UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

AUGUSTO SALFER DEVIGILI

ESTUDO E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE PREDITIVO EM PROCESSOS DE GESTÃO DE ESTOQUE

JOINVILLE, SC
2016

AUGUSTO SALFER DEVIGILI

ESTUDO E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE PREDITIVO EM PROCESSOS DE GESTÃO DE ESTOQUE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.
Orientadora: Profa. Dra. Mariana Santos Matos Cavalca
Co-orientador: Prof. Dr. José de Oliveira

JOINVILLE, SC
2016

AUGUSTO SALFER DEVIGILI

ESTUDO E APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE PREDITIVO EM PROCESSOS DE GESTÃO DE ESTOQUE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Elétrica como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Eletricista.

Banca Examinadora:

Orientadora: Dra. Mariana Santos Matos Cavalca
Universidade do Estado de Santa Catarina

Co-orientador: Dr. José de Oliveira
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: Dr. Douglas Wildgrube Bertol
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: Me. Arthur Garcia Bartsch
Universidade do Estado de Santa Catarina

JOINVILLE, 12 DE DEZEMBRO DE 2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e minha família, não só pelo apoio para a realização deste trabalho, mas por toda a minha vida acadêmica e pessoal.

Aos amigos que sempre me motivaram e estiveram comigo nas horas boas e ruins. Faço um destaque especial para o Guilherme do Nascimento e Fabricío Trentini que me acompanharam nessa jornada dentro da UDESC.

Ao grupo PET engenharia elétrica, pelos aprendizados, pelas oportunidades e pelo ambiente que me proporcionou conhecer diversas pessoas e fazer amigos que levarei para a vida toda.

E por fim à minha orientadora Mariana Santos Matos Cavalca e ao co-orientador José de Oliveira, pela dedicação e pelos ensinamentos.

RESUMO

Neste trabalho, será apresentado um estudo da aplicação de técnicas de controle em um sistema de gestão de estoque. Primeiramente, foram aplicadas técnicas de projeto polinomial de alocação de polos. Em um segundo momento, empregou-se o controle preditivo baseado em modelo em espaço de estados (SSMPC). O estudo desse controlador se dividiu em duas partes: avaliação de parâmetros de sintonia e análise do tratamento de restrições do sistema. Entre as restrições tratadas, destacam-se a excursão do sinal de entrada e o desenvolvimento de condições para adequar o número máximo e mínimo de produtos em estoque. Em busca do estudo do comportamento do sistema para diferentes tipos de empresas, foram realizadas simulações envolvendo diferentes valores e comportamentos para a demanda. Os resultados obtidos neste trabalho foram promissores, abrindo um leque de possibilidades visando trabalhos futuros.

Palavras-chave: Teorias de Controle, Controle de Estoque, Controle Preditivo Baseado em Modelo, SSMPC.

ABSTRACT

In this work, will be presented a study about the application of control techniques in an inventory management system. Polynomial pole-allocation techniques were applied at first followed by the state-space model-based predictive control (SSMPC). The study of this controller was divided in two parts: evaluation of tuning parameters and analysis of the treatment of system restrictions. Among the restrictions treated, we highlight the excursion of the input signal and the development of conditions to adjust the maximum and minimum number of products in stock. Aiming the study the system's behavior for different companies' profiles, simulations involving a range of input values and considering different demand levels were performed. The results obtained in this work were promising and there is a wide range of possibilities for future works.

Keywords: Control Theory, Inventory Control, Model-based Predictive Control, SSMPC.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Modelo de Estoque 18
Figura 2: Modelo de Estoque Escolhido 19
Figura 3: Modelo de Estoque com Controlador 20
Figura 4: Modelo de Controle com Realimentação e Pré-filtro 20
Figura 5: Diagrama de Blocos com Controlador Definido 21
Figura 6: Resultados com Controlador Calculado pelo Projeto Polinomial de Alocação de Polos com Demanda Zero 22
Figura 7: Diagrama de Blocos do Sistema com a Inclusão do Integrador no Controlador 23
Figura 8: Resposta com Controlador Calculado pelo Projeto Polinomial de Alocação de Polos com Demanda Três e sem Imposição de Condições 24
Figura 9: Resposta com Controlador Calculado pelo Projeto Polinomial de Alocação de Polos com Demanda Três e com Imposição de Condições 25
Figura 10: Resposta para o Levitador Magnético sem Restrições 37
Figura 11: Resposta para o Levitador Magnético com Restrições 37
Figura 12: Resposta para o Levitador Magnético com Restrições e Sinal de Controle Delimitado aos Inteiros 38
Figura 13: Resposta do Sistema para Variações do Horizonte de Predição 41
Figura 14: Resposta do Sistema para Variações do Horizonte de Controle 42
Figura 15: Resposta do Sistema para Variações do ρ 43
Figura 16: Resposta do Sistema para os Parâmetros Definidos 43
Figura 17: Comparação da Resposta do Sistema tendo u real e u inteiro 44
Figura 18: Resposta do Sistema com a Inclusão da Não Linearidade na Demanda. 45
Figura 19: Resposta do Sistema com a Inclusão da Não Linearidade na Demanda para Visualização dos Números Negativos 46
Figura 20: Resposta do Sistema com a Inclusão da Não Linearidade na Demanda para Visualização da Não Linearidade 47
Figura 21: Comparativo da Resposta com Restrição de Valor Mínimo em u e sem Restrição 48
Figura 22: Comparativo da Resposta com Restrição de Valor Máximo em u com a Resposta Somente com a Restrição de Valor Mínimo 49
Figura 23: Comparativo da Resposta com Limitação de Saída com a Resposta sem Limitação de Saída 53
Figura 24: Comparativo Entre a Resposta para Atraso de 1 dia e 3 dias 54
Figura 25: Comparativo Entre a Resposta para Atraso de 5 dias e 7 dias 55
Figura 26: Análise da Resposta do Sistema para Demandas Constantes com valores Diferentes 56
Figura 27: Análise da Resposta do Sistema para Demanda Constante de 8 e Atraso de 1 Dia 57
Figura 28: Análise da Resposta do Sistema para Demanda Variando Linearmente. 58
Figura 29: Análise da Resposta do Sistema para Demanda Variando Apenas em um Período do Ano 58
Figura 30: Análise da Resposta do Sistema com Atraso de 7 Dias para Demanda Variando Entre 0 e 2 Produtos 59
Figura 31: Análise da Resposta do Sistema com Atraso de 2 Dias para Demanda Variando Entre 0 e 8 Produtos 60

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ASBRAS	Associação Brasileira de Supermercados
ASLOG	Associação Brasileira de Logística
BQP	*Binary Quadratic Programming*
DMC	*Dynamic Matrix Control*
GPC	*Generalized Predictive Control*
IMAM	Instituto de Movimentação e Armazenagem
MINLP	*Mixed Integer Non-Linear Programming*
MIQP	*Mixed Integer Quadratic Programming*
MPC	*Model-based Predictive Control*
MPHC	*Model Predictive Heuristic Control*
QDMC	*Quadratic Dynamic Matrix Control*
SISO	*Single Input Single Output*
SSMPC	*State-Space Model-based Predictive Control*
ZOH	*Zero-Order Hold*

SIMBOLOGIA

1_{Mp}	Vetor de ordem M com todos os elementos iguais a 1
1_N	Vetor de ordem M com todos os elementos iguais a 1
$1/\theta(z)$	Denominador da planta principal do modelo
$1/R(z)$	Controlador do ramo direto
A	Matriz de transição de estado tempo discreto
A_a	Matriz de transição aumentada
A_c	Matriz de transição de estado tempo contínuo
B	Matriz de entrada de tempo discreto
B_a	Matriz de entrada aumentada
B_c	Matriz de entrada de tempo contínuo
C	Matriz de saída de tempo discreto
C_a	Matriz de saída aumentada
C_c	Matriz de saída de tempo contínuo
$D(k)$	Demanda de produtos no instante k
$E(z)$	Bloco de pré-alimentação
f	Vetor de dinâmica para restrições
F	Resposta livre do sistema
G	Matriz dinâmica do sistema
H	Matriz de dinâmica para restrições
$I(k)$	Número de produtos em estoque no instante k
Jc	Função de custo
k	Variável de tempo discreto
$L(z)$	Análogo a $1/R(z)$
M	Horizonte de controle
n	Variável de ordem do sistema
N	Horizonte de predição
$P(z)$	Componente da planta do distúrbio
$Q(z)$	Análogo a $S(z)$
$r(k)$	Número de produtos desejados em estoque no instante k
R_{ref}	Vetor contendo os valores da referência
$S(z)$	Bloco de realimentação

T	Período de amostragem
T_{Mp}	Matriz triangular inferior de ordem M
U	Vetor de ações de controle
u_{max}	Valor máximo definido para a ação de controle
$u_{max}(k)$	Valor máximo definido para a ação de controle em cada instante k
u_{min}	Valor mínimo definido para a ação de controle
$u(k)$	Sinal de controle instantâneo
$u(t\|k)$	Ação de controle predita para o instante t
$V(z)$	Análogo a $E(z)$
$W(z)$	Numerador da planta principal do modelo
x	Vetor de estados
x_a	Vetor de estados aumentado
y_{max}	Valor máximo definido para o número de produtos em estoque
y_{min}	Valor mínimo definido para o número de produtos em estoque
Y	Representação de saída do sistema
z	Domínio complexo discreto
Δ	Operador de variação
Δ_{Mp}	Matriz auxiliar para limitação de saída
ΔU	Vetor sequência predita de variações de ação de controle
$\Delta u(k)$	Variação instantânea da ação de controle
α	Representação do fator de tolerância
ε	Representação do erro do sistema
ρ	Ponderação da variável de controle
τ	Atraso de transporte
ϕ	Matriz de dinâmica da resposta livre do SSMPC

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

2 CONTROLE DINÂMICO DE PROCESSOS DE LOGÍSTICA 15

2.1 DEFINIÇÃO DE LOGÍSTICA 15

2.1.1 Pedido 16

2.1.2 Transporte 16

2.1.3 Estoque 17

2.2 DEFINIÇÃO DO MODELO A SER UTILIZADO 18

2.3 MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADOS 25

2.3.1 Análise de Controlabilidade do Sistema 26

2.3.2 Análise de Observabilidade do Sistema 27

3 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO 29

3.1 SSMPC 31

3.1.1 Caso SISO 31

3.1.2 Tratamento de Restrições 33

3.1.2.1 Tratamento de restrição na excursão do sinal de controle u 33

3.1.2.2 Tratamento de restrição na excursão do sinal de saída y 34

3.1.3 Programação Quadrática Inteira 34

3.2 EXEMPLO NUMÉRICO DE APLICAÇÃO DA MALHA DE CONTROLE 36

4 ESTUDO DE CASO: GESTÃO DE ESTOQUE 39

4.1 SSMPC SEM RESTRIÇÕES 40

4.2 SSMPC SEM RESTRIÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS 44

4.3 SSMPC-INTEIRO COM RESTRIÇÕES 47

4.3.1 Tratando restrição em u 47

4.3.2 Tratamento restrição em u e y 50

4.4 ANÁLISE DE DEMANDAS 55

5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS 61

5.1 CONTRIBUIÇÕES 62

5.2 TRABALHOS FUTUROS 62

1 INTRODUÇÃO

Em um mercado competitivo, cada detalhe tem suma importância para o crescimento empresarial. O atendimento ao cliente com qualidade, flexibilidade e agilidade pode ser determinante para o sucesso de uma empresa. Para que este serviço de atendimento ocorra com qualidade, é necessário que a empresa tenha uma gestão eficiente de sistemas logísticos.

Devido a este tipo de sistema ser influenciado diretamente pela demanda dos clientes, ele se torna, muitas vezes, dinâmico e complicado. Para o funcionamento adequado de uma cadeia de suprimentos (*Supply Chain*), a escolha de maquinário, sistemas de transporte, equipamentos, dentre outros, deve ser feita de forma apropriada. Apesar disso, outro fator determinante para o sucesso é a gestão. Entretanto, na maioria das empresas, a gestão ainda é baseada na intuição e na experiência do gestor [1].

Com a globalização econômica, influências da concorrência e mudanças nas preferências dos clientes, a gestão baseada na experiência não é a forma mais segura para uma empresa. Outro fator que prejudica este método de tomada de decisões é o fato de diversos grupos de pessoas, com filosofias e ritmos de trabalho diferentes, influenciarem nos estágios de uma cadeia de suprimentos [1].

Em decorrência de todos estes fatores, segundo [2], estudos em 1934 utilizando abordagens matemáticas sobre o tema em questão, já haviam sido realizados. Estes estudos tiveram como objetivo a busca de uma estratégia para armazenar e transportar produtos da melhor forma possível e com o mais baixo custo.

Com o desenvolvimento tecnológico e com um maior número de estudos na área, segundo [1], por volta de 1950, iniciou-se a aplicação de técnicas de controle nesse tipo de sistema, sendo primeiramente aplicadas técnicas de controle com projeto baseado em aspectos frequências. Atualmente, diversas técnicas são aplicadas, como exemplo pode-se citar o controle baseado em alocação de polos, controle ótimo, controle robusto, entre outras [1].

Embora existam diversas técnicas, a que tem se tornado muito popular na comunidade de engenharia é o Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model-based Predictive Control* – MPC). Esta popularidade deve-se principalmente à facilidade em incorporar restrições de variáveis e lidar com atrasos de transporte de forma intrínseca a sua formulação [1].

O MPC teve sua primeira publicação no meio acadêmico em 1976 e tem sido utilizado a mais de quatro décadas na indústria [3]. O termo *Model-based Predictive Control* não designa uma estratégia de controle específica, mas sim, uma série de métodos de controle que buscam otimizar o comportamento futuro predito de processos com base em modelos matemáticos explícitos. Essa otimização pode ser definida em relação a uma função de custo, que define o que é ótimo para o processo em questão [4].

O controle preditivo baseado em modelo obteve impacto na indústria devido principalmente: a capacidade de tratamento de casos multivariáveis, consideração das limitações físicas dos sistemas e a capacidade de operar o sistema em regiões mais próximas aos limites de operação, quando comparado aos controladores convencionais, gerando assim maior lucro [5].

O que diferencia os tipos de MPC entre si são, principalmente, a função custo que será avaliada e o modelo para predição. Este modelo pode ser baseado na resposta ao impulso, na resposta ao degrau, em espaço de estados, dentre outros.

No ano de 1992, aplicou-se pela primeira vez a teoria de controle preditivo em um problema de gerenciamento de inventário, com foco em um problema local de fabricação [6]. Este estudo foi realizado por Kapsiotis e Tzafestas, no qual tentou-se compensar os prazos de produção. Para isso, inclui-se na função de custo do controlador um termo de penalidade nos desvios da trajetória de referência [6].

Outros trabalhos como [2], [7] e [8] trazem o controle preditivo baseado em modelo aplicado em cadeias de suprimentos, porém cada um faz considerações diferentes ao se obter o modelo do sistema de gerenciamento. Há três grandes atividades nesse tipo de processo: pedido, transporte e o gerenciamento de estoque. Essa última será a atividade mais visada nesse trabalho.

O gerenciamento de estoque é um dos fatores essenciais para uma organização, sendo necessária uma atenção maior para esta atividade. Grande parte do investimento do capital de uma empresa pode ser destinado, erroneamente, ao espaço físico para armazenamento de produtos, caso a estratégia de gestão não seja eficiente.

Neste trabalho de conclusão de curso aplicou-se a técnica de controle preditivo baseado em modelo em espaço de estados em um processo de logística empresarial, mais especificamente, na parte de estoque de produtos. Para a realização do controle, obteve-se um modelo de simulação para esse tipo de sistema. Além disso, foi

necessário um software para a realização das simulações. Adotou-se o MATLAB®. Desse modo, esse trabalho dá início a um novo campo de estudo para o departamento de engenharia elétrica e, mais especificamente, para o grupo de controle de sistemas (GCS).

No Capítulo 2, serão apresentados conceitos básicos e uma breve revisão histórica sobre logística, além de métodos para a modelagem de um sistema deste tipo. No Capítulo 3, será apresentada a revisão teórica do controle preditivo baseado em modelo, incluindo uma revisão histórica, conceitos básicos gerais e uma revisão a respeito do *Space-State Model-based Predictive Control* (SSMPC). No Capítulo 4, serão apresentados e comentados os resultados obtidos neste trabalho. No Capítulo 5, serão apresentadas as conclusões e as considerações finais, trabalhos futuros e contribuições.

2 CONTROLE DINÂMICO DE PROCESSOS DE LOGÍSTICA

Desde a antiguidade, um dos principais propulsores do desenvolvimento da logística foi a instituição militar. Apesar de possuir um poderoso exército, as vitórias do Império Romano, por exemplo, não tiveram apenas o exército como fator determinante de vitória. As comunicações, a gestão de informações sobre a mobilidade, a localização das tropas inimigas e a aprimorada rede de estradas contribuíram de forma impactante [9].

Além do Império Romano, outro personagem histórico que se destacou na utilização dos conceitos da logística foi Alexandre, o Grande. Com um exército muitas vezes menor do que o de seu inimigo, porém utilizando manobras voltadas ao apoio logístico, venceu várias batalhas, perdendo poucos homens [10].

Em 1670, no exército francês, foi criado o cargo de *Maréchal Général de Logis.* A este cargo eram incumbidas as tarefas relacionadas ao abastecimento dos quartéis, à organização de acampamentos, ao fornecimento de munições e aos serviços de apoio às unidades de combate [9].

Percebe-se a grande influência do âmbito militar para o desenvolvimento de estratégias de logística. Esta relação foi de tamanha importância, que segundo o livro Logística: Conceitos e Tendências, referenciado em [9], um general que serviu a Napoleão, no livro *Precis de l'Art de la Guerre*, de 1837, definiu a logística como a ciência da aplicação de todas as ciências militares, ou seja, a estratégia decide o local da ação e a logística leva as tropas a este local.

2.1

2.2

2.1 DEFINIÇÃO DE LOGÍSTICA

De acordo com o *Council of Supply Chain Management Professionals* [11], logística é "o processo de planejamento, implementação e controle de procedimentos para o transporte eficiente e eficaz armazenamento de mercadorias, incluindo os serviços e informações relacionadas desde o ponto de origem até o ponto de consumo para fins de conformidade com os requisitos do cliente".

Tendo em vista esta definição, percebe-se que a logística está presente em todo lugar, desde grandes indústrias, no controle de matéria prima e produtos, como nas residências, no controle de mantimentos por exemplo.

Esse conceito de logística, surgiu no Brasil no início da década de 80, logo após o surto de crescimento da tecnologia da informação. Algumas entidades como a ASBRAS (Associação Brasileira de Supermercados), a ASLOG (Associação Brasileira de Logística) e o IMAM (Instituto de Movimentação e Armazenagem) tinham a missão de disseminar este conceito para o meio empresarial [12].

Ao final da década de 90 surgiram as graduações, especializações e cursos de aperfeiçoamento na área de logística. Além do conhecimento científico, as experiências práticas têm suma importância para os profissionais. Entretanto ainda não são suficientes para atender o mercado competitivo e exigente que busca sempre a excelência e a eficácia no atendimento [12].

A logística é sustentada por três grandes pilares: o pedido, o transporte e o estoque. Cada um destes tem importância fundamental para um bom atendimento de uma empresa, ou seja, todos devem ser bem planejados e controlados para a maior obtenção de lucro.

1.1.1

2.1.1 Pedido

O pedido está diretamente ligado à variação da demanda tanto quanto ao estoque. Os principais fatores que podem influenciar neste processo são a agilidade e a precisão das informações.

A organização é fundamental para que os pedidos sejam feitos de forma correta, pois informações dos produtos em estoque, produtos vendidos e recebimento de mercadorias influenciam diretamente em quanto e quando pedir.

2.1.2 Transporte

O transporte tem como objetivo movimentar toda a cadeia de suprimentos no sistema logístico, este pode ser dividido em aquático, terrestre e aéreo. No Brasil, o mais utilizado é o transporte terrestre, mais precisamente o rodoviário [10].

