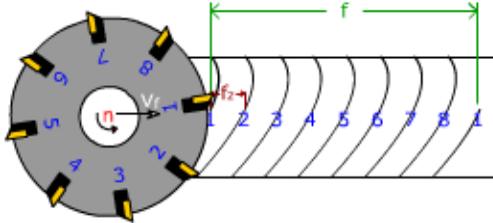
Fonte: [http://www.cimm.com.br/portal/noticia/exibir\\_noticia/7401-entenda-as-variaveis-e-parametros-de-corte](http://www.cimm.com.br/portal/noticia/exibir_noticia/7401-entenda-as-variaveis-e-parametros-de-corte)

- Velocidade de avanço ( $V_f$ ): segundo Stemmer é a velocidade instantânea do ponto, no movimento de avanço, em relação a peça (STEMMER, 2001). A direção da velocidade de avanço é, então, radial ao eixo da ferramenta. Têm-se a seguinte relação:

$$V_f [mm/min] = n [rpm] \cdot N \cdot f_z [mm/dente] \quad (2.2)$$

onde  $n$  é a velocidade de rotação do eixo-arvore,  $N$  é o número de dentes da fresa e  $f_z$  é o avanço por dente, conforme mostra a Figura 9.

Figura 9 - Velocidade de avanço ( $V_f$ ).

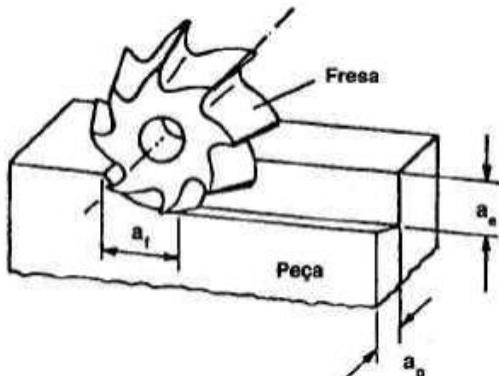


Fonte: [http://www.cimm.com.br/portal/noticia/exibir\\_noticia/7401-entenda-as-variaveis-e-parametros-de-corte](http://www.cimm.com.br/portal/noticia/exibir_noticia/7401-entenda-as-variaveis-e-parametros-de-corte)

A figura 10 mostra as grandezas de penetração no processo de fresamento conforme Stemmer (2001), onde:

- Profundidade de corte ( $a_p$ ): é a quantidade que a ferramenta penetra na peça, medida perpendicularmente ao plano de trabalho.
- Penetração de trabalho ( $a_e$ ): é a quantidade que a ferramenta penetra na peça, medida no plano de trabalho e perpendicular à direção de avanço.
- Penetração de avanço ( $a_f$ ): é a penetração da ferramenta na direção de avanço.

Figura 10 – Profundidade de corte, penetração de trabalho e de avanço.



Fonte: (DINIZ, et al., 2006)

## 2.2 FORÇAS DE CORTE NO FRESAMENTO

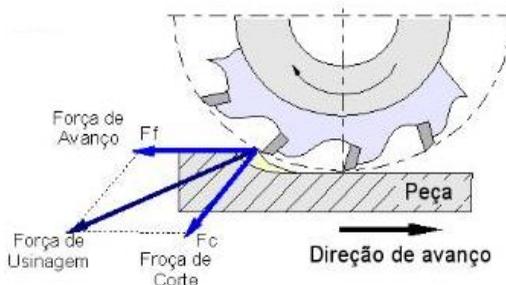
Prever as forças durante o processo de usinagem é importante para a otimização dos parâmetros de corte (LI, et al., 2001). Os atributos de desempenho do processo de usinagem, como estabilidade dinâmica e acabamento superficial são frequentemente estudados com base na análise das forças de corte (ZHENG, et al., 1996).

A qualidade dos produtos é uma das características mais importantes a se levar em conta durante o processo de fabricação. Para isso, o conhecimento das forças de usinagem é a base para o projeto de uma máquina ferramenta, para a determinação das condições de corte, para a avaliação da precisão de uma máquina ferramenta, e também como um critério para a determinação da usinabilidade de peças em certas condições de trabalho e na determinação da estabilidade do processo.

Além disso, é importante conhecer as correlações existentes entre estas forças de corte e os parâmetros de corte, tais como a velocidade de corte, a profundidade de corte e o avanço, para que estes possam ser selecionados da melhor maneira possível para cada tipo de operação.

Entre a peça e a ferramenta atuam forças como mostrada na Figura 11, as quais são responsáveis pela deformação local de material e conseqüente formação de cavaco (SCHMITZ, et al., 2008). As forças de corte podem ser obtidas conhecendo-se a geometria da ferramenta, as condições de corte e o material de trabalho.

Figura 11 – Força de usinagem



Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAY9wAl/slides-r2-pmr2202?part=4>

## 2.2.1 Corte ortogonal

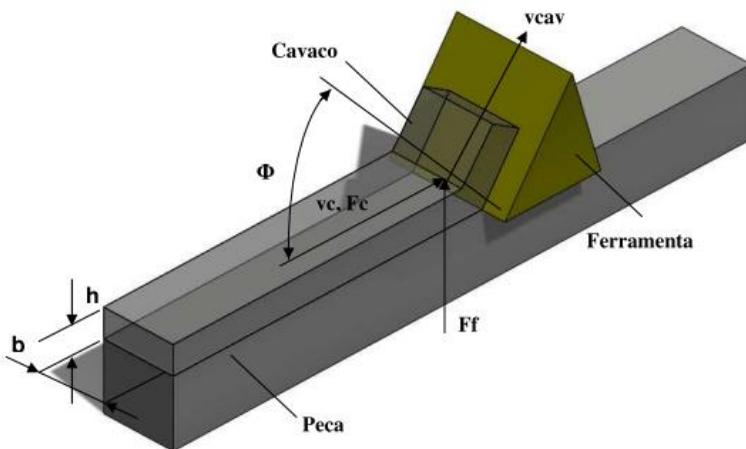
Apesar das operações de usinagens mais comuns serem tridimensionais e geometricamente complexas, um caso mais simples de corte bidimensional, como o ortogonal, pode ser usado para explicar a mecânica da remoção de material (BOOTHROYD, et al., 2005).

Entende-se a força de corte como uma pressão aplicada sobre uma área (SCHMITZ, et al., 2008). A porção de material que será removida da peça durante o processo, tornando-se cavaco, possui suas dimensões determinadas pela largura de usinagem ( $b$ ) e espessura de corte ( $h$ ).

No corte ortogonal a aresta de corte pode ser representada por uma reta normal à direção da velocidade de corte e à direção da velocidade de avanço, e conseqüentemente perpendicular à velocidade de corte, o que permite que a formação do cavaco seja considerada um fenômeno bidimensional, que ocorre em um plano normal à aresta de corte, chamado plano de trabalho (MACHADO, et al., 2009).

Desta forma, as forças de remoção serão exercidas somente no plano de trabalho, sendo definidas como força de corte ( $F_c$ ) e força de avanço ( $F_f$ ). A Figura 12 ilustra o processo de usinagem ortogonal.

Figura 12 - Geometria do Corte Ortogonal.



Fonte: Adaptado de (ALTINTAS, 2000).

Quando a aresta de corte entra em contato com a peça, uma parte do material ainda unido ao restante sofre uma deformação elástica, seguido de uma deformação plástica, que irão aumentando até atingir os limites de deformação do material, causando a ruptura (LEE, et al., 1951).

No corte ortogonal, pelo fato de ser um modelo bidimensional, as forças atuam em um único plano, o plano de trabalho. Isto permite que as forças sejam analisadas agindo sobre a peça, o cavaco e a ferramenta.

Um modelo aproximado para o cálculo das forças de corte pode ser visto na Figura 13 e dado por:

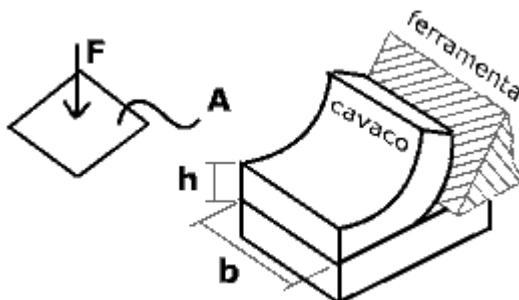
$$\begin{aligned} F_c &= K_c \cdot A \\ A &= b \cdot h \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde

- $F_c$  = força de corte [N]
- $K_c$  = pressão específica de corte [N/mm<sup>2</sup>]
- $A$  = seção de usinagem [mm<sup>2</sup>]
- $b$  = comprimento da aresta de corte [mm]
- $h$  = espessura do cavaco [mm].

$K_c$  pode ser considerada como uma função da espessura equivalente do cavaco e das propriedades dos materiais.

Figura 13 – Modelo de cálculo da força de corte



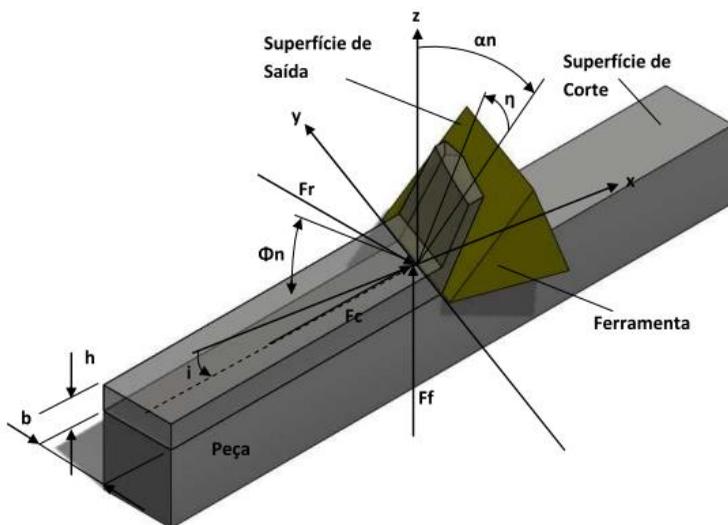
Fonte: [http://www.cimm.com.br/portal/material\\_didatico/4866-equacionamento-da-forca-de-corte#.UeMDjY2kp0o](http://www.cimm.com.br/portal/material_didatico/4866-equacionamento-da-forca-de-corte#.UeMDjY2kp0o)

## 2.2.2 Corte obluo

A maioria das ferramentas de corte comercial apresenta geometria oblua devido ao seu melhor desempenho para quebra de cavacos e distribuio de forças (ZOU, et al., 2009). Desta forma, a análise desta configurao se faz necessária para o entendimento do processo de usinagem. O modelo de corte obluo apresenta como principal diferença com o modelo de corte ortogonal o fato da velocidade de corte possuir um ângulo de inclinao. Isto altera os ângulos do plano de cisalhamento, de saída do cavaco e dos vetores de força resultante, os quais passam a possuir componentes nas três coordenadas cartesianas (SHAMOTO, et al., 1999).

A Figura 14 mostra os ângulos alterados no modelo de corte obluo, como o formado entre o plano de cisalhamento e o plano xy, chamado de ângulo de cisalhamento normal  $\Phi_n$ . O cavaco cisalhado se move ao longo da superfície de saída da ferramenta com um ângulo de escoamento  $\eta$ , medido de um vetor na superfície de saída, mas normal  a aresta de corte. O ngulo entre o eixo z e o vetor normal a superfície de saída da ferramenta  definido como ângulo de saída normal  $\alpha_n$ .

Figura 14 - Geometria do Corte Obluo.



Fonte: Adaptado de (ALTINTAS, 2000).

Segundo Altintas (2000), as componentes de força para o corte oblíquo podem ser derivadas como projeções da força de usinagem utilizando-se de relações geométricas. Se aplicado o modelo clássico proposto por Armarego et al. (1985), podem-se definir as expressões do diferencial de força como:

$$\begin{aligned} dF_t &= [K_{tc}h + K_{te}]dz, \\ dF_r &= [K_{rc}h + K_{re}]dz, \\ dF_a &= [K_{ac}h + K_{ae}]dz, \end{aligned} \quad (2.4)$$

na qual as constantes  $K_{tc}$ ,  $K_{rc}$  e  $K_{ac}$  são relacionadas com a ação do cisalhamento, enquanto que as constantes  $K_{te}$ ,  $K_{re}$  e  $K_{ae}$  são relacionadas com forças na aresta de corte.

Realizando uma transformação de coordenadas, as forças de corte podem ser expressas em termos das coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  como

$$\begin{aligned} dF_x &= -dF_t \cos \phi_j - dF_r \sin \phi_j, \\ dF_y &= +dF_t \sin \phi_j - dF_r \cos \phi_j, \\ dF_z &= +dF_a, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $\phi_j$  é o ângulo de imersão instantâneo do dente  $j$ .

Substituindo  $dz = b$  sobre o diferencial da força de corte e dividindo pelo período de dente ( $\phi_p = 2\pi/N$ ) obtemos a equação da força total média produzida por uma revolução como

$$\bar{F}_q = \frac{1}{\phi_p} \int_{\phi_i}^{\phi_f} dF_q d\phi, \quad q = x, y, z \quad (2.6)$$

onde  $z_1$  e  $z_2$  são os limites superior e inferior de contato axial da porção de corte.

Efetuada a integração das forças de corte instantânea, obtemos:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_x &= \left\{ \frac{Nbc}{8\pi} [K_{tc} \cos 2\phi - K_{rc} [2\phi - \sin 2\phi]] \right. \\
&\quad \left. + \frac{Nb}{2\pi} [-K_{te} \sin \phi + K_{re} \cos \phi] \right\}_{\phi_i}^{\phi_f}, \\
\bar{F}_y &= \left\{ \frac{Nbc}{8\pi} [K_{tc} [2\phi - \sin 2\phi] - K_{rc} \cos 2\phi] \right. \\
&\quad \left. - \frac{Nb}{2\pi} [K_{te} \cos \phi + K_{re} \sin \phi] \right\}_{\phi_i}^{\phi_f}, \\
\bar{F}_z &= \frac{Nb}{2\pi} [-cK_{ac} \cos \phi + K_{ae}\phi]_{\phi_i}^{\phi_f}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Em operações de fresamento com imersão total os ângulos de entrada e saída são 0 e  $\pi$ , respectivamente. Quando estas condições são aplicadas à Equação 2.7, as forças médias por período de dente são simplificadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_x &= -\frac{Nb}{4} K_{rc} c - \frac{Nb}{\pi} K_{re}, \\
\bar{F}_y &= +\frac{Nb}{4} K_{tc} c + \frac{Nb}{\pi} K_{te}, \\
\bar{F}_z &= +\frac{Nb}{\pi} K_{ac} c + \frac{Nb}{2} K_{ae}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

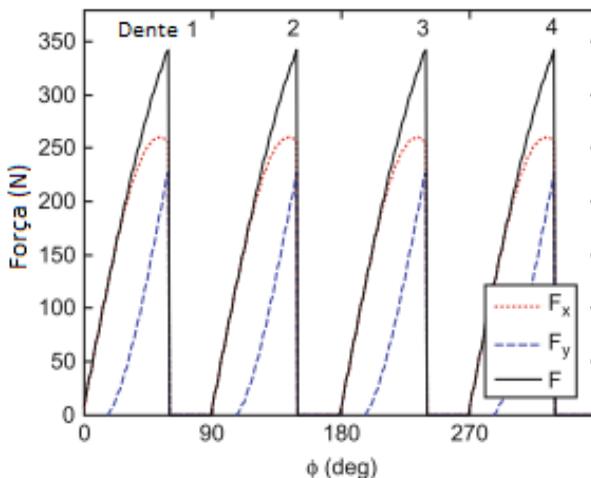
Os valores das constantes podem ser obtidos utilizando procedimentos experimentais, aplicando-se a Equação 2.8. Para encontrar as forças de corte ( $F_c$ ) e normal ( $F_r$ ) é preciso relacionar estas com as forças medidas fisicamente, ou seja, paralelas aos eixos longitudinal ( $x$ ) e transversal ( $y$ ) da máquina-ferramenta utilizando-se, por exemplo, um dinamômetro.

Apesar dos valores das forças de usinagem possuírem relações lineares com a velocidade de avanço nesta análise, existem não-linearidades nestas relações (FU, et al., 1984). Estes efeitos são tipicamente descritos com equações exponenciais, como no caso das equações de Kienzle (FERRARESI, 1977) (STEMMER, 1995).

A Figura 15 mostra as forças de corte ao longo de uma rotação. Observa-se a presença de quatro dentes na fresa utilizada, igualmente espaçados em intervalos de  $90^\circ$ . Cada um

dos dentes está envolvido no corte de uma faixa  $60^\circ$ . Para as restantes  $30^\circ$  as forças são iguais a zero.

Figura 15 – Força de corte para uma rotação.



Fonte: (SCHMITZ, et al., 2008)

Pode-se notar que, como a espessura do cavaco aumenta à medida que o ângulo de corte aumenta, os níveis de força também crescem. Após  $60^\circ$  os níveis caem para zero até o próximo dente entrar em contato com a peça. Como pode ser visto então, as forças durante o fresamento são periódicas (ALTINTAS, 2000).

## 2.3 VIBRAÇÕES NO FRESAMENTO

De acordo com Kelly (2000), vibração é o movimento de um ponto oscilando em torno de um ponto de referência. A oscilação irá ocorrer quando, após a perturbação atuar, o sistema apresentar a tendência a retornar à sua posição de equilíbrio.

A nossa estrutura de interesse é uma ferramenta de corte de certa geometria ligada à qualquer peça de trabalho, na qual podem ser representados como corpos combinados. O processo de usinagem dos materiais muitas vezes é considerado como um

processo estável. Entretanto, este processo é fortemente influenciado pela dinâmica envolvida na execução do corte, no qual fenômenos vibratórios ocorrem, desencadeando a variação nas forças produzidas durante a usinagem (TOBIAS, 1965).

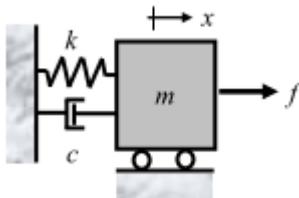
Vibrações durante a usinagem causam danos principalmente ao acabamento superficial da peça, além de causar avarias na ferramenta de corte, e quando ocorrem de forma persistente por longos períodos podem danificar a integridade e reduzir a vida útil dos rolamentos do eixo-árvore da máquina-ferramenta (KING, 1985).

De acordo com Cheng (2008), a vibração dos corpos pode ser dividida em três categorias principais: vibrações livres, forçadas, e auto-excitadas ou regenerativas. A vibração livre ocorre quando o movimento resulta apenas de condições iniciais. Como exemplo pode-se citar a excitação do sistema no fresamento com ferramentas com dentes retos. Neste caso, o sistema é excitado com uma excitação tipo impulsiva e vibra livremente, tendendo a desaparecer com o tempo, até o próximo dente da fresa entrar no processo. Entretanto, quando o fresamento for realizado com uma fresa de dentes helicoidais, a força de corte tende a se comportar como uma força harmônica, conseqüentemente, o resultado de deslocamento relativo entre peça e ferramenta também se comportará como tal. Já a vibração regenerativa, também conhecida como vibração auto-excitada, aparece na usinagem de metais, dependendo da rigidez dinâmica do sistema, quando a largura do cavaco é muito grande. Sob tais circunstâncias, as vibrações começam a crescer rapidamente (TLUSTY, 2000).

A análise dinâmica de estruturas com geometrias complexas é um problema de engenharia que apresenta um alto grau de dificuldade para obtenção de resultados. As propriedades dinâmicas de um sistema mecânico qualquer podem ser convenientemente representadas por propriedades fundamentais: massa, rigidez e amortecimento (REZENDE, 2006).

Com a aplicação das leis do movimento e de hipóteses simplificadoras pode-se mostrar que a representação mais simples de um sistema dinâmico é um sistema com um grau de liberdade, conforme Figura 16. Segundo Rao (2008), o modelo matemático é representado por

Figura 16 – Sistema de um grau de liberdade.



Fonte: Adaptado de (RAO, 2008).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f, \quad (2.9)$$

onde  $m$  é a massa do modelo [Kg];

$c$  é o coeficiente de amortecimento do modelo [Ns/m];

$k$  é o coeficiente de rigidez do modelo [N/m];

$x = x(t)$  é o deslocamento da massa  $m$  na direção do movimento [m];

$\dot{x} = \dot{x}(t)$  é a velocidade da massa  $m$  na direção do movimento [m/s];

$\ddot{x} = \ddot{x}(t)$  é a aceleração da massa  $m$  na direção do movimento [m/s<sup>2</sup>];

$f$  é a força externa aplicada na massa  $m$  na direção do movimento [N].

### 2.3.1 Vibração Livre

A vibração livre ocorre quando o movimento resulta apenas de condições iniciais, não havendo nenhuma causa externa atuando durante o mesmo. As vibrações livres são causadas por um impulso de força simples, sendo facilmente amortecida. O movimento de um pêndulo é um exemplo de vibração livre (RAO, 2008).

O estudo da vibração livre é feito a partir da Eq.9, tornando nula a força externa aplicada, isto é, com  $f(t) = 0$  (THOMSON, 1997). Portanto, têm-se:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (2.10)$$

A Equação 2.10 é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem. A solução geral possui a forma

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{\lambda_2 t} \quad (2.11)$$

para  $\lambda_1 = \lambda_2$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes da equação característica do problema, dada por

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0. \quad (2.12)$$

Resolvendo a equação algébrica obtêm-se:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - \bar{c}^2}}{2m}, \quad (2.13)$$

onde definiu-se o coeficiente de amortecimento crítico  $\bar{c}$  como sendo

$$\bar{c} = 2\sqrt{mk}. \quad (2.14)$$

A solução da equação diferencial para este caso depende do tipo de amortecimento do sistema. Existem três casos possíveis de amortecimento. Para melhor identificar cada um destes três tipos de sistemas, pode-se definir um parâmetro adimensional denominado fator de amortecimento, dado pela razão

$$\zeta = \frac{c}{\bar{c}}. \quad (2.15)$$

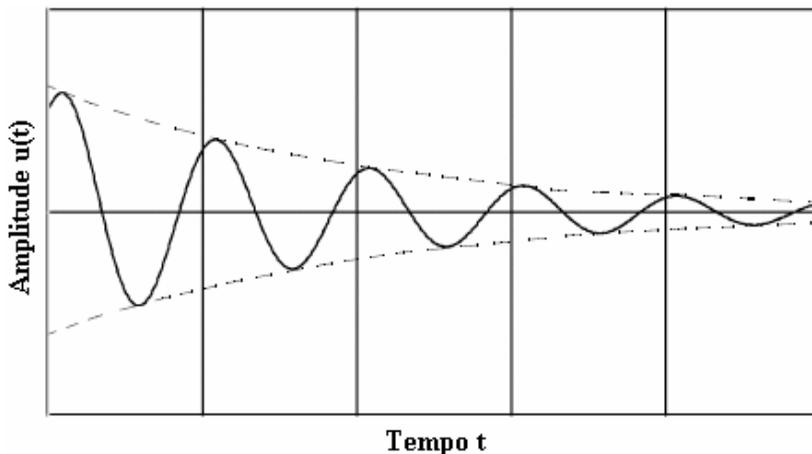
**Amortecimento Crítico:** Ocorre quando o coeficiente de amortecimento do sistema é igual ao amortecimento crítico. Para um sistema criticamente amortecido, a solução da equação do movimento é uma curva de decaimento exponencial com nenhuma oscilação.

**Super-amortecimento:** Um sistema é superamortecido quando  $c > \bar{c}$  e, neste caso, nenhum movimento oscilatório ocorre até que a estrutura retorne à sua posição de equilíbrio.

**Sub-amortecimento:** O caso de amortecimento mais comum é o sub-amortecido onde  $c < \bar{c}$ . Nestes casos a amplitude de vibração reduz a cada período seguindo um decaimento exponencial que é função do fator de amortecimento (REZENDE, 2006). Este comportamento está mostrado na Figura

17. A vibração é mais rapidamente dissipada em sistemas com maiores fatores de amortecimento.

Figura 17 - Resposta de um sistema submetido à vibração livre amortecida.



Fonte: (REZENDE, 2006).

Para o caso de vibração livre não amortecida, define-se a frequência natural como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}]. \quad (2.16)$$

### 2.3.2 Vibração Forçada

Segundo Cheng (2008), a vibração forçada ocorre quando uma força externa contínua que varia periodicamente produz uma resposta com a mesma frequência que a da excitação. A vibração forçada é tipicamente analisada no domínio da frequência. Isso enfatiza a magnitude e permite a identificação das frequências naturais.

Este tipo de vibração torna-se significativa quando a frequência de excitação está perto de uma frequência natural do sistema. Esta condição é chamada de ressonância (EWINS, 2000). A usinagem de estruturas com baixa rigidez utilizando

frequências próximas da ressonância, pode conduzir a erros significativos na geometria da peça de trabalho, embora o processo permaneça estável.

A forma mais simples de um movimento vibratório é a forma harmônica ficando perfeitamente caracterizado pela sua amplitude e frequência (EWINS, 2000). Neste caso a equação do movimento é descrita por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \omega t , \quad (2.17)$$

sendo F a amplitude de excitação e  $\omega$  a frequência de excitação.

Um método que pode ser usado para solucionar a EDO envolve aplicar o método dos coeficientes indeterminados. A solução desta equação diferencial pode ser escrita como a soma de duas parcelas, de forma que

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (2.18)$$

Segundo Thomson (1997), a solução homogênea  $x_h(t)$  corresponde à solução da equação quando  $F(t) = 0$  e representa um termo transitório provocado pela resposta livre, já a solução permanente  $x_p(t)$  depende da frequência de excitação e é uma resposta em regime permanente.

Para uma excitação harmônica a solução particular é dada por

$$x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.19)$$

ou

$$x_p(t) = X \sin(\omega t + \theta) , \quad (2.20)$$

onde  $X = \sqrt{A^2 + B^2}$  e  $\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$ .

