



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**UM ESTUDO SOBRE SIMETRIAS E
GRUPOS DE GALOIS: UTILIZANDO
UMA VIA ESTÉTICA PARA ACESSO
AO CONHECIMENTO MATEMÁTICO**

ANDRESSA DAMBRÓS

JOINVILLE, 2013

ANDRESSA DAMBRÓS

**UM ESTUDO SOBRE SIMETRIAS E GRUPOS DE GALOIS:
UTILIZANDO UMA VIA ESTÉTICA PARA ACESSO AO
CONHECIMENTO MATEMÁTICO**

Trabalho de Graduação apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática
do Centro de Ciências Tecnológicas,
da Universidade do Estado de Santa
Catarina, como requisito parcial para a
obtenção do grau de Licenciatura em
Matemática.

Orientadora: Luciane Mulazani dos
Santos

Coorientadora: Viviane Maria Beuter

**JOINVILLE-SC
2013**

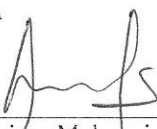
ANDRESSA DAMBRÓS

**UM ESTUDO SOBRE SIMETRIAS E GRUPOS DE GALOIS:
UTILIZANDO UMA VIA ESTÉTICA PARA ACESSO AO
CONHECIMENTO MATEMÁTICO**

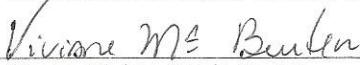
Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora:


Doutora Luciane Mulazani dos Santos
Universidade do Estado de Santa Catarina

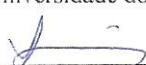
Coorientadora:


Mestre Viviane Maria Beuter
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:


Doutora Patrícia Sáñez Pacheco
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:


Mestre Valdir Damázio Júnior
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 05/12/13

Dedico este trabalho a meus pais,
que tanto me apoiaram.
Ao Gabriel, pelo amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que apesar de todas as adversidades, meu deu muitas forças para conseguir terminar meu trabalho.

Aos meus pais, Ivete e Alcides, pelo total apoio e constante dedicação.

Aos meus irmãos, Andriele e Luiz, pela eterna amizade.

Ao meu namorado, Gabriel, pelo amor, amizade, companherismo, dedicação e paciência, e por me segurar e me dar força nos momentos mais difíceis.

A toda minha família, pelo amor demonstrado.

Agradeço a minha professora orientadora, Luciane, pela amizade, pela enorme ajuda, pelas broncas, pela paciência e principalmente por tudo o que me ensinou. Sem você, este trabalho nunca haveria de ser realizado. Você é o modelo de professora que eu vou querer seguir a partir de agora.

A minha coorientadora, Viviane, pela ajuda e pela cooperação.

Aos professores Valdir e Patrícia, por aceitar o convite para avaliar meu trabalho. Tenho certeza que irei aprender muito com vocês.

A todos os professores que fizeram parte dessa dura caminhada que foi a graduação, o meu muito obrigada.

Agradeço a minha amiga Dátila, que me escutou, me aconselhou e me ensinou o valor de uma amizade.

As minhas amigas Isabel e Rosana, por ter me proporcionado os momentos mais divertidos desses quatro anos.

As minhas amigas Cristiane, Yvana, Fran, Tanúbia, Joana, Manu e Bruna Corso que foram super companheiras, principalmente nos momentos mais difíceis.

A todos os meus colegas, que de uma forma ou outra, fizeram parte desse capítulo da minha história.

A todos, o meu muito obrigado!

RESUMO

DAMBRÓS, Andressa. **Um estudo sobre Simetrias e Grupos de Galois**: utilizando uma via estética para acesso ao conhecimento matemático. 2013.133 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013.

Neste trabalho, propomos um estudo sobre a simetria e a presença da simetria em um conceito matemático específico, o conceito de Grupo. Também, mostramos como podemos usar a estética para aprender matemática, e como a simetria ajuda para essa aprendizagem. Costumamos associar o conceito de simetria ao que é visual e geométrico, e o que mostramos aqui é uma simetria imposta em conceitos totalmente abstratos. Fazemos a associação entre simetria e álgebra abstrata através da história da teoria de grupos. Mostramos também conceitos importantes dentro da teoria de grupos e como usar a estética para o conhecimento matemático.

Palavras-chave: Simetria. História da Matemática. Teoria de Grupos. Estética. Conhecimento Matemático.

ABSTRACT

DAMBRÓS, Andressa. **A study of Galois Groups and Symmetries:** using an aesthetic route for access to mathematical knowledge. 2013. 133 pages. Completion of Course Work (Undergraduate Degree in Math) –University of the State of Santa Catarina, Joinville, 2013.

In this paper, we propose a study on the symmetry and the presence of symmetry in a specific mathematical concept, the concept of Group. Also, we show how we can use aesthetics to learn mathematics, and how symmetry helps for that learning. We often associate the concept of symmetry that is visual and geometric, and we show here is a symmetry imposed in totally abstract concepts. Make the association between symmetry and abstract algebra through the history of group theory. We also show important concepts in the theory of groups and how to use the aesthetic to mathematical knowledge.

Key words: Symmetry. History of Mathematics. Theory of Groups.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplos da presença da simetria em elementos da natureza.....	25
Figura 2 –Exemplos da presença da simetria em elementos da natureza.....	25
Figura 3 – Identificação de eixo de simetria em elementos da natureza.....	26
Figura 4 –Identificação de eixo de simetria em elementos da natureza.....	26
Figura 5 – Reprodução do afresco “ A última ceia” de Leonardo Da Vinci.....	26
Figura 6 –Marca da Udesc.....	27
Figura 7 – Identificação de eixo de simetria em produtos de construção humana.....	27
Figura 8 – Identificação de eixo de simetria em produtos de construção humana.....	27
Figura 9 – Figuras Simétricas.....	28
Figura 10 – Figura original e “dobrada” através do eixo de simetria....	29
Figura 11 – Exemplo de simetria Axial.....	30
Figura 12 – Exemplo de simetria central.....	31
Figura 13 – Exemplo de simetria central cuja reta passa pelo centro de simetria.....	31
Figura 14 – Isometria: Reflexão Deslizante.....	32
Figura 15 – Isometria: Reflexão.....	32
Figura 16 – Isometria: Rotação.....	33
Figura 17 – Isometria: Translação.....	33
Figura 18 – Objeto formado a partir de um módulo.....	34
Figura 19 – Exemplos de módulos de simetria do cubo.....	34
Figura 20 – Isometria: simetria de translação.....	35
Figura 21 – Obra de Escher, que mostra a simetria de translação e o módulo em destaque.....	36
Figura 22 – Exemplo de simetria por translação na natureza.....	36
Figura 23 – Exemplo de translação em obra artística.....	37
Figura 24 – Isometria: simetria por rotação em relaçaõ a um ponto.....	37
Figura 25 – Rotação de 180°	38
Figura 26 – Rotação de 120°	38
Figura 27 –Rotação de 90°	38

Figura 28 – Rotação de 60°	39
Figura 29 – Ângulo de rotação.....	39
Figura 30 – Isometria: simetria por reflexão vertical em relação a um eixo.....	40
Figura 31 – Isometria por reflexão horizontal.....	40
Figura 32 – Isometria: reflexão deslizante.....	41
Figura 33 – Exemplo de reflexão na natureza.....	41
Figura 34 – Reflexão com eixo de simetria e distâncias marcados.....	42
Figura 35 – Exemplo de simetria de inversão.....	43
Figura 36 – Obra de Escher como exemplo de simetria de dilatação...44	
Figura 37 – Simetria como referência à beleza e à regularidade.....	45
Figura 38 – Rázes quintas de uma unidade no plano complexo e raízes quintas de dois.....	72
Figura 39 – Metáfora da árvore para resolver a quadrática, a cúbica e a quártica.....	88
Figura 40 – Rotação do triângulo equilátero por um ângulo reto.....	90
Figura 41 – Rotação do triângulo equilátero por um ângulo de 120°	91
Figura 42 – As seis simetrias do triângulo equilátero.....	92
Figura 43 – Triângulo equilátero com seus eixos de simetria.....	96
Figura 44 – Triângulo equilátero com os vértices enumerados.....	97
Figura 45 – Combinações de simetria.....	98
Figura 46 – Combinações de simetria.....	98
Figura 47 – Combinações de simetria.....	99
Figura 48 – Conjunto de todas as simetrias de um triângulo equilátero.....	99
Figura 49 - Polígono regular de n lados.....	112
Figura 50 – Rotação de $a = (\frac{360^\circ}{n})$	113
Figura 51 – Operações de rotações em um polígono regular.....	114
Figura 52 – Reflexão em torno de eixo x	115
Figura 53 – Rotações e reflexões de um polígono regular.....	116
Figura 54 – Grupo Dihedral D_8	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Permutações dos símbolos a , b e c	77
Tabela 2 – Multiplicação para as seis permutações das raízes de uma equação cúbica.....	84
Tabela 3 –Tabela de multiplicação para um subgrupo de três permutações.....	85
Tabela 4 – Tábua de operações de G	104
Tabela 5 – Tábua de operações de G	105
Tabela 6 – Tábua do grupo de Klein.....	105
Tabela 7 – Tábua do grupo D_3	106
Tabela 8 – Tábua de operações de $\mathbb{Z}_5$	107
Tabela 9 – Tábua de operações de R_4	115
Tabela 10 –Tábua do D_8	119

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	20
CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	21
1 SIMETRIA.....	25
1.1 ALGUMAS DEFINIÇÕES.....	28
1.2 TIPOS DE SIMETRIA.....	30
1.3 TRANSFORMAÇÕES DE SIMETRIA.....	33
2 SIMETRIAS E GRUPOS: ALGUNS EPISÓDIOS HISTÓRICOS.....	46
3 GRUPOS DE SIMETRIA.....	94
3.1 SIMETRIAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	94
3.2 GRUPOS.....	99
3.3 PERMUTAÇÕES.....	107
3.4 GRUPOS DE ROTAÇÕES.....	111
3.5 GRUPOS DIEDRAIS.....	114
3.6 SUBGRUPOS.....	115
3.6.1 Classes Laterais e o Teorema de Lagrange.....	119
3.6.2 Subgrupos Nomais.....	122
3.7 HOMOMORFISMOS E ISOMORFISMOS.....	124
3.7.1 Homomorfismo de Grupos.....	124
3.7.2 Isomorfismo de Grupos.....	127
3.8 TEOREMA DE CAYLEY.....	128
4 UMA VIA ESTÉTICA DE ACESSO AO CONHECIMENTO MATEMÁTICO.....	132
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	139
REFERÊNCIAS.....	141

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa encontra-se na fronteira entre as áreas da Matemática e da Educação Matemática. Trata-se do estudo de conteúdos de Álgebra Moderna e da discussão acerca da utilização de uma via estética de acesso a esses conteúdos, segundo Cifuentes (2005).

Desenvolvemos um trabalho investigativo exploratório cuja fonte de dados foi uma pesquisa bibliográfica. Para tal, realizamos estudos teóricos pertinentes aos temas de pesquisa, posteriormente sistematizados, organizados e escritos na forma da monografia aqui apresentada.

Partindo de conceitos intuitivos sobre simetria e entendendo que simetria é um valor estético da matemática, seguimos um viés histórico para a construção de conhecimentos a respeito da Teoria de Grupos. A contextualização histórica sobre o conceito de simetria, baseada principalmente em Stewart (2012), Eves (2004) e Boyer (1996), foi feita em termos de episódios da história ligados ao desenvolvimento da geometria e das teorias sobre resolução de equações, tais como a Teoria de Galois e a Teoria de Grupos. Discutimos, assim, a utilização de uma via estética de acesso a tais conhecimentos matemáticos.

Considerando a importância da Teoria de Grupos para estudos teóricos e aplicados nas ciências e as potencialidades de se introduzir uma linguagem visual da matemática por meio da análise de valores estéticos como a simetria, fizemos o estudo do conceito de Grupos e a busca por uma compreensão da construção da ideia de Grupo de Galois. Ascendendo ao conhecimento matemático pela via estética utilizada ao longo da pesquisa, construímos a prova de que todo grupo “de qualquer natureza” é uma “cópia” de um subgrupo do grupo de permutação; em particular, provamos que todo grupo finito é uma “cópia” de um subgrupo de um grupo de simetria.

A realização deste estudo se justifica pelo interesse pela pesquisa dos temas em questão, interesse esse motivado pela leitura do texto de Cifuentes (2005) que discute conhecimento matemático e racionalidade estética e de Stewart (2012) que apresenta uma construção histórica das teorias matemáticas relacionadas ao conceito de simetria. A partir dessas leituras iniciais, construímos os seguintes objetivos como guias para a realização da pesquisa aqui apresentada:

- Compreender o conceito de simetria ligado ao conhecimento matemático em Álgebra Moderna;

- Discutir conhecimento matemático e racionalidade estética a partir do estudo de aspectos estéticos e da contextualização histórica relacionados à Teoria de Grupos;
- Apresentar um estudo sobre Grupos de simetria;
- Apresentar um estudo sobre como ascender ao conhecimento matemático por meio de uma via estética.

Buscamos, assim, estudar a simetria – entendida como um valor estético da matemática – como um dos conceitos presentes na Teoria de Grupos, na intenção de viabilizar o acesso ao conhecimento matemático em Álgebra Abstrata e contribuir para os estudos em Educação Matemática preocupados com uma reflexão crítica em matemática.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

São muitas as áreas em que podemos utilizar o conceito de simetria; trataremos aqui especificamente da matemática.

Dentre as possíveis definições para a palavra simetria, iniciaremos apresentando aquela discutida por Rohde (1997) como sendo derivada do grego (*sin* = com e *métron* = medida) significando “uma operação que mantém uma forma invariante”.

Traduzida erroneamente como “proporção”, “comensurável” ou “medida”, [simetria] expressa a propriedade pela qual um ente, objeto ou forma exhibe partes correspondentes (ou congruentes) quando submetida a uma operação específica. (ROHDE, 1997, p. 7)

De acordo com o autor, a simetria pode ser abordada do ponto de vista matemático, geométrico e espacial e também com o olhar que considera a existência de “fenômenos estéticos” e “urbanísticos”. Aqui, nos interessa a relação com os fenômenos estéticos, não perdendo de vista que

A questão da oposição entre simetria e assimetria, que nas Ciências Naturais pode ser equiparada ou contrastada com informação versus caos ou

organização contra desorganização, nas obras dos seres humanos adquire um matiz muito diferente, misturando-se questões históricas, desenvolvimento técnico, ideologia política, visão-de-mundo e apreciação estética. (ROHDE, 1997, p. 7)

Nesse sentido, o autor aponta como sendo a temática central de sua discussão, “a forma de apropriação da simetria, das simetrias e suas várias combinações possíveis dentro de um contexto social, histórico e estético”. (ROHDE, 1997, p.7)

Simetria também é um importante conceito em Álgebra.A Teoria de Grupos apresenta relevantes conceitos desenvolvidos no contexto da Matemática Abstrata para o desenvolvimento científico e para a aplicação desses conhecimentos. Um deles é o conceito de Grupo, formalizado graças ao trabalho de matemáticos como Euler, Gauss, Lagrange, Abel e Galois.De acordo com Domingues e Iezzi (2003, p. 138), “a ideia de Grupo era um instrumento da mais alta importância para a organização e o estudo de muitas partes da matemática. Em nível mais elementar, um exemplo é a teoria das simetrias”.Ainda de acordo com os autores, nesse contexto: “essencialmente, os grupos podem ser usados para retratar simetrias geométricas: a cada figura associa-se um grupo, grupo esse que caracteriza e retrata a simetria da figura”.

Historicamente, a teoria que envolve o conceito de Grupo relaciona-se ao estudo da teoria das equações algébricas, da teoria dos números e da geometria, tendo como precursora a busca por raízes para equações de grau n .

Em estudo que motiva a introdução da linguagem visual da matemática, Cifuentes afirma que “a reflexão crítica na matemática pode se dar, por exemplo, dos pontos de vista histórico, filosófico ou cultural” esclarecendo que “ao longo da história, o conhecimento matemático não foi somente objeto puro da razão, senão também da emoção, manifestando-se esta através da intuição matemática e da apreciação estética” (CIFUENTES, 2005, p. 56)

A emoção é uma das faculdades humanas fundamentais, junto com a razão. Enquanto faculdade, ela é uma capacidade intelectual, pois permite a percepção e o reconhecimento de um

valor e, portanto, é fonte de conhecimento, o conhecimento sensível. Tradicionalmente, assume-se que o conhecimento matemático é, por natureza, puramente racional, o qual significa que, das principais capacidades do ser humano, a razão e a emoção, consideradas muitas vezes como incompatíveis, a única que lidaria com o conhecimento matemático é a razão. Essa tradição baseia-se na tese, que podemos chamar de platônico-cartesiana, de que os objetos matemáticos são idéias desligadas de toda experiência sensível e que à verdade matemática acede-se pela razão. No entanto, são dimensões da aquisição do conhecimento, em geral, além do racional, também o emocional, através da intuição e da experiência estética, entendendo por **estética** a ciência do conhecimento sensível e por **experiência estética** o prazer da apreensão do belo. (CIFUENTES, 2005, p. 56, grifos do autor)

Assim como discutido pelo autor, será apresentado neste trabalho “como, ao longo da história, o conhecimento matemático não foi somente objeto puro da razão, senão também da emoção, manifestando-se esta através da intuição matemática e da apreciação estética”.

A matemática, quando bem desenvolvida, carrega não apenas verdade por meio dos seus axiomas e suas demonstrações, mas uma beleza soberana, conforme já dizia Bertrand Russell. Nisso reside o sentido estético da matemática. Ela não é só uma ciência, mas é, também, uma forma de arte, uma forma de pensar, e sua beleza tem relação direta com as diferentes manifestações artísticas, como a poesia, a música, a dança, entre outros. [...] A matemática, além de ser útil, carrega beleza e proporciona prazer para quem ousa descortinar um mundo de mistérios surpreendentes e fascinantes. Nesse sentido, ela ressalta o poder e o fascínio da criação. (GUSMÃO, 2013, p. 101)

De acordo com Gusmão (2013), componentes estéticos da matemática – como a simetria – podem ser disparadores de uma discussão teórica sobre uma estética da matemática e também, como aplicações pedagógicas, podem iniciar os alunos em uma experiência estética que os levem a apreciarem a beleza matemática, potencializando a construção do conhecimento matemático.

O conhecimento matemático discutido neste trabalho é o que utiliza o conceito de simetria na Teoria de Grupos. A abordagem estética da matemática será “uma abordagem onde o conhecimento sensível da matemática tenha um lugar de destaque, onde a apreciação estética da matemática possa ser fator essencial na nossa capacidade de compreensão, sendo, portanto, fonte de conhecimento”.(CIFUENTES, 2005, p. 57)

Ainda de acordo com o autor, “o estético não é apenas um olhar sobre a matemática”, sendo que “existe um conteúdo estético na matemática, e esse conteúdo está ligado ao que pode ser ‘apercebido’ pelo intelecto”. A simetria é, nesse contexto, um dos valores estéticos da matemática. (CIFUENTES, 2005, p. 57)

Nosso trabalho de pesquisa é aqui apresentado da seguinte forma: **no capítulo 1**, intitulado **Simetria**, estão contidas definições e classificações desse conceito, bem como exemplos da presença da simetria na natureza e na construção humana. O **capítulo 2**, intitulado **Simetrias e grupos: alguns episódios históricos** busca entender como ocorreu a formulação da teoria de grupos, olhando para o aspecto e as condições de cada época. O **capítulo 3**, intitulado **Grupos de simetria** expõe várias definições e conceitos dessa teoria, bem como exemplos e representações geométricas. O **capítulo 4**, intitulado **Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático** procura mostrar a importância do valor estético e como é válido o conhecimento aprendido através do olhar sensível. E por fim, o **capítulo 5** mostra as considerações finais sobre a pesquisa.

1 SIMETRIA

Neste capítulo, iremos definir simetria, dar exemplos da presença da simetria na natureza e na construção humana, além de citar e exemplificar alguns tipos de simetria.

Quando falamos da construção de uma definição para o conceito de simetria e de sua compreensão, não podemos ignorar a forte presença de uma noção intuitiva ligada à observação do meio e à imaginação. Se considerarmos que, na maioria das vezes, essa noção intuitiva de simetria está ligada às formas e proporções presentes na arte e na natureza, podemos dizer que encontramos aí uma primeira aproximação com a Matemática, por meio da Geometria e com a Filosofia, que nos ajudam a compreender elementos do espaço e também valores estéticos como harmonia e perfeição.

Por conta dessa noção intuitiva, grande parte daquilo que se discute sobre simetria está associada à beleza, à perfeição e aos padrões geométricos encontrados na fauna, na flora e nas produções humanas em áreas como pintura, escultura e arquitetura. Estas são questões muito presentes, por exemplo, nas escolas, em aulas de Artes e de Geometria, quando se faz alusão à simetria encontrada no mundo que nos cerca.

Figuras 1e 2 – Exemplos da presença da simetria em elementos da natureza



Fonte: fotos de produção da autora.

Figura 3 e 4 – Identificação de eixo de simetria em elementos da natureza



Fonte: fotos de produção da autora.

Figura 5 – Reprodução do afresco “A Última Ceia” de Leonardo Da Vinci



Fonte: foto de produção da autora.

Figura 6 – Marca da UDESC



Fonte: <http://www.udesc.br/?id=899>

Acesso em 20/10/2013

Figuras 7 e 8 – Identificação de eixo de simetria em produtos de construção humana



Fonte: fotos de produção da autora.

A compreensão do conceito de simetria por uma via intuitiva auxilia no entendimento de elementos que são importantes para acesso a conhecimentos matemáticos de outros ramos da Matemática. Isso porque, na Matemática, o conceito de simetria tem implicações – diretas e também indiretas – em ramos que não só a Geometria, como, por

exemplo, na Álgebra. A simetria, assim, pode estar presente em formas geométricas, mas também em equações matemáticas e em outros objetos matemáticos.

Mas, então, como definimos a simetria para compreendermos o seu conceito e seu uso na Matemática?

1.1. ALGUMAS DEFINIÇÕES

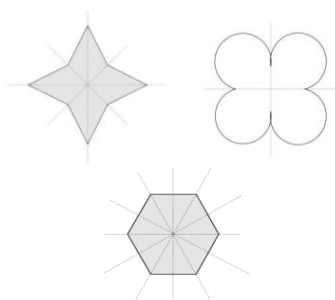
As definições apresentadas a seguir são resultado dos estudos realizados nesta pesquisa dos trabalhos Rohde (1982, 1997), Mabuchi (2000) e Ripplinger (2006).

De acordo com Rohde, simetria

é a propriedade pela qual um ente, objeto ou forma exibe partes correspondentes (ou congruentes) quando submetida a uma operação específica. A simetria, portanto, é uma operação que mantém uma forma invariante. (ROHDE, 1982, p. 13)

Esta definição é representada na Figura 9, que mostra as partes correspondentes de uma figura simétrica.

Figura 9 – Figuras simétricas



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra¹.

¹Software de Geometria dinâmica disponível em: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/

Já Mabuchi (2000, p. 17), insere em sua definição a ideia de transformação geométrica quando aponta que “as simetrias são operações de transformação geométrica que se caracterizam por uma mudança de posição no espaço ou alteração de tamanho conservando a forma”.

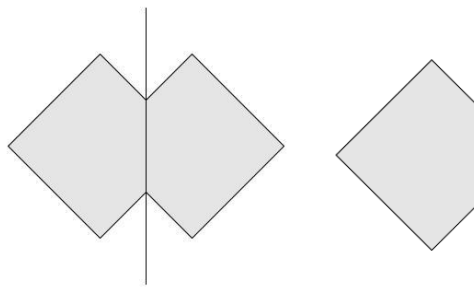
Ripplinger amplia essa discussão quando apresenta que

A Simetria não é um número ou uma fórmula, é uma propriedade das figuras, é uma transformação. Ou seja, é o resultado de uma regra, de um movimento de acordo com esta regra. A simetria preserva a forma. Conserva características tais como ângulos, comprimento dos lados, distâncias, tipos e tamanhos, mas altera a posição do objeto desenhado. (RIPPLINGER, 2006, p. 23)

Para compreendermos a simetria como transformação, precisamos entender que tais transformações acontecem em relação a um determinado ponto, linha (eixo) ou plano.

Definimos, assim, o eixo de simetria: **uma linha que divide uma determinada figura em duas partes simétricas.** Intuitivamente, o eixo de simetria pode ser entendido como a linha que guia uma dobra feita na figura de tal forma que haja uma correspondência, ponto a ponto, de cada uma das partes da figura durante a sobreposição.

Figura 10 – Figura original e “dobrada” através do eixo de simetria.



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Dependendo da transformação de simetria realizada, podem ser identificados um ponto de simetria ou um plano de simetria. É importante notar que é necessária a identificação de um desses elementos – ou ainda, do eixo de simetria – para que essa transformação aconteça.

1.2. TIPOS DE SIMETRIA

Observando as figuras mostradas até aqui neste trabalho, percebemos que há diferentes tipos de simetria. Vamos explicá-los a partir de outros exemplos considerando a simetria de figuras geométricas ou objetos. Neste trabalho, apresentaremos dois deles:

Simetria Axial: em relação ao eixo de simetria, cada uma das partes da figura ou do objeto aparecem como se fossem uma imagem espelhada uma da outra. Assim, nesse tipo de simetria, o eixo de simetria é a mediatriz do segmento que liga os pontos correspondentes de ambas as figuras. Também é chamada de simetria em relação a retas.

Figura 11 – Exemplo de simetria axial



Fonte: foto de produção da autora.

Simetria Central: a simetria central aparece quando a figura – ou objeto – é girada um determinado número de vezes em relação a um ponto de simetria, fixo e central.

Figura 12 – Exemplo de Simetria Central



Fonte: foto de produção da autora de ilustração em Schattschneider (2004).

Quando uma reta passa pelo centro de simetria de uma figura, a divide em duas imagens espelhadas sendo que o centro de simetria é o ponto médio dos segmentos que ligam os pontos correspondentes.

Figura 13 – Exemplo de simetria central cuja reta passa pelo centro de simetria



Fonte: foto de produção da autora de ilustração em Schattschneider (2004).

Em geometria, **isometria** é uma aplicação que transforma uma figura em uma outra geometricamente igual a primeira. Isso significa que são preservadas as distâncias entre os pontos e as medidas dos ângulos. Ocorre, assim, uma mudança de posição: direção e sentido.

A simetria está relacionada às transformações por **reflexão**, **rotação** e **translação** que, por sua vez, associam-se ao conceito de **isometria**.

Em muitas das obras de Maurits Cornelis Escher², podemos encontrar exemplos de simetrias como transformações geométricas do tipo isometria, como as mostradas nas figuras a seguir, fotografadas da obra de Schattschneider (2004).

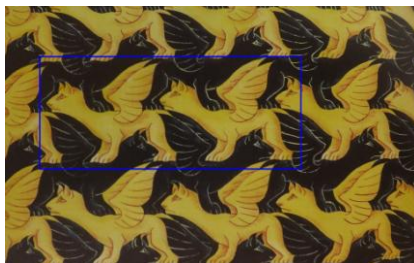
Figuras 14 e 15 – Isometria: Reflexão Deslizante Reflexão



Fonte: fotos de produção da autora de ilustração em Schattschneider (2004).

²As obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher(1898 – 1972), na forma de xilogravuras e litografias, retratam temas como simetrias, padrões geométricos, a representação do infinito, construções impossíveis. Muitas dessas obras são exemplos de transformações geométricas (isometrias).