Segundo o Anuário Estatístico dos Transporte de 2001 [13], 60,49% do transporte de cargas é rodoviário, enquanto somente 0,33% é aéreo. Além disso,

20,86% é ferroviário, 13,86% aquaviário e 4,46% dutoviário. Tais dados são de todos os transportes de carga realizados entre 1996 e 2000.

Embora o transporte rodoviário seja o mais utilizado, vários aspectos influenciam na decisão de como será feito o transporte de carga de uma empresa. Fatores como localização da empresa, tipo de produto a ser transportado, quantidade, possibilidade de avarias, tempo de entrega, dentre outros auxiliam a determinar que tipo de transporte é mais indicado para cada carregamento.

Uma boa escolha do meio de transporte para cada carregamento resulta em menor custo para as empresas, por esse motivo, são investidos mais recursos afim de estudar meios de otimizar este processo e encontrar a melhor forma de transportar seus produtos.

2.1.3 Estoque

O estoque surgiu da necessidade da humanidade de garantir a sobrevivência em épocas de escassez. Em um primeiro momento, a ideia era simplesmente estocar e consumir. Com o passar do tempo, além da armazenagem, outros aspectos como perdas e garantia de abastecimento foram adicionados. Assim, foram dados os primeiros passos para o gerenciamento de estoque [14].

Nos dias de hoje, com as grandes organizações e empresas e um mercado extremamente competitivo, a gestão de estoque é fundamental. A competitividade do mercado não se limita à qualidade dos produtos oferecidos, mas abrange também o atendimento ao cliente com qualidade, flexibilidade e agilidade, tendo os menores gastos [14].

Segundo [7], “O estoque é a atividade que controla as disponibilidades e as necessidades de materiais e componentes do processo produtivo. O objetivo fundamental do estoque é não deixar faltar material ou produto, procurando, ao mesmo tempo, de todas as formas evitar a elevada imobilização de recursos financeiros com os mesmos”.

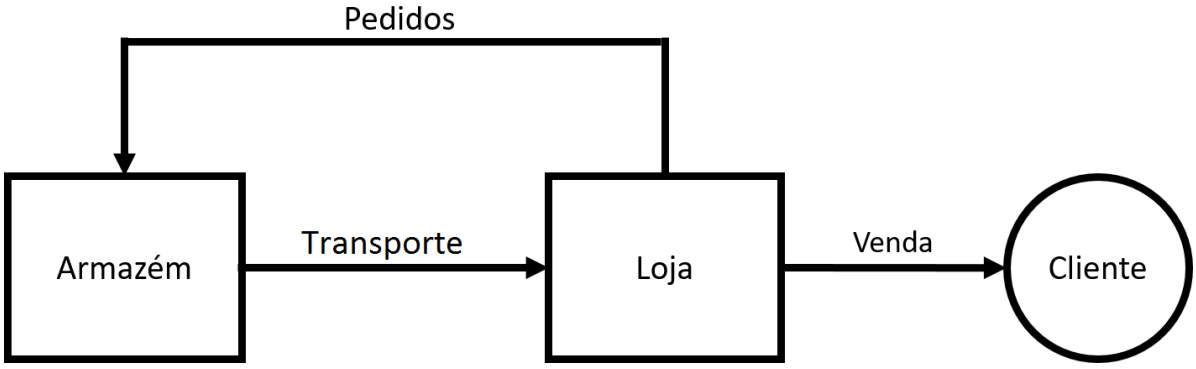
A administração do estoque está relacionada diretamente com a demanda e o fornecimento de produtos. Se ambos fossem definidos e conhecidos não haveria a necessidade de se ter um estoque. Isto não ocorre na prática. Dessa forma as empresas utilizam o estoque para melhorar a coordenação da oferta e procura, evitando a falta de produtos [7].

O estoque resolve a questão da falta de produtos, mas este pode apresentar um custo muito grande se não controlado de forma correta. Dependendo da quantidade de produtos estocados mais funcionários e mais espaço são necessários, encarecendo assim o produto final ou diminuindo a margem de lucro. Além disso, existe o risco de deterioração ou obsolescência do produto, acarretando perdas para a empresa [7].

O controle de estoque raramente é algo fácil de ser realizado, já que para isto é necessária uma previsão de demanda. Outro complicador é a influência que o tempo de entrega exerce neste processo. Para um controle de estoque efetivo as decisões de quanto e quando comprar mercadorias para reabastecer este estoque são essenciais. A dificuldade na escolha da quantidade de produtos estocados passa por um balanço. Esse balanço envolve a soma dos custos da realização de pedidos de estoque e as perdas ocasionadas pela falta do estoque. [2].

Um exemplo de como é um processo para controle de estoque é apresentado na Figura 1. Percebe-se claramente os outros dois componentes da logística influenciando diretamente no modelo do estoque, estes seriam os pedidos e o transporte.

Figura 1: Modelo de Estoque



Fonte: [7]

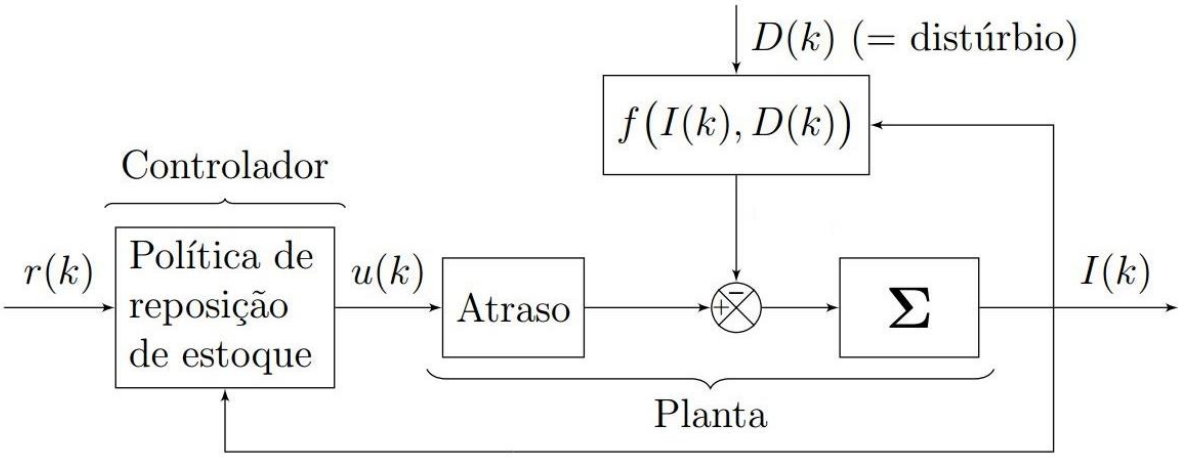
2.2 DEFINIÇÃO DO MODELO A SER UTILIZADO

Inicialmente, foi realizada uma revisão bibliográfica, em artigos e outros trabalhos, com o objetivo de procurar modelos válidos para o processo de logística avaliado nesse trabalho. A Figura 2 mostra o modelo de estoque que foi escolhido para ser utilizado, onde $r(k)$ é a referência, ou seja, o número de itens em estoque

desejado, $u(k)$ é o sinal de controle, que são os pedidos de produtos (valor necessariamente inteiro), o número final de produtos em estoque é representado por $I(k)$ e $D(k)$ é a demanda, que entra como um distúrbio na planta. Esse distúrbio não é exatamente na saída da planta, nem diretamente na entrada, mas interno ao processo. Nota-se que o sistema é intrinsicamente discreto. O período de amostragem de tal malha é de $T = 1$ dia. Este modelo foi escolhido devido a simplicidade, permitindo assim que fosse dado enfoque maior no desenvolvimento do controle preditivo.

Comparando os modelos representados pela Figura 1 e a Figura 2 pode-se observar a presença das três atividades de um processo logístico em ambos, sendo as vendas agora representada pela demanda, que entra como distúrbio, os pedidos por $u(k)$, resultante do controlador e o estoque pela composição da planta.

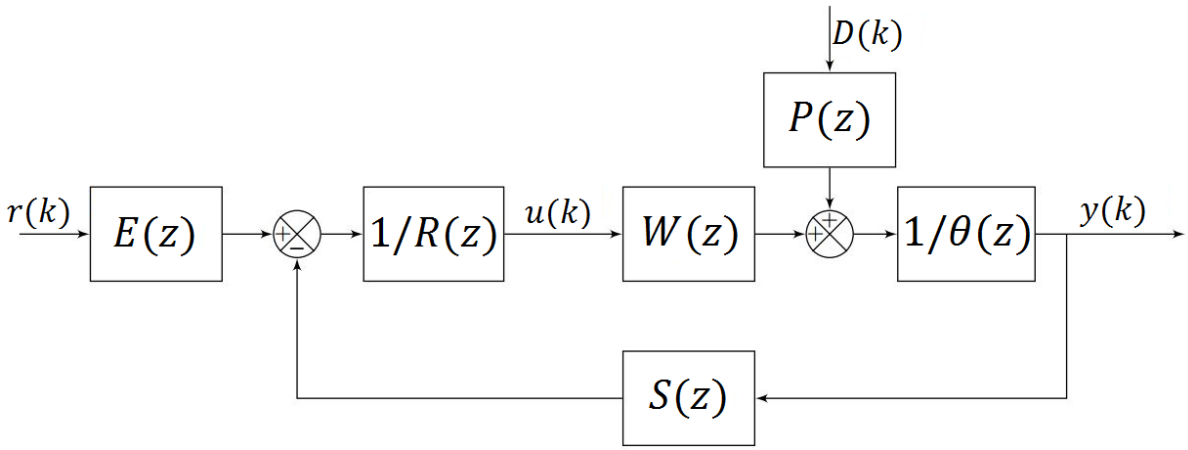
Figura 2: Modelo de Estoque Escolhido



Fonte: Baseado em [2]

Aplicando a Transformada Z e incluindo o controlador, obteve-se a Figura 3. Nessa figura, $E(z)$ é um bloco de pré-filtro, $S(z)$ é um bloco de realimentação e $1/R(z)$ seria o bloco do controlador. $P(z)$ faz parte da planta do distúrbio, que seria a demanda, enquanto $W(z)$ e $1/\theta(z)$ compõe a planta principal.

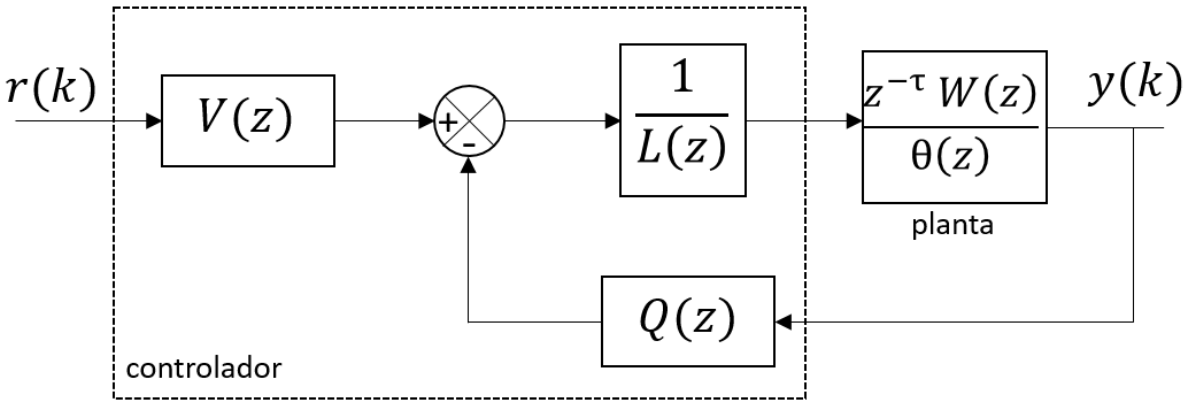
Figura 3: Modelo de Estoque com Controlador



Fonte: Baseado em [2]

Analisando as informações da planta e de como foi idealizado este controlador, notou-se similaridade com o “Projeto de controladores de imposição de polos e zeros em abordagem algébrica” [15], representado na Figura 4. Comparando os sistemas, nota-se que há apenas alterações na nomenclatura que foi utilizada.

Figura 4: Modelo de Controle com Realimentação e Pré-filtro



Fonte: Baseado em [15]

No trabalho referenciado em [2], o controlador foi calculado alocando-se polos múltiplos de ordem τ na mesma posição. τ seria o atraso do sistema gerado pelo transporte dos pedidos até a empresa. Desse modo para validar a malha de controle, utilizando [15] projetou-se esse controlador considerando que o atraso τ é de 7 dias e que os polos para o cálculo do controlador estão alocados em $(-0.2z^{-1}+1)$. Utilizando as informações da planta apresentada em [2], e manipulando-as na estrutura solicitada em [15], tem-se:

$$\theta(z) = -z^{-1} + 1 \tag{2.1}$$

$$W(z) = 1 \tag{2.2}$$

$$\tau = 7. \tag{2.3}$$

Para fins de simplificação de notação, em alguns pontos, serão omitidos (z) e (k) que representam o domínio discreto da frequência e do tempo, respectivamente. De modo geral a planta em malha aberta seria:

$$\frac{Y}{U} = z^{-7}\,\frac{1}{-z^{-1}+1}. \tag{2.4}$$

Dessa forma projeta-se o controlador resolvendo (polinômio característico da malha fechada):

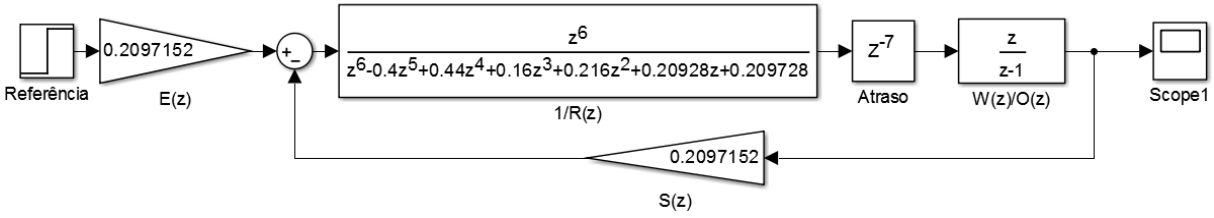
$$\theta R + z^{-\tau} WS = (-0.2z^{-1} + 1)^7. \tag{2.5}$$

Expandindo (2.5):

$$\begin{aligned}(-z^{-1}+1).(r_o + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + r_3 z^{-3} + r_4 z^{-4} + r_5 z^{-5} + r_6 z^{-6}) + 1z^{-7}\, s_o \\ = (-0.2z^{-1}+1)^7\end{aligned} \tag{2.6}$$

Após os cálculos, obteve-se o sistema com o controlador já definido, porém ainda sem a inclusão do distúrbio. É possível visualizar melhor este sistema na Figura 5.

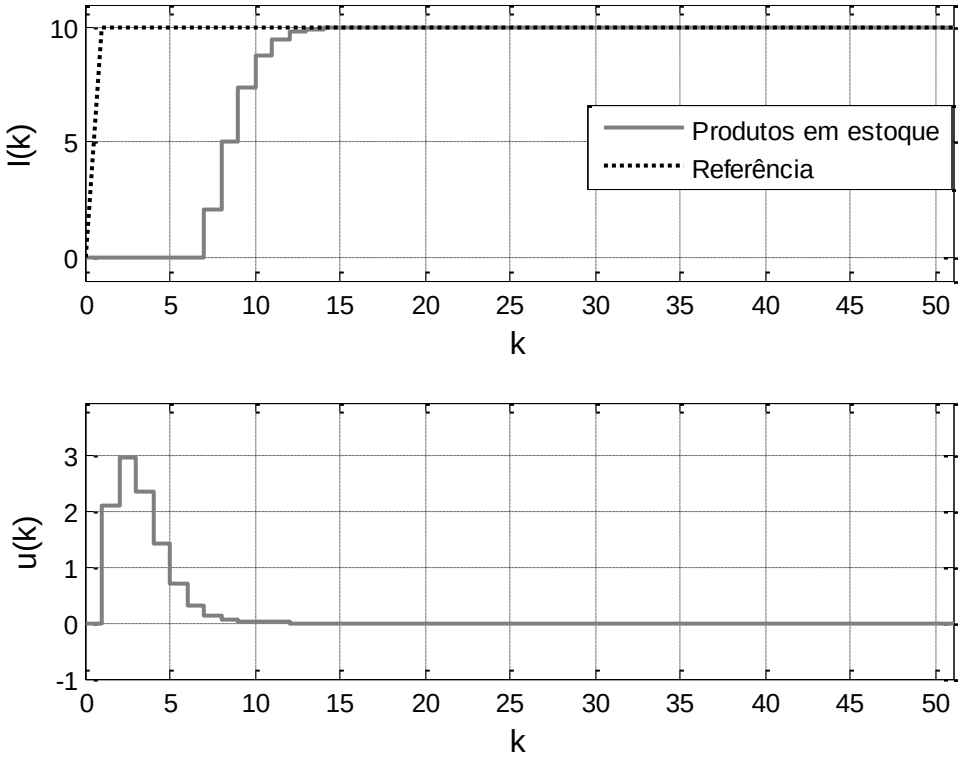
Figura 5: Diagrama de Blocos com Controlador Definido



Fonte: Próprio autor

Para a planta acima, foi feito um *script* no *software* MATLAB®. Para tal sistema, ainda sem a inclusão do distúrbio, foram obtidos os resultados apresentados na Figura 6. Nota-se que mesmo tendo um atraso de sete períodos de amostragem o sistema não instabilizou e seguiu a referência imposta. É importante ressaltar que não foram impostas condições para que os sinais de saída e de controle sejam números inteiros (respostas com a inclusão destas imposições são apresentadas no decorrer do trabalho).

Figura 6: Resultados com Controlador Calculado pelo Projeto Polinomial de Alocação de Polos com Demanda Zero



Fonte: Próprio autor

Os resultados obtidos com a inclusão do distúrbio (demanda), em um primeiro momento, não foram favoráveis. Incluindo o mesmo como apresentado na Figura 3, não há a presença de integrador no sistema em malha aberta, para rejeição do distúrbio. Desse modo, o sistema não converge para o valor da referência, apresentando um erro de regime permanente. Pode-se visualizar melhor esta situação na Equação (2.7) obtida a partir do diagrama de blocos mostrado pela Figura 3. Assim:

$$Y = \frac{z^{-\tau}WE}{\theta R + z^{-\tau}WS}\, r + \frac{R}{\theta R + z^{-\tau}WS}\, D. \tag{2.7}$$

Fazendo o mesmo para o erro:

$$\varepsilon = \frac{\theta RE}{\theta R + z^{-\tau}WS}\, r - \frac{SR}{\theta R + z^{-\tau}WS}\, D \tag{2.8}$$

reescrevendo (2.8) para facilitar a visualização:

$$\varepsilon = \frac{1}{\theta R + z^{-\tau}WS}(\theta REr - SRD). \tag{2.9}$$

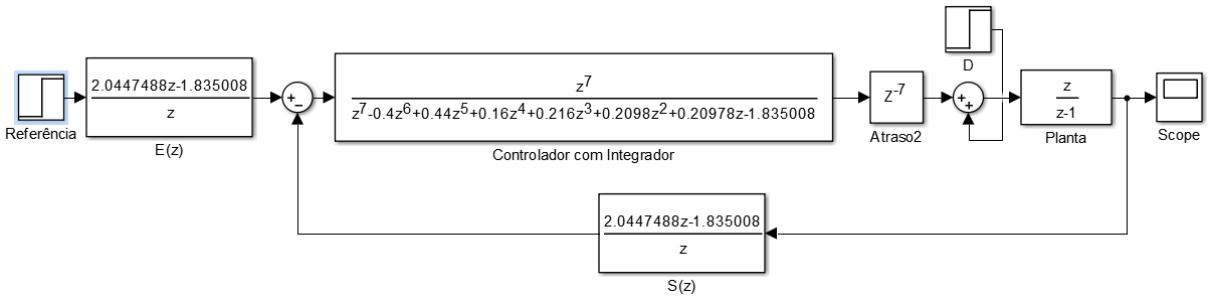
Tendo em vista que o integrador está presente somente em $\theta(z)$, que seria o denominador da planta, nota-se a partir da Equação (2.9) que este integrador aparece somente no numerador do primeiro termo do cálculo do erro. Dessa forma, é trivial

mostrar pelo teorema do valor final que somente a parte relacionada com a referência r possui erro zero em regime permanente, enquanto para o distúrbio falta a inclusão de um integrador.