A equação diferencial do movimento deve ser satisfeita pela solução particular. Substituindo  $x_p(t)$  e suas derivadas na Equação 2.17, temos que

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 A \sin \omega t - \omega^2 B \cos \omega t) \\ + c(\omega A \cos \omega t - \omega B \sin \omega t) \\ + k(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = F \sin \omega t . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Igualando-se os coeficientes em seno e cosseno de ambos os lados e resolvendo o sistema, chegamos à solução particular

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.22)$$

e

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}. \quad (2.23)$$

Sendo  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$  a razão entre as frequências de excitação e natural não-amortecida, e  $a = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$  o fator de ampliação, que é função da razão  $r$  e do fator de amortecimento  $\zeta$ , têm-se que

$$x_p(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sin(\omega t + \theta), \quad (2.24)$$

onde

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2}. \quad (2.25)$$

Toda força contínua periódica pode ser decomposta segundo a série de Fourier. Nesta série, a força periódica é representada por uma soma de forças harmônicas, utilizando o Princípio da Superposição dos Efeitos. Desta forma, basta estudar o caso da força de excitação harmônica, para que o caso geral de força periódica possa ser considerado como uma simples extensão.

Segundo Rao (2008), uma força periódica pode ser expressa em Séries de Fourier. A equação do movimento do sistema que sofre a ação de uma força periódica é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t, \quad (2.26)$$

com

$$\begin{aligned}
 a_j &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \cos j\omega t \, dt \quad j = 0, 1, 2, \dots \\
 b_j &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} F(t) \sin j\omega t \, dt \quad j = 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Utilizando-se o Princípio da Superposição dos Efeitos a Equação 2.26 pode ser decomposta nas equações

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = \frac{a_0}{2}, \tag{2.28}$$

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t, \tag{2.29}$$

$$m\ddot{x}_3 + c\dot{x}_3 + kx_3 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t, \tag{2.30}$$

tal que a solução particular da equação diferencial pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 x_p &= \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos(j\omega t + \theta_j) \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j/k}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin(j\omega t + \theta_j),
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

com

$$\theta_j = -\tan^{-1} \frac{2j\zeta r}{1-j^2r^2}. \tag{2.32}$$

Para a determinação da resposta de um sistema de um grau de liberdade sob a ação de uma força não periódica, os métodos utilizados são:

- Integral de Convolução;
- Transformada de Laplace;
- Integração Numérica.

### 2.3.3 Vibração Regenerativa

A vibração forçada é realizada por uma fonte externa e independente do movimento. Porém, existem inúmeros casos práticos em que as forças que excitam o sistema são dependentes da cinemática do movimento. Este tipo de sistema é conhecido como auto-excitado, uma vez que o próprio movimento é responsável pela excitação. (CHENG, 2008)

Um sistema dinâmico linear é dito estável se sua resposta transiente converge ao equilíbrio. Se este movimento divergir o sistema é dito instável, ou seja, com o passar do tempo as amplitudes em regime transiente aumentam. Um sistema mecânico pode se tornar instável se houver alimentação de energia ao sistema por auto-excitação (SHIN, et al., 1999).

As vibrações auto-excitadas ou regenerativas ocorrem devido a um mecanismo de auto-excitação durante as operações de usinagem. Isto se dá devido ao sistema não conseguir acompanhar a dinâmica imposta pela operação de corte (BUDAK, et al., 2010). A espessura variável do cavaco regula a força de corte, que, por sua vez, afeta as vibrações subsequentes da ferramenta. O resultado é a possibilidade de instabilidade.

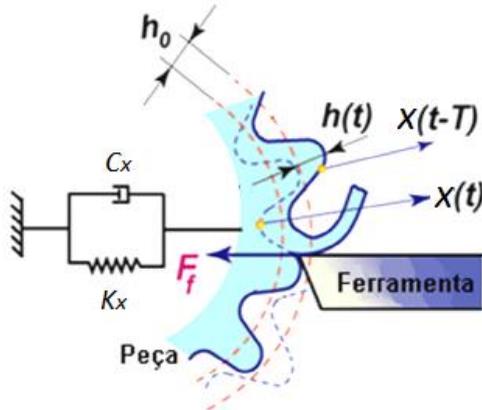
De acordo com Altintas (2000), utilizando o modo de usinagem ortogonal para simplificar o entendimento do fenômeno da vibração regenerativa, pode-se considerar que a espessura dinâmica do cavaco pode ser determinada utilizando a seguinte equação:

$$h(t) = h_0 - [x(t) - x(t - T)], \quad (2.33)$$

onde  $h_0$  é a espessura do cavaco teórica e  $[x(t) - x(t - T)]$  é a espessura dinâmica do cavaco produzida pela vibração no tempo

atual  $t$  e pela rotação anterior  $T$ . A Figura 18 ilustra a vibração regenerativa.

Figura 18 - Vibração regenerativa no corte ortogonal.



Fonte: Adaptado de (ALTINTAS, 2000).

Assumindo que o sistema possui um grau de liberdade, as características dinâmicas da estrutura podem ser escritas como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = K_f b [h_0 - x(t) + x(t - T)]. \quad (2.34)$$

A Equação 2.34 mostra que a força de avanço depende da constante de corte  $K_f$ , da largura de corte  $b$  e da espessura do cavaco. Como a espessura do cavaco varia em função do tempo, a força irá oscilar de forma proporcional (ALTINTAS, et al., 1995).

Com o estudo da vibração no fresamento podemos aplicar as informações dinâmicas para desenvolver diagramas de lóbulos de estabilidade que descrevem a largura do cavaco em função da velocidade de rotação. (HURMUZLU, et al., 2001)

## 2.4 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Em um sentido amplo, poderíamos dizer que a análise modal é um processo por meio do qual descrevemos uma estrutura em termos das propriedades do material (em massa, de amortecimento, e rigidez), e as condições de fronteira da

estrutura (CHENG, 2008). Os resultados da análise modal indicam as frequências e modos que a estrutura naturalmente tende a vibrar.

De acordo com He et al. (2001), cada modo é definido por uma frequência natural, amortecimento modal, e um modo de vibração, os quais são usados para formulação de um modelo matemático do comportamento dinâmico do sistema.

**Frequências Naturais:** As frequências naturais de uma estrutura são as frequências que a estrutura naturalmente tende a vibrar se esta for submetida a uma perturbação.

**Amortecimento modal:** Amortecimento modal é definido como a taxa de amortecimento crítico para cada modo. Amortecimento crítico é o menor amortecimento que faz com que um sistema retorne à sua posição de equilíbrio sem oscilação.

**Modos de Vibração:** A forma deformada que uma estrutura assume a uma frequência natural específica de vibração é denominada de modo de vibração. Cada modo de vibração é associado com uma frequência natural específica.

As frequências naturais, o amortecimento modal e os modos de vibração são funções das propriedades estruturais e das condições de contorno.

A análise modal pode ser realizada através de dois processos (EWINS, 2000). O primeiro é denominado de Análise Modal Teórica e consiste na formulação de um modelo matemático da estrutura em estudo através de uma técnica de discretização, na qual o Método dos Elementos Finitos é largamente utilizado na obtenção das matrizes físicas de massa e rigidez da estrutura. Estes resultados podem ser posteriormente utilizados na obtenção de níveis de resposta em carregamentos dinâmicos conhecidos, na determinação de características de resposta em frequência e impulsiva e na correlação com dados experimentais.

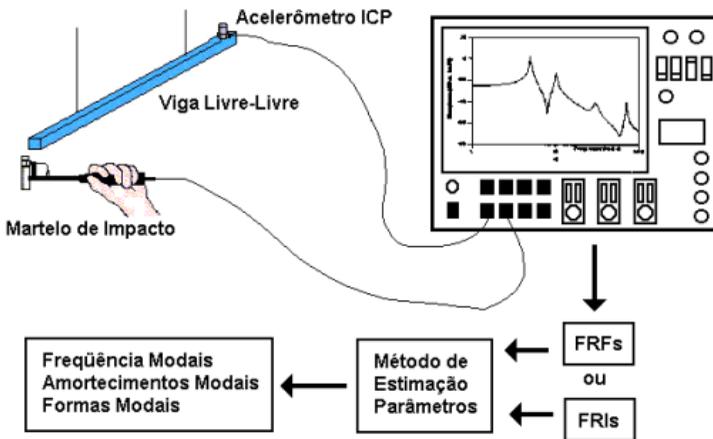
O segundo processo é denominado de Análise Modal Experimental que, através de dados experimentais, busca determinar as frequências naturais, fatores de amortecimento modais e modos de vibração. Dentre as aplicações da análise modal experimental, a mais comum é a validação de um modelo teórico para uma dada estrutura. Através de ensaios experimentais são obtidas as características da resposta do sistema, que são geralmente dadas através de Funções de Resposta em Frequência (MAIA, et al., 1997).

O método da análise modal experimental consiste em excitar a estrutura de teste em um ou vários pontos e medir simultaneamente os sinais de força de excitação e os de resposta nos pontos considerados.

As formas mais usuais de excitação em análise modal utilizam *shaker* ou um martelo de impacto. A resposta de uma estrutura à excitação é obtida via sensor, conhecido como acelerômetro, o qual converte vibração mecânica em um sinal elétrico (DOVEL, 1989).

Os históricos temporais dos sinais de excitação e resposta são enviados a um analisador de sinais ou computador, que estima as Funções de Resposta em Frequência (FRF) entre os pontos considerados. O teste modal é então concluído por meio de aplicação de métodos de identificação de parâmetros nas funções obtidas. Este processo de identificação de parâmetros é muitas vezes referida como ajuste de curva ou estimativa de parâmetros (CRUZ, 2006). Esta sequência é vista na Figura 19.

Figura 19 – Obtenção dos parâmetros modais.



Fonte: (CRUZ, 2006).

Segundo Schmitdberg et al. (1986), existem quatro hipóteses básicas, nas quais se fundamenta a Análise Modal Experimental, para o estudo de qualquer sistema estrutural:

1) A estrutura é linear. A resposta da estrutura a qualquer combinação de forças, simultaneamente aplicadas, é a soma das respostas individuais de cada uma das forças, atuando sozinha.

2) A estrutura é invariante no tempo. Os parâmetros modais são constantes no tempo.

3) A estrutura obedece o teorema de reciprocidade de Maxwell. Esse teorema estabelece relação direta dos deslocamentos generalizados com as forças generalizadas que os provocaram, atuantes em pontos distintos da estrutura, independente de sua ordem de aplicação.

4) A estrutura é observável. As medidas de entrada e de saída que são feitas contém informações suficientes para gerar um modelo de comportamento adequado para a estrutura.

### 2.4.1 Função Resposta em Frequência (FRF)

A análise de resposta em frequência é um método utilizado para determinar a resposta estrutural no estado permanente de uma estrutura sujeita a excitação oscilatória. Esta excitação pode ser da forma de forças aplicadas e/ou movimentos impostos ao sistema como deslocamentos, velocidades ou acelerações.

Na análise modal experimental a relação entrada-saída é calculada a partir da excitação e das respostas capturadas respectivamente nos pontos de excitação e de medição previamente selecionados (MAIA, et al., 1997). Neste caso, obtém-se um conjunto de funções complexas, em que cada função representa a função de transferência entre a força de excitação aplicada no ponto  $j$  e a resposta medida no ponto  $i$  da estrutura. As funções de transferências podem também ser avaliadas no domínio da frequência, levando à definição das chamadas Funções de Resposta em Frequência (SCHMITZ, et al., 2008).

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas, discretizadas em  $n$  graus de liberdade e sujeitas à ação de forças externas, pode ser efetuado através da seguinte equação matricial, que representa um sistema de  $n$  equações diferenciais de 2ª ordem (MENDES, et al., 2008):

$$[m]\ddot{u}(t) + [c]\dot{u}(t) + [k]u(t) = f(t). \quad (2.35)$$

As matrizes  $m$ ,  $c$  e  $k$ , representam, respectivamente, a matriz de massas, amortecimento e rigidez. Por sua vez os

vetores  $\ddot{u}(t)$ ,  $\dot{u}(t)$  e  $u(t)$  contêm as acelerações, velocidades e deslocamentos respectivamente.

Aplicando a transformada de Fourier a ambos os membros da Equação 2.35, temos

$$L[m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t)] = L[f(t)], \quad (2.36)$$

com a qual obtém-se uma nova expressão matricial que relaciona a resposta com a excitação:

$$\begin{aligned} (ms^2 + cs + k)X(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) \\ - cx(0) = F(s). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Considerando as condições iniciais nulas ( $\dot{x}(0) = x(0) = 0$ ), a Equação 2.37 pode ser expressa como

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s). \quad (2.38)$$

A solução anterior é uma função complexa, definida no domínio da frequência, que simplificada pode ser escrita na forma

$$G(s)X(s) = F(s), \quad (2.39)$$

em que  $X(s)$  e  $F(s)$  são vetores que representam as transformadas de Fourier da resposta e da excitação, respectivamente (MAIA, et al., 1997). A matriz  $G(s)$  relaciona-se com as matrizes  $m$ ,  $c$  e  $k$ , que caracterizam a estrutura, através da relação

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}, \quad (2.40)$$

onde  $s = i\omega$ . Assim temos que

$$G(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k}. \quad (2.41)$$

A Função de Resposta em Frequência  $G(\omega)$  é então uma matriz que relaciona a saída (resposta  $X$ ) do sistema por cada unidade de entrada (excitação  $F$ ), aplicada como função da frequência de excitação.

Existem três formas de representar a FRF, que dependem da variável utilizada na resposta:

- FRF de receptância – quando a variável de resposta é o deslocamento;
- FRF de mobilidade – quando a variável de resposta é a velocidade;
- FRF de aceleração – quando a variável de resposta é a aceleração.

#### **2.4.2 Parâmetros Modais (Método Peak Picking)**

O método básico no domínio da frequência, também conhecido como método da seleção de picos ou “Peak Picking”, é o método de identificação modal estocástico mais conhecido para identificar os parâmetros modais de estruturas sujeitas a cargas vibratórias (SCHMITZ, et al., 2008).

A primeira aplicação associada à utilização deste método remonta a 1964, na qual se apresenta um processo para avaliar frequências naturais de um edifício a partir da análise dos auto-espectros obtidos em ensaios de vibração (MAIA, et al., 1997).

Deve-se, no entanto, a Felber a formulação sistemática e implementação do método, tornando-o fácil de aplicar e implementar, permitindo a obtenção de bons resultados e uma boa interpretação física (EWINS, 2000).

O método baseia-se inicialmente no fato de que a FRF passa por valores extremos em torno das frequências naturais. A frequência com que esse valor extremo ocorre é uma boa estimativa para a frequência natural do sistema (SCHMITZ, et al., 2008). De tal maneira as frequências naturais são simplesmente determinadas a partir da observação dos picos nos gráficos das médias normalizadas da densidade espectral de potência (ANPSDs). Os ANPSDs são basicamente obtidos através da utilização das partes real e imaginária da FRF do sistema.

Esta abordagem fornece uma estimativa razoável da frequência natural e dos modos de vibrar, apenas se os modos forem bem separados. Para modos próximos elas podem apresentar alguma dificuldade na identificação e, mesmo que os modos possam ser identificados, a estimativa fica contaminada (BENDAT, et al., 1993).

### 3 EMBASAMENTO TEÓRICO

O conjunto máquina-ferramenta-peça apresenta características de rigidez, de amortecimento e de vibrações que são essenciais para a qualidade da operação de usinagem. Vibrações descontroladas no sistema podem causar desgaste prematuro da ferramenta de corte, deterioração da qualidade superficial, perda de precisão dimensional, danos aos componentes da máquina e ruídos indesejáveis e desagradáveis (KALPAKJIAN, et al., 2001).

A vibração em operações de usinagem é um fenômeno complexo que apresenta duas formas básicas: a vibração forçada e a vibração auto-excitada. A vibração forçada é geralmente causada por forças periódicas presentes na máquina, como forças provenientes de engrenagens, da instabilidade de componentes da máquina, de desalinhamentos e de motores e bombas. Além destas fontes de forças, a vibração forçada pode ser causada pelo contato periódico da ferramenta de corte com a superfície da peça.

A vibração regenerativa, também conhecida por *chatter*, é causada pelas interações do processo de remoção de cavaco, e ocorre quando o deslocamento relativo ferramenta-peça é tal que o corte é repentinamente interrompido (KALPAKJIAN, et al., 2001).

Taylor (1907) foi o primeiro a identificar o aparecimento de vibrações regenerativas na usinagem. Para ele este é um dos mais obscuros e delicados de todos os problemas, pois reduz a produtividade e a qualidade superficial. Por causa disto que ela tem sido alvo de inúmeros estudos ao longo dos anos.

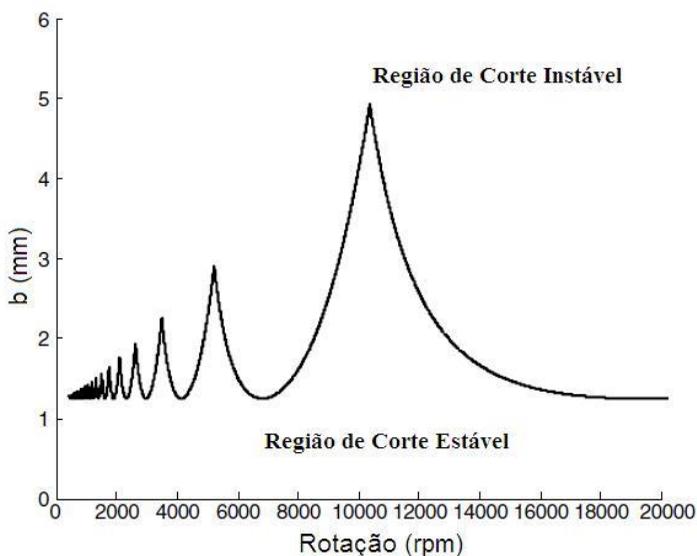
No entanto, os primeiros métodos de análise sobre os problemas de vibração foram desenvolvidos após os anos 50, quando inicialmente Tobias (1958) explicou e estabeleceu as bases da teoria da vibração regenerativa. Ele percebeu que a dinâmica da força de corte é uma função da variação da espessura do cavaco formado e da velocidade de alimentação.

Merritt (1965) mostrou, por meio de um modelo de retroalimentação, que a vibração regenerativa é um processo interativo com looping fechado entre a dinâmica estrutural e o processo de corte. Para uma determinada velocidade de corte, há uma profundidade de corte limite acima do qual o sistema se torna instável, e a vibração se desenvolve.

A partir de tais percepções, Tlusty et al. (1963) desenvolveu o diagrama bidimensional dos lobos de estabilidade para usinagem, o qual possibilita prever as condições de usinagem nas quais não ocorre vibração da ferramenta, como se observa na Figura 20.

Nesses diagramas, as profundidades de corte estáveis são calculadas usando modelos de vibração para diferentes rotações. Porém, esse modelo de estabilidade desenvolvido por Tlusty é apenas aplicável para usinagem de corte ortogonal, no qual os coeficientes direcionais são constantes.

Figura 20 – Diagrama dos lóbulos de estabilidade.



Fonte: (HURMUZLU, et al., 2001).

No entanto, para o fresamento esta formulação do diagrama de estabilidade de lóbulos não podia ser diretamente aplicada, pois as forças de corte e a espessura do cavaco são uma função do tempo e possuem uma natureza intermitente devido às características da ferramenta (SHIN, et al., 1999).

No final dos anos 60, Sridhar et al. (1968) desenvolveu a teoria de estabilidade para o processo de fresamento que se baseia na integração numérica das equações de usinagem, no

qual introduziram os coeficientes direcionais variando no tempo em sua análise de estabilidade utilizando uma matriz de transição de estado do sistema.

Optiz et al. (1970) aplicou a teoria da estabilidade do torneamento para o processo de fresagem através da aproximação dos coeficientes periódicos das equações de fresagem com os seus valores médios ao longo do intervalo entre a entrada e a saída do inserto da fresa.

Melhorias nestes modelos vieram mais tarde com a introdução de simulações no domínio do tempo. Tlusty et al. (1983) apresentaram um método para a determinação do diagrama considerando os coeficientes direcionais como dinâmicos, e introduzindo a simulação no domínio do tempo no processo. Como resultado, a dinâmica da peça é atualizada para todos os estágios do processo.

No fresamento, forças de corte são difíceis de definir com uma forma simples de análise, porque a espessura do cavaco é variável e o corte é descontínuo. Uma possível solução para este problema é expandir os coeficientes de corte em uma série de Fourier.

Utilizando as séries de Fourier e o teorema de Floquet, Minis et al. (1993) apresentaram uma formulação para a análise dos limites de estabilidade no fresamento. Após isto, fazendo uso do critério de Nyquist conseguiram resolver o problema numericamente.

Altintas et al. (1995) forneceram uma solução analítica alternativa. Eles desenvolveram uma abordagem analítica para a previsão dos limites de estabilidade através da extensão da teoria de Tlusty, que se baseia na física de corte ortogonal e do mecanismo de regeneração. O valor médio na expansão em série de Fourier dos coeficientes variando no tempo foi adotado. Esta abordagem frequentemente é utilizada para prever as condições de corte e gerar os diagramas de estabilidade de forma muito eficiente.

Altintas (2001) forneceu um modelo dinâmico utilizando a teoria de elementos finitos, no qual o perfil da superfície é gerado por interpolação linear, nos permitindo calcular uma representação 3D do diagrama de lóbulos de estabilidade. Nesse modelo o comportamento da peça é geralmente modelado através de análise de elementos finitos, no qual a geometria da

peça de trabalho e seu comportamento são atualizados durante os cálculos.

Nos modelos apresentados, o processo de amortecimento não foi levado em consideração, portanto só podem ser utilizadas em altas velocidades, isto é, a velocidade de eixo não pode ser menor do que quatro a cinco vezes a frequência natural dominante da estrutura. No entanto, muitos materiais de trabalho não podem ser cortados em alta velocidade, em que as leis de estabilidade falham devido ao processo de amortecimento desenvolvido no sistema (KURATA, et al., 2010).

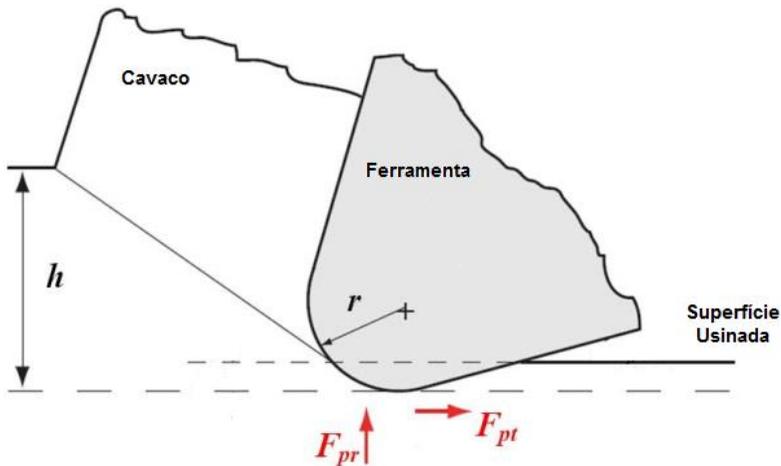
Amortecimento em operações de corte pode ser devido a duas fontes principais: amortecimento estrutural da máquina e processo de amortecimento resultante da interação ferramenta-peça (BUDAK, et al., 2010). Tlustý e Ismail (1983) demonstraram que o processo de amortecimento tem um efeito significativo sobre a estabilidade. O amortecimento estrutural pode ser facilmente identificado usando análise modal. No entanto, a identificação ou o modelamento do processo de amortecimento tem-se revelado muito difícil.

Devido a esta dificuldade no modelamento do processo de amortecimento, na maioria dos estudos, o efeito do processo de amortecimento é ignorado, o que conduz a erros significativos na estimativa do limite de estabilidade particularmente para velocidades de corte baixas (BUDAK, et al., 2010).

Minis et al. (1990) analisaram a dinâmica do fresamento considerando constante o processo de amortecimento, embora o efeito deste sobre a estabilidade não foi demonstrado.

Sisson e Kegg (1969) observaram que o contato entre a aresta de corte e o material de trabalho gera o efeito de amortecimento no processo de corte dinâmico em que a velocidade de corte é significativamente mais baixa do que a velocidade da vibração. Força de corte provoca dissipação de energia e aumenta a profundidade de penetração estável em baixa velocidade de corte. Eles propuseram que uma parte da espessura do cavaco, proporcional ao raio da aresta de corte, é comprimida sob a aresta da ferramenta na região mostrada na Figura 21.

Figura 21 – Forças de amortecimento.

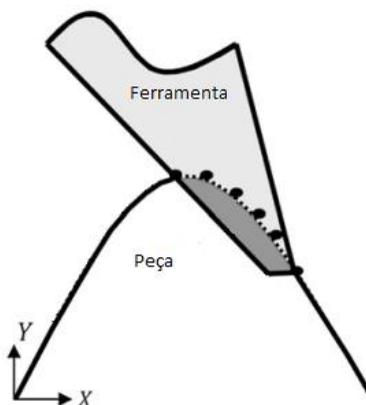


Fonte: Adaptado de (JIN, 2012).

Huang e Wang (2006) estudaram as diferentes fontes de amortecimento do processo, e chegou-se à conclusão de que a indentação na superfície da peça realmente é a principal fonte de dissipação de energia de vibração em velocidade de corte baixa.

Wu (1989) apresentou um modelo em que a interação entre a peça e a ferramenta é representada por ondulações na superfície da peça de trabalho. Neste modelo, a parcela de força relativa ao amortecimento do processo é assumida como proporcional ao volume do material extrudado sob a aresta de corte e a face de flanco (AHMADI, et al., 2012). Ao mesmo tempo, uma força de resistência é gerada pelo campo de tensões dentro do material de trabalho deslocado, como visto na Figura 22. Por conseguinte, é razoável assumir que a força de amortecimento do processo é igual à força de resistência.

Figura 22 – Área de indentação.



Fonte: Adaptado de (AHMADI, et al., 2010).

O modelo de Wu foi utilizado em simulações numéricas. Contudo, os cálculos numéricos do volume de extrusão requerem alta resolução de discretização das ondulações da superfície, o que torna uma tarefa que consome tempo. Além disso, o modelo não é linear uma vez que o volume extrudado é calculado apenas para a parte do ciclo vibratório em que a ferramenta se move para a peça de trabalho e que é igual a zero quando a ferramenta se move para longe da peça de trabalho (AHMADI, et al., 2010).

Modelos numéricos têm sido propostos para prever a força de amortecimento do processo considerando a sua não linearidade. No entanto, estes modelos não lineares, os quais são úteis principalmente para simulação computacional do processo, não podem ser facilmente utilizados na determinação do diagrama de estabilidade (LEE, et al., 1995).