Figura 16 e 17 – Isometria: Rotação e Translação



Fonte: fotos de produção da autora de ilustração em Schattschneider (2004).

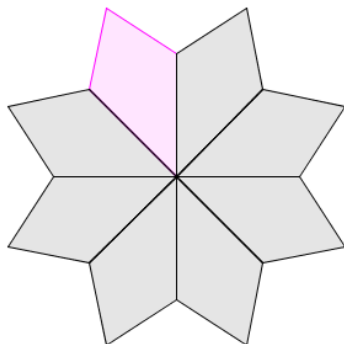
1.3. TRANSFORMAÇÕES DE SIMETRIA

De acordo com Rohde (1982, p. 16), transformações de simetria “são aquelas que transformam um módulo de simetria numa forma completa, tanto no espaço como no plano”. Quando compreendemos o conceito de simetria e entendemos os seus tipos, percebemos que partes de uma figura, quando sofrem transformações de simetria, podem reproduzir a figura inteira. Tal parte é chamada de “módulo de simetria” e a definiremos segundo Rohde (1982, p. 14): “o módulo de simetria é a menor das partes de um ente ou forma que, se repetida ou operada (refletindo, expandindo etc.), dá origem ao ente ou forma ao qual pertence”.

Um exemplo dessa definição pode ser mostrado como na figura abaixo, onde o quadrilátero é um módulo de simetria que, quando

sofre uma transformação de simetria do tipo rotação gera a figura completa apresentada.

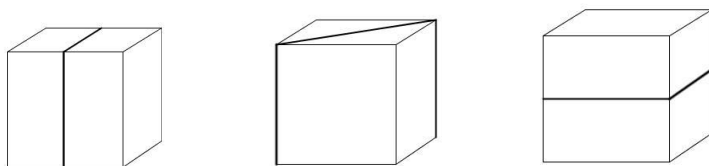
Figura 18 – Objeto formado a partir de um módulo



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Não necessariamente esse módulo é único como o representado na figura 18, na qual não há outro módulo possível em que se possa aplicar a mesma transformação e ainda assim obter o objeto resultante. Vejamos o que acontece com o cubo:

Figura 19 – Exemplos de módulos de simetria do cubo



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Como vemos, dada a regularidade desse sólido geométrico, podemos utilizar, em uma mesma ação, diferentes transformações de

simetria em diferentes módulos para gerar um mesmo cubo. Na figura acima, podemos identificar alguns desses módulos.

A partir da definição de módulo de simetria, identificamos uma das funções da simetria que é possibilitar a construção e a observação de diferentes formas e figuras por meio da utilização das transformações, que pode ser realizadas de diferentes formas e em variados números de vezes, de acordo com as classificações que veremos a seguir.

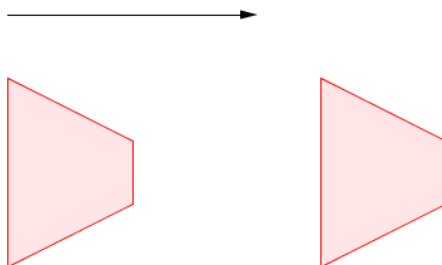
De acordo com Rohde (1982, p. 16), as transformações de simetria podem ser classificadas como simples ou combinadas. As simples são: translação, rotação, reflexão, inversão e dilatação. As combinadas são aquelas que reúnem duas ou mais operações simples: inversão rotatória, reflexão rotatória, rotação deslizante, reflexão deslizante, dilatação deslizante, dilatação rotatória, reflexão dilatatória, rotação deslizante dilatatória, reflexão dilatatória deslizante e reflexão rotatória dilatatória.

Trataremos, neste trabalho, das operações simples:

Translação

Nesta transformação, o módulo de simetria muda de posição se deslocando paralelamente em relação a uma reta. Desta forma, todos os seus pontos se deslocam em uma mesma distância. Essa transformação também é conhecida como simetria de coincidência. As figuras 20 e 21 ilustram a ocorrência de uma simetria por translação mostrando o módulo que está sofrendo a transformação.

Figura 20 – Isometria: simetria por translação



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Figura 21 – Obra do Escher que mostra a simetria de translação



Fonte: foto de produção da autora de ilustração em Schattschneider (2004).

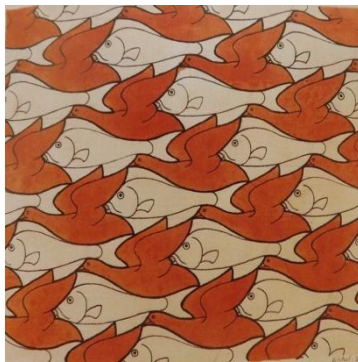
Exemplos de transformações por translação podem ser encontrados na natureza e também em produções humanas como mostram as figuras 22 e 23.

Figura 22 – Exemplo de simetria por translação na natureza



Fonte: foto de produção da autora.

Figura 23 – Exemplo de translação em obra artística



Fonte: foto de produção da autora de ilustração em Schattschneider (2004).

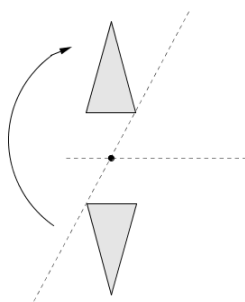
Rotação

Com essa transformação de simetria, também conhecida como simetria cíclica, um módulo de simetria pode ser girado em torno do centro de simetria, de maneira tal que esse módulo coincida com um outro um determinado número de vezes formando uma figura, como mostram os exemplos abaixo:

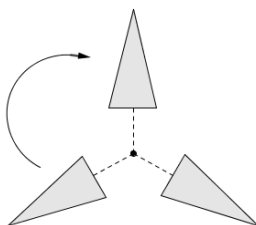
Figura 24 – Isometria: simetria por rotação em relação a um ponto



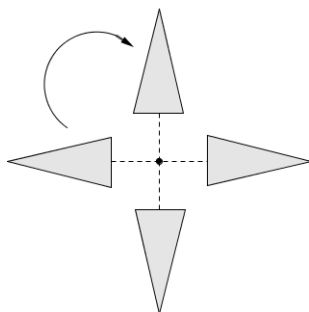
Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Figura 25 – Rotação de 180° 

Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

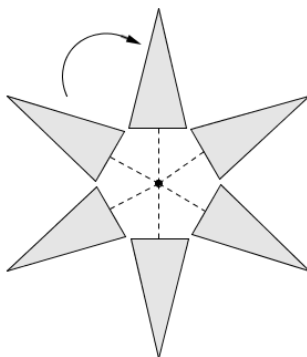
Figura 26 – Rotação de 120° 

Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Figura 27 – Rotação de 90° 

Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

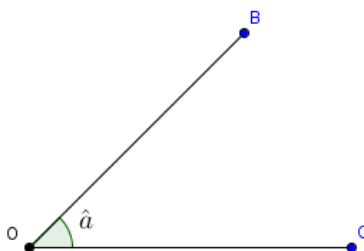
Figura 28 – Rotação de 60°



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

De acordo com Lopes e Nasser (1996, p. 115), “uma rotação de centro O e um ângulo $\hat{a}$ é uma transformação em que a imagem é obtida girando-se cada ponto da figura segundo um arco de circunferência de centro O , percorrendo um ângulo $\hat{a}$ (no sentido horário ou anti-horário)”, situação mostrada na figura 29.

Figura 29 – Ângulo de rotação

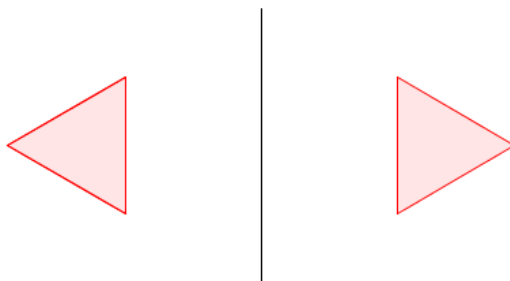


Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Reflexão

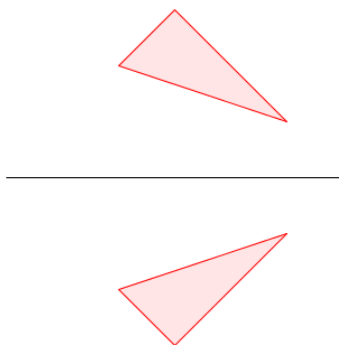
A transformação de reflexão pode ser bem entendida quando observamos um objeto posicionado em frente a um espelho. A imagem formada é resultado de uma transformação de reflexão sobre aquele objeto e o espelho pode ser considerado como um plano de simetria.

Figura 30 – Isometria: simetria por reflexão vertical em relação a um eixo



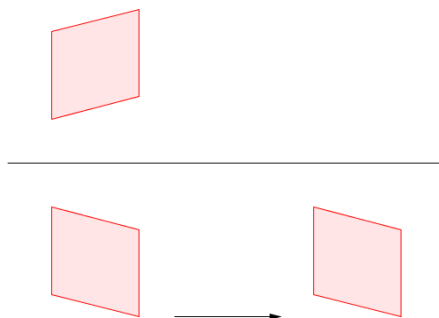
Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Figura 31 – Isometria: simetria por reflexão horizontal em relação a um eixo



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Figura 32 – Isometria: reflexão deslizante



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Assim, uma figura que apresenta simetria por reflexão possui um eixo ou plano imaginário que a divide em duas partes iguais. Há, na natureza, exemplos que nos mostram a reflexão:

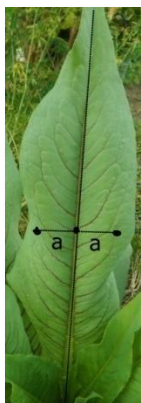
Figura 33 – Exemplo de reflexão na natureza



Fonte: foto de produção da autora.

Lopes e Nasser (1996, p. 102) conceituam a reflexão da seguinte forma: uma figura é reflexão de uma outra se a linha que une cada par de pontos correspondentes de ambas é perpendicular ao eixo de simetria e se dois pontos correspondentes estão à mesma distância do eixo de simetria, em lados opostos.

Figura 34 – Reflexão com eixo de simetria e distâncias marcadas

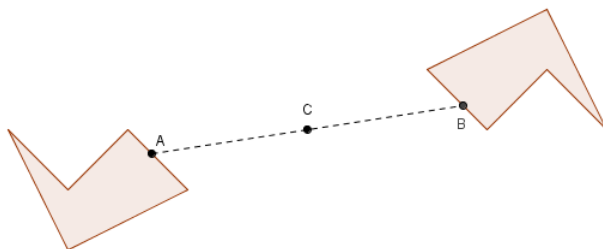


Fonte: foto de produção da autora.

Inversão

Esta é uma transformação que relaciona duas figuras de maneira tal que cada ponto de uma delas corresponda a um ponto oposto na outra, relativamente a um ponto imaginário chamado de centro de inversão ou centro de simetria, como mostra a figura abaixo:

Figura 35 – Exemplo de simetria de inversão



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Para ser considerada uma operação de inversão dos pontos correspondentes A e B, a distância de A até C é a mesma de C até B relativamente à reta que passa pelo ponto C, onde está o centro de simetria.

Dilatação

Também conhecida como simetria homeomórfica, nesta transformação acontece a ampliação da forma de uma figura mantendo-se as suas proporções e as relações entre os ângulos. Contudo, não conserva as distâncias, não sendo, então, uma isometria. A figura abaixo exemplifica essa operação de simetria.

Figura 36 – Obra de Escher como exemplo de simetria de dilatação



Fonte: foto de produção da autora de ilustração em Schattschneider (2004).

Rohde (1982, p. 17) faz a seguinte observação com relação à transformação por dilatação:

Muitos matemáticos não aceitam esse tipo de simetria porque a dilatação não é uma transformação linear, não conservando, portanto, as distâncias. No entanto, ela segue o ideal antigo (grego) e o moderno de simetria. Além disso, não é necessário que uma operação de simetria seja uma operação que mantenha as distâncias (transformação linear). (ROHDE, 1982, p. 17).

Problematizando essa questão embasada nas ideias de Felix Klein, Mabuchi (2000, p. 17) discute as simetrias como operações de transformação geométrica que se caracterizam por uma mudança de posição no espaço ou alteração de tamanho conservando a forma e aponta que essas transformações geométricas podem ser divididas em isometrias e homotetias. Nas isometrias, como já vimos, formas e dimensões são invariantes e se classificam em reflexão, translação e rotação. Nas homotetias, casos em que uma figura pode ser ampliada ou reduzida mantendo suas proporções, a operação é geralmente chamada de simetria de dilatação.

Desta forma, a dilatação seria considerada, portanto, uma homotetia e não uma isometria. Ainda segundo a autora, do ponto de vista matemático, a simetria seria subconjunto da isometria que é um tipo de transformação geométrica.

Neste capítulo, vimos que, pensando em termos de Geometria, podemos utilizar um ponto, um eixo ou um plano de simetria em uma figura para encontrar suas partes simétricas. Desta forma, podemos dizer que objeto, quando possui algum tipo de simetria, pode ser convertido nele próprio, a partir de uma de suas partes. Assim, percebemos que, com a simetria, podem-se manter formas e distâncias, fazendo com que se estabeleça em relação entre as partes e o todo de uma figura na qual se observam harmonia, regularidade e beleza, o que confirma a notação intuitiva de simetria.

Figura 37 – Simetria como referência à beleza e à regularidade



Fonte: foto de produção da autora.

Ainda há muito a ser explorado sobre a simetria, mas tudo o que foi exposto nesse capítulo – definições, tipos, transformações – já nos dá uma base para entendermos as passagens históricas e os conceitos matemáticos.

2 SIMETRIAS E GRUPOS: ALGUNS EPISÓDIOS HISTÓRICOS

Tomaremos, a partir daqui, um caminho em que voltamos o olhar para episódios da História da Matemática visitando uma linha do tempo para falar sobre locais, pessoas, métodos e conteúdos que foram importantes para a construção do conhecimento matemático relacionado à Teoria de Grupos e ao conceito de Simetria, temas desse trabalho. Iniciaremos por uma caracterização da geometria por considerarmos importante apresentar a história relacionada à chamada geometria das transformações, ligada à ideia de simetria. Usaremos a divisão de tempo baseado na obra de Stewart (2012), pois foi nele que encontramos nossa principal referência para contarmos essa história.

Neste capítulo, optamos por escrever diversas notas de rodapé como complemento ao texto escrito, procurando esclarecer fatos, conceitos e temas sem a perda da fluidez do texto. Esses esclarecimentos serão dados pensando naquilo que é necessário, no momento em que se lê, para a compreensão do que está escrito. Temas e conceitos podem ser aprofundados na sequência das notas de rodapé.

Antes de começarmos a tratar de episódios históricos ligados ao conceito de simetria dentro da teoria de grupos, olharemos para a história das transformações na geometria, numa abordagem inicialmente intuitiva do conceito de simetria.

Fontes históricas indicam que muitas das produções humanas dos tempos mais primitivos, na área das artes e da arquitetura, apresentam formas de simetria. Essa é uma questão que está muito diretamente relacionada com os conceitos geométricos de proporção e harmonia que levam a discussões a respeito do belo.

Em sua dissertação de mestrado, Mabuchi (2000) faz aquilo que chama de “construção histórica de uma ‘Geometria de Transformações’” onde discorre sobre aspectos relacionados ao desenvolvimento da geometria.

Simple observações de como reconhecer configurações, comparar formas e tamanhos de objetos devem ter dado origem às primeiras noções geométricas do homem primitivo. Essa ‘geometria’, que serviu para que os homens fizessem desenhos e objetos de arte primitiva, foi denominada por Eves (1992, p. 1) de ‘geometria

subconsciente'. Partindo de considerações sobre objetos concretos e particulares, o homem passou possivelmente a conceber propriedades e relações mais gerais que permitiam resolver problemas em conjuntos mais amplos e com procedimentos mais gerais. Assim, a geometria passou a ser, ainda segundo Eves, uma 'geometria científica', em que noções primitivas foram conscientemente organizadas num conjunto de regras gerais. (MABUCHI, 2000, p. 14).

Na sequência, a autora fala a respeito de uma “transformação operada pela geometria grega”, citando importantes nomes da geometria tais como Tales de Mileto³, Pitágoras⁴, Euclides⁵, Apolônio de Perga⁶ e Arquimedes⁷. Sobre Euclides, Mabuchi (2000, p. 6) dá destaque a sua

³O filósofo grego *Tales de Mileto*, de origem fenícia, viveu no período aproximadamente entre 623 a.C. e 558 a. C.. Tinha interesses nas áreas de Matemática, Astronomia, Metafísica e Ética. Nasceu na antiga colônia grega de Mileto, região onde hoje é a Turquia.

⁴A história sobre a vida do filósofo e matemático *Pitágoras de Samos* é cercada de incertezas. De acordo com historiadores, viveu entre 571 a.C. e 496 a.C, nasceu em Samos, ilha grega no leste do mar Egeu. Atribui-se a ele a criação da Escola Pitagórica, mística e filosófica, importante para o desenvolvimento tanto da filosofia ocidental quanto da matemática, por conta das discussões sobre a harmonia matemática, a doutrina dos números.

⁵Sobre a vida do matemático *Euclides*, sabe-se muito pouco por conta da falta de fontes históricas. Presume-se que tenha nascido por volta de 300 a.C. em Alexandria, na Grécia. Seu reconhecimento se dá pela sua obra mais famosa, *Os Elementos*, em que são tratados princípios do que hoje chamamos de geometria euclidiana.

⁶O matemático e astrônomo *Apolônio de Perga*, conhecido como o “Grande Geômetra”, viveu entre 262 a.C. e 194 a.C.. Nasceu na antiga cidade grega de Perga, hoje um sítio de ruínas localizado na costa mediterrânea da Turquia. Viveu parte de sua vida em Alexandria.

⁷Matemático, físico, astrônomo, *Arquimedes de Siracusa* pode ser considerado também um grande engenheiro e inventor que muito contribuiu para o desenvolvimento das ciências. Também carecendo de fontes históricas, sua história de vida dá conta de que ele tenha vivido entre 287 a.C. – 212 a.C., nasceu em Siracusa, na região da Sicília, na Itália.

obra mais conhecida, *Os Elementos*, citando que “ao contrário do que muitos supõem, os treze livros que compõem *Os Elementos* não se limitam a abordar somente a geometria, mas também tratam da teoria dos números e da álgebra”, mostrando a importância da obra como marco para a Matemática clássica, como apontado em Eves (1995) na citação a seguir:

Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal de *Os Elementos* de Euclides nas gerações seguintes que a sua obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa. A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional em Euclides penetrou quase todos os campos da Matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional, mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Uma consequência relativamente moderna foi a criação de um campo de estudos chamado axiomática, dedicado ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de postulados e do raciocínio postulacional. (EVES, 1995, p. 179).

Assim, *Os Elementos* é a obra da Antiguidade que mais influenciou a Matemática ao longo dos séculos seguintes a sua publicação, basta ver que “até o século XVIII, a geometria foi a euclidiana, dita clássica. Somente no século XIX ocorreu uma mudança no significado atribuído à geometria” (MABUCHI, 2000, p. 9).

Da Antiguidade, apresentamos agora algumas considerações de Rohde (1982) relacionadas com o desenvolvimento da Geometria em um período da nossa história conhecido como Idade Média ou Idade das Trevas⁸.

⁸A chamada *Idade Média* é um período da história ocidental definido, segundo diversos historiadores - e para fins didáticos - entre os séculos V e XV, tendo como marco inicial a queda do Império Romano do Ocidente e marco final a transição para o período seguinte, chamado de *Idade Moderna*. Chama-se *Antiguidade*, também segundo os historiadores, o período anterior à *Idade Média*.

Na “idade das trevas” (400-800), um racionalismo estreito levou à minimização das ideias abertas e fortes da simetria (como algo dinâmico), mais a mais, até transformá-la na vulgar e limitadíssima noção de reflexão sobre um eixo ou plano. O latim da linguagem arquitetônica traduziu a palavra grega como “proporção”, aumentando a confusão. A Igreja católica, com o seu mundo bilateral ideal, contribuiu muito para isso, estreitando mais ainda o significado da origem greco-romana. A arquitetura da época é menos simétrica e mostra mais riqueza em movimento. (ROHDE, 1982, p. 47)

Já na época do Renascimento⁹, elementos de perspectiva começaram a aparecer em obras de arquitetos, pintores e escultores interessados em representar figuras espaciais no plano a partir do ponto de vista do observador. Tais noções foram expandidas para, mais tarde, constituírem um novo ramo da geometria. Temos, nesse período a atuação de importantes nomes para a Matemática, tais como Leonardo Da Vinci¹⁰ e Albrecht Dürer¹¹. De acordo com Mabuchi (2000, p. 9), “a preocupação dos pintores e artistas em representar objetos do espaço fez surgir a ideia de projeções centrais e paralelas e, conseqüentemente,

⁹O *Renascimento*, de acordo com algumas historiadores, corresponde ao um período da história ocidental compreendido, aproximadamente, entre finais do século XIV e meados do século XVI, característico de uma época de final da *Idade Média* para início da *Idade Moderna*.

¹⁰ O italiano *Leonardo di Ser Piero da Vinci* é considerado uma das figuras mais importantes do Renascimento, se destacando como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico. Seus estudos e invenções impulsionaram o desenvolvimento das artes e das ciências. Nasceu no vilarejo de Anchiano, comuna de Vinci, Florença, em 15 de abril de 1452. Faleceu em Amboise, na França, em 2 de maio de 1519.

¹¹ A alemão *Albrecht Dürer* foi um pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte. Nasceu em 21 de maio de 1471 na cidade de Nuremberg, onde também morreu em 6 de abril de 1528. Influenciou a obra de diversos artistas do século XVI e ficou conhecido por suas xilogravuras e pela representação de paisagens usando a técnica da aquarela.

aparecerem as noções de geometria projetiva e de geometria descritiva, importantes na gênese do conceito de transformações¹²”.

Depois do período da Idade Média, quando não se valorizou a simetria na arte, Leonardo da Vinci apresenta estudos a respeito de simetrias na arquitetura. Albrecht Dürer também é um dos responsáveis pela “volta” aos estudos sobre simetria com a publicação de *Vier Bücher Von Menschlicher Proportion*, onde estuda a anatomia humana apresentando proporções e simetrias.

Foi nessa época, que os matemáticos começaram a perceber possibilidades de se utilizarem dos conceitos de simetria em seus estudos algébricos e não apenas nas questões relacionadas com a geometria.

Se, como já vimos, os conhecimentos em geometria sofreram uma grande mudança a partir dos estudos gregos realizados na Antiguidade, René Descartes¹³ e Pierre de Fermat¹⁴ foram dois dos responsáveis por uma outra grande mudança, a partir da Idade Moderna: o desenvolvimento da geometria analítica.

Ao substituírem os pontos do plano por pares de números e as curvas por equações, tornaram possível o estudo das propriedades das curvas por meio do estudo das propriedades das equações algébricas

¹²O conceito de *transformações*, como vimos no capítulo anterior, está relacionado à ideia de simetria: figuras ou objetos sofrem determinadas operações sem que sejam alteradas suas formas originais.

¹³*René Descartes* nasceu na França, em 31 de março de 1596, na cidade de La Haye-en-Touraine – que passou a se chamar La Haye-Descartes em 1802 e Descartes em 1967 – e morreu na Suécia, na cidade de Estocolmo, em 11 de fevereiro de 1650. Foi matemático, filósofo e físico, tornando-se célebre por impulsionar o desenvolvimento da ciência e o pensamento filosófico, tanto que é considerado fundador da filosofia moderna e pai da matemática moderna. Era conhecido também pelo seu nome latino *Renatus Cartesius*.

¹⁴O francês *Pierre de Fermat* era jurista e magistrado. Nasceu em Beaumont-de-Lomagne em 17 de agosto de 1601 e morreu em Castres, França, em 12 de janeiro de 1665. Apesar de suas grandes contribuições na área, Fermat nunca teve a Matemática como atividade profissional, se dedicando a ela apenas como lazer. Conta a história que seu interesse pela Matemática deu-se a partir da leitura de uma tradução latine de *Aritmética de Diofanto de Alexandria*, um texto sobrevivente da Biblioteca de Alexandria, que compilava cerca de dois mil anos de conhecimentos matemáticos.

correspondentes. Também nessa época, houve um grande salto no desenvolvimento da Matemática no ramo da análise infinitesimal.

Mabuchi (2000, p. 9), apresenta uma análise sobre as mudanças no ramo da Geometria que se seguiram às contribuições de Descartes e Fermat. De acordo com a autora, Girard Desargues¹⁵, ao retomar o estudo de *As Cônicas* do grego Apolônio de Perga foi o responsável por transportar para a geometria os métodos da perspectiva ao trabalhar as cônicas utilizando métodos projetivos, influenciado pelos artistas do Renascimento. Suas ideias despertaram interesse em Blaise Pascal¹⁶ que utilizou transformações geométricas como ferramentas de demonstração para transferir propriedades de uma figura para outra mais complexa buscando destacar as propriedades geométricas invariantes por transformações. Fez isso ao recorrer, junto com Desargues, a um método de transformações que fez corresponder os pontos e retas de uma circunferência aos pontos e retas de uma cônica arbitrária. Ainda segundo a autora, Gaspard Monge¹⁷ foi um dos responsáveis pelo ressurgimento da geometria no espaço ao apresentar o método da dupla projeção, uma nova geometria descritiva¹⁸. “Os geômetras, depois dos

¹⁵ *Gerard Desargues* era matemático, arquiteto e engenheiro militar. Nasceu em 21 de fevereiro de 1591, na cidade de Lyon, na França. Viveu muitos anos em Paris, mas faleceu em Lyon, em outubro de 1661. Teve grande papel no desenvolvimento da geometria projetiva.

¹⁶ O francês *Blaise Pascal* nasce em Clermont-Ferrand, em 19 de Junho de 1623 e morreu em Paris, em 19 de Agosto de 1662. Foi matemático, filósofo, físico e teólogo. Contribuiu de forma importante para dois ramos da matemática: Geometria Projetiva e a Teoria das probabilidades. Inventou uma das primeiras calculadoras mecânicas, chamada de Pascaline. Foi responsável pela autoria de um dos primeiros estudos sobre o método científico.

¹⁷ O matemático francês *Gaspard Monge* nasceu em Beaune, em 10 de maio de 1746 e faleceu em Paris, em 28 de julho de 1818. Credita-se a ele a criação da Geometria Descritiva e também o título de pai da geometria diferencial. Foi, por um tempo, ministro da Marinha durante a Revolução Francesa, ocorrida entre 1789 e 1799. Envolveu-se com a criação da École Polytechnique de Paris, atuando na reforma do sistema educacional francês.

¹⁸ “Consistia em representar no plano uma figura do espaço, utilizando para isso dois planos perpendiculares entre si, um vertical e outro horizontal, projetando ortogonalmente a figura nesses planos e rebatendo um deles sobre o outro. Obtinham-se, assim, duas figuras no plano, projeções verticais e horizontais da

métodos de Desargues, Pascal e Monge, passam a considerar duas categorias de propriedades geométricas: aquelas que dizem respeito a distâncias e medidas dos ângulos e as propriedades descritivas ou de posição, nas quais importa a posição relativa dos elementos geométricos” (MABUCHI, 2000, p. 11).

