UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THAIS CLARA DA COSTA

MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL COM COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

JOINVILLE - SC
2013

THAIS CLARA DA COSTA

MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL COM COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Fernando Deeke Sasse

JOINVILLE - SC
2013

C837m

Costa, Thais Clara da

Método de Galerkin tradicional com computação algébrica/ Thais Clara da Costa. - 2013.

98 p.: il

Bibliografia: f. 87-90

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática. Joinville, 2013.

Orientador: Fernando Deeke Sasse

1. O método de Galerkin tradicional, 2. Métodos de resíduos ponderados. 3. Aplicações físicas. 4. Limitações do método de Galerkin tradicional. I. Sasse, Fernando Deeke. II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Curso de Licenciatura em Matemática. III. Método de Galerkin tradicional com computação algébrica

CDD: 515.35

THAIS CLARA DA COSTA

MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL COM COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Banca Examinadora

Orientador:
Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:
Prof.ª Dr.ª Ligia Liani Barz
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:
Prof. Dr. Rogério de Aguiar
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 25 de junho de 2013.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Leori e Vanir, cuja dedicação permitiu a minha compreensão de que o verdadeiro sucesso é construído com esforço, e que o aprendizado tem um valor o qual não pode ser medido.

À minha irmã Laísa por sua paciência e companhia.

Ao meu namorado Geovane por ter vivenciado comigo passo a passo todos os detalhes deste trabalho e por ter me dado todo o apoio que necessitava nos momentos difíceis.

Aos meus colegas de classe que me acompanharam nesta jornada.

Ao meu orientador Fernando que sempre foi presente e disposto a me auxiliar, permitindo que eu tivesse a oportunidade de realizar este trabalho e me identificar cada vez mais com esta área da matemática.

À todos os meus professores, por todo o aprendizado.

Por fim, agradeço aos professores Marnei, Regina e Ligia, que me ensinaram muito além dos aspectos acadêmicos. Muito Obrigada!

"Wir müssen wissen. Wir werden wissen."
"Nós precisamos saber, e nós iremos saber."

(David Hilbert)

RESUMO

COSTA, Thais Clara da. **Método de Galerkin tradicional com computação algébrica**. 2013. 98 p.. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013.

Este trabalho trata principalmente das aplicações de um determinado método de resíduos ponderados, chamado de método de Galerkin tradicional, para equações diferenciais lineares, usando computação simbólica. Este método produz soluções aproximadas muito acuradas para problemas de valor de contorno com um esforço computacional relativamente pequeno. Mostra-se aqui que uma limitação conhecida do método, relacionada com as matrizes mal condicionadas resultantes para os coeficientes de expansão, pode ser contornada utilizando cálculos aritméticos racionais. Este trabalho também compara quantitativamente o método de Galerkin tradicional com outros métodos de resíduos ponderados, como subdomínio, colocação, mínimos quadrados e momentos. A abordagem adotada neste trabalho consiste em aplicar estes métodos de aproximação relativamente simples para problemas lineares, testando sua acurácia quando comparada com as soluções exatas e/ou numérica. É mostrado que o método de Galerkin tradicional, embora substituído pelo método espectral de Galerkin e método de elementos finitos de Galerkin, ainda pode ser bastante útil para encontrar soluções acuradas para muitos modelos físicos. Em particular, neste trabalho, o método de Galerkin tradicional é aplicado aos problemas ou o fluxo viscoso em um canal e a condução de calor instável. O autor acredita que a principal contribuição deste trabalho é pedagógico, uma vez que consiste na apresentação de uma maneira rápida e fácil de introduzir métodos de resíduos ponderados para qualquer aluno com conhecimentos básicos de cálculo.

Palavras-chave: Método de Galerkin tradicional. Equações diferenciais. Aplicações físicas. Computação algébrica.

ABSTRACT

COSTA, Thais Clara da. **Traditional Galerkin method with algebraic computation**. 2013. 98 p.. Work of Course Conclusion (Graduate Degree in Mathematics) - Santa Catarina State University, 2013.

This work deals mainly with applications of a particular method of weighted residuals, called Galerkin Traditional Method, to linear differential equations, using symbolic computation. This method yields very accurate approximate solutions to boundary value problems with relatively small computational effort. It is shown here that a known limitation of the method, associated with the ill-conditioned resulting matrices for the expansion coefficients, can be circumvented using rational arithmetic computations. This work also compares quantitatively the Traditional Galerkin Method to other weighted residuals methods, such as subdomain, collocation, least-squares and moments. The approach adopted in this work consists in applying these approximative methods to relatively simple linear problems, testing their accuracy by comparing the the exact and/or numerical solutions. It is shown that the Traditional Galerkin Method, although in general superseded by the Galerkin spectral method and Galerkin finite-element methods, can still be quite useful for finding accurate approximate solutions to many physical models. In particular, in this work, the Traditional Galerkin Method is applied the problems or the viscous flow in a channel and the unsteady heat conduction. The author believes that main contribution of this work is pedagogical, since it consists in presenting a quick and easy way to introduce weighted residual methods to any student with the basic university calculus background.

Key-words: Traditional Galerkin method. Differential equations. Applications physical. Algebraic computation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1 Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximação $\tilde{y}_1(x)$. 23
1.2 Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximação $\tilde{y}_2(x)$. 24
1.3 Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximada $\tilde{y}_3(x)$. 25
1.4 Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximada $\tilde{y}_7(x)$. 26
1.5 Erro relativo para $N = 1, 2, 3$. 28
1.6 Erro relativo para $N = 7$ 28
1.7 Solução exata $P_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x)$ e aproximação $\tilde{P}_1(x) = \sqrt{30}(x - x^2)$. 32
1.8 Solução exata $P_2(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x)$ e aproximação $\tilde{P}_{2(\lambda_2)}(x)$. 34
1.9 Solução exata $P_3(x) = \sqrt{2}\sin(3\pi x)$ em comparação com $\tilde{P}_{3(\lambda_2)}$. 36
1.10 Solução exata $P_4(x) = \sqrt{2}\sin(4\pi x)$ e aproximação $\tilde{P}_{4(\lambda_2)}(x)$. 37
1.11 Solução exata $u(x)$ e aproximação $\tilde{u}_3(x)$. 39
1.12 Erro relativo para ao MGT com $N = 3$. 40
1.13 Erro relativo para ao MGT com $N = 6$. 42
1.14 Solução exata $u(x)$ e aproximação $\tilde{u}_6(x)$ para o problema de valor inicial com coeficiente variável. 44
1.15 Erro na solução de Galerkin quanso $N = 6$ no problema de valor de contorno com coeficientes constantes. 44

2.1 Representação de um domínio Ω que foi dividido em N subdomínios Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. 48
2.2 Representação do método da colocação, onde a solução aproximada $\tilde{u}(x)$ é imposta igual à solução exata $u(x)$ nas coordenadas x_i e x_{i+1}. 49
2.3 Erro relativo a cada método estudado. 57
2.4 Solução exata para o problema da difusão e reação e soluções aproximadas perante os métodos da colocação convencional e ortogonal. 61
2.5 Erro relativo para os métodos da colocação convencional e ortogonal. 62
2.6 Solução exata e solução aproximada perante o método da colocação convencional. 64
2.7 Erro no método da colocação convencional. 64
2.8 Erro no método da colocação convencional. 65

3.1 Canal quadrado (A) e seção quadrada (B). 66
3.2 Condução de calor não-estacionária. 70
3.3 Solução aproximada do problema de condução de calor não-estacionária para $N = 1$ (A) e $N = 3$ (B) em comparação com a solução exata (C). 76
3.4 Erro nas soluções aproximadas para o problema de condução de calor não estacionária quando $N = 1$ (A)e $N = 3$ (B). 77
3.5 Geometria do duto para transmissão acústica. 78
3.6 Geometria para o problema de convecção natural. 78

4.1 Variação de k na função de teste. 83

4.2 Boris Grigorievitch Galerkin. 91

LISTA DE TABELAS

1.1 Aproximações obtidas para o MGT 27
1.2 Valores para o erro relativo 27
1.3 Autovalores encontrados através do método de Galerkin e autovalores exatos. . . 38

2.1 Valores obtidos para os coeficientes em cada método. 55
2.2 Aproximações $\tilde{y}_3$ e solução exata $y(x) = e^x$. 56
2.3 Erro relativo para os métodos estudados. 56
2.4 Valores obtidos perando o método da colocação convencional e da colocação ortogonal em comparação com a solução exata. 61

3.1 Soluções para o fluxo viscoso usando o MGT. 70
3.2 Solução numérica para o problema de condução de calor não estácionária. 77

4.1 Valores de m_{kj} quando $N = 1000$. 81

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
MGT	Método de Galerkin tradicional
MRP	Método de resíduo ponderado
PVC	Problema de valor de contorno
PVI	Problema de valor inicial
RK	Runge-Kutta

LISTA DE SÍMBOLOS

$L^2(\Omega)$	Conjunto das funções de quadrado integravel
$N \to \infty$	N tende para o infinito
$\langle a, b \rangle$	Produto interno entre a e b
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
m_{kj}	Elemento da linha k e coluna j de uma matriz M qualquer
$\|u\|$	Norma de u
$\inf f$	Ínfimo de f
∇^2	Operador laplaciano
$O(N^2)$	Algoritmo cujo desempenho é diretamente proporcional ao quadrado da dimensão do conjunto de dados de entrada
$O(N^3)$	Algoritmo cujo desempenho é diretamente proporcional ao cubo da dimensão do conjunto de dados de entrada
$y''(x)$	Derivada segunda da função y em relação a variável x

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **17**

1 O MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL **19**
1.1 VISÃO GERAL DO MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL 19
1.2 EXEMPLOS SIMPLES 21
1.2.1 Problema de valor inicial 21
1.2.2 Problema de autovalores 28
1.2.3 Equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea . . 38
1.2.4 Problema de valor de contorno com coeficiente variável 42

2 MÉTODOS DE RESÍDUOS PONDERADOS **45**
2.1 DESCRIÇÃO GERAL DOS MÉTODOS DE RESÍDUOS PONDERADOS 45
2.1.1 Método do subdomínio 47
2.1.2 Método da colocação 48
2.1.3 Método dos mínimos quadrados 49
2.1.4 Método dos momentos 50
2.1.5 Método de Galerkin tradicional 50
2.1.6 Método de Galerkin generalizado 51
2.2 COMPARAÇÕES ENTRE OS CRITÉRIOS DE PONDERAÇÃO 51
2.3 MÉTODO DA COLOCAÇÃO ORTOGONAL 57
2.3.1 Problema de difusão e reação química 58
2.3.2 Problema de valor de contorno 62

3 APLICAÇÕES FÍSICAS **66**
3.1 FLUXO VISCOSO EM UM CANAL 66
3.2 CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA 70
3.3 Aplicações adicionais 76

4 LIMITAÇÕES DO MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL **80**
4.1 O PROBLEMA DO MAL CONDICIONAMENTO 80
4.2 OUTRAS LIMITAÇÕES DO MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL 82

CONCLUSÃO **84**

REFERÊNCIAS **87**

APÊNDICES **91**

APÊNDICE A - Um pouco sobre a vida de Galerkin 91

APÊNDICE B - A escolha das funções de base 93

APÊNDICE C - Computação algébrica na resolução do problema de fluxo viscoso em um canal quadrado 94

APÊNDICE D - Obtenção da solução exata para o problema de condução de calor não-estácionária 96

INTRODUÇÃO

A análise científica de problemas de natureza física ou da engenharia requer, em grande parte, uma investigação matemática, que por sua vez pode levar a resolução de equações diferenciais. A solução exata para tais problemas, usualmente é fruto de um método analítico aplicado a geometrias e condições de contorno particulares. Em muitos casos estas equações simplesmente não possuem solução analítica, ou se possuem, a sua determinação pode ser complexa ou demandar processos matemáticos muito elaborados. Nas últimas décadas, as pesquisas científicas que envolvem métodos numéricos tiveram um grande crescimento. Em particular, as soluções numéricas para equações diferenciais tem sido cada vez mais utilizadas, ao mesmo tempo que o progresso na computação algébrica abriu vastas áreas até então consideradas inacessíveis.