Para resolver o problema, ou seja, controlar o sistema de forma que o erro em regime permanente seja nulo com a inclusão da demanda, foi realizado um novo projeto de controlador. Para os cálculos deste projeto, considerou-se o grau do $\theta(z)$ como 2, implementando um integrador adicional a planta. Na montagem do sistema, este integrador adicionado em θ foi transferido para o controlador.

Realizou-se o mesmo processo para os cálculos apresentado anteriormente, porém, com o grau de $\theta(z)$ sendo 2, obteve-se o sistema apresentado na Figura 7. Nota-se, na comparação entre os sistemas, que devido ao aumento do grau de $\theta(z)$, o grau do pré-filtro $E(z)$ e da realimentação $S(z)$ é incrementado.

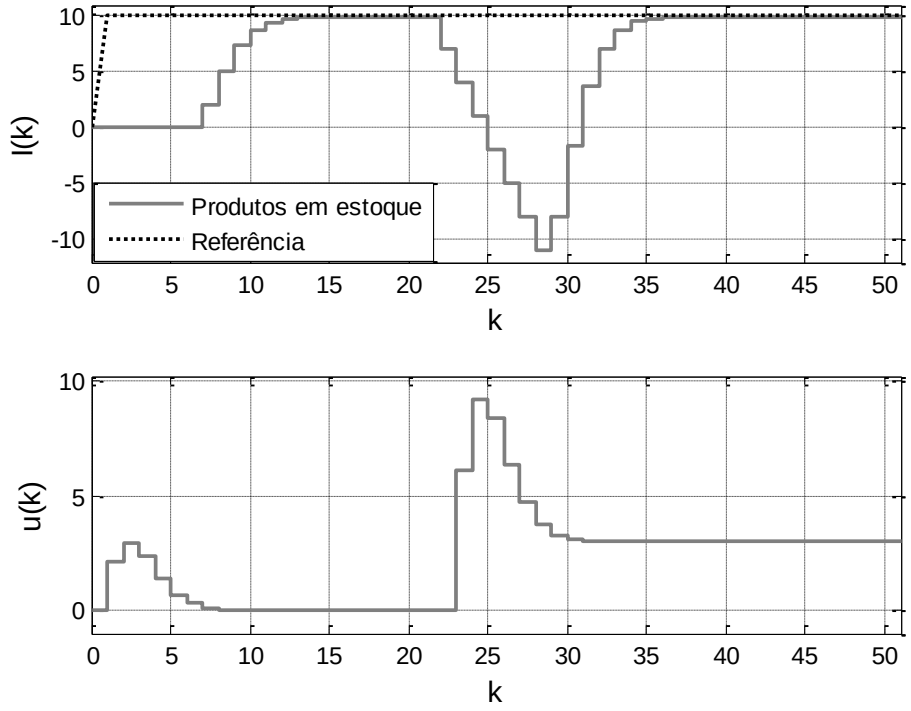
Figura 7: Diagrama de Blocos do Sistema com a Inclusão do Integrador no Controlador



Fonte: Próprio autor

Para o sistema representado na Figura 7 foi realizada uma nova simulação, no software MATLAB®. A Figura 8 representa a resposta do sistema admitindo-se valores negativos para o número de produtos em estoque $I(k)$. Para esta simulação foi considerada uma demanda constante de 3 produtos por dia começando no dia 22 (valores escolhidos arbitrariamente).

Figura 8: Resposta com Controlador Calculado pelo Projeto Polinomial de Alocação de Polos com Demanda Três e sem Imposição de Condições

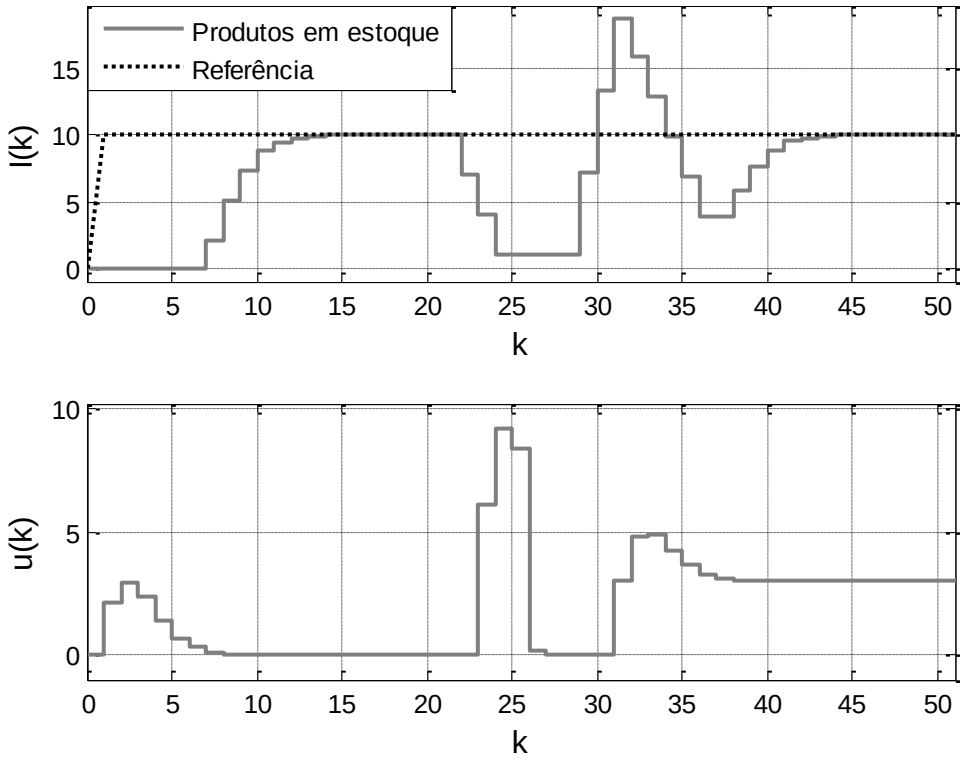


Fonte: Próprio autor

Nota-se que o comportamento dos produtos em estoque atinge valores negativos o que não condiz com a realidade, já que não é possível haver fisicamente números negativos de produtos. Estes valores negativos ocorrem devido a influência do atraso no sistema. Para resolução deste problema, adotou-se a inclusão de uma não linearidade na demanda. Tendo em vista que, se não há produtos em estoque, não é possível realizar vendas, implementou-se a seguinte condição: se a demanda for maior que o número de produtos em estoque, o cliente poderá comprar todos os produtos exceto um, que ficará na empresa para mostruário.

A condição apresentada é considerada uma não linearidade devida a variação que a demanda pode apresentar quando esta for maior que o número de produtos em estoque. Nesta situação, o comportamento da demanda é saturado, sendo forçado que assuma valores que não sejam maiores do que certa quantia de produtos. Além da condição imposta na demanda, também foi inclusa uma saturação no sinal de controle, sendo imposto que esse fosse sempre maior ou igual a zero. A resposta do sistema pode ser observada na Figura 9.

Figura 9: Resposta com Controlador Calculado pelo Projeto Polinomial de Alocação de Polos com Demanda Três e com Imposição de Condições



Fonte: Próprio autor

A resposta apresentada foi satisfatória, porém os valores apresentados ainda apresentam variações que não pertencem ao conjunto dos naturais. Dessa maneira, há uma distorção do sentido físico da ação de controle, pois não é possível a venda ou o pedido de um valor fracionário de produto. Esta restrição de valores será apresentada com a aplicação do controle preditivo no Capítulo 4.

2.3 MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADOS

Partindo do modelo em função de transferência apresentado na Equação (2.4), deseja-se representá-lo em espaço de estados Esse tipo de modelo será utilizado posteriormente, na aplicação do controle preditivo. A partir de (2.4) tem-se:

$$-Yz^{-1} + Y = Uz^{-7}. \tag{2.10}$$

Utilizando a transformada Z inversa, escreveu-se a Equação (2.10) em função de k, que representa o tempo discreto:

$$-y(k-1) + y(k) = u(k-7). \tag{2.11}$$

Deseja-se representar a Equação (2.11) em um sistema na forma de variáveis de estado, como o mostrado nas Equações (2.12) e (2.13):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{2.12}$$

$$y(k) = Cx(k). \tag{2.13}$$

Sendo assim, é necessário definir um vetor $x(k)$, este é composto pela saída no instante anterior e pelos pedidos realizados até τ instantes atrás (neste caso $\tau = 7$). A composição do vetor $x(k)$ pode ser vista na Equação (2.14).

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k-1) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ u(k-3) \\ u(k-4) \\ u(k-5) \\ u(k-6) \\ u(k-7) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Com o vetor $x(k)$ já definido, define-se as matrizes A e B a partir da Equação (2.11), assim como a matriz de saída C. As Equações (2.15) e (2.16) mostram o sistema completo, com as matrizes definidas.

$$x(k+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{A} x(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u(k) \tag{2.15}$$

$$y(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{C} x(k) \tag{2.16}$$

É importante ressaltar que a modelagem em espaço de estados obtida dessa forma apresenta uma facilidade em relação a variação do atraso da planta. Alterando a posição do 1 da última coluna da primeira linha da matriz A e da última coluna da matriz C altera-se também o atraso do sistema. Dessa forma o atraso pode variar de 1 a 7 dias.

2.3.1 Análise de Controlabilidade do Sistema

Seguindo [16], foi realizada uma análise da controlabilidade do sistema, ou seja, se é possível construir um sinal de controle não limitado que transfira o sistema de um estado inicial para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito. Para realizar esta análise montou-se a matriz de controlabilidade seguindo a forma

apresentada em (2.17). A matriz calculada, após substituir as matrizes A e B da Equação (2.15) em (2.17) pode ser observada em (2.18).

$$\mathbb{C} = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \tag{2.17}$$

Para verificar se o sistema é de estado completamente controlável, realiza-se a análise da matriz de controlabilidade, se os vetores B, AB, ..., $A^{n-1}B$ forem linearmente dependentes ou a matriz de tamanho $n \times n$ tiver posto n, o sistema é dito de estado completamente controlável.

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Após feita a análise da matriz de controlabilidade resultante apresentada em (2.18), notou-se que o posto da mesma é 8, que é a ordem n do sistema, ou seja, o sistema é de estado completamente controlável.

2.3.2 Análise de Observabilidade do Sistema

Um sistema é dito completamente observável se cada transição de estado puder afetar cada elemento do vetor de saída [16]. O conceito de observabilidade é importante na solução de problemas onde deseja-se utilizar variáveis de estado não mensuráveis. Nesses casos, em um sistema completamente observável, é possível reconstruir o sinal das variáveis de estado desejadas não mensuráveis a partir das mensuráveis.

Para um sistema ser dito completamente observável a matriz de observabilidade, apresentada em (2.19), deve ter posto n. Na Equação (2.20) é apresentado como fica a matriz de observabilidade após as substituições das matrizes A e C pelas matrizes do sistema apresentado em (2.15) e (2.16). O posto da matriz de observabilidade do sistema é 7, ou seja, menor que $n = 8$, dessa forma, conclui-se que o sistema não é completamente observável.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Essa não observabilidade do sistema pode se dever ao fato do vetor de estados conter as ações de controle para diferentes dias que não seja o atraso estipulado. Estes valores não são utilizados e nem visualizados pelo sistema, tornando assim o sistema não observável.

3 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

O conceito de controle preditivo pode ser explicado, através de uma analogia com uma pessoa dirigindo um carro [4]. Imagina-se o motorista visualizando a rua, este antecipa possíveis metas ou demandas. A partir da observação, este tomará ações para dirigir o carro até seu destino final sem que haja problemas.

O termo MPC descreve um conjunto bem vasto de estratégias de controle, não sendo apenas uma simples técnica. Este conjunto de estratégias foi desenvolvido originalmente para atingir os requisitos de controle específicos que usinas de energia e refinarias de petróleo apresentavam. Porém, atualmente, essa classe de controladores é aplicada nos mais diversos ramos da indústria como química, alimentícia, automotiva e aeroespacial [3].

A razão para o sucesso deste conjunto de estratégias de controle pode ser atribuída ao fato do MPC:

- Ser uma das formas mais generalistas de descrição de problemas de controle de processo no domínio do tempo [4];
- Levar em conta limitações dos atuadores da planta [5];
- Permitir uma operação mais próxima das restrições físicas do processo, quando comparado com técnicas convencionais, resultando em uma operação mais rentável do sistema [5];
- Apresentar taxas de atualização de controle relativamente baixas, de modo que haja tempo suficiente para os cálculos necessários na rotina de simulação [5].

Algumas outras características destes controladores são o uso explícito do modelo da planta para prever a saída do processo em instantes futuros, a realização do cálculo de uma sequência de ações de controle em cada período de amostragem. Destaca-se que, usualmente, adotam-se estratégias de horizonte retrocedente, ou seja, apesar de o controlador calcular uma sequência de ações futuras de controle, apenas a primeira ação de controle é aplicada à planta [3].

Segundo [17], no final da década de 70 surgiram as primeiras publicações relacionadas a algoritmos de MPC, com o surgimento do MPHC (*Model Predictive Heuristic Control*) em 1978 e do DMC (*Dynamic Matrix Control*) em 1979. Ambos utilizam respostas do sistema para obtenção do modelo de predição. Tal modelo permite predizer o comportamento futuro da planta a partir das entradas das condições

do sistema no atual período de amostragem. A diferença está na resposta que cada método utiliza, o MPHC utiliza a resposta ao impulso e o DMC a resposta ao degrau.

Diversas técnicas de controle preditivo foram desenvolvidas, como o GPC (*Generalized Predictive Control*), o QDMC (*Quadratic Programming Solution of Dynamic Matrix Control*) e também o SSMPC (*State Space Model-based Predictive Control*). Esta última será utilizada nesse trabalho.

De forma geral, as técnicas de controle preditivo compartilham de alguns parâmetros comuns. Entre esses parâmetros, há o horizonte de predição N, que representa o número de passos à frente que deseja-se predizer, ou seja, de maneira mais simples, o quão longe deseja-se prever o comportamento da planta. O horizonte de controle M indica o número de passos à frente em que se calcula novas ações de controle. Em outras palavras, esse horizonte representa o tamanho da sequência de futuras ações de controle a ser calculada. Usualmente, tem-se que $M < N$. O horizonte retrocedente, conforme mencionado anteriormente, relaciona-se ao fato de que a cada período de amostragem k somente o primeiro valor da sequência ótima de controle é aplicado na planta [18].

Segundo [18], o controle ótimo linear quadrático é a essência do controle preditivo. Isso se deve ao fato destas duas técnicas serem baseadas na maximização do desempenho através da minimização de uma função de custo. A função de custo pode ser considerada um fator de custo benefício do sistema, onde tenta-se minimiza-la ponderando o comportamento do sistema e o gasto de energia. Esta também pode ser escrita de maneira administrativa, ou seja, ponderando gastos para armazenagem e pedidos de produtos por exemplo. Um exemplo de função de custo é apresentado em (3.1):

$$J_c(Y, \Delta U) = \left(Y - R_{ref}\right)^T \left(Y - R_{ref}\right) + \rho \Delta U^T \Delta U \tag{3.1}$$

sendo:

$$Y = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

e:

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-M-1|k) \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Além disso, ρ é uma constante positiva e não nula que pondera o custo das variações da ação de controle do sistema e R_{ref} é um vetor que contém os N valores da referência desse mesmo sistema. Minimizando (3.1), espera-se obter uma ação de controle ótima representada por ΔU^*. É importante ressaltar que o custo só será mínimo, se e somente se $\rho > 0$. Desse modo:

$$\Delta U^* = \overbrace{(G^T G + \rho I)^{-1} G^T}^{K_{MPC}} (R_{ref} - F) \tag{3.4}$$

sendo que G é a matriz de predição do sistema, enquanto F é a chamada resposta livre do sistema. A forma de obtenção destes parâmetros varia de acordo com a técnica de controle preditivo aplicada.

2.3

3.1 SSMPC

Nesta seção será apresentado o controlador SSMPC para o caso SISO (*Single Input Single Output*). Além disso, será exposto como foram impostas as condições de tratamento de restrições nas variáveis do sistema e o uso de programação quadrática inteira.

3.1.1 Caso SISO

Seja o seguinte sistema no tempo discreto apresentado em (3.5) e (3.6). Deseja-se incluir um integrador e fazer com que a planta tenha um sinal ΔU como entrada ao invés de U, tendo em vista que a função custo penaliza variações em ΔU e já visando o tratamento de restrições que será apresentado no decorrer deste trabalho, pode-se apresentar o sistema incremental definindo um vetor de estados aumentado x_a [5]:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{3.5}$$

$$y(k) = Cx(k). \tag{3.6}$$

Desse modo, define-se:

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1) \tag{3.7}$$

deslocando (3.5) no tempo:

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1). \tag{3.8}$$

Subtraindo a Equação (3.8) de (3.5), obtém-se:

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k). \tag{3.9}$$

Seguindo o mesmo procedimento para a saída:

$$y(k+1) = Cx(k+1) \tag{3.10}$$

$$y(k+1) = C[\Delta x(k+1) + x(k)] \tag{3.11}$$

$$y(k+1) = C[A\Delta x(k) + B\Delta u(k)] + y(k). \tag{3.12}$$

Escrevendo então de forma matricial, considerando n a ordem do processo, a representação em espaço de estados do sistema aumentado pode ser apresentada da seguinte forma:

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} \Delta x_1(k) \\ \Delta x_2(k) \\ \vdots \\ \Delta x_n(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$u_a(k) = \Delta u(k) \tag{3.14}$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & 1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$B_a = \begin{bmatrix} B \\ CB \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$C_a = [0_n \quad 1] \tag{3.17}$$

então,

$$x_a(k+1) = A_a x_a(k) + B\Delta u(k) \tag{3.18}$$

$$y(k) = C_a x_a(k). \tag{3.19}$$

Com a inclusão do integrador, o sistema adquire a característica de ter erro nulo em regime permanente para entradas do tipo degrau e a acomodar perturbações constantes de saída.

Expandindo (3.18) e (3.19) para $k+1,\ k+2, \dots, k+N$ e colocando na forma matricial pode-se obter a equação de predição para o SSMPC aumentado:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-M-1|k) \end{bmatrix} + F \tag{3.20}$$

sendo que:

$$G = \begin{bmatrix} C_a B_a & 0 & \cdots & 0 \\ C_a A_a B_a & C_a B_a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_a {A_a}^{N-1} B_a & C_a {A_a}^{N-2} B_a & \cdots & C_a A_a^{N-M} B_a \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$F = \overbrace{\begin{bmatrix} C_a A_a \\ C_a {A_a}^2 \\ \vdots \\ C_a {A_a}^N \end{bmatrix}}^{\phi} x_a(k). \tag{3.22}$$

3.1.2 Tratamento de Restrições

As definições apresentadas na Subseção 3.1.1 consideram que as variáveis de entrada e saída possuem excursão livre, abrangendo todos os valores reais. Porém, isto não condiz com a realidade, onde os sistemas possuem limitações, como faixa de operação de atuadores, taxas de variação e limites de segurança [4].

Considerando a aplicação do controle neste trabalho, o tratamento de restrições se faz necessário para impor que o sinal de entrada u e o sinal de saída y não assumam valores negativos, pois ambos representam número de produtos, grandeza que não admite valores negativos.

É importante ressaltar que para um funcionamento adequado das restrições e do próprio controle como um todo, o modelo a ser utilizado precisa representar fielmente a planta, dessa forma garante-se que a predição realizada será igual à saída real, não apresentando assim distorções.