Modelos lineares do processo de amortecimento têm sido desenvolvidos para estabelecer os lóbulos analiticamente. Estes modelos foram definidos empiricamente usando excitações sinusoidais em determinadas amplitudes ou adotando o modelo de força de recuo de Wu com o pressuposto de pequena amplitude de vibração (AHMADI, et al., 2011).

Chiou e Liang (1998) conseguiram aproximar o modelo não-linear de amortecimento por um modelo linear através de um modelo de amortecimento viscoso equivalente. A suposição de vibração de pequena amplitude foi feita nessa aproximação. Eles

utilisaram este modelo linear em seu desenvolvimento analítico para estabelecer os lóbulos de estabilidade.

Kurata et al. (2010) identificaram o coeficiente de amortecimento do processo através da análise inversa da vibração em torneamento, utilizando os resultados para prever o amortecimento no processo de fresamento e determinar o diagrama de lóbulos de estabilidade para o fresamento.

Alguns trabalhos têm sido desenvolvidos para se compreender o comportamento dinâmico de peças automotivas durante o fresamento, principalmente quando o chatter está presente. Le Lan et al. (2006) desenvolveram um método numérico para calcular diagramas de estabilidade e o adaptou ao caso particular da produção de peças de automóvel em que a vibração surge devido à falta de rigidez da peça de trabalho, porém o processo de amortecimento não foi levado em consideração.

### 3.1 FORMULAÇÃO DO DIAGRAMA DE ESTABILIDADE NO FRESAMENTO

O cálculo dos lóbulos de estabilidade baseia-se na física do processo de corte e do mecanismo de regeneração. A análise da estabilidade do sistema relaciona a rotação da fresa e a profundidade de corte.

O método presente nesta seção é uma adaptação do método desenvolvido por Shin et al. (1999). Na formulação dos estudos, as operações de fresamento são executadas considerando a ferramenta muito mais rígida do que a peça, enquanto que o método de Shin enfoca no estudo das vibrações devido à ferramenta.

As forças de corte podem excitar os modos de vibração, causando deslocamentos em todas as três direções (x,y,z) como mostrado na Figura 23 (ALTINTAS, 2000).

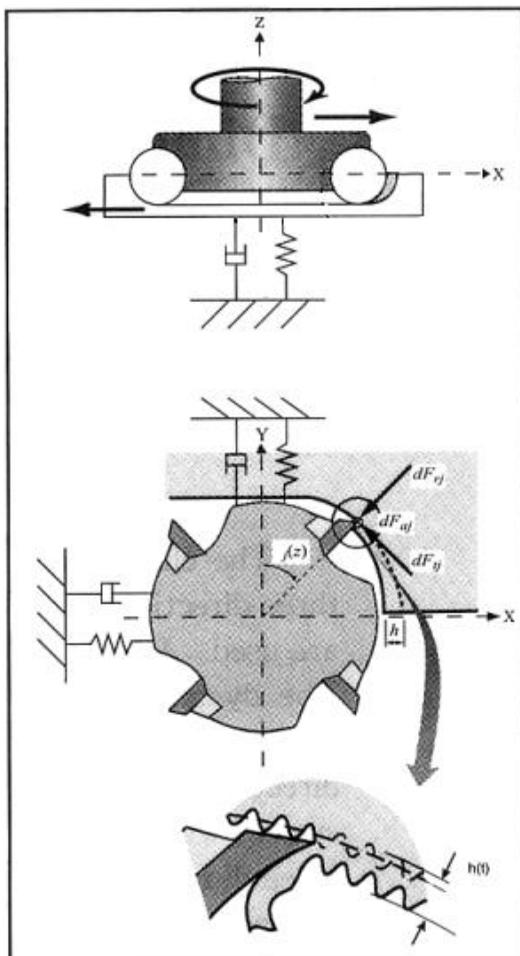
A espessura dinâmica  $h_j$  do cavaco é calculada como uma função da diferença de fase entre a onda atual e a anterior deixada pela ferramenta. Segundo Shin et al. (1999), esta pode ser determinada como

$$h(\phi_j) = [\Delta x \sin \phi_j + \Delta y \cos \phi_j - \Delta z \tan \gamma] \cdot g(\phi_j), \quad (3.1)$$

onde  $\Delta x = x(t) - x(t - T)$ ,  $\Delta y = y(t) - y(t - T)$ ,  $\Delta z = z(t) - z(t - T)$ ,  $\gamma$  é o ângulo de inclinação dos insertos e  $g(\phi_j)$  é uma função degrau unitário que determina se o dente está ou não em corte, ou seja

$$\begin{aligned} g(\phi_j) &= 1 & \phi_{entrada} < \phi_j < \phi_{saída} \\ g(\phi_j) &= 0 & \phi_j < \phi_{entrada} \text{ ou } \phi_j > \phi_{saída} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Figura 23 – Mecanismo de formação de cavaco no fresamento.



Fonte: Adaptado de (ALTINTAS, 2001).

O modelo de força relaciona as forças de corte com os deslocamentos dinâmicos. As forças, tangencial  $F_t$ , radial  $F_r$  e axial  $F_a$  de corte que atuam sobre o dente  $j$  são proporcionais à profundidade de corte axial  $b$  e à espessura do cavaco  $h$  de acordo com a Equação 3.3.

$$\begin{Bmatrix} F_t(j) \\ F_r(j) \\ F_a(j) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_t \\ K_r \\ K_a \end{Bmatrix} b \cdot h(\phi_j) \quad (3.3)$$

Substituindo a Equação 3.1 na Equação 3.3 temos:

$$\begin{Bmatrix} F_t(j) \\ F_r(j) \\ F_a(j) \end{Bmatrix} = b \begin{Bmatrix} K_t \\ K_r \\ K_a \end{Bmatrix} \{ \sin \phi_j \quad \cos \phi_j \quad -\tan \gamma \} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} g(\phi_j) \quad (3.4)$$

Essas forças podem ser projetadas sobre os eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  através da mudança do sistema de coordenadas, transformando no sistema de coordenadas global, que tem a sua origem no centro da rotação

$$\begin{Bmatrix} F_x(j) \\ F_y(j) \\ F_z(j) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_j & -\sin \phi_j & 0 \\ \sin \phi_j & -\cos \phi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_t(j) \\ F_r(j) \\ F_a(j) \end{Bmatrix}. \quad (3.5)$$

Assim, substituindo a Equação 3.4 na Equação 3.5 e rearranjando, tem-se

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = b[A] \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde  $[A]$  é a matriz dos coeficientes direcionais dinâmicos, cujos coeficientes são obtidos por

$$\begin{aligned}
a_{xx} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j \frac{1}{2} [-K_t \sin 2\phi_j - K_r (1 - \cos 2\phi_j)], \\
a_{xy} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j \frac{1}{2} [-K_t (1 + \cos 2\phi_j) - K_r \sin 2\phi_j], \\
a_{xz} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j \tan \gamma [K_t \cos \phi_j + K_r \sin \phi_j], \\
a_{yx} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j \frac{1}{2} [K_t (1 - \cos 2\phi_j) - K_r \sin 2\phi_j], \\
a_{yy} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j \frac{1}{2} [K_t \sin 2\phi_j - K_r (1 + \cos 2\phi_j)], \\
a_{yz} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j \tan \gamma [-K_t \sin \phi_j + K_r \cos \phi_j], \\
a_{zx} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j [K_a \sin \phi_j], \\
a_{zy} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j [K_a \cos \phi_j], \\
a_{zz} &= \sum_{j=0}^{N-1} g_j [-K_a \tan \gamma].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

As forças totais de fresamento em qualquer ângulo arbitrário  $\phi$  são obtidas pela soma das forças de corte em cada um dos insertos individuais, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \sum_{j=0}^{N-1} F_{x_j} , \\
 F_y &= \sum_{j=0}^{N-1} F_{y_j} , \\
 F_z &= \sum_{j=0}^{N-1} F_{z_j} .
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

A Equação 3.6 pode então ser escrita de uma forma simplificada para representar a soma das forças em qualquer instante no tempo, em algum ângulo arbitrário  $\emptyset$  como

$$\{F\} = b[A(t)]\{\Delta\} . \tag{3.9}$$

A matriz dos coeficientes direccionais dinâmicos é periódica com a frequência de passagem dos dentes. Os termos periódicos em  $[A]$  determinam a espessura instantânea do cavaco e a direção das forças de fresagem (SHIN, et al., 1999).

Na sua forma atual, a Equação 3.9 é uma simples relação entre a força e o deslocamento, e a estabilidade ainda não pode ser determinada. A dificuldade na solução da Equação 3.9 é que os coeficientes direccionais são periódicos e não harmônicos. Ao longo das décadas várias abordagens e aproximações foram feitas a fim de simplificar o problema. (SHIN, et al., 1999)

A análise de estabilidade que é descrita neste trabalho utiliza a mesma metodologia que foi utilizada por Budak e Altintas em seu trabalho de análise de estabilidade das operações de fresamento de topo (BUDAK, et al., 1998). Eles demonstraram que os harmônicos mais altos não afetam a precisão das previsões, pois a resposta no limite vibração é geralmente dominada por uma frequência de vibração única. Por isso uma solução monofrequência foi adotada. Esta solução, denominada de solução de ordem zero, consiste em fazer a matriz periódica  $[A(t)]$  constante considerando o componente médio da expansão da série de Fourier. Então:

$$[A_0] = \frac{1}{T} \int_0^T [A(t)] dt \quad (3.10)$$

onde T é o período de passagem dos dentes.

Como todos os termos de  $[A_0]$  são válidos apenas dentro da zona de corte, a equação pode ser desenvolvida no domínio angular:

$$[A_0] = \frac{1}{\phi_p} \int_{\phi_e}^{\phi_s} [A(\phi)] d\phi = \frac{N}{4\pi} [\alpha] \quad (3.11)$$

Os elementos da matriz  $[\alpha]$  são dados por

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \frac{1}{2} [K_t \cos 2\phi - 2K_r\phi + K_r \sin 2\phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{xy} &= \frac{1}{2} [-K_t \sin 2\phi - 2K_r\phi + K_r \cos 2\phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{xz} &= 2 \tan \gamma [K_t \sin \phi - K_r \cos \phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{yx} &= \frac{1}{2} [-K_t \sin 2\phi + 2K_r\phi + K_r \cos 2\phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{yy} &= \frac{1}{2} [-K_t \cos 2\phi - 2K_r\phi - K_r \sin 2\phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{yz} &= 2 \tan \gamma [K_t \cos \phi + K_r \sin \phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{zx} &= 2 [-K_a \cos \phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{zy} &= 2 [K_a \sin \phi]_{\phi_e}^{\phi_s}, \\ \alpha_{zz} &= 2 [-K_a \phi \tan \gamma]_{\phi_e}^{\phi_s}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para uma solução monofrequência os deslocamentos podem ser determinados a partir da seguinte equação:

$$\{\Delta\} = (1 - e^{-i\omega_c T}) [G(i\omega_c)] \{F\} e^{-i\omega_c T} \quad (3.13)$$

onde  $[G(i\omega_c)]$  é a matriz da função de resposta em frequência da peça e da ferramenta, dada por

$$[G(i\omega_c)] = [G_{peça}(i\omega_c)] + [G_{ferramenta}(i\omega_c)]$$

$$[G(i\omega)] = \begin{bmatrix} G_{xx_p}(i\omega) & G_{xy_p}(i\omega) & G_{xz_p}(i\omega) \\ G_{yx_p}(i\omega) & G_{yy_p}(i\omega) & G_{yz_p}(i\omega) \\ G_{zx_p}(i\omega) & G_{zy_p}(i\omega) & G_{zz_p}(i\omega) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$+ \begin{bmatrix} G_{xx_f}(i\omega) & G_{xy_f}(i\omega) & G_{xz_f}(i\omega) \\ G_{yx_f}(i\omega) & G_{yy_f}(i\omega) & G_{yz_f}(i\omega) \\ G_{zx_f}(i\omega) & G_{zy_f}(i\omega) & G_{zz_f}(i\omega) \end{bmatrix}$$

Substituindo a Equação 3.13 na Equação 3.9 obtêm-se a seguinte relação:

$$\{F\}e^{-i\omega_c T} = \frac{N}{4\pi} b(1 - e^{-i\omega_c T})[\alpha][G(i\omega_c)]\{F\}e^{-i\omega_c T} \quad (3.15)$$

O limite de estabilidade de vibração para fresa pode ser determinada resolvendo a Equação 3.15. Têm-se então um problema de autovalor e autovetor. As raízes da equação característica são encontradas a partir do determinante:

$$\det[[I] + \Lambda[\Phi]] = 0 \quad (3.16)$$

onde  $[\Phi] = [\alpha][G(i\omega)]$  e o autovalor da equação é:

$$\Lambda = -\frac{N}{4\pi} b(1 - e^{-i\omega_c T}) \quad (3.17)$$

O autovalor da equação pode facilmente ser obtido, conhecendo-se a função de resposta em frequência da estrutura. A equação torna-se apenas uma função cúbica:

$$a_0\Lambda^3 + a_1\Lambda^2 + a_2\Lambda + 1 = 0. \quad (3.18)$$

onde,

$$a_0 = -\Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{33} + \Phi_{11}\Phi_{23}\Phi_{32} + \Phi_{21}\Phi_{12}\Phi_{33} - \Phi_{21}\Phi_{13}\Phi_{32}$$

$$- \Phi_{31}\Phi_{12}\Phi_{23} + \Phi_{31}\Phi_{13}\Phi_{22}$$

$$a_1 = \Phi_{22}\Phi_{33} - \Phi_{23}\Phi_{32} + \Phi_{11}\Phi_{33} + \Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{21}\Phi_{12} - \Phi_{31}\Phi_{13}$$

$$a_2 = -\Phi_{33} - \Phi_{22} - \Phi_{11}.$$

Uma vez que a equação característica tem partes reais e imaginárias, as duas incógnitas  $\omega_c$  e  $b$  podem ser determinadas.

Sabendo que  $e^{-i\omega_c T} = \cos \omega_c T - i \sin \omega_c T$ , a profundidade de corte axial crítica pode então ser definida como

$$b_{lim} = -\frac{2\pi}{NK_t} \left[ \frac{\Lambda_R(1 - \cos \omega_c T) + \Lambda_I \sin \omega_c T}{(1 - \cos \omega_c T)} + i \frac{\Lambda_I(1 - \cos \omega_c T) - \Lambda_R \sin \omega_c T}{(1 - \cos \omega_c T)} \right], \quad (3.19)$$

mas, uma vez que  $b$  é um número real, a parte imaginária da equação deve ser nula, então

$$\Lambda_I(1 - \cos \omega_c T) - \Lambda_R \sin \omega_c T = 0, \quad (3.20)$$

tal que

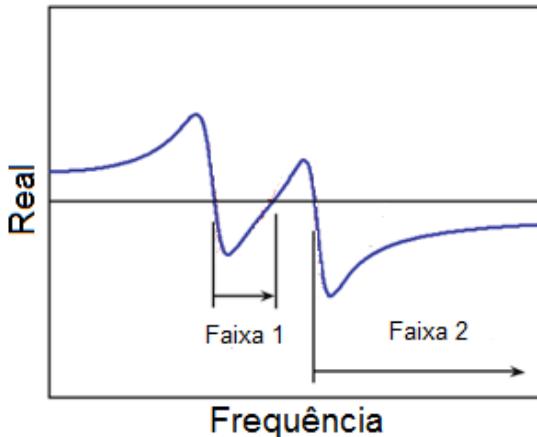
$$\kappa = \frac{\Lambda_I}{\Lambda_R} = \frac{\sin \omega_c T}{1 - \cos \omega_c T}. \quad (3.21)$$

Portanto, dada a frequência de vibração, o limite de vibração em termos de profundidade axial de corte pode ser determinado a partir da equação final para a profundidade de corte crítica:

$$b_{lim} = -\frac{2\pi\Lambda_R}{N} (1 + \kappa^2) \quad (3.22)$$

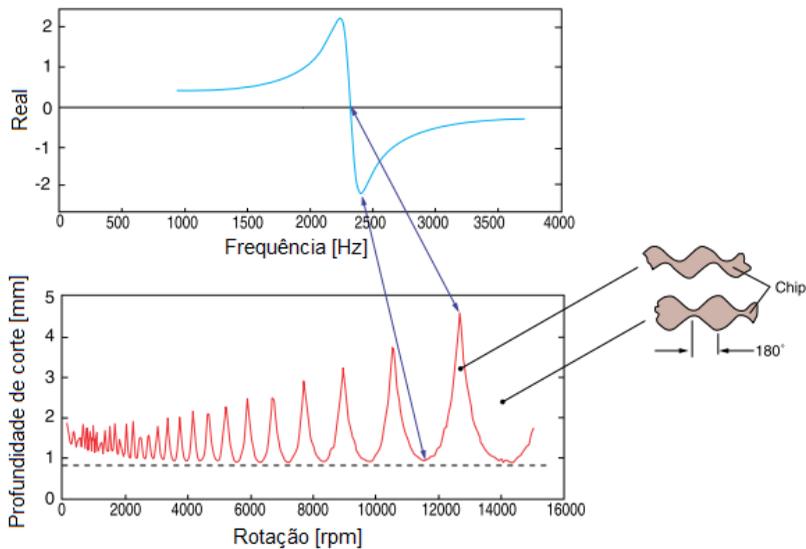
Pode-se notar que uma vez que a profundidade de corte é uma grandeza física, a solução é válida apenas para valores negativos da parte real da função de transferência, definindo assim uma faixa de frequências em que a vibração regenerativa pode ocorrer. A Figura 24 mostra um exemplo em que duas faixas de frequência nas quais a vibração regenerativa é válida. A figura 25 relaciona a parte real da função de transferência com a formação dos lóbulos de estabilidade.

Figura 24 – Faixa de frequência onde a vibração regenerativa pode ocorrer.



Fonte: Adaptado de (SCHMITZ, et al., 2008).

Figura 25 – Formação dos lóbulos de estabilidade.



Fonte: Adaptado de (MORIWAKI, 2006).

As velocidades de rotação do eixo-árvore correspondentes são encontradas também de maneira trivial. De acordo com Tobias (1965), a rotação da ferramenta pode ser determinada sabendo que

$$\kappa = \tan \psi = \frac{\cos(\omega_c T/2)}{\sin(\omega_c T/2)} = \tan(\pi/2 - (\omega_c T/2)). \quad (3.23)$$

A velocidade do eixo-árvore  $n(\text{rev}/\text{min})$  é calculada encontrando-se o período de passagem dos dentes  $T(\text{s})$ . O número de ciclos de vibração de cada período de dente pode ser expresso como:

$$\omega_c T = \epsilon + 2k\pi, \quad (3.24)$$

onde  $\epsilon = \pi - 2\psi$  é a diferença de fase entre as ondulações atual e anterior, e  $k$  é o número inteiro de ondas de vibração impressas sobre o arco de corte. Então:

$$\omega_c T = (\pi - 2\psi) + 2k\pi, \quad (3.25)$$

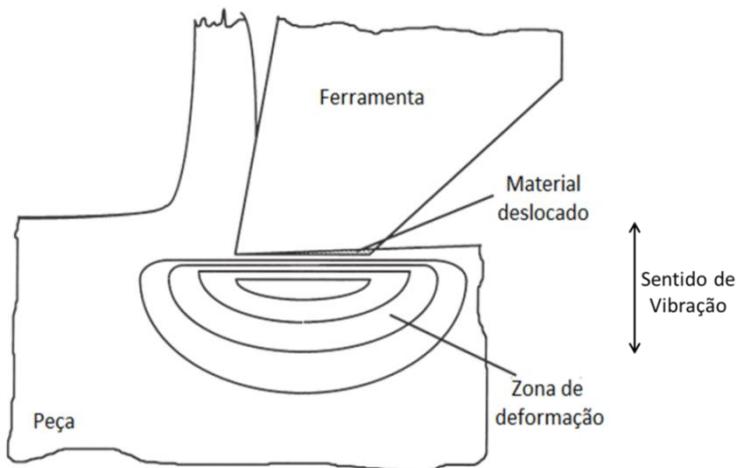
onde cada valor de  $k$  corresponde a um lóbulo diferente no diagrama de estabilidade. Quando a frequência vibração e valores de  $k$  são definidos, a velocidade de rotação  $n$  é dada por:

$$n = \frac{60}{NT} = \frac{60\omega_c}{N[(\pi - 2\psi) + 2k\pi]}. \quad (3.26)$$

### 3.1.1 Processo de Amortecimento

O processo de amortecimento é desenvolvido pelo contato entre a aresta de corte e o material de trabalho, o que gera o efeito de amortecimento, como mostrado na Figura 26. Este efeito é significativo quando a velocidade de corte é significativamente mais baixa do que a velocidade da vibração (WALLACE, et al., 1965). Força de contato provoca dissipação de energia e aumenta a profundidade de corte estável em baixa velocidade de eixo.

Figura 26 – Processo de amortecimento.



Fonte: Adaptado de (CHIOU, et al., 1998).

As forças de corte, considerando o processo de amortecimento, podem ser expressas como:

$$\begin{cases} F_t = K_t bh + C_t b \frac{\dot{v}}{V_c} \\ F_r = K_r bh + C_r b \frac{\dot{v}}{V_c} \\ F_a = K_a bh + C_a b \frac{\dot{v}}{V_c} \end{cases} \quad (3.27)$$

onde  $V_c$  é a velocidade tangencial de corte e  $\dot{v}$  é a velocidade de vibração da peça. Os coeficientes de amortecimento tangencial ( $C_t$ ), radial ( $C_r$ ) e axial ( $C_a$ ) do processo são identificados experimentalmente.

Fazendo uso da Equação 3.1 que expressa a espessura dinâmica do cavaco, e da Equação 3.5 que fornece a projeção das forças sobre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  através de uma mudança do sistema de coordenadas obtemos:

$$F(t) = F_{regenerativo} + F_{amortecimento} \quad (3.28)$$

onde as parcelas da força devido à vibração regenerativa ( $F_{regenerativo}$ ) e do processo de amortecimento ( $F_{amortecimento}$ ) são, respectivamente:

$$F_{regenerativo} = b[A]\Delta v \quad (3.29)$$

$$F_{amortecimento} = \frac{C_t b}{V_c} [B] \dot{v}, \quad (3.30)$$

onde  $\Delta v = \{\Delta x \ \Delta y \ \Delta z\}^T$  é o vetor de vibração regenerativa e  $\dot{v} = \{\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}\}^T$  é o vetor velocidade de vibração. A matriz [B] é semelhante à matriz [A] definida na Equação 48. Assim,

$$\begin{aligned} b_{xx} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} [-C_t \sin 2\phi_j - C_r (1 - \cos 2\phi_j)], \\ b_{xy} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} [-C_t (1 + \cos 2\phi_j) - C_r \sin 2\phi_j], \\ b_{xz} &= \sum_{j=0}^{N-1} \tan \gamma [C_t \cos \phi_j + C_r \sin \phi_j], \\ b_{yx} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} [C_t (1 - \cos 2\phi_j) - C_r \sin 2\phi_j], \\ b_{yy} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} [C_t \sin 2\phi_j - C_r (1 + \cos 2\phi_j)], \\ b_{yz} &= \sum_{j=0}^{N-1} \tan \gamma [-C_t \sin \phi_j + C_r \cos \phi_j], \\ b_{zx} &= \sum_{j=0}^{N-1} [C_a \sin \phi_j], \\ b_{zy} &= \sum_{j=0}^{N-1} [C_a \cos \phi_j], \\ b_{zz} &= \sum_{j=0}^{N-1} [-C_a \tan \gamma]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Com isto temos que as forças de corte são dadas por:

$$F(t) = b[A]\Delta v + \frac{C_t b}{V_c}[B]\dot{v}. \quad (3.32)$$

A formulação da estabilidade no fresamento é realizada no domínio da frequência. As matrizes  $[A]$  e  $[B]$ , as quais possuem coeficientes direcionais periódicos, são consideradas como constantes e determinadas a partir do componente médio da expansão da série de Fourier para eliminar sua dependência do tempo. Assim:

$$[A_0] = \frac{1}{\phi_p} \int_{\phi_e}^{\phi_s} [A(\phi)] d\phi \quad e \quad [B_0] = \frac{1}{\phi_p} \int_{\phi_e}^{\phi_s} [B(\phi)] d\phi. \quad (3.33)$$

Substituindo as matrizes dos coeficientes direcionais médios  $[A_0]$  e  $[B_0]$  na Equação 3.32, a equação das forças de corte pode ser expressa no domínio de Laplace como

$$F(s) = b[A_0](1 - e^{sT})v(s) + s \frac{C_t b}{V_c}[B_0]v(s). \quad (3.34)$$

O vetor de vibração  $v(s)$  é dado pelo produto da função de transferência da estrutura ( $G(s)$ ) e do vetor força ( $F(s)$ ):

$$v(s) = G(s)F(s). \quad (3.35)$$

Substituindo a Equação 3.35 na Equação 3.34:

$$F(s) = \left( b[A_0](1 - e^{sT}) + s \frac{C_t b}{V_c}[B_0] \right) G(s)F(s). \quad (3.36)$$

Tem-se então um problema de autovalor e autovetor como se segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} [I] - b[A_0](1 - e^{-sT})[G(s)]. \left[ \begin{array}{l} [I] \\ - s \frac{C_t b}{V_c}[B_0][G(s)] \end{array} \right]^{-1} \end{array} \right\} F(s) = \{0\}. \quad (3.37)$$

A estabilidade do sistema é analisada no domínio da frequência ( $s = i\omega$ ) a partir da equação característica, quando o processo é criticamente estável ( $\omega_c$ ).

$$\left| \begin{aligned} & [I] - b[A_0](1 - e^{-i\omega_c T})[G(i\omega_c)]. \left[ [I] \right. \\ & \left. - i\omega_c \frac{C_t b}{V_c} [B_0][G(i\omega_c)] \right]^{-1} \end{aligned} \right| = 0. \quad (3.38)$$

A estabilidade do sistema deve ser determinada de forma iterativa devido ao termo do processo de amortecimento na Equação 3.38 ser dependente da velocidade de corte (JIN, 2012). Primeiramente o termo do processo de amortecimento é negligenciado ( $C = 0$ ). Com isto a equação característica é reduzida ao problema de estabilidade clássico de ordem zero como desenvolvido na seção 3.1. Ou seja,

$$|[I] + \Lambda[A_0][G(i\omega_c)]| = 0. \quad (3.39)$$

Solucionando o problema de autovalor, a profundidade de corte criticamente estável ( $b_{lim}$ ) e a velocidade tangencial de corte ( $V_c$ ) são estimadas como:

$$b_{lim} = -\frac{2\pi\Lambda_R}{NK_t}(1 + \kappa^2) \quad e \quad V_c = \frac{\pi d}{NT}, \quad (3.40)$$

onde  $d$  é o diâmetro da fresa.