Os métodos de Galerkin são uma classe de tratamentos utilizados para encontrar soluções aproximadas de problemas representados por equações diferenciais ordinárias e parciais. Essencialmente, qualquer problema que pode ser escrito em forma de uma equação diferencial, é candidato ao tratamento de Galerkin. Neste trabalho apresenta-se um estudo acerca de um destes tratamentos, denominado *método de Galerkin tradional* (MGT) que é um método de aproximação extremamente útil para a obtenção de soluções muito acuradas de problemas de valor de contorno (PVCs).

O MGT tem sua origem associada com um artigo publicado pelo próprio Galerkin (Apêndice A) em 1915 , onde o mesmo descreve alguns problemas de equilíbrio (Fletcher, 1984). Entretanto, o primeiro trabalho relacionado a este tema que atraiu a atenção da literatura ocidental, foi o de Duncan (1937) sobre a dinâmica das estruturas aeronáuticas. Posteriormente Bickley (1941) usou o MGT para resolver um problema de condução de calor instável. Após isso, o uso do MGT aumentou muito.

Este trabalho começa com uma visão geral do MGT, seguindo para a classe dos métodos de resíduos ponderados, onde o MGT é discutido como um dos tratamentos que integram esta classe. Além disso, são discutidos alguns exemplos físicos onde é aplicado o MGT e as limitações que este tratamento apresenta. A computação algébrica é uma ferramenta muito utilizada neste trabalho, pois a construção de esquemas numéricos no MGT para PVC, envolvem longos cálculos analíticos, que podem ser realizados mais facilmente com o uso da mesma, que também integra a parte numérica dos cálculos. Além disso, o uso de aritmética racional, possível nos sistemas de computação algébrica

Maple[1] será utilizado como ferramenta analítica e numérica, principalmente nas aplicações do MGT.

O primeiro capítulo deste trabalho traz a formulação do MGT através de um problema bidimensional que precede alguns exemplos simples que envolvem equações diferenciais ordinárias (EDOs). No primeiro exemplo , o MGT é utilizado para aproximar a solução de um problema de valor inicial (PVI). No segundo, um problema de autovalor de equações diferenciais é reduzido a um problema de autovalor da álgebra linear. O terceiro envolve uma EDO de segunda ordem. No quarto, é analisado um PVC com coeficientes variáveis. Os resultados e comparações entre solução exata e a aproximação perante o MGT, são mostradas para todos os exemplos. Nenhum dos problemas deste trabalho relaciona-se com equações não lineares.

No capítulo 2 é examinada a interpretação do MGT como um dos *métodos de resíduos ponderados* (MRPs), e um breve desvio é feito para analisar outros tratamentos que pertencem a esta classe. Isto permite uma comparação experimental a ser feita entre os MRPs para determinar qual deles é o mais eficiente e acurado ou simplesmente mais fácil ou mais rápido de ser aplicado. Além disso, também é estudado o método da colocação ortogonal que apresenta uma formulação diferenciada dos demais métodos de resíduos ponderados.

No capítulo 3 são descritos alguns exemplos representativos do MGT que aparecem na literatura, sendo que a ênfase desta parte do estudo é apresentar a solução aproximada do problema de *fluxo viscoso em um canal* e *condução de calor não-estacionária*. Ambas são aplicações cuja formulação matemática depende de equações diferenciais parciais (EDPs).

No último capítulo são apresentadas algumas limitações do MGT como o *mal condicionamento das matrizes de Galerkin* e demais problemas que podem surgir em sua aplicação.

[1]Sistema algébrico computacional comercial de uso genérico. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas, permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões. O seu desenvolvimento começou em 1981 pelo Grupo de Computação Simbólica na Universidade de Waterloo em Waterloo, no Canadá, província de Ontário.

Capítulo 1

O MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL

Neste primeiro capítulo, será estudado com ênfase o MGT. Primeiramente, apresenta-se a formulação utilizada no método, seguida de alguns exemplos simples. Tais exemplos servem de base para problemas mais elaborados que serão estudados posteriormente.

1.1 VISÃO GERAL DO MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL

Para descrever o MGT de maneira concisa, considera-se um problema bidimensional regido pela equação diferencial

$$\begin{aligned} A(u) &= 0, \text{ em } \Omega, \\ u &= 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, $\partial\Omega$ a fronteira de Ω e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função a ser determinada. Admite-se que $u \in L^2(\Omega)$, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço vetorial de funções definidas em Ω, e que A é um operador diferencial *linear* definido em $L^2(\Omega)$. As condições de contorno para este problema são

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

em $\partial\Omega$. No MGT é suposto que u pode ser representado por uma solução aproximada $\tilde{u}$, escrita por

$$\tilde{u}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^{N} a_j \phi_j(x, y), \tag{1.1.2}$$

sendo $u_0(x, y)$ uma função definida de modo a satisfazer as condições de contorno, os a_j são coeficientes a determinar, e os $\phi_j(x, y)$ são funções analíticas conhecidas chamadas *funções de base* ou *funções de teste* que devem:

i) ser linearmente independentes;

ii) satisfazer as condições de contorno homogêneas do problema $A(u) = 0$;

iii) ser densas[1] no espaço que contêm as soluções verdadeiras.

"A violação de qualquer uma destas condições reduz a eficiência do método"(Fletcher, 1984, p.30). Além disso, "[...] as funções de base, ϕ_j, devem ser escolhidas entre as primeiras N funções de um conjunto completo de funções"(Kantorovich e Krylov, 1958, p.262). Esta é uma condição necessária para a aproximação convergir para a solução exata quando $N \to \infty$.

Substituindo a solução aproximada (1.1.2) na eq. (1.1.1) obtém-se o *resíduo*, R, dado por

$$\begin{aligned} R(a_0, a_1, \ldots, a_N, x, y) &= A(\tilde{u}) \\ &= A(u_0) + \sum_{j=1}^{N} a_j A(\phi_j). \end{aligned}$$

Neste momento, é conveniente definir o produto interno $\langle f, g\rangle$ em $L^2(\Omega)$ da seguinte maneira

$$\langle f, g\rangle = \iint_{\Omega} fg \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Os coeficientes a_j na eq. (1.1.2) são obtidos resolvendo o sistema de equações

$$\langle R, \phi_k\rangle = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.1.3}$$

Aqui, os ϕ_k, são as mesmas funções analíticas que aparecem na eq. (1.1.2), mas neste caso são chamadas de *funções de peso* ou *funções de ponderação* (quando as funções de base e de peso são diferentes tem-se outros métodos para tratar equações diferenciais, como será visto no capítulo 2). A última igualdade é chamada de *condição de Galerkin* e equivale a dizer que R deve ser ortogonal às funções de base $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ usadas na aproximação $\tilde{u}(x, y)$.

Como A é um operador diferencial linear, a eq. (1.1.3) pode ser escrita na forma

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \langle A(\phi_j), \phi_k\rangle = -\langle A(u_0), \phi_k\rangle.$$

[1]Neste contexto, ser denso quer dizer que todas as soluções verdadeiras são limite de alguma sequência formada por funções de base, ou seja, uma sequência de funções de base tende para a solução verdadeira.

Os coeficientes a_j são os autovalores desta equação. Uma vez determinados estes coeficientes, a eq. (1.1.2) fornece a solução aproximada $\tilde{u}(x, y)$ que também pode ser chamada de *solução teste* ou *função tentativa*.

A mesma formulação explicada acima serve para problemas de valor inicial, porém não se aplica à problemas não lineares[2].

1.2 EXEMPLOS SIMPLES

Para esclarecer os conceitos estabelecidos, esta seção apresenta alguns exemplos simples, cujas soluções exatas são conhecidas. A formulação de tais exemplos pode ser estendida para outros problemas semelhantes.

1.2.1 Problema de valor inicial

O objetivo neste exemplo é testar a acurácia do MGT aplicado a um PVI que é regido pela seguinte equação

$$\frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0, \tag{1.2.4}$$

sujeita à condição inicial $y(0) = 1$, com $0 \leq x \leq 1$. A solução exata é dada por

$$y(x) = e^x.$$

Usa-se a seguinte solução tentativa

$$\tilde{y}_N(x) \;=\; 1 + \sum_{j=1}^{N} a_j x^j. \tag{1.2.5}$$

Todos os termos da expressão acima deve satisfazer a condição inicial, inclusive a função de base, que neste caso é $\phi_j = x^j$ (uma discusão à respeito da escolha das funções de base é feita no Apêndice B).

Substituindo a solução tentativa (1.2.5) na eq. (1.2.4), tem-se o resíduo

$$\begin{aligned} R &= \frac{d}{dx}\left(1 + \sum_{j=1}^{N} a_j x^j\right) - \left(1 + \sum_{j=1}^{N} a_j x^j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{d}{dx}(x^j) - \left(1 + \sum_{j=1}^{N} a_j x^j\right) \\ &= -1 + \sum_{j=1}^{N} a_j (j x^{j-1} - x^j). \end{aligned}$$

[2]O tratamento de Galerkin tradicional também pode ser aplicado a equações diferenciais não lineares, porém a formulação para tal diferencia-se da abordagem utilizada para problemas lineares. Neste trabalho não são resolvidos problemas não lineares.

O produto interno entre R e ϕ_k, que determina os coeficientes a_j é dado por

$$\begin{aligned}\langle R, x^{k-1}\rangle &= \left\langle -1+\sum_{j=1}^{N} a_j(jx^{j-1}-x^j), x^{k-1}\right\rangle \\ &= \int_0^1 \left[-1+\sum_{j=1}^{N} a_j(jx^{j-1}-x^j)(x^{k-1})\right] \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 x^{k-1}dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} a_j x^{k-1}\left[a_j(jx^{j-1}-x^j)\right] \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais obtém-se

$$\begin{aligned}\langle R, x^{k-1}\rangle &= -\left(\frac{x^k}{k}\right)\Big|_0^1 + \sum_{j=1}^{N} ja_j\left(\frac{x^{k+j-1}}{k+j-1}\right)\Big|_0^1 - a_j\left(\frac{x^{k+j}}{k+j}\right)\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{k}+\sum_{j=1}^{N} a_j\left(\frac{j}{k+j-1}-\frac{1}{k+j}\right).\end{aligned}$$

Usando a condição de Galerkin (1.1.3)

$$-\frac{1}{k}+\sum_{j=1}^{N} a_j\left(\frac{j}{k+j-1}-\frac{1}{k+j}\right) = 0,$$

de modo que

$$\sum_{j=1}^{N} a_j\left(\frac{j}{k+j-1}-\frac{1}{k+j}\right)=\frac{1}{k}.$$

Esta equação pode ser representada na forma matricial

$$Ma = T, \tag{1.2.6}$$

sendo os elementos de M e T descritos respectivamente por

$$m_{kj} = \frac{j}{k+j-1}-\frac{1}{k+j}, \tag{1.2.7}$$

$$t_k = \frac{1}{k}, \tag{1.2.8}$$

e a o vetor dos coeficientes a_j. De maneira explícita:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & \cdots & m_{NN}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{N}\end{bmatrix}. \tag{1.2.9}$$

A seguir, encontra-se os coeficientes a_j para diferentes valores de N.

N = 1

Para este valor de N, a eq. (1.2.9) torna-se uma representação de matrizes unitárias da forma

$$\left[\ m_{11}\ \right]\left[\ a_1\ \right] = \left[\ 1\ \right].$$

Mas, como definido na eq. (1.2.7), sabe-se que

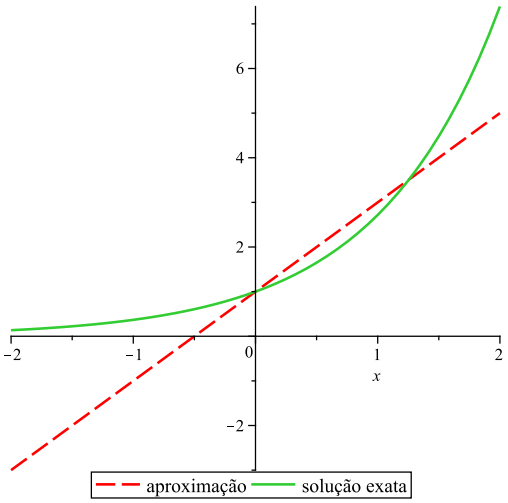
$$m_{11} \;=\; \frac{1}{1+1-1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

e imediatamente, obtém-se $a_1 = 2$. Desta forma, a primeira aproximação é

$$\tilde{y}_1(x) = 1 + 2x.$$

A Figura 1.1 mostra a solução exata $y(x) = e^x$ e a aproximação $\tilde{y}_1(x)$. Obviamente, tal aproximação não é satisfatória. Desta forma prossegue-se aumentando o valor de N.