3.1.2.1 Tratamento de restrição na excursão do sinal de controle u

Seguindo [18], para definir a restrição na excursão do sinal de controle u, deve-se primeiramente escrever as expressões para u em função de $\Delta u(k|k)$, $\Delta u(k+1|k)$, ... $\Delta u(k+M-1|k)$ e $u(k)$. Tem-se então:

$$u(k|k) = u(k-1) + \Delta u(k|k) \tag{3.23}$$

$$u(k+1|k) = u(k|k) + \Delta u(k+1|k). \tag{3.24}$$

Substituindo (3.23) em (3.24):

$$u(k+1|k) = u(k-1) + \Delta u(k|k) + \Delta u(k+1|k). \tag{3.25}$$

Seguindo este mesmo processo obtém-se:

$$u(k+M-1|k) = u(k-1) + \Delta u(k|k) + \cdots + \Delta u(k+M-1|k). \tag{3.26}$$

Escrevendo então de forma matricial:

$$U = T_{Mp} \Delta U + 1_{Mp} u(k-1). \tag{3.27}$$

Sendo 1_{Mp}um vetor de ordem M com todos os elementos iguais a 1 e

$$T_{Mp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Implementando as restrições para u_{min} e para u_{max} tem-se a seguinte expressão:

$$u_{min} \leq u(k+i-1|k) \leq u_{max}. \tag{3.29}$$

Substituindo a Equação (3.27) em (3.29):

$$1_{Mp}u_{min} \leq T_{Mp}\Delta U + 1_{Mp}u(k-1) \leq 1_{Mp}u_{max}. \tag{3.30}$$

sendo assim,

$$\begin{cases} 1_{Mp}\big(u_{min} - u(k-1)\big) \leq T_{Mp}\Delta U \\ T_{Mp}\Delta U \leq 1_{Mp}\big(u_{max} - u(k-1)\big) \end{cases} \tag{3.31}$$

simplificando e utilizando notação matricial::

$$\begin{bmatrix} -T_{Mp} \\ T_{Mp} \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} 1_{Mp}(u(k-1) - u_{min}) \\ 1_{Mp}\big(u_{max} - u(k-1)\big) \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

3.1.2.2 Tratamento de restrição na excursão do sinal de saída y

O procedimento é semelhante ao realizado para a excursão do sinal de controle, sendo assim, tem-se:

$$y_{min} \leq y(k+i|k) \leq y_{max} \tag{3.33}$$

e

$$1_N y_{min} \leq Y \leq 1_N y_{max}. \tag{3.34}$$

Utilizando o modelo de predição $Y = G\Delta U + F$:

$$1_N y_{min} \leq G\Delta U + F \leq 1_N y_{max} \tag{3.35}$$

então colocando na forma matricial, conclui-se que:

$$\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} 1_N y_{max} - F \\ F - 1_N y_{min} \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

3.1.3 Programação Quadrática Inteira

Segundo [19], a programação quadrática inteira mista (*Mixed Integer Quadratic Programming* – MIQP) é um caso especial da programação inteira mista de casos não lineares (*Mixed Integer Non-Linear Programming* – MINLP). A MIQP é muito parecida com a programação quadrática, a principal diferença é que na programação quadrática inteira mista as variáveis de otimização devem ser pertencentes ao

conjunto dos números inteiros ou binárias, diferentemente da QP onde tem-se o conjunto dos números reais como requisito.

Para um problema ser classificado como um problema do tipo MIQP é necessário que sejam impostas condições para se ter variáveis diferentes assumindo números pertencentes a conjuntos numéricos diferentes.

Dentro das possibilidades de conjuntos numéricos, pode-se incluir o conjunto dos números reais, inteiros, naturais e binários. Quando a condição é que existam somente números binários como resposta, o problema é classificado como BQP (*Binary Quadratic Programming*). No caso deste trabalho, aplica-se como condição que as respostas sejam somente pertencentes ao conjunto dos inteiros, dessa forma, pode-se considerar que é um problema de programação quadrática inteira.

Definindo matematicamente um problema de MIQP, tem-se:

$$\min J_c(\Delta U) = \frac{1}{2}\Delta U^T H \Delta U + f^T \Delta U \tag{3.37}$$

sujeito a:

$$A_{opt}\Delta U \leq b_{opt} \tag{3.38}$$

sendo que:

$$H = 2(G^T G + \rho I_M) \tag{3.39}$$

$$f = 2G^T\left(F - R_{ref}\right). \tag{3.40}$$

Utilizando as definições já feitas para as restrições da excursão do sinal de controle e do sinal de saída tem-se:

$$A_{opt} = \begin{bmatrix} -T_{Mp} \\ T_{Mp} \\ G \\ -G \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

e

$$b_{opt} = \begin{bmatrix} 1_{Mp}(u(k-1) - u_{min}) \\ 1_{Mp}\left(u_{max} - u(k-1)\right) \\ 1_N y_{max} - F \\ F - 1_N y_{min} \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Nota-se que o vetor b_{opt} depende de $u(k-1)$ além da resposta livre do sistema F, dessa forma, para a implementação, este vetor deve ser atualizado a cada instante de tempo k.

Neste trabalho, foi utilizado uma *toolbox* gratuita para MATLAB, a OPTimization Interface (OPTI). Ela pode ser utilizada para resolução de problemas de otimização

lineares, não lineares, contínuos e discretos. Esta ferramenta é disponibilizada de forma gratuita e é composta por um conjunto de *solvers open source* e de uso livre para estudantes. A OPTI faz a escolha de qual *solver* utilizar, baseado em parâmetros escolhidos pelo usuário, como o conjunto de números a serem gerados como resposta, as restrições impostas, dentre outros [20].

3.2 EXEMPLO NUMÉRICO DE APLICAÇÃO DA MALHA DE CONTROLE

Nesta seção será apresentado um exemplo numérico da aplicação da malha de controle, este exemplo foi retirado de [21] e possui os seguintes parâmetros na forma de espaço de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0108 & 0.0050 \\ 4.3185 & 1.0108 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

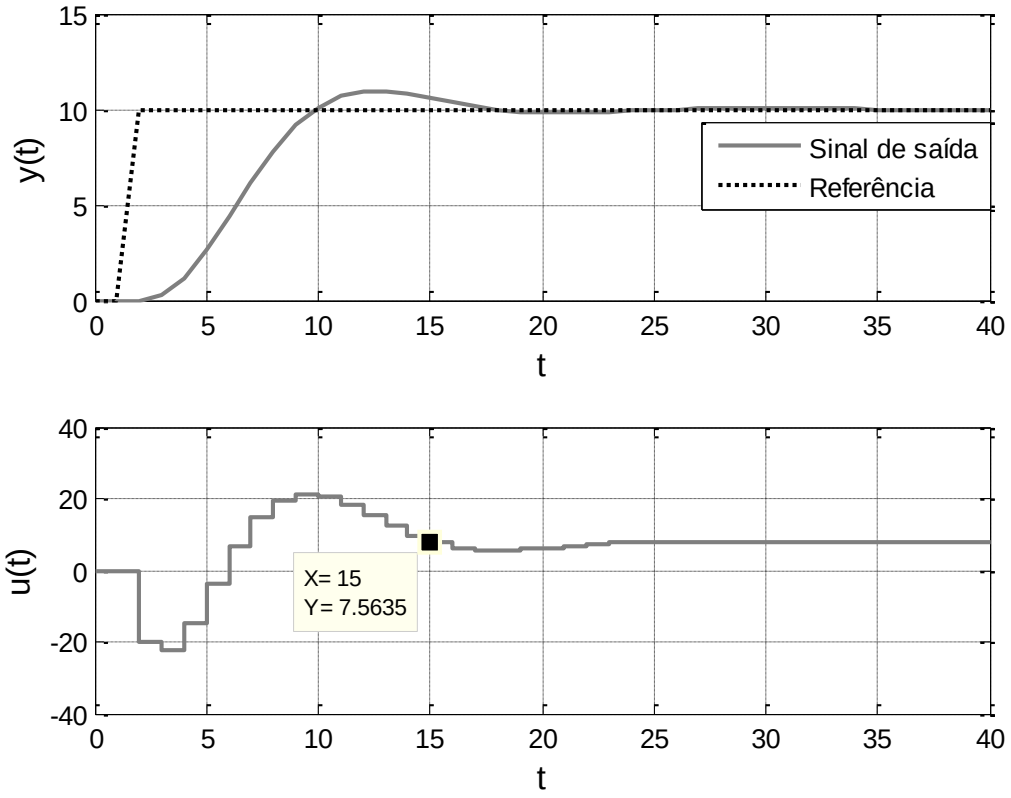
$$B = \begin{bmatrix} -0.0141 \\ -5.6510 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Esta planta representa um levitador magnético e deseja-se controlar a posição do mesmo. Utilizando a OPTI, primeiramente, sem o tratamento formal de restrições e sem limitar a resposta para o conjunto dos inteiros atingiu-se a resposta apresentada na Figura 10. Percebe-se que o sistema, após um tempo de acomodação, segue a referência de forma correta.

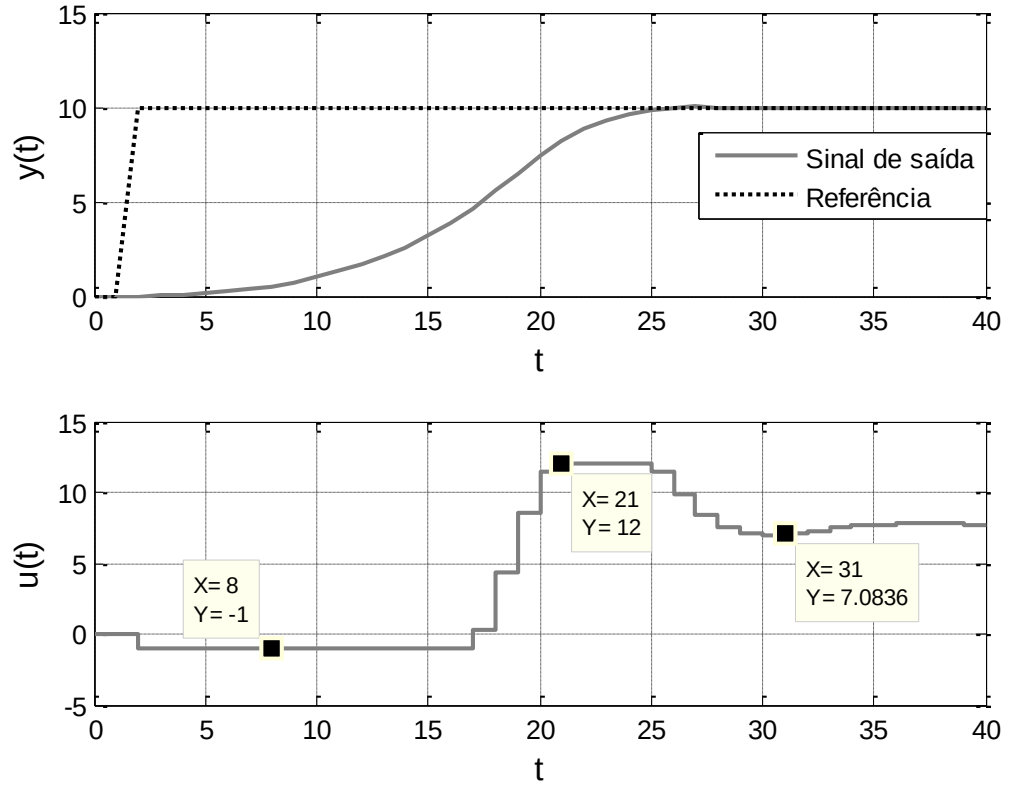
A Figura 11 apresenta a resposta após ser imposta uma restrição para a excursão do sinal de controle, sendo $u_{min} = -1$ e $u_{max} = 12$, além disso também foi imposta uma restrição no valor máximo da saída, sendo $y_{max} = 10$.

Figura 10: Resposta para o Levitador Magnético sem Restrições



Fonte: Próprio autor

Figura 11: Resposta para o Levitador Magnético com Restrições

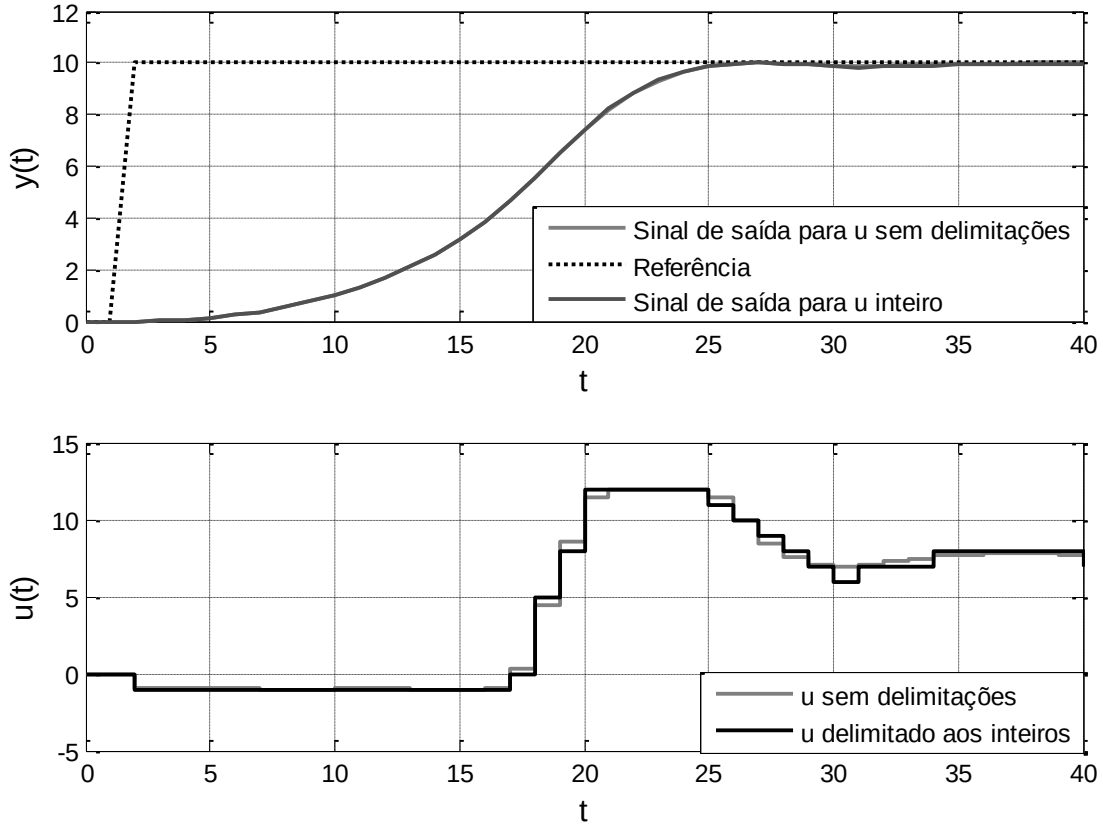


Fonte: Próprio autor

Nota-se na Figura 11 que ambas as restrições são respeitadas, indicando que as exigências do controlador estão sendo seguidas. Por fim, é necessário restringir os valores para o conjunto dos números inteiros para que todas as exigências utilizadas neste trabalho sejam apresentadas e validadas neste exemplo. A Figura 12 mostra a resposta com a delimitação do sinal de controle para o conjunto dos números inteiros, mantendo-se a imposição das restrições.

A saída do sistema não apresenta variações significativas no comportamento, porém no comportamento do sinal de controle podem ser visualizados intervalos onde a delimitação do conjunto de valores faz com que os resultados difiram. O intuito da Figura 12 não é realizar uma avaliação de comportamento do sistema para cada condição mas sim mostrar o funcionamento do *solver.*

Figura 12: Resposta para o Levitador Magnético com Restrições e Sinal de Controle Delimitado aos Inteiros



Fonte: Próprio autor

4 ESTUDO DE CASO: GESTÃO DE ESTOQUE

Neste capítulo, será apresentado um estudo de caso para diferentes tipos de empresas onde deseja-se controlar de forma mais eficiente o número de produtos armazenados em estoque. Foram avaliados diversos fatores visando obter o melhor controle possível deste número de produtos. Contudo, primeiramente, apresenta-se somente a malha de controle funcionando, sem realizar o tratamento de restrições de espaço de armazenamento para os produtos e o limite de fabricação diária do mesmo.

O modelo utilizado em todas as simulações deste estudo de caso foi o apresentado na Seção 2.3 do Capítulo 2, mais precisamente nas Equações (2.15) e (2.16).

Seguindo o que foi apresentado na Seção 3.1.1 nas Equações (3.15), (3.16) e (3.17), incluiu-se o integrador no modelo aumentando o sistema. Com o sistema aumentado, obteve-se as matrizes $G\ e\ \phi$ como apresentado em (3.21) e (3.22).

Inicialmente, foram consideradas nenhumas das restrições do sistema. Para a parte *off-line* do programa, que é onde são definidas ou calculadas as variáveis e matrizes independentes das respostas do sistema, foi definido um tempo de simulação, inicializadas as variáveis e realizado o cálculo de H apresentado na Equação (3.39). Também foi definido o conjunto de números que o *solver* irá seguir. Inicialmente utilizou-se o conjunto dos números reais.

Na rotina de simulação (parte *online*), primeiramente foram estabelecidos os parâmetros relativos à demanda do sistema, ou seja, o tempo que haveria solicitação de demanda e o número de produtos demandados. O próximo passo na rotina de simulação foi a emulação da planta, onde alguns cuidados foram tomados devido ao tempo de atraso do sistema. Foram impostas condições para garantir que se respeitasse o tempo de atraso e que os valores do sinal de entrada para um número de dias menor que o atraso não influenciassem no sistema.

Após a emulação da planta, foi colocado o cálculo da resposta livre do sistema e de f conforme a Equação (3.40), apresentada no Capítulo 3, em seguida o *solver* atua e gera um vetor x_{opt} onde o primeiro valor é utilizado para atualizar a ação de controle u, este valor será utilizado no próximo passo da rotina de simulação. Os passos para a implementação podem ser vistos de maneira mais clara no Apêndice A.