Mais uma importante mudança acontece no pensamento matemático de uma época com os trabalhos de Jean-Victor Poncelet¹⁹ e Michel Chasles²⁰ que participaram ativamente do desenvolvimento da geometria projetiva ao trabalharem com transformações geométricas em busca de generalizações para os enunciados geométricos trabalhando, assim, com um método fundamental da geometria. O trabalho com a geometria projetiva de Poncelet teve uma contrapartida algébrica: o tratamento dado por Arthur Cayley²¹ às formas algébricas que lhe conferiu a responsabilidade pela introdução da teoria dos invariantes algébricos²².

No século XIX, a constatação da existência de mais de um espaço e, conseqüentemente de mais de uma geometria, trouxeram novas mudanças como as geometrias não-euclidianas de Nikolai

figura dada, nas quais era possível efetuar construções geométricas de modo mais simples que na figura do espaço” (MABUCHI, 2000).

¹⁹O francês *Jean-Victor Poncelet* era matemático e engenheiro. Nasceu em Metz, em 1 de julho de 1788 e morreu em Paris, em 22 de dezembro de 1867. Egresso da École Polytechnique de Paris, foi professor de matemática. Fez parte do exército de Napoleão que lutou em 1812 contra a Rússia.

²⁰ O matemático francês *Michel Chasles* nasceu em Eprenon, em 15 de novembro de 1793 e morreu em Paris, em 18 de Dezembro de 1880. Teve destaque na área de geometria, foi professor na École Polytechnique e na Sorbonne.

²¹*Arthur Cayley* foi um matemático e advogado britânico. Nasceu em Richmond, em 16 de agosto de 1821 e morreu em Cambridge, em 26 de Janeiro de 1895. Dedicou-se ao direito por cerca de 14 anos, trabalhando como advogado, como forma de sustentar suas pesquisas e estudos em matemática. Publicou mais de 200 trabalhos na área de Matemática.

²²Um *invariante algébrico* é uma função polinomial dos componentes da matriz de uma aplicação linear que não depende da base vetorial escolhida para representar a aplicação linear em forma de matriz.

Lobachevsky²³, János Bolyai²⁴ e Georg Friedrich Riemann²⁵. Foi também nesse século que surge o importante conceito de grupo na matemática a partir das ideias de Evariste Galois²⁶. É um conceito importante para a geometria porque

A ideia de transformação introduzida até então tinha origem intuitiva. Para cada caso particular aplicava-se um tipo de transformação, faltando meios para identificar e exprimir a estrutura do conjunto dessas transformações. A noção de grupo das transformações e os invariantes correspondentes permitiu fazer distinções entre os diferentes tipos de geometria. (MABUCHI, 2000, p. 14)

²³O matemático russo *Nikolai Ivanovich Lobachevsky* nasceu em Níjni Novgorod, em 2 de novembro de 1792 e morreu, cego, em Kazan, 24 de fevereiro de 1856. Foi aluno, professor e reitor da Universidade de Kazan. Obteve reconhecimento na área de geometria por ter publicado a descrição de uma geometria não-euclidiana, depois chamada de geometria hiperbólica.

²⁴De nacionalidade húngara, o matemático e militar *János Bolyai* nasceu em Kolgsvár, Hungria, hoje Cluj, Romênia, em 15 de dezembro de 1802 e morreu em Marosvásárhely, Hungria, hoje Târgu Mures, Romênia, em 27 de janeiro de 1860. Estudou no Royal College of Engineering, em Viena, Áustria. Publicou, em 1832, um estudo sobre geometria não-euclidiana, sem saber que, três anos antes, Lobachevski havia publicado um trabalho semelhante.

²⁵O matemático alemão *Georg Friedrich Bernhard Riemann* nasceu em Breselenz, Alemanha, em 17 de setembro de 1826 e morreu em Selasca, Itália, em 20 de julho de 1866. Contribuiu significativamente para a Matemática nas áreas de análise e a geometria diferencial.

²⁶*Evariste Galois* foi um matemático francês. Nasceu em Bourg-la-Reine, em 25 de outubro de 1811, em Paris, em 31 de maio de 1832. Teve uma vida bastante conturbada, tanto pessoal quanto profissionalmente. Ainda que tenha morrido muito jovem, o resultado de seus estudos se refletiram no desenvolvimento futuro da teoria de grupos, no domínio da Álgebra Abstrata.

Felix Klein²⁷ identificou possibilidades unificadoras no conceito de grupo e foi um dos responsáveis pelo seu desenvolvimento e divulgação. Numa conferência na Universidade de Erlangen em 1872, Klein mostrou aplicações do conceito de grupo na caracterização das diferentes geometrias elaboradas até o século XIX, criando o que ficou conhecido como Programa Erlangen que lhe conferiu o mérito de ter concebido uma relação entre uma geometria e seu grupo, destacando o papel do grupo e os diversos espaços onde atua.

A partir do seu trabalho com grupos e junto com Sophus Lie²⁸, Klein é considerado responsável pela concepção moderna de geometria. Mabuchi (2000) apresenta assim uma sistematização a respeito das definições de geometria segundo Klein e Lie:

De acordo com Klein, diz-se que a geometria euclidiana é mais ampla que a métrica²⁹, ou que a geometria métrica é uma subgeometria da euclidiana. A geometria projetiva³⁰ é aquela cujo grupo deixa invariantes, entre outras propriedades, a razão anarmônica. Num segundo nível encontram-se a geometria afim³¹ e as geometrias

²⁷O matemático alemão *Felix Klein* nasceu em Düsseldorf, em 25 de abril de 1849 e morreu em Göttingen, em 22 de junho de 1925. Dedicou-se ao trabalho com a geometria não-euclidiana, com as conexões entre a teoria dos grupos e a geometria e também com a Educação Matemática. A Comissão Internacional de Instrução Matemática foi criada por ele 1908. Até a década de 1902, dedicou-se a uma pesquisa cujo objeto era a evolução da Educação Matemática em diversos países do mundo.

²⁸*Sophus Lie* foi um matemático norueguês que nasceu em Nordfjordeid, em 17 de dezembro de 1842 e morreu em Oslo, em 18 de fevereiro de 1899. Fez pesquisas sobre a então recente teoria de grupos, muitas delas em conjunto com Felix Klein, num período em que estiveram na França. Hoje, na Álgebra Abstrata, estuda-se o que conhece-se por “Álgebra de Lie”.

²⁹A Geometria Métrica é o estudo das propriedades métricas das figuras.

³⁰Geometria Descritiva é o estudo das propriedades descritivas das figuras.

³¹Geometria Afim é a geometria que não está envolvida em quaisquer noções de origem, extensão ou ângulo, mas com as noções de subtração de pontos.

não-euclidianas. Em seguida, as subdivisões da geometria afim e a geometria métrica parabólica, na qual a medida dos ângulos é um invariante e, por fim, a geometria euclidiana, com o grupo dos deslocamentos. Precedendo todas, encontra-se a topologia que é a geometria dos invariantes do grupo das transformações pontuais contínuas.(MABUCHI, 2000, p. 17)

Segundo Mabuchi (2000), o Programa Erlanger de Felix Klein:

Induz os matemáticos a um grande interesse pelos diferentes conjuntos de transformações, particularmente pelo das isometrias, por ser próprio da geometria euclidiana. Também, os psicólogos e didatas dos anos 60 e 70 se fixaram na obra de Klein e iniciaram investigações sobre a compreensão dos conceitos pelos estudantes. Essa linha de investigação continua ativa até os dias de hoje, sofrendo, porém, variações tanto nos objetivos quanto na metodologia, conforme os pontos de vista predominantes em cada época. (MABUCHI, 2000, p. 18)

A partir daqui, olharemos para uma história da simetria mais voltada para a teoria das equações, a qual deu origem a teoria de grupos.

Ao longo do tempo, um problema que se fez presente no trabalho de muitos matemáticos foi a busca por soluções para uma equação quártica³². Uma das razões dessa busca, que foi longa, foi um encantamento pelo desafio a que os matemáticos se colocaram de encontrar um algoritmo algébrico que fosse geral, ou seja, que desse conta de resolver todas as equações de quinto grau. O movimento pela busca da solução geral para as quárticas teve importante papel no nascimento da Teoria de Grupos.

³² Uma equação *quártica*, ou *equação de quinto grau* tem a forma de um polinômio de quinto grau igualado a zero, como por exemplo: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Nossa história começa em um lugar chamado Mesopotâmia, também conhecida como berço da civilização. A Mesopotâmia ficava na região que hoje conhecemos como Iraque, no Oriente Médio, entre os rios Tigre e Eufrates³³. Foi habitada, entre os séculos V e I a.C., por diferentes povos: babilônios, assírios, sumérios, caldeus, amoritas e acádios. A Babilônia, terra dos famosos Jardins Suspensos³⁴, era uma das cidades-estado da Mesopotâmia, lugar onde, há quatro milênios, se estruturou uma sociedade organizada praticante da agricultura, com governo, burocracia e poder militar. Os historiadores e arqueólogos não esclareceram completamente as origens dessa civilização, mas muito se sabe por conta de fontes históricas preservadas graças, por exemplo, ao uso de argila úmida para a construção de tabulas para escrita usando registros conhecidos como cuneiformes³⁵. São alguns dos registros preservados pela ação da natureza – a argila usada pelos babilônios, depois de seca, tornava-se indestrutível – que indicam que, assim como nós, os babilônios aprendiam matemática em uma espécie de escola. É também aí que começa a história da compreensão da simetria pela humanidade, pois, “até onde a história escrita nos revela, foram os

³³O rio *Tigre* e o rio *Eufrates* são dois grandes rios que percorrem a região conhecida como Mesopotâmia. O Tigre é o mais oriental deles, nasce na Turquia e corre até encontrar o Eufrates, o mais longo dos dois, no sul do Iraque. Juntos, formam o canal Shattal-Arab e desembocam no Golfo Pérsico. Na Antiguidade, grande parte dos povos da Mesopotâmia se fixaram ao longo desses dois rios para usufruírem das terras irrigadas.

³⁴Os *Jardins Suspensos da Babilônia* datam aproximadamente do século VI a.C. e localizam-se no sul da Mesopotâmia, na Babilônia. De acordo com a história, foram construídos pelo rei Nabucodonosor II, o mais poderoso da Babilônia, para agradar e consolar sua esposa Amitis que, saudosa do campo onde nasceu, sofria pela distância das florestas de sua infância. Considerados como uma das sete maravilhas do mundo antigo, dotados de rara beleza e engenhosidade, o que se sabe sobre eles se baseia em relatos construídos ao longo do tempo, uma vez que não há descrições detalhadas nem vestígios arqueológicos que comprovem suas dimensões e beleza.

³⁵Criada pelos sumérios, por volta de 3500 a.C., a *escrita cuneiforme* era feita em tabulas de argila utilizando uma espécie de estilete em forma de cunha que empurrava a argila marcando signos que também pareciam cunhas. Foi muito usada na Mesopotâmia por mais de três mil anos, pelos povos babilônicos, assírios, hititas, elamitas e acadianos, que adaptavam os signos ao seu idioma.

matemáticos babilônios que puseram a humanidade no caminho da simetria, com profundas implicações na maneira como vemos o mundo físico”. (STEWART, 2012, p. 20).

Sobre a matemática ensinada e praticada pelos babilônios, sabe-se por historiadores como Eves (2004) e Boyer (1996) que ela tinha finalidade prática ligada às atividades no campo da astronomia, na agricultura, na religião e no comércio. O sistema de numeração usado era o sexagesimal, ou seja, baseado em potências de 60. É diferente do sistema decimal que usamos hoje, que é baseado em potências de 10. Os babilônios conheciam propriedades do triângulo retângulo parecidas com o Teorema de Pitágoras, contudo não tinham o formalismo e o rigor das demonstrações utilizadas pelos gregos.

De acordo com Stewart (2012), o que há de mais importante a se dizer sobre os matemáticos babilônios “é que foram eles que começaram a entender como resolver as equações”.

Os matemáticos babilônios desprezavam tentativa e erro, pois conheciam um segredo mais poderoso e profundo. Eles conheciam uma regra, um procedimento padrão, que resolvia essas equações. Até onde sabemos, eles foram os primeiros a perceber que tais técnicas existiam. (STEWART, 2012, p. 20)

Resolver uma equação é como montar um quebra-cabeças: precisamos encontrar um número desconhecido a partir de algumas informações conhecidas a respeito desse número.

Uma equação é uma espécie de quebra-cabeça centrado num número. Não sabemos qual é ele, mas temos algumas informações úteis a seu respeito. Nossa tarefa é resolver o quebra-cabeça encontrando a incógnita. Esse jogo pode parecer um pouco diferente do conceito geométrico de simetria, mas, na matemática, a descoberta de ideias num contexto às vezes acaba iluminando contextos muito diferentes. (STEWART, 2012, p. 20).

Surgem, assim, com o trabalho dos matemáticos com as equações uma inspiração para a definição e o estudo das simetrias. A técnica mais interessante que os escribas babilônios poderiam ter aprendido, olhando para a simetria, é a solução de equações de segundo grau. A técnica utilizada por eles é empregada ainda hoje e a chamamos de “método de completar quadrados”³⁶, que envolve um alto grau de geometria para a época, revelando que os babilônios também eram ótimos geômetras.

Segundo STEWART (2012), é importante ficar claro que os babilônios não usavam uma fórmula algébrica para a resolução de uma equação. Em vez disso, eles descreviam um *procedimento* específico (completamento de quadrados), sob a forma de um exemplo típico, que levava a uma resposta. Mas é claro que eles sabiam que exatamente o mesmo procedimento funcionaria se os números fossem mudados. Em resumo, eles sabiam como resolver equações quadráticas, e o método que utilizavam – embora não a forma como expressavam – era o mesmo que empregamos hoje.

Os babilônios também tinham um método interessante de achar aproximações para raízes de equações cúbicas, usando tabelas numéricas.

Apesar da facilidade que os babilônicos tinham com a matemática, nada se compara ao que foi desenvolvido pelos gregos, onde a matemática começa a ganhar rigor formal.

Na cidade egípcia de Alexandria viveram, de acordo com os historiadores, muitos dos mais representativos matemáticos do mundo antigo. Hoje, Alexandria é a segunda maior cidade do Egito, com uma população de aproximadamente 4 milhões de pessoas e localiza-se no centro-norte do país³⁷. Na Idade Antiga, foi uma das mais importantes cidades do mundo, tempo em que foram construídos o Farol de Alexandria³⁸ e a Biblioteca de Alexandria³⁹. O início da história de

³⁶O *método de completar quadrados* é uma técnica para converter um polinômio quadrático na forma de um trinômio quadrado perfeito.

³⁷*Alexandria*, hoje, é maior porto do Egito, importante ponto turístico e centro industrial por conta da produção de gás natural. Beneficiou-se, ao longo da história, de sua posição geográfica como ponto de encontro entre África, Ásia e Europa.

³⁸O Farol de Alexandria tinha cerca de 150 metros de altura tendo sido, por mais de cinco séculos, uma das estruturas mais altas construídas pelo homem. É

Alexandria tem como marco a conquista do Egito, no ano 332 a. C. por Alexandre, filho do rei Felipe II da Macedônia. Chamado de Alexandre, o Grande, decidiu construir uma cidade numa área localizada entre o Mar Mediterrâneo e o lago que veio a ser conhecido como Mareotis. Alexandria foi projetada pelo arquiteto grego Dinócrates a partir de um plano básico desenhado pelo próprio Alexandre que não chegou a ver a cidade pronta, pois somente voltou à região para ser enterrado. Esta é uma das versões da história da construção de Alexandria, a qual Stewart acrescenta:

Talvez a verdade seja mais complexa. Agora parece que muito do que acabou se tornando Alexandria já existia quando Alexandre chegou lá. Há muito tempo egiptólogos descobriram que diversas das inscrições não são assim tão confiáveis. [...] O nome de Alexandre foi entalhado em todas as construções da antiga Alexandria. Seu nome foi gravado, por assim dizer, na própria cidade. Enquanto os faraós

considerado uma das sete maravilhas do mundo antigo. Foi construído na ilha de Faros, cerca de 280 a.C., pelo arquiteto e engenheiro grego Sóstrato de Cnido para servir como um ponto de entrada do porto de Alexandria. Foi destruído por um forte terremoto em 1375. Em 1480, as pedras restantes da construção original foram utilizadas na construção de um forte, edifício que permanece até hoje no lugar original do Farol.

³⁹ A *Biblioteca de Alexandria* reuniu, durante sete séculos, o maior patrimônio cultural e científico da Antiguidade. Mais do que um acervo que ultrapassou o número de 500 mil papiros, manteve um importante centro cultural e científico. Segundo a história, foi construída no início do século III a.C. a mando do então faraó do Egito Ptolemeu II, grande admirador da literatura, cujo objetivo era recolher livros do mundo inteiro e guardá-los em sua biblioteca. Para isso, encarregou o filósofo Demétrio de Faleros a fazer essa busca. Acredita-se a Biblioteca de Alexandria deva ter abrigado mais de 500 mil rolos de papiro. Seu acervo foi sendo destruído aos poucos, vítima de sucessivas intempéries, culminando com a destruição completa em um incêndio, cuja causa e data de ocorrência ainda é controversa. Em 2002, foram concluídas as obras de uma nova biblioteca na cidade de Alexandria, nos arredores da anterior, como tributo à antiga e também com novo centro cultural.

usurpavam um só edifício ou monumento⁴⁰, Alexandre usurpou uma cidade inteira. (STEWART, 2012, p. 35)

De qualquer maneira, Alexandria tornou-se uma cidade muito importante do mundo Antigo, tanto por conta do seu porto marítimo quanto pela famosa biblioteca, que a fez ser também um importante centro de conhecimento da época. O matemático Euclides nasceu em Alexandria por volta de 325 a.C..

Apesar de sua reconhecida importância para a matemática, tendo sido tomado, por muito tempo, como a referência principal em matemática do mundo ocidental, pouco se sabe sobre a vida de Euclides. Conhece-se mais sobre suas obras.

Por que Euclides se tornou tão conhecido? Houve outros matemáticos ainda mais importantes e mais significativos. Mas, ao longo de quase 2 mil anos, o nome de Euclides era conhecido por todos os estudantes de matemática da Europa ocidental e também do mundo árabe, num sentido mais estrito. Euclides foi autor de um dos textos matemáticos mais famosos já escritos: *Elementos de geometria* (em geral, abreviado para *Elementos*). Quando a imprensa foi inventada⁴¹, esse trabalho foi um dos primeiros livros publicados, e já teve mais de mil diferentes edições, número só superado pela Bíblia. (STEWART, 2012, p. 35, grifos do autor)

De acordo com os historiadores, Euclides morreu, aproximadamente, em 265 a.C.. Também, segundo os historiadores, há algumas controvérsias com relação à existência ou não de Euclides. Stewart (2012) ilustra as dúvidas a respeito da existência de Euclides quando escreve:

⁴⁰ De acordo com egíptólogos, é comum a usurpação de templos pelos faraós, mas nada se compara ao que Alexandre fez com uma cidade inteira.

⁴¹ O autor se refere aqui à atividade relacionada com a criação da prensa móvel por Gutenberg em 1440, no século XV. Chama-se prensa móvel por utilizar tipos móveis avulsos em blocos de madeira ou de metal que são montados numa tábua para formar os textos, que eram então “prensados”.

O fato de Euclides ter existido e de ser o único autor de *Elementos* é apenas uma entre três hipóteses. A segunda é de que ele existiu, mas não escreveu *Elementos*, pelo menos não sozinho. Euclides pode ter sido o líder de uma equipe de matemáticos que produziu o livro em conjunto. A terceira teoria – bem mais controversa, contudo ainda possível – é que a equipe existiu, mas como um grupo de jovens matemáticos, quase todos franceses, que em meados do século XII escreveu sob o nome de “Nicolas Bourbaki” e usou “Euclides” como pseudônimo coletivo. De qualquer forma, a história mais provável é que Euclides realmente tenha existido, era uma só pessoa e produziu *Elementos* sozinho. (STEWART, 2012, p. 36, grifos do autor)

Mas Eves (2004) e Boyer (1996) consideram apenas a hipótese de que Euclides tenha existido e escrito os *Elementos*.

Ainda que Euclides tenha escrito *Elementos* sozinho, não se pode afirmar que ele tenha sido o descobridor de toda a matemática contida nessa obra pois o seu trabalho foi o de reunir e codificar grande parte do conhecimento matemático dos gregos antigos. Do pouco que se sabe sobre a vida de Euclides, de acordo com alguns estudiosos da História da Matemática, Euclides estudou na Academia de Platão, em Atenas. O que nos interessa, neste trabalho é a observação de Stewart de que “*Elementos* costuma ser definido como um livro de geometria, todavia também contém a teoria dos números e uma espécie de protótipo da álgebra – tudo exposto sob o disfarce da geometria”.

Stewart (2012, p. 37) discute o quanto a atitude dos gregos em relação à matemática era diferente da dos egípcios e babilônios. Enquanto que para a maioria dos matemáticos gregos a matemática tinha um fim em si mesma e seu estudo e discussão se faziam mais enxergando-a como um ramo da filosofia do que como uma ferramenta⁴², egípcios e babilônios viam o lado prático da utilização da

⁴² Há as exceções. O grego Arquimedes, por exemplo, que possivelmente foi pupilo de Euclides, usou a matemática para projetar poderosas armas de guerra, apresentando uma antiga versão de matemática aplicada.

matemática. Tendo bebido nessa concepção dos gregos, a principal ênfase do famoso livro de Euclides é a lógica e a demonstração, sem indicações de aplicações práticas.

Segundo Stewart,

Euclides é responsável por duas grandes inovações. A primeira é o conceito de demonstração. Euclides se recusava a aceitar qualquer enunciado matemático como verdadeiro, a não ser que fosse demonstrado por uma sequência de passos lógicos deduzidos de enunciados que já se sabiam verdadeiros. A segunda inovação reconhecia que o processo demonstrativo devia começar de algum lugar, e que as proposições iniciais não podiam ser provadas. (STEWART, 2012, p. 39)

A obra *Aritmética*, de Diofante⁴³, é considerada uma das responsáveis pela introdução do simbolismo na álgebra, por volta do ano 500.

Aritmética é apresentado como uma série de problemas. No prefácio, Diofante diz que o escreveu como um livro de exercícios para um de seus alunos. Ele usou um símbolo especial para a incógnita, e diferentes símbolos para dizer “ao quadrado” e “ao cubo” que parecem abreviaturas das palavras *dynamis* (“potência”) e *kybos* (“cubo”). A notação não é muito estruturada. Diofante acrescenta símbolos enfileirando-os uns depois dos outros (como fazemos agora na multiplicação), mas sem um símbolo específico para a subtração. Ele apresenta até um símbolo para igualdade, embora este possa ter sido introduzido pelos copistas. Acima de tudo, *Aritmética* fala sobre resolução de equações. (STEWART, 2012, p. 53, grifos do autor)

⁴³O grego Diofante de Alexandria, que viveu entre 250 a.C e 166 a.C., é considerado o maior algebrista da Antiguidade.

Essa obra é composta de treze livros, sendo que seis deles existem até hoje na forma de cópias feitas pelos gregos no século XIII. No primeiro, Diofante discute equações lineares e nos outros cinco trata de vários tipos de equações quadráticas, em geral com várias incógnitas e algumas equações cúbicas especiais. Um detalhe importante que merece ser mencionado é que as respostas das equações são sempre números inteiros ou racionais: hoje chamamos de equação diofantina aquela equação cujas soluções são somente números inteiros ou racionais. São equações muito importantes para o desenvolvimento da matemática no que se refere à teoria dos números. É interessante lembrar que Pierre Fermat rascunhou sua conjectura conhecida como “o Último Teorema de Fermat”, por volta de 1650, nas margens das folhas de seu exemplar de *Aritmética*.

Pérsia é um país do Oriente Médio, que hoje é mais conhecido como Irã. O termo persa costuma ser usado para se referir ao Império Persa, fundado originalmente por um grupo étnico (os persas) a partir da cidade de Anshan, no que é hoje a província iraniana de Fars.

A partir do trabalho de Diofante, foi por volta de 830 que a álgebra passou a ser trabalhada na matemática. Isso aconteceu num tempo em que “o palco da ação já havia se mudado do mundo grego para o árabe”, como aconteceu com a atuação de Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi que escreveu um livro chamado al-Jabr w’alMuqabala cuja tradução livre é “restauração e simplificação”, indicando técnicas padronizadas para manipular equações de modo a enunciá-las numa forma melhor para a solução. Do título do livro, al-Jabr que supostamente vem a palavra álgebra. (STEWART, 2012, p. 54)

No livro al-Jabr w’alMuqabala, al-Khwarizmi explica como resolver equações lineares e quadráticas. Como não podia deixar de ser, pois a história do desenvolvimento da matemática acompanha todo o desenvolvimento humano, o livro sofreu influências anteriores, da matemática dos gregos e dos babilônios, mostrando como a inquietação dos homens pela matemática consegue mobilizar conhecimentos em prol de sistematizações posteriores. Além disso, al-Khwarizmi também mostra, em seu texto, que utilizava ideias introduzidas na Índia por Brahmagupta por volta do ano 600.

A busca por soluções para as cúbicas foi feita por sucessores de al-Khwarizmi, como o persa Omar Kayyan⁴⁴.

Em um tempo em que, enquanto os matemáticos da Europa ocidental entravam na chamada Idade das Trevas e “trocavam a demonstração de teoremas por debates teológicos”, percebemos como os matemáticos persas e árabes, seguindo a produção dos gregos, “continuaram a desenvolver novas matemáticas”. (STEWART, 2012, p. 50). Um desses matemáticos foi Omar Kayyan, que utilizou métodos da geometria grega para resolver equações cúbicas trabalhando com seções cônicas, ideias essas retomadas séculos mais tarde por Descartes. A maior parte da produção de Omar na área de matemática foi dedicada à teoria das equações. Para elas, considerava dois tipos de solução: algébrica e geométrica. Para todas as equações cúbicas, desenvolveu soluções geométricas, explicando-as no livro *Álgebra* em 1079. É importante lembrar que, como os números negativos não eram conhecidos nessa época, as equações sempre tinham os termos positivos. Agindo assim, Omar Khayyan resolveu os 14 tipos de equações cônicas.

De acordo com Boyer (1996, p. 165), é importante destacar que nas soluções geométricas das equações cúbicas propostas pelos gregos na Antiguidade os coeficientes eram segmentos de retas enquanto que nos estudos de Omar eram números específicos. Ainda segundo o autor,

Uma das mais frutíferas contribuições do ecletismo árabe foi a tendência a fechar a separação entre a álgebra numérica e a geométrica. O passo decisivo nesta direção veio muito mais tarde, com Descartes, mas Omar Khayyan estava avançado nesta direção. [...] Ao substituir a teoria das proporções de Euclides por um método numérico, ele chegou perto da definição de números irracionais e lutou com o conceito de número real em geral. (BOYER, 1996, p. 165)

⁴⁴ O matemático, poeta e astrônomo persa *Omar Kayyan* nasceu em 18 de maio de 1048 e morreu em 4 de dezembro de 1131, na cidade de Nishapur – que ainda existe nos dias de hoje –, localizada no nordeste da antiga Pérsia, atual Irã. Além das produções em matemática, escreveu uma coletânea de versos conhecida como *Rubayat*, traduzida em 1839 pelo poeta inglês Edward Fitzgerald.