Figura 1.1: Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximação $\tilde{y}_1(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor

N = 2

Agora, a eq. (1.2.9) torna-se

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Calculando os elementos da matriz M conforme a eq. (1.2.7), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

de modo que

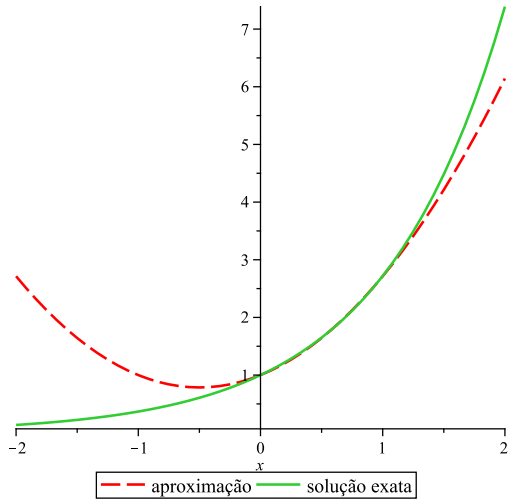
$$a_1 = a_2 = \frac{6}{7}.$$

Assim, a solução aproximada para este caso fica

$$\tilde{y}_2(x) = 1 + \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}x^2.$$

A Figura 1.2, mostra a solução exata e a aproximação $\tilde{y}_2(x)$.

Figura 1.2: Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximação $\tilde{y}_2(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor

N = 3

Neste caso, a configuração matricial $Ma = T$ fica

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \tag{1.2.10}$$

Até este momento, fez-se os cálculos dos elementos da matriz M manualmente utilizando a eq. (1.2.7). Agora, será utilizada a computação algébrica com o objetivo de falicitar este processo. A seguir, está exposto o procedimento iterativo para a obtenção dos elementos matriciais procurados:

```
>restart:
```

Este primeiro comando, `restart`, serve para apagar o conteúdo de variáveis que podem ter sido utilizadas anteriormente, evitando a obtenção acidental de resultados errados. Abaixo, é definida uma iteração para k e j:

```
>for k from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
   print(m[k,j]=(j/(k+j-1))-(1/(k+j)));
  od;
 od;
```

As saídas m_{kj}, fornecem todos os elementos da matriz M, que completa a eq. (1.2.10), tornando-a

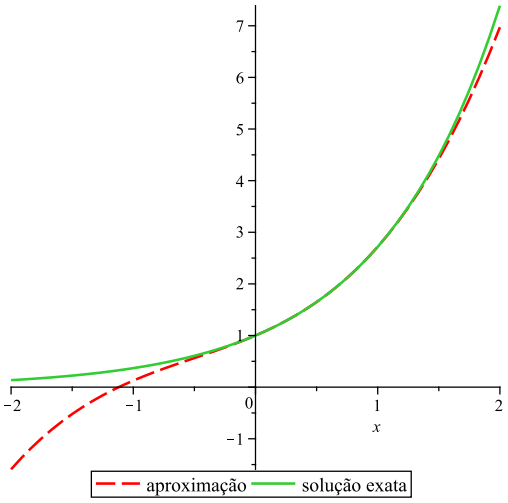
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{11}{20} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{10} & \frac{13}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

com os coeficientes $a_1 = 72/71$, $a_2 = 30/71$ e $a_3 = 20/71$, tal que

$$\tilde{y}_3(x) = 1 + \frac{72}{71}x + \frac{30}{71}x^2 + \frac{20}{71}x^3.$$

A representação da função $\tilde{y}_3(x)$ e da solução exata está na Figura 1.3.

Figura 1.3: Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximada $\tilde{y}_3(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor

N = 7

Os comandos que seguem são os mesmos utilizados para $N = 3$, porém, agora as variáveis k e j do processo iterativo, apresentam novos limitantes:

```
>for k from 1 to 7 do
  for j from 1 to 7 do
   print(m[k,j]=(j/(k+j-1))-(1/(k+j)));
  od;
 od;
```

A matriz M gerada a partir dos valores obtidos nesta rotina, e a matriz dos coeficientes a_j obtidas para este caso são respectivamente

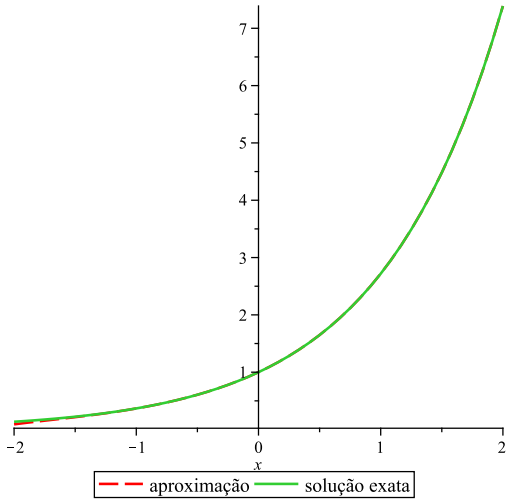
$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{11}{20} & \frac{19}{30} & \frac{29}{42} & \frac{41}{56} & \frac{55}{72} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{10} & \frac{13}{30} & \frac{11}{21} & \frac{33}{56} & \frac{23}{36} & \frac{61}{90} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{30} & \frac{5}{14} & \frac{25}{56} & \frac{37}{72} & \frac{17}{30} & \frac{67}{110} \\ \frac{1}{30} & \frac{4}{21} & \frac{17}{56} & \frac{7}{18} & \frac{41}{90} & \frac{28}{55} & \frac{73}{132} \\ \frac{1}{42} & \frac{9}{56} & \frac{19}{72} & \frac{31}{90} & \frac{9}{22} & \frac{61}{132} & \frac{79}{156} \\ \frac{1}{56} & \frac{5}{36} & \frac{7}{30} & \frac{17}{55} & \frac{49}{132} & \frac{11}{26} & \frac{85}{182} \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} \frac{10391024}{10391023} \\ \frac{5195484}{10391023} \\ \frac{1732080}{10391023} \\ \frac{431970}{10391023} \\ \frac{88704}{10391023} \\ \frac{12012}{10391023} \\ \frac{3432}{10391023} \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução aproximada para o caso $N = 7$ é

$$\begin{aligned} \tilde{y}_7(x) &= 1 + \frac{10391024}{10391023}x + \frac{5195484}{10391023}x^2 + \frac{1732080}{10391023}x^3 + \frac{431970}{10391023}x^4 + \\ &\quad + \frac{88704}{10391023}x^5 + \frac{12012}{10391023}x^6 + \frac{3432}{10391023}x^7. \end{aligned}$$

A Figura 1.4 apresenta o gráfico de $\tilde{y}_7(x)$ e a solução exata $y(x) = e^x$, sendo que no domínio da equação diferencial analisada, a função $\tilde{y}_7(x)$ aproxima-se da solução exata de tal forma que o gráfico da primeira função sobrepõe-se sobre o da segunda.

Figura 1.4: Solução exata $y(x) = e^x$ e aproximada $\tilde{y}_7(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor

Outra forma de verificar como as aproximações melhoram conforme aumenta-se N, é atribuindo alguns valores de x para cada uma das funções teste obtidas, conforme a Tabela 1.1. O objetivo é comparar a solução aproximada com a solução exata.

Tabela 1.1: Aproximações obtidas para o MGT

Aproximação para $\tilde{y}_N$					
x	N=1	N=2	N=3	N=7	Solução exata ($y = e^x$)
0	1	1	1	1	1
0.1	1.2	1.0942857143	1.1059154929	1.1051709168	1.1051709181
0.2	1.4	1.2057142857	1.2219718310	1.2214027578	1.2214027582
0.3	1.6	1.3342857142	1.3498591549	1.3498588093	1.3498588076
0.4	1.8	1.4800000000	1.4912676056	1.4918246977	1.4918246976
0.5	2.0	1.6428571429	1.6478873239	1.6487212689	1.6487212707
0.6	2.2	1.8228571429	1.8214084507	1.8221188002	1.8221188004
0.7	2.4	2.0200000000	2.0135211267	2.0137527092	2.0137527075
0.8	2.6	2.2342857143	2.2259154929	2.2255409284	2.2255409285
0.9	2.8	2.4657142857	2.4602816901	2.4596031098	2.4596031112
1.0	3	2.7142857143	2.7183098592	2.7182818285	2.7182818285

Fonte: Produção do próprio autor

Neste momento, é interessante lembrar que a solução algébrica $y(x)$ é uma função que satisfaz à eq. (1.2.4) e à condição de contorno, enquanto que a solução de Galerkin $\tilde{y}_N$ é uma aproximação dessa função. Subentende-se que exista um erro, E, nesta aproximação o qual pode ser calculado por

$$E = |y - \tilde{y}_N|.$$

Na Tabela 1.2, tem-se os erros relativos para alguns valores de x. Obviamente, o erro cai

Tabela 1.2: Valores para o erro relativo

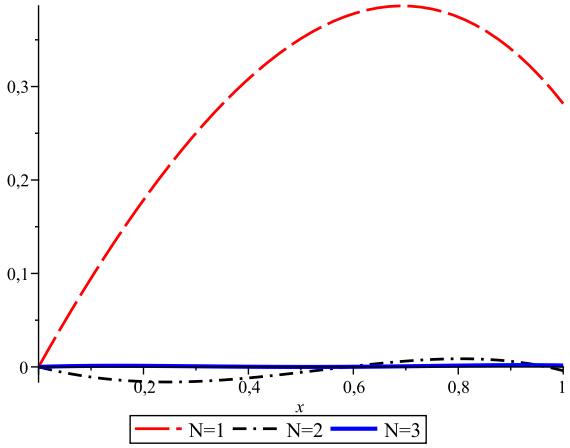
Resultado de $|y - \tilde{y}_N|$				
x	N=1	N=2	N=3	N=7
0	0	0	0	0
0.1	0.0948290819	0.0108852038	0.0007445748	0.0000000013
0.2	0.1785972418	0.0156884725	0.0005690728	0.0000000004
0.3	0.2501411924	0.0155730934	0.0000003473	0.0000000017
0.4	0.3081753024	0.0118246976	0.0005570920	0.0000000001
0.5	0.3512787293	0.0058641278	0.0008339468	0.0000000018
0.6	0.3778811996	0.0007383425	0.0007103497	0.0000000002
0.7	0.3862472925	0.0062472925	0.0002315808	0.0000000017
0.8	0.3744590715	0.0087447858	0.0003745644	0.0000000001
0.9	0.3403968888	0.0061111745	0.0006785789	0.0000000014
1	0.2817181715	0.0039961142	0.0000280307	0

Fonte: Produção do próprio autor

rapidamente conforme N aumenta. Na Figura 1.5, que mostra os gráficos do erro para $N = 1, 2$ e 3, pode-se visualizar melhor este resultado. Como para $N = 7$ o erro é muito pequeno, o gráfico para o mesmo está ilustrado separadamente na Figura 1.6.

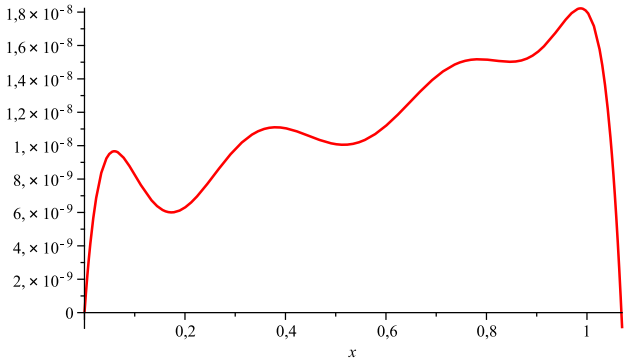
Contudo, a eficácia demostrada pelo MGT não continua a melhorar quando N cresce *ilimitadamente*, pois as matrizes de Galerkin *são tipicamente mal condicionadas*,

Figura 1.5: Erro relativo para $N = 1, 2, 3$.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 1.6: Erro relativo para $N = 7$



Fonte: Produção do próprio autor

problema que será estudado na seção 4.1.