2.4

4.1 SSMPC SEM RESTRIÇÕES

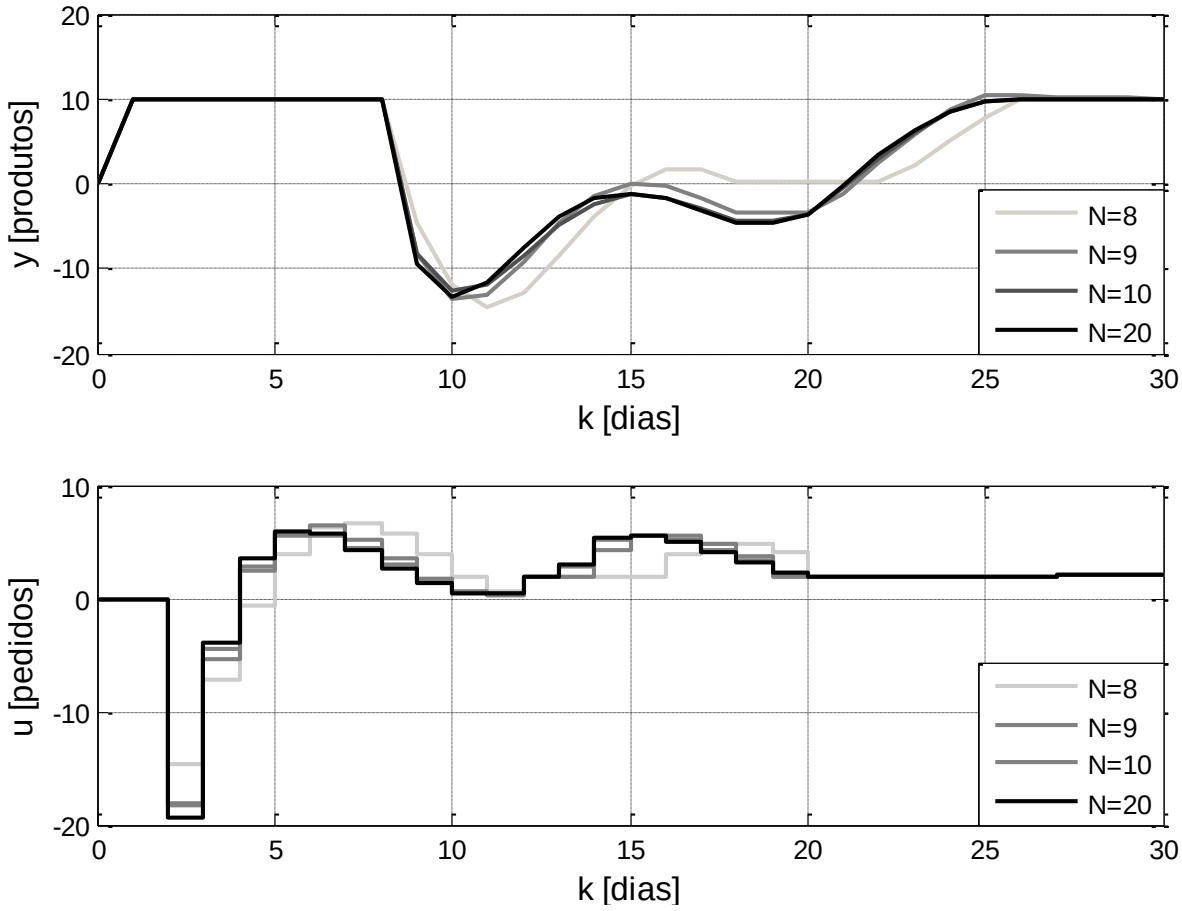
Antes de incluir qualquer tipo de restrição na excursão do sinal de entrada ou de saída, foi necessário fazer uma avaliação dos parâmetros do controlador (M, N e ρ) para definir a resposta que melhor se adequava com o objetivo em questão. Para os testes de parâmetros, não foi utilizada a imposição de que os valores de entrada e saída pertencessem aos inteiros e tampouco a perturbação provocada pela demanda. Seguindo a mesma base de [21], inicialmente, foram fixados os valores de $\rho = 10$ e $M = 5$ e variou-se os valores de N, sendo este no mínimo 8 devido ao atraso ser de 7 dias.

Notou-se que o comportamento do sistema variou mais para valores de N compreendidos entre 8 e 10, As variações no comportamento do sistema para valores de N superiores a 10 foram imperceptíveis por isso a discrepância entre os valores escolhidos para o teste. Dessa forma, a Figura 13 apresenta a diferença de comportamento para cada valor do horizonte de predição, considerando uma referência de 10 produtos em estoque. O valor da referência foi escolhido baseado em [2], não sendo objetivo do deste trabalho realizar a análise para escolha do número ideal de produtos em estoque para o sistema.

Definida a referência em 10 produtos. A partir do décimo dia, considerou-se uma demanda constante de dois produtos por dia. O sistema inicializa com 10 produtos para facilitar a visualização das diferenças, Desse modo, mesmo sem a variação na ação de controle, a saída atinge o valor 10 no instante $k = 1$. A demanda foi inclusa a fim de facilitar a visualização dos diferentes comportamentos para cada variação dos parâmetros.

Como não está sendo considerada nenhuma restrição, os valores de saída e da ação de controle não representam ainda um sistema real, pois não existe número de produtos negativos ou não inteiros.

Figura 13: Resposta do Sistema para Variações do Horizonte de Predição

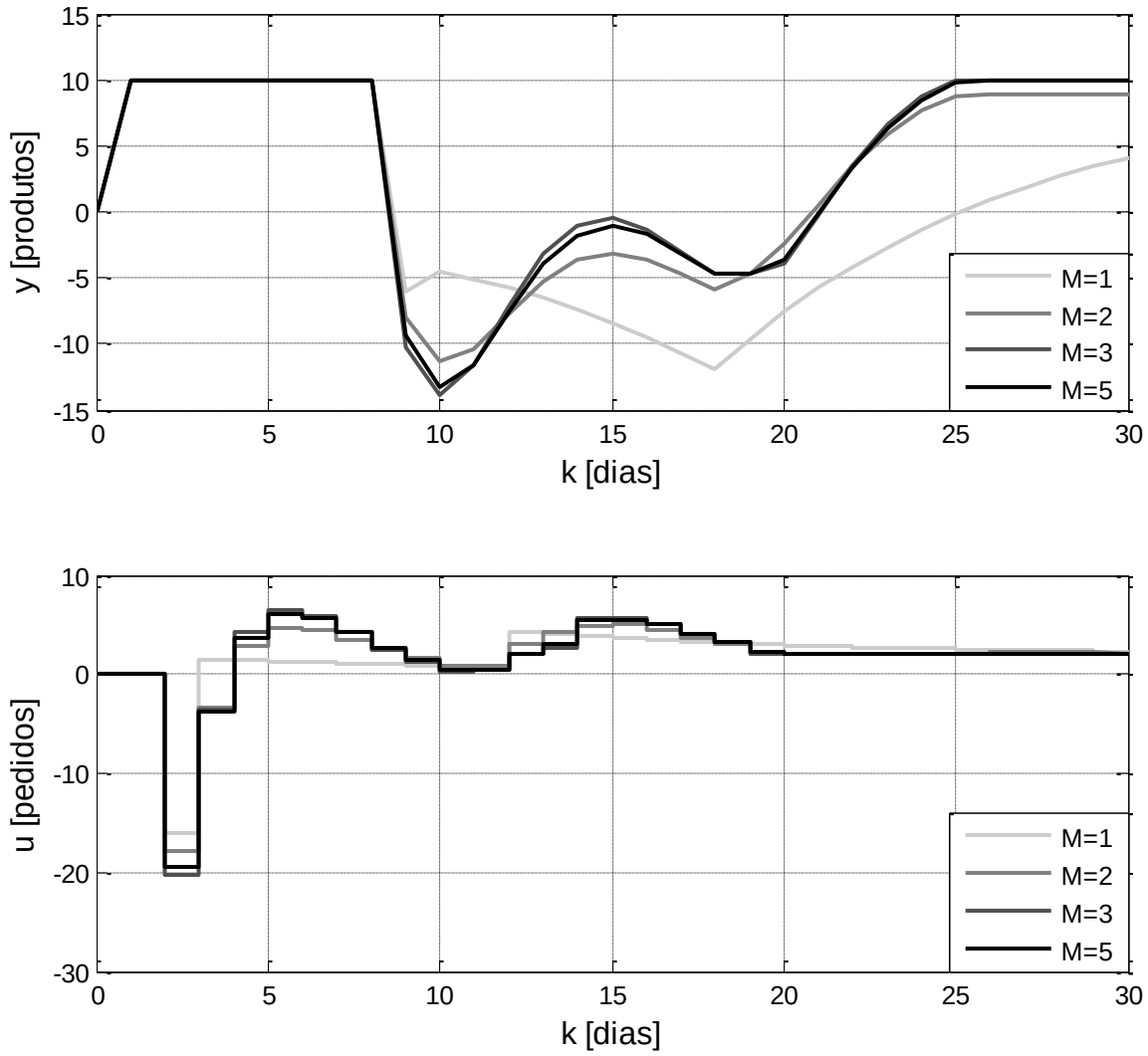


Fonte: Próprio autor

Com base no comportamento do sinal de saída e do sinal de controle, optou-se por utilizar o horizonte de predição de 20. Essa escolha foi feita em decorrência da menor variância da ação de controle com essa sintonia, apesar do maior esforço computacional envolvido. Ainda serão apresentadas respostas com o tratamento de restrições que limitam a excursão de $u(k)$. É importante ressaltar que o custo computacional não entrou como requisito para realizar a escolha dos parâmetros.

Com o horizonte de predição definido, foi realizada a avaliação da mesma forma para o horizonte de controle. A Figura 14 demonstra os resultados obtidos contendo os valores de $M = 1,\ 2,\ 3$ e 5, para outros valores a variação foi imperceptível. O valor escolhido para o horizonte de controle foi 5.

Figura 14: Resposta do Sistema para Variações do Horizonte de Controle

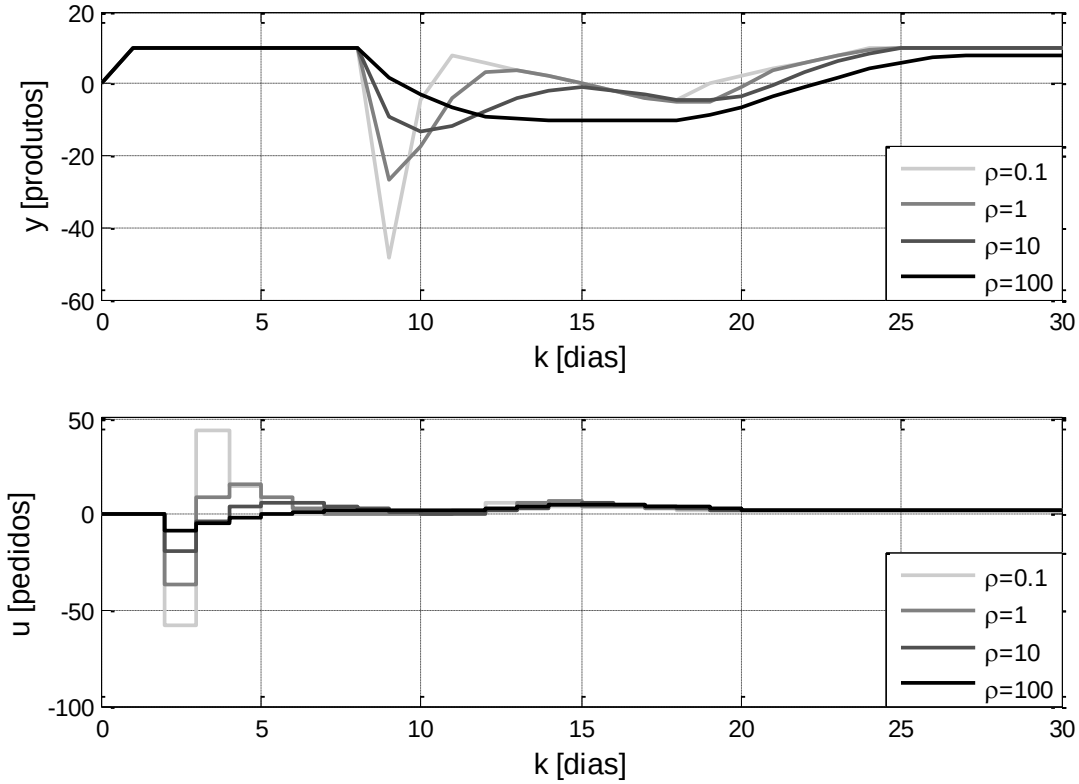


Fonte: Próprio autor

Foi realizada também uma avaliação do ρ que é apresentada na Figura 15, após análise dos comportamentos apresentados, foi escolhido $\rho = 10$. O ρ para este sistema pode ser considerado um fator que determina a variação das quantidades de produtos que serão pedidos. Quanto maior o ρ menor essa variação e vice-versa.

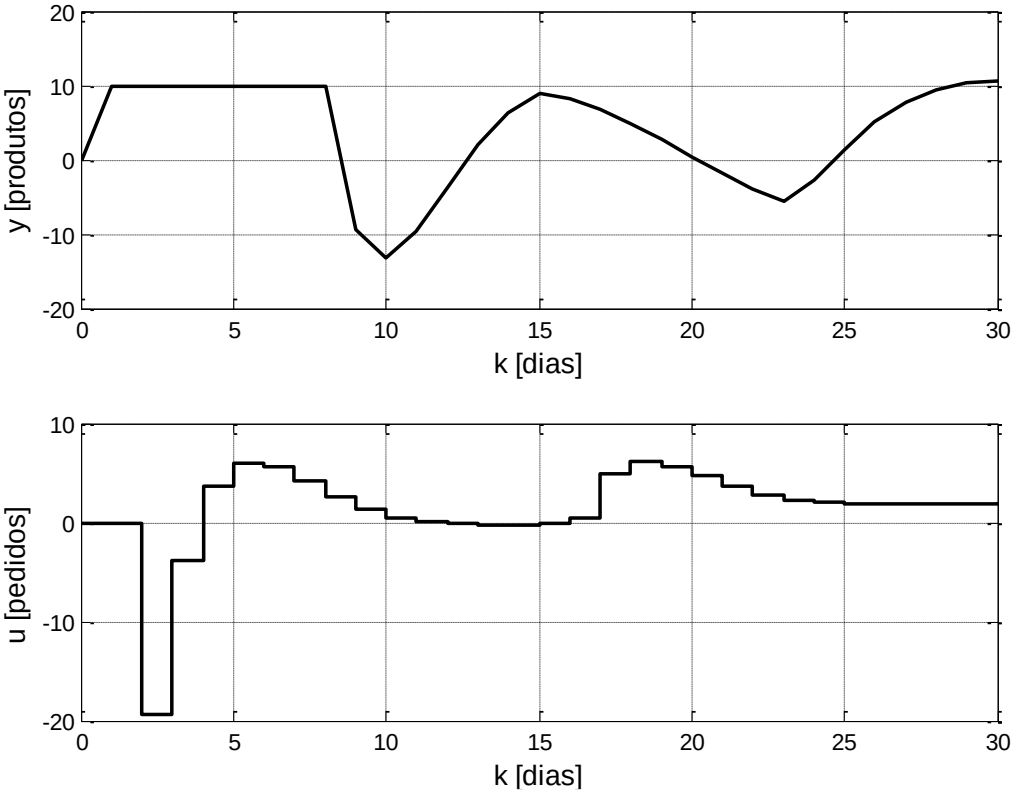
Após as três avaliações, tem-se então o horizonte de predição a ser utilizado igual a 20, o horizonte de controle igual a 5 e o $\rho = 10$. A Figura 16 mostra o comportamento do sistema para todos os parâmetros definidos anteriormente.

Figura 15: Resposta do Sistema para Variações do ρ



Fonte: Próprio autor

Figura 16: Resposta do Sistema para os Parâmetros Definidos



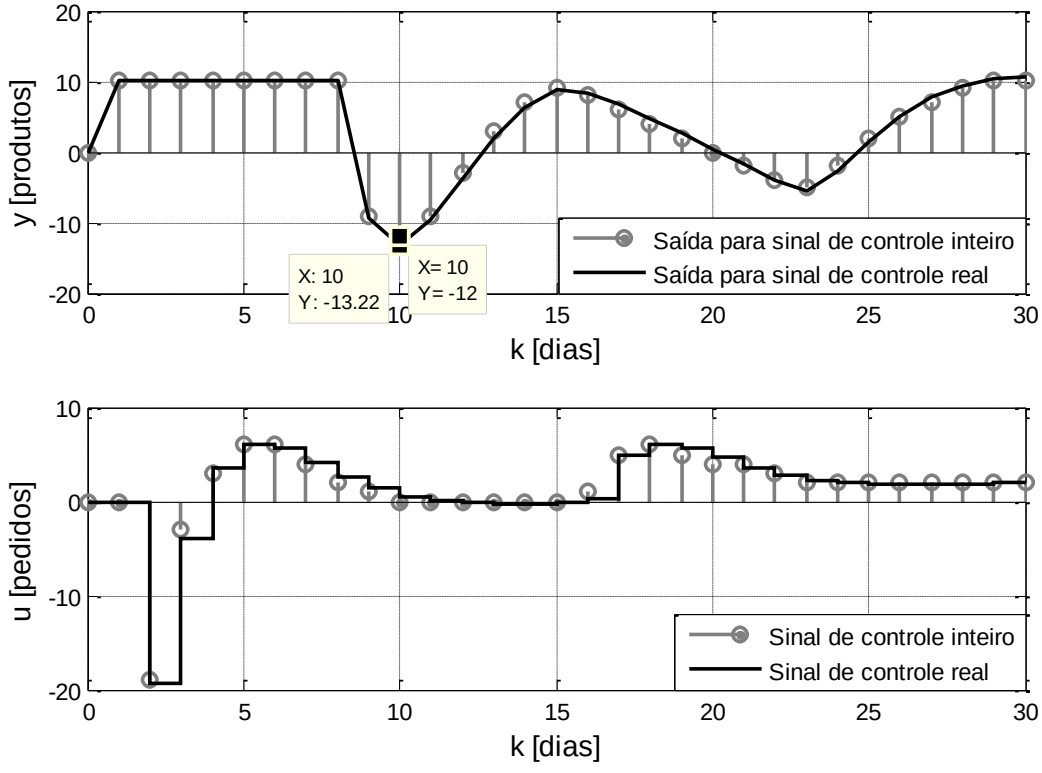
Fonte: Próprio autor

4.2 SSMPC SEM RESTRIÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Nesta seção, serão apresentados os resultados com a condição de que os números sejam somente inteiros, deixando assim o sistema mais realista. Também será apresentado o funcionamento da não linearidade na demanda neste sistema. Para a realização das simulações que serão apresentadas, foram realizadas poucas alterações no programa utilizado anteriormente. Foi alterado o conjunto de números que o *solver* pode gerar para o conjunto dos inteiros e acrescentada a não linearidade na demanda a partir da Figura 18. Esta não linearidade, foi discutida no Capitulo 2 e seria a condição para que se mantenha sempre um produto na empresa para mostruário.

Assim, até o final do presente texto, as variáveis de entrada e saída serão apresentadas apenas com valores inteiros. Por isso, optou-se por um método alternativo de exibição desses valores, conforme mostra a Figura 17. Pode-se observar a forma diferente de se plotar os gráficos. Além disto também foram colocados marcadores para facilitar a visualização das variações que a imposição da utilização de somente números inteiros na ação de controle ocasionou no sistema.

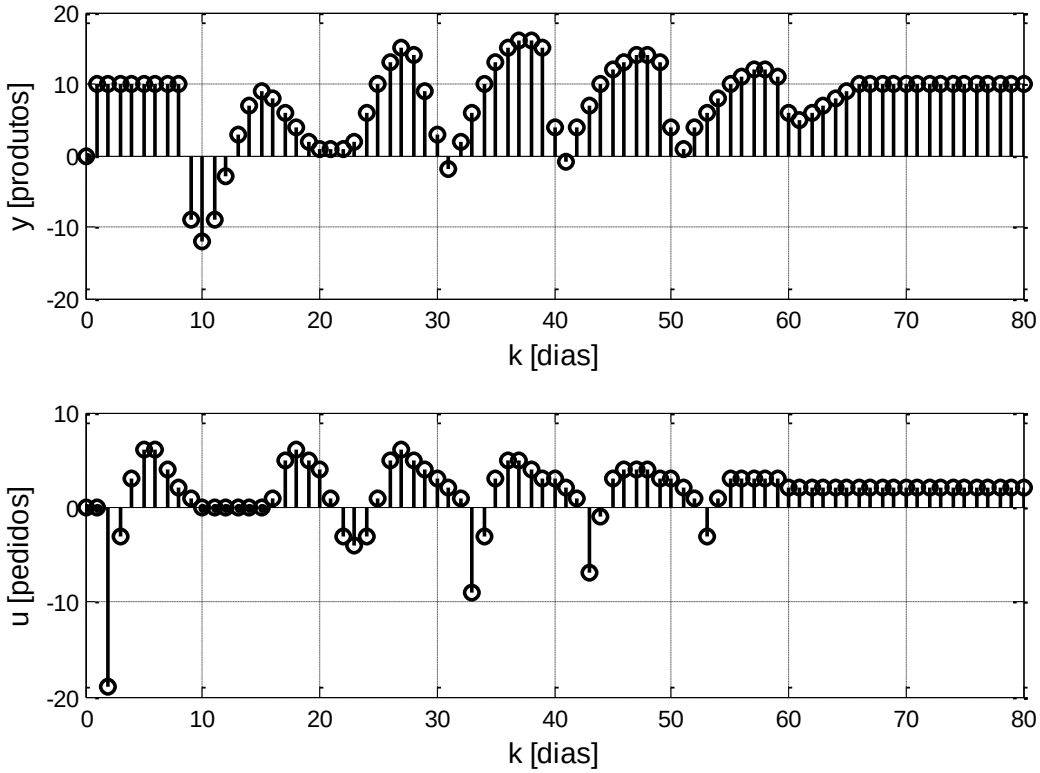
Figura 17: Comparação da Resposta do Sistema tendo u real e u inteiro



Fonte: Próprio autor

Com o sistema funcionando de maneira adequada, foi possível trabalhar de forma a considerar a existência de restrições e não-linearidades do sistema. A primeira não linearidade incluída foi a perturbação gerada pela solicitação de demanda que já foi explanada anteriormente na Seção 2.2. A Figura 18 mostra a resposta que se obteve, mantendo a referência do estoque em 10 produtos e a demanda constante em 2 por dia, porém alterando seu dia de início para o dia 15.