A importância do trabalho e das ideias de Omar Khayyan fica bem representada pela menção de Boyer (1996, p. 165) a uma manifestação de Omar quanto ao objetivo da álgebra:

Quem quer que imagine que a álgebra é um artifício para achar quantidades desconhecidas pensou em vão. Não se deve dar atenção ao fato de a álgebra e a geometria serem diferentes na aparência. As álgebras são fatos geométricos que são provados. (BOYER, 1996, p. 165)

No período conhecido como Idade das Trevas surgiram as primeiras universidades, como Oxford e Cambridge.

Neste período, na Europa, os estudos científicos e acadêmicos foram confinados em igrejas e mosteiros por conta do domínio da Igreja católica. O desenvolvimento da matemática teve um freio. Trabalhos de matemáticos gregos tais como Euclides eram copiados por monges sendo que muitos deles não entendiam o que estavam fazendo.

O maior matemático europeu deste período da história foi Leonardo de Pisa⁴⁵, que ficou conhecido como Fibonacci a partir do século XIX. Em 1202, na Itália, publicou sua primeira obra, *Liber Abbaci*, primeiro texto aritmético a levar os símbolos e métodos hindus e árabes para a Europa, fazendo, entre outras coisas, que os algarismos romanos, comessem a ser substituídos pelos indo-árabes.

Depois da Idade das Trevas,

No final do século XV, o foco da atividade matemática mudou outra vez para a Europa. Enquanto o Extremo Oriente o Oriente Médio perdiam a força da criatividade, a Europa ganhava um novo fôlego, lutando para se libertar da influência da Igreja católica romana e do medo de tudo que fosse novidade. Por ironia, o novo centro da atividade intelectual foi a Itália, ao passo que

⁴⁵ O matemático italiano *Leonardo de Pisa* nasceu e morreu na cidade de Pisa, tendo vivido entre os anos de 1170 e 1250. Ficou conhecido como Leonardo Fibonacci, sendo considerado um dos maiores matemáticos ocidentais na época da Idade Média.

Roma perdia o controle de seu próprio quintal.
(STEWART, 2012, p. 67)

Esta transformação na matemática na Europa iniciou com um legado do período anterior: o livro *LiberAbacci*, de Fibonacci. Muitos matemáticos desenvolveram seus estudos inspirados por essa obra. Luca Pacioli⁴⁶ escreveu um livro sobre aritmética, geometria e proporções onde reunia conhecimentos matemáticos já existentes. Interessante observar que também eram temas de seu livro: proporções das formas da natureza, perspectiva na arte e teoria das cores.

A história da matemática renascentista é marcada por uma disputa entre o matemático que descobriu o segredo das misteriosas equações cúbicas e o homem que supostamente se apossou dessa descoberta.

Na Itália, Niccolo Fontana⁴⁷, apelidado de “Tartaglia” o Gago dizia ter encontrado uma solução para uma abrangente categoria de equações cúbica e acusava um outro matemático, GirolamoCardano⁴⁸ de ter roubado suas descobertas e depois publicá-las num dos mais influentes textos sobre álgebra da história: o livro *A grande arte ou as regras da álgebra*. Neste livro, estavam reunidos métodos de resolução não só das equações quadráticas, já conhecidas pelos babilônios, mas também apresentou soluções recém-descobertas para as cúbicas e quárticas. Diferentemente das soluções de Omar Kayyan que dependiam da geometria das seções cônicas, as apresentadas por Cardano em *A grande arte* eram puramente algébricas.

Tartaglia escreveu diversas obras, mas o que o tornou realmente conhecido na matemática foram suas disputas com Cardano sobre as

⁴⁶Luca Bartolomeo de Pacioli, era italiano, nasceu em 1445, em Sansepolcro, onde também morreu em 19 de junho de 1517. Além de matemático e professor, foi monge franciscano. Pelas suas obra, é considerado o pai da contabilidade moderna.

⁴⁷O matemático Niccolo Fontana, ficou conhecido pelo nome de Tartaglia, que significa gago. Nasceu na Bréscia em 1500 e morreu em Veneza em 13 de dezembro de 1557.

⁴⁸Além de matemático, o italiano Girolamo Cardano era filósofo, cientista e médico. Nasceu em Pávia, em 24 de setembro de 1501 e morreu em 21 de setembro de 1576.

equações cúbicas, nas quais Tartaglia reivindicava os créditos das descobertas.

O que tornou as coisas piores para o pobre Tartaglia foi o fato de não se tratar apenas de uma perda de créditos. Na Europa do Renascimento, os segredos matemáticos podiam ser convertidos em dinheiro vivo. [...] Em geral fala-se que a matemática não é um esporte para plateias, mas isso não era verdade nos anos 1500. Os matemáticos podiam ganhar a vida desafiando uns aos outros em competições públicas, nas quais cada qual propunha ao oponente uma série de problemas; quem obtivesse o maior número de respostas certas vencia. Esses eram espetáculos menos emocionantes que lutas de espadas ou de boxes com luvas, mas os espectadores podiam fazer apostas e saber qual dos competidores havia vencido, mesmo sem ter ideia de como isso acontecera. Além do prêmio em dinheiro, os vencedores atraíam alunos, que pagavam pelos ensinamentos. Por isso as competições públicas eram duplamente lucrativas. (STEWART, 2012, p. 73)

O tempo passou com uma sequência de disputas e acusações entre Cardano e Tartaglia tendo, cada um de seu lado, outros matemáticos partidários. Em 1570, depois da publicação da segunda edição de *A grande arte*, Cardano foi preso pela Inquisição. A causa não foi o conteúdo do livro mas sim a dedicatória feita a Andreas Osiander, que tinha sido autor de um prefácio anônimo de *Sobre a revolução das esferas celestes*, de Nicolau Copérnico, obra condenada pela Igreja.

Na fórmula da cúbica de Cardano, ocasionalmente os matemáticos se deparavam com uma raiz quadrada de números negativos. Poucos matemáticos europeus daquela época encaravam os números negativos. Já no oriente, o trabalho com quantidades negativas já era enfrentado há muito tempo, em registros que datam do ano 400 e 1200. Se a aparição de números negativos já causavam impactos na matemática europeia, a ideia de trabalhar com as raízes quadradas desses números era ainda mais ameaçadora. Isso mudou em 1572, com o

trabalho de Rafaele Bombelli⁴⁹ publicado no livro *Álgebra*. De acordo com Stewart (2012, p. 81), “Bombelli talvez tenha sido o primeiro matemático a entender que é possível realizar manipulações algébricas com raízes quadradas de números negativos e obter resultados utilizáveis. Foi uma grande descoberta, pois indicavam que tais números tinham uma interpretação razoável, mas isso não parecia apontar qual era essa interpretação”.

Contudo, o ponto alto da matemática do livro *A grande arte* não foi a cúbica, mas a quártica, questão evidenciada pelo fato que um de seus alunos, Ferrari, estendeu os métodos de Tartaglia para equações de quarto grau. Sua fórmula somente envolve raízes quadradas e cúbicas; a quarta potência não passa da raiz quadrada de uma raiz quadrada, não sendo necessária. No livro, Cardano não apresenta solução para a quártica.

Reconhecidamente dono de uma mente brilhante da Matemática, Carl Friedrich Gauss⁵⁰ decidiu escolher pelo trabalho com essa ciência como profissão – ele também adorava e se destacava em linguística – depois da descoberta, aos 19 anos, de uma construção euclidiana para o polígono regular de 17 lados. Essa foi uma descoberta sem precedentes; não havia, por exemplo, nada semelhante nos estudos de Euclides.

Antes de Gauss, os matemáticos conheciam métodos de construção de polígonos regulares de 3, 4, 5 ou 6 lados e suas combinações que levavam a construção, também dos polígonos regulares com números de lados 8, 10, 12, 15, 16, 20... Porém, nada ainda tinha sido apresentado para o polígono regular de 17 lados. A chave do raciocínio de Gauss, na época, foi pensar a respeito de duas propriedades do número 17: (1) é um número primo e (2) é uma unidade maior que uma potência de 2 ($17 = 16 + 1 = 2^4 + 1$).

⁴⁹ O matemático italiano *Rafaele Bombelli* nasceu em Bolonha, em 1526 e morreu em Roma, em 1572. Foi também um engenheiro hidráulico.

⁵⁰ *Carl Friedrich Gauss* foi um importante matemático, astrônomo e físico alemão. Nasceu em Braunschweig, em 30 de Abril de 1777 e morreu em Göttingen, em 23 de fevereiro de 1855. Contribuiu para o desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, tais como matemática, estatística, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e ótica.

A seguinte observação de Stewart (2012) mostra, para além da grande habilidade com aritmética, o dom de Gauss para localizar padrões em problemas matemáticos e usá-los para encontrar soluções.

Se você fosse um gênio como Gauss, poderia ver por que esses dois desprezíveis enunciados implicavam a existência da construção de um polígono regular de 17 lados usando régua e compasso. Se você fosse qualquer um dos outros grandes matemáticos que viveram entre 500 a.C. e 1796, não teria o menor vislumbre sobre qualquer ligação. Sabemos disso porque eles não tiveram essa visão. (STEWART, 2012, p. 84)

Os registros da história dão conta de que Gauss era mesmo um gênio e desde criança já surpreendia sua família, como mostra esse relato de Stewart (2012):

Quando o garoto completou dois anos, a mãe [Dorothea Benze] já sabia que tinha um prodígio em casa, e empenhou-se de coração para assegurar que ele recebesse uma educação que fizesse seu talento desabrochar. [...] Com três anos, estava observando o pai [Gebhard Dietrich Gauss] – na época capataz encarregado de uma turma de trabalhadores – fazer os pagamentos semanais. Ao perceber um engano na aritmética, o garoto indicou o erro para o surpreso Gebhard. Ninguém ainda havia ensinado números ao garoto. Ele ensinou a si mesmo. (STEWART, 2012, p. 84)

Depois, a história de Gauss como aluno foi marcada por episódios onde ele já dava sinais de que teria uma grande importância para a Matemática e também mostrava que também tinha outros talentos. Exemplo disso é que aos 15 anos ele já era versado em línguas clássicas (muitos dos seus trabalhos foram escritos, posteriormente, em latim) e que aos 17 anos descobriu o teorema que ficou conhecido como lei da reciprocidade quadrática na teoria dos números, uma regularidade das propriedades de divisibilidade dos quadrados perfeitos. Nesse caso,

tal padrão já tinha sido observado por Leonhard Euler⁵¹, mas Gauss, sem saber disso, fez a mesma descoberta de forma independente. O interesse as descobertas de Gauss sobre a teoria das equações, nessa época, ajudou no seu trabalho com as descobertas sobre a construção do polígono regular de 17 lados.

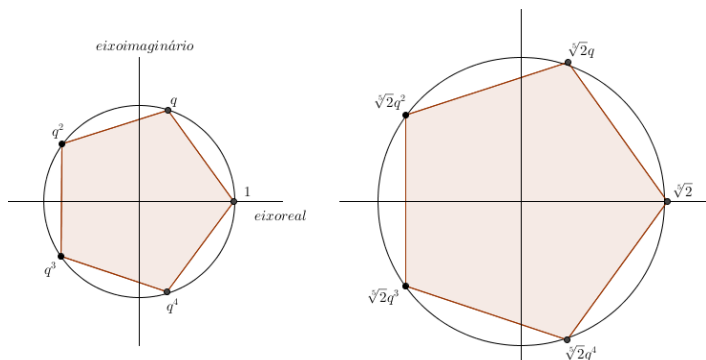
Gauss estudou na Universidade de Göttingen entre 1795 e 1798, quando conheceu Bolyai, geômetra formado na tradição euclidiana. Em 1801, publica *Disquisitiones Arithmeticae*, num momento em que, na Europa, os matemáticos começavam a se dar conta de que os chamados números “complexos” tornavam a álgebra muito mais clara - ainda que parecessem artificiais e seu conteúdo fosse incompreensível – pois com eles era possível apresentar soluções para as equações de uma maneira uniforme.

De acordo com Stewart,

Em 1750, o círculo de ideias iniciado pelos matemáticos na Itália renascentista estava maduro e fechado. Seus métodos para resolver equações cúbicas e quárticas eram vistos como uma extensão natural da solução babilônica das quadráticas. A relação entre números radicais e complexos havia sido exposta em alguns detalhes, e sabia-se que, nessa extensão do sistema métrico normal, um número não tem uma raiz cúbica, mas três; não uma raiz de quarta potência, mas quatro; não uma raiz de quinta potência, mas cinco. Essas raízes formam os vértices de um polígono regular de n lados no plano complexo, com um vértice em 1. As outras raízes se espaçam de forma regular ao redor do círculo de raio 1 e centro em 0. (STEWART, 2012, p. 89)

⁵¹Leonhard Euler foi um grande matemático e físico suíço nascido na Basileia, em 15 de abril de 1707. Morreu em São Petersburgo, na Rússia, em 18 de setembro de 1783. Fez importantes descobertas em diversos campos da matemática. Ao longo de sua vida, teve graves problemas de visão, mas isso não impediu sua grande produtividade científica.

Figura 38: Raízes quintas de uma unidade no plano complexo (à esquerda) e raízes quintas de dois (à direita).



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Na figura, q indica que, a partir de qualquer raiz quinta de um número é possível obter quatro outras, multiplicando o número por q , q^2 , q^3 e q^4 . As figuras acima mostram uma generalização dessa situação e também o caso das raízes quintas do número 2. Desta forma, por exemplo, as raízes quintas de 2 podem ser vistas como as soluções da equação $x^5 = 2$, uma equação de quinto grau, com cinco soluções complexas, mas só uma delas real. Da mesma forma, a equação $x^6 = 2$ para raízes sextas de 2 tem seis soluções, a equação para raízes 17 de 2 tem 17 soluções, e assim por diante. Reconhecemos assim o padrão de que o número de soluções é igual ao grau da equação.

Os matemáticos de então se convenceram que esse era um padrão que se aplicava não apenas a equações de raízes n , mas a qualquer equação algébrica, ou seja, que no domínio dos complexos, qualquer equação tem exatamente o mesmo número de soluções (raízes), de seu grau.

Mas, acontece que nenhum matemático conseguiu provar essa suposição até então. Euler fez uma tentativa, provou para grau 2, 3 e 4, generalizou para os demais, mas seu método permanece com lacunas ainda hoje. Gauss se incomodou com essa situação e partiu para a construção de uma prova. “Era complicada e curiosamente indireta: qualquer matemático competente podia se convencer de que estava correta, mas ninguém conseguia imaginar de onde Gauss tinha tirado aquela ideia.” (STEWART, 2012, p. 91).

Na dissertação “Uma nova prova de que toda função integral racional em uma variável que pode ser resolvida em fatores reais do primeiro ou do segundo grau.”⁵² Trabalhando fora dos complexos, Gauss mostra que qualquer polinômio com coeficientes reais é um produto de termos que são polinômios lineares ou quadráticos. Na verdade, Gauss apresentou a primeira prova rigorosa desse teorema básico da álgebra, ainda que tenha dito, no título que era uma “nova” prova para não ofender predecessores que afirmavam ter provas, porém todas com problemas. Gauss achava esse teorema tão importante que apresentou quatro demonstrações diferentes para ele, sendo a última feita quando ele já tinha setenta anos de idade.

Hoje, podemos enunciar seu teorema – que ficou conhecido como “teorema fundamental da álgebra”- da seguinte forma: qualquer polinômio real de grau n tem n raízes complexas ou reais.

O gênio de Gauss não se limitou aos trabalhos em matemática pura. Trabalhou também com pesquisas aplicadas e, na meia idade, se voltou para aplicações práticas. Durante esse período, um jovem chamado Abel⁵³ escreveu uma carta para Gauss falando sobre a impossibilidade de resolver equações quinticas com radicais. Gauss não respondeu. Já doente por problemas no coração, talvez não tenha sequer lido o trabalho de Abel.

A *grande arte*, trabalho publicado por Cardano no renascimento, motivo do grande conflito com Tartaglia, avançou significativamente apenas em meados do século XVIII. Na época do Renascimento, os matemáticos até conseguiam resolver equações cúbicas e quárticas, mas usando métodos que, muitas vezes, levavam a soluções por meio de uma série de coincidências e não por alguma razão sistemática. Essa razão sistemática foi apresentada, em 1770, por Joseph-Louis Lagrange⁵⁴ e Alexandre Théophile Vandermonde⁵⁵.

⁵² Essa é uma tradução do título da dissertação, escrita em latim.

⁵³ O matemático norueguês *Niels Henrik Abel* nasceu em Nedstrand, em 25 de agosto de 1802 e morreu em Froland, em 6 de Abril de 1829. Foi o primeiro a demonstrar, sem nenhum equívoco, a impossibilidade da quintica, contribuindo assim para o surgimento da teoria de grupos. Abel morreu em 1829, de tuberculose.

⁵⁴ O italiano *Joseph Louis Lagrange* nasceu em Turim, em 25 de janeiro de 1736 e morreu na França, em Paris, em 10 de abril de 1813. Além de importante matemático, foi nomeado, por Napoleão Bonaparte, senador, conde do império

A primeira publicação de Vandermonde em matemática tratava de funções simétricas das raízes de um polinômio— fórmulas algébricas que não se alteram se as raízes forem intercambiadas, como a soma de todas as raízes. Sua contribuição mais original foi demonstrar que a equação $x^n - 1 = 0$, associada ao polígono regular de n lados, pode ser resolvida por radicais se n for igual ou menor do que 10 (hoje sabemos que a equação pode ser resolvida por radicais para qualquer n).

O trabalho de Vandermonde foi reconhecido por Cauchy⁵⁶ que, mais tarde, citou-o como sendo o primeiro a perceber que funções simétricas podem ser aplicadas à solução de equações por radicais. Também, essa foi a ideia que se tornaria o ponto de partida para a abordagem geral das equações algébricas desenvolvida por Lagrange.

Estudante de Direito, Lagrange achava as aulas de matemática muito chatas, consistindo sobretudo em geometria euclidiana. Essa opinião mudou quando leu e estudou um livro de Edmond Halley⁵⁷ sobre métodos algébricos em ótica. A partir de então, passou a trabalhar com aplicações da matemática na mecânica celeste. Lagrange também tinha paixão pela teoria dos números.

e oficial da Legião de Honra. Viveu por cerca de vinte anos na Alemanha, onde foi diretor da divisão físico-matemática da Academia de Berlim. Na França, nos últimos anos de vida, foi indicado para professor na École Polytechnique, tendo planejado o curso de matemática, sendo seu primeiro professor.

⁵⁵O francês *Alexandre-Théophile Vandermonde* foi matemático, químico e também músico violinista. Nasceu em Paris, em 28 de fevereiro de 1735 e morreu nessa mesma cidade, em 1 de Janeiro de 1796.

⁵⁶*Augustin-Louis Cauchy* nasceu em Paris, em 21 de agosto de 1789 e morreu nessa mesma cidade, em 23 de maio de 1857. Como matemático, teve um importante papel num dos primeiros avanços da matemática moderna relacionados com a introdução do rigor na análise matemática. Também foi responsável pela teoria de grupos finitos. Viveu sua infância durante um dos piores períodos da Revolução Francesa. Considerado um dos maiores nomes franceses nas ciências, foi professor na École Polytechnique, no Collège de France e na Sorbonne.

⁵⁷*Edmond Halley* foi um astrônomo e matemático britânico, nasceu em Haggerston, em 8 de novembro de 1656 e morreu Greenwich em 14 de janeiro de 1742. Ficou famoso pela previsão, em 1696, da trajetória do cometa que leva seu nome e atuou em outras áreas da ciência.

Em 1770 Lagrange se dedicou ao estudo da teoria das equações, com a intenção de examinar os vários métodos encontrados até então para a solução algébrica de equações. Além disso, pretendia reduzi-las a princípios gerais e explicar porque esses métodos funcionam para o terceiro e quarto graus e por que não funcionam para graus mais altos. Com esse trabalho, mostrou que teve uma compreensão muito mais profunda dos métodos renascentistas que os próprios inventores dos métodos. Além disso, provou que o esquema geral que encontrara não poderia ser estendido ao quinto grau ou a graus mais elevados. Porém, não considera se havia alguma solução possível nesses casos.

Lagrange percebeu que todos os métodos utilizados por Cardano, Tartaglia e outros se baseavam numa técnica que consistia em transformar o problema na solução de alguma equação auxiliar cujas raízes estivessem relacionadas com as originais, mas fossem diferentes.

A equação auxiliar para uma cúbica era simples – uma quadrática. Essa “quadrática resolvente” podia ser solucionada pelo método babilônico; em seguida, a solução da cúbica podia ser reconstruída extraindo-se a raiz cúbica. Essa é exatamente a estrutura da fórmula de Cardano. Para uma quártica, a equação auxiliar também era simples – uma cúbica. Essa “cúbica resolvente” podia ser solucionada pelo método de Cardano; então o resultado da quártica poderia ser reconstruído extraindo-se uma raiz quarta – ou seja, uma raiz quadrada duplicada. Essa é exatamente a estrutura da fórmula de Ferrari. (STEWART, 2012, p. 99)

Entusiasmado com suas descobertas nesse sentido, Lagrange seguiu estudando o padrão na intenção de mostrar resoluções para equações de qualquer grau. Se esse padrão se mantivesse, a quártica teria uma equação “quártica resolvente” que seria resolvida pelo método de Ferrari para depois extrair uma raiz quártica. Mas, aqui aconteceu um ponto de interessante discussão tanto para Lagrange quanto para seus sucessores: a regra não valia para a equação quártica pois a equação resolvente para a quártica não era uma quártica e sim uma sêxtica. O fato de, um mesmo método que facilitava a resolução de uma quártica complicava a resolução da quártica colocou o mundo matemático na

expectativa de descobrir se estava provado que não existia solução para equações quárticas ou se as soluções existiam mas não podiam ser determinadas pelo método de Lagrange.

Paolo Ruffini⁵⁸ e Abel, imbuídos do propósito de esclarecer a questão, apresentam suas respostas para essa questão.

No caso de Ruffini, a resposta apresentada em 1799, nos dois volumes de *Teoria geral das equações*, não foi correta, apesar de ele ter passado a vida inteira acreditando que tinha provado que a quártica era insolúvel por radicais. Seus contemporâneos nunca perceberam algo de errado na resposta apresentada por ele. Foi somente após sua morte que se perceberam os erros na sua prova.

No livro, Ruffini utiliza mais de quinhentas páginas de uma matemática quase desconhecida para provar que não existe solução para a quártica. Em 1801, enviou um exemplar desse livro para Lagrange. Como não obteve resposta alguma, enviou novamente mais duas vezes, sem, contudo, receber qualquer retorno de Lagrange.

Os anos foram se passando e Ruffini não conseguiu o reconhecimento que buscava, ainda que tenha tentado convencer a comunidade de matemáticos com novas publicações nos anos de 1808 e 1813. De acordo com Stewart (2012, p. 102), “o mundo não estava preparado para o raciocínio de Ruffini [...] poucos matemáticos se entusiasmaram com as demonstrações de Ruffini”, a exceção foi Cauchy que, em 1821, escreveu a Ruffini elogiando seu trabalho e dizendo estar convencido de suas provas. Mas, isso aconteceu muito tarde na história de Ruffini, que morreu apenas uns anos depois.

O longo trabalho de Ruffini em busca da prova da insolubilidade das quárticas estava baseado no conceito de permutação. Isso talvez tenha sido um dos motivos que afastaram o interesse de outros matemáticos por sua obra, já que era uma novidade, ainda que também tenha sido trabalhada por Lagrange.

⁵⁸ Paolo Ruffini nasceu e morreu em duas regiões que hoje pertencem à Itália: Valentano, em 22 de setembro de 1765 e Modena, em 10 de maio de 1822, respectivamente. Colou grau na Universidade de Módena em filosofia, medicina e cirurgia em 1788 e em matemática em 1789. Ao longo da vida, desenvolveu, em paralelo, seus trabalhos em medicina e em matemática.

Nesse momento, vamos entender permutação como sendo uma forma de rearranjar uma lista ordenada, como num embaralhamento de cartas.

Esse conceito de permutação aparece na teoria das equações porque as raízes de um dado polinômio podem ser consideradas uma lista e alguns aspectos bem básicos das equações estão diretamente relacionados ao efeito do embaralhamento dessa lista. Intuitivamente, é fácil aceitar que uma equação “não conhece” a ordem em que as raízes são listadas e que, portanto, a permutação das raízes não tem importância. Com relação aos coeficientes da equação, estes devem ser expressões que não se alteram quando as raízes são permutadas, ou seja, devem ser expressões totalmente simétricas nas raízes.

Lagrange, anteriormente, havia tratado de expressões parcialmente simétricas, indicando que algumas expressões nas raízes podem ser simétricas em relação a algumas permutações, mas não a outras. Essa questão está muito ligada a qualquer fórmula para a resolução da equação. Essa questão até era um pouco conhecida pelos contemporâneos e Ruffini, o que não era tão conhecido era o uso sistemático que Ruffini fazia de uma outra ideia de Lagrange: o fato de que se pode “multiplicar” duas permutações para chegar em outra, fazendo isso uma de cada vez.

Para esclarecer essa questão, vamos considerar símbolos organizados na seguinte lista: abc . Embaralhando os símbolos que compõe essa lista, podemos ter as seguintes seis permutações (considerando também a original abc):

Tabela 1 – Permutações dos símbolos a , b , c .

abc	acb	bca	bac	cab	cba
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Fonte: produção da própria autora.

Cada uma dessas permutações pode ser considerada como uma lista cujos elementos seguem determinada ordem. Vamos escolher uma delas para fazermos as nossas análises. Por exemplo:

cba

Agora, vamos pensar na lista acima como uma regra que nos diz como reorganizar a lista original abc . Pensando assim, concluímos que a regra é: reverter à ordem. Acontece que essa regra pode ser aplicada também em outras listas, não somente na original. Se for aplicada, por exemplo, na lista bca , teremos a lista acb como resultado pois ela é obtida pela reversão da ordem dos termos de bca . Podemos concluir que, de certa forma:

$$cbax\ bca = acb.$$

Essa ideia de multiplicação de permutações – que não é o mesmo conceito de multiplicar número – é central para a compreensão da história da simetria e sua relação com as raízes de equações algébricas, como mostra o seguinte texto de Stewart (2012):

Pinçando uma página do livro de Lagrange, Ruffini concentrou-se nas funções simétricas das raízes e em sua relação com as permutações. A quártica tem 5 raízes e 120 permutações de cinco símbolos. Ruffini percebeu que esse sistema de permutações teria de possuir certos aspectos estruturais, herdados de qualquer fórmula hipotética para soluções da quártica. Se esses aspectos estivessem ausentes, não poderia existir a fórmula. É um pouco como caçar um tigre numa floresta enlameada. Se houvesse mesmo um tigre, ele deixaria pegadas na lama. Sem pegadas, não há tigre. Ao estudar as regularidades matemáticas dessa nova forma de multiplicação, Ruffini conseguiu provar – pelo menos para si mesmo – que a estrutura multiplicativa das 120 permutações é inconsistente com as funções simétricas que precisam existir se a equação puder ser resolvida por radicais. E ele chegou a algo significativo. (STEWART, 2012, p. 105)

Antes do trabalho de Ruffini com as equações quárticas, pode-se dizer que quase todos os matemáticos do mundo acreditavam que a quártica poderia ser resolvida por radicais, só não sabiam como. Depois, ainda que a maioria continuasse não acreditando que Ruffini tivesse provado isso, o consenso se inverteu pois os matemáticos passaram a

duvidar se realmente os radicais podiam resolver tais problemas. Como Ruffini usou a estratégia correta para provar essa questão mas não usou as táticas certas, foi preciso o trabalho de um outro matemático, disposto a encontrar, de vez, as provas. Foi à vez de Niels Henrik Abel pesquisar sobre o tema.