1.2.2 Problema de autovalores

Seja o sistema de $n \in \mathbb{N}$ equações lineares

$$Lx = \lambda x,$$

para o qual procura-se um vetor x que seja solução, tal que $x_i \neq 0$ para algum i. Este é um problema de autovalor da álgebra linear e, para que a especificação acima seja possível, é necessário que

$$\det(L - \lambda I) = 0, \tag{1.2.11}$$

sendo I a matriz identidade. Voltando ao MGT, pode-se dizer que este tratamento *transforma problemas de autovalores de equações diferenciais em problemas de autovalores de*

álgebra linear.

Neste contexto, considere o problema

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \lambda P = 0, \tag{1.2.12}$$

com as condições

$$P(0) = 0 \text{ e } P(1) = 0,$$

no domínio $0 \leq x \leq 1$. A solução exata pode ser encontrada propondo $P(x) = e^{mx}$ de forma que o polinômio característico associado a equação (1.2.12) fica $m^2 + \lambda = 0$, logo $m = \pm\sqrt{-\lambda}$. Fazendo a análise do sinal de λ, nota-se que para $\lambda \leq 0$ a função $P(x)$ recai na solução trivial[3], então a relevância deve estar nas soluções para $\lambda > 0$. A partir disso, supõe-se

$$P(x) \;\; = \;\; c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

como $P(0) = c_1\cos(0) = 0$, obtém-se que $c_1 = 0$. Além disso $P(1) = c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$, de modo que

$$\lambda = j^2\pi^2, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.2.13}$$

Considera-se $c_2 \neq 0$ neste caso, pois procura-se uma solução não trivial. O autovetor associado a λ é $P_j(x) = c\sin(j\pi x)$, $c \in \mathbb{R}$.

Para facilitar os cálculos posteriores, é conveniente utilizar funções normalizadas. Tendo isto em conta, faz-se a normalização de $P(x)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle P_j(x), P_j(x)\rangle &= 1 \\ \int_0^1 c^2 \sin^2(j\pi x)\ \mathrm{d}x &= 1 \\ \frac{1}{2}\left[\frac{c^2\left(-\cos\left(\pi\, j\right)\sin\left(\pi\, j\right) + \pi\, j\right)}{\pi\, j}\right] &= 1. \end{aligned}$$

Como $\sin(\pi j) = 0, \forall j = 1, 2, 3\ldots$, encontra-se $c = \sqrt{2}$. Ou seja, a solução exata é dada por

$$P_j(x) = \sqrt{2}\sin(j\pi x).$$

Será usada a seguinte aproximação

$$\tilde{P}_N(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x - x^{j+1}), \tag{1.2.14}$$

de modo que $\phi_j = x - x^{j+1}$, satisfaz as condições de contorno. Substituindo o valor de

[3]Tem-se que $\lambda \leq 0 \Rightarrow P(x) = c_1 + c_2x = 0$ ou $P(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2e^{\sqrt{-\lambda}x}$. Em ambos os casos $P(0) = P(1) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$.

$\tilde{P}_N(x)$ na eq. (1.2.12), tem-se o resíduo, R, dado por

$$\begin{aligned} R &= \frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{j=1}^{N} a_j(x - x^{j+1})\right] + \lambda\left[\sum_{j=1}^{N} a_j(x - x^{j+1})\right] \\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{d^2}{dx^2}(x - x^{j+1}) + \sum_{j=1}^{N}\left[\lambda a_j(x - x^{j+1})\right] \\ &= \sum_{j=1}^{N}\left[-a_j(j+1)jx^{j-1} + \lambda a_j(x - x^{j+1})\right]. \end{aligned}$$

Seja o produto interno $B = \langle R, (x - x^{k+1})\rangle$, então

$$B = \int_0^1 \sum_{j=1}^{N}\left\{a_j\left[-j(j+1)x^{j-1} + \lambda(x - x^{j+1})\right]\right\}(x - x^{k+1})\ \mathrm{d}x.$$

Resolvendo esta integral, tem-se

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{N}\left[-a_j\left(\frac{kj}{j+k+1}\right) + a_j\lambda\left(\frac{jk(j+k+6)}{3(k+3)(j+k+3)(j+3)}\right)\right] \\ &= -\sum_{j=1}^{N} a_j\left(\frac{kj}{j+k+1}\right) + \sum_{j=1}^{N} a_j\lambda\left[\frac{jk(j+k+6)}{3(k+3)(j+k+3)(j+3)}\right]. \end{aligned}$$

Da condição de Galerkin (1.1.3)

$$B = \langle R, (x - x^{k+1})\rangle = 0,$$

de modo que

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{kj}{j+k+1}\right)a_j = \lambda\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{jk(j+k+6)}{3(k+3)(j+k+3)(j+3)}\right)a_j. \tag{1.2.15}$$

A eq. (1.2.15), pode ser escrita na forma matricial como

$$La = \lambda Ma, \tag{1.2.16}$$

sendo os elementos de L e M dados respectivamente por

$$l_{kj} = \frac{jk}{k+j+1}, \tag{1.2.17}$$

$$m_{kj} = \frac{jk(j+k+6)}{3(k+3)(j+k+3)(j+3)}, \tag{1.2.18}$$

e a é o vetor dos coeficientes a_j. Agora, como na seção 1.2.1, testa-se alguns valores de

N para verificar o quanto a função $\tilde{P}_N(x)$ se aproxima de $P_j(x)$.

N = 1

Para este caso a eq. (1.2.16) fica

$$\left[\ l_{11}\ \right]\left[\ a_1\ \right] = \lambda \left[\ m_{11}\ \right]\left[\ a_1\ \right].$$

Sabe-se pelas eqs. (1.2.17) e (1.2.18) que

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{1\cdot 1}{1+1+1} = \frac{1}{3}, \\ m_{11} &= \frac{1\cdot 1(1+1+6)}{3(1+3)(1+3)(1+1+3)} = \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

logo

$$\left[\ \tfrac{1}{3}\ \right]\left[\ a_1\ \right] = \lambda \left[\ \tfrac{1}{30}\ \right]\left[\ a_1\ \right].$$

Imediatamente, obtém-se $\lambda = 10$, com

$$\tilde{P}_1(x) = a_1(x - x^2),$$

sua autofunção associada. Mas ainda é necessário encontrar o coeficiente a_1. Para isso, usam-se os produtos internos $\langle P_j, P_k\rangle$ e $\langle \tilde{P}_j, \tilde{P}_k\rangle$. Segundo a definição

$$\langle P_j, P_k\rangle = \int_0^1 (\sqrt{2}\sin(j\pi x))(\sqrt{2}\sin(k\pi x)) \quad \mathrm{d}x.$$

Para esta integral, tem-se duas possibilidades. Quando $j \neq k$ e quando $j = k$. No primeiro caso, fica-se com

$$\langle P_j, P_k\rangle = -2\left[\frac{j\cos(j\pi)\sin(k\pi) - k\sin(j\pi)\cos(k\pi)}{\pi(j^2+k^2)}\right] = 0,$$

pois $\sin(k\pi) = \sin(j\pi) = 0, \forall k, j \in \mathbb{N}$. Para $j = k$, tem-se

$$\langle P_j, P_k\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(-\cos\left(j\pi\right)\sin\left(j\pi\right) + j\pi\right)}{j\pi}\right] = 1.$$

Isto significa que

$$\langle P_j, P_k\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad j \neq k, \\ 1, & \text{se} \quad j = k. \end{cases}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{P}_j, \tilde{P}_k \rangle &= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{1} a_j (x - x^{j+1}) \sum_{k=1}^{1} a_k (x - x^{k+1}) \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{a_1^2}{30}.\end{aligned}$$

Agora, como quer-se encontrar o valor do coeficiente a_1, faz-se

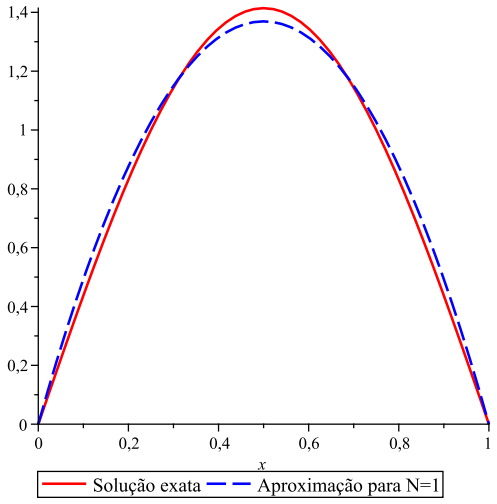
$$\langle P_j, P_k \rangle = \langle \tilde{P}_j, \tilde{P}_k \rangle.$$

Usa-se o resultado para $j = k$, pois este leva a um valor não nulo para a_1. Obtém-se $a_1 = \sqrt{30}$ e a primeira função aproximante

$$\tilde{P}_1(x) = \sqrt{30}(x - x^2).$$

Na Figura 1.7, pode-se visualizar o quanto a função $\tilde{P}_1$ se aproxima da solução exata. Neste caso tem-se uma boa acurácia mesmo com N pequeno.

Figura 1.7: Solução exata $P_1(x) = \sqrt{2}\sin(\pi x)$ e aproximação $\tilde{P}_1(x) = \sqrt{30}(x - x^2)$.



Fonte: Produção do próprio autor

N = 2

Segue-se com mesmo procedimento do caso anterior, mas agora para a equação

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Conforme as eqs (1.2.17) e (1.2.18), os elementos matriciais l_{ij} e m_{ij} ficam

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{8}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \tag{1.2.19}$$

Os autovalores λ são obtidos através da eq. (1.2.11). Desta forma

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda & \frac{1}{2} - \frac{1}{20}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{20}\lambda & \frac{4}{5} - \frac{8}{105}\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{1.2.20}$$

Como era esperado, o polinômio característico da eq. (1.2.20) apresenta duas raízes que são os autovalores $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 42$. Voltando a eq. (1.2.19), basta resolver tal sistema para ambos os valores de λ.

Quando $\lambda_1 = 10$ os resultados são os mesmos que já haviam sido calculados para $N = 1$, portanto geram simplesmente o resultado anterior, com

$$\tilde{P}_1(x) = \tilde{P}_{2(\lambda_1)}(x) = \sqrt{30}(x - x^2),$$

sendo $\tilde{P}_{2(\lambda_1)}(x)$ a aproximação gerada para $\lambda_1 = 10$ e $N = 2$.

Substituindo $\lambda_2 = 42$ na eq. (1.2.20), fica-se com

$$\begin{cases} -\dfrac{16}{15}\, a_1 - \dfrac{8}{5}\, a_2 = 0 \\ -\dfrac{8}{5}\, a_1 - \dfrac{12}{5}\, a_2 = 0, \end{cases}$$

de onde tira-se que $a_2 = -\frac{2}{3}a_1$. A aproximação $\tilde{P}_{2(\lambda_2)}$ é expressa por

$$\tilde{P}_{2(\lambda_2)}(x) \;\; = \;\; a_1(x - x^2) - \frac{2}{3}a_1(x - x^3).$$

Impondo as condições de normalização ao resultado anterior da seguinte maneira

$$\int_0^1 \left[a_1(x - x^2) - \frac{2}{3}a_1(x - x^3) \right]^2 \, \mathrm{d}x = 1,$$

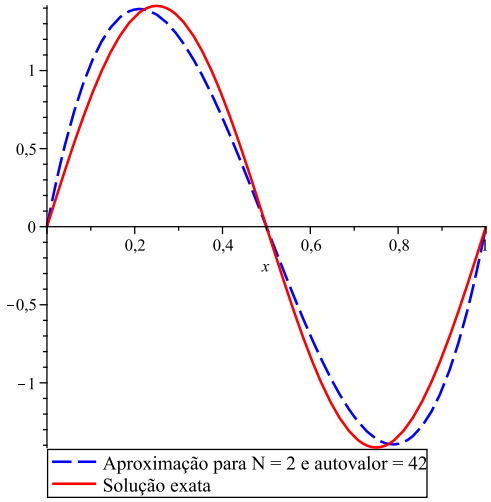
obtém-se $a_1 = 3\sqrt{210}$ e a aproximação.

$$\tilde{P}_{2(\lambda_2)} = 3\sqrt{210}(x - x^2) - 2\sqrt{210}(x - x^3).$$

A Figura 1.8 mostra a solução exata $P_2(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x)$ e a aproximação $\tilde{P}_{2(\lambda_2)}(x)$.