Estes valores estimados são usados para atribuir valores numéricos para o termo do processo de amortecimento na frequência  $\omega_c$  como:

$$C_0 = \left[ [I] - i\omega_c \frac{C_t b}{V_c} [B_0][G(i\omega_c)] \right]^{-1}. \quad (3.41)$$

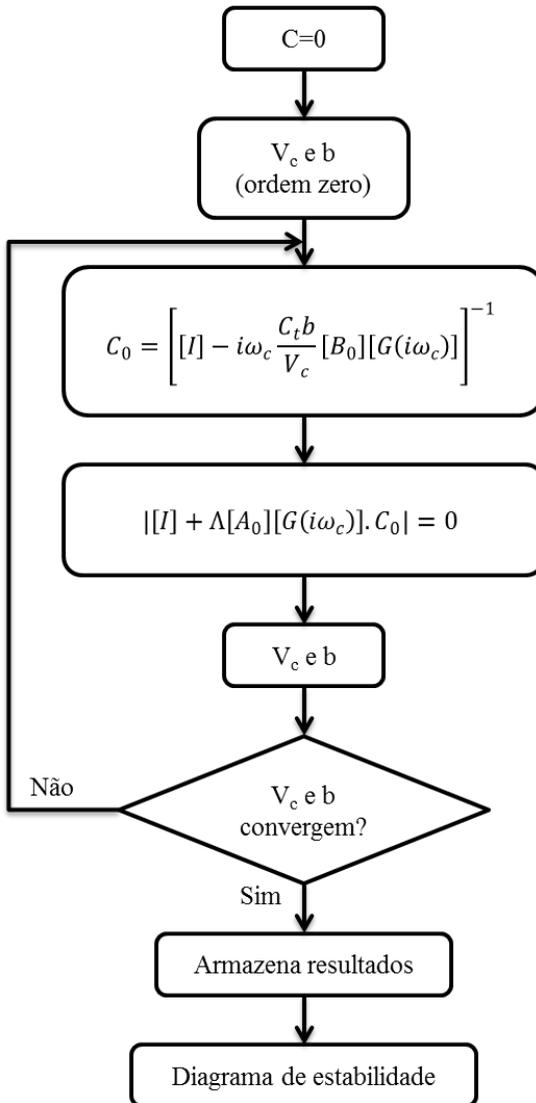
A equação característica é então atualizada com o termo do processo de amortecimento  $C_0$  como:

$$|[I] + \Lambda[A_0][G(i\omega_c)].C_0| = 0. \quad (3.42)$$

A solução do problema de autovalor é repetida até que a profundidade de corte e a velocidade tangencial de corte

converjam para valores constantes com uma tolerância aceitável. O fluxograma para determinar o diagrama de estabilidade para o processo de fresamento é mostrado na Figura 27.

Figura 27 – Fluxograma para determinação do diagrama de estabilidade.



### 3.1.2 Formulação com múltiplos pontos de análise

Um método desenvolvido por Altintas considera vários pontos de análise, mas não é adequado porque implicitamente assume que dois pontos simultaneamente sofrendo a ação da ferramenta têm o mesmo comportamento dinâmico (LE LAN, et al., 2006).

A fim de corrigir esta característica, o comportamento dinâmico de cada ponto de análise e as interações entre os pontos têm que ser considerados.

Considerando  $n_p$  pontos de análise simultaneamente, as forças de corte para o ponto  $i$ , tal como visto, tornam-se:

$$\{F_i\} = b[A_i]\{\Delta_i\} \quad (3.43)$$

e o deslocamento é dado por

$$\{\Delta_i\} = (1 - e^{-i\omega T})[G_i(i\omega)]\{F(\omega)\}. \quad (3.44)$$

Usando o mesmo método, tal como explicado no caso de um único ponto, o limite de estabilidade para a formulação considerando simultaneamente múltiplos pontos de análise resulta em resolver o seguinte problema de autovalor e autovetor:

$$\det \left( [I] + \Lambda \begin{bmatrix} [A_1] & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & [A_i] & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & [A_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [G_{11}] & \dots & [G_{1i}] & \dots & [G_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ [G_{i1}] & \dots & [G_{ii}] & \dots & [G_{in}] \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ [G_{n1}] & \dots & [G_{ni}] & \dots & [G_{nn}] \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (3.45)$$

onde a matriz  $G_{ij}$  contém a função de transferência entre a força aplicada no ponto  $i$  e o deslocamento resultante no ponto  $j$ .

Na análise simultânea de múltiplos pontos, a função de transferência é determinada como um sistema de múltiplos graus de liberdade (AYGÜN, 2010). De uma maneira geral, o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz da função de resposta em frequência  $[G(s)]$  pode ser descrito, no domínio de Laplace, como

$$[g(s)] = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{ij,k} + \beta_{ij,k}s}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n,k}s + \omega_{n,k}^2}, \quad (3.46)$$

onde o elemento  $(\alpha_{ij,k} + \beta_{ij,k}s)$  reflete os resíduos do modo  $k$ , na linha  $i$  e coluna  $j$ . A função de resposta em frequência completa pode ser representada da seguinte forma matricial:

$$[G(s)] = \sum_{k=1}^n \frac{[R]_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n,k}s + \omega_{n,k}^2}, \quad (3.47)$$

onde  $[R]_k = [\alpha + \beta s]_k$  é a matriz dos resíduos do modo  $k$ .

A matriz de resíduo para um determinado modo de  $k$  pode ser expressa de forma geral como

$$[R]_k = \begin{bmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_l & \cdots & u_1 u_n \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & \cdots & u_2 u_l & \cdots & u_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_l u_1 & u_l u_2 & \cdots & u_l u_l & \cdots & u_l u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n u_1 & u_n u_2 & \cdots & u_n u_l & \cdots & u_n u_n \end{bmatrix}_k, \quad (3.48)$$

e, por exemplo, se tomarmos a coluna ou linha  $l$  da matriz de resíduos do modo  $k$ , obtemos

$$\begin{Bmatrix} R_{1l} \\ R_{2l} \\ \vdots \\ R_{ll} \\ \vdots \\ R_{nl} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} u_1 u_l \\ u_2 u_l \\ \vdots \\ u_l u_l \\ \vdots \\ u_n u_l \end{Bmatrix}_k. \quad (3.49)$$

Começando com a primeira solução de  $u_l u_l$  onde os pontos de excitação e de medição são correspondentes, pode-se determinar todos os termos da matriz de resíduos a partir de uma única linha ou coluna de medições da função de resposta em frequência como se segue:

$$\begin{aligned} u_{l,k} &= \sqrt{R_{ll,k}} \\ u_{1,k} &= \frac{R_{1l,k}}{u_{l,k}} \\ u_{2,k} &= \frac{R_{2l,k}}{u_{l,k}} \\ &\vdots \\ u_{n,k} &= \frac{R_{nl,k}}{u_{l,k}} \end{aligned} \tag{3.50}$$

A partir disto pode-se usar da lei da reciprocidade para o cálculo da matriz FRF da chapa considerando múltiplos pontos de análise.

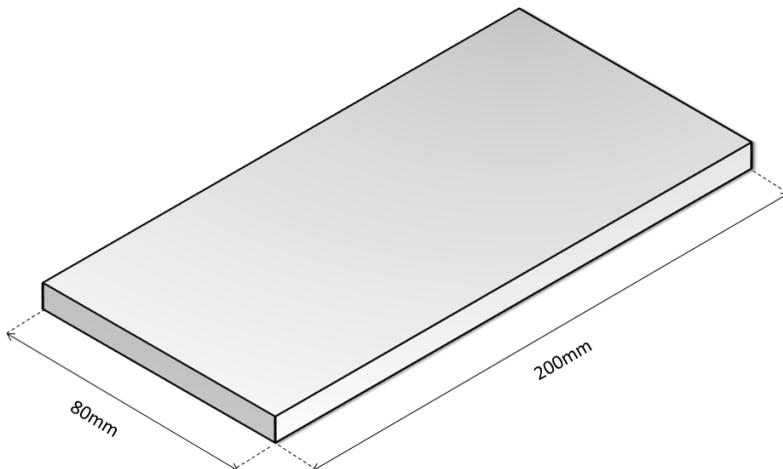
## 4 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Neste capítulo será apresentado o material utilizado e a descrição dos procedimentos realizados no desenvolvimento da pesquisa. Todos os ensaios experimentais foram realizados no Laboratório de Usinagem, no Centro de Ciências Tecnológicas da UDESC.

### 4.1 MATERIAIS

Uma placa foi empregada com o intuito de modelar uma estrutura de parede fina de um bloco de motor. Para que se permitissem estudos sobre o modelo em si foram utilizadas chapas de aço SAE1045 de 1/4" de espessura, como mostrada na Figura 28.

Figura 28 – Chapa para ensaios.



As chapas são fixadas através de duas barras de aço presas por cinco parafusos Allen e porcas. O aperto dos parafusos é aplicado utilizando-se de um torquímetro de estalo modelo 2550-13 da fabricante Robust para minimizar a variação na rigidez e no coeficiente de amortecimento entre os ensaios. A barra de aço é fixada à mesa da máquina com o auxílio de uma morsa, como mostrado na Figura 29.

Figura 29 – Sistema de fixação da chapa.



Para a determinação dos parâmetros modais do sistema utilizou-se um martelo de impacto com transdutor de força modelo 8206-003 da marca Brüel & Kjær, com sensibilidade de 1,1mV/N e ponteira metálica, um acelerômetro piezoelétrico modelo 4517-002 da marca Brüel & Kjær, com sensibilidade de 10mV/g e um sistema de condicionamento de sinal modelo SCXI-1000 com placa para acelerômetros modelo SCXI-1530, ambos da National Instruments. Para aquisição e processamento dos sinais foi utilizado o programa Labview. A Figura 30 mostra o sistema de aquisição de dados.

Figura 30 – Sistema de aquisição de dados.



Para os ensaios de determinação dos coeficientes de força e de validação dos diagramas de estabilidade utilizou-se um centro de usinagem ROMI D600, com rotação máxima de 10000rpm, como mostrada na Figura 31.

Figura 31 - Máquina utilizada no ensaio.

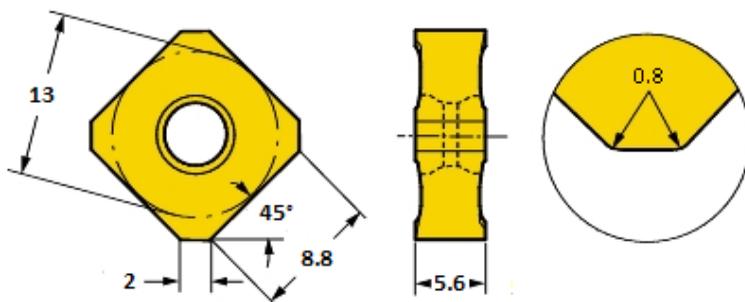


Foi utilizada uma plataforma dinanométrica modelo 9265B da Kistler, com medição de força nos três eixos, para a determinação dos coeficientes de força. Selecionou-se também para os ensaios uma fresa da fabricante SANDVIK modelo Coromill 345 com 80mm de diâmetro e seis arestas de corte, como mostrada na Figura 32, na qual foram utilizados insertos de metal duro, com recobrimento de nitreto de titânio modelo 345R-1305M-PM 1030 da Sandvik conforme especificações mostradas na Figura 33.

Figura 32 – Fresa Coromill 345.



Figura 33 – Especificações do inserto.



Fonte: Adaptado de (SANDVIK COROMANT, 2010).

Por motivo de estudo optou-se por esta geometria de inserto, uma vez que o surgimento de vibrações durante o processo de fresamento é mais frequentemente observado com este tipo de inserto do que com insertos à 90°.

## 4.2 MÉTODOS

O presente trabalho trata do modelamento do efeito da instabilidade do sistema no caso do fresamento. Para tanto, as seguintes hipóteses serão consideradas:

- O sistema é rígido, excluindo a peça;
- As frequências naturais da peça que mais influenciam na dinâmica do sistema são os primeiros modos;
- O material é perfeitamente isotrópico, homogêneo e linear;
- Não existe a influência de outros fatores na dinâmica do processo.

Levando em consideração que a ferramenta e o sistema de fixação como rígidos quando comparado com a peça de análise e que sua a flexibilidade na direção de z é dominante, o modelo de estabilidade pode ser reduzido de um modelo 3D para um modelo 1D em z.

A descrição dos métodos a seguir está dividida em seis etapas:

### 4.2.1 Determinação das Constantes de Pressão específica de Corte

Para determinar as pressões específicas de corte se faz necessária a usinagem de um corpo de prova utilizando-se de uma ferramenta com ângulos de saída previamente conhecidos para a medição das forças utilizando-se de um dinamômetro. A Figura 34 mostra a montagem do dinamômetro e a fixação da chapa.

Figura 34 – Montagem para determinação das pressões específicas de corte.



Durante o ensaio os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do dinamômetro foram alinhados com os da máquina, o que possibilita, através das medidas das componentes de força nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a determinação da força tangencial ( $F_t$ ), força radial ( $F_r$ ) e força axial ( $F_a$ ).

Um conjunto de experimentos foi conduzido em diferentes velocidades de corte, mantendo-se a profundidade de corte constante. As forças médias em cada avanço foram medidas. Estas forças podem ser expressas por uma função linear da velocidade de avanço da seguinte forma

$$\bar{F}_q = \bar{F}_{qc}c + \bar{F}_{qe} . \quad (4.1)$$

As forças de corte médias experimentalmente avaliadas foram substituídas nas expressões de força de corte obtidas analiticamente, o que leva à identificação das constantes de corte (ALTINTAS, 2000). Rearranjando a Eq.2.8, determinou-se os valores das constantes  $K_t$ ,  $K_r$  e  $K_a$  da seguinte maneira:

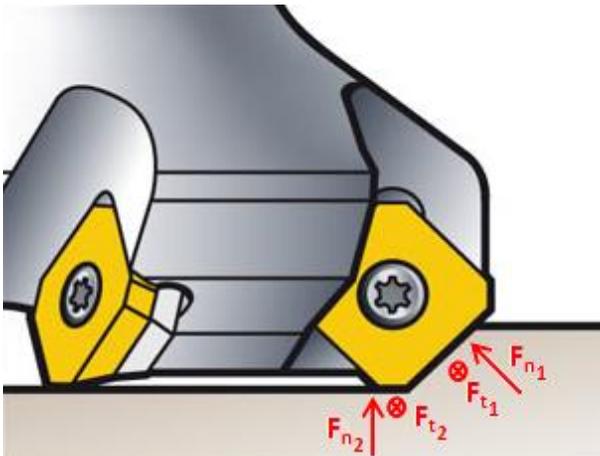
$$\begin{aligned}
 K_{tc} &= \frac{4\bar{F}_{yc}}{Nb}, & K_{te} &= \frac{\pi\bar{F}_{ye}}{Nb}, \\
 K_{rc} &= \frac{-4\bar{F}_{xc}}{Nb}, & K_{re} &= \frac{-\pi\bar{F}_{xe}}{Nb}, \\
 K_{ac} &= \frac{\pi\bar{F}_{zc}}{Nb}, & K_{ae} &= \frac{2\bar{F}_{ze}}{Nb},
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

#### 4.2.2 Determinação dos Coeficientes de Amortecimento

O contato entre a aresta de corte e o material de trabalho gera o efeito de amortecimento no processo de corte dinâmico. Este efeito tem uma grande influência sobre a estabilização do processo de corte à baixas velocidades de rotação.

Sisson e Kegg (1969) propuseram que uma parte da espessura do cavaco proporcional ao raio da aresta de corte foi comprimida sob a aresta da ferramenta. Com base nisto, foi desenvolvido um modelo linear do processo de amortecimento durante o fresamento de topo, como mostrado na Figura 35.

Figura 35 – Modelamento do processo de amortecimento.



Fonte: Adaptado de (SANDVIK COROMANT, 2010).

A força de amortecimento é calculada usando o modelo de Wu (1989), em que a força normal à aresta de corte é assumida como sendo proporcional ao volume,  $V$ , do material extrudado debaixo da face flanco:

$$\begin{aligned} F_{n_1} &= K_{sp}V = K_{sp}Sb, \\ F_{n_2} &= K_{sp}V = K_{sp}SL, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $S$  é a área da secção transversal do material extrudado e  $K_{sp}$  é o coeficiente de indentação específico, que é medido experimentalmente ou calculado analiticamente.

Wu estima este coeficiente usando uma analogia com a força necessária para penetrar uma unidade de volume do mesmo material com um penetrador cilíndrico. Utilizando esta analogia  $K_{sp}$  foi determinado a partir da seguinte fórmula:

$$K_{sp} = \frac{E}{1,29\rho(1 - 2\nu)}. \quad (4.4)$$

Nesta equação  $E$  e  $\nu$  representam o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material da peça de trabalho, respectivamente.  $\rho$  é a extensão da deformação, e é obtido através da medição das tensões residuais.

A força tangencial é modelada usando o atrito de Coulomb:

$$\begin{aligned} F_{t_1} &= \mu F_{n_1} \text{ e} \\ F_{t_2} &= \mu F_{n_2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de atrito de Coulomb.

Vários autores adotaram o modelo de amortecimento acima em suas simulações. Contudo, este é um modelo não-linear devido a duas razões: em primeiro lugar, a força de amortecimento atua apenas sobre uma parte do ciclo de vibração no qual a ferramenta está em contato com a peça de trabalho, e é zero, quando o contrário. Em segundo lugar, a força de amortecimento depende da amplitude da vibração. Esta não linearidade gera alto custo computacional, onde a maior parte do tempo nestas simulações é consumido no cálculo da área de extrusão.

Altintas et al. (2008) propuseram um modelo simples linear, e verificou-se que o coeficiente de amortecimento é aproximadamente proporcional à razão entre a velocidade de vibração e a velocidade tangencial de corte. Eles identificaram a constante de proporcionalidade de oscilação por meio de ensaios controlados.

A idéia de substituir um amortecedor não linear por um amortecedor viscoso linear equivalente,  $C_{eq}$ , é bem aceita para avaliar a resposta do estado estacionário de um sistema vibratório sob excitação harmônica. Esta idéia é aqui utilizada para substituir o processo não linear por um amortecedor viscoso a fim de estabelecer os lóbulos de estabilidade analiticamente.

De acordo com Ahmadi e Ismail (2011), o processo de amortecimento normal pode então ser representado por um amortecedor viscoso linear equivalente, e expresso como:

$$F_n = \frac{K_{sp} b C_d \dot{v}}{V_c}, \quad (4.6)$$

onde  $\dot{v}$  é a vibração da ferramenta,  $V_c$  é a velocidade tangencial de corte e  $C_d$  é chamado de fator de forma do amortecimento, uma vez que é calculado a partir dos parâmetros geométricos da ferramenta e ondulações superficiais. Vibração de pequena amplitude será assumida, e assim de acordo com Chiou e Liang (1998),  $C_d$  será expresso por:

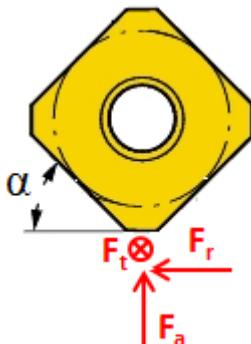
$$C_d = 0,25W^2, \quad (4.7)$$

onde  $W$  representa a altura do desgaste da ferramenta.

Portanto, como mostrado na Figura 36, temos que as parcelas da força responsável pelo amortecimento na direção tangencial radial e axial são respectivamente:

$$\begin{aligned} F_t &= \mu \frac{K_{sp} C_d \dot{v}}{V_c} [b + L], \\ F_r &= \frac{K_{sp} b C_d \dot{v}}{V_c} \sin \alpha, \\ F_a &= \frac{K_{sp} C_d \dot{v}}{V_c} [b \cos \alpha + L]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Figura 36 – Parcelas de força devido ao amortecimento.



Fonte: Adaptado de (SANDVIK COROMANT, 2010).

A equação geral da força de amortecimento, como mostrada na Equação 3.27 é dada por:

$$F_{qa} = C_q b \frac{\dot{v}}{V_c}, \quad q = t, r, a. \quad (4.9)$$

A fim de identificar os coeficientes de amortecimento do processo, igualam-se as equações, chegando então à:

$$\begin{aligned} C_t &= \mu K_{sp} C_d \left[ 1 + \frac{L}{b} \right] \\ C_r &= K_{sp} C_d \sin \alpha \\ C_a &= K_{sp} C_d \left[ \cos \alpha + \frac{L}{b} \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.2.3 Teste modal

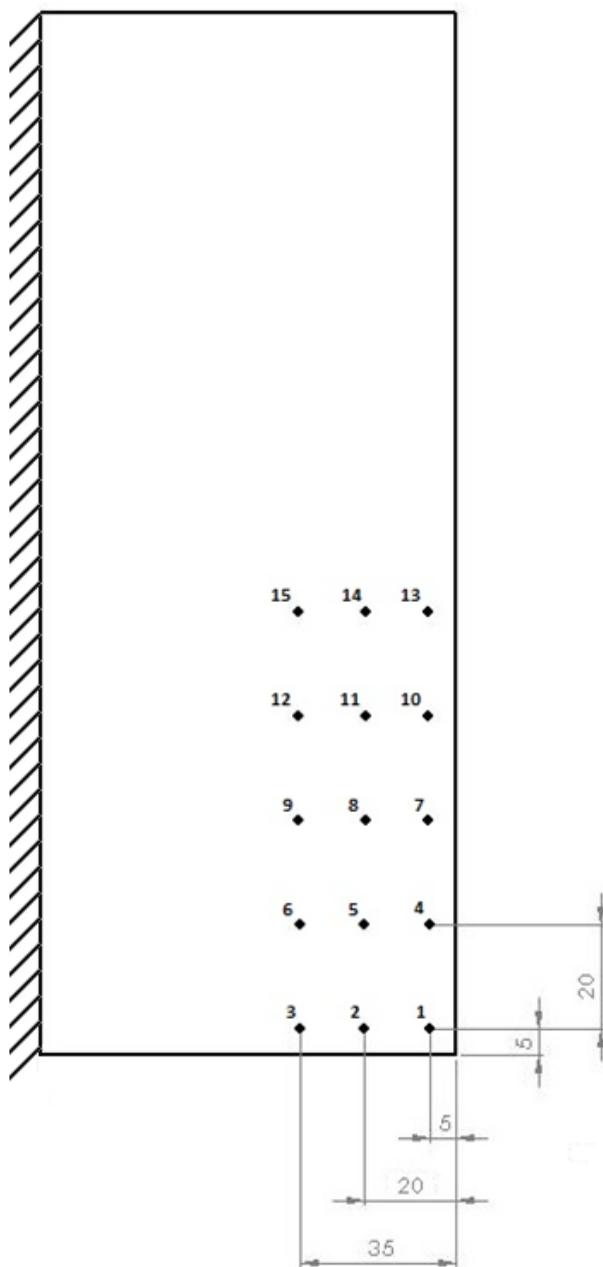
No desenvolvimento dos estudos a fixação da peça foi feita em um suporte considerado rígido. Para isso, verificou-se a necessidade de avaliar a FRF da base da estrutura, na faixa de frequência de interesse. Em seguida, verificar se esta resposta é significativamente mais baixa do que a resposta da estrutura de teste ou se irá afetar o comportamento dinâmico do sistema. O mesmo deve ser feito para a ferramenta a ser utilizada nos ensaios.

A etapa seguinte é definir o modelo geométrico estrutural que será utilizado. Em outras palavras, especificar o número de pontos na estrutura de teste onde serão fixados coletados os dados de excitação e resposta do sistema.

Quanto maior o número de pontos a serem escolhidos, menor será o risco de não identificar certos modos devido à medições em linhas nodais e também maior será a precisão das formas modais determinadas (Patrick, 1985).

Neste trabalho os pontos da estrutura no qual foram realizados os testes modais estão mostrados na Figura 37. As FRFs dos pontos são utilizadas para representar o caminho que a fresa irá percorrer. Decidiu-se para o levantamento dos pontos utilizar apenas metade do corpo de prova uma vez que este é simétrico.

Figura 37 – Distribuição dos pontos de análise.



#### 4.2.3.1 Medição da excitação e resposta do sistema

A fase seguinte é a escolha da forma de se captar o sinal de excitação e resposta da estrutura, ou seja, escolher os tipos de transdutores a serem utilizados no teste. O sinal de excitação será captado por um transdutor piezoelétrico de força.

Quanto ao sinal de resposta, o transdutor mais comumente utilizado é o acelerômetro piezoelétrico devido às suas vantagens de ampla faixa de frequência, boa linearidade, fácil fixação e baixo peso.

Para a medição da excitação e resposta do sistema foram realizados testes modais com um martelo de impacto. O acelerômetro foi fixado no ponto 3 do lado oposto da peça e foram realizados impactos em cada ponto de análise. Os dados foram adquiridos e tratados usando-se um aplicativo desenvolvido com a plataforma LabVIEW, o que possibilita que as FRF's sejam mostradas em gráfico e arquivadas ao final do ensaio.

Utilizou-se durante os ensaios janelamento Hanning para minimizar o efeito de vazamento "*leakage*". Para minimizar o ruído, 10 impactos por ponto foram realizados e a média da FRF foi calculada. Utilizou-se uma taxa de aquisição de 20KHz para a obtenção das informações dos testes sem *aliasing*, e uma amostragem de 20 mil pontos.