Sua passagem pela Escola da Catedral em Oslo teve um período difícil enquanto ele teve aulas de matemática com um professor conhecido por aplicar violência física nos alunos como forma de motivação para as aulas. Tudo mudou para Niels quando esse professor foi substituído por Bernt Michael Holmboe⁵⁹ que, numa postura pedagógica completamente oposta, deixava que seus alunos abordassem questões interessantes que não constavam no programa de ensino. Empolgado com essa possibilidade, Niels passou a estudar livros clássicos de matemática e progrediu muito como matemático. Tanto que, um pouco antes de se formar, estava convencido de que havia resolvido a equação quártica. Passou seu trabalho para diversos professores analisarem, os quais, apesar de não encontrarem qualquer erro, fizeram questionamentos a Niels que o levaram a fazer cálculos em alguns exemplos específicos que o fizeram ver que ainda falava alguma coisa a ser feita. Formou-se em 1821, foi admitido na Universidade de Christiania (hoje, Oslo) e continuou sua busca matemática pela solução da quártica e pela correção daquilo que havia escrito antes. Foi em 1823 que finalmente Niels demonstrou a impossibilidade da quártica, desta vez sem erros. Usou uma estratégia semelhante a de Ruffini, porém com táticas mais aprimoradas.

Porém, questões de ordem prática atrapalharam um pouco o sucesso e o reconhecimento de Niels Abel por seu trabalho com as quárticas. Para conseguir um bom emprego que lhe garantisse dinheiro para a vida de casado que pretendia iniciar, Niels foi em busca de, além de publicar seus escritos na Noruega, compartilhá-los e discuti-los com renomados matemáticos que estavam na França. Ele conseguiu que a Universidade onde estudava bancasse uma viagem de estudos a Paris. Foi para lá levando cópias impressas de seu melhor trabalho com teoria das equações, porém os escritos estavam em norueguês. Já na França, resolveu fazer novas cópias, desta vez em francês. Porém, para economizar, reduziu seus escritos a apenas seis páginas, fazendo um

⁵⁹O matemático norueguês *Bernt Michael Holmboe* nasceu em Vang, em 23 de março de 1795 e morreu em Oslo, em 28 de março de 1850.

grande resumo de toda a sua descoberta. Desta forma, esse artigo ficou mais parecido com um esboço do que com uma demonstração pois muitos detalhes importante para a compreensão e avaliação que seriam feitas pelos leitores ficaram de fora. Assim, Abel até conseguiu que alguns matemáticos franceses lessem seu trabalho, mas não obteve os créditos e o reconhecimento que buscava. A demonstração de Abel de que algumas quinticas não podiam ser resolvidas por radicais passou a ser reconhecida apenas depois de sua morte.

A pergunta passou a ser, então: o que diferencia os tipos de quinticas que podem ser resolvidas por radicais das que não podem ser?

As buscas por respostas para essa pergunta levaram a mudanças nos rumos da matemática daí por diante. Um dos responsáveis por isso foi Évariste Galois.

A curta vida de Galois foi cercada de dramas e tragédias. Mas, também de uma incrível dedicação à matemática. Logo no início dos seus estudos em matemática, ainda no Colégio Louis-le-Grand, Galois se dedicou aos clássicos, tais como *Elementos de Geometria*, de Legendre e também aos textos técnicos de Lagrange e Abel, concentrando suas atenções no estudo da teoria das equações. Galois fez exame de admissão para estudar numa das mais importantes instituições francesas, a École Polytechnique, incubadora dos matemáticos franceses, mas foi reprovado, continuando seus estudos no Louis-le-Grand. A explicação para isso, considerando que Galois era dotado de uma inteligência superior, pode ser dada pelas seguintes observações de Stewart (2012):

Na escola, Galois era desleixado, hábito que nunca perdeu. Espantava os professores resolvendo problemas de cabeça, em vez de “mostrar o desenvolvimento do trabalho”. Isso é um fetiche dos professores de matemática que até hoje aflige os jovens talentosos. [...] A ambição levou Galois a pensar grande: ele quis continuar seus estudos na École Polytechnique [...] mas ignorou o conselho de seu professor de matemática, que tentou fazer o jovem trabalhar de maneira sistemática e mostrar o desenvolvimento do seu trabalho, para que os examinadores seguissem seu raciocínio. Despreparado e confiante demais, Évariste fez o exame de

admissão – e foi reprovado. (STEWART, 2012, p. 123)

O primeiro texto de pesquisa, sobre frações contínuas, foi publicado por Galois em 1829. Continuava também com sua produção em teoria das equações. Porém, “na vanguarda da matemática, Galois sentia-se cada vez mais frustrado diante da aparente incompetência da comunidade matemática para reconhecê-lo como ele desejava. Depois disso, sua vida pessoal começou a ruir” (STEWART, 2012, p. 126).

Poucos dias antes da última chance de entrar para a *École Polytechnique*, o pai de Galois se suicidou. Mais uma vez ele não passou na prova de admissão. Sua última alternativa era tentar a admissão na *École Préparatoire*⁶⁰. Foi nessa instituição que ele se formou em ciências e letras em 1829.

No ano de 1830, Galois submeteu um texto sobre teoria das equações à Academia, para o Grande Prêmio de Matemática.

O secretário, Joseph Fourier⁶¹, levou o trabalho para casa a fim de dar uma olhada. A má sorte que sempre perseguiu a carreira de Galois voltou a atacar: Fourier morreu de repente, sem ler o texto. Pior, o manuscrito não foi encontrado entre seus papéis. Mas havia outros três membros do comitê encarregados do prêmio: Legendre, Sylvestre-François Lacroix⁶² e Louis Poinot⁶³. Talvez um deles seja o responsável pela perda do manuscrito. Claro que Galois ficou furioso. Estava convencido de que havia uma conspiração de mentes medíocres para sufocar os esforços de um gênio, e logo encontrou um bode expiatório, o opressivo

⁶⁰ A *École Préparatoire* agora chama-se *École Normal* e é uma instituição francesa de muito prestígio.

⁶¹ Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 de março de 1768 — Paris, 16 de maio de 1830) foi um matemático e físico francês.

⁶² Sylvestre-François Lacroix (Paris, 28 de abril de 1765 — Paris, 24 de maio de 1843) foi um matemático francês.

⁶³ Louis Poinot (Paris, 3 de janeiro de 1777 — Paris, 5 de dezembro de 1859) foi um matemático francês. Participou da construção da Torre Eiffel.

regime dos Bourbon. Por isso, quis contribuir para sua destruição. (STEWART, 2012, p. 127).

Por conta desse fato, não se sabe o que havia nesse texto, mas seu conteúdo pode ser inferido a partir dos seus outros textos que chegaram até nós. Não podemos saber, também, em que a história de vida de Galois – e também da matemática – teria sido diferente se seu manuscrito não tivesse desaparecido.

O envolvimento de Galois com as questões políticas da monarquia francesa em um momento de repressão popular o levaram à perda da posição na École Préparatoire e ao alistamento, ainda que por pouco tempo, na Artilharia da Guarda Nacional, uma organização paramilitar ninho do republicanismo. Sua vida seguia cheia de tropeços, não tinha emprego, estava pobre, sendo preso no período de maio a junho de 1831 e novamente, quando da queda da Bastilha, por quase um ano a partir de julho do mesmo ano. Enquanto esteve preso, trabalhou por um tempo na matemática. Sua liberdade foi em regime condicional. Nesse período, viveu sua primeira e única história de amor com uma mulher, história essa cercada de mistérios pois não há muitos registros históricos sobre esse caso que levem à certeza sobre quem era a moça e como aconteceram realmente os rumos da relação de ambos. O que se sabe, a história que chegou até nós, é que Galois morreu em 1832, em um duelo de pistolas logo depois do rompimento desse relacionamento amoroso. Especula-se que o motivo do duelo foi político e não amoroso.

Para a história da matemática é importante o fato que, na véspera do duelo Galois escreveu a seu amigo Auguste Chevalier⁶⁴ um esboço de todas as suas ideias. Depois da morte de Galois, Chevalier publicou essa carta, que apresentava uma tentativa de estabelecer uma relação entre grupos e equações polinomiais, apontando uma condição necessária e suficiente para uma equação ser resolvida por radicais. Além disso, apresentou outras ideias sobre funções e sobre outras enigmáticas demais para serem identificadas. Certamente foi um momento dramático para Galois escrever esses textos sabendo que estava às vésperas de um duelo que poderia ser fatal. “O comentário ‘Não tenho tempo’ rabiscado nas margens do texto deu origem a outro mito: que Galois teria passado a noite anterior ao duelo escrevendo

⁶⁴ *Auguste Chevalier* (Domfront, 23 de junho de 1873 — Paris, 3 ou 4 de junho de 1956) foi um botânico francês.

freneticamente suas descobertas matemáticas”. (STEWART, 2012, p. 134).

Hoje se sabe que a contribuição de Galois foi crucial para a história da Matemática, como apresentado por Stewart:

Galois introduziu um novo ponto de vista na matemática, mudou seu conteúdo e deu um passo necessário, ainda que desconhecido, na abstração. **Com Galois, a matemática deixou de ser o estudo dos números e das formas – aritmética, geometria e ideias desenvolvidas a partir daí como álgebra e trigonometria. Tornou-se o estudo de estruturas. O que começou como um estudo de coisas se transformou num estudo de processos.** Mas não devemos dar todos os créditos dessa transformação a Galois. Ele estava surfando uma onda posta em movimento por Lagrange, Cauchy, Ruffini e Abel, mas com tamanha habilidade que se apossou dela: ele foi a primeira pessoa a avaliar seriamente que questões matemáticas podiam às vezes ser mais bem compreendidas se transportadas para o domínio do pensamento abstrato. [...] **Quando o entendimento dos métodos de Galois ganhou corpo, um novo e poderoso conceito matemático veio à luz: o de um grupo. Todo um ramo da matemática, um cálculo de simetria chamado teoria dos grupos, passou a existir e desde então invadiu todos os recantos da matemática.** (STEWART, 2012, p. 134, grifos nossos)

Já vimos, quando falamos do trabalho de Ruffini, que grupos de permutações mostram formas de rearranjar uma lista de objetos. Pois Galois trabalhou com grupos de permutações nos quais os objetos eram raízes de uma equação algébrica. Usemos um exemplo para apresentar essa questão: uma equação cúbica genérica com três raízes a , b e c . Seguindo Lagrange e Ruffini, já vimos que há seis maneiras de permutar esses símbolos e que podemos multiplicar quaisquer duas permutações fazendo isso uma de cada vez. Fazendo isso, podemos construir uma “tabela de multiplicação” para as seis permutações. Para facilitar, vamos

chamar cada uma delas de um outro nome, fazendo, como mostrado por Stewart (2012, p. 137), $I = abc$, $R = acb$, $Q = bac$, $V = bca$, $U = cab$ e $P = cba$. Uma tal tabela de multiplicação seria a seguinte:

Tabela 2 – Multiplicação para as seis permutações das raízes de uma equação cúbica.

	I	U	V	P	Q	R
I	I	U	V	P	Q	R
U	U	V	I	R	P	Q
V	V	I	U	Q	R	P
P	P	Q	R	I	U	V
Q	Q	R	P	V	I	U
R	R	P	Q	U	V	I

Fonte: produção da própria autora.

Nesta tabela, os dados da linha X com a coluna Y são o produto XY, que significa “fazer Y e depois fazer X”. Foi Galois quem percebeu que o produto de quaisquer duas permutações também é uma permutação. Podemos constatar isso olhando para a tabela, vendo que não há outros símbolos diferentes de I, U, V, P, Q, R, ou seja, o produto de duas permutações no conjunto também está no conjunto. Galois deu o nome de **grupo** ao conjunto de permutações.

Alguns conjuntos menores de permutações possuem a mesma propriedade de grupo. Por exemplo, o conjunto [I, U, V] forma uma tabela menor, como mostrado abaixo, na qual somente aparecem os três símbolos I, U, V.

Tabela 3 – Tabela de multiplicação para um subgrupo de três permutações

	I	U	V
I	I	U	V
U	U	V	I
V	V	I	U

Fonte: produção da própria autora.

Em casos como esse, nos quais um grupo é parte de outro, ele é chamado de subgrupo. Podemos verificar que outros subgrupos, como [I, P], [I, Q] e [I, R] contêm apenas duas permutações. Além disso, podemos ter também o subgrupo [I] que contém somente I. Pode-se demonstrar que os seis subgrupos aqui relacionados são os **únicos** subgrupos do grupo de todas as permutações em três símbolos.

Stewart (2012) apresenta a sequência desse processo:

Agora, disse Galois (embora não nesta linguagem), se escolhermos alguma equação cúbica, podemos examinar suas simetrias – as permutações que preservam todas as relações algébricas entre as raízes. Vamos supor, por exemplo, que $a + b^2 = 5$, uma relação algébrica entre as raízes de a e b . A permutação R é uma simetria? Bem, se verificarmos a definição acima, R mantém a como era e troca b por c , então a condição $a + c^2 = 5$ deve se manter. Se não, R definitivamente não é uma simetria. Caso se mantenha, verificamos quaisquer outras relações algébricas válidas entre as raízes, e se R passar por **todos** esses testes, será uma simetria. (Stewart, 2012, p. 138, grifos do autor)

Essa citação nos apresenta conclusões bastante importantes no que se refere ao entendimento do conceito de simetria no âmbito da

Álgebra moderna. A partir das considerações anteriores, os seguintes pontos nos interessam particularmente:

- entender as simetrias como permutações que preservam todas as relações algébricas entre as raízes.
- entender que o conjunto de todas as simetrias de uma dada equação deve ser um subgrupo do grupo de todas as permutações das raízes.

Esses pontos percorrem todo o trabalho de Galois e

Isso nos diz que existe um grupo associado a qualquer equação algébrica, seu grupo de simetria – agora chamado **grupo de Galois** em homenagem ao seu inventor. E o Grupo de Galois de uma equação é sempre um subgrupo do grupo de todas as permutações das raízes. Desse aspecto-chave surge uma linha de abordagem natural: entender quais subgrupos surgem em quais circunstâncias. Em particular, se a equação pode ser resolvida por radicais, o grupo de Galois das equações deveria refletir esse fato em sua estrutura interna. Então, dada qualquer equação, simplesmente trabalhamos o seu grupo de Galois, verificamos se apresenta a estrutura exigida e ficamos sabendo se ela pode ser resolvida por radicais. (STEWART, 2012, p. 139)

Mostrando que podemos visualizar a ideia de Galois como um processo que se ramifica repetidamente a partir de um tronco central, Stewart (2012) apresenta a metáfora da árvore para explicar como o problema da solução das quinticas foi atacado segundo os conceitos dos grupos de Galois:

O tronco é o grupo de equações de Galois. Os galhos, gravetos e folhas são os vários subgrupos. Os subgrupos surgem naturalmente assim que começamos a pensar sobre como as simetrias das equações mudam quando começamos a extrair radicais. Como o grupo muda: Galois mostrou que se temos a *p-ésima* raiz, então o grupo de simetria

pode ser subdividido em p blocos distintos, todos do mesmo tamanho. [...] Então, por exemplo, um grupo de 15 permutações poderia se dividir em 5 grupos de 3, ou 3 grupos de 5. É crucial que os blocos satisfaçam algumas condições muito precisas; em especial, uma delas deve formar por conta própria um subgrupo de um tipo especial conhecido como “subgrupo normal de índice p ”. Podemos imaginar o tronco da árvore se dividindo em p galhos menores, um dos quais corresponde ao subgrupo normal. (STEWART, 2012, p. 139)

Exemplificando a ideia de subgrupos normais utilizando as tabelas 1 e 2, temos que todas as seis permutações de três símbolos são: o grupo inteiro $[I, U, V, P, Q, R]$, o subgrupo $[I, U, V]$ e o subgrupo com apenas uma permutação, $[I]$. Os outros três subgrupos, que contêm duas permutações, não são normais.

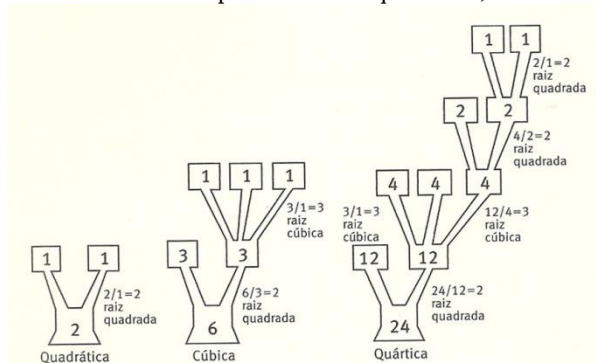
Continuando com a metáfora da árvore:

Vamos supor que desejamos resolver a quintica geral. Existem 5 raízes, então as permutações envolvem 5 símbolos. Existem precisamente 120 dessas permutações. Os coeficientes da equação, sendo totalmente simétricos, têm um grupo que contém todas essas 120. Esse grupo é o tronco da árvore. Cada raiz, sendo totalmente assimétrica, tem um grupo que contém apenas **uma** permutação – a trivial. Então a árvore tem 120 folhas. Nosso objetivo é juntar o tronco às folhas por galhos e gravetos cuja estrutura reflita as propriedades de simetria das várias quantidades surgidas se começarmos a trabalhar as partes de uma fórmula para as raízes, que supomos serem expressas por radicais. Vamos presumir, para efeitos do nosso argumento, que o primeiro passo na fórmula seja adicionar uma raiz quinta. Então o grupo de 120 permutações deve se dividir em 5 pedaços, cada um contendo 24 permutações. Assim, a árvore desenvolve 5 galhos. Tecnicamente, essa ramificação deve corresponder a um subgrupo normal de índice 5. Mas Galois conseguiu provar, fazendo apenas

cálculos com permutações, que **não existe esse subgrupo normal**.[...] Nenhuma árvore pode subir do tronco até chegar às folhas, portanto, não existe fórmula para as raízes em termos de radicais. (STEWART, 2012, p. 139, grifos do autor)

Essa mesma noção, desenvolvida por Galois, serve também para as equações de grau maior do que 5, ou seja, as equações de graus 6, 7, 8 etc. também não podem ser resolvidas segundo uma regra geral. A partir daí, uma importante questão para a matemática, então, passou a ser descobrir o que de diferente aconteciam com as equações de segundo, terceiro e quarto grau que as tornava solucionáveis. A teoria dos grupos mostra como resolver a quadrática, a cúbica e a quártica e isso pode ser representado, novamente, pela metáfora da árvore:

Figura 39 – Metáfora da árvore para resolver a quadrática, a cúbica e a quártica.



Fonte: Stewart (2012, p. 142)

Mas, ainda havia um segredo por trás do grupo de Galois que precisava de uma resposta. Apesar do grupo de Galois de uma equação dizer tudo o que precisamos saber sobre suas soluções, o trabalho desse matemático não mereceu, na época em que foi divulgado o devido mérito e respeito da academia de matemáticos. Stewart(2012) apresenta uma explicação para o que acontece:

Vou contar o segredo. A maneira mais fácil de trabalhar o grupo de uma equação é usar as propriedades de suas raízes. Mas, claro, o problema todo é que em geral não sabemos quais são essas raízes. Lembre-se, estamos tentando resolver a equação, ou seja, encontrar suas raízes. Vamos supor que alguém nos apresente uma quintica específica, digamos $x^5 - 6x + 3 = 0$, $x^5 - 6x + 3 = 0$ ou $x^5 + 15x + 12 = 0$ e nos peça que usemos os métodos de Galois para decidir se a equação pode ou não pode ser resolvida por radicais. Parece uma questão razoável. A terrível verdade é que, com os métodos disponíveis de Galois, **não existe uma maneira de responder a essa questão**. Podemos afirmar que o mais provável é que o grupo associado contém todas as 120 permutações – e se contiver a equação não pode ser resolvida. Mas não sabemos ao certo se todas as 120 permutações ocorrem na verdade. Talvez as raízes quintas obedeçam a alguma restrição específica. Como podemos saber? (STEWART, 2012, p. 142, grifos do autor).

A partir dessas considerações, podemos perceber um pouco daquilo que incomodou os matemáticos da época a ponto deles não valorizarem o trabalho de Galois naquele momento: a teoria de Galois apresenta graves limitações pois funciona com as raízes e não com os coeficientes, ou seja, ela trabalha com aquilo que é desconhecido a respeito das equações e não com o que é conhecido, com o que é dado.

Hoje, dadas as técnicas que já conhecemos, incluídas aí as computacionais, podemos calcular o grupo de Galois e descobrir que a primeira equação exemplificada acima não pode ser solucionada por radicais enquanto que a segunda pode. Mas, na época de Galois, ele não tinha acesso a técnicas como essa. Um de seus métodos foi, então, ter descoberto os passos para resolver um problema, não necessariamente apresentando a solução para esse problema. Foi preciso o avanço de mais um século, depois de Galois, para que fosse possível realizar cálculos de grupo de Galois.

Os sucessores de Galois perceberam que a relação entre grupos e simetria é mais facilmente compreendida no contexto da geometria.

Assim, apresentaremos aqui uma discussão geométrica dos grupos de simetria, complementando a apresentação metafórica feita até aqui.

Até Galois – vamos falar nesses termos para contextualizar o tempo histórico em que as coisas aconteceram –, o conceito de simetria na geometria apresentava apenas a conotação intuitiva que já discutimos anteriormente, ligada aos conceitos de proporção e padrões geométricos. Depois de Galois, é preciso, antes de tudo, ressignificar esse conceito entendendo que há “uma simetria” e não “a simetria”, uma vez que os objetos não apresentam, naquele sentido geométrico, apenas uma simetria e sim diferentes simetrias.

Nesse sentido, definimos: Uma simetria de um objeto matemático é uma transformação que preserva a estrutura do objeto. Assim, simetria é mais um processo do que uma coisa.

Simetrias de Galois são permutações e permutação é um processo de rearranjar coisas, assim, simetria não é o rearranjo e sim a regra que se utiliza para obter esse rearranjo.

Partindo para uma representação geométrica utilizando um triângulo equilátero, vamos discutir três palavras-chave para esta definição de simetria: transformação, estrutura e preservação partindo do princípio que a estrutura de um objeto transformado deve estar conforme com o original.

Pensemos nas seguintes situações: um triângulo equilátero, recortado em uma cartolina, é apoiado em cima de uma mesa e girado.

Primeiro vamos girar segundo um ângulo reto:

Figura 40 – Rotação do triângulo equilátero por um ângulo reto.



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Neste caso, a figura continua sendo um triângulo equilátero nos quais não mudam os lados e nem os ângulos. Contudo, os lados apontam para lugares diferentes do original, indicando uma mudança na localização.

Podemos ter uma localização diferente do triângulo em cima da mesa, dependendo do ângulo que tenha sido girado.

Vamos agora girar em um ângulo de 120° .

Figura 41 – Rotação do triângulo equilátero por um ângulo de 120° .



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

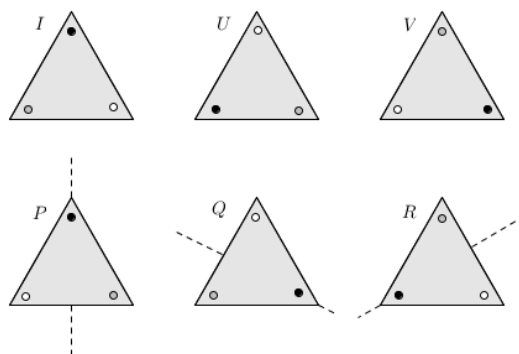
Note que não há nenhuma diferença entre o primeiro e o segundo triângulo. A única mudança é na posição dos vértices, mas essa mudança não altera o triângulo original.

Logo, dizemos que a rotação de 120° é uma simetria do triângulo equilátero. É uma transformação que preserva a estrutura.

Se fizermos uma rotação de 240° , também manteremos a estrutura do triângulo. Se fizermos o reflexo do triângulo em relação ao segmento que passa por um dos vértices, mantendo-o fixo e mudando a posição os outros dois, iremos obter mais três simetrias. Também há a simetria que não faz nada com o triângulo. Logo, o triângulo equilátero tem exatamente seis simetrias.

A simetria que não faz nada com o triângulo, a simetria trivial, é chamada de identidade e a chamaremos de I . As outras simetrias iremos chamar de U , V , P , Q e R .

Figura 42 – As seis simetrias do triângulo equilátero.



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Usamos os mesmos símbolos usados para as permutações das raízes cúbicas, e isso não é por acaso. Segundo STEWART:

Galois fez uma grande jogada com a “propriedade de grupo” de suas permutações. Se você fizer quaisquer duas de cada vez, obtém outra. Isso dá uma grande dica sobre o que devemos fazer com nossas seis simetrias. Devemos “multiplicar” essas simetrias em pares e ver o que acontece. Lembre-se da convenção: se X e Y forem duas transformações de simetria, o produto XY é o que acontece quando fazemos primeiro Y e depois X. (STEWART, 2012. pag.148)

Por exemplo, se quisermos obter VU, aplicaremos U ao triângulo, ou seja, uma rotação de 120° , e depois V, que é uma rotação de 240° . Então VU gira o triângulo em $120^\circ + 240^\circ = 360^\circ$.

Mas essa simetria, que gira o triângulo em 360° , faz com que tudo termine onde começou. O caminho percorrido pra chegar até o final, não importa, por isso não contamos essa simetria. Logo, na teoria de grupos, as simetrias I e VU são iguais. As seis simetrias podem formar 36 produtos, mas todos recaem a uma das seis simetrias. É esse princípio que usaremos no capítulo sobre Teoria de Grupos.

Apesar de Galois ter sido o principal matemático a formular essa teoria, dois outros matemáticos foram importantes para a formulação da teoria que conhecemos hoje: Felix Klein e Sophus Lie.

Klein ficou famoso graças ao Programa de Erlanger, que apresentava o conceito de “geometria” dentro da teoria de grupos. Esse programa foi a realização matemática mais importante de Klein.

A aplicação dos grupos à geometria, segundo Klein, depende do conceito de *transformação de um conjunto S sobre ele mesmo*, ou seja, uma correspondência pela qual a cada elemento de S está associado um único elemento de S. (EVES, 2004. pag. 605).

Logo, o Programa de Erlanger descrevia a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de permutações. Assim, toda classificação de grupos de transformações torna-se uma codificação das geometrias. Um exemplo é a geometria plana euclidiana, que é o estudo das propriedades das figuras que ficam invariantes sob o grupo de permutações obtidas a partir de translações e rotações do plano.

Além dessa grandiosa contribuição para esse campo da matemática, Klein se preocupava com o ensino da matemática e exerceu forte influência em círculos pedagógicos.

Sophus Lie, junto com Klein, foi quem descobriu uma nova maneira de pensar sobre a geometria. O grupo correspondente a uma geometria é o grupo simétrico dessa geometria. Inversamente, a geometria correspondente a um grupo é o objeto ao qual corresponde o grupo simétrico do grupo. Ou seja, a geometria é definida pelas coisas que são invariáveis sob o grupo. Na linguagem moderna, a ideia soa tão simples que devia ter parecido óbvia o tempo todo.

Mas Lie foi mais além e levantou uma importante questão. Existe uma teoria de equações diferenciais análoga à teoria das equações algébricas de Galois? Existe uma forma de ver quando uma equação diferencial pode ou não ser resolvida por algum método?