Comparando as Figuras 1.7 e 1.8, percebe-se um indicativo de que a primeira autofunção obtida apresenta uma melhor aproximação. Para confirmar isso, prossegue-se aumentando o valor de N.

Figura 1.8: Solução exata $P_2(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x)$ e aproximação $\tilde{P}_{2(\lambda_2)}(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor

N = 3

Neste caso tem-se as equações matriciais da forma

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Para determinar os elementos matriciais, utiliza-se o seguinte comando iterativo:

```
>for k from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
   print(l[k,j]=((j*k)/(k+j+1)));
  od;
 od;
```

Esta primeira iteração, fornece os elementos da matriz L. Os elementos da matriz M são obtidos por:

```
>for k from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
   print(m[k,j]=((j*k)*(j+k+6))/(3*(j+3)*(k+3)*(j+k+3)));
  od;
 od;
```

Os elementos matriciais l_{kj} e m_{kj} encontram-se ordenados a seguir:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{9}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{20} & \frac{5}{84} \\ \frac{1}{20} & \frac{8}{105} & \frac{11}{120} \\ \frac{5}{84} & \frac{11}{120} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \tag{1.2.21}$$

Conforme a eq. (1.2.11)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda & \frac{1}{2} - \frac{1}{20}\lambda & \frac{3}{5} - \frac{5}{84}\lambda \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{20}\lambda & \frac{4}{5} - \frac{8}{105}\lambda & 1 - \frac{11}{120}\lambda \\ \frac{3}{5} - \frac{5}{84}\lambda & 1 - \frac{11}{120}\lambda & \frac{9}{7} - \frac{1}{9}\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de onde obtém-se os autovalores

$$\lambda_1 = 42, \qquad \lambda_2 = 56 + 4\sqrt{133}, \qquad \lambda_3 = 56 - 4\sqrt{133}.$$

Para $\lambda_1 = 42$ temos o mesmo autovetor do caso $N = 3$, que está na Figura 1.8. Agora, substituindo $\lambda_2 = 56 + 4\sqrt{133}$ na eq. (1.2.21) encontra-se

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(-\frac{1}{21}(-7 + \sqrt{133}) \right) a_2, \\ a_3 &= -a_2. \end{aligned}$$

Logo, o autovetor associado a $\lambda_2 = 56 + 4\sqrt{133}$ é

$$\tilde{P}_{3(\lambda_2)}(x) = \left[-\frac{1}{21}(-7 + \sqrt{133}) \right] a_2(x - x^2) + a_2(x^2 - x^3) - a_2(x^3 - x^4).$$

Basta encontrar o coeficiente a_2 através da condição de normalização, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \tilde{P}_{3(\lambda_2)}, \tilde{P}_{3(\lambda_2)} \rangle &= 1 \\ \int_0^1 (\tilde{P}_{3(\lambda_2)})^2 \mathrm{d}x &= 1 \end{aligned}$$

A expressão que define $\tilde{P}_{3(\lambda_2)}(x)$ é longa, e quando submetida a fórmula de normalização aumenta ainda mais. Este cálculo foi submetido no Maple que obteve

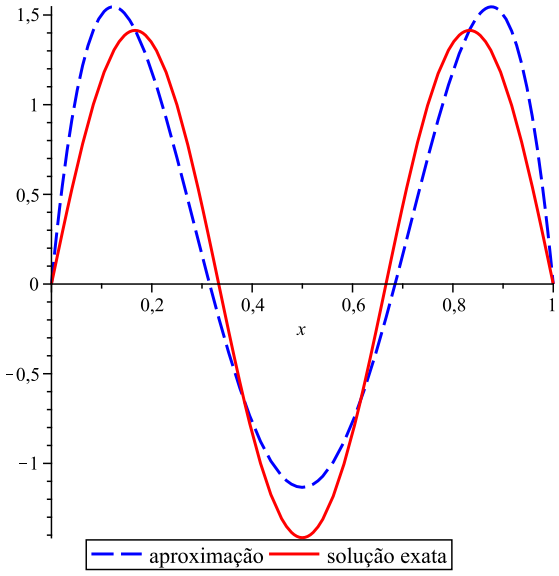
$$a_3 = 21 \left(\frac{\sqrt{7980 - 690\sqrt{133}}}{-266 + 23\sqrt{133}} \right).$$

Neste caso é conveniente utilizar a notação decimal, já que o valor exato de a_3 envolve frações e raízes. Por fim, fica-se com

$$\tilde{P}_{3(\lambda_2)}(x) = 28.646200473\,x - 161.36807630\,x^2 + 265.44375166\,x^3 - 132.72187583\,x^4.$$

Na Figura 1.9 têm-se a solução exata, que neste caso é $P_3(x) = \sqrt{2}\sin(3\pi x)$, juntamente com a aproximação $\tilde{P}_{3(\lambda_2)}(x)$.

Figura 1.9: Solução exata $P_3(x) = \sqrt{2}\sin(3\pi x)$ em comparação com $\tilde{P}_{3(\lambda_2)}$.



Fonte: Produção do próprio autor

N = 4

Agora, a eq. (1.2.16) fica

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & \frac{8}{105} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{35} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{15} & \frac{8}{105} & \frac{1}{14} & \frac{4}{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \frac{1}{168} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \frac{1}{168} & \frac{1}{252} \\ \frac{1}{105} & \frac{1}{168} & \frac{1}{252} & \frac{1}{360} \\ \frac{1}{168} & \frac{1}{252} & \frac{1}{360} & \frac{1}{495} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix},$$

sendo que os autovalores associados são

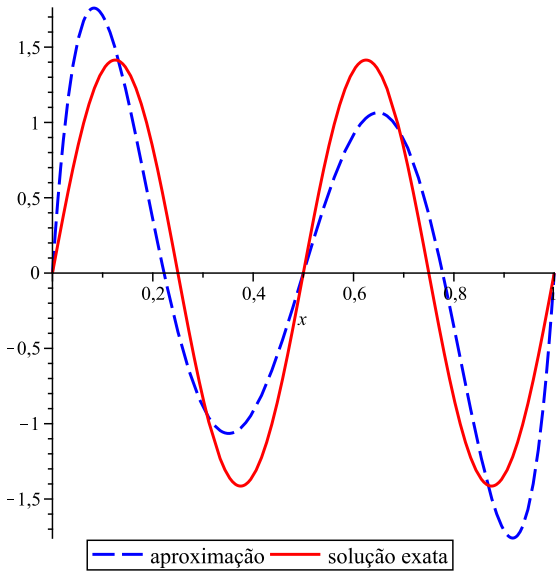
$$\lambda_1 = 56 + 4\sqrt{133}, \qquad \lambda_2 = 56 - 4\sqrt{133},$$
$$\lambda_3 = 120 + 36\sqrt{5}, \qquad \lambda_4 = 120 - 36\sqrt{5}.$$

Manipulações algébricas semelhantes as utilizadas para $N = 1, 2, 3$, também se aplicam para $N = 4$, de modo que a autofunção aproximante para λ_2 é escrita da forma

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{4(\lambda_2)}(x) &= 49.493314336x - 434.60836316x^2 + 1243.5003092x^3 - \\ &\quad -1430.6421008x^4 + 572.25684030x^5, \end{aligned}$$

A solução exata, que neste caso é $P_4 = \sqrt{2}\sin(4\pi x)$, e a aproximação $\tilde{P}_{4(\lambda_2)}(x)$ apresentam-se na Figura 1.10.

Figura 1.10: Solução exata $P_4(x) = \sqrt{2}\sin(4\pi x)$ e aproximação $\tilde{P}_{4(\lambda_2)}(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor

Para fazer uma comparação entre os autovalores obtidos na solução exata e nas aproximações, usa-se a eq. (1.2.13) para determinar os valores reais de λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (1\pi)^2 = 9.8696044012, \\
\lambda_2 &= (2\pi)^2 = 39.478417605, \\
\lambda_3 &= (3\pi)^2 = 88.826439611, \\
\lambda_4 &= (4\pi)^2 = 157.91367042.
\end{aligned}$$

Na Tabela 1.2.2, é possível ver melhor tais resultados. Além disso, percebe-se que aumentando ainda mais os valores de N, a precisão dos autovalores de ordem mais baixa aumenta rapidamente, enquanto que a precisão dos autovalores de ordem mais alta, diminui rapidamente. E ainda, como a equação que rege os autovalores é auto-adjunta e positiva definida, o MGT sempre produzirá autovalores que são maiores que os autovalores exatos.

Tabela 1.3: Autovalores encontrados através do método de Galerkin e autovalores exatos.

Autovalores					
N	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	Autovalor exato
λ_1	10	10	9.8697496213	9.869749620	9.8696044012
λ_2		42	42	39.501552810	39.478417605
λ_3			102.13025038	102.13025038	88.826439611
λ_4				200.49844719	157.91367042

1.2.3 Equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea

Para testar a aplicabilidade do MGT para EDOs lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, considera-se o seguinte PVI

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{du(x)}{dx} + u(x) - \sin(x) = 0, \tag{1.2.22}$$

cujas condições iniciais são

$$u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 0.$$

A solução exata deste problema é dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{\mathrm{e}^{-1/2\,x}\sin\left(\sqrt{3}x/2\right)\left(\cos\left(\sqrt{3}/2\right) - \cos(1)\,\mathrm{e}^{1/2}\right)}{\sin\left(\sqrt{3}/2\right)} + \\ &\quad + \mathrm{e}^{-1/2\,x}\cos\left(\sqrt{3}x/2\right) - \cos(x)\,. \end{aligned}$$

Deve-se propor uma solução tentativa com N funções de base monomiais que se ajuste às condições iniciais. A função de aproximação escolhida é

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_j\left(x^j - x^{j+1}\right), \tag{1.2.23}$$

sendo $\phi_j(x) = x^j - x^{j+1}$ a função de base. Substituindo (1.2.23) na eq. (1.2.22), obtém-se o resíduo, R, escrito por

$$\begin{aligned} R &= \frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{k=1}^{N} c_k\left(x^k - x^{k+1}\right)\right] + \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{N} c_k\left(x^k - x^{k+1}\right)\right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N} c_k\left(x^k - x^{k+1}\right) - \sin(x). \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

Para uma primeira avaliação, escolhe-se $N = 3$. A razão de se fazer isso é mostrar que pode-se conseguir uma solução de boa acurácia com um pequeno esforço computacional.