Figura 18: Resposta do Sistema com a Inclusão da Não Linearidade na Demanda



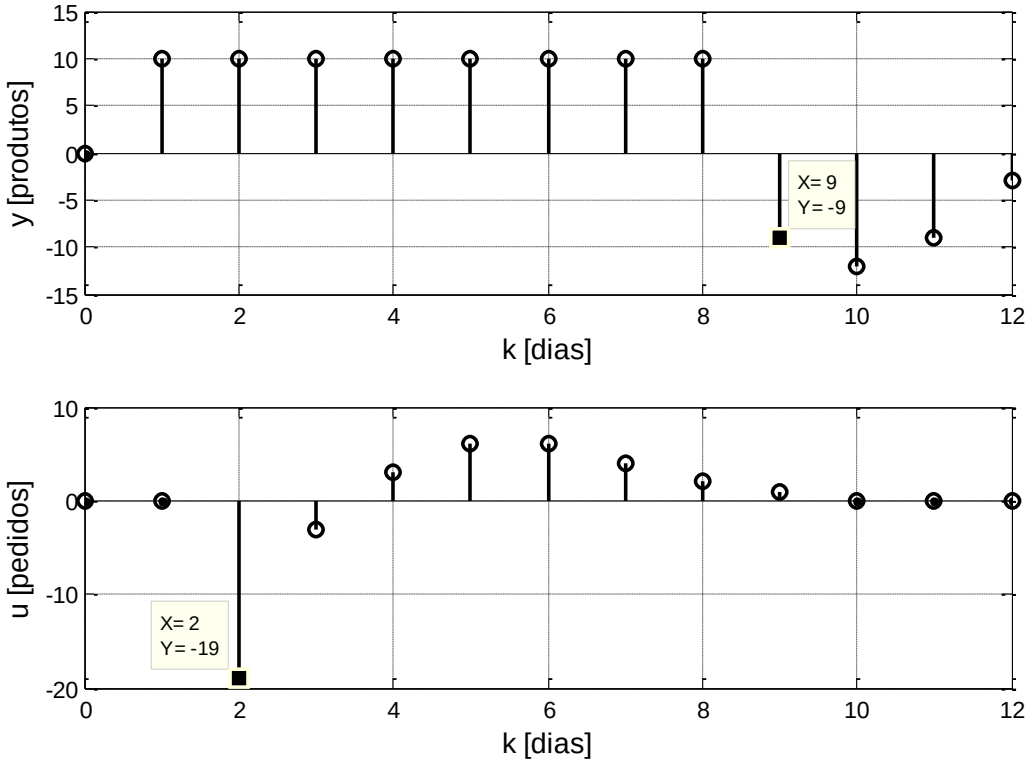
Fonte: Próprio autor

A partir da Figura 18 pode-se notar que o número de produtos em estoque além de apresentar um comportamento mais oscilatório, ainda assume valores negativos. Isto ocorre devido ao sinal de controle ainda não reagir de forma adequada, assumindo valores negativos, ou seja a saída do sistema assume estes valores devido a ação de controle e não a demanda.

Na Figura 19, é apresentado de forma mais clara o que ocorre para que a saída assuma estes valores negativos. Foram colocados marcadores para facilitar a visualização. Através da resposta do sinal de controle, nota-se que em $k = 2, u = -19$ este valor da ação de controle só afetará o sistema depois de 7 dias, que é o atraso de transporte. Visualizando então, a variação do número de produtos em estoque do

dia 8 para o dia 9, nota-se a variação de -19 entrando no sistema e influenciando diretamente para que y assuma valores negativos.

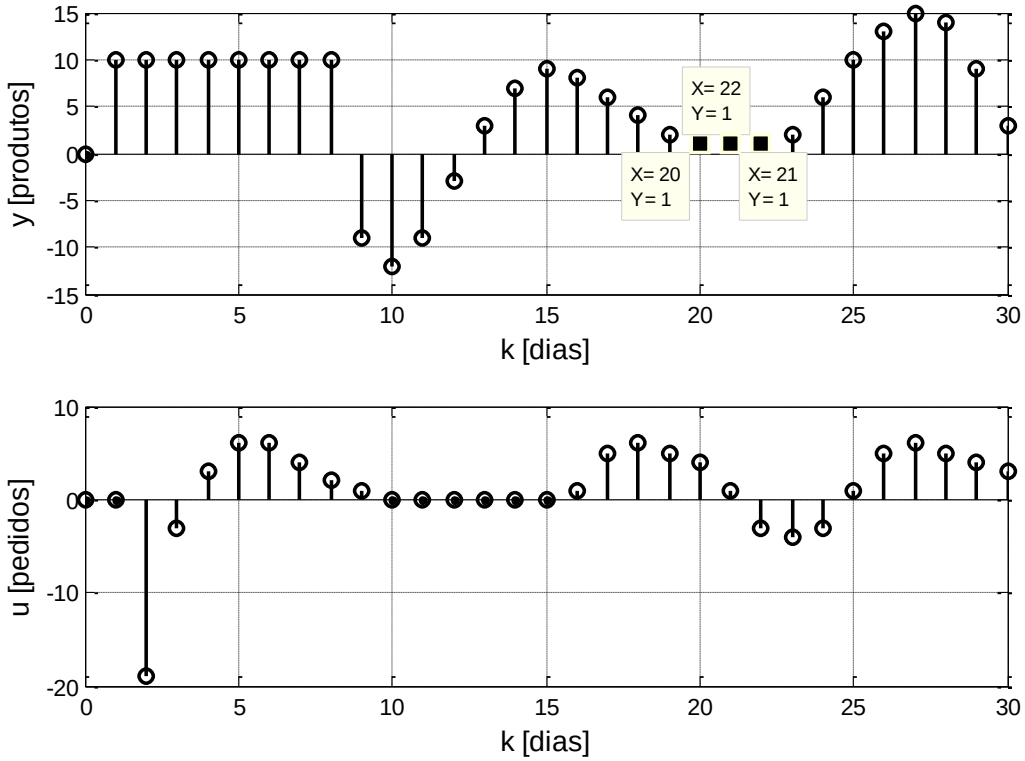
Figura 19: Resposta do Sistema com a Inclusão da Não Linearidade na Demanda para Visualização dos Números Negativos



Fonte: Próprio autor

Para melhor visualização do funcionamento da imposição da não linearidade na demanda neste sistema, é apresentado na Figura 20 uma parte da Figura 18. Pode-se notar que mesmo com a demanda constante em 2 produtos a partir do dia 15 e que $u = 0$ do dia 10 ao dia 15, nos dias 20, 21 e 22 o número de produtos em estoque é mantido em uma unidade.

Figura 20: Resposta do Sistema com a Inclusão da Não Linearidade na Demanda para Visualização da Não Linearidade



Fonte: Próprio autor

4.3 SSMPC-INTEIRO COM RESTRIÇÕES

Nesta seção serão apresentados resultados após o tratamento das restrições nos sinais de controle e saída do sistema. Dessa forma, nessa seção, o sistema será explorado de uma forma mais condizente com a realidade. Serão apresentadas também respostas para diferentes atrasos de transporte.

4.3.1 Tratando restrição em u

Pensando no funcionamento de uma empresa, visualizou-se a necessidade de primeiramente impor uma restrição para que u assumisse valores maiores que zero, pois não há como solicitar um pedido negativo de produtos. Além disto, foi pensado em uma restrição no número máximo de pedidos, visando limitações no número de produtos que podem ser fabricados ou entregues em cada dia.

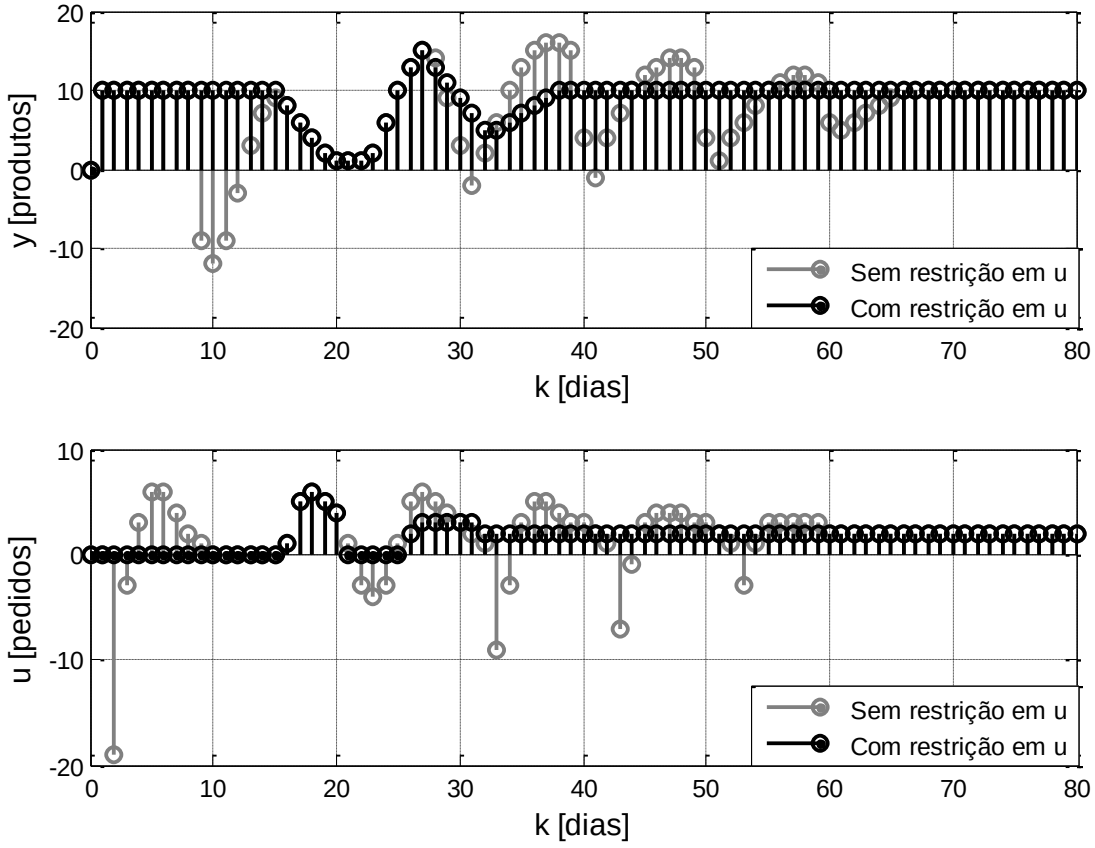
Seguindo a Seção 3.1.2.1, mais precisamente a Equação (3.32), para a inclusão da restrição da excursão do sinal de controle no sistema, alguns cálculos foram incluídos no programa base.

Na parte *off-line* do programa foram definidos os valores de u_{min} e u_{max}, foi montada a matriz T_{Mp} e em seguida A_{opt}. Na parte *online,* a única mudança foi o cálculo de b_{opt} que não pode ser realizado *off-line* pois o mesmo depende de u_{min} e u_{max}.

Para a referência igual a 10 produtos, a demanda constante de dois produtos iniciando a partir do dia 15, o sistema já iniciando com 10 produtos, foi imposta primeiramente uma restrição de $u_{min} = 0$.

Na Figura 21 é apresentado um comparativo entre a resposta obtida anteriormente sem a restrição e a resposta obtida restringindo o valor de u para um valor mínimo de zero. Percebe-se uma melhora considerável no comportamento e que com a restrição, todos os valores se tornam positivos, representando assim um sistema mais realista. Além disso, é interessante notar que o tratamento do atraso no modelo auxiliou o controlador a não elevar a ação de controle de forma excessiva querendo corrigir a qualquer custo a saída, sendo que a mesma não se alterava.

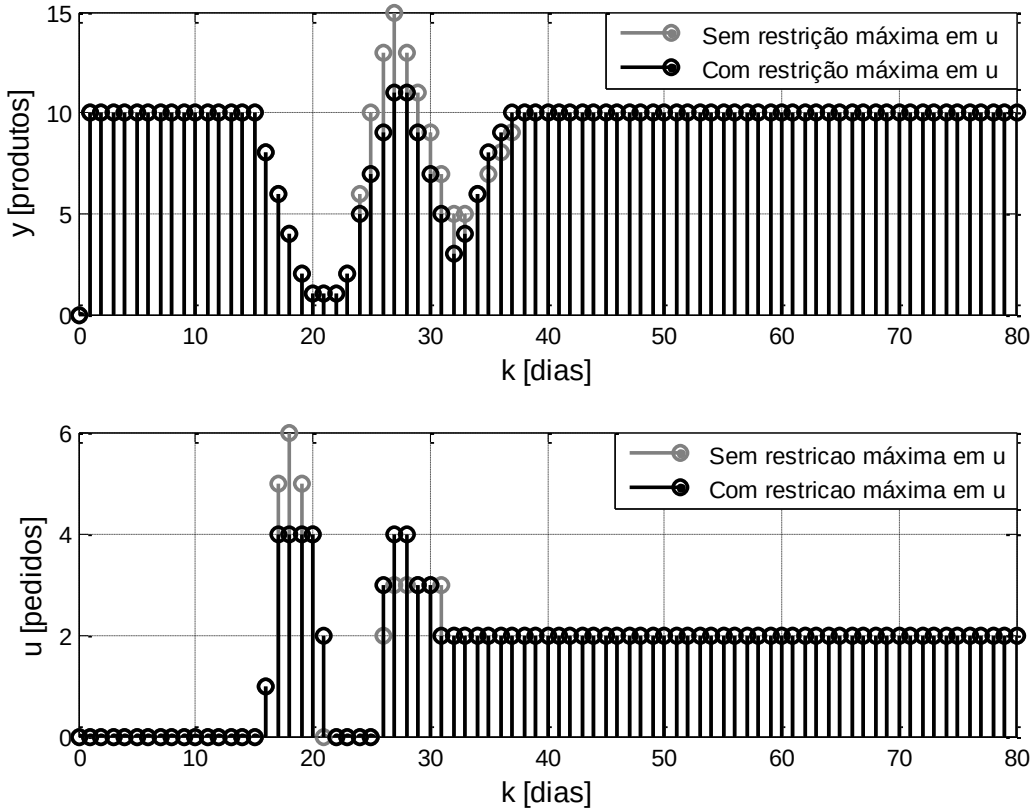
Figura 21: Comparativo da Resposta com Restrição de Valor Mínimo em u e sem Restrição



Fonte: Próprio autor

Com a restrição na excursão do sinal de controle funcionando para um valor mínimo, o próximo passo foi incluir uma restrição para o valor máximo. Utilizando a resposta apresentada na Figura 21 como base, onde o maior valor de u apresentado foi de 6 produtos no dia 18, foi escolhido um u_{max} de 4 produtos para serem mais visíveis as diferenças no comportamento. A Figura 22 mostra a comparação da resposta obtida anteriormente sem a restrição de valor máximo para o sinal de controle com a curva gerada após a inclusão de $u_{max} = 4$.

Figura 22: Comparativo da Resposta com Restrição de Valor Máximo em u com a Resposta Somente com a Restrição de Valor Mínimo



Fonte: Próprio autor

Nota-se na Figura 22 uma diferença de comportamento na saída gerada pela restrição no número máximo de produtos que podem ser produzidos por dia. Também é possível visualizar nos dias 17, 18 e 19 a restrição atuando e mantendo a ação de controle em 4 que seria o valor máximo estabelecido.

4.3.2 Tratamento restrição em u e y

A última condição a ser apresentada nesse trabalho é a imposição de uma limitação máxima no número de produtos em estoque. Para isto, primeiramente foi seguido o que foi apresentado na Equação (3.36) presente na Subseção 3.1.2.2, incluindo no programa os cálculos extras e adaptando o que fosse necessário. Porém este método não funcionou para o modelo utilizado.

Devido a forma mais simples de se impor a restrição na excursão do sinal de saída não ter funcionado, possivelmente pelo fato do sistema não ser completamente observável, como apresentado na Seção 2.3.2, outras opções tiveram que ser pensadas. Após algumas tentativas e diferentes testes, o método escolhido para limitar o valor máximo da saída foi escrever esta restrição em função do sinal de controle.

Para controlar tal inconveniência, limitou-se indiretamente o número de produtos em estoque utilizando o número máximo de produtos que pode ser produzido no dia. Dessa forma, tem-se:

$$y(k+\tau) = y(k) + u(t-\tau) + u(k-\tau+1) + u(k-\tau+2) + \cdots + u(t-1) - D \qquad (4.1)$$

A Equação (4.1) mostra a relação entre o número de produtos em estoque τ dias a frente e o recebimento dos pedidos de produtos feitos anteriormente que chegarão no intervalo entre o dia k e o dia $k+\tau$, onde D seria a demanda para todo este período. É importante ressaltar que é calculado o valor da saída de τ dias a frente, dessa forma não teria como se garantir um valor correto para as demandas futuras, de modo que, por enquanto, considera-se esta constante.

Analogamente, pode-se escrever:

$$y(k+\tau+1) = y(k+\tau) + u(k) - D \qquad (4.2)$$

Dadas as Equações (4.1) e (4.2) obteve-se uma equação que limita u_{max} e assim garante que o número de produtos em estoque não seja muito maior do que a referência estabelecida. A Equação (4.3) apresenta como foi equacionado o $u_{max}(k)$ onde α seria um fator de tolerância do sistema.

$$u_{max}(k) = r(k) - \left(y(k) + \sum_{i=1}^{\tau-1} u(k-i) - D \right) + \alpha \qquad (4.3)$$

É importante ressaltar que a referência não é tão determinante para este sistema como é em alguns outros problemas comuns na área de engenharia elétrica.