Segundo Stewart (2012)

A chave, mais uma vez, era a simetria. Lie passou a perceber que alguns resultados na geometria poderiam ser interpretados em termos de equações

diferenciais. Dada uma solução de uma equação diferencial específica, Lie podia aplicar uma transformação (a partir de um grupo específico) e provar que o resultado também era uma solução. De uma solução ele podia chegar a muitas, todas relacionadas pelo grupo. Em outras palavras, o grupo consistia em simetrias da equação diferencial. (STEWART, 2012. pag. 195)

Podemos dizer então que a mesma análise de simetrias que Galois fez nas equações algébricas, Lie estendeu para as equações diferenciais, criando assim os chamados *Grupos de Lie*, em sua maioria infinitos, coisa improvável na análise de Galois.

A história apresentada nesse capítulo é importante para entendermos o caminho que os matemáticos percorreram para chegar na Teoria de Grupos que conhecemos hoje. Além disso, é curioso o fato de que algo que só trouxe respostas negativas, como a resolução da equação quártica, trouxe tantos avanços nos estudos matemáticos. A matemática tem a arte de fazer essas coisas...

3 GRUPOS DE SIMETRIAS

Neste capítulo, estudaremos conceitos iniciais da teoria de grupos.

De acordo com Domingues e Iezzi (2003, p. 138), “a ideia de Grupo era um instrumento da mais alta importância para a organização e o estudo de muitas partes da matemática. Em nível mais elementar, um exemplo é a teoria das simetrias”. Uma outra questão relevante que se apresenta é o fato de que muitos dos problemas que envolvem objetos matemáticos simétricos são mais simples de serem resolvidos: equações que não possuem algum tipo de simetria são impossíveis de serem resolvidas usando um número finito de operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes).

Segundo Armstrong (1988), “números medem tamanho. Grupos medem simetria”. Utilizando uma noção intuitiva, a primeira afirmação não surpreende. Já para a segunda, apresentaremos neste capítulo um estudo no contexto da Álgebra Moderna.

3.1. SIMETRIAS NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Retomaremos aqui a mesma análise feita no capítulo anterior sobre as simetrias no triângulo. Neste começo, vamos entender simetria como uma operação que preserva a estrutura geométrica de um determinado elemento de um espaço arbitrário.

Segundo Stewart (2012) uma simetria de um objeto matemático é uma transformação que preserva a estrutura do objeto. As simetrias de Galois são permutações (das raízes de uma equação), e uma permutação é um forma de rearranjar coisas. Estritamente falando, não é o próprio rearranjo; é a regra que aplicamos para obter o rearranjo. Não é o prato, é a receita.

Existem três palavras-chave na definição de uma simetria: “transformação”, “estrutura” e “preservação”. Fazendo uso da ideia de Stewart, vamos utilizar um triângulo equilátero para explicar cada uma dessas três palavras.

Transformação: Podemos fazer algumas coisas no triângulo, por exemplo, torcê-lo, girá-lo, amassá-lo, esticá-lo, transportá-lo. Mas vamos nos limitar a essas coisas, devido à segunda palavra.

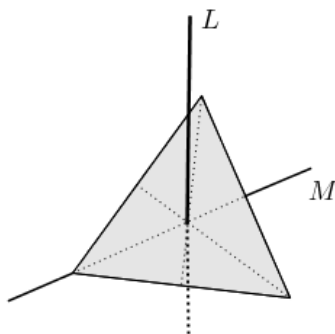
Estrutura: A estrutura geométrica do triângulo inclui e coisas como, três lados de comprimentos iguais, três ângulos internos de mesma medida, os lados são retas, está situado em determinada localização do plano, e assim por diante.

Preservação: A estrutura do objeto transformado deve coincidir com a original. O triângulo transformado precisa de três lados iguais e três ângulos internos iguais, por isso não vamos dobrá-lo. Os lados precisam permanecer retos, por isso não podemos torcê-lo. A localização deve ser a mesma, por isso não podemos deslocá-lo. Girar o triângulo num certo ângulo, contudo, preserva ao menos parte da estrutura.

Para Domingues e Iezzi (2003), denomina-se simetria de um triângulo equilátero T qualquer aplicação bijetora que preserva distâncias. Preservar distância significa que, se a e b são pontos arbitrários do triângulo, então a distância de $f(a)$ e $f(b)$ é igual à distância de a e b . Uma isometria pode ser imaginada como uma transformação geométrica que leva uma cópia do triângulo a coincidir com ele próprio. Estas novas posições do triângulo são obtidas através das operações de simetria já vistas, atuadas em diferentes eixos. Vamos associar a cada simetria a operação que originou tal disposição dos vértices e lados. Assim, nos referiremos às operações como as próprias simetrias.

Observe o triângulo da figura:

Figura 43: Triângulo equilátero com seus eixos de simetria em $\mathbb{R}^3$



Fonte: produção da autora com o software Geogebra.

Notamos que na Figura 43 existem dois eixos, o eixo L de simetria rotacional e o eixo M de simetria reflexiva. Poderíamos afirmar que existem mais dois eixos de simetria reflexiva, mas os resultados obtidos seriam redundantes.

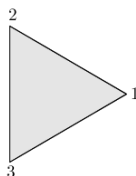
Já vimos que se giramos o triângulo em um ângulo reto em torno do eixo L, por exemplo, o resultado será diferente. Os lados apontam em direções diferentes. Mas se giramos o triângulo 120° em torno do eixo L, a figura parece inalterada. Em outras palavras, “rotação de 120° ” é uma simetria do triângulo equilátero. É uma transformação que preserva a estrutura (seu formato e localização). Acontece que o eixo L gera outra rotação a “rotação de 240° ”, proporcionando um total de 2 simetrias.

Existe ainda o eixo M de simetria reflexiva, que faz uma troca entre dois dos vértices, deixando o terceiro fixo, assim, resultando em mais uma simetria.

Por fim, existe a simetria nula, ou a simetria identidade, que faz nada com o triângulo. Por enquanto, já temos quatro simetrias do triângulo equilátero.

Agora, iremos combinar essas simetrias de rotações e reflexão para obtermos simetrias diferentes. Para visualizarmos melhor esses movimentos, vamos enumerar os vértices com os números 1, 2 e 3. Esses números servem apenas como referência e não são parte da estrutura do triângulo, que é preservada.

Figura 44: Triângulo equilátero com os vértices enumerados.

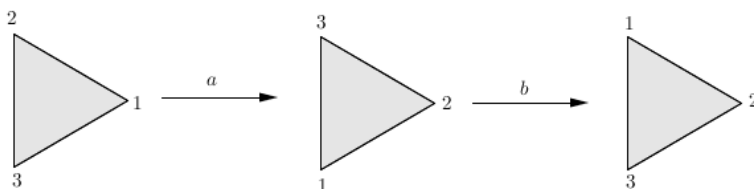


Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Além disso, consideramos e a simetria identidade, a a rotação de 120° em torno do eixo L e b a reflexão sobre o eixo M. Como a rotação de 240° em torno do eixo L coincide com duas rotações seguidas de 120° , obtemos $aa = a^2$ a rotação de 240° em torno do eixo L.

Agora, vamos aplicar uma rotação a e depois uma reflexão b na Figura 44 e obtemos a seguinte formação:

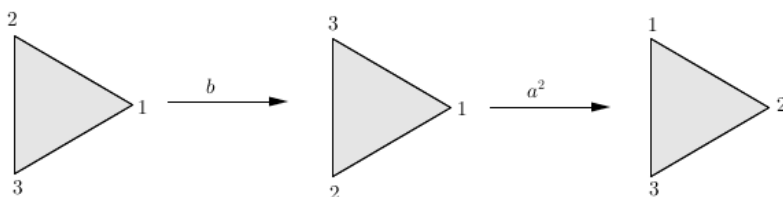
Figura 45: Combinações de simetrias



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Porém, obtemos esta mesma formação se aplicarmos uma reflexão b e depois uma rotação a^2 .

Figura 46: Combinações de simetria.

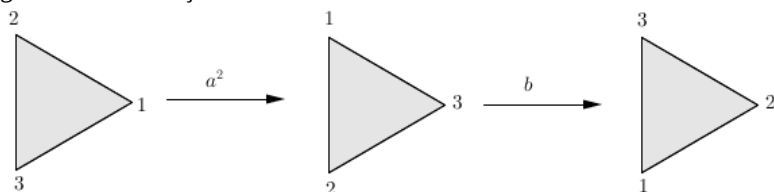


Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Através dessas combinações, obtivemos uma simetria diferente das anteriores mencionadas e ainda a igualdade $ba = a^2b$.

Aplicaremos agora uma rotação a^2 e depois uma reflexão b na Figura 44:

Figura 47: Combinações de simetrias

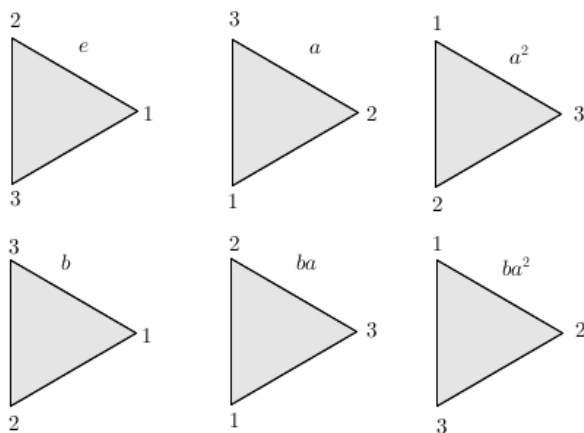


Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Com esta combinação, obtivemos mais uma simetria no triângulo equilátero. Iríamos obter esta mesma simetria se aplicarmos uma reflexão b e depois uma rotação a . Obtendo assim uma nova igualdade, $ba^2 = ab$.

Temos agora um total de 6 simetrias no triângulo equilátero, e denotamos o conjunto das simetrias dos triângulo equilátero por D_6 e assim $D_6 = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$.

Figura 48: Conjunto de todas as simetrias de um triângulo equilátero.



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Queremos uma medida que nos forneça mais informações sobre as simetrias de figuras, sendo planas ou não. Para isto, não basta apenas

contá-las, mas também saber qual o comportamento quando combinadas entre si. Para isto, introduziremos o conceito de *grupo de simetria*.

A partir daqui, ficará claro que o conjunto das simetrias do triângulo T possui uma certa estrutura algébrica.

Dadas duas simetrias u e v , podemos combiná-las operando primeiro v e depois u para produzirmos uma simetria que também atua em T . Escrevemos esta rotação como uv (convencionalmente a notação utilizada para composição de funções).

A simetria identidade, que denotamos por e , se comporta de tal maneira que sempre que combinada com outra rotação u , independentemente da ordem em que se faça o resultado sempre será a rotação u , ou seja, sempre teremos $ue = eu = u$, para toda simetria u de T .

Cada rotação u possui a rotação chamada inversa, u^{-1} , que também gera uma simetria de T e que satisfaz

$$uu^{-1} = u^{-1}u = e.$$

Para obter a rotação u^{-1} , basta rotacionar ou refletir no mesmo eixo de que u , pelo mesmo argumento, mas no sentido oposto de u .

Agora, se tomarmos três rotações u , v e w de T , não importa a ordem em que começaremos a operar, o resultado sempre terá a mesma rotação, ou seja,

$$(uv)w = u(vw),$$

para quaisquer u , v e w rotações de T .

Resumidamente, se colocarmos todas as rotações de um triângulo T em um conjunto e munir este conjunto pela operação de composição de funções, conseguiremos algumas propriedades dentro deste conjunto, que nos garante que este conjunto consiste em ser um grupo de simetria.

Tanto se falou de grupo neste trabalho, mas o que é um grupo? Nas próximas seções serão apresentados os conceitos matemáticos de grupo, subgrupo, subgrupo normal, grupo de permutações e em outros assuntos já mencionados aqui.

3.2 GRUPOS

Uma lei de composição interna $*$ em um conjunto não vazio G é uma aplicação

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x * y. \end{aligned}$$

Portanto, uma lei de composição em G associa a cada par de elementos de G um único elemento de G .

Definição 1: Sejam G um conjunto não vazio e $(x, y) \mapsto x * y$ uma lei de composição interna em G . Dizemos que G é um grupo em relação a essa lei se, e somente se, satisfaz os seguintes axiomas:

- (i) *Associatividade:* Para quaisquer $a, b, c \in G$,

$$a * (b * c) = (a * b) * c;$$
- (ii) *Existência do elemento neutro em relação à lei $*$:* Para todo $a \in G$, existe $e \in G$, tal que

$$a * e = a = e * a;$$
- (iii) *Todo elemento de G é simetrizável em relação à lei considerada:* Para cada $a \in G$, existe $a' \in G$, tais que

$$a * a' = e = a' * a.$$

Para indicar que o conjunto G é um grupo em relação à lei de composição interna $*$, escrevemos $(G, *)$. Quando não houver possibilidade de confusão sobre a operação considerada, podemos nos referir simplesmente ao grupo G , sem mencionar a operação.

Quando a lei da composição considerada for uma “adição” diremos que o grupo em questão é um “grupo aditivo” ao passo que se a lei for uma “multiplicação” nos referiremos a ele como “grupo multiplicativo”.

Quando G é um grupo multiplicativo, é comum denotar o único elemento neutro de G por 1, e o único elemento simétrico de $a \in G$ por a^{-1} . Neste caso, chamamos a^{-1} de *inverso* de a .

Quando G é um grupo aditivo, é comum denotar o único elemento neutro de G por 0, e o único simétrico de $a \in G$ por $-a$. Neste caso, chamamos $-a$ de *oposto* de a .

Definição 2: Dizemos que um grupo $(G, *)$ é abeliano ou comutativo se, e somente se, a lei de composição interna $*$ satisfaz a:

- (iv) *Comutatividade:* Para quaisquer $a, b \in G$,

$$a * b = b * a.$$

Essencialmente, um grupo é um conjunto não vazio munido de uma lei de composição interna que satisfaz três axiomas ou três propriedades, como preferir. Dentre esses axiomas, poderíamos adicionar outros, por exemplo, a unicidade do elemento neutro. Porém, esse “novo” axioma estaria de certa forma sobrando, pois ele é consequência dos três axiomas iniciais. Na próxima proposição veremos algumas propriedades de grupo que são resultantes dos três axiomas na definição de grupo.

Proposição 1: Seja $(G,)$ um grupo.*

- Existe um único elemento neutro em G .*
- Para cada $a \in G$, existe um único simétrico dele em G .*
- Se $a \in G$ e $a' \in G$ é o simétrico de a , então o simétrico de a' é a , isto é, $(a')' = a$.*
- Se $a, b \in G$ e $a', b' \in G$ são simétricos de a e b , respectivamente, então o simétrico de $a * b$ é $b' * a'$.*

Demonstração:

- O axioma (ii) garante a existência do elemento neutro $e \in G$. Suponhamos que e' seja outro elemento neutro de G . Como e é elemento neutro, temos $e * e' = e'$. Da mesma forma, como e' é elemento neutro, temos $e * e' = e$. Das igualdades acima concluímos que $e' = e$ e, portanto o elemento neutro é único.
- Suponhamos que existem dois elementos simétricos de a , a' e a'' . Uma vez que a' é simétrico de a , temos $a * a' = e$. E sendo a'' simétrico de a , temos $a'' * a = e$. Assim,

$$\begin{aligned} a'' &= a'' * e = a'' * (a * a') \\ &= (a'' * a) * a' = e * a' = a'. \end{aligned}$$

Portanto, $a'' = a'$ e o elemento simétrico de a é único.

- Como a' é o simétrico de a , valem as igualdades $a' * a = e = a * a'$. Isso assegura que a é o simétrico de a' , isto é, $(a')' = a$.
- Basta notar que

$$\begin{aligned} (a * b) * (b' * a') &= a * (b * b') * a' \\ &= a * e * a' \\ &= a * a' = e. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (b' * a') * (a * b) &= b' * (a' * a) * b \\
 &= b' * e * b \\
 &= b' * b = e.
 \end{aligned}$$

■

Abaixo são apresentados diferentes exemplos de grupos, aditivos, multiplicativos e abelianos.

Exemplo 1: Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com a operação usual de adição são grupos aditivos abelianos. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não é um grupo aditivo, pois os simétricos de 1, 2, 3, ..., não pertencem a $\mathbb{N}$.

Exemplo 2: São exemplos de grupos multiplicativos abelianos os conjuntos numéricos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^*$ com a operação usual de multiplicação. O conjunto $\mathbb{Z}^*$ não é um grupo multiplicativo porque o inverso, por exemplo, de 3 é $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Exemplo 3: Grupo aditivo de matrizes. Indiquemos por $M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ o conjunto das matrizes sobre $\mathbb{Z}$, com m linhas e n colunas. Consideramos aqui a adição usual de matrizes. Temos que $M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ é um grupo abeliano em relação a adição. Este grupo recebe o nome de grupo aditivo das matrizes sobre $\mathbb{Z}$ e é um grupo abeliano. Da mesma maneira se definem os grupos aditivos das matrizes sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, ou seja, $(M_{m \times n}(\mathbb{Q}), +)$, $(M_{m \times n}(\mathbb{R}), +)$ e $(M_{m \times n}(\mathbb{C}), +)$.

Exemplo 4: Grupos lineares de grau n . Indiquemos por $M_{n \times n}(\mathbb{Q})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{Q}$. Denotamos por $GL_n(\mathbb{Q})$ subconjunto de $M_{n \times n}(\mathbb{Q})$ cujas matrizes têm determinante não nulo, ou seja,

$$GL_n(\mathbb{Q}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{Q}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Uma vez que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ e $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$ segue que $\det(AB) \neq 0$, então $AB \in GL_n(\mathbb{Q})$, ou seja, a multiplicação é um lei de composição interna em $GL_n(\mathbb{Q})$. Temos que o produto de matrizes é associativo. A matriz identidade I_n tem determinante igual a 1 e assim $I_n \in GL_n(\mathbb{Q})$. Além disso, I_n é o elemento

neutro da multiplicação de matrizes. Para concluir, se $A \in GL_n(\mathbb{Q})$, então A^{-1} também é uma matriz de determinante não nulo pois

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0.$$

Logo, $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{Q})$. Portanto, $GL_n(\mathbb{Q})$ é um grupo multiplicativo. Como o produto de matrizes não é comutativo segue que $GL_n(\mathbb{Q})$ não é abeliano.

Analogamente, se definem os grupos lineares reais e os grupos lineares complexos, respectivamente por $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ e $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$.

Exemplo 5: Seja p um número primo. Considere $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Temos que $(\mathbb{Q}[\sqrt{p}], +)$ e $(\mathbb{Q}[\sqrt{p}]^*, \cdot)$ são grupos abelianos.

Todos os exemplos mencionados acima são conjuntos com infinitos elementos, e nesses casos, dizemos que são *grupos infinitos*. Quando a quantidade de elementos de G é finita, claro, dizemos que G é *grupo finito*. O número de elementos de G , nesse caso, é chamado de *ordem do grupo* G . A tábua de um grupo finito $(G, *)$ é a tábua da lei de composição considerada em G .

Exemplo 6: Considerando $G = \{1, -1\}$ com a multiplicação usual, temos que G é um grupo finito de ordem 2 e cuja tábua da operação é a seguinte:

Tabela 4: Tábua de operação de G .

$*$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Fonte: produção do próprio autor

Exemplo 7: Considerando $G = \{e, a, a^2\}$ o conjunto apenas das rotações de um triângulo equilátero, temos que G é um grupo finito de ordem 3 e cuja tábua da operação é a seguinte:

Tabela 5: Tábua de operações de G

	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

Fonte: produção do próprio autor

Exemplo 8: O conjunto $K = \{e, a, b, c\}$ com a operação $*$ é dado por

Tabela 6: Tábua do grupo de Klein

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Fonte: produção do autor

O conjunto K é um grupo abeliano conhecido como grupo de Klein.

Exemplo 9: As simetrias do triângulo equilátero $D_6 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ é um grupo não abeliano. A não comutatividade do grupo D_6 . Isso pode ser visto na Tabela 7, onde temos que $ba = a^2b \neq ab$.

Tabela 7: Tábua do grupo D_3 .

$\circ$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

Fonte: produção da própria autora.

Exemplos 10: Sejam $x, y \in Z$ e n um número natural fixo com $n \geq 2$. Dizemos que x e y estão relacionados se $x \equiv y \pmod{n}$, isto é, $n \mid (x - y)$ (n divide $(x - y)$). É fácil mostrar que a relação acima definida é um relação de equivalência. Agora definimos as classes de equivalências, se $x \in Z$, então a classe de equivalência de x é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{y \in Z : x \equiv y \pmod{n}\} \\ &= \{y \in Z : y = x + nt, t \in Z\} \\ &= x + nZ.\end{aligned}$$

Isto nos dará n classes de equivalências, a saber, $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}$. Agora consideramos o conjunto dessas classes: $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, onde

$$\begin{aligned}\bar{0} &= 0 + n\mathbb{Z} \\ \bar{1} &= 1 + n\mathbb{Z}\end{aligned}$$

e assim por diante. Com a lei de composição interna + (adição) $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$,

temos que $(\mathbb{Z}_n, +)$ é um grupo abeliano finito com n elementos. Por exemplo, se $n=5$ obtemos $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ e a tabela de adição é a seguinte:

Tabela 8: Tábua de operações de $\mathbb{Z}_5$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Fonte: produção do autor

Agora, se n é primo o conjunto $\mathbb{Z}_n^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, com a multiplicação $\cdot$ definida por

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$$

é um grupo abeliano com $n - 1$ elementos.

A construção com mais detalhes desses grupos pode ser encontrada em Domingues e Gelson (1982) e Garcia e Lequain (2008).

Observação1: A partir de alguns grupos podemos criar nos grupos, por exemplo, se $(G, *)$ e $(H, \star)$ são grupos, então $(G \times H, \Delta)$ é um grupo com a lei Δ definida por

$$(g_1, h_1) \Delta (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \star h_2).$$

Na próxima seção serão apresentados os tais grupos de permutações.

3.3 PERMUTAÇÕES

Permutação é o termo específico usado na teoria dos grupos para designar uma bijeção de um conjunto nele mesmo. Consideremos E um conjunto não vazio e denotamos por $Bij(E)$ o conjunto de todas as permutações dos elementos de E , ou seja, o conjunto de todas as aplicações bijetoras de E em E . Assim

$$Bij(E) = \{f: E \rightarrow E : f \text{ é aplicação bijetora}\}.$$

Desde que a composição de aplicações bijetoras é uma aplicação bijetora, temos que a composição de aplicações é uma lei de composição interna em $Bij(E)$. Denotaremos a lei de composição interna Bij por " $\circ$ ".

Proposição 2: Se E é um conjunto não vazio, então $(Bij(E), \circ)$ é um grupo.

Demonstração: Consideramos id a aplicação identidade de E , ou seja, a aplicação $id: E \rightarrow E$ definida por $id(x) = x$, para todo $x \in E$. Obviamente id é bijetora e é o elemento neutro nesse caso, posto que

$$\begin{aligned} f \circ id(x) &= f(id(x)) = f(x) \text{ e} \\ id \circ f(x) &= id(f(x)) = f(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, o que garante as igualdade $f \circ id = f$ e $id \circ f = f$, para toda aplicação $f \in Bij(E)$.

Seja $g \in Bij(E)$. Como g é bijetora, sabemos que g é uma aplicação inversível, ou seja, existe uma aplicação $g^{-1}: E \rightarrow E$, que é bijetora e satisfaz $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = id$. Logo, $g^{-1} \in Bij(E)$ é o simétrico de $g \in Bij(E)$.

Para provar a associatividade, tomamos $f, g, h \in Bij(E)$ e $x \in E$. Temos que

$$\begin{aligned}
 (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) \\
 &= (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x),
 \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Assim, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, para todo $f, g, h \in \text{Bij}(E)$. ■

Definição3: O grupo $(\text{Bij}(E), \circ)$ é chamado grupo das permutações sobre o conjunto E . Quando E é um conjunto finito com n elementos, indicamos $\text{Bij}(E)$ simplesmente por S_n .

Proposição 3: Sejam E e F conjuntos com n elementos. Então o número de bijeções de E em F é $n!$.

Demonstração: Vamos provar usando o princípio de indução sobre n .

Para $n = 1$, o resultado é óbvio. Assumindo como hipótese de indução que o número de bijeções entre conjuntos com k elementos é $k!$.

Sejam $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ e $F = \{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$. Devemos mostrar que o número de bijeções de E em F é $(k+1)!$.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, considere a função $g_i: \{a_1\} \rightarrow F$ definida por $f(a_1) = b_i$. Vamos estender g_i ao conjunto E para obter bijeções de E em F .

Como $E - \{a_1\}$ e $F - \{b_i\}$ têm k elementos, a hipótese de indução garante a existência de $k!$ bijeções entre os conjuntos. Se f é uma destas bijeções, então

$$f': E \rightarrow F, f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a_1 \\ b_i, & \text{se } x = a_1 \end{cases}$$

é uma bijeção que estende g_i . Assim, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, produzimos $k!$ bijeções de E em F .

Desde que temos $k+1$ possibilidades para i , obtemos $(k+1)k! = (k+1)!$ bijeções de E em F .

Observe que estas são todas as bijeções de E em F . De fato, se $h: E \rightarrow F$ é bijetora, então $h(a_1) = b_i$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$.

Logo, h é uma bijeção que estende g_i e, portanto, h é uma das bijeções construídas acima. ■

Corolário 1: Se E tem n elementos, então S_n tem $n!$ elementos.

Demonstração: Imediata da Proposição 3. ■

Exemplos 11: Se $n = 2$ podemos considerar $E = \{1, 2\}$ e então $S_2 = \{id, f\}$, sendo $id(1) = 1, id(2) = 2, f(1) = 2$ e $f(2) = 1$.

Exemplos 12 : Se $n=5$ então $S_n = 5! = 120$ permutações (120 possíveis permutações das raízes de uma equação quártica).

Se $f \in S_n$, então $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ é bijeção, e para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(i) = a_i$, com $a_i \neq a_j$, quando $i \neq j$. Assim, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$.

Uma notação mais sucinta é

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Esta notação não se trata de uma matriz $2 \times n$, mas sim de uma notação onde está subentendido que a bijeção f leva cada elemento da linha superior, no elemento abaixo dele.

Outra notação consiste em descrever $f \in S_n$ como uma sequência $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, indicando que $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \dots, f(a_{m-1}) = a_m, f(a_m) = a_1$ e $f(a_j) = a_j$, para $j \notin \{1, 2, \dots, m\}$.

Nesta nova notação, o elemento

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

é escrito como $f = (1\ 2\ 3) \in S_4$. Dizemos, neste caso, que f está representado na notação de ciclo.

Exemplo 13: Os seis elementos de S_3 são:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada uma dessas “matrizes” representa uma permutação, por exemplo, a “matriz”

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é interpretado como a permutação que envia o número 1 no número 3, o número 2 no número 1 e o número 3 no número 2. E quanto a composição de duas permutações, devemos nos lembrar que o elemento $f_4 \circ f_3$ significa a permutação f_3 atuando primeiro e depois f_4 . Por exemplo,

$$f_4 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_1,$$

enquanto que

$$f_3 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_2.$$

Com isto podemos concluir que S_3 não é abeliano.

Proposição 4: Se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, então S_n não é abeliano.