Neste caso , a eq. (1.2.24) torna-se

$$\begin{aligned} R &= -c_1 - 4\,c_2 x + 2\,c_2 + 6\,c_3 x - 9\,c_3 x^2 - c_1 x - 2\,c_2 x^2 - 3\,c_3 x^3 - \\ &\quad -c_1 x^2 - c_2 x^3 - c_3 x^4 - \sin(x)\,. \end{aligned}$$

Aplicando a condição de Galerkin (1.1.3), obtém-se um sistema de equações algébricas representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{2}{15} & -\frac{31}{420} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{13}{105} & -\frac{5}{56} \\ -\frac{3}{28} & -\frac{83}{840} & -\frac{103}{1260} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2\,\cos(1) - \sin(1) \\ -2 - 4\,\cos(1) + 5\,\sin(1) \\ -24 + 18\,\cos(1) + 17\,\sin(1) \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema acima para os coeficientes a_j encontra-se

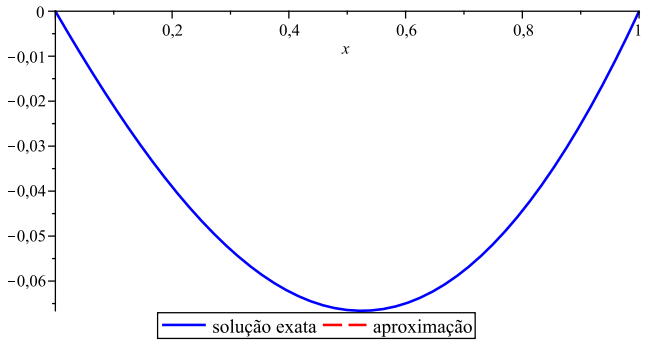
$$\begin{aligned} a_1 &= -0.223825969716, \\ a_2 &= -0.11192004186, \\ a_3 &= 0.05617242183, \end{aligned}$$

de forma que a aproximação $\tilde{u}_3(x)$, referente a eq. (1.2.23) quando $N = 3$, fica

$$\tilde{u}_3(x) = -0.223825969716\,x + 0.111905927856\,x^2 + 0.16809246369\,x^3 - 0.05617242183\,x^4.$$

Na Figura 1.11 tem-se os gráficos da solução aproximada $\tilde{u}_3(x)$ e da solução exata $u(x)$. Visualmente as duas soluções são indistinguíveis. Desta forma, avalia-se o erro cometido na aproximação. O gráfico para tal encontra-se na Figura 1.12, onde é possível perceber diferenças da ordem de 10^{-6} entre solução aproximada e solução exata.

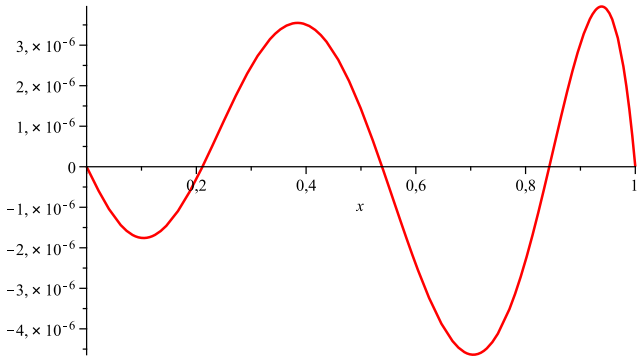
Figura 1.11: Solução exata $u(x)$ e aproximação $\tilde{u}_3(x)$.



Fonte: Produção do próprio autor

Uma comparação com a solução fornecida pelo método de Runge-Kutta (RK) permite avaliar melhor a aproximação fornecida no MGT. Os comandos a seguir inserem

Figura 1.12: Erro relativo para ao MGT com $N = 3$.



Fonte: Produção do próprio autor

a equação diferencial estudada e sua condição inicial no Maple:

```
>restart:


>eq := diff(u(x),x$2) +diff(u(x),x)+ u(x) - sin(x) =0:
>ini := u(0) = 0, u(1)=0:
```

O comando abaixo resolve a EDO numericamente pelo método de RK:

```
>sol_num := dsolve({eq,ini},u(x),numeric);
```

Graficamente, a solução numérica de RK é praticamente igual a solução de Galerkin mostrada na Figura 1.11, que por sua vez, é muito próxima da solução exata. Neste caso, determina-se uma estimativa para o máximo valor da diferença entre solução exata e solução de RK, no domínio da equação diferencial estudada. Define-se um procedimento que faz esta determinação:

```
>maximo:=proc(solucao_exata,sol_num)
   local t,k,d,d1;
   d1:=0;
   for  k from 10 to 1 by -1 do
      t:=evalf(0+1/k);
      d:=abs(evalf(subs(x=t,solucao_exata)-
      op(2,op(2,solucao_numerica(t)))));
      if d > d1 then
        d1:=d:
      fi;
   od:
   return(d1);
end:
```

O valor máximo para a diferença neste caso foi de $2.96004583790 \times 10^{-10}$, resultado muito menor do que a diferença de 10^{-6} fornecida pelo MGT. Para melhorar a acurácia da aproximação de Galerkin, considera-se um N maior. Quando $N = 6$ na eq. (1.2.23), o resíduo R, torna-se

$$\begin{aligned} R \;=\; & -\sin(x) - c_1 x - c_1 - 4\,c_2 x - 9\,c_3 x^2 - 16\,c_4 x^3 - 25\,c_5 x^4 - \\ & -36\,c_6 x^5 - 2\,c_2 x^2 - 3\,c_3 x^3 - 4\,c_4 x^4 - 5\,c_5 x^5 - 6\,c_6 x^6 - c_2 x^3 - \\ & -c_3 x^4 - c_4 x^5 - c_5 x^6 - c_6 x^7 + 2\,c_2 + 12\,c_4 x^2 + 20\,c_5 x^3 + \\ & +30\,c_6 x^4 + 6\,c_3 x - c_1 x^2. \end{aligned}$$

O sistema matricial resultante para o produto interno entre R e a função peso $\phi_k(x) = x^k - x^{k+1}$, com $N = 6$, pode ser obtido através dos comandos de Maple a seguir:

```
>restart:


>eq := diff(y(x),x$2) +diff(y(x),x)+ y(x) - sin(x) =0;
>ini := y(0) = 0, y(1)=0;
>u:=j->x^j-x^(j+1);
```

Este último comando insere a função de base, ϕ_j. A seguir, é definida a função de teste:

```
>U:=sum(c[k]*u(k),k=1..N);
```

O resíduo, R, é dado diretamente por:

```
>R := lhs(subs(y(x)=U,eq));
>N:=6:
>R;
```

Os dois últimos comandos reescrevem o resíduo quando $N = 6$. Os comandos que seguem, geram respectivamente: uma sequência com os resultados do produto interno entre resíduo e a função peso, uma sequência com os coeficientes desconhecidos a_j, e as matrizes que compõem o sistema matricial procurado:

```
>L:=([seq(int(u(j)*R,x=0..1)=0,j=1..N)]);
>vars := seq(a[i],i=1..N);
>A,b := LinearAlgebra[GenerateMatrix](L,[vars]);
```

A resolução do sistema encontrado pode ser feita utilizando aritmética racional através do comando a seguir:

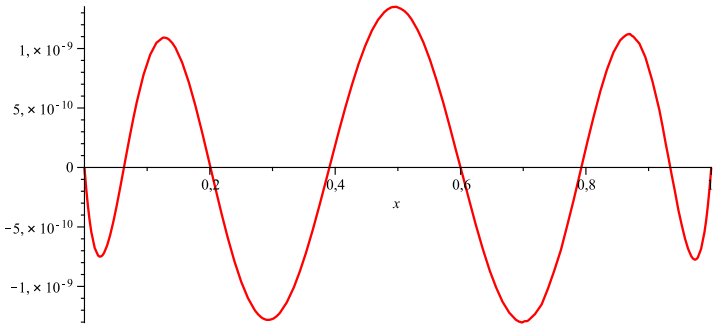
```
>with(LinearAlgebra):
>a:=(LinearSolve(A,b));
```

Este último determina os coeficientes a_j que completam a aproximação de Galerkin $\tilde{u}_6(x)$, referente à $N = 6$. Tal solução pode ser escrita por

$$\begin{aligned}\tilde{u}_6 \;=\; & -0.2237980771028\,x + 0.1119009742038\,x^2 + 0.166648590429\,x^3 - \\ & -0.05091454846\,x^4 - 0.00664288455\,x^5 + 0.00299651859\,x^6 \\ & -0.00019057311\,x^7.\end{aligned}$$

O gráfico do erro para a aproximação $\tilde{u}_6$ está na Figura 1.13, onde nota-se uma diminuição expressiva no erro em relação a aproximação para $N = 3$. O erro para valores superiores a $N = 6$ começa a aumentar gradativamente, por isso este valor foi escolhido para ser analisado. Resultados referentes ao motivo pelo qual as aproximações de Galerkin não melhoram quando N cresce ilimitadamente são discutidas no capítulo 4.

Figura 1.13: Erro relativo para ao MGT com $N = 6$.



Fonte: Produção do próprio autor

Aqui, o método de Runge-Kutta ainda possui melhor acurácia, no entanto o MGT fornece uma *solução analítica* aproximada.

1.2.4 Problema de valor de contorno com coeficiente variável

O problema a ser analisado nesta seção assemelha-se com o estudado na seção anterior. Porém neste caso, adicionou-se um coeficiente variável à equação diferencial linear de segunda ordem, que é escrita por

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + x\frac{du(x)}{dx} + u(x) - \sin(x) = 0. \tag{1.2.25}$$

As condições de contorno são $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$. Neste caso, a expressão que representa a solução exata não será explicitada por ser demasiadamente grande. No entanto ela pode ser facilmente obtida através do seguinte comando:

```
>restart:
```

```
>eq := diff(y(x),x$2) +x*diff(y(x),x)+ y(x) - sin(x) =0:
>ini := y(0) = 0., y(1)=0.:
>exata := dsolve({eq,ini},y(x));
```

A solução tentativa a ser utilizada aqui, é a mesma da seção anterior, mostrada na eq. (1.2.23), pois a função de base $\phi_j(x) = x^j - x^{j+1}$ satisfaz as condições iniciais do problema em questão. Substituindo (1.2.23) na eq. (1.2.25), obtém-se o resíduo, dado por

$$\begin{aligned} R &= \frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{k=1}^{N} c_k\left(x^k - x^{k+1}\right)\right] + x + \frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{N} c_k\left(x^k - x^{k+1}\right)\right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N} c_k\left(x^k - x^{k+1}\right). \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

Para $N = 6$, a eq. (1.2.26) torna-se

$$\begin{aligned} R &= -2\,c_1 - 6\,c_2 x + 3\,c_2 x^2 - 12\,c_3 x^2 + 4\,c_3 x^3 - 20\,c_4 x^3 + 5\,c_4 x^4 - \\ &\quad -30\,c_5 x^4 + 6\,c_5 x^5 - 42\,c_6 x^5 + 7\,c_6 x^6 + 2\,c_2 + 2\,c_1 x - 4\,c_2 x^3 - \\ &\quad -5\,c_3 x^4 - 6\,c_4 x^5 - 7\,c_5 x^6 - 8\,c_6 x^7 - 3\,c_1 x^2 + 6\,c_3 x + 12\,c_4 x^2 + \\ &\quad +20\,c_5 x^3 + 30\,c_6 x^4 - \sin(x). \end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, pode-se obter o sistema matricial resultante da condição de Galerkin através dos comandos de Maple a seguir:

```
>u:=j->x^j-x^(j+1);
>U:=sum(c[k]*u(k),k=1..N);
>R := lhs(subs(y(x)=U,eq));
>N:=6:
>R;
>L:=([seq(int(u(j)*R,x=0..1)=0,j=1..N)]);
>vars := seq(c[i],i=1..N);
>A,b := LinearAlgebra[GenerateMatrix](L,[vars]);
```

Os seguintes comandos fornecem a solução dos sistema matricial obtido:

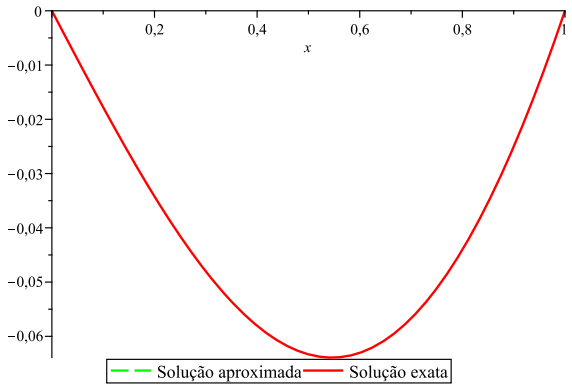
```
>with(LinearAlgebra):
>c:=(LinearSolve(A,b));
```

Pode-se expressar a solução $\tilde{u}_6(x)$ por

$$\begin{aligned} \tilde{u}_6(x) &= -0.18009149106\,x + 0.00015015306\,x^2 + 0.225356850\,x^3 + \\ &\quad +0.005482588\,x^4 - 0.06533604\,x^5 + 0.012977883\,x^6 + \\ &\quad +0.001460057\,x^7. \end{aligned}$$

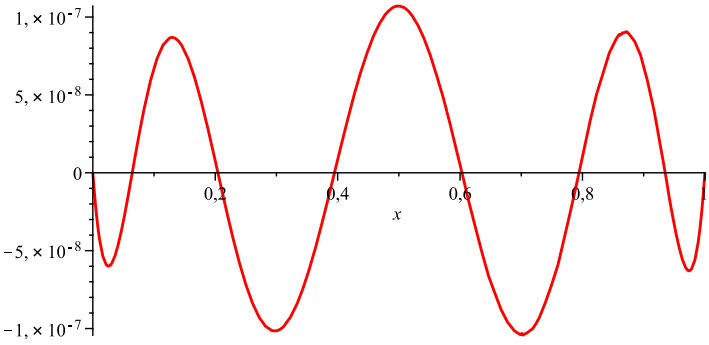
Na Figura 1.14 tem-se o gráfico da solução aproximada $\tilde{u}_6(x)$ e da solução exata. Ambas as soluções são indistinguíveis graficamente. Desta forma, a Figura 1.15 mostra o gráfico do erro relativo ao MGT para $N = 6$, lembrando que a escolha deste valor para N está relacionada à minimização do erro.