#### 4.2.4 Determinação dos parâmetros modais

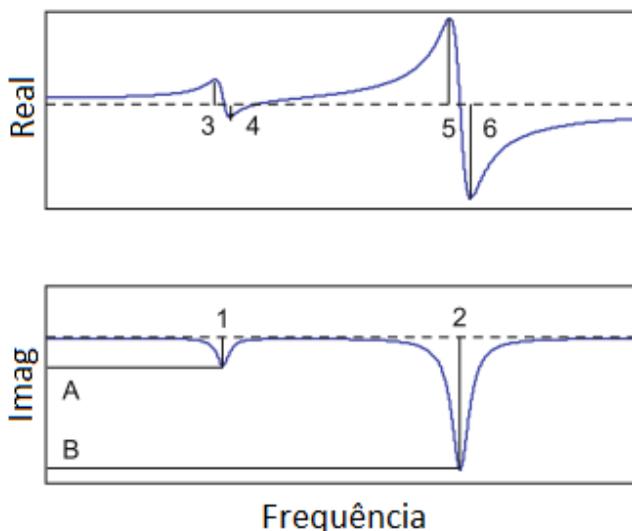
A abordagem usada durante as pesquisas para calcular os parâmetros modais será o método "peak-picking", onde se utiliza as partes real e imaginária da FRF do sistema para identificar os parâmetros modais (Schmitz et al., 2008). Um programa computacional para este método foi desenvolvido em Matlab.

Para demonstrar as etapas presentes no programa, considera-se a FRF mostrada na Figura 38. Esta FRF claramente possui dois modos de vibração dentro da largura de banda de medição. De acordo com Schmitz e Smith (2008), para determinar os parâmetros modais da estrutura, precisamos identificar três frequências e um valor de máximo para cada modo. As frequências 1 e 2 marcadas ao longo do eixo horizontal

na parte imaginária da FRF correspondem aos picos mínimos imaginários e fornecem as duas frequências naturais,  $\omega_{n1}$  e  $\omega_{n2}$ , respectivamente. A diferença entre as frequências de 4 e 3, marcadas ao longo do eixo da parte real da FRF é usada para determinar o amortecimento modal para o primeiro modo da seguinte forma:

$$\xi_1 = \frac{\omega_4 - \omega_3}{2\omega_{n1}}. \quad (4.11)$$

Figura 38 - FRF com as frequências e amplitudes necessárias para a determinação dos parâmetros.



Fonte: (SCHMITZ, et al., 2008).

Similarmente, a diferença entre as frequências 6 e 5 são utilizadas para determinar o amortecimento modal do segundo modo de vibração:

$$\xi_2 = \frac{\omega_6 - \omega_5}{2\omega_{n2}}. \quad (4.12)$$

O valor de pico A, identificado ao longo do eixo vertical da parte imaginária da FRF é usado para encontrar o valor de rigidez modal,  $k_1$ :

$$k_1 = \frac{-1}{2\xi_1 A}. \quad (4.13)$$

Do mesmo modo, o valor de pico B é utilizado para determinar  $k_2$ :

$$k_2 = \frac{-1}{2\xi_2 B}. \quad (4.14)$$

Para determinar as massas modais utilizam-se as frequências naturais e os valores de rigidez modais:

$$m_1 = \frac{k_1}{\omega_{n1}^2} \quad e \quad m_2 = \frac{k_2}{\omega_{n2}^2}. \quad (4.15)$$

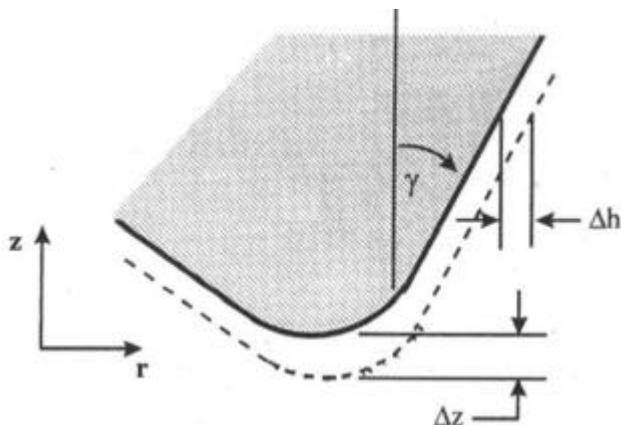
#### 4.2.5 Determinação do diagrama de estabilidade

Com os conceitos desenvolvidos na seção 3.1 é possível construir um diagrama de lóbulos de estabilidade para um determinado processo. Este diagrama possui em sua horizontal os valores de rotação da ferramenta, e em sua vertical o limite para a profundidade de corte axial.

No desenvolvimento dos estudos, a ferramenta e o sistema de fixação das chapas são considerados como rígidos, e as chapas possuem flexibilidade apenas na direção do eixo z. Com estas considerações o modelo pode ser representado como um sistema de um grau de liberdade, e as equações para a determinação do diagrama dos lóbulos de estabilidade pode então ser simplificadas (SERGUY, et al., 2008). Assim, como se observa na Figura 39, a espessura dinâmica do cavaco pode ser escrita como

$$\Delta h = -\Delta z \tan \gamma. \quad (4.16)$$

Figura 39 – Espessura dinâmica devido à deflexão na direção z.



Fonte: (SHIN, et al., 1999).

As forças de corte  $F_t$ ,  $F_r$  e  $F_a$ , projetadas sobre o eixo z ficam

$$F_z = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{Bmatrix} F_t \\ F_r \\ F_a \end{Bmatrix}, \quad (4.17)$$

e portanto, a matriz dos coeficientes direcionais dinâmicos  $[A]$  são expressos como

$$[A] = [a_{zz}] = [-2K_a \phi \tan \gamma], \quad (4.18)$$

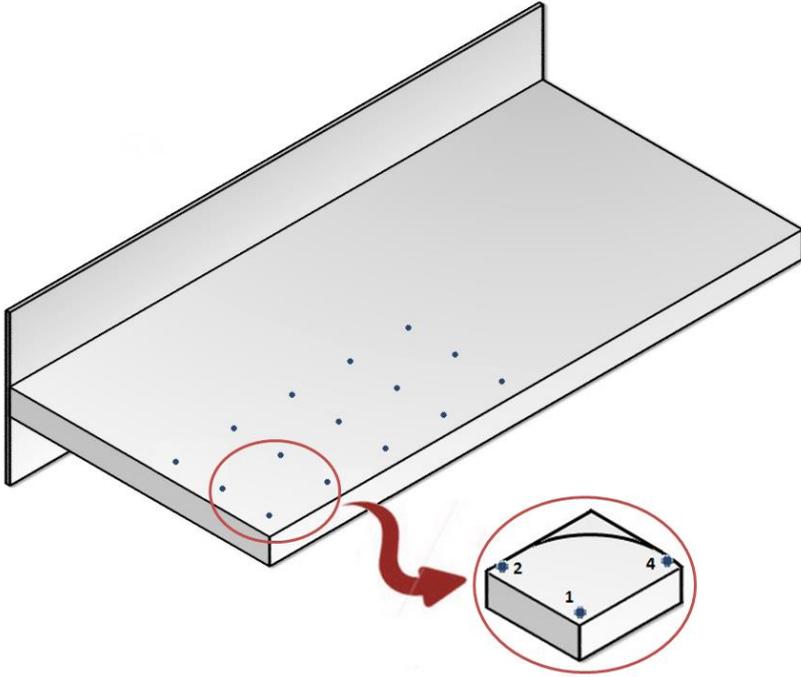
e de modo semelhante a matriz  $[B]$  se torna

$$[B] = [b_{zz}] = [-2C_a \phi \tan \gamma]. \quad (4.19)$$

Outro conceito utilizado na formulação do diagrama de estabilidade foi o de considerar simultaneamente múltiplos pontos de análise, levando em conta não apenas o comportamento dinâmico de cada ponto de corte como também as interações entre pontos. Isto é importante uma vez que as propriedades dinâmicas da peça de trabalho variam de acordo com a mudança da posição da ferramenta durante o processo. Para isto estabeleceu-se uma divisão da chapa em regiões de estudo.

Para o estudo de cada região considerou-se uma abordagem em que são utilizados três pontos de análise presentes na região para a determinação do diagrama de estabilidade. A Figura 40 mostra a seleção dos pontos para a primeira região da chapa.

Figura 40 – Pontos de análise da primeira região de estudo.



Através da consideração de flexibilidade da chapa apenas na direção do eixo  $z$ , pôde-se representar o modelo como um sistema de um grau de liberdade. Com isto a matriz  $[A]$  para cada um dos pontos se resumiu à Equação 4.18.

Conforme a seção 3.1.2, utilizando três pontos  $i, j, k$  simultâneos de análise para cada região, o problema de autovalor para a determinação do limite de estabilidade se torna

$$\det \left( [I] + \Lambda \begin{bmatrix} [A_i] & 0 & 0 \\ 0 & [A_j] & 0 \\ 0 & 0 & [A_k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{ii} & G_{ij} & G_{ik} \\ G_{ji} & G_{jj} & G_{jk} \\ G_{ki} & G_{kj} & G_{kk} \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (4.20)$$

A matriz da função de resposta em frequência [G] é calculada utilizando as FRFs da análise modal e aplicando o método dos resíduos.

Com a abordagem acima e utilizando a formulação descrita na seção 3.1, foi desenvolvido, utilizando o software MatLab, um programa para a determinação dos lóbulos de estabilidade, seguindo o fluxograma mostrado na Figura 26.

#### 4.2.6 Validação do diagrama de lóbulos

Para a validação dos resultados realizaram-se ensaios de usinagem, visando determinar as fronteiras entre as regiões estável e instável, definindo desta forma a precisão dos diagramas de lóbulos.

As usinagens foram realizadas em seis corpos de prova, nos quais se utilizou condições de usinagem (rotação e profundidade de corte) distintas para cada um.

Existem muitos critérios para se estabelecer os limites de estabilidade, como qualidade superficial, pressão sonora, forças de corte, etc. (QUINTANA, et al., 2008). Nenhum deles é aceito de forma generalizada entre os especialistas e cada um deles pode ser mais adequado em situações particulares.

Na presente pesquisa foram analisados os sinais de amplitude de vibração adquiridos utilizando um acelerômetro. Adicionalmente, observou-se ainda a rugosidade e a qualidade superficial dos corpos de prova ensaiados através de fotos a fim de identificar marcas produzidas pela vibração durante o processo.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES DE PRESSÃO ESPECÍFICAS DE CORTE

Foram realizados quatro ensaios de fresamento utilizando uma fresa com seis arestas de corte a uma velocidade de rotação de 900rpm, profundidade de corte de 1 mm, e fresamento em cheio. A Tabela1 mostra os valores médios das forças em x, y e z, medidos pelo dinamômetro durante a usinagem, em função dos avanços utilizados nos ensaios.

Tabela 1 – Valores médios das forças obtidos pelo dinamômetro.

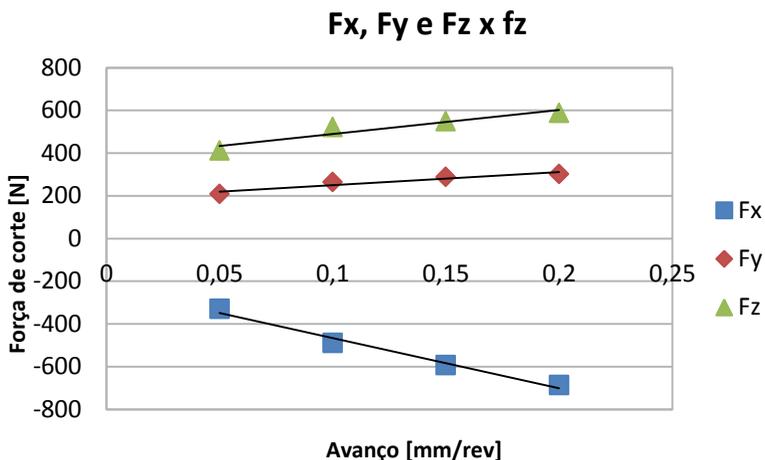
Avanço [mm/rev]	$F_x$ [N]	$F_y$ [N]	$F_z$ [N]
0,05	-329,3406	207,9793	407,7773
0,10	-489,4465	263,5720	519,0461
0,15	-592,7916	287,3035	548,9773
0,20	-687,2305	301,6230	588,2747

As forças relacionadas ao cisalhamento e à aresta de corte são estimadas diretamente por uma regressão linear dos dados, como mostrado na Figura 41. A tabela 2 mostra os valores destas forças, onde “c” e “e” representam os coeficientes angular e linear, respectivamente, da equação das forças.

Tabela 2 – Coeficientes das equações das forças de corte.

	$F_x$ [N]	$F_y$ [N]	$F_z$ [N]
c	-2354	609,33	1156,8
e	-230,45	188,95	377,66

Figura 41 – Forças de corte obtidas nos ensaios.



As constantes de pressão específicas de corte ( $K_{tc}$ ,  $K_{rc}$  e  $K_{ac}$ ) e as constantes devido à aresta de corte ( $K_{te}$ ,  $K_{re}$  e  $K_{ae}$ ), que não contribuem para o corte, são obtidas como descrito na seção 4.2.1 e mostrados na tabela 3.

Tabela 3 – Constantes de pressão específicas de corte e de aresta de corte.

Constantes			
$K_{tc}$	574,3951	$K_{te}$	349,7284
$K_{rc}$	2219,037	$K_{re}$	426,5297
$K_{ac}$	856,4585	$K_{ae}$	71,20207

## 5.2 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO

Sabe-se que a largura de um corte crítica aumenta à medida que a velocidade de corte diminui, a qual é atribuída ao processo de amortecimento gerado pelo contato entre a aresta da ferramenta e as marcas de vibração deixadas sobre a superfície acabada (ALTINTAS, et al., 2008).

Para a previsão do diagrama de lóbulos de estabilidade, então, requer-se além da identificação das constantes de

pressão específicas de corte ( $K_{tc}$ ,  $K_{rc}$  e  $K_{ac}$ ), a determinação dos coeficientes de amortecimento do sistema ferramenta-peça-máquina.

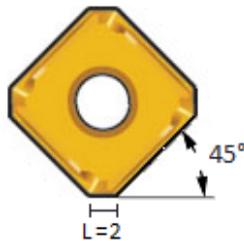
Para o material das chapas utilizadas nos ensaios, aço SAE 1045,  $\rho$  é considerado como 1mm (WU, 1989). Substituindo este valor, juntamente com  $E = 207GPa$  e  $\nu = 0,3$  na Equação 4.4, nos leva a  $K_{sp} = 4 \times 10^{14} N/m^3$ .

O fator de forma do amortecimento  $C_d$  é calculado a partir da altura do desgaste da ferramenta  $W$ , como mostrado na Eqação 4.7. Para esta pesquisa, uma ferramenta com de 0,08 milímetros altura de desgaste será assumida para a determinação do amortecimento do processo, o qual resulta em  $C_d = 16 \times 10^{-4}$ .

A Figura 42 mostra as características do inserto utilizado para na pesquisa. Assim, substituindo os valores acima encontrados para  $K_{sp}$  e  $C_d$  na Equação 4.10 obtém-se:

$$\begin{aligned} C_t &= 1,92 \times 10^4 [1 + 2/b] \\ C_r &= 6,4 \times 10^4 \sin 45 \\ C_a &= 6,4 \times 10^4 [\cos 45 + 2/b] \end{aligned}$$

Figura 42 – Inserto utilizado nos estudos.



Fonte: Adaptado de (SANDVIK COROMANT, 2010).

### 5.3 ANÁLISE MODAL

A análise do comportamento dinâmico da estrutura foi efetuada, seguindo os seguintes procedimentos:

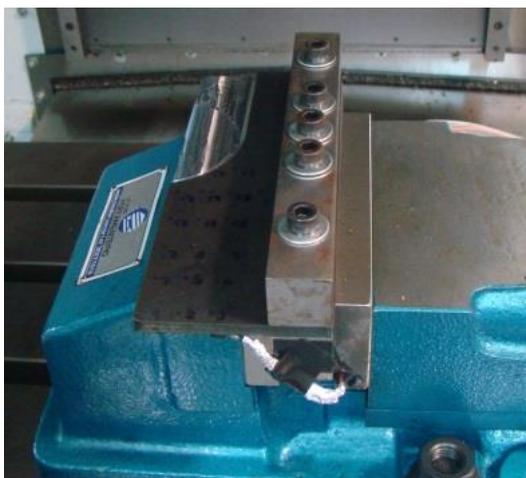
### 5.3.1 Corpos de Prova

Os corpos de prova utilizados na pesquisa foram chapas de aço, as quais representam um sistema de um grau de liberdade e encontram-se engastadas através de duas barras de aço presas por parafusos Allen, as quais estão fixas à mesa com o auxílio de uma morsa.

O acelerômetro foi colado na parte de baixo da chapa no ponto três conforme pode ser visto na Figura 43. A excitação por impulso consistiu de um impacto pontual em determinadas posições da estrutura, realizadas através do uso de um martelo de impacto. Desta forma, pôde-se determinar o comportamento natural da estrutura, pois a carga foi rapidamente retirada do sistema e a resposta vibracional da estrutura se manteve até que toda energia do impacto fosse amortecida pela estrutura.

O sensor e o martelo foram conectados ao módulo condicionador de sinal SCXI-1530 da National Instruments. Os sinais foram processados empregando o software Labview. Para cada ponto de análise da chapa, a função resposta em frequência foi calculada e posteriormente armazenada no microcomputador.

Figura 43 – Ponto de fixação do acelerômetro.



Os sinais de resposta foram captados em uma faixa definida entre 0 e 10.000 Hz, como mostrado na Figura 44. Nesta faixa de frequência coletada, estima-se que existam aproximadamente cinco modos de vibrar. Na Figura 45 observam-se os modos de vibração para os cinco primeiros modos obtidos através de análise modal realizada utilizando o *software* Abacus.

Figura 44 – FRF do ponto 3.

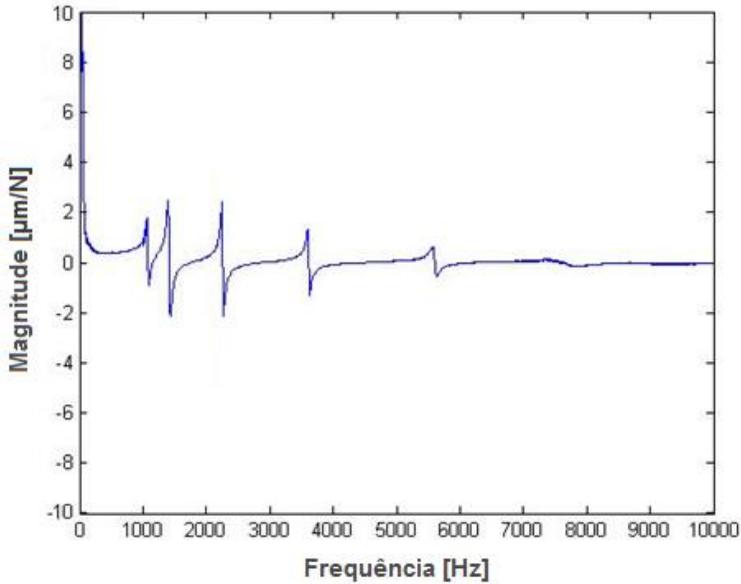
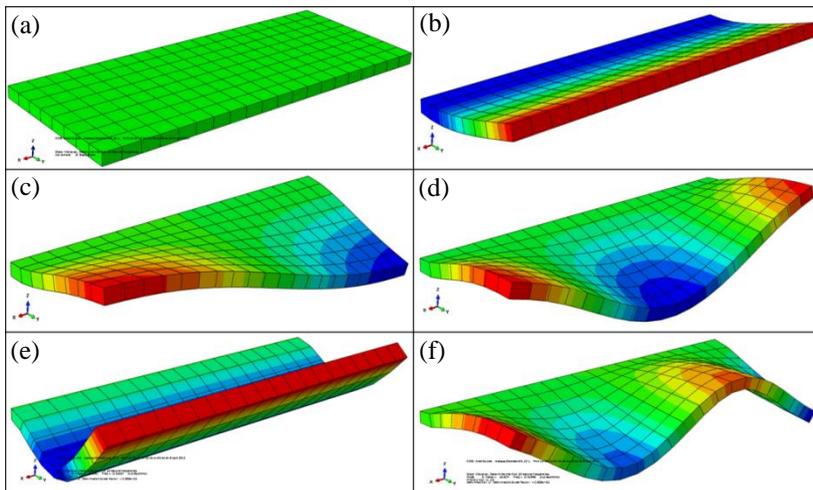


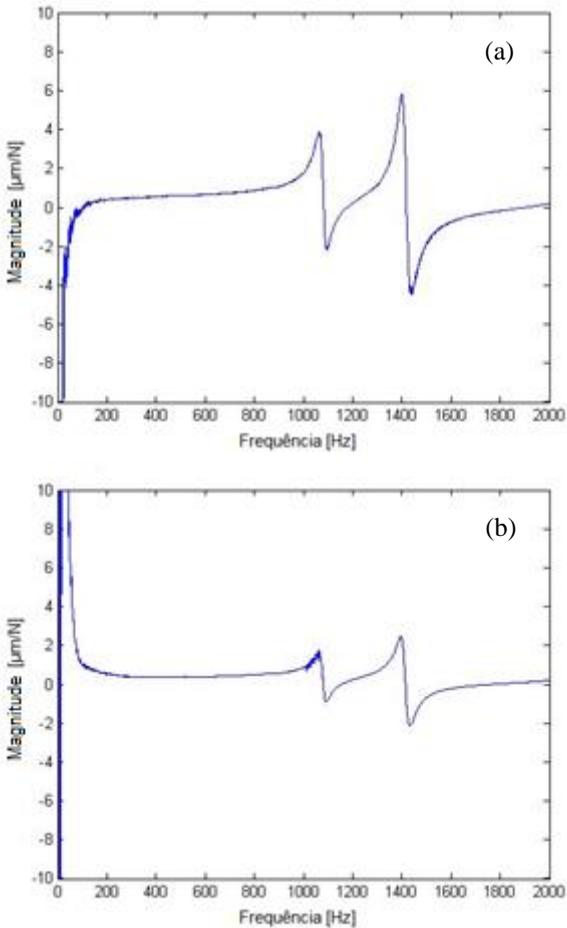
Figura 45 – Modos de vibração do corpo de prova. (a) Estático; (b) Modo 1; (c) Modo 2; (d) Modo 3; (e) Modo 4; (f) Modo 5



Por motivos de simplificação da análise e devido ao fato de que em condições reais os modos de frequências mais baixas são os que mais influenciam na dinâmica do sistema, optou-se por estudar apenas os dois primeiros modos naturais. A faixa de frequência utilizada nestes testes experimentais foi de 0 a 2.000 Hz, onde se observa dois modos com frequência natural de 1078 Hz e 1414 Hz respectivamente.

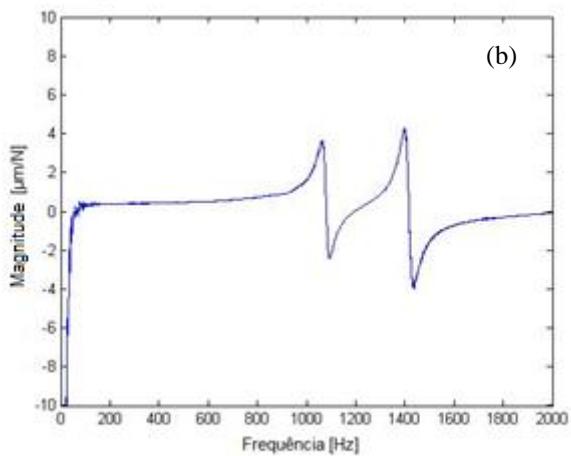
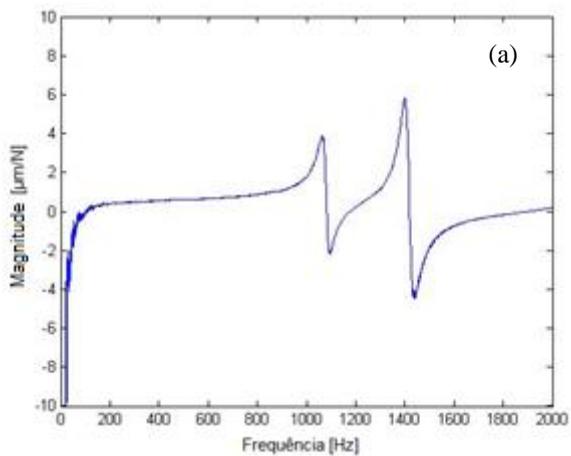
A Figura 46 mostra a FRF correspondente aos pontos 1 e 3 da análise. Neste caso torna-se evidente que quanto mais próximo do sistema de fixação o ponto se encontra maior a sua rigidez modal e, conseqüentemente ocorre uma diminuição dos picos da receptância nos modos de vibração.

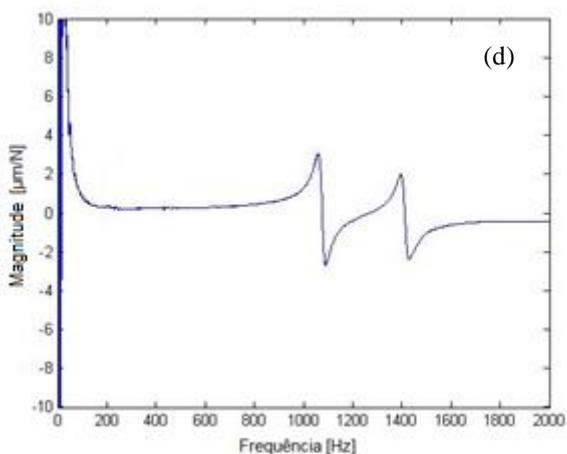
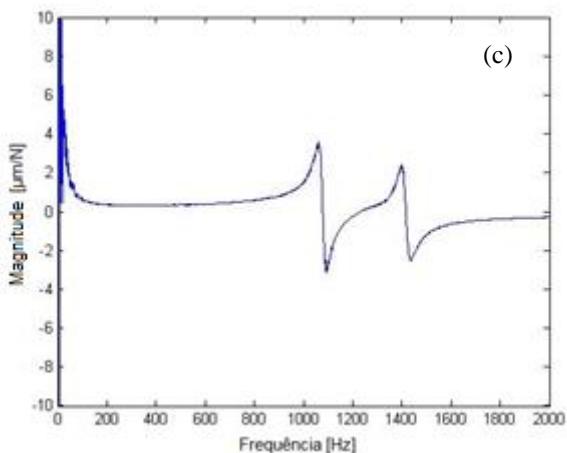
Figura 46 – Comparação da FRF entre os pontos 1 e 3 de análise. (a) Ponto 1; (b) Ponto 3.