Demonstração: Como $n \geq 3$, temos pelo menos 3 elementos em $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Assim, podemos escolher $f, g \in S_n = \text{Bij}(E)$ como

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} e g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

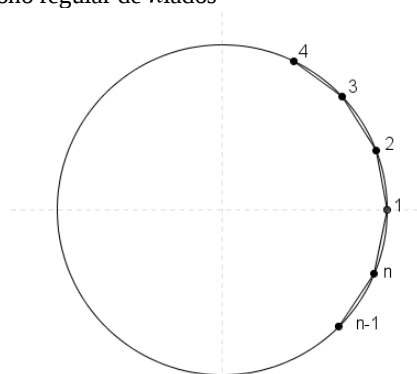
Segue que $(f \circ g)(1) = 1$ e $(g \circ f)(1) = 3$. Portanto, $f \circ g \neq g \circ f$, então S_n não é abeliano para $n \geq 3$.



3.4 GRUPOS DE ROTAÇÕES

O conceito de simetria de um triângulo, que foi visto no início deste capítulo, pode ser estendido naturalmente para um polígono regular qualquer de n lados. Para descrever essas simetrias, denotamos os vértices do polígono regular consecutivamente por $1, 2, \dots, n$, com $n \geq 3$, conforme a figura abaixo:

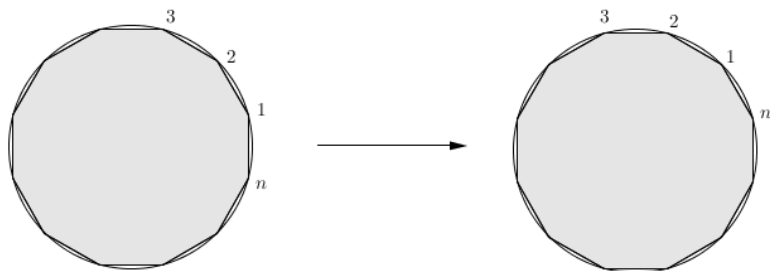
Figura 49: Polígono regular de n lados



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Cada uma das rotações de ângulo $0^\circ, \left(\frac{360}{n}\right)^\circ, \left(2\frac{360}{n}\right)^\circ, \dots, \left((n-1)\frac{360}{n}\right)^\circ$, no sentido anti-horário, mantém o polígono invariante (move apenas os seus vértices). Indiquemos por e a rotação de 0° e por a a rotação de $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$.

Figura 50: Rotação de $a = \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$.



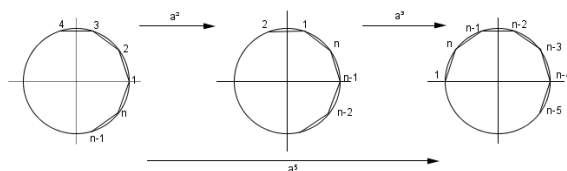
Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Os elementos e e a correspondem as seguintes funções em S_n :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ e } a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Aqui, usamos a notação multiplicativa para indicar a composição de duas rotações, por exemplo, $aa = a^2 = \left(2\frac{360}{n}\right)^\circ$, ou seja, foi realizada uma rotação de $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ e consecutivamente outra rotação de $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, resultando numa rotação de $\left(2\frac{360}{n}\right)^\circ$. Outro exemplo, uma rotação de $\left(3\frac{360}{n}\right)^\circ$ e posteriormente uma rotação de $\left(2\frac{360}{n}\right)^\circ$, fica indicado por $a^2a^3 = a^5 = \left(5\frac{360}{n}\right)^\circ$.

Figura 51: Operações de rotações em um polígono regular



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Obviamente $a^n = e$, o que significa que após efetuarmos n rotações de $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ o polígono volta à sua posição inicial. Além disso

$$a^{n+1} = a^n a = a, \quad a^{n+2} = a^n a^2 = a^2, \dots,$$

e também que $a^r a^s = a^{r+s}$, o que significa que o conjunto das rotações de um polígono regular, denotado por R_n , é fechado em relação a composição de rotações consideradas. Em R_n vale a propriedade associativa

$$\begin{aligned} a^r (a^s a^t) &= a^r (a^{s+t}) = a^{r+(s+t)} = a^{(r+s)+t} \\ &= a^{r+s} a^t = (a^r a^s) a^t. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $a^r a^{n-r} = a^n = e$, então a^{n-r} é o simétrico de a^r , considerando a composição de rotações.

Podemos dizer que o conjunto de n rotações é:

$$R_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

Assim R_n é um grupo cujo elemento neutro é e (que mantém o polígono na posição inicial) e R_n é chamado *grupo das rotações módulo n* .

Exemplo 14: Grupo das rotações de um quadrado $R_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$.

Tabela 9: Tábua de operações do R_4

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

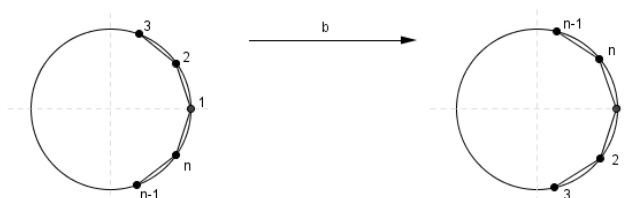
Fonte: produção do próprio autor

Observação2: O conjunto das rotações R_n possui n elementos (n simetrias).

3.5 GRUPOS DIEDRAIS

Agora, além das rotações vamos incluir a reflexão. Indiquemos por b a reflexão em torno do eixo x , conforme está indicado na figura abaixo. Temos então $b^2 = e$.

Figura 52: Reflexão em torno do eixo x .



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

Notemos que $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ não é uma rotação. Vimos que o conjunto das rotações é $R_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, onde $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Acrescentando b ao conjunto R_n precisamos também acrescentar as composições $a^i b$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Seja D_{2n} o seguinte conjunto:

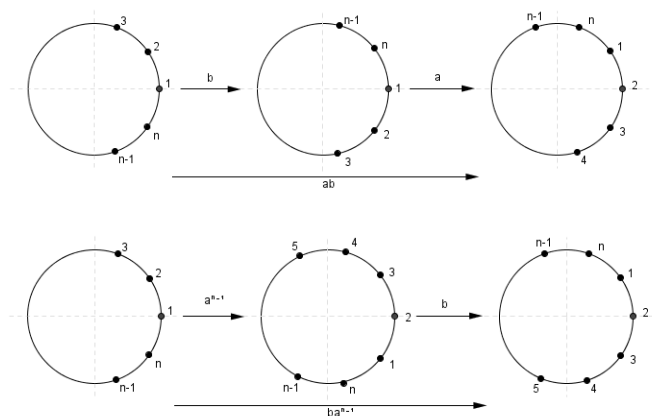
$$D_{2n} = \{e, a, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$$

cujos elementos são a reflexão b seguidas das rotações de R_n .

Note que:

- (i) $ab = ba^{n-1}$, conforme as figuras a seguir:

Figura 53: Rotações e reflexões em um polígono regular



Fonte: produção da autora com o *software* Geogebra.

(ii) $a^r b = ba^{n-r}$, pois

(iii)

$$\begin{aligned}
 a^r b &= \overbrace{(aa \dots a)}^{r \text{ vezes}} b = \overbrace{(aa \dots a)}^{(r-1) \text{ vezes}} (ab) \\
 &= a^{r-1} (ba^{n-1}) = (a^{r-1} b) a^{n-1} \\
 &= \dots = b \overbrace{(a^{n-1} \dots a^{n-1})}^{r \text{ vezes}} = ba^{rn-r}.
 \end{aligned}$$

Como, porém

$$a^{rn-r} a^r = a^{rn} = (a^n)^r = e^r = e.$$

Então, a^{rn-r} é o simétrico, na composição de rotações, de a^r .
 Onde $a^{rn-r} = a^{n-r}$. Logo,

$$a^r b = ba^{rn-r} = ba^{n-r}.$$

(iv) O conjunto D_{2n} é fechado em relação a composição pois, por exemplo:

$$\begin{aligned}(ba^r)(ba^s) &= b(a^r b)a^s = b(ba^{n-r})a^s \\ &= b^2 a^{n-r+s} = a^{(n+s)-r} \in D_{2n}.\end{aligned}$$

Mais precisamente, $(ba^r)(ba^s)$ é uma rotação.

- (v) Para todo elemento de D_{2n} existe um simétrico em relação a composição, dentro do próprio conjunto D_{2n} . De fato, se o elemento considerado é de R_n já se sabe que é verdade. Caso contrário, basta observar que

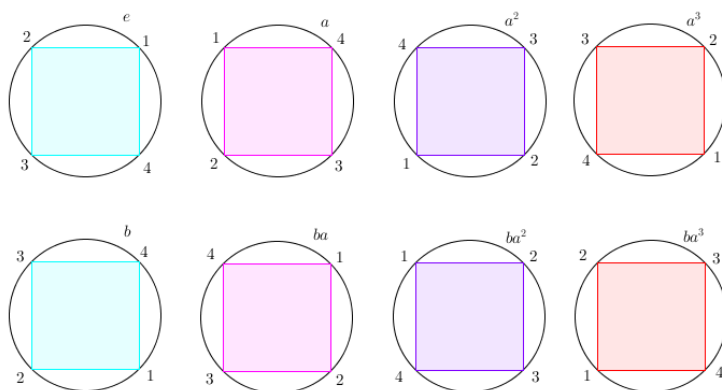
$$\begin{aligned}(ba^r)(ba^r) &= b(a^r b)a^r = b(ba^{n-r})a^r = \\ &= b^2 a^n = ee = e,\end{aligned}$$

ou seja, o simétrico de cada ba^r é o próprio ba^r , com $r = 0, 1, \dots, n-1$ e $a^0 = e$ por definição.

Assim, podemos concluir que o conjunto D_{2n} é um grupo que se denomina *Grupo Diedral* tem ordem $2n$.

Exemplo 15: Grupo diedral D_8

Figura 54: Grupo Diedral D_8 .



Fonte: produção da autora com o software Geogebra.

Tabela 10: Tábua de D_8

$\circ$	e	a	a^2	a^3	b	ba	ba^2	ba^3
e	e	a	a^2	a^3	b	ba	ba^2	ba^3
a	a	a^2	a^3	e	ab	ba^2	ba^3	b
a^2	a^2	a^3	e	a	ba^2	ba^3	b	ba
a^3	a^3	e	a	a^2	ba^3	b	ba	ba^2
b	b	ba	ba^2	ba^3	e	a	a^2	a^3
ba	ba	b^2a	ba^3	b	a	a^2	a^3	e
ba^2	ba^2	ba^3	b	ba	a^2	a^3	e	a
ba^3	ba^3	B	ba	ba^2	a^3	e	a	a^2

Fonte: produção do próprio autor

3.6 SUBGRUPOS

Definição 4: Seja $(G, *)$ um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G se, e somente se,

- (i) Para quaisquer $a, b \in H$ implica que $a * b \in H$ (isto é, H é fechado para a lei de composição interna de G);
- (ii) $(H, *)$ também é um grupo (a lei de composição interna de H é a mesma de G , só que restrita a H).

Observação 3. : Seja $(H, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$, então:

- a) $e_H = e_G$, ou seja, o elemento neutro de H é o mesmo de G . De fato, indiquemos por e o elemento neutro de G e por e_H o elemento neutro de H . Temos que $e_H * e_H = e_H$, pois e_H é o elemento neutro de H . Por outro lado, $e_H * e = e_H$, pois e é o elemento neutro de G .

Comparando as duas equações, obtemos $e = e_H$, ou seja, o elemento neutro é único.

b) $b'_H = b'$, ou seja, o simétrico de b em H é o mesmo que de b em G . Tomemos agora um elemento $b \in H$ e indiquemos por b' e por b'_H os simétricos de b respectivamente no grupo G e no grupo H . Como $b'_H * b = e_H = e = b' * b$, concluímos que $b'_H = b'$.

*Proposição 5: Seja $(G, *)$ um grupo. Para que um subconjunto não vazio $H \subset G$ seja um subgrupo de G é necessário e suficiente que para quaisquer $a, b \in H$ implica que $a * b' \in H$, onde b' é o simétrico de b .*

Demonstração: Vamos considerar que $(H, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$. Sejam a, b elementos arbitrários de H . Por hipótese, H é um grupo, então $a, b' \in H$. Pelo item (ii) temos que $a * b' = a * (b')' \in H$.

Reciprocamente, suponhamos que para quaisquer $a, b \in H$ tem-se que $a * b' \in H$. Como $H \neq \emptyset$ existe $a \in H$. Então a hipótese nos assegura que $e = a * a' \in H$. Dado $b \in H$, usando a hipótese e a conclusão anterior de que $e \in H$, temos $b' = e * b' b' \in H$. Agora, sejam $a, b \in H$. Devido ao que acabamos de deduzir podemos afirmar que $b' \in H$. Daí

$$a * (b')' = a * b \in H$$

em consequência de nossa hipótese. Logo, a lei de composição interna de G é fechada em H . Por último, sejam $a, b, c \in H$, segue que $a, b, c \in G$. Sendo G um grupo é assegurada a associatividade, ou seja,

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

o que mostra que a associatividade da lei de composição também é válida em H . Portanto, H é um grupo como queríamos. ■

Exemplo 16: Como $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo e $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, temos que $(\mathbb{Z}, +)$ subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$. Do mesmo modo, $(\mathbb{Q}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$, que é subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$.

Exemplo 17: Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, temos que $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, que é subgrupo de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Exemplo 18: $(M_{n \times n}(\mathbb{Z}), +)$ é subgrupo de $(M_{n \times n}(\mathbb{Q}), +)$, que é subgrupo de $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +)$, que por sua vez é subgrupo de $(M_{n \times n}(\mathbb{C}), +)$.

Exemplo 19: $(GL_n(\mathbb{Q}), \cdot)$ é subgrupo de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$, que é subgrupo de $(GL_n(\mathbb{C}), \cdot)$.

Exemplo 20: $\{e\}$ e G são subgrupos de um grupo G , denominados subgrupos triviais.

Exemplo 21: $(n\mathbb{Z}, +)$ com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Exemplo 22: Sendo G um grupo arbitrário. O subconjunto

$$Z(G) = \{x \in G : xg = gx, \quad \forall g \in G\}$$
é um subgrupo de G , denominado centro de G .

Exemplo 23: $(R_n, \circ)$ é subgrupo de $(D_n, \circ)$, que é subgrupo de $(S_n, \circ)$, que por sua vez é subgrupo de $(Bij(\mathbb{N}), \circ)$.

3.6.1. Classes Laterais e o Teorema de Lagrange

Vamos considerar aqui um subgrupo não trivial H do grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Se isso ocorre, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ se e somente se, } a - b \in \mathbb{Z}.$$

Esse fato estabelece uma correspondência entre os subgrupos de $\mathbb{Z}$ e as relações de congruência, módulo n , sobre $\mathbb{Z}$.

Esse fato pode ser generalizado para um grupo arbitrário $(G, *)$ e para um subgrupo arbitrário H de G

Proposição 6: (i) A relação $\approx$ sobre G definida por " $a \approx b$ se, e somente se, $a^{-1} \in H$ " é uma relação de equivalência. (ii) Se $a \in G$, então a classe de equivalência determinada por a é o conjunto $aH = \{ah \mid h \in H\}$.

Demonstração: (i)

Como $e = a^{-1}a \in H$, então $a \approx a$, e, portanto vale a reflexividade para $\approx$. Se $a \approx b$, então $a^{-1}b \in H$; mas sendo H um subgrupo de G , então $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$. Isso mostra que $b \approx a$, e, portanto, que a simetria também vale para $\approx$. Suponhamos que $a \approx b$ e $b \approx c$; então $a^{-1}b, b^{-1}c \in H$; daí $(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c \in H$, e, portanto, $a \approx c$ e a transitividade também é válida.

(ii)

Seja $\bar{a}$ a classe de equivalência do elemento a . Se $x \in \bar{a}$, então $x \approx a$, ou seja, $x^{-1}a \in H$. Portanto $x^{-1}a = h$, para um conveniente elemento $h \in H$. Daí $x = ah^{-1}$ e portanto, $x \in aH$, uma vez que $h^{-1} \in H$. Por outro lado, se $x \in aH$, então $x = ah$, para algum $h \in H$. Daí, $x^{-1}a = h^{-1} \in H$ e, portanto, $x \approx a$ e $x \in \bar{a}$.

Dessas conclusões, temos que $\bar{a} = aH$.

■

Definição 5: Para cada $a \in G$, a classe de equivalência aH definida pela relação $\approx$ introduzida na proposição anterior é chamada classe lateral à direita, módulo H , determinada por a .

De maneira análoga se demonstra que a relação $\cong$ definida por “ $a \cong b$ se, e somente se, $ab^{-1} \in H$ ” também é uma relação de equivalência sobre o grupo G . Neste caso, a classe de equivalência de um elemento $a \in G$ é o subconjunto $Ha = \{ha \mid h \in H\}$, chamado classe lateral à esquerda, módulo H , determinada por a . Se G for comutativo, $aH = Ha$, para qualquer $a \in G$.

Nesta teoria, é indiferente trabalharmos com classes laterais à direita ou à esquerda. Neste trabalho, usaremos as classes laterais à esquerda.

Exemplo 24: No grupo multiplicativo $G = \{1, -1, i, -i\}$ consideremos o subgrupo $H = \{1, -1\}$. As classes laterais neste caso são:

$$\begin{aligned} 1H &= \{1 \cdot 1, 1 \cdot (-1)\} = \{1, -1\} \\ (-1)H &= \{(-1) \cdot 1, (-1) \cdot (-1)\} = \{-1, 1\} \\ iH &= \{i \cdot 1, i \cdot (-1)\} = \{i, -i\} \\ (-i)H &= \{(-i) \cdot 1, (-i)(-1)\} = \{-i, i\}. \end{aligned}$$

Exemplo 25: Considere $G = S_3 = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$ e o subgrupo $H = \{e, a, a^2\}$, então as classes laterais são:

$$eH = \{ee, ea, ea^2\} = \{e, a, a^2\}$$

$$\begin{aligned}
aH &= \{ae, aa, aa^2\} = \{a, a^2, e\} \\
a^2H &= \{a^2e, a^2a, a^2a^2\} = \{a^2, e, a\} \\
bH &= \{be, ba, ba^2\} = \{b, ba, ba^2\} \\
baH &= \{bae, baa, baa^2\} = \{ba, ba^2, b\} \\
ba^2H &= \{ba^2e, ba^2a, ba^2a^2\} = \{ba^2, b, ba\}.
\end{aligned}$$

Definição6: A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda é o índice de H em G , é denotamos por $(G : H)$.

O índice de H em G também é a cardinalidade do conjunto das classes laterais à direita de H em G , pois a aplicação ψ abaixo é uma bijeção.

$$\begin{aligned}
\psi: \{\text{classes laterais à esquerda}\} &\rightarrow \{\text{classes laterais à direita}\} \\
aH &\mapsto Ha^{-1}.
\end{aligned}$$

Proposição7: Seja H um subgrupo de G . Então duas classes laterais quaisquer módulo H são subconjuntos de G que têm a mesma cardinalidade

Demonstração: Dadas duas classes laterais aH e bH , temos que mostrar que é possível construir uma aplicação bijetora $f: aH \rightarrow bH$. Lembrando a forma natural dessas classes, iremos definir f da seguinte maneira: $f(ah) = bh$, para qualquer $h \in H$. Temos:

- *Injetora:* Se $h, h_1 \in H$ e $f(ah) = f(ah_1)$, então $bh = bh_1$. Mas, como todo elemento de G é regular, $h = h_1$.
- *Sobrejetora:* Se $y \in bH$. Então $y = bh$, para algum $h \in H$. Tomando $x = ah \in aH$, então $f(x) = f(ah) = bh = y$.

■

Proposição8: Teorema de Lagrange. Seja H um subgrupo de um grupo finito G . Então

$$o(G) = (G : H)o(H),$$

e portanto a ordem do subgrupo H divide a ordem do grupo G .

Demonstração: Suponhamos $(G : H) = r$ e seja $\{a_1H, a_2H, \dots, a_rH\}$ são as classes laterais de G módulo H . Então, devido a proposição 6, $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_rH$ e $a_iH \cap a_jH \neq \emptyset$, sempre que $i \neq j$. Mas, devido a proposição anterior, o número de elementos de cada umas das classes laterais é igual ao número de elementos de H , ou seja, é igual a $o(H)$. Portanto:

$$o(G) = o(H) + o(H) + o(H) + \dots + o(H)$$

em que o número de parcelas é $r = (G : H)$. Donde:

$$o(G) = (G : H)o(H)$$

e a ordem de G divide a ordem de H .

É bom citar que a demonstração feita anteriormente não foi a mesma feita por Lagrange, pois, na época de Lagrange, o conceito geral de grupo não havia ainda sido formulado.

3.6.2 Subgrupos Normais

Vimos que a questão que levou Galois a noção de grupo era a da resolubilidade das equações por radicais. Segundo Domingues e Iezzi (1982), Galois associou a cada equação um grupo de permutações de raízes e conseguiu vincular a resolubilidade a uma propriedade desse grupo. Os grupos com essa propriedade são chamados atualmente de *grupos solúveis*. O conceito de grupo solúvel envolve um conceito preliminar, o de *subgrupo normal*, que Galois também teve de criar. Na linguagem algébrica moderna, um grupo G se diz solúvel se é possível encontrar uma sucessão finita de $G_0, G_1, G_2, \dots, G_n$ tais que:

- $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n = \{e\}$;
- G_{i+1} é subgrupo normal de G_i , para $i = 0, 1, 2, \dots, n$;
- O grupo quociente $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ é abeliano.

Deixamos claro aqui que o conceito de grupo solúvel na teoria das equações não serão explorados aqui, devido ao caráter deste trabalho.

Definição 7: Um subgrupo N de um grupo G é chamado subgrupo normal se, para todo $g \in G$, se verifica a igualdade

$$gN = Ng$$

ou seja, se a classe lateral à direita, módulo N , determinada por g , é igual a classe lateral à esquerda, módulo N , determinada por g , para qualquer $g \in G$.

Exemplo 26: Se G é abeliano, então todo subgrupo de G é normal.

Exemplo 27: Consideremos o grupo $S_3 = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$ e o subgrupo $H = \{e, a, a^2\}$. H é normal, pois:

$$\begin{aligned} eH &= \{e, a, a^2\} = He \\ aH &= \{a, a^2, e\} = Ha \\ a^2H &= \{a^2, e, a\} = Ha^2 \\ bH &= \{b, ba, ba^2\} = Hb \\ (ba)H &= \{ba, ba^2, b\} = H(ba) \\ (ba^2)H &= \{ba^2, b, ba\} = H(ba^2). \end{aligned}$$

Proposição 9: Seja N um subgrupo normal de G . Então, para quaisquer $a, b \in G$, vale a igualdade $(aN)(bN) = (ab)N$.

Demonstração: Seja $x \in (aN)(bN)$. Então, devido à definição de produto de subconjuntos, $x = uv$, em que $u \in aN$ e $v \in bN$. Portanto, $u = an_1$ e $v = bn_2$, para convenientes $n_1, n_2 \in N$; daí, $x = (an_1)(bn_2) = a(n_1b)n_2$. Como porém, por hipótese, $Nb = bN$ e $n_1b \in Nb$, então $n_1b = bn_3$, para $n_3 \in N$. Donde $x = a(n_1b)n_2 = a(bn_3)n_2 = (ab)n_3n_2$. Como $n_3n_2 \in N$, conclui-se que $x \in (ab)N$. Assim, fica provado que $(aN)(bN) \subset (ab)N$.

Seja $x \in (ab)N$. Então, $x = (ab)n$, para algum $n \in N$. Mas, podemos introduzir o elemento neutro da seguinte maneira: $x = (ae)(bn)$. Como $e \in N$, então $ae \in aN$. Por outro lado, $bn \in bN$. De onde $x = (ab)n = (ae)(bn) \in (aN)(bN)$. Assim fica demonstrado que $(ab)N \subset (aN)(bN)$. Das conclusões parciais, temos que $(ab)N = (aN)(bN)$. ■

Proposição 10: Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G . Então o conjunto das classes laterais, com a operação definida por $(aN)(bN) = (ab)N$, é um grupo.

Demonstração:

- $((aN)(bN))(cN) = (ab)N(cN) = ((ab)cN) = (a(bc)N) = (aN)((bN)(cN))$
- $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$

- $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1})N(aN)$.
Portanto, o conjunto das classes laterais é um grupo.

Definição 8: Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G . O grupo das classes laterais e dito grupo quociente de G por N e denotado por $\frac{G}{N}$.

3.7. HOMOMORFISMOS E ISOMORFISMOS

3.7.1 Homomorfismos de Grupos

Nesta seção, serão tratadas as aplicações entre grupos que preservam as leis de composição interna destes grupos. Tais aplicações são chamadas de homomorfismos de grupos.

Definição 9: Sejam $(G, \cdot)$ e $(H, *)$ grupos. Um homomorfismo de G em H é uma aplicação $f: G \rightarrow H$ que satisfaz

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Quando se trata de homomorfismo de grupos, é comum denotar as leis de composição interna dos dois grupos com o mesmo símbolo, ou seja, tratamos com $(G, \cdot)$ e $(H, \cdot)$, lembrando que “ $\cdot$ ” pode designar operações distintas em G e H . Isso causa confusão, pois quando $f: G \rightarrow H$ é homomorfismo, e olhamos para a igualdade

$$f(ab) = f(a)f(b),$$

tem que ficar claro que ab é operação em G e $f(a)f(b)$ é operação em H .

Proposição 11: Sejam $(G, \cdot)$ e $(J, \cdot)$ dois grupos cujos elementos neutros são e e u , respectivamente, e $f: G \rightarrow J$ um homomorfismo. Então $f(e) = u$.

Demonstração: Sendo u o elemento neutro em J , $uf(e) = f(e)$. Como e é o elemento neutro de G , temos que $e = ee$. Agora, usando a hipótese de que f é um homomorfismo obtemos,
 $uf(e) = f(e) = f(ee) = f(e)f(e)$,
 donde $f(e) = u$.



Proposição 12: Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Então, para todo $a \in G$, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

Demonstração: Visto que f é um homomorfismo e pela Proposição 10, $f(e) = u$, temos que

$$u = f(e) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}).$$

Da mesma forma, $f(a^{-1})f(a) = u$. Logo $f(a^{-1})$ é o simétrico de $f(a)$, isto é $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$. ■

Proposição 13: Se H é um subgrupo de G , então $f(H)$ é um subgrupo de J .

Demonstração: Primeiramente, podemos ler essa proposição pode ser lida como: um homomorfismo de G em J transforma os subgrupos de G em subgrupos de J .

Lembremos que $f(H) = \{f(x) | x \in H\}$.

a) $e \in H \Rightarrow f(e) = u \in f(H) \Rightarrow f(H) \neq \emptyset$.

b) $c, d \in f(H) \Rightarrow (\exists a, b \in H | c = f(a)ed = f(b)) \Rightarrow cd^{-1} = f(a)(f(b))^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1})$. Como $ab^{-1} \in H$, pois H é subgrupo de G , então $cd^{-1} \in f(H)$. ■

Proposição 14: Sejam $(G, \cdot), (J, \cdot)$ e $(L, \cdot)$ grupos quaisquer, $f: G \rightarrow J$ e $g: J \rightarrow L$, homomorfismos de grupos. Então $g \circ f: G \rightarrow L$ também é um homomorfismo de grupos.