Figura 1.14: Solução exata $u(x)$ e aproximação $\tilde{u}_6(x)$ para o problema de valor inicial com coeficiente variável.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 1.15: Erro na solução de Galerkin quanso $N = 6$ no problema de valor de contorno com coeficientes constantes.



Fonte: Produção do próprio autor

Capítulo 2

MÉTODOS DE RESÍDUOS PONDERADOS

Até este momento estudou-se somente aspectos do MGT, porém, esta representação pode ser classificada como um dos tratamentos que fazem parte da classe dos *métodos de resíduos ponderados* (MRPs).

Neste capítulo, apresenta-se uma série de métodos enquadrados na classe dos MRPs, que permitem obter soluções aproximadas para PVCs. As descrições de tais métodos conduzirão a correlações que serão abordadas posteriormente.

2.1 DESCRIÇÃO GERAL DOS MÉTODOS DE RESÍDUOS PONDERADOS

O nome MRP, foi citado inicialmente por Crandall (1956). No entanto Collatz (1960) considerou uma ideia semelhante sob o nome de *princípio da distribuição do erro.* Somente algum tempo depois os MRPs puderam ser considerados como uma classe de métodos numéricos

Para a descrição dos MRPs, considera-se a equação diferencial

$$A(u) = 0, \tag{2.1.1}$$

com as condições iniciais $u(x_0) = 0$ e as condições de contorno $u|_{\partial\Omega} = 0$, onde A é um operador diferencial linear, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é o domínio da equação e $\partial\Omega$ é a fronteira desse domínio. A função $u \in L^2(\Omega)$. Uma solução aproximada $\tilde{u}$ é introduzida de modo que

$$\begin{aligned} A(\tilde{u}) &= R, \\ \tilde{u}(x_0) &= R_I, \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} &= R_b. \end{aligned}$$

Collatz (1960), descreve que a solução aproximada $\tilde{u}$ pode ser construída através do:

i) *método de contorno*, segundo o qual a equação diferencial é satisfeita exatamente, ou seja, $R = 0$;

ii) *método interior*, sendo que as condições de contorno são satisfeitas exatamente, isto é $R_b = 0$;

iii) *método misto*, em que nenhuma das condições, inicial ou de contorno, é satisfeita exatamente.

Neste trabalho, os MRPs serão descritos levando em conta o método interior, mas a formulação a ser apresentada se extende para os métodos de contorno e misto. Deste modo, para o método interior a solução aproximada $\tilde{u}$ pode ser escrita na forma

$$\tilde{u}(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\phi_j(x), \tag{2.1.2}$$

sendo que as funções de base, ϕ_j, são funções analíticas conhecidas e os $a_j(t)$ são coeficientes a determinar. Na eq. (2.1.2), $u_0(x,t)$ é escolhido para satisfazer as condições iniciais e de contorno exatamente, *se possível*.

A eq. (2.1.2) faz com que a eq. (2.1.1) seja reduzida a uma equação diferencial ordinária em t. Se $\phi_j = \phi_j(t)$, obtém-se uma equação diferencial parcial em x. Agora, se $\phi_j = \phi_j(x,t)$ ou o problema é estável, então os coeficientes a_j são constantes e a eq. (2.1.1) se reduz a um sistema de equações algébricas.

A determinação dos coeficientes a_j se dá através de

$$\langle R, w_k(x)\rangle = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.1.3}$$

sendo que w_k é chamada de *função peso* ou *função de ponderação*. Por conta da eq (2.1.3), percebe-se por que esta classe de métodos possui tal nome.

Uma vez que são necessárias relações independentes para determinar os coeficientes a_j, é claro que as funções analíticas $w_k(x)$, tem de ser funções independentes. Se os w_k's são membros de um conjunto completo de funções, quando $N \to \infty$, a eq. (2.1.3) indica que o resíduo R deve ser ortogonal a cada membro de um conjunto completo de funções (Fletcher, 1984).

Pode-se dizer então, que os MRPs conduzem a um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os coeficientes a_j da combinação linear estabelecida em (2.1.2). Desta forma a utilização da metodologia básica de aplicação do MRP pode ser dividida em três etapas fundamentais:

a. escolha da função teste ϕ_j;

b. escolha de um critério de ponderação, w_k;

c. obtenção da solução aproximada.

O item a. é de grande importância para a eficácia dos MRP, uma vez que tal escolha encontra-se diretamente relacionada à precisão e à velocidade com que a solução numérica é obtida. Segundo Finlayson (1972), quando aplicada a aproximações de baixas ordens, tal escolha exerce grande influência sobre a acurácia do resultado. Ao passo que, para aproximações de ordens elevadas, a influência é pouca, nestes casos a escolha afeta mais a velocidade de convergência do que o valor final da solução. Até os dias de hoje poucos critérios para seleção de tais funções foram propostos. Na grande maioria dos casos é possível utilizar diferentes conjuntos de funções, não sendo possível a priori definir qual destas escolhas resultarão em melhores resultados. Entretanto, o estudo de alguma característica específica do problema, como simetria e a aplicação das condições de contorno, pode em muitos casos auxiliar nesta escolha (Apêndice B). Segundo Finlayson (1972), a seleção das funções tentativa a serem adotadas fica na grande maioria dos casos dependente da intuição e da experiência do usuário. Sendo esta, na maioria das vezes considerada a maior limitação dos MRPs.

O item b. está associado ao resultado fornecido pela eq. (2.1.3) pois, através dela, muitos métodos que parecem independentes ficam correlacionados. De fato, as diferenças entre os mesmos, encontram-se na escolha das funções peso. Nas subseções a seguir, este fato ficará mais evidente, com a descrição de alguns casos em particular.

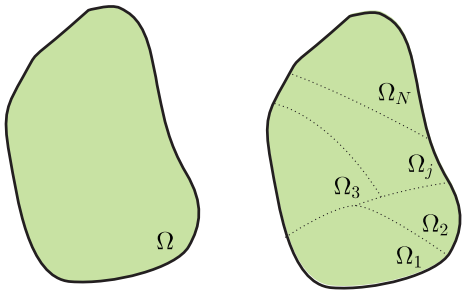
2.1.1 Método do subdomínio

O *método do subdomínio*, teve sua origem com o trabalho de Biezeno e Koch (1923). Para descreve-lo, considera-se o fato de que um domínio Ω pode ser dividido em N subdomínios Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, como mostrado na Figura 2.1, que por sua vez podem se sobrepor. Então, as funções peso w_k ficam da forma

$$w_k = \begin{cases} 1, & \text{em} \quad \Omega_k, \\ 0, & \text{fora} \quad \Omega_k. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

De fato, este método é considerado o mesmo que o *método do volume finito*, muito utilizado nos problemas da mecânica de fluidos e transferência de calor. Exemplos relacionados ao método do subdomínio, são encontrados nos métodos de Pallone (1961), Bartlett e Kendall (1968) e na resolução das equações de Navier-Stokes, dentre outros.

Figura 2.1: Representação de um domínio Ω que foi dividido em N subdomínios Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, N$.



Fonte: Produção do próprio autor

2.1.2 Método da colocação

No *método da colocação*, as funções peso são escolhidas para serem a distribuição delta de Dirac, δ, em n pontos interiores (chamados *pontos de colocação*), do domínio de interesse Ω, isto é

$$w_k(x) = \delta(x - x_k),$$

Esta expressão possui a seguinte propriedade

$$\int_\Omega w_j R \ \mathrm{d}\Omega = R\Big|_{x_k}.$$

Isso se deve a uma das características da distribuição δ, escrita por

$$\int_{x_k-a}^{x_k+b} f(x)\delta(x - x_k) \ \mathrm{d}x = f(x_k), \qquad a > 0, b > 0. \tag{2.1.5}$$

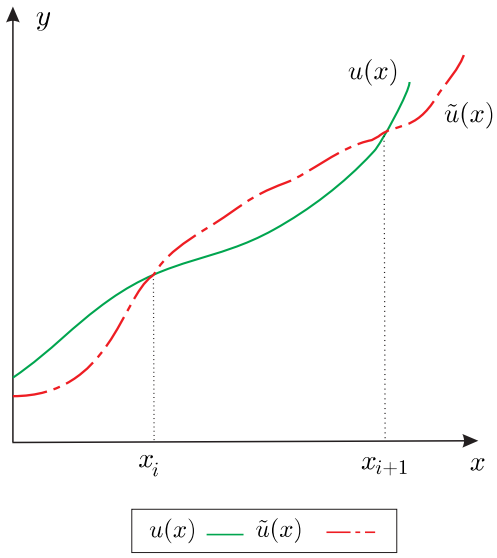
Pelas eqs. (2.1.3) e (2.1.5), tem-se que

$$R(x_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ou seja, força-se o resíduo a ser nulo nos pontos interiores de colocação $x_1, \ldots, x_n$, como é mostrado na Figura 2.2. Esta propriedade também é encontrada no método de diferenças finitas.

O trabalho relacionado ao método da colocação que ganhou maior destaque foi o de Frazer et al.(1937). Além dele outros estudiosos utilizaram este método, como Viviand e Ghazzi (1974) que aplicaram o método a problemas de fluxo não viscoso. Villadsen e Stewart (1967) introduziram o chamado *método da colocação ortogonal*, tratamento que será estudado de maneira mais detalhada na seção 2.3.

Figura 2.2: Representação do método da colocação, onde a solução aproximada $\tilde{u}(x)$ é imposta igual à solução exata $u(x)$ nas coordenadas x_i e x_{i+1}.



Fonte: Produção do próprio autor

2.1.3 Método dos mínimos quadrados

No *método dos mínimos quadrados*, as funções peso são expressas da forma

$$w_k = \frac{\partial R}{\partial a_k}, \tag{2.1.6}$$

sendo que os a_k's são os coeficientes desconhecidos da eq. (2.1.2). Nota-se que a eq. (2.1.6) é equivalente a escolher um dos a_k's de modo a obter uma minimização de $\langle R, R \rangle$.

Um recurso importante deste método está relacionado com problemas constantes, sendo que a minimização do quadrado da equação do resíduo, implica em um pequeno valor para o erro. Para problemas transitórios como o descrito na eq. (2.1.1), o método dos mínimos quadrados não é rigoroso. Neste caso é necessário incluir funções de teste para analisar o comportamento do tempo e do espaço. Assim, os coeficientes a_j na eq. (2.1.2) são constantes e o produto interno (2.1.3) inclui uma integração ao longo do domínio de tempo da solução (Fletcher,1984).

O método dos mínimos quadrados é o mais antigo dos MRP. Bickley (1941) utilizou esta abordagem para resolver problemas relacionados a condução de calor não-estacionário, como o que será estudado na seção 3.2. No entanto, ele notou que tomando a integração ao longo de um domínio de tempo infinito, peso insuficiente era atribuído ao tempo inicial, tornando o primeira solução pouco confiável. De fato, o método dos mínimos quadrados pode ser considerado com o peso adicional escolhido para favorecer o comportamento inicial do tempo, mas o critério para fazer isso não é óbvio.