A Figura 47 mostra a FRF correspondente aos pontos 1, 4, 7 e 10 da chapa. Observa-se claramente uma tendência de diminuição dos picos da receptância relativa ao segundo modo de vibração do conjunto de acordo com a mudança da posição da ferramenta durante o processo. Isto se deve principalmente ao fato do aumento da rigidez modal nestes pontos. O primeiro modo de vibração permanece praticamente inalterado.

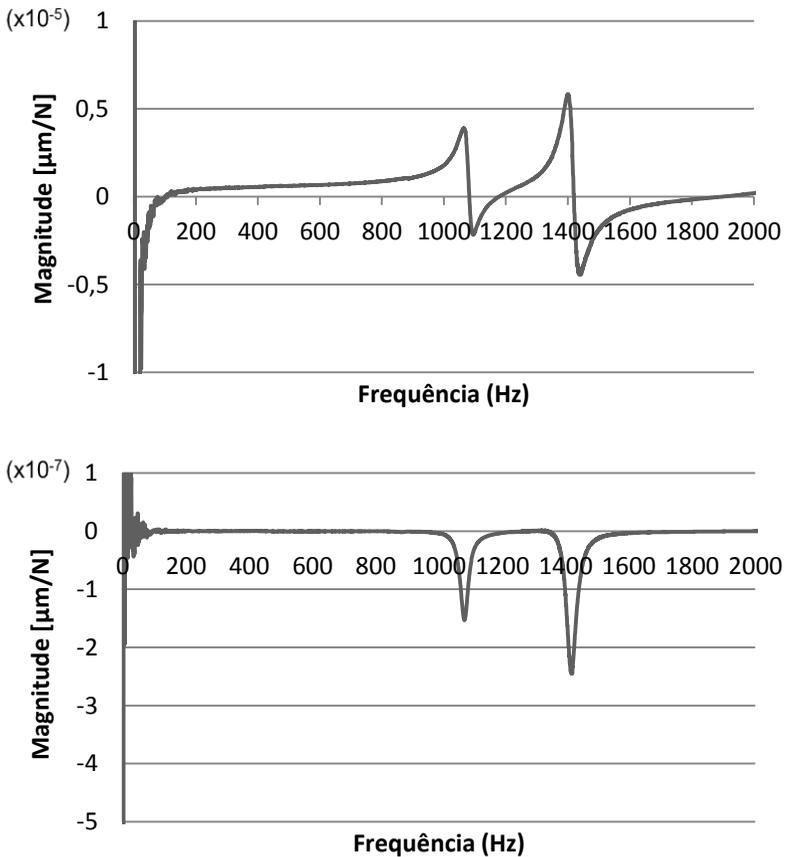
Figura 47 – Comparação entre as FRFs dos pontos 1, 4, 7 e 10 de análise.  
(a) Ponto 1; (b) Ponto 4; (c) Ponto 7; (d) Ponto 10.





Etapa posterior ao processamento digital dos dados experimentais, a identificação dos parâmetros modais é realizada através de um programa computacional desenvolvido em Matlab em que a parte real e imaginária da FRF da chapa é utilizada como dados de entrada para o método para determinar a rigidez e o amortecimento modal, utilizando a técnica do Peak Picking mostrada na seção 4.2.4. A Figura 48 mostra as partes real e imaginária da FRF do ponto 1.

Figura 48 – Parte real e imaginária da FRF para o ponto 1.



A Tabela 4 mostra os valores dos parâmetros modais dos testes realizados em cada ponto de análise da chapa. Observa-se que os dois primeiros modos de vibração da estrutura e seus amortecimentos modais são, em média,  $\omega_{n1} = 1078 \text{ Hz}$  e  $\xi_1 = 0.0137$ , e  $\omega_{n2} = 1414 \text{ Hz}$  e  $\xi_2 = 0.0127$ , respectivamente.

As FRFs dos pontos juntamente com os valores das rigidezes modais,  $k$ , da Tabela 4, nos permite observar que para todas as condições de análise, a maior flexibilidade da chapa se encontra no ponto um, e diminui no decorrer da chapa.

Tabela 4 – Parâmetros modais dos pontos de análise da chapa.

Parâmetros Modais da Chapa						
Ponto 1		Ponto 2		Ponto 3		
	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
$\omega_n$ [Hz]	1078	1414	1078	1414	1080	1415
$\xi$	0,0139	0,0126	0,0137	0,0128	0,0136	0,0127
$k$ [N/m]	2,27E+08	1,52E+08	3,15E+08	2,27E+08	5,79E+08	3,59E+08
$m$ [Kg]	4,9355	1,9151	6,8767	2,8582	12,5648	4,5481
Ponto 4		Ponto 5		Ponto 6		
	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
$\omega_n$ [Hz]	1078	1414	1080	1414	1078	1415
$\xi$	0,0137	0,0125	0,0138	0,0127	0,0136	0,0126
$k$ [N/m]	2,41E+08	1,73E+08	3,31E+08	2,71E+08	5,11E+08	4,12E+08
$m$ [Kg]	5,2443	2,1863	7,2163	3,4332	11,1447	5,2236
Ponto 7		Ponto 8		Ponto 9		
	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
$\omega_n$ [Hz]	1078	1416	1078	1414	1077	1414
$\xi$	0,0137	0,0127	0,0138	0,0127	0,0137	0,0130
$k$ [N/m]	2,22E+08	3,20E+08	3,13E+08	3,27E+08	5,27E+08	4,97E+08
$m$ [Kg]	4,8392	4,0382	6,8211	4,1334	11,5324	6,2974
Ponto 10		Ponto 11		Ponto 12		
	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
$\omega_n$ [Hz]	1078	1414	1078	1414	1078	1413
$\xi$	0,0136	0,0127	0,0139	0,0125	0,0137	0,0127
$k$ [N/m]	2,36E+08	3,77E+08	3,45E+08	5,44E+08	4,79E+08	7,59E+08
$m$ [Kg]	5,1629	4,7836	7,5376	6,886	10,4464	9,624
Ponto 13		Ponto 14		Ponto 15		
	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
$\omega_n$ [Hz]	1077	1414	1076	1412	1076	1414
$\xi$	0,0137	0,0127	0,0137	0,0124	0,0139	0,0128
$k$ [N/m]	2,42E+08	9,32E+08	3,16E+08	1,36E+09	5,00E+08	1,94E+09
$m$ [Kg]	5,3053	11,8132	6,9148	17,3371	10,948	24,5484

### 5.3.2 Fresa e sistema de fixação

No desenvolvimento dos estudos considerou-se que o sistema é rígido, excluindo as chapas as quais possuem flexibilidade na direção do eixo z. Para isso, é necessário avaliar o sistema de fixação da peça e a fresa utilizada no processo de usinagem, na faixa de frequência de interesse.

Realizaram-se testes de impacto na fresa e no sistema de fixação da chapa, para determinar suas respectivas FRFs. A Figura 49 e a Figura 50 mostram as FRFs radial e axial da fresa, respectivamente.

Figura 49 – Obtenção da FRF radial da fresa.

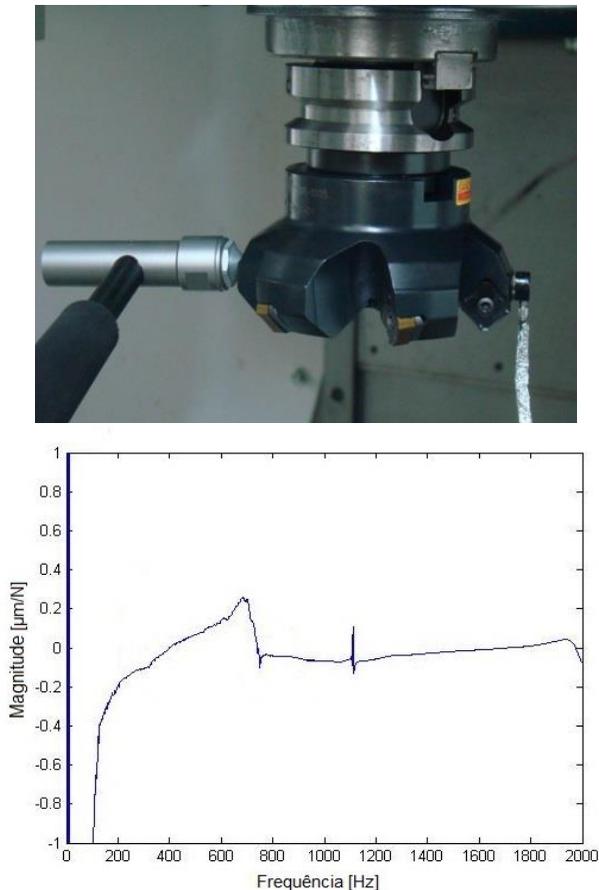
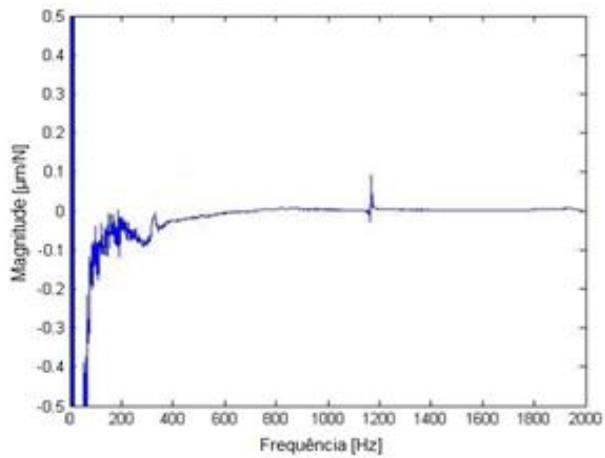


Figura 50 – Obtenção da FRF axial da fresa.



As FRFs relativas ao eixo x e y do sistema de fixação são observadas na Figura 51 e Figura 52 respectivamente. Em seguida verificou-se se estas estruturas podem afetar o comportamento dinâmico do sistema de forma significativa quando comparado à chapa.

Figura 51 – Obtenção da FRF para o eixo x do sistema de fixação.

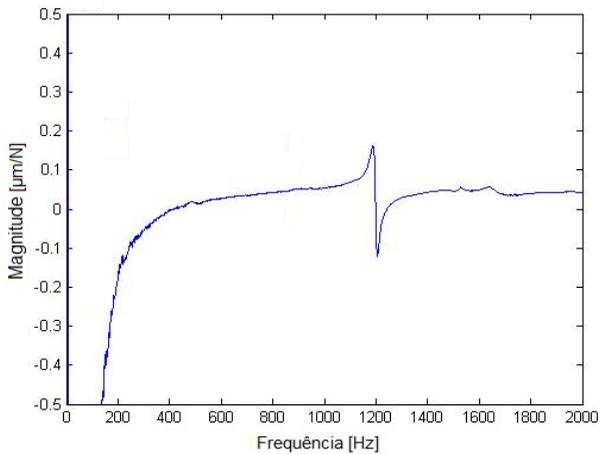
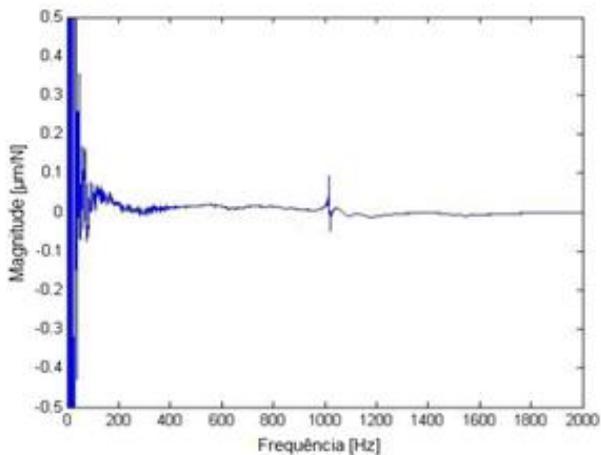
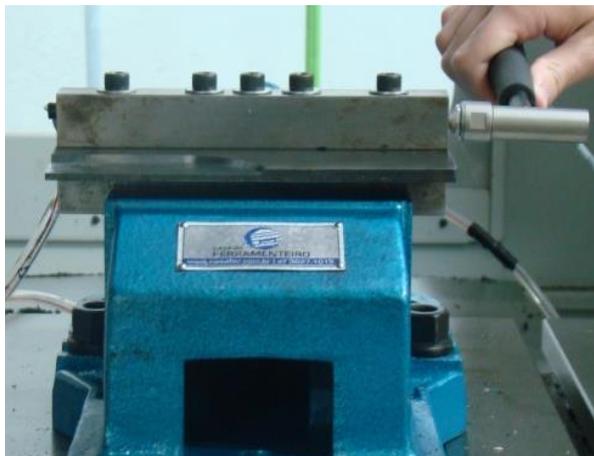
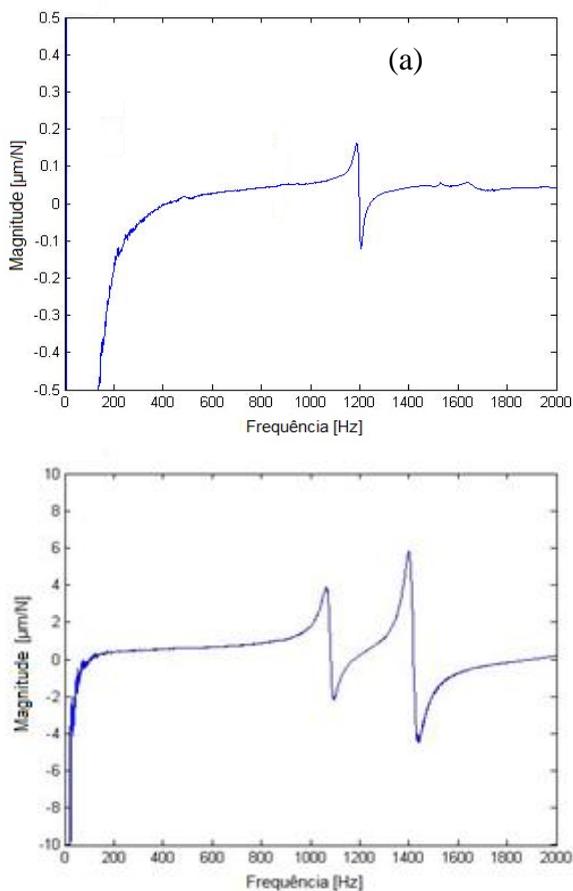


Figura 52 – Obtenção da FRF para o eixo y do sistema de fixação.



As FRFs dos testes de impacto mostraram magnitudes significativamente inferiores quando comparada às magnitudes encontradas nas FRFs da chapa, como se observa na Figura 53.

Figura 53 – Comparação da FRF entre o sistema de fixação e a chapa. (a) Fixação em x; (b) Ponto 1.



A Tabela 5 mostra os parâmetros modais para a fresa e para o sistema de fixação utilizando o método “Peak Picking”. Pode-se observar que a rigidez modal,  $k$ , encontrada para o sistema de fixação e para a fresa são significativamente superiores aos determinados para os pontos de análise da chapa mostrados na Tabela 4.

Tabela 5 – Parâmetros modais para a fresa e para o sistema de fixação.

	Parâmetros Modais				
	Fixação x	Fixação y	Fresa r		Fresa z
	Modo 1	Modo 1	Modo 1	Modo 2	Modo 1
$\omega_n$ [Hz]	1198	1078	730	1116	1173
$\xi$	0,0065	0,0279	0,0418	0,0018	0,0021
$k$ [N/m]	1,01E+10	2,19E+10	1,32E+09	2,60E+11	5,03E+11
$m$ [Kg]	177,9018	481,1179	62,6103	5,29E+03	9,27E+03

Com os resultados obtidos pode-se então adotar o sistema como sendo rígido quando comparado com a flexibilidade da chapa em estudo.

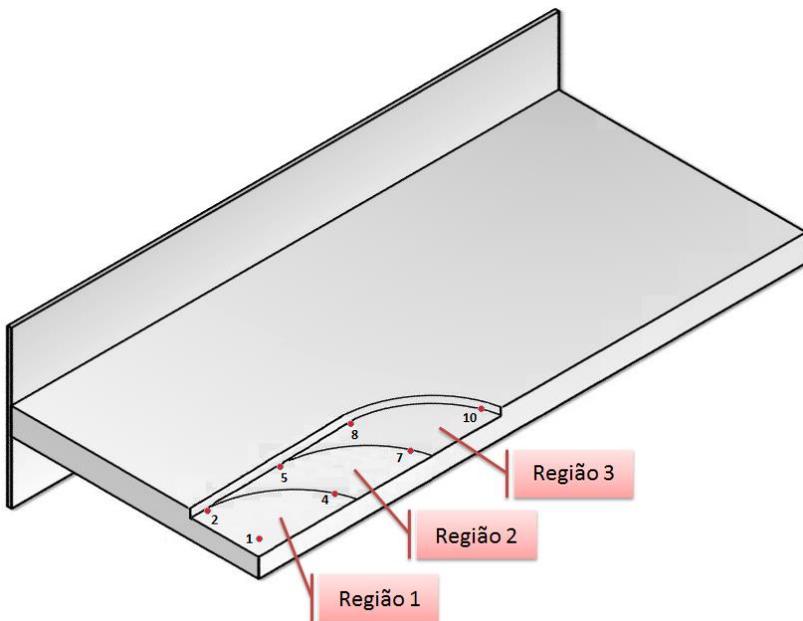
#### 5.4 DETERMINAÇÃO DO DIAGRAMA DE ESTABILIDADE

Utilizando os valores de pressão específica de corte, os coeficientes de amortecimento e as FRFs medidas em cada um dos pontos sob teste, calculou-se o diagrama de estabilidade dinâmica para o sistema conforme seção 4.2.5.

Uma consideração importante feita nos estudos foi a de que as propriedades dinâmicas da peça de trabalho variam de acordo com a mudança da posição da ferramenta durante o processo. Assim, esta variação introduz uma mudança dos diagramas dos lóbulos de estabilidade para cada região analisada da chapa. Consequentemente, existem certas regiões que serão mais instáveis ao longo do processo de usinagem.

A Figura 54 mostra três regiões distintas do processo de usinagem das chapas. Para o estudo de cada região foram utilizados três pontos de análise para a determinação do diagrama de estabilidade.

Figura 54 – Regiões de análise para a chapa.



A região 1 compreende os pontos 1,2 e 4 de análise, e o diagrama de estabilidade correspondente desta região pode ser visto na Figura 55. A região 2 contém os pontos 4, 5 e 7 da estrutura, sendo seu diagrama observado na Figura 56. Por fim a região 3 abrange os pontos 7, 8 e 10 e seu diagrama de estabilidade é mostrado na Figura 57.

Figura 55 – Diagrama de estabilidade para a região 1.

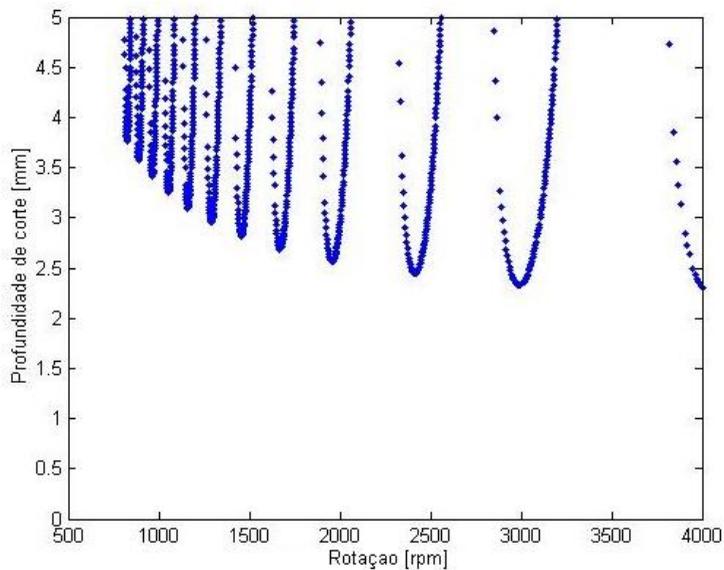


Figura 56 – Diagrama de estabilidade para a região 2.

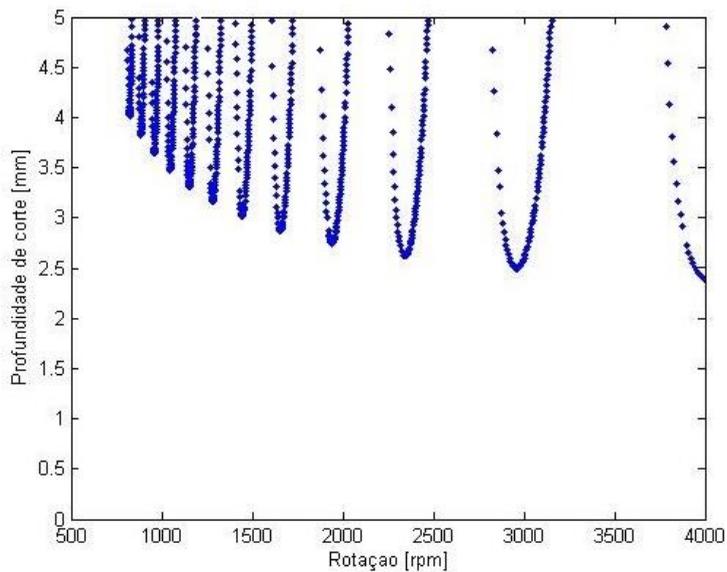
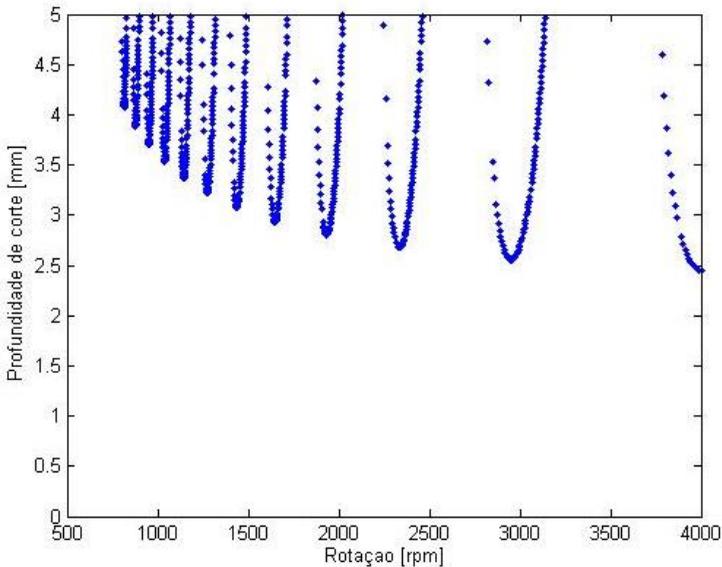


Figura 57 – Diagrama de estabilidade para a região 3.



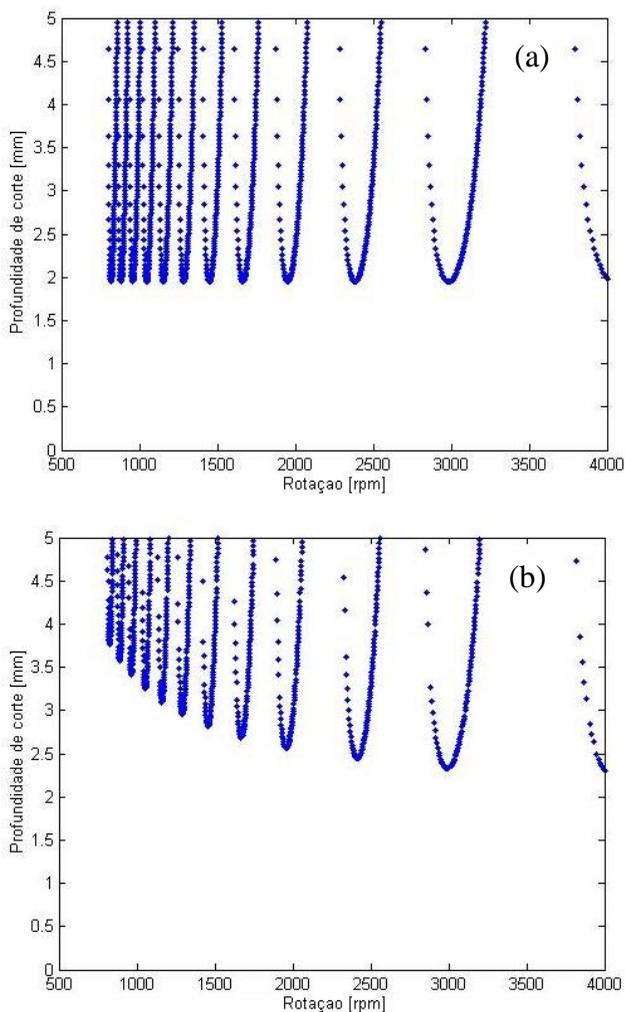
Estes três pontos são utilizados simultaneamente para a determinação do diagrama de estabilidade. Com isto as características dinâmicas de cada ponto e suas interações são levadas em conta.

Isto é importante uma vez que a vibração no ponto *i* é influenciada não somente pela ação da ferramenta no próprio ponto como também a passagem desta por outros pontos da estrutura.

A interpretação do diagrama de lóbulos de estabilidade é realizada escolhendo-se inicialmente um valor para a rotação no eixo horizontal. Para os valores de profundidade de corte, no eixo vertical, que estiverem abaixo da linha limite possivelmente não apresentarão vibrações do tipo *chatter* durante o processo de corte. Para valores de profundidade de corte acima ou sobre a linha limite possivelmente será observado aparecimento de vibrações, tornando o processo de corte instável.

A Figura 58 permite observar a influência do processo de amortecimento sobre o diagrama de lóbulos de estabilidade dinâmica. Para baixas velocidades de rotação da fresa este efeito é significativo.