Demonstração: Para quaisquer $a, b \in G$, temos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(ab) &= g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a)(g \circ f)(b). \end{aligned}$$

Portanto, $g \circ f$ é um homomorfismo. ■

Definição 9: Sejam $(G, *)$ e (J, Δ) grupos e $f: G \rightarrow J$ um homomorfismo. Chama-se de *núcleo* de f e denota-se por $N(f)$ o seguinte subconjunto de G :

$$N(f) = \{x \in G | f(x) = u\},$$

onde u indica o elemento neutro de J .

Proposição 15: Seja $f: G \rightarrow J$ um homomorfismo de grupos. Então:

- a) $N(f)$ é um subgrupo normal de G ;
- b) f é um homomorfismo injetor se, e somente se $N(f) = \{e\}$ (e é o elemento neutro de G).

Demonstração:

- a) Como $f(e) = u$, então $e \in N(f)$, o que mostra que $N(f) \neq \emptyset$. Por outro lado, se $a, b \in N(f)$, então $f(a) = f(b) = u$. Onde

$$\begin{aligned} f(ab^{-1}) &= f(a)f(b^{-1}) = f(a)(f(b))^{-1} \\ &= uu^{-1} = u. \end{aligned}$$

Isto nos garante que $ab^{-1} \in N(f)$.

Para provar que $N(f)$ é normal, temos que mostrar que $xN = Nx$, $\forall x \in G$, onde $N = N(f)$.

$$y \in xN \Rightarrow \exists n \in N \mid y = xn \Rightarrow \exists n \in N \mid y = (xnx^{-1})x.$$

Mas

$$f(xnx^{-1}) = f(x)f(n)f(x^{-1}) = f(x)u(f(x))^{-1}$$

o que significa que $xnx^{-1} \in N$. Portanto

$$y = (xnx^{-1})x \in Nx.$$

Mostramos assim que $xN \subset Nx$. É óbvio que também $Nx \subset xN$, pelo mesmo caminho.

- b) $(\Rightarrow) a \in N(f) \Rightarrow f(a) = u = f(e)$. Como f é injetora, então $a = e$.

$$(\Leftarrow) \forall a, b \in G, f(a) = f(b) \Rightarrow f(a)(f(b))^{-1} = u \Rightarrow$$

$$f(ab^{-1}) = u \Rightarrow ab^{-1} \in N(f) = \{e\} \Rightarrow ab^{-1} = e \Rightarrow a = b.$$

■

3.7.2 Isomorfismos de Grupos

Consideramos G e J dois grupos. Procurar por uma bijeção entre G e J implica que G e J devem possuir “o mesmo tamanho”. Se, além disso, tivermos que $f(xy) = f(x)f(y)$ para quaisquer x, y , significa que não importa se primeiro combinamos dois elementos em G e depois enviamos para J por f , ou se primeiro enviamos separadamente por f os

elementos x e y para G , para depois combinar suas imagens, o resultado é o mesmo. Se existir tal f , concluímos que G é de fato J disfarçado. Note que a função inversa $f^{-1}: G \rightarrow J$ é também um isomorfismo, assim nossa definição é simétrica, isto é, dizer que G e J são isomorfos, equivalente a dizer que J e G são isomorfos.

Definição 10: Sejam $(G, *)$ e (J, Δ) grupos. Dizemos que uma aplicação $f: G \rightarrow J$ é um isomorfismo do grupo G no grupo J se, e somente se:

- a) f é bijetora;
- b) f é um homomorfismo de grupos.

Se $G = J$, um isomorfismo $f: G \rightarrow G$ chama-se automorfismo de G .

Proposição 16: Se f é um isomorfismo do grupo G no grupo J , então f^{-1} é um isomorfismo do grupo J no grupo G .

Demonstração: Faremos a demonstração utilizando a notação multiplicativa para denotar a composição.

Como f é bijetora, então f^{-1} também é bijetora. Sejam $y_1 = f(x_1) \in J$ e $y_2 = f(x_2) \in J$. Temos:

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1 \cdot y_2) &= f^{-1}(f(x_1) \cdot f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 x_2)) = x_1 x_2 \\ &= f^{-1}(y_1) \cdot f^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

■

Quando existe um isomorfismo $f: G \rightarrow J$, também existe um isomorfismo de J em G que é a aplicação f^{-1} . Por isso dizemos que G e J são grupos isomorfos. O isomorfismo f^{-1} é chamado isomorfismo inverso de f .

Quando dois grupos são isomorfos, denotamos por $G \simeq J$.

Teorema 1 : (Teorema dos Isomorfismos para grupos). Sejam $f: G \rightarrow L$ um homomorfismo de grupos e $N(f)$ o núcleo de f . Então

$$\frac{G}{N(f)} \simeq Im(f).$$

Demonstração: Consideremos a relação $aN \rightarrow f(a)$ de $\frac{G}{N}$ em J . Esta aplicação é injetora pois

$aN = bN \Leftrightarrow a^{-1}b \in N \Leftrightarrow f(a^{-1}b) = u \Leftrightarrow (f(a))^{-1}f(b) = u \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Daremos o nome de δ para essa aplicação.

Dado $y \in L$, existe $x \in G$ de modo que $f(x) = y$. Tomando a classe xN , teremos $\delta(xN) = f(x) = y$. Então δ também é sobrejetora.

Por fim: $\delta[(aN)(bN)] = \delta[(ab)N] = f(ab) = f(a)f(b) = \delta(aN)\delta(bN)$. ■

3.8. TEOREMA DE CAYLEY

Como visto, a natureza dos grupos varia amplamente: por exemplo, há grupos de números, grupos de permutações e grupos de matrizes, entre outros. O objetivo central desta seção é dar uma demonstração de que, a despeito disso, há um certo elo entre todos eles. Ocorre que, como mostraremos, todo grupo é isomorfo a um conveniente subgrupo de permutações. O teorema de Cayley, que garante esse fato, é um exemplo do que se chama em matemática de teorema de representação. O fato de todo grupo poder ser representado por um grupo de permutações tem a vantagem de dar um certo caráter de concretude ao grupo em estudo, por mais abstrato que este seja.

Seja G um grupo. Para cada $g \in G$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} T_g: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gx. \end{aligned}$$

Essa aplicação T_g é chamada de translação.

Proposição 18: Seja G um grupo. Para cada $g \in G$, a translação

$$\begin{aligned} T_g: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gx, \end{aligned}$$

é uma T_g é uma bijeção, ou seja T_g é uma permutação dos elementos de G .

Demonstração: Sejam $x, y \in G$ tais que $T_g(x) = T_g(y)$. Temos que, como $gx = gy$ implica que $x = y$, toda translação é uma aplicação injetora. Por outro lado, para todo $z \in G$, vale a igualdade $z = g(g^{-1}z)$. Logo, para cada $z \in G$ (contradomínio) tome $x = g^{-1}z \in G$ (domínio) e

assim $T_g(x) = z$ e a translação também é sobrejetora. Portanto, temos que T_g é uma bijeção. ■

Adotando-se a notação $T(G)$ para indicar o conjunto das translações em G , então a proposição anterior nos diz que $T(G) \subset \text{Bij}(G)$.

Proposição 19: Seja G um grupo.

1. *A composição de translações é uma lei de composição sobre $T(G)$.*
2. *A inversa da translação T_g é a translação $T_{g^{-1}}$.*
3. *$T(G)$ é um subgrupo do grupo $(\text{Bij}(G), \circ)$ das permutações dos elementos de G .*

Demonstração:

- a) Sejam T_a e T_b translações de G . Então

$$(T_a \circ T_b)(x) = T_a(T_b(x)) = T_a(bx) = a(bx) = (ab)x = T_{ab}(x), \quad \forall x \in G,$$
 o que mostra que $T_a \circ T_b = T_{ab} \in T(G)$.
- b) Notemos que, para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ e

$$(T_{a^{-1}} \circ T_a)(x) = T_{a^{-1}}(ax) = a^{-1}(ax) = x, (T_a \circ T_{a^{-1}})(x) = T_a(a^{-1}x) = a(a^{-1}x), \quad \forall x \in G.$$
 Isso significa que T_a é inversível e $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$, para todo $a \in G$ e $(T_a)^{-1} \in T(G)$.
- c) Sejam T_a e $T_b \in T(G)$. Dos itens (1) e (2), temos que

$$T_a \circ (T_b)^{-1} = T_a \circ T_{b^{-1}} = T_{ab^{-1}}, \text{ para todo } a, b \in G.$$
 Onde, $T_a \circ (T_b)^{-1} \in T(G)$ e, portanto, $T(G)$ é um subgrupo de $\text{Bij}(G)$. ■

Teorema 2: Todo grupo é isomorfo a um subgrupo de um grupo de permutações.

Demonstração: Seja G um grupo e considere o grupo de permutações $\text{Bij}(G)$. Defina

$$T: G \rightarrow T(G), \text{ onde } T_g: G \rightarrow G \\ g \mapsto T_g x \mapsto gx.$$

- Primeiro vamos provar que T é homomorfismo de grupos. De fato, dados $g_1, g_2 \in G$, temos:

$$T_{g_1 g_2}(x) = g_1 g_2 x = T_{g_1}(T_{g_2}(x)) = (T_{g_1} \circ T_{g_2})(x),$$

para todo $x \in G$. Isso mostra que $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$, e então $T(g_1 g_2) = T(g_1) \circ T(g_2)$. Portanto, T é homomorfismo de grupos.

- Afirmamos que T é homomorfismo injetor.
Se $g, h \in G$ e $T(g) = T(h)$, então $T_g = T_h$. Portanto, $T_g(x) = T_h(x)$, para todo $x \in G$, isso implica que, $gx = hx$, para qualquer $x \in G$. Como todo elemento de G é inversível segue que $g = h$, provando que T é injetora.
- $Im(T) = \{T(g) : g \in G\} = \{T_g : g \in G\} = T(G)$. Logo, T é sobrejetora.

Segue que $G \simeq T(G)$, que é subgrupo de $Bij(G)$.

Portanto, G é isomorfo a um subgrupo do grupo de permutações $Bij(G)$. ■

Teorema3: Se G é um grupo finito de ordem n , então G é isomorfo a um subgrupo de S_n .

Demonstração: Se os elementos de G forem enumerados com $1, 2, 3, \dots, n$, então cada permutação de G induz uma permutação dos inteiros $1, 2, 3, \dots, n$. Esse argumento nos fornece um isomorfismo de S_G em S_n e consequentemente, o subgrupo G' de S_G é isomorfo a algum subgrupo G'' de S_n . Como G é isomorfo a G' , que é isomorfo a G'' , e a composição de isomorfismo também é um isomorfismo, temos que G é isomorfo a G'' que é um subgrupo de S_n . ■

É claro que a teoria de Grupos tem muito mais a nos ensinar, mas com o que foi mostrado até aqui já serve de base para tentar usar a

estética, através da simetria, como fonte de acesso ao conhecimento matemático.

4UMA VIA ESTÉTICA DE ACESSO AO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Neste capítulo, faremos uma ligação entre a matemática pura, dada aqui pela Álgebra Moderna, com a Educação Matemática, tentando olhar para a Teoria de Grupos a partir de uma via estética.

Gusmão (2013, p. 100) apresenta uma discussão sobre como, no campo das ciências, o conhecimento moderno teve suas bases estabelecidas pelo trabalho de René Descartes. A partir de Descartes, a verdade somente poderia ser encontrada nas certezas da matemática, da geometria e da lógica (Racionalismo), desprezando “alusões poéticas da literatura ou fantasias das artes visuais”. Concluindo essas questões, a autora aponta:

O conhecimento baseado nos trabalhos de Descartes e no racionalismo que se estabeleceu a partir do século XVII foi inegavelmente promissor para a humanidade, porém, no momento atual nos solicita um entendimento mais amplo da vida e do mundo, e, para tal, exige-se a integração entre razão e emoção para a constituição do conhecimento. [...] Nesse sentido, entendemos que a razão, representada pelas leis matemáticas, necessita se integrar a um saber primeiro que é a educação do sensível, traduzida pela intuição, sensibilidade, imaginação, características primordiais da arte. (GUSMÃO, 2013, p. 100)

Percebemos, assim, que para oracionalismo⁶⁵ não se considerava como saber construído, tampouco reconhecido, aquele proveniente da utilização dos sentidos humanos. Contudo, a chegada da modernidade – em termos históricos e sociais – e de todas as transformações que ela nos propicia, nos mostra que não podemos mais considerar apenas a razão como meio de se chegar a verdade, consideração essa que vale também para o conhecimento em matemática.

⁶⁵ O Racionalismo é a corrente filosófica que iniciou como a definição do raciocínio como uma operação mental

Surgem aí, questões relacionadas à emoção, ao belo e à estética, conceitos ligados à filosofia que são discutidos neste trabalho para apresentar uma via estética de acesso a conhecimentos matemáticos.

Considerando os objetivos e o contexto de realização deste trabalho, fizemos estudos a partir dos textos de Cifuentes (2003, 2005, 2009, 2010, 2011) e Gusmão (2013) pois os consideramos interessantes pelas discussões que despertam e bastante pertinentes as nossas intenções de pesquisa.

A busca da compreensão do conceito de **estética** pode iniciar pelo significado da palavra: a origem é grega, de *aisthesis*, e tem conotação adjetiva de beleza física, indicando a ideia de percepção e sensação ou substantiva referindo-se às características formais de determinado período histórico. Passando para uma noção intuitiva, podemos ligar o conceito de **estética** à beleza, à perfeição, à correção e à simetria. Já partindo para um significado mais sistematizado, **estética** é, na Filosofia, um ramo que se ocupa com o estudo do belo e das emoções, sensações e percepções que a beleza provoca no homem. Utilizaremos, neste trabalho, o conceito proposto por Cifuentes como resultado de seus estudos e pesquisas sobre o tema: “**estética é a ciência do conhecimento sensível e experiência estética é o prazer da apreensão do belo**”. (CIFUENTES, 2005, p. 56).

Estendendo seu conceito refletindo a respeito da matemática, o autor aponta que não se trata apenas da existência de um **olhar estético para a matemática** e sim da existência de um **conteúdo estético na matemática**, incluídos aí os **métodos matemáticos**. “Esse conteúdo está ligado ao que pode ser ‘apercebido’ pelo intelecto”, sendo considerados como valores estéticos da matemática, por exemplo: “a perfeição, a simetria, a forma, o contexto, o contraste, a ordem, o equilíbrio, a simplicidade e a abstração, também a liberdade” (CIFUENTES, 2005, p. 58). Ainda de acordo com o autor, a possibilidade descrita de “aperceber pelo intelecto” pode ser natural e também pode ser desenvolvida, um desenvolvimento que perpassa a constituição de uma via estética de acesso ao conhecimento matemático, como a que mostramos, neste trabalho, de trabalhar conceitos ligados à simetria para a compreensão de conteúdos matemáticos de Álgebra.

Conceituar **beleza**, noção muito ligada, como vimos, ao conceito de estética, é tarefa complexa pois suscita diferentes compreensões vindas de diferentes áreas do conhecimento. É uma tarefa filosófica que ainda busca consenso. Ainda assim, podemos defini-la

como algo que provoca algum tipo de emoção. Segundo Huntley, citado por Gusmão:

Na matemática, ela [a beleza] pode compor-se de surpresa, admiração, pavor ou de expectativa concretizada, perplexidade solucionada, uma sensação de profundezas insondáveis e mistérios; ou de economia dos meios para chegar a um resultado impressionante. [...] A sensibilidade à beleza na matemática é contagiosa. Ela é contraída, e não ensinada. (HUNTLEY *apud* GUSMÃO, 2013, p. 109)

Gusmão discute também como a **experiência estética** é um sinônimo de **experiência da beleza**, nos remetendo às sensações e emoções que temos quando tomamos contato com obras de arte na área da música, do cinema, da pintura etc.. Aponta que essa experiência estética é algo que vai sendo construído, que depende de um aprendizado de códigos estéticos que nos leva a um refinamento sensível, acrescentando, baseada em Cifuentes (2011) uma importante consideração a respeito das atividades matemáticas:

Parece, num preciso momento, que são nas produções artísticas que estão os preceitos da “experiência estética” ou “sentimento estético”. No entanto, as atividades mais racionais, nesse caso, as atividades matemáticas estão impregnadas pelo sentimento estético, ou seja, envolvem além de lógica e linguagem, também intuição, imaginação e sensibilidade. Estas últimas estão intimamente ligadas à experiência estética. A lógica lida com relações funcionais, regras, enquanto que a intuição trabalha com relações estruturais, padrões. (GUSMÃO, 2013, p. 109)

Ainda que haja grande influência do modelo cartesiano de pensamento, encontramos diversos exemplos na história da humanidade de integração entre matemática e arte. Assim, olhando para episódios

da nossa história, podemos identificar aspectos que mostram que desde a Antiguidade “a associação entre a matemática e arte constitui-se a base para o conceito de beleza. Essa associação está expressa em algumas proporções consideradas harmoniosas e rítmicas para as duas áreas do conhecimento”. Estas considerações, presente nos estudos de Gusmão (2013, p.110) vão ao encontro dos estudos que mostramos neste trabalho com relação à conceituação intuitiva e matemática da simetria.

Observações interessantes sobre esta questão fazem Fainguelernt & Nunes, citados por Gusmão:

A matemática e a arte nunca estiveram em campos antagônicos, pois desde sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade. Na verdade, podemos observar a influência mútua de uma sobre a outra desde os primeiros registros históricos que temos de ambas. Essas duas áreas sempre estiveram intimamente ligadas, desde as civilizações mais antigas, e são inúmeros os exemplos de sua interação. Muitos povos utilizaram elementos matemáticos na confecção de suas obras: os egípcios com suas monumentais pirâmides e gigantescas estátuas; os gregos com o famoso Parthenon e com seus belíssimos mosaicos; os romanos com suas inúmeras construções com formas circulares, entre elas o Coliseu. (Fainguelernt & Nunes *apud* Gusmão, 2003, p. 101)

Estes exemplos ajudam a ilustrar também a presença e a utilização da simetria na arte e na matemática.

Para considerarmos a via estética para acesso ao conhecimento matemático, é importante que todas estas questões estejam esclarecidas e que também sejam consideradas outros aspectos relacionados à experiência estética e à estética da matemática.

Intuitivamente, grande parte das pessoas enxerga a matemática como um objeto da razão, que é uma das faculdades humanas fundamentais. Contudo, completando o que discutimos até aqui, é preciso destacar, no âmbito do conhecimento matemático, também a existência da emoção, que nos permite reconhecer o valor das coisas por

meio da percepção, sendo, portanto, também ela uma fonte de conhecimento. Segundo CIFUENTES (2005):

A emoção é uma das faculdades humanas fundamentais, junto com a razão. Enquanto faculdade, ela é uma capacidade intelectual, pois permite a percepção e o reconhecimento de um valor e, portanto, é fonte de conhecimento, o conhecimento sensível. Tradicionalmente, assume-se que o conhecimento matemático é, por natureza, puramente racional, o qual significa que, das principais capacidades do ser humano, a razão e a emoção, consideradas muitas vezes como incompatíveis, a única que lidaria com o conhecimento matemático é a razão. Essa tradição baseia-se na tese, que podemos chamar de platônico-cartesiana, de que os objetos matemáticos são idéias desligadas de toda experiência sensível e que à verdade matemática acede-se pela razão. No entanto, são dimensões da aquisição do conhecimento, em geral, além do racional, também o emocional, através da intuição e da experiência estética, entendendo por **estética** a ciência do conhecimento sensível e por **experiência estética** o prazer da apreensão do belo. (CIFUENTES, 2005, p. 56, grifos do autor)

Ainda de acordo com o autor:

Uma abordagem da matemática levando em conta seus aspectos estéticos permitiria desenvolver a *matemática do erro* ou *da imprecisão*, a qual poderia ser considerada como a matemática do suficiente, complementar da matemática do necessário. (CIFUENTES, 2005, p. 59, grifos do autor)

Com isso, o valor estético se torna fundamental, e, como foi apresentado nos capítulos anteriores, o conhecimento matemático não foi somente objeto puro da razão, senão também da emoção, manifestando-se esta através da intuição matemática e da apreciação estética.

De acordo com Gusmão (2013), componentes estéticos da matemática – como a simetria – podem ser disparadores de uma discussão teórica sobre uma estética da matemática e também, como aplicação pedagógica, podem iniciar os alunos em uma experiência estética que os levem a apreciarem a beleza matemática, potencializando a construção do conhecimento matemático.

Com relação à delimitação de uma estética da matemática, Cifuentes (2003) aponta que uma das contribuições essenciais para sua realização foi dada por François Le Lionnais⁶⁶, em 1965, quando esboçou uma classificação de fatos e métodos matemáticos tendo como base categorias culturais da história da arte, tais como o classicismo e o romantismo.

Classicismo caracteriza-se fundamentalmente pela elegância e a ordem, enquanto que o romantismo pela loucura e o caos. A beleza clássica unifica mostrando conexões inesperadas, enquanto que a beleza romântica desperta emoções violentas. **São resultados de uma beleza clássica**, por exemplo, os seguintes: i) na geometria plana, o fato de que as três alturas (ou as três mediatrizes ou as três medianas) de um triângulo sejam concorrentes; ii) no cálculo diferencial e integral, o chamado teorema fundamental do cálculo que relaciona a tangente a uma curva com sua área. **São resultados de uma beleza romântica** os seguintes: i) a teoria do infinito de Cantor, a qual deroga um dos princípios fundamentais da matemática grega de que o todo é maior que a parte; ii) as propriedades caóticas dos fractais que derrogam princípios de regularidade e simetria. (CIFUENTES, 2003, p. 61, grifos nossos)

⁶⁶ *François Le Lionnais* foi um matemático e engenheiro químico francês. Nasceu em Paris, em 3 de outubro de 1901 e morreu em 13 de março de 1984 em Boulogne-Billancourt. Foi um dos fundadores do *Oulipo* (*Ouvroir de Littérature Potentielle*), uma corrente literária formada por escritores e matemáticos, cuja proposta era a libertação da literatura.

Ainda de acordo com autor, o método de demonstração por indução corresponde ao classicismo (à beleza clássica) e o método por redução ao absurdo corresponde ao romantismo (à beleza romântica).

A discussão que se apresenta aqui – e que pode ser ampliada – aponta que a estética da matemática é uma componente importante a ser considerada no acesso a conhecimentos matemáticos de diversos ramos da matemática e em diferentes situações de ensino e aprendizagem. Concordamos, portanto, com Gusmão (2013, p. 114) quando diz que “os componentes estéticos da matemática podem ser considerados pontos de partida para uma discussão teórica de uma estética da matemática, bem como para uma experiência estética que permita ao aluno apreciar o ensino da beleza em matemática”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A simetria, se considerada componente estético da matemática, é importante no acesso a diversos conhecimentos matemáticos. Nesta pesquisa, mostramos um trabalho realizado no âmbito da Álgebra Moderna na forma de um estudo sobre Teoria dos Grupos. Trouxemos, para a discussão, componentes ligados aos episódios da história da matemática. Vimos como, historicamente, a Teoria dos Grupos surgiu graças a sucessivos “fracassos” matemáticos sobre a existência de um método universal para solução de equações quinticas.

Podemos dizer que há algo de belo nisso: os matemáticos são humanos, que vivem vidas humanas normais, e isso significa que a criação de novos conceitos matemáticos é também um processo social, envolvendo tanto a racionalidade quanto a emoção humanas. Assim, a razão e a emoção caminham juntas no universo matemático.

É tão importante na matemática o olhar estético as teorias e elementos, quanto o pensar racionalmente, e essas duas estão sempre interligadas.

Procuramos apresentar, neste trabalho, questões postas em discussão na pesquisa apresentada por Gusmão, bem sintetizadas na seguinte citação:

A matemática e a arte são ingredientes importantes em um processo criativo e artístico e os vínculos entre esses dois campos de conhecimento podem ser observados em toda parte, por exemplo, em certas equações matemáticas ou em relações geométricas, na regularidade das formas, nas proporções matemáticas, nas obras de arte, na música, na poesia, nas construções arquitetônicas, nas formas da natureza, entre outros. (GUSMÃO, 2013, p. 103)

Exemplos disso são os diversos encontros entre simetria e natureza e simetria e produção humana, dentre elas, as relacionadas à Matemática.

Sendo essa uma pesquisa realizada no âmbito da Educação Matemática, entendemos que uma especial conclusão a respeito de sua execução, está presente na seguinte citação de Cifuentes:

A importância da elaboração de uma estética da matemática consiste em dar um embasamento teórico para discussão sobre a diferença, aparentemente sutil, entre **ensinar** matemática e **ensinar a apreciar** a matemática, o que poderia traduzir-se em analisar a diferença entre conteúdo **científico** e conhecimento **estético** da matemática ou, do ponto de vista epistemológico, entre o conhecimento científico e conhecimento estético da matemática. [...] Esse embasamento visará a educação do “olhar” e da intuição matemática na formação de professores de matemática. (CIFUENTES, 2003, p. 60, grifos do autor)

É nesse sentido que esta pesquisa foi construída. No âmbito da Educação Matemática em estreita fronteira com a Matemática, mostramos um viés estético, apoiado em elementos históricos e filosóficos, para acesso a um conhecimento matemático relacionado à Teoria de Grupos, em Álgebra Moderna. Estabelecemos, então, uma relação entre matemática e arte.

Será interessante fazer em pesquisas futuras uma relação entre estética, vista com os olhos da educação matemática, com outros conceitos da matemática, talvez ainda mais abstratos que a teoria de Grupos, a fim de ressaltar a importância do olhar sensível para o mundo, seja ele concreto ou não.

Acredito que há muito mais a ser estudado, tanto com relação a história, a teoria de grupos e principalmente sobre a via estética, e desejo me aprofundar nesses conceitos em trabalhos futuros, onde minha experiência e meus conhecimentos estarão mais maduros.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: EdgardBlucher, 1996.

CIFUENTES, José Carlos. Fundamentos estéticos da matemática: da habilidade à sensibilidade. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Filosofia da Educação Matemática: concepções e movimento**. Brasília: Editora Plano, 2003.

_____. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

_____. Do conhecimento matemático à Educação Matemática: uma “Odisséia Espiritual”. In: CLARETO, Sônia M.; DETONI, Adlai R.; PAULO, RosaM. (orgs). **Filosofia, Matemática e Educação Matemática: compreensões dialogadas**. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2010.

_____. **O “Salto Arquimediano”**: um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático. *Scientiae Studia* (USP), vol. 9, 2011.

CONTADOR, Paulo R. M. **Matemática, uma breve história**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

DONDIS, Donis A. **Sintaxe da linguagem visual**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

DOMINGUES, Hygino H.; Iezzi, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GARCIA, A. LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GUSMÃO, Lucimar Donizete. **Educação Matemática pela arte: uma defesa da educação da sensibilidade no campo da matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR.

JANESCH, Oscar Ricardo. **Álgebra II**. 2ª ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CCFM, 2012.

LOPES, M. L. L.; NASSER, L. **Geometria: na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

MABUCHI, S. T. (2000). **Transformações geométricas - a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2000.

RIPPLINGER, H. M. G. **A simetria nas práticas escolares**. 2006. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Estado do Paraná, Curitiba. 2006.

ROHDE, Geraldo M. **Simetria**. São Paulo: Hemus, 1982.

_____. **Simetria: rigor e imaginação**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1997.

SCHATTSCHEIDER, Doris. **M. C. Escher: visions of symmetry**. Londres: Thames & Hudson, 2004.

STEWART, Ian. **Uma história da simetria na matemática**. Trad. Claudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

WEYL, H. **Symmetry**. New Jersey: Princeton University Press, 1952.