Isto ocorre devido ao fato de um estoque não necessitar um número fixo de produtos e sim uma faixa de variação aceitável, onde se tem um limite mínimo para que não haja falta de produtos e um limite máximo para que não haja excesso. Portanto, conforme o que foi apresentado em (4.1) e (4.2) pode-se escrever (4.3) de outra forma:

$$u_{max}(k) = r(k) - y(k+\tau) + \alpha \tag{4.4}$$

para $u_{max}(k+1)$:

$$u_{max}(k+1) = r(k) - y(k+\tau+1) + \alpha \tag{4.5}$$

$$u_{max}(k+1) = r(k) - y(k+\tau) + u(k) + \alpha \tag{4.6}$$

analogamente para $u_{max}(k+2)$:

$$u_{max}(k+2) = r(k) - y(k+\tau+2) + \alpha \tag{4.7}$$

$$u_{max}(k+2) = r(k) - y(k+\tau+1) + u(k+1) + \alpha \tag{4.8}$$

$$u_{max}(k+2) = r(k) - y(k+\tau) + u(k+1) + u(k) + \alpha + D. \tag{4.9}$$

Monta-se então de forma matricial:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} r(k) - \left(y(k) + \sum_{i=1}^{\tau-1} u(k-i) \right) + \alpha + D \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}^{1_{Mp} u_{max}} \geq \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{\Delta_{Mp}} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

assim tem-se:

$$1_{Mp} u_{max}(k) \geq \Delta_{Mp} U. \tag{4.11}$$

Substituindo U conforme a Equação (3.27) apresentada na Seção 3.1.2.1:

$$1_{Mp} u_{max}(k) \geq \Delta_{Mp} T_{Mp} \Delta U + \Delta_{Mp} 1_{Mp} u(k-1) \tag{4.12}$$

isolando-se ΔU:

$$\Delta_{Mp} T_{Mp} \Delta U \leq 1_{Mp} u_{max}(k) - \Delta_{Mp} 1_{Mp} u(k-1). \tag{4.13}$$

É possível notar que a Equação (4.13) está no formato necessário para se adicionar esta nova restrição nas matrizes A_{opt} *e* b_{opt}, dessa forma, agora tem-se:

$$A_{opt} = \begin{bmatrix} \Delta_{Mp} T_{Mp} \\ -T_{Mp} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

e

$$b_{opt} = \begin{bmatrix} 1_{Mp} u_{max}(k) - \Delta_{Mp} 1_{Mp} u(k-1) \\ 1_{Mp}(u(k-1) - u_{min}) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

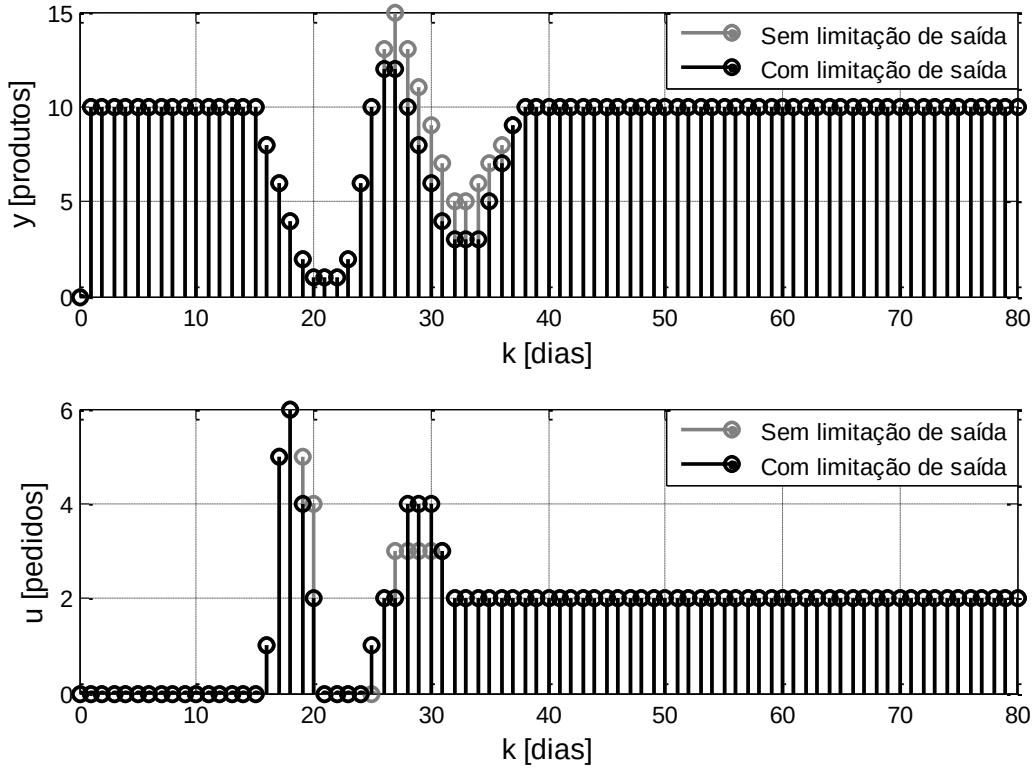
Com esse método de limitação de saída não é possível garantir um valor específico para y_{max} da mesma forma que feito anteriormente para u_{max}, porém destaca-se que há variações no comportamento do sistema após a imposição desta limitação.

Na implementação dessa limitação no programa, algumas adaptações foram feitas, para que o tempo de atraso não interferisse nos cálculos para os primeiros dias. Primeiramente, calcula-se $y(k+\tau)$, então o valor obtido é comparado com a referência. Se $y(k+\tau) \geq r(k)$ o valor máximo de produção do dia será igual ao valor definido para α. Caso o contrário $u_{max}(k) = r(k) - y(k+\tau) + \alpha$. Além disso, é imposta uma condição para que o número máximo de produtos a serem produzidos $u_{max}(k)$ resultante não seja maior que as limitações de produção definidas anteriormente u_{max}.

Na Figura 23, são apresentadas as respostas para o sistema com e sem a limitação de saída estar inclusa. A referência continua sendo 10 produtos, assim como a demanda ainda é constante de dois produtos, iniciando no dia 15, porém foi mudada a restrição em u_{max} para 10 produtos para que fosse mais fácil a visualização das diferenças.

Para esse mesmo sistema foram feitos alguns testes do fator de tolerância α, esse fator é uma espécie de erro permitido. Para uma demanda constante, o melhor resultado foi fazendo α seguir o valor da demanda.

Figura 23: Comparativo da Resposta com Limitação de Saída com a Resposta sem Limitação de Saída



Fonte: Próprio autor

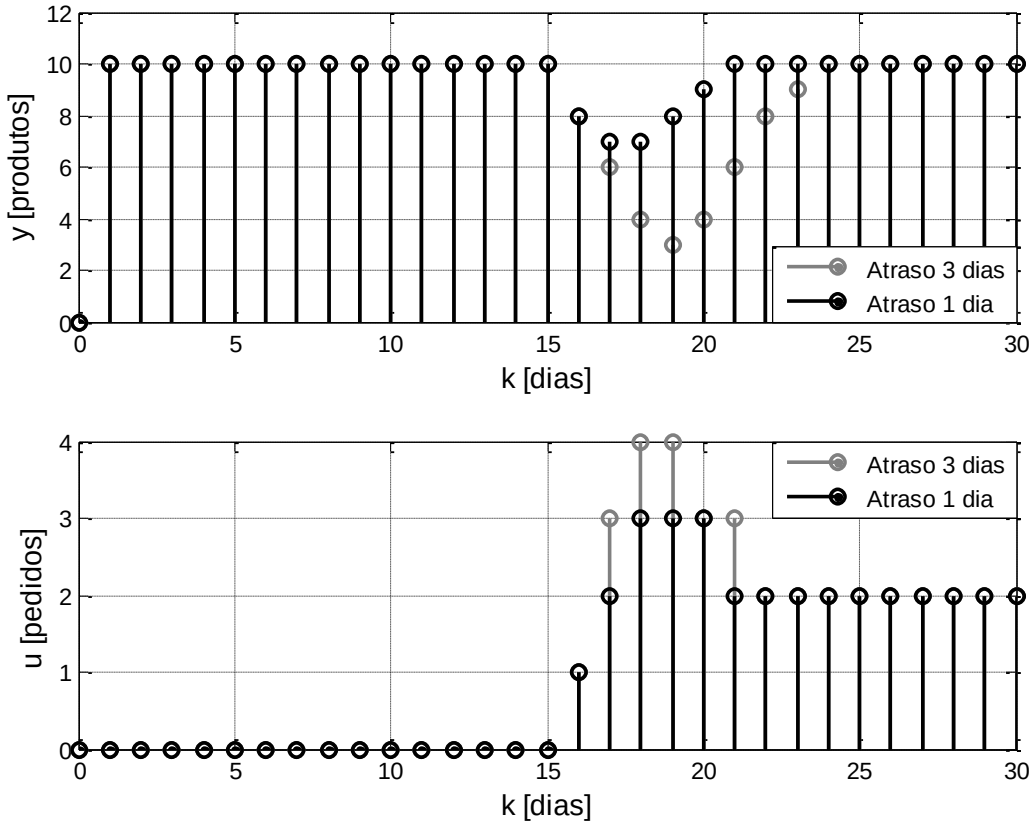
Pode-se notar uma melhora na resposta do sistema após a inclusão da limitação de saída, sendo o valor máximo atingido de produtos em estoque mudado de 15 produtos para apenas 12. Realizando o controle do número de produtos máximo em estoque, ocupa-se menos espaço para armazenamento e são requeridos menos funcionários para a manutenção. Dessa forma, pode-se economizar dinheiro ou aumentar a margem de lucro do produto.

Com a restrição na excursão do sinal de entrada e a limitação do sinal de saída funcionando foram realizados testes envolvendo o tempo de entrega das mercadorias. Para estes testes serem realizados foi mudado o modelo da planta como comentado no Capítulo 2. Dessa forma, antes de se obter os resultados que serão apresentados, foram feitos novamente os testes de parâmetros para cada valor de τ escolhido. Além disso, testou-se também o fator de tolerância α.

Foram realizadas simulações para atrasos de 1, 3, 5 e 7 dias mantendo as mesmas condições, referência de 10 produtos e demanda constante de 2 produtos se iniciando no dia 15, estas simulações são apresentadas separadamente na Figura 24

e na Figura 25 para uma melhor visualização das diferenças. Todas as restrições foram incluídas sendo $u_{max} = 10$ e $u_{min} = 0$.

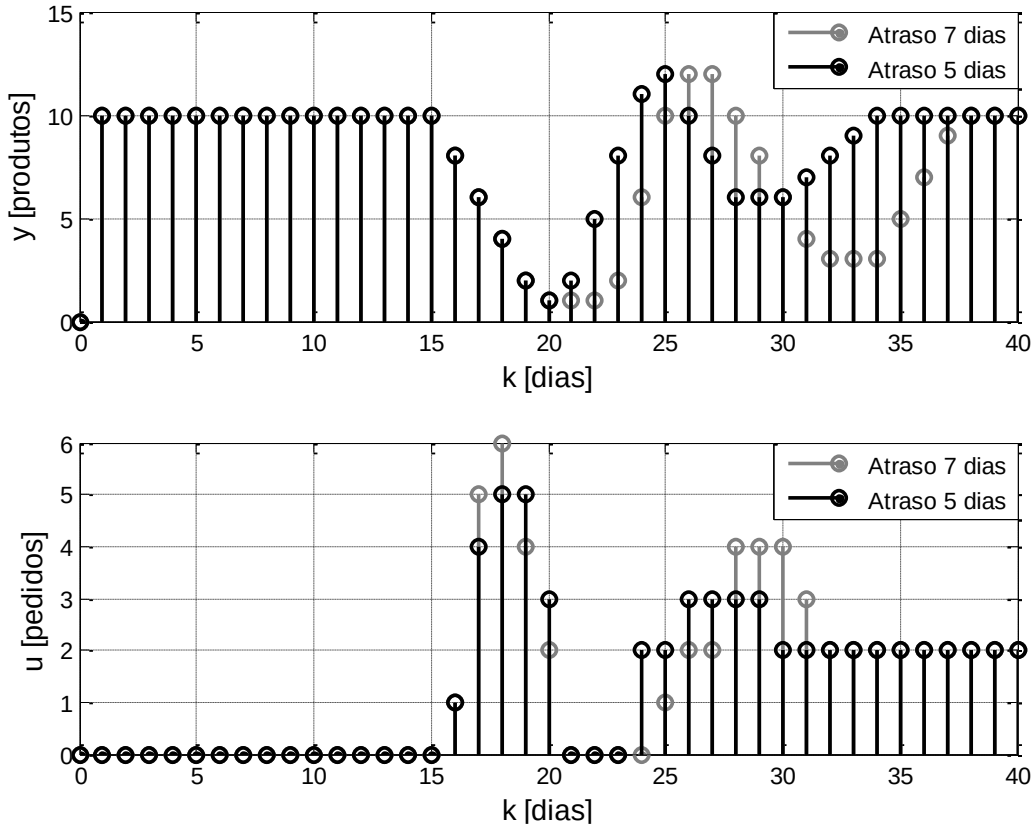
Figura 24: Comparativo Entre a Resposta para Atraso de 1 dia e 3 dias



Fonte: Próprio autor

Para $\tau = 1\ e\ \tau = 3$ foi necessário ajustar o fator de tolerância α para $D(k) + 1$, sem esse ajuste o número de produtos em estoque estabilizava em 9. A resposta obtida nas simulações já era esperada, sendo que para o atraso de apenas 1 dia o sistema se comporta melhor, tendo em vista que o atraso é um complicador no controle do número de produtos em estoque. O mesmo ocorre na Figura 25 sendo o melhor comportamento para o sistema com 5 dias de atraso entre o pedido e o recebimento do produto.

Figura 25: Comparativo Entre a Resposta para Atraso de 5 dias e 7 dias



Fonte: Próprio autor

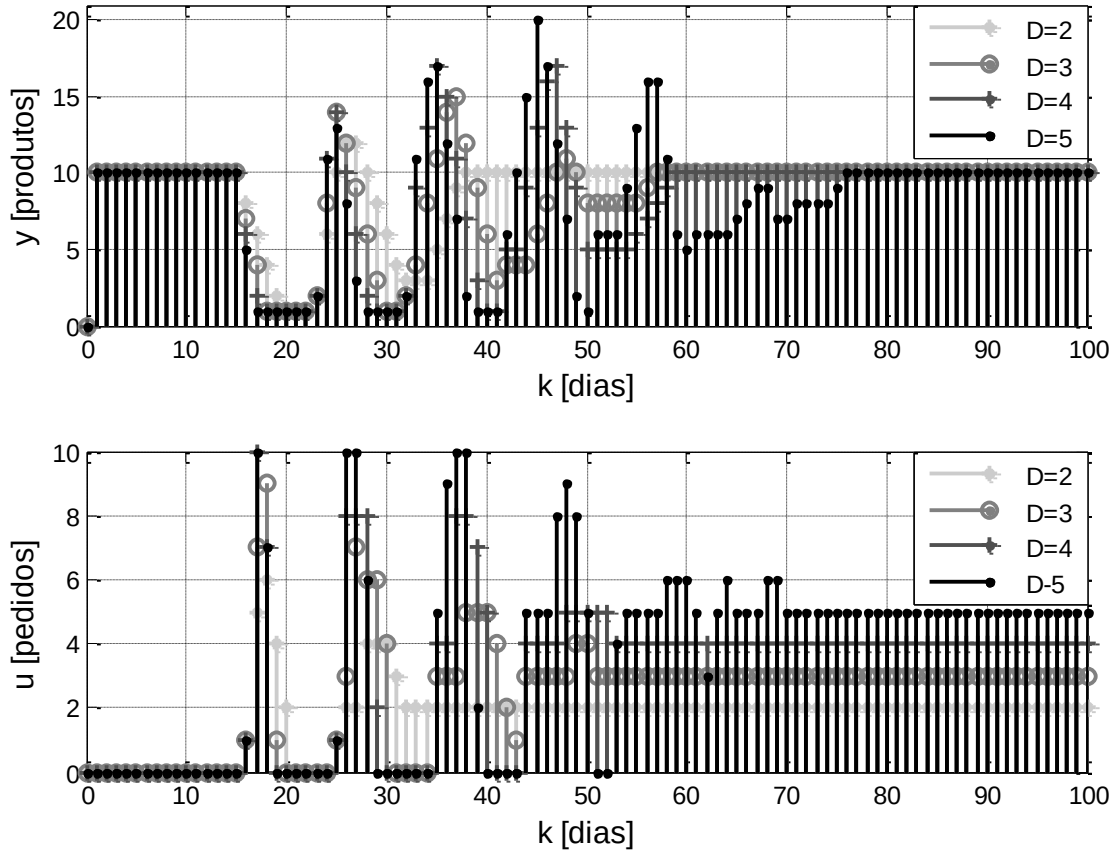
4.4 ANÁLISE DE DEMANDAS

Nesta seção serão apresentados resultados obtidos a partir dos testes realizados para averiguar a influência da demanda no sistema utilizado. Até aqui só foram apresentados resultados onde a demanda foi constante em 2 produtos e se iniciou no dia 15. A partir de agora serão feitas algumas mudanças para avaliar o comportamento do sistema.

Primeiramente, a demanda será mantida fixa e constante, porém serão feitos testes para diferentes valores, podendo assim notar de forma mais fácil a influência das variações no sistema.

Na Figura 26 é apresentada a resposta mantendo os mesmos parâmetros, alterando apenas o valor da demanda. Nota-se que quanto maior o valor da demanda, mais tempo o sistema demora para acomodar. Colocando a demanda igual a 6 produtos o sistema não consegue mais seguir a referência de 10 para o tempo determinado. Isto ocorre devido a este valor de referência ser baixo comparado a demanda, para valores mais altos de referência o sistema converge normalmente.

Figura 26: Análise da Resposta do Sistema para Demandas Constantes com valores Diferentes



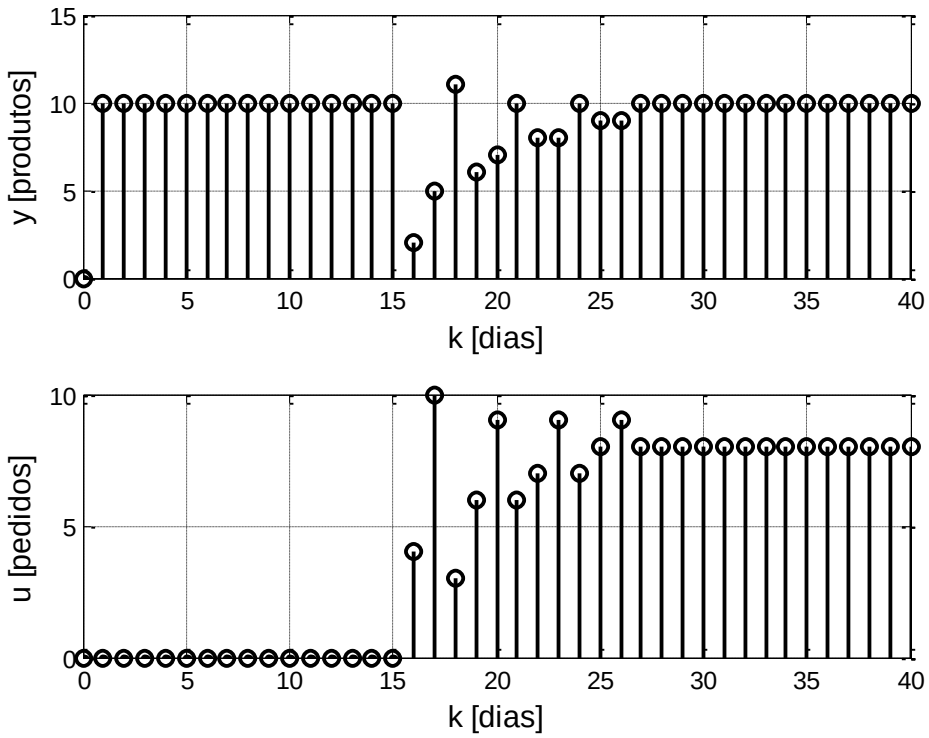
Fonte: Próprio autor

O mesmo teste foi realizado para o sistema colocando o atraso igual a 1 dia, a Figura 27 mostra o comportamento do sistema para uma demanda de 8 produtos por dia, este foi o maior valor onde o sistema conseguiu se manter na referência. Para uma demanda de 9 produtos o sistema continua estável, porém apresenta erro de 1 produto no regime permanente. Vale ressaltar que a restrição do número máximo de produtos produzidos no dia se manteve em 10 para estes testes.

Tendo sido realizada uma avaliação da influência que os diferentes valores de demanda têm no sistema, serão apresentados a partir de agora resultados para demandas mais condizentes com a realidade, onde esta pode variar.

Nas próximas figuras que serão apresentadas, será possível notar que o número de produtos em estoque nem sempre seguirá a referência de forma eficiente como antes, porém como a ideia foi simular um sistema mais real, foi avaliado se este número de produtos em estoque se mantém perto do desejado na maior parte do tempo.

Figura 27: Análise da Resposta do Sistema para Demanda Constante de 8 e Atraso de 1 Dia



Fonte: Próprio autor

Para o primeiro teste com a demanda variante, foram mantidos os mesmos parâmetros já utilizados anteriormente, mas agora a demanda se inicia com 2 produtos no dia 15, no dia 25 muda para 3 e no dia 35 muda para 4 produtos. A resposta para essas condições de simulação é apresentada na Figura 28.