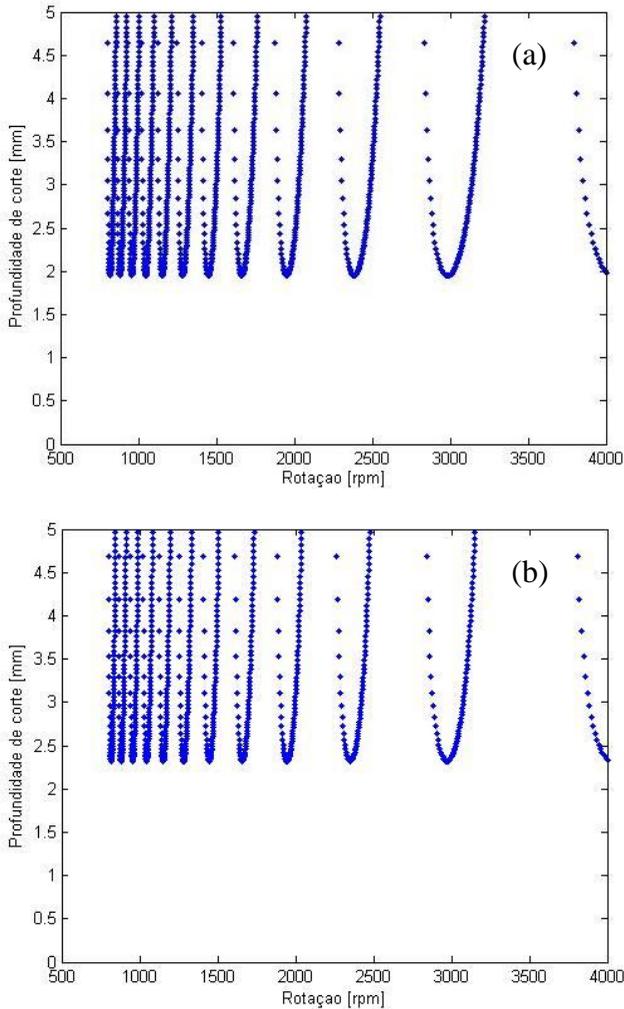
Figura 58 – Influência do processo de amortecimento para a região 1. (a) Sem amortecimento; (b) Com amortecimento.



Pode-se observar também a existência da profundidade crítica de corte para a qual o processo sempre será estável, independentemente da rotação da ferramenta de corte. Esta profundidade é aproximadamente 1,9 mm.

Da análise modal realizada sabe-se que a região mais flexível e, portanto mais instável é a região 1. Isto pode ser observado através da Figura 59, na qual nota-se claramente que a região 2 possui uma profundidade crítica de corte superior à região 1.

Figura 59 – Comparação dos diagramas de estabilidade. (a) Região 1; (b) Região 2.



Como visto na seção 4.2.2, o coeficiente de amortecimento é dado como uma função da profundidade de corte (b). Com isto, a região 1 sofrerá uma menor ação do processo de amortecimento quando comparado com a região 2, como pode ser observado na Figura 55 e Figura 56.

Para os ensaios de validação do diagrama de lóbulos de estabilidade será utilizado o diagrama referente à região 1 devido à sua maior instabilidade.

## 5.5 VALIDAÇÃO DO DIAGRAMA DE ESTABILIDADE POR MEIO DE ENSAIOS DE USINAGEM

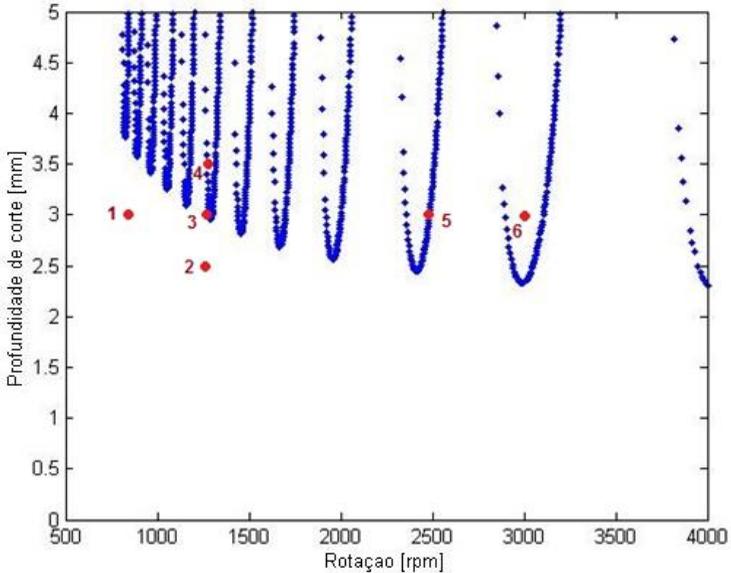
Usando o diagrama de estabilidade da Figura 55 como ferramenta de planejamento, selecionaram-se quatro rotações a serem ensaiadas, sendo 800, 1250, 2500 e 3000 RPM. Para a rotação de 1250 RPM efetuou-se três ensaios em diferentes profundidades de corte. A Figura 60 mostra o diagrama de lóbulos contendo os ensaios de validação.

Em todos os ensaios foram utilizados um avanço de 1.2 mm/rev. Como Jeruchim et al. (1992) afirmam que 3 vezes a largura de faixa de um sinal já fornece um ótimo valor para a taxa de amostragem, empregou-se na aquisição dos sinais uma taxa igual a 4 KHz.

Seguindo as práticas de análise de vibração comumente adotadas para estabelecer a resposta no domínio da frequência, a Transformada Rápida de Fourier (FFT) foi calculada utilizando-se o “software Matlab”, para cada conjunto de dados.

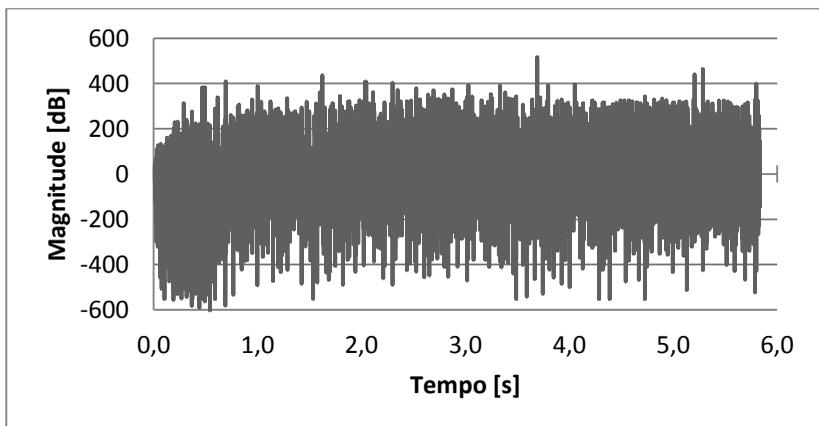
A realização de um estudo detalhado do comportamento vibracional do sistema exige uma análise criteriosa do espectro de frequências para distinguir as mudanças surgidas nos sinais devido à vibração.

Figura 60 – Diagrama de estabilidade com os pontos ensaiados.



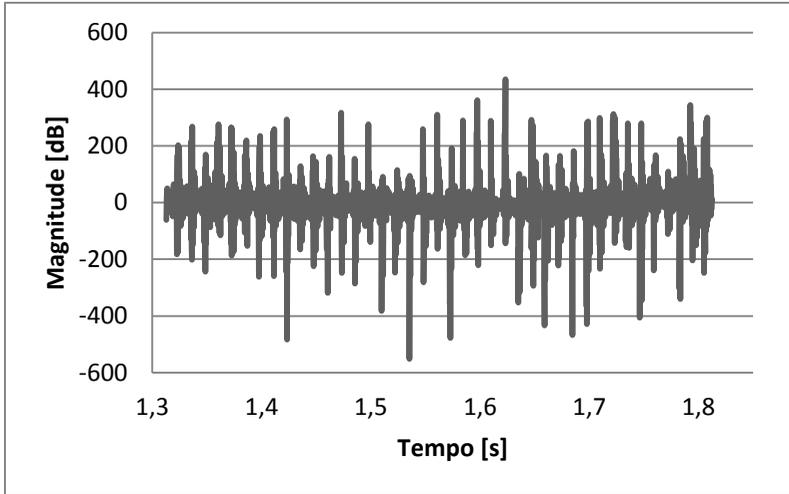
A primeira rotação selecionada foi de 800 RPM, na qual a profundidade escolhida foi de 3,0 mm. Os sinais adquiridos durante o ensaio são apresentados na Figura 61 para um tempo total de aquisição de 6 segundos.

Figura 61 – Sinal obtido pelo acelerômetro durante o ensaio à 800 RPM de rotação.



Na Figura 62 o sinal é mostrado em uma janela de 0,5s. Com isto foram analisados 2000 pontos do sinal do acelerômetro, que representam a usinagem da região mais flexível da chapa, na qual os pontos de análise são 1, 2 e 4.

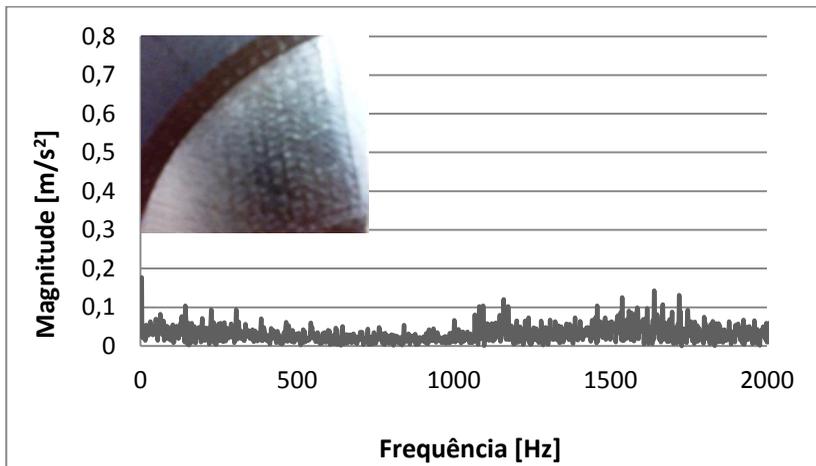
Figura 62 – Sinal obtido no ensaio com  $n=800$  RPM e  $b=3$ mm.



Com esta profundidade o sistema está num estado estável, uma vez que não há nenhuma indicação do surgimento de vibrações do tipo *chatter* durante o processo de usinagem, como pode ser visto no espectro de frequências na Figura 63.

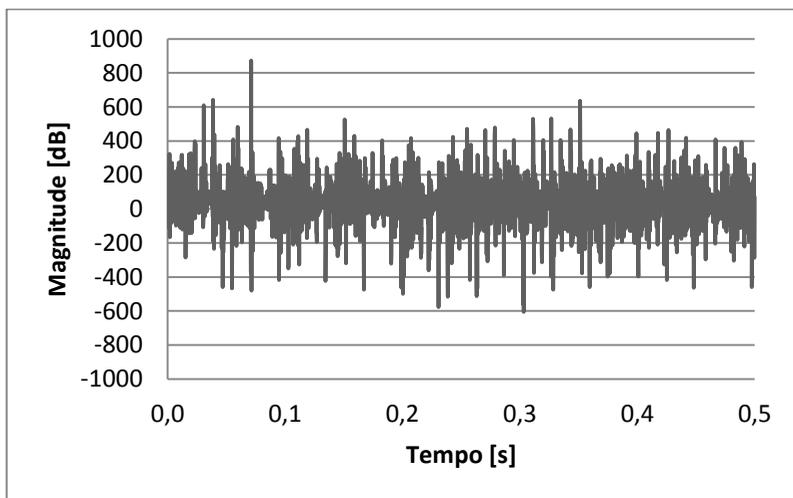
Quando a amplitude em torno da frequência natural do sistema é relativamente pequena o ensaio de corte é considerado estável. A fotografia também não aponta a presença de vibração regenerativa durante o ensaio. Neste caso, o valor medido de rugosidade foi de  $2,7 \mu\text{m Ra}$  e  $14,9 \mu\text{m Rt}$ .

Figura 63 – Espectro de frequências para o ensaio com  $n=800$  RPM e  $b=3$ mm.



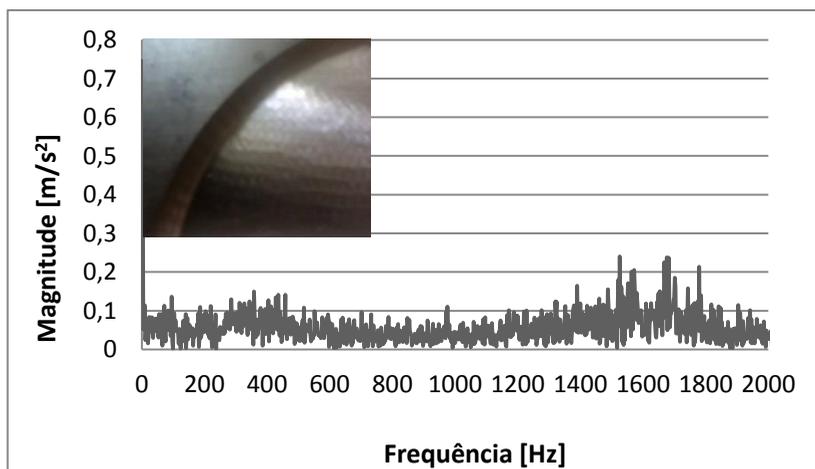
Na rotação de 1250 RPM três profundidades de corte distintas foram usadas, sendo a primeira delas em 2,5 mm. A Figura 64 mostra o sinal de amplitude de vibração do acelerômetro para a região de estudo.

Figura 64 – Sinal obtido no ensaio com  $n=1250$  RPM e  $b=2,5$ mm.

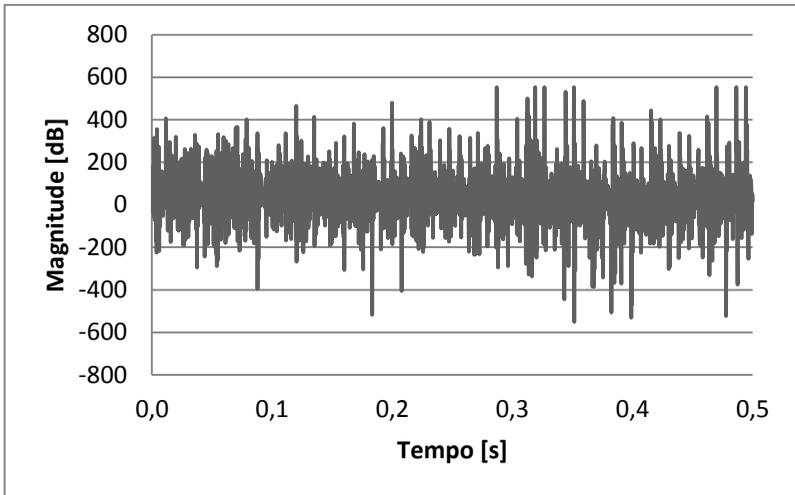


Neste caso, é notado um aumento da amplitude na FFT do ensaio, porém o sistema também permanece estável, como mostra o espectro de frequências da Figura 65. Além disso, na fotografia da chapa usinada, observa-se a inexistência de marcas de vibração regenerativa durante o fresamento. Para a rugosidade o valor encontrado foi de  $3,2 \mu\text{m Ra}$  e  $21,8 \mu\text{m Rt}$ .

Figura 65 – Espectro de frequências para o ensaio com  $n=1250 \text{ RPM}$  e  $b=2,5\text{mm}$ .



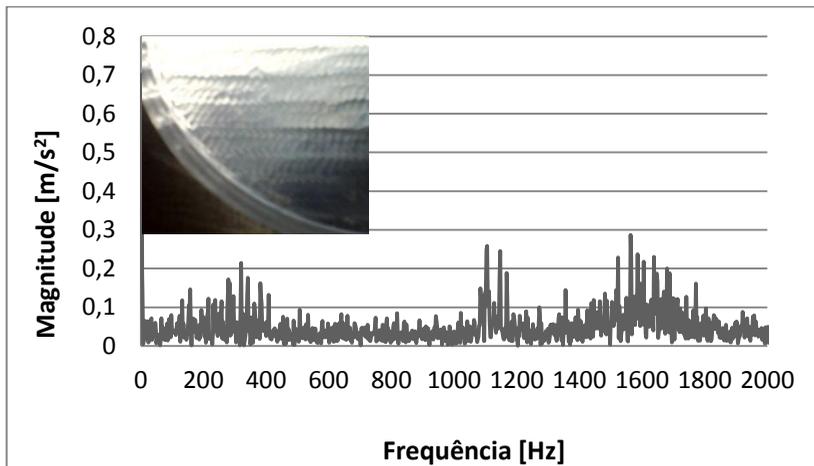
A segunda profundidade de corte selecionada foi de  $3,0 \text{ mm}$ . A Figura 66 mostra o sinal obtido pelo acelerômetro durante o ensaio, para a região mais flexível da chapa.

Figura 66 – Sinal obtido no ensaio com  $n=1250$  RPM e  $b=3$ mm.

No espectro de frequências da Figura 67 observam-se indícios do aparecimento de vibração regenerativa. Apesar de ainda não ser muito significativa, a fotografia mostra leves sinais de marcas de vibração durante a usinagem. Com esta profundidade a rugosidade ficou em torno de  $4,0 \mu\text{m Ra}$  e  $30,9 \mu\text{m Rt}$ .

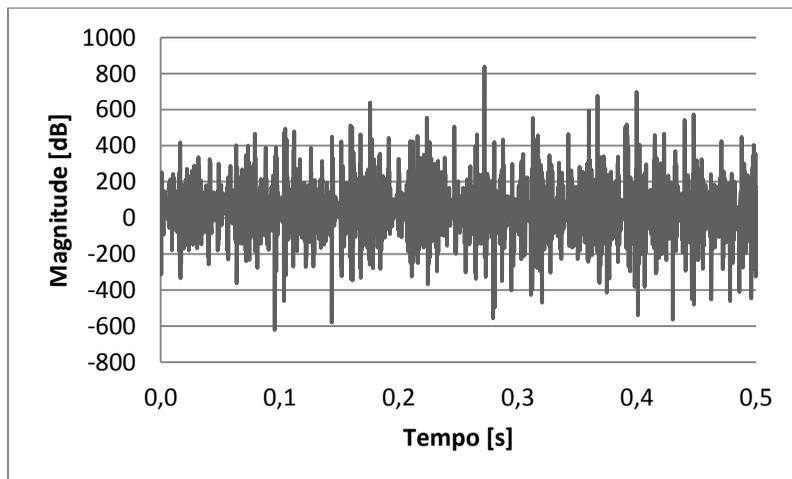
O sistema pode ser dito como em fase de transição ou condicionalmente estável durante o qual a FFT é semelhante à obtida no estado estável anterior, com a presença de alguns picos de vibração.

Figura 67 – Espectro de frequências para o ensaio com  $n=1250$  RPM e  $b=3\text{mm}$ .



A terceira profundidade de corte ensaiada com 1250 RPM foi a de 3,5 mm. O sinal obtido pelo acelerômetro durante a usinagem da região dos pontos 1, 2 e 4 é mostrado na Figura 68.

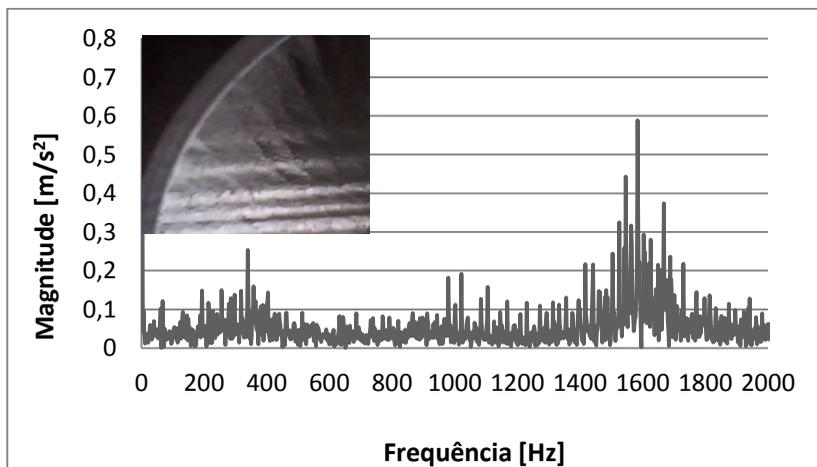
Figura 68 – Sinal obtido no ensaio com  $n=1250$  RPM e  $b=3,5\text{mm}$ .



Neste caso, a vibração regenerativa do sistema tornou-se evidente na FFT do ensaio, como pode ser observado no espectro de frequências na Figura 69. A fotografia da chapa usinada mostra o aparecimento mais declarado das marcas de vibração.

A rugosidade medida ficou em torno de  $6,6 \mu\text{m Ra}$  e  $47,0 \mu\text{m Rt}$ . Para este ensaio a vibração do tipo chatter é detectada, pois a medição do acelerômetro possui alta amplitude em torno da frequência natural relativa ao segundo modo de vibração da estrutura.

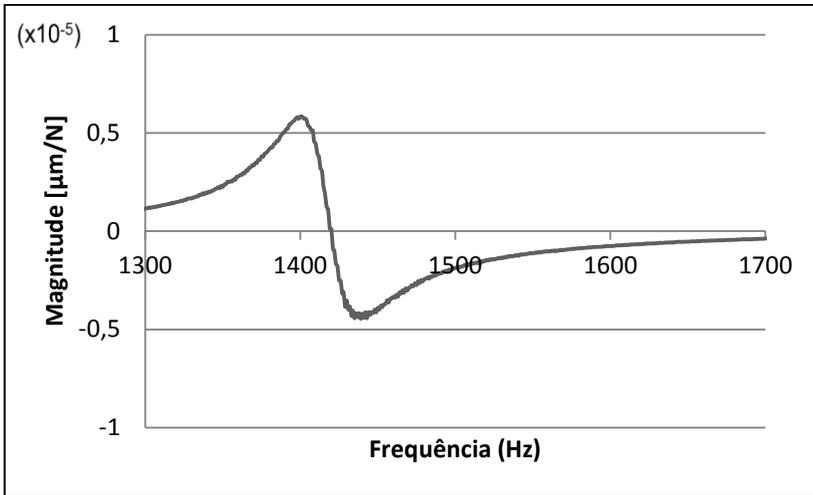
Figura 69 – Espectro de frequências para o ensaio com  $n=1250 \text{ RPM}$  e  $b=3,5\text{mm}$ .



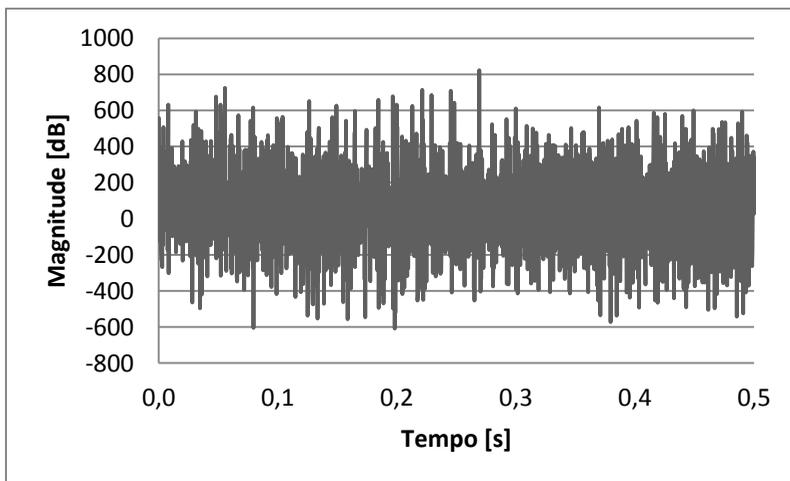
O estado instável de operação para este caso é claramente visto através do espectro de frequências. O sistema é dominado pelos componentes de alta frequência evidenciando que o segundo modo de vibração está sendo animado.

Observa-se que os picos de vibração regenerativa presente no espectro de frequências da Figura 69 encontram-se dentro da faixa em que a parte real da FRF do corpo de prova é negativa, como mostrado na Figura 70. Isto se dá devido à formulação da profundidade de corte crítica para a vibração regenerativa, onde a solução é válida apenas para valores negativos da parte real da função de transferência.

Figura 70 – Parte real da FRF do corpo de prova.

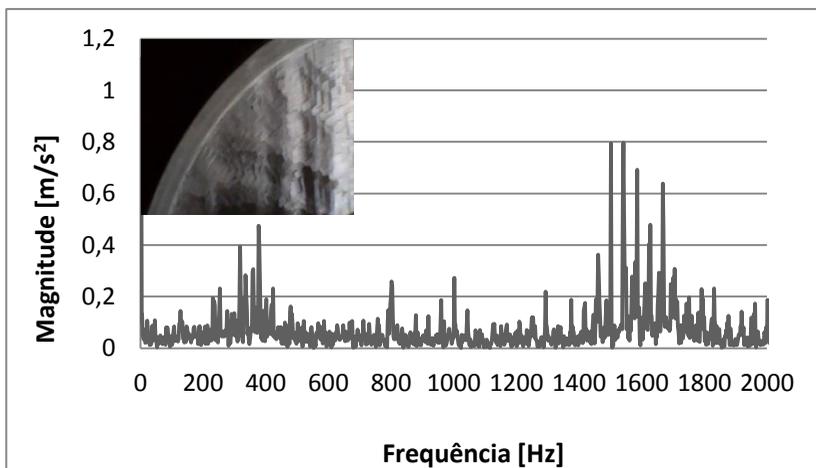


A próxima rotação selecionada foi de 2500 RPM, na qual a profundidade escolhida foi de 3,0 mm. A Figura 71 mostra o sinal da amplitude de vibração do acelerômetro para a região em estudo.

Figura 71 – Sinal obtido no ensaio com  $n=2500$  RPM e  $b=3\text{mm}$ .

Com estas condições de corte pode-se observar através da Figura 72 o surgimento de vibrações regenerativas durante o processo de usinagem. As marcas de vibração deixadas pela ferramenta neste ensaio estão mostradas na fotografia. A rugosidade medida neste ensaio foi de  $7,8 \mu\text{m Ra}$  e  $51,9 \mu\text{m Rt}$ .

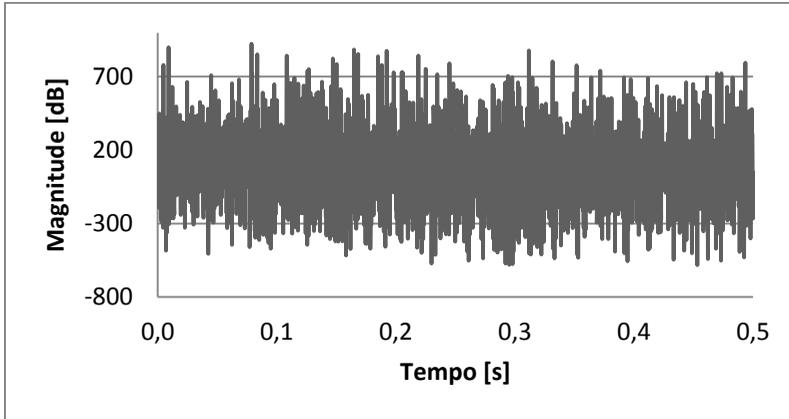
Figura 72 – Espectro de frequências do ensaio com  $n=2500 \text{ RPM}$  e  $b=3\text{mm}$ .



Quando a vibração regenerativa ocorre durante a usinagem, observa-se no espectro de frequências do ensaio não apenas um, mas uma série de picos de vibração regenerativa. É esperado observar estes picos em torno dos múltiplos da frequência de rotação da fresa e da frequência de passagem de dentes, como pode ser visto na Figura 72.

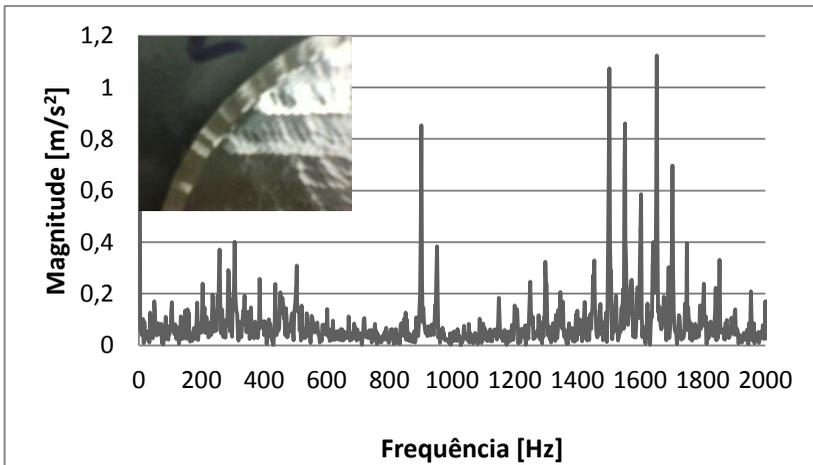
As amplitudes das acelerações medidas com *chatter* aumentaram significativamente próximo da frequência do segundo modo de vibração, caracterizando a excitação deste modo de vibração.

A última rotação adotada para as usinagens foi a de 3000 RPM. A profundidade de corte considerada para o ensaio foi de 3,0 mm. O sinal obtido do acelerômetro durante a operação de usinagem é observada na Figura 73.

Figura 73 – Sinal obtido no ensaio com  $n=3000$  RPM e  $b=3\text{mm}$ .

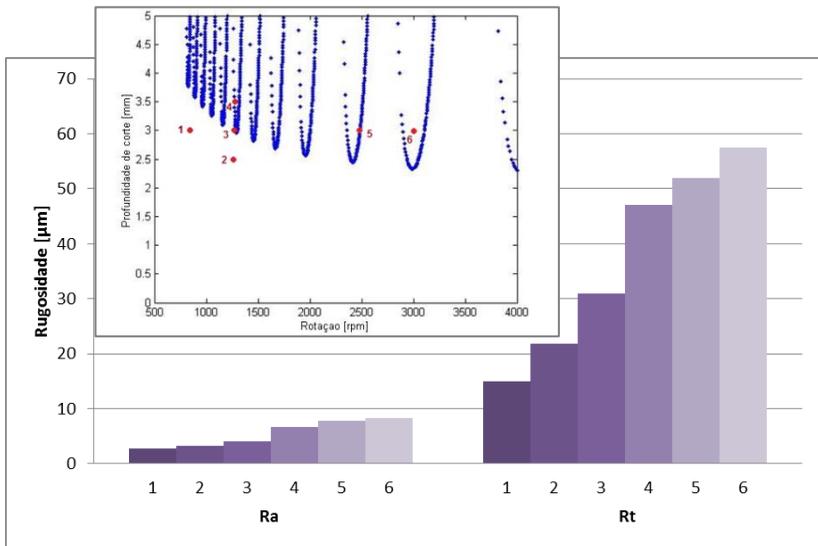
O sinal desta excitação mostrou amplitudes de vibração do acelerômetro bastante elevadas quando comparado com o sinal na mesma profundidade de corte para o ensaio com 800 RPM, onde não houve o surgimento de vibração regenerativa.

A Figura 74 apresenta a FFT do ensaio e as marcas deixadas durante a usinagem, na qual se observa claramente o aparecimento de vibrações regenerativas. Isto fica também evidenciado na fotografia da superfície da chapa usinada. A rugosidade apresentou-se em torno de  $8,3 \mu\text{m Ra}$  e  $57,4 \mu\text{m Rt}$ .

Figura 74 – Espectro de frequências do ensaio com  $n=3000$  RPM e  $b=3\text{mm}$ .

A Figura 75 mostra os valores da rugosidade para todos os ensaios. Observa-se um aumento significativo da mesma quando o fresamento se dá na região instável do diagrama de estabilidade.

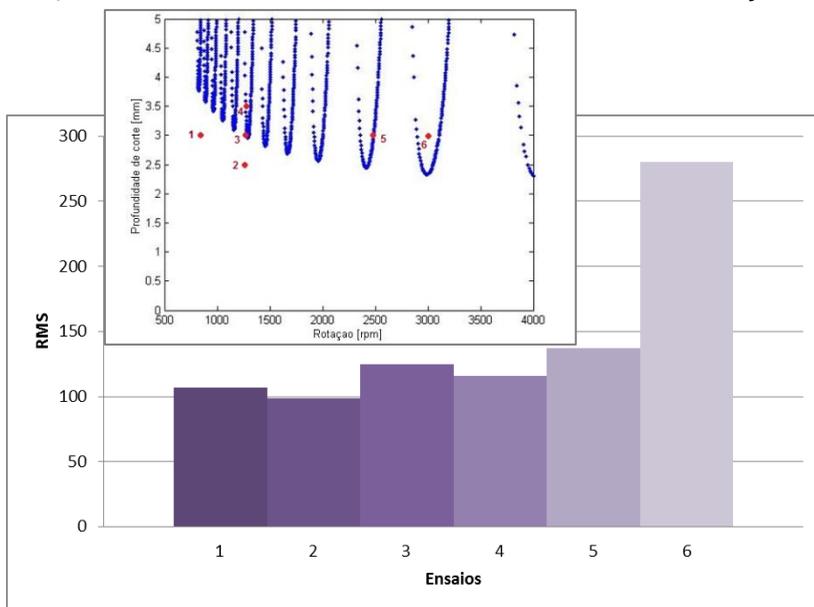
Figura 75 – Rugosidade do corpo de prova para os ensaios de validação.



A média estatística da magnitude do sinal obtido em cada ensaio de validação é mostrado na Figura 76 através do valor quadrático médio (RMS). O valor RMS é uma importante ferramenta utilizada para quantificar a energia de um sinal. Este é calculado através da relação

$$RMS = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (5.1)$$

Figura 76 – Valor quadrático médio do sinal dos ensaios de validação.



Analisando os pontos de mesma profundidade de corte, de 3mm (pontos 1, 3, 5 e 6), pode-se observar que com o aumento da velocidade de corte, tanto a rugosidade do corpo de prova quanto o valor do RMS aumentaram. Cabe salientar que o ensaio do ponto 6 foi realizado dentro da região de instabilidade, enquanto que os ensaios 3 e 5 foram feitos na fronteira da região.

Comparando os ensaios nos pontos 3 e 5, realizados na fronteira entre a região instável e estável, observa-se valores menores para a rugosidade para o ensaio no ponto 3. O mesmo acontece comparando os pontos 1 e 6, onde os resultados obtidos para a rugosidade e RMS para o ensaio do ponto 6, região de instabilidade, são superiores aos obtidos no ponto 1, região estável.

Analisando os resultados obtidos para a mesma velocidade de corte (pontos 2, 3 e 4), nota-se um aumento da rugosidade de acordo com o aumento da profundidade de corte. Observa-se ainda que tanto a rugosidade quanto o RMS do ensaio do ponto 2, região de usinagem estável, possui valores

inferiores aos obtidos nos ensaios dos pontos 3 e 4, onde é observada a presença de vibração regenerativa.

Se o efeito do amortecimento no processo de usinagem não fosse considerado, os pontos 1 e 2 estariam na região instável no diagrama de estabilidade. Entretanto, levando em conta a influência deste efeito, observa-se para estes pontos valores de rugosidade e RMS inferiores aos encontrados para ensaios realizados na região instável do diagrama.

Dado os resultados apresentados da rugosidade e RMS nos ensaios de validação realizados, pode-se perceber que a metodologia aplicada para prever as condições de instabilidade por lóbulos, na usinagem de placas planas, no processo de fresamento frontal à baixa velocidade de corte foi adequado. É possível observar que houve boa precisão na previsão do aparecimento do fenômeno de chatter.

## 6 CONCLUSÃO

O fresamento de peças contendo paredes finas é um problema atual. Dependendo das características dinâmicas do sistema e das condições de corte, o processo se torna instável levando à vibrações regenerativas. Com isso, a qualidade superficial da peça piora substancialmente, além de levar ao desgaste acentuado da ferramenta e problemas para os mancais do eixo-árvore.

A metodologia desenvolvida nesta dissertação de mestrado considera o fresamento de faceamento de peças com paredes finas. Nela são aplicados os conhecimentos de dinâmica estrutural e da usinagem dos metais com o intuito de, através da simulação computacional, prever condições de corte onde o processo de usinagem transcorre-se de maneira estável.

O sistema estudado foi projetado pensando para se ter as mesmas restrições que elementos de blocos de motor de combustão interna que apresentam baixa rigidez estrutural. Por isso, foram empregadas chapas de aço SAE 1045 como corpos de prova, presas em um dispositivo de fixação, de tal modo que a maior superfície das chapas ficasse perpendicular ao eixo de rotação da fresa.

Testes de impacto foram utilizados para a obtenção da Função de Resposta em Frequência (FRF) de diferentes pontos de análise do corpo de prova, da fresa e do sistema de fixação. Aplicando método Peak Picking às FRFs foram determinadas as rigidezes, amortecimentos e frequências modais para cada ponto testado.

Foi observada uma tendência de diminuição da receptância do corpo de prova, relativa ao segundo modo de vibração, na direção mais flexível, enquanto que o primeiro modo de vibração permaneceu praticamente inalterado.

Com relação à fresa e ao sistema de fixação da peça, os parâmetros modais determinados durante os ensaios se mostraram com uma rigidez modal superior, não afetando o comportamento dinâmico do sistema de forma significativa quando comparado ao corpo de prova.

Os conceitos teóricos da vibração regenerativa foram apresentados e discutidos visando implementar um código computacional para prever o diagrama de lóbulos de estabilidade. O amortecimento do processo também teve que ser

considerado, uma vez que a velocidade de corte recomendada pelo fabricante da ferramenta para usinar aço é relativamente baixa.

Na formulação do diagrama de estabilidade foi considerada a variação das propriedades dinâmicas do corpo de prova de acordo com a posição da ferramenta durante o processo de usinagem. Com isto foram determinados diferentes diagramas de lóbulos de estabilidade para cada região analisada.

Analisou-se a influência do processo de amortecimento sobre o diagrama de lóbulos de estabilidade dinâmica, onde para baixas velocidades de rotação da fresa este efeito se mostrou significativo, possibilitando o aumento da profundidade de corte.

Verificou-se por meio dos ensaios de usinagem que a previsão do diagrama de lóbulos está de acordo com o aparecimento do fenômeno de chatter durante o processo de fresamento, observando as amplitudes de vibração e o acabamento superficial da peça. Lóbulos de estabilidade têm provado ser de grande valor na seleção de condições de corte em que a vibração de usinagem poderia ser evitada.

Observou-se que nos ensaios à 800RPM e 3mm de profundidade e à 1250RPM e 2,5mm de profundidade, onde nas FRFs não se evidenciaram picos de vibração regenerativa com amplitudes significativas, o acabamento superficial dos corpos de prova mostrou-se sem a presença de ondulações decorrentes da vibração chatter.

Para o ensaio à 1250RPM e 3mm de profundidade de corte mostrou a presença de alguns picos de vibração regenerativa e o surgimento de leves ondulações na superfície devido à vibração durante a usinagem. Já para os ensaios à 1250RPM e 3,5mm de profundidade, 2500RPM e 3000RPM, ambos com 3mm de profundidade, as amplitudes das acelerações medidas com vibração regenerativa aumentaram significativamente próximo da frequência do segundo modo de vibração e a qualidade superficial se mostrou inferior, contendo elevadas ondulações.

Analisando os pontos de mesma profundidade de corte (pontos 1, 3, 5 e 6), pôde-se observar que com o aumento da velocidade de corte, tanto a rugosidade do corpo de prova quanto o valor do RMS aumentaram. Para os resultados obtidos para a mesma velocidade de corte (pontos 2, 3 e 4), notou-se um

aumento da rugosidade de acordo com o aumento da profundidade de corte ensaiada.

Dado os resultados apresentados da rugosidade e RMS nos ensaios de validação realizados, pode-se perceber que a metodologia aplicada para prever as condições de instabilidade por lóbulos obteve boa precisão na previsão do aparecimento do fenômeno de vibração regenerativa.

A metodologia empregada para determinar seu comportamento vibracional e correlacioná-lo com resultados experimentais obtidos a partir de sinais de vibração adquiridos em posições críticas do corpo de prova pode ser empregada para quaisquer outras estruturas de baixa rigidez utilizadas na manufatura onde a vibração estrutural é uma variável determinante para a qualidade do processo, como por exemplo, na fabricação de blocos de motor.

## **7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

- I. Avaliar a estabilidade dinâmica durante o fresamento de topo de placas utilizando uma fresa com ângulo dos insertos de 90°.
- II. Desenvolver uma metodologia para analisar a estabilidade dinâmica utilizando simulação no domínio do tempo, e assim utilizar o caminho percorrido pelos dentes da fresa durante a usinagem no desenvolvimento do diagrama de estabilidade.
- III. Realizar um estudo aprofundado sobre o coeficiente de amortecimento para os vários tipos de ferros fundidos, material normalmente utilizado em blocos de motores.
- IV. Correlacionar a qualidade superficial da peça usinada com a amplitude dos picos da FFT do sinal obtido durante o fresamento.

**REFERÊNCIAS**

AHMADI, K.; ISMAIL, F. Analytical stability lobes including nonlinear process damping effect on machining chatter. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**. v.51, p.296–308, 2011.

\_\_\_\_\_. Experimental investigation of process damping nonlinearity in machining chatter. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**. v.50, p.1006-1014, 2010.

\_\_\_\_\_. Investigation of finite amplitude stability due to process damping in milling. **CIRP Conference on High Performance Cutting**. v.5, p.60-65, 2012.

\_\_\_\_\_. Stability lobes in milling including process damping and utilizing Multi-Frequency and Semi-Discretization Methods. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**. v.54-55, p.46-54, 2012.

ALTINTAS, Y. Analytical prediction of three dimensional chatter stability in milling. **JSME, International Journal**. v.44, n.3, p.717-723, 2001.

ALTINTAS, Y.; BUDAK, E. Analytical prediction of stability lobes in milling. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**. v. 44, n.1, p.357-362, 1995.

ALTINTAS, Y. **Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and CNC Design**. Nova York : Cambridge University Press, 2000.

ALTINTAS, Y.; EYNIAN, M.; ONOZUKA, H. Identification of dynamic cutting force coefficients and chatter stability with process damping. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**. v.57, n.1, p.371-374, 2008.

ARMAREGO, E. J. A.; WHITFIELD, R. C. Computer based modelling of popular machining operations for force and power

predictions. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**. v.34, n.1, p.65-69, 1985.

AYGÜN, A. **Mechanics and dynamics of line boring operation with process damping effect**. Vancouver: University of British Columbia, 2010.

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. **Engineering applications of correlation and spectral analysis**. Nova York: John Wiley & Sons, 1993.

BOOTHROYD, G.; KNIGHT, W. A. **Fundamentals of metals machining and machine tools**. 3.ed. Nova York : CRC Press, 2005.

BUDAK, E.; ALTINTAS, Y. Analytical prediction of chatter stability in milling - Part I : General Formulation. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control**. v.120, n.1, p.22-30, 1998.

BUDAK, E.; TUNC, L. T. Identification and modeling of process damping in turning and milling using a new approach. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**. v.59, n.1, p.403-408, 2010.

BUDAK, E.; ALAN, S.; ÖZGÜVEN, H. N. Analytical prediction of part dynamics for machining stability analysis. **International Journal of Automation Technology**. v.4, n.3, p.259-267, 2010.

CHENG, K. **Machining Dynamics: Fundamentals, Applications and Practices**. Londres: Springer, 2008.

CHIOU, R. Y.; LIANG, S. Y. Chatter stability of a slender cutting tool in turning with tool wear effect. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**. v.38, n.4, p.315-327, 1998.

CLARK, K. B.; FUJIMOTO, T. **Product development performance: strategy, organization, and management in the world auto industry**. Boston: Harvard Business School Press, 1991.

CRUZ, S. L. M. da. **Estudo de técnicas de análise modal operacional em sistemas sujeitos a excitações aleatórias com a presença de componente harmônico.** Belém: Universidade Federal do Pará (UFPA), 2006.

CURWELL, S.; COOPER, I. The implications of urban sustainability. **Building Research & Information.** v.26, n.1, p.17-28, 1998.

DINIZ, A. E.; MARCONDES, F.; COPPINI, N. **Tecnologia da usinagem dos materiais.** São Paulo: Artliber, 2006.

DOVEL, G. A dynamic tool for design and troubleshooting. **Mechanical Engineering.** v.111, n.3, p.82-86, 1989.

DROZDA, T.; WICK, C. **Machining, Tool and Manufacturing Engineers Handbook.** 4.ed. Michigan: Society of Manufacturing Engineers, 1983.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Application.** 2.ed. Hertfordshire: Research Studies Press, 2000.

FERRARESI, D. **Fundamentos da Usinagem dos Metais.** São Paulo: Edgard Blucher, 1977.

FU, H.; DEVOR, R.; KAPOOR, S. A mechanistic model for the prediction of the force system in face milling operations. **Journal of Engineering for Industry.** v.106, n.1, p.81-88, 1984.

HE, J.; FU, Z. **Modal Analysis.** Woburn: Butterworth-Heinemann, 2001.

HUANG, C. Y.; WANG, J. J. Mechanistic modeling of process damping in peripheral milling. **Journal of Manufacturing Science and Engineering.** v.129, n.1, p.12-20, 2006.

HURMUZLU, Y.; NWOKAH, O. D. I. **The Mechanical Systems Design Handbook: Modeling, Measurement, and Control.** Nova York: CRC Press, 2001.

JIN, X. **Mechanics and Dynamics of Micro-cutting Process.** Vancouver: University of British Columbia, 2012.

KALPAKJIAN, S.; SCHMID, S. R. **Manufacturing Engineering and Technology.** 4.ed. Nova Jersey: Prentice Hall, 2001.

KELLY, S. G. **Fundamentals of Mechanical Vibrations.** 2.ed. Nova York: McGraw-Hill Science, 2000.

KING, R. **Handbook of High Speed Machining Technology.** Nova York: Chapman and Hall Advanced Industrial Technology Series, 1985.

KURATA, Y. et al. Chatter stability in turning and milling with in process identified process damping. **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing.** v.4, n.6, p.1107-1118, 2010.

LE LAN, J. V., MARTY, A.; DEBONGNIE, J.F. A stability diagram computation method for milling adapted to automotive industry. **CIRP International Conference on High performance cutting.** 2.ed., 2006.

LEE, B. Y.; TARNG, Y. S.; MA, S. C. Modeling of the process damping force in chatter vibration. **International Journal of Machine Tools Manufacture.** v.35, n.7, p.951-962, 1995.

LEE, E. H.; SHAFFER, B. W. Theory of plasticity applied to the problem of machining. **Journal of Applied Mechanics.** v.18, p.405-413, 1951.

LI, H. Z.; ZHANG, W. B.; LI, X. P. Modeling of cutting forces in helical end milling using a predictive machine theory. **International Journal of Mechanical Sciences.** v.43, n.8, p.1711-1730, 2001.

MACHADO, A. R. et al. **Teoria da Usinagem dos Materiais.** São paulo: Blucher, 2009.

MAIA, N. M. M. et al. **Theoretical and Experimental Modal Analysis.** Taunton: Reserch Studies Press, 1997.

MARCELINO, A. P. et al. Medição e simulação dos esforços de usinagem no fresamento de topo reto de ligas de alumínio tratável termicamente 6061. In: CONGRESSO ESTUDANTIL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 11., 2004, Nova Friburgo. **Anais...** Nova Friburgo: Instituto Politécnico da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2004. Não paginado.

MENDES, P.; OLIVEIRA, S. **Análise dinâmica de estruturas: utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos**. Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 2008.

MERRITT, H. E. Theory of self-excited machine tool chatter. **Journal of Engineering for Industry**. v.87, n.4, p.447-454, 1965.

MINIS, I.; YANUSHEVSKY, R. A new theoretical approach for the prediction of machine tool chatter in milling. **Journal of Engineering for Industry**. v. 115, n.1, p.1-8, 1993.

MINIS, I. et al. Analysis of linear and nonlinear chatter in milling. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**. v.39, n.1, p.459-462, 1990.

MORIWAKI, T. Trends in recent machine tool technologies. **NTN Technical review**. v.74, 2006.

OPTIZ, H.; BERNARDI, F. Investigation and calculation of the chatter behavior of lathes and milling machines. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**. v.18, p.335-343, 1970.

QUINTANA, G.; CIURANA, J.; TEIXIDOR, D. A new experimental methodology for identification of stability lobes diagram in milling operations. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**. v.48, n.15, p.1637-1645, 2008.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. 4.ed. São Paulo: Pearson, 2008.

REZENDE, C. R. **Correlação entre modelagem numérica e resultados experimentais na análise de estabilidade**

**dinâmica do torneamento de aços.** Joinville: Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), 2006.

ROSSI, G.C. **Estudo das forças de corte no processo de fresamento de bordas de chapas utilizadas para a fabricação de tubos de aço com costura.** São Paulo: Universidade de São Paulo (USP), 2008.

SANDVIK COROMANT. **Manual técnico de usinagem, torneamento, fresamento, furação, mandrilamento e sistemas de fixação.** 2.ed. São Paulo: Elanders, 2010.

SANTOS, R. G. dos. **Desenvolvimento de um método para comparar os limites de estabilidade dinâmica em máquinas-ferramentas utilizando o diagrama de lóbulos.** São Carlos: Universidade de São Paulo (USP), 2011.

SCHEY, J. **Introduction to Manufacturing Processes.** 3.ed. Boston : McGraw-Hill, 2000.

SCHMITDBERG, R.; PAL, T. Solving vibration problems using modal analysis. **Sound and Vibration.** v.20, n.3, p.32-42, 1986.

SCHMITZ, T. L.; SMITH, K. S. **Machining Dynamics: Frequency Response to Improved Productivity.** Nova York: Springer, 2008.

SERGUY, S. et al. Toolpath dependent stability lobes for the milling of thin-walled parts. **International Journal of Machining and Machinability of Materials.** v.4, n.4, p.377-392, 2008.

SHAMOTO, E.; ALTINTAS, Y. Prediction of shear angle in oblique cutting with maximum shear stress and minimum energy principle. **ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition.** v.121, n.3, p. 399-407, 1999.

SHAW, M. C. **Metal Cutting Principles.** 2.ed. New York: Oxford University Press, 2004.

SHIN, Y. C.; JENSEN, S. A. Stability analysis in face milling operations, Part 1: Theory of stability lobe prediction. **Journal of**

**Manufacturing Science and Engineering.** v.121, n.4, p.600-605, 1999.

SISSON, T. R.; KEGG, R. L. An explanation of low-speed chatter effects. **Journal of Engineering for Industry.** v.91, n.4, p.951-958, 1969.

SOLIS, E. et al. A new analytical–experimental method for the identification of stability lobes in high-speed milling. **International Journal of Machine Tools and Manufacture.** v.44, n.15 , p.1591–1597, 2004.

SRIDHAR, R.; HOHN, R. E.; LONG, G. W. A general formulation of the milling process equation: Contribution to machine tool chatter research-5. **Journal of Engineering for Industry.** v.90, n.2, p.317-324, 1968.

STEMMER, C. E. **Ferramentas de Corte I.** 5.ed. Florianópolis: UFSC, 2001.

STEMMER, C. E. **Ferramentas de Corte II.** 2.ed. Florianópolis: UFSC, 1995.

TAYLOR, F. W. **On the art of cutting metals.** Nova York: American society of mechanical engineers, 1907.

THOMSON, W. T. **Theory of Vibrations with applications.** 5.ed. Nova Jersey: Prentice Hall Inc., 1997.

TLUSTY, G. **Manufacturing Process and Equipment.** New Jersey: Prentice Hall, 2000.

TLUSTY, J.; ISMAIL, F. Special aspects of chatter in milling. **ASME Journal of Engineering Industry.** v.105, n.1, p.24-32, 1983.

TLUSTY, J.; POLACEK, M. The stability of machine tools against self excited vibrations in machining. **International research in production engineering, ASME.** v.1, p.465-474, 1963.

TLUSTY, J.; ZATON, W.; ISMAIL, F. Stability lobes in milling. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**. v.32, n.1, p.309-313, 1983.

TOBIAS, S. A. FISHWICK, W. **A theory of regenerative chatter**. Londres: The Engineer, 1958.

TOBIAS, S. A. **Machine-tool vibration**. Londres: Blackie, 1965.

TRENT, E. M.; WRIGHT, P. K. **Metal Cutting**. 4.ed. Boston: Butterworth-Heinemann, 2000.

WALLACE, P. W.; ANDREW, C. Machining forces: some effects of tool vibration. **Journal of Mechanical Engineering Science**. v.7, n.2, p.152-162, 1965.

WECK, M. **Werkzeugmaschinen: Messtechnische Untersuchung und Beurteilung, dynamische Stabilität**. Berlin: Springer, 2006.

WU, D. W. A new approach of formulationg the transfer function for dynamic cutting process. **Journal of Engineering for Industry**. v.111, p.37-47, 1989.

ZHENG, L.; CHIOU, Y. S.; LIANG, S. Y. Three dimensional cutting force analysis in end milling. **International Journal of Mechanical Sciences.**, v.38, n.3, p.259-269, 1996.

ZOU, G. P.; YELLOWLEY, I.; SEETHALER, R. J. A new approach to the modeling of oblique cutting process. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**. v.49, n.9, p.701–707, 2009.