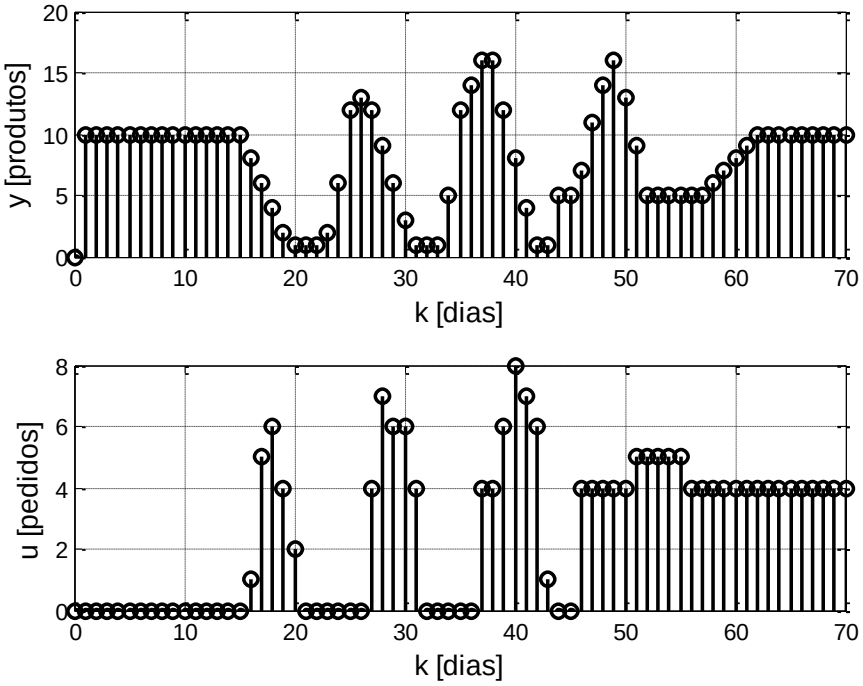
Pode-se observar que embora o número de produtos em estoque estabilize em 10 no final, este número chega a 1 em três situações, fato que não deveria ocorrer, pois isto significa que vendas podem ser perdidas devido à falta de produtos em estoque.

A Figura 29 apresenta representa o sistema de uma mercadoria onde as vendas aumentam muito em determinado período no ano, porém no resto do ano se estabilizam em um número menor, como exemplo desse tipo de comportamento pode-se citar vendas de artigos natalinos. Dessa forma, a demanda se inicia em 5 produtos no dia 15 e se mantém constante até o dia 30 onde a mesma muda para apenas 1 produto.

Analisando a Figura 29, nota-se mais claramente o problema comentado anteriormente, onde muitas vendas podem deixar de serem feitas devido à falta de produtos em estoque. Isto acontece porque no atual sistema de controle não existe

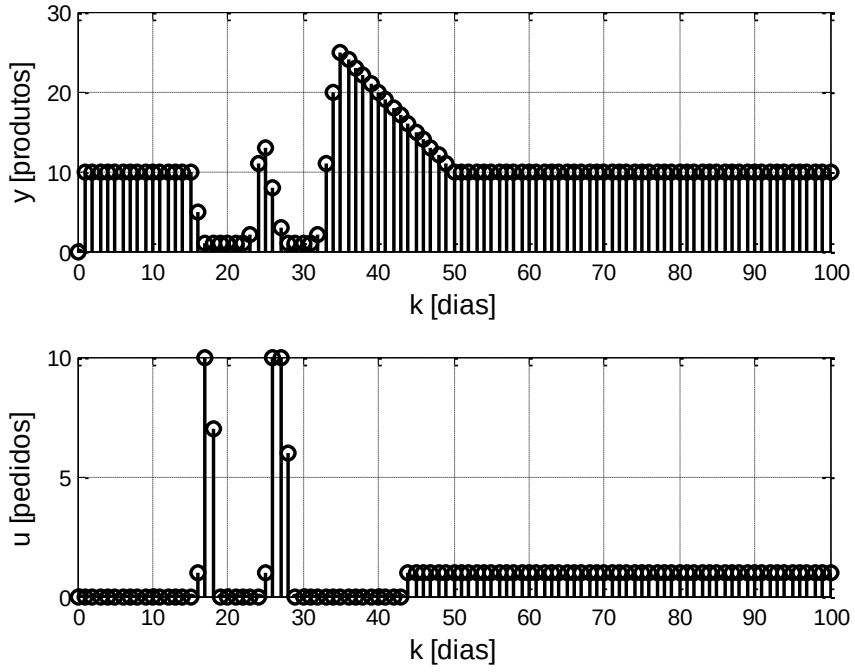
um estimador das demandas futuras o que faz com que o sistema não identifique completamente o que irá acontecer e dessa forma não note a necessidade de se produzir mais produtos anteriormente, nem a hora de parar de produzir.

Figura 28: Análise da Resposta do Sistema para Demanda Variando Linearmente



Fonte: Próprio autor

Figura 29: Análise da Resposta do Sistema para Demanda Variando Apenas em um Período do Ano

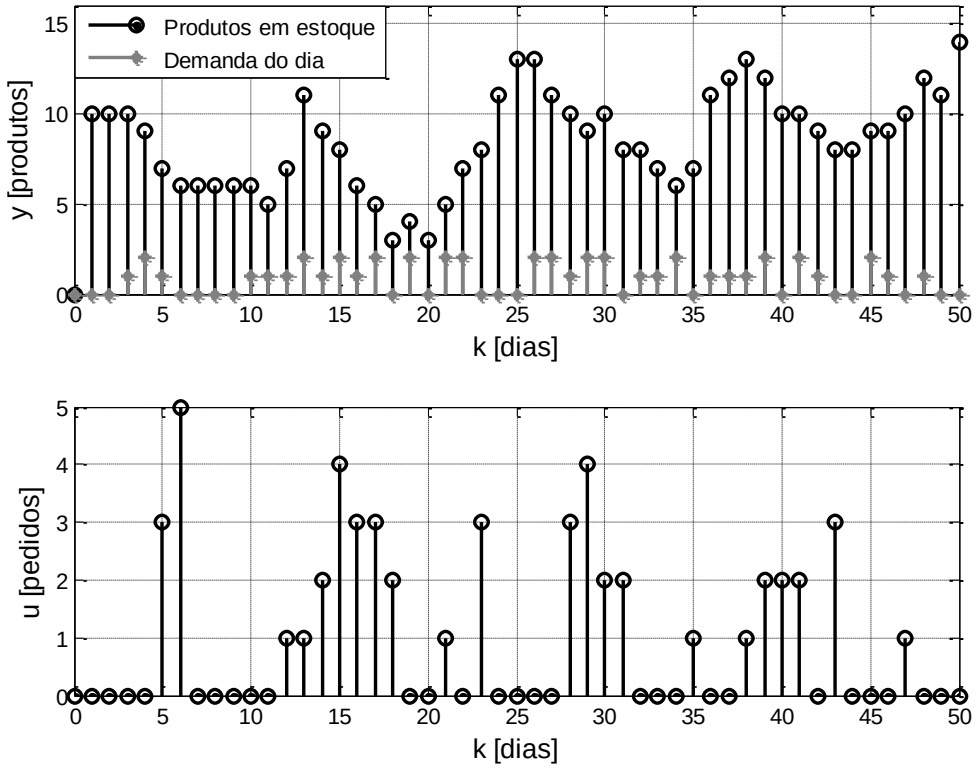


Fonte: Próprio autor

Na Figura 30 e na Figura 31 são apresentados os resultados para dois tipos diferentes de empresa, porém com o comportamento parecido. Ambas fazem vendas no varejo e desejam um estoque médio de 10 produtos. A diferença é que para a Figura 30 imagina-se uma empresa que venda produtos caros, vendendo assim no máximo 2 produtos por dia, porém há dias onde não é vendido nenhum produto. O atraso neste caso se mantém em 7 dias. Para a Figura 31, imagina-se uma empresa mais simples, onde vende-se de 0 a 8 produtos por dia e se recebe este produto com atraso de 2 dias.

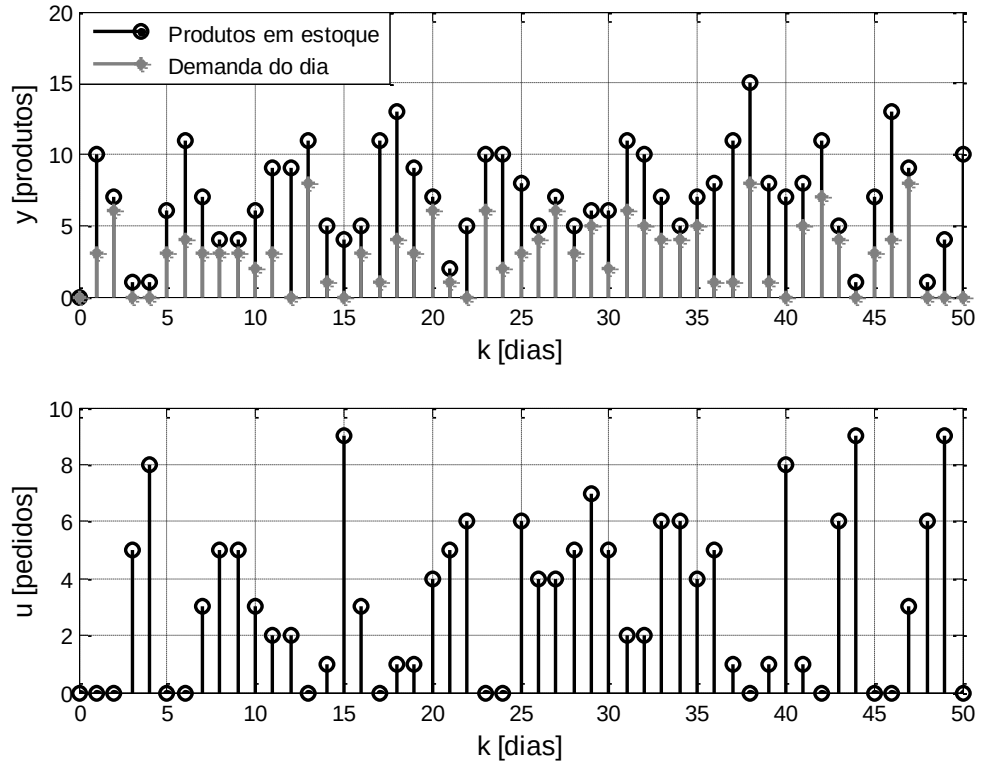
Para a realização desta simulação foram utilizados valores randômicos para a demanda dentro dos intervalos estabelecidos para cada caso.

Figura 30: Análise da Resposta do Sistema com Atraso de 7 Dias para Demanda Variando Entre 0 e 2 Produtos



Fonte: Próprio autor

Figura 31: Análise da Resposta do Sistema com Atraso de 2 Dias para Demanda Variando Entre 0 e 8 Produtos



Fonte: Próprio autor

Pode-se comentar a partir da análise das Figura 30 e Figura 31 um comportamento de certa forma parecido, onde o número de produtos em estoque chega a 1 em poucos momentos, não estabiliza em 10 produtos que seria a referência, porém também não há um valor máximo de produtos em estoque tão grande o que não gera mais custos para armazenamento de mercadorias. Este resultado era esperado, já que com a demanda sendo estipulada randomicamente não há um padrão a ser seguido para a realização dos pedidos.

5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi realizada uma revisão bibliográfica a respeito de processos logísticos empresariais, envolvendo definição, conceitos históricos e como pode ser modelado um sistema deste tipo.

Para as primeiras simulações, foi realizado um estudo a respeito do controlador calculado pelo projeto polinomial de alocação de polos, devido ao modelo encontrado apresentar grande semelhança com este método de controle.

Após a implementação e validação da primeira estrutura de controle, realizou-se um estudo de Controle Preditivo Baseado em Modelo, abordando aspectos históricos e dando enfoque a técnica SSMPC.

Foi utilizado o software MATLAB® para a realização das simulações deste trabalho, porém para o sistema apresentado, foi necessária a busca por um *solver* que solucionasse um problema de programação quadrática inteira, tendo em vista que os valores utilizados deveriam pertencer ao conjunto dos números inteiros.

Dentro da revisão bibliográfica realizada a respeito do SSMPC foram vistos conceitos a respeito do tratamento de restrições e de como pode ser realizada a implementação do SSMPC. Para validação: da malha de controle, da implementação de restrições e da utilização da OPTI utilizou-se de um exemplo de planta para um levitador magnético. Com a malha de controle validada aplicou-se esta técnica no modelo de gerenciamento de estoque.

Com um programa básico funcionando deu-se início a implementação das melhorias e a partir disso, foram aperfeiçoadas algumas partes do programa, além de serem impostas restrições do sinal de excursão de entrada e desenvolvidos métodos diferentes para a inclusão da limitação de saída.

Os resultados do trabalho condizem com o que foi proposto, embora ainda se tenham diversas melhorias que podem ser feitas neste sistema e conclui-se a partir dele que o Controle Preditivo é uma estratégia que se mostra adequada para este tipo de problema. Isto se deve ao fato do tratamento de restrições para esse controlador ser realizado de forma simples.

2.5

5.1 CONTRIBUIÇÕES

Dentre as contribuições deste trabalho, destacam-se:

- Aplicação da técnica de controle preditivo em outra área de conhecimento;
- Apresentação de um novo campo de estudo para o departamento de engenharia elétrica e mais especificamente para o grupo de controle de sistemas (GCS);
- Interdisciplinaridade do trabalho envolvendo aspectos da engenharia de produção, o que pode resultar na aproximação dos departamentos para trabalhos futuros.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Para dar continuidade a este trabalho, sugere-se:

- O desenvolvimento de um estimador de demandas futuras, visando uma melhor resposta do sistema para variações;
- Implementação da produção e da entrega dos produtos posteriormente nos casos onde o cliente deseja comprar mais produtos do que há em estoque;
- Desenvolver uma função de custo que avalia administrativamente o sistema, envolvendo preços para produção e manutenção do produto em estoque;
- Implementação de mais condições, como a questão do número de produtos a serem produzidos, para muitas empresas não compensa pedir apenas um produto, é melhor esperar acumular mais pedidos;
- Realizar uma análise para implementação de um controlador que não necessariamente siga a referência, mas que possa ser estipulada uma faixa de produtos desejável, com limites mínimo e máximo de produtos em estoque.
- Separar a predição dos estados observáveis dos não observáveis, esta técnica pode ser vista em [23]

REFERÊNCIAS

[1] SARIMVEIS, H. et al. Dynamic modeling and control of supply chain systems: A review. **Computers & Operations Research**, v. 35, p. 3530-3561, Novembro 2008.

[2] MONTEIRO, F. V. **Um Estudo Comparativo de Políticas de Gestão de Estoques Utilizando Técnicas de Controle**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2014.

[3] QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. A survey of industrial model predictive control technology. **Control Engeneering Pratice**, v. 11, p. 733-764, 2003.

[4] CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**. Londres: Springer-Verlag, 1999.

[5] MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive Control with Constraints**. Harlow: Prentice Hall, 2002.

[6] RODRÍGUEZ, D. A. Á.; NORMEY-RICO, J. ; FLESCH, R. C. C. Controle preditivo para cadeias de suprimentos sujeitas a incertezas de modelagem e de previsão de demanda. **V Congresso Brasileiro De Engenharia De Produção**, Ponta Grossa, 2-4 Dezembro 2015.

[7] MARTINS, D. ; FERREIRA, N. **Estudo De Gestão De Estoque Utilizando Uma Estratégia De Controle Preditivo**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2014.

[8] SCHWARTZ, J. D.; WENLIN, W.; RIVERA, D. E. Simulation-based optimization of process control policies for inventory management in supply chains. **Automatica**, v. 42, p. 1311-1320, Agosto 2006.

[9] MOURA, B. D. C. **Logística:** Conceitos e Tendências. 1ª. ed. Lisboa: Centro Atlântico, 2006.

[10] ROSS, P. D. S.; JÚNIOR, C. D. O. F. **Controle de Estoque: Métodos para reduzir estoque**. Faculdade de Pindamonhangaba. Pindamonhangaba. 2012.

[11] COUNCIL of Supply Chain Management Professionals. **Supply Chain Management Terms and Glossary**, 2013. Acesso em: 5 Maio 2016.

[12] GOULART, C. P.; ZANATTA, A. D. S. W. **Logística no Brasil, sua História e Trajetória**. UNIBAVE. Orleans.

[13] GRUPO Executivo de Integração da Política de Transporte. **Sistema de Informações do Anuário Estatístico dos Transportes**, 2001. Disponivel em: <http://www.geipot.gov.br/anuario2001/>. Acesso em: 6 Maio 2016.

[14] PACHECO, E. D. O. **Usando dinâmica de sistemas para análise de algoritmos de reposição de estoque em ambientes produtivos**. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba. 2004.

[15] JÚNIOR, A. D. P. **Introdução ao Controle Digital**. Joinville: [s.n.], 1989.

[16] OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5ª Edição. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

[17] NEGRI, G. H. **Aplicação de Métodos de Controle Preditivo Baseado em Modelo em um Motor de Corrente Contínua sem Escovas**. UDESC. Joinville. 2014.

[18] CAVALCA, M. S. M. **Notas de Aula - Tópicos Especiais em Sistemas Eletroeletrônicos: Controle Preditivo**. UDESC. Joinville. 2016.

[19] AXEHILL, D. **Integer Quadratic Programming for Control and Communication**. Linköping University. Linköping, Suécia. 2008.

[20] **OPTI Toolbox**. Disponivel em: <http://www.i2c2.aut.ac.nz/Wiki/OPTI/index.php/Main/HomePage>. Acesso em: 20 Agosto 2016.

[21] FAMA, et al. PREDICTIVE CONTROL OF A MAGNETIC LEVITATION SYSTEM WITH EXPLICIT TREATMENT OF OPERATIONAL CONSTRAINTS. **18th International Congress of Mechanical Engineering**, Ouro Preto, Novembro 2005.

[22] MATOS, M. S.; GALVÃO, K. H.; YONEYAMA,. CONTROLE PREDITIVO DE UM SISTEMA DE LEVITAÇÃO MAGNÉTICA COM ROBUSTEZ A INCERTEZAS DE GANHO. **XVII Congresso Brasileiro de Automática (CBA)**, Juiz de Fora, 2008.

[23] CAVALCA, M. S. M. **Notas de Aula - Tópicos Especiais em Sistemas Eletroeletrônicos: Controle Preditivo**. UDESC. Joinville. 2016.

APÊNDICE A – PSEUDOCÓDIGO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO CONTROLE

Pseudocódigo para programa sem restrições

Offline:

1. Definir $A, B\ e\ C$
2. Obter A_a, B_a, C_a
3. Definir N, M e ρ
4. Montar G e Φ
5. Calcular $Kmpc$
6. Inicializar as variáveis e definir T_s

Rotina de Simulação:

1. Definir demanda
2. Emular a planta
3. Montar $x_a(k)$
4. Calcular F
5. Calcular $\Delta U = K_{MPC}(R_{ref} - F)$
6. Obter $u(k) = u(k-1) + \Delta U(1,:)$
7. Incrementar k.

Pseudocódigo para programa com restrições e limitações:

Offline:

1. Definir $A, B\ e\ C$
2. Obter A_a, B_a, C_a
3. Definir N, M e ρ
4. Montar G e Φ
5. Montar matrizes 1_{Mp}, T_{Mp} e Δ_{Mp}
6. Definir conjunto numérico para o solver
7. Calcular H e A_{opt}
8. Inicializar as variáveis e definir T_s

Rotina de Simulação:

1. Definir demanda
2. Emular a planta
3. Montar $x_a(k)$
4. Calcular F

5. Calcular f
6. Calcular $y(k+\tau)$
7. Calcular $u_{max}(t)$
8. Calcular b_{opt}
9. Aplicar o solver
10. du = solve(opt)
11. Incrementar k