2.1.4 Método dos momentos

A primeira aplicação do *método dos momentos* foi feita por Yamada (1947), que aplicou-o a um problema de difusão não-linear e para solucionar as equações de camadas laminares de fronteira. O tratamento mostrou ser muito eficaz quando utilizado para representar analíticamente a variação da velocidade através da camada limite. Neste caso, a função peso se torna

$$w_k(x) = x^k, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Portanto, anulam-se os seguintes produtos internos para calcular os coeficientes a_k

$$\begin{aligned} \langle R, 1\rangle &= 0, \\ \langle R, x\rangle &= 0, \\ \langle R, x^2\rangle &= 0, \\ &\vdots \\ \langle R, x^{N-1}\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Existe um tratamento que apresenta forme conexão com o método dos momentos, denominado método das relações integrais. Este foi desenvolvido por Dorodnitsyn (1960), e sua formulação impõe que as funções peso sejam da forma

$$w_k(x) = (1 - x)^k, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Fletcher e Holt (1975) chamaram o mesmo tratamento de método ortonormal de relações integrais.

2.1.5 Método de Galerkin tradicional

Para o MGT , a função peso é escolhida a partir da mesma família das funções de base, ou seja

$$w_k(x) = \phi_k(x), \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Alguns autores como Mikhlin (1964), associam o nome de Bubnov[1] com o MGT. No entanto, como observou o próprio Mikhlin (1964), Bubnov apresenta uma formulação em conexão com métodos variacionais[2] para a resolução de problemas de autovalores. E ainda, Bubnov estabelece que tanto as funções peso, quanto as de base devem ser

[1]Ivan Grigoryevich Bubnov (18 de janeiro de 1872 - 13 de março 1919) foi um engenheiro naval russo que desenvolveu grandes trabalhos como projetista de submarinos para a Marinha Imperial Russa.

[2]Os métodos variacionais são tratamentos analíticos nos quais há minimização de um funcional que descreve a distância de um caminho limitado nas extremidades $[a, b]$ por uma função $y(x)$ que descreve o caminho. (Burden e Faires, 2011).

ortogonais. Esta não é uma exigência do MGT e, o mesmo não requer uma formulação variacional correspondente. Neste trabalho, considera-se o MGT separado do método de Bubnov.

Muitas aplicações do MGT são dadas em Kantorovich e Krilov (1958) e Collatz (1960). Algumas destas aplicações, serão descritas no capítulo 4.

2.1.6 Método de Galerkin generalizado

No *método de Galerkin generalizado*, as funções peso são representadas por

$$w_k(x) = P_k(x),$$

onde $P_k(x)$ é uma função analítica, semelhante à função de base ϕ_k utilizado pelo MGT, mas com condições ou elementos adicionais para impor algum requisito adicional na solução. O interessante nesta categoria é que, ao aplicar o MGT com elementos lineares para alguns problemas, as equações algébricas resultantes têm propriedades instáveis indesejadas. Por vezes, o método de Galerkin generalizado é referido como o *método de Petrov-Galerkin*.

O termo método de galerkin generalizado também tem sido utilizado em sentido equivalente ao MRP por Murphy (1973). Assim como Harrington (1968) utiliza o termo método dos momentos num sentido equivalente ao MRP. O método de Galerkin generalizado não será abordado neste trabalho[3].

2.2 COMPARAÇÕES ENTRE OS CRITÉRIOS DE PONDERAÇÃO

Nesta seção, considera-se um exemplo que será aplicado aos diferentes MRPs. O objetivo é verificar qual deles é o mais consistente e acurado, ou simplesmente mais rápido ou mais fácil de ser aplicado. Toma-se um problema que já foi abordado na seção 1.2.1 perante o MGT. Considera-se a seguinte equação

$$\frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0,$$

com a condição inicial $y(0) = 1$ no intervalo $[0, 1]$ e a soluçao exata $y(x) = e^x$. A solução aproximada $\tilde{y}_N(x)$, conforme a eq. (2.1.2), é

$$\tilde{y}_N(x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} a_j x^j, \tag{2.2.7}$$

[3]Para mais detalhes ver Anderssen e Mitchell, 1979.

e, como já foi calculado anteriormente na eq. (1.2.6), o resíduo obtido neste caso é

$$R = -1 + \sum_{j=1}^{N} a_j (j x^{j-1} - x^j). \tag{2.2.8}$$

A seguir, prossegue-se à aplicação de alguns dos métodos citados anteriormente quando $N = 3$ na eq. (2.2.7), isto é, em cada caso deverão ser encontrados os coeficientes a_1, a_2 e a_3, que são os valores que completam a aproximação $\tilde{y}_N(x)$.

Método dos subdomínios

O domínio do exemplo considerado é $[0, 1]$. Então, seguindo a descrição do método dos subdomínios, toma-se $N = 3$ subintervalos da forma $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ e $[2/3, 1]$. Em cada um destes subintervalos $w_k = 1$, como foi estabelecido em (2.1.4). Portanto

$$\langle R, 1 \rangle = 0.$$

No subdomínio $[0, 1/3]$, obtém-se $\langle R, 1 \rangle_1$, que pode ser escrito por

$$\begin{aligned} \langle R, 1 \rangle_1 &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[-1 + \sum_{j=1}^{3} a_j (j x^{j-1} - x^j) \right] \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{3} aj \left[\left(\frac{1}{3}\right)^j - \left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} \frac{1}{j+1} \right]. \end{aligned}$$

Igualmente, nos subdomínios $\left[1/3, 2/3\right]$ e $\left[2/3, 1\right]$ tem-se $\langle R, 1 \rangle_2$ e$\langle R, 1 \rangle_3$ dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \langle R, 1 \rangle_2 &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left[-1 + \sum_{j=1}^{3} a_j (j x^{j-1} - x^j) \right] \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{3} a_j \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{1}{3}\right)^j + \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} \right] \frac{1}{j+1} \right\}, \\ \langle R, 1 \rangle_3 &= \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left[-1 + \sum_{j=1}^{3} a_j (j x^{j-1} - x^j) \right] \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{3} a_j \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^j + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} - 1 \right] \frac{1}{j+1} \right\}. \end{aligned}$$

Com o Maple, obtém-se a expansão direta dos somatórios das eqs. (2.2.9), (2.2.9) e (2.2.9). Os comandos de entrada estão a seguir:

```
>with(LinearAlgebra):
```

O comando `LinearAlgebra` carrega pacotes úteis em manipulações algébricas. Os co-

mandos abaixo inserem os somatórios que devem ser desenvolvidos:

```
>-1/3+sum(a[j]((1/3)^j-(1/3)^(j+1)/(j+1)), j = 1 .. 3)=0;
>-1/3+sum(a[j]*((2/3)^j-(2/3)^(j+1)/(j+1)-(1/3)^j+(1/3)^(j+1)/(j+1)),
j = 1 .. 3)=0;
>-1/3+sum(a[j]*(a[j]*(1-1/(j+1)-(2/3)^j+(2/3)^(j+1)/(j+1))), j = 1 ..
3)=0;
```

Assim, é formado um sistema de equações algébricas representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{8}{81} & \frac{11}{324} \\ \frac{1}{6} & \frac{20}{81} & \frac{23}{108} \\ \frac{1}{18} & \frac{26}{81} & \frac{163}{324} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$a_1 = 1.0156250000, \quad a_2 = 0.42187500000, \quad a_3 = 0.28125000000.$$

Método da colocação

Nesta abordagem, a função peso é da forma $w_k = \delta(x - x_k)$. Logo, o produto interno entre resíduo e peso torna-se

$$\langle R, \delta(x - x_k) \rangle \;\; = \;\; \int_0^1 \left[-1 + \sum_{j=1}^{3} a_j (j x^{j-1} - x^j) \delta(x - x_k) \right] \mathrm{d}x \tag{2.2.9}$$

A resolução da eq. (2.2.9) envolve a aplicação simples da propriedade da distribuição δ descrita na eq. (2.1.5). Assim, fica-se com

$$\langle R, \delta(x - x_k) \rangle = -1 + \sum_{j=1}^{3} a_j (j x_k^{j-1} - x_k^j). \tag{2.2.10}$$

Calculando as equações resultantes nos pontos de colocação $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$ e $x_3 = 1$ (escolhe-se pontos igualmente espaçados dentro do domínio da equação diferencial no caso do método da colocação), segundo os comandos abaixo

```
>f:=-1+sum(a[j]*(j*x^(j-1)-x^j), j = 1 .. 3) = 0;
>f :=x-> -1+a[1]*(1-x)+a[2]*(2*x-x^2)+a[3]*(3*x^2-x^3) = 0:
>f(0);f(0.5);f(1);
```

obtém-se um sistema de equações algébricas cuja representação matricial é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.2.11}$$

A solução para este sistema é

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.42857142857, \quad a_3 = 0.28571428571.$$

Método dos mínimos quadrados

Agora, o formato da função peso é dado pela eq. (2.1.6). No problema em questão tem-se

$$w_k = \frac{\partial R}{\partial a_k} = kx^{k-1} - x^k,$$

com R dado na eq. (2.2.8). Assim,

$$\begin{aligned} \langle R, w_k \rangle &= \int_0^1 \left[-1 + \sum_{j=1}^{3} a_j (jx^{j-1} - x^j) \right] (kx^{k-1} - x^k) \mathrm{d}x \\ &= -1 + \frac{1}{k+1} + \sum_{j=1}^{3} a_j \left(\frac{kj}{k+j-1} + \frac{1}{k+j+1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Impondo a condição da eq. (2.1.3), fica-se com

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{kj}{k+j-1} + \frac{1}{k+j+1} - 1 \right) a_j = 1 - \frac{1}{k+1}. \tag{2.2.12}$$

Um comando iterativo simples, que já foi utilizado anteriormente e determina os elementos que compõem a forma matricial da eq. (2.2.12), será aplicado conforme segue:

```
>for k from 1 to 3 do
 for j from 1 to 3 do
  print(m[k,j]=k*j/(k+j-1)+1/(k+j+1)-1);
 od;
od;

>for k from 1 to 3 do
 for j from 1 to 1 do
  print(t[k,j]=1-(1/(k+1)));
 od;
```

Desta forma, a eq. (2.2.12) torna-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{8}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{33}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \tag{2.2.13}$$

cujos coeficientes são

$$a_1 = 1.013057181, \quad a_2 = 0.4254840162, \quad a_3 = 0.2797163440.$$

Método de Galerkin tradicional e método dos momentos

Conforme foi dito anteriormente, a solução do exemplo em questão, já foi calculado perante o MGT na seção 1.2.1, onde foram encontrados os seguinte coeficientes

$$a_1 = 1.0140845070, \quad a_2 = 0.42253521127, \quad a_3 = 0.28169014084.$$

Além disso, nota-se que, devido à escolha das funções de teste, neste exemplo, o método dos momentos é idêntico ao MGT.

Resultados

Como já era esperado, os coeficientes a_j, $j = 1, 2, 3$, são semelhantes para todos os métodos verificados acima. A Tabela 2.1 expõe melhor este fato.

Tabela 2.1: Valores obtidos para os coeficientes em cada método.

Coeficientes / **Método**	a_1	a_2	a_3
Subdomínio	1.0156250000	0.42187500000	0.28125000000
Colocação	1	0.42857142857	0.28571428571
Mínimos Quadrados	1.013057181	0.4254840162	0.2797163440
Momentos	1.0140845070	0.42253521127	0.28169014084
Galerkin	1.0140845070	0.42253521127	0.28169014084

Fonte: Produção do próprio autor

A comparação entre cada um dos métodos aplicados e a solução exata $y(x) = e^x$, é feita simplesmente substituindo os valores dos coeficientes a_j em

$$\tilde{y}_3(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \tag{2.2.14}$$

sendo $\tilde{y}_3(x)$ a solução aproximada para $N = 3$, conforme a eq. (2.2.7). Na Tabela 2.2, a acurácia das aproximações em relação a solução exata, pode ser comparada para alguns valores de x.

O cálculo do erro relativo para cada método estudado apresenta-se na Tabela 2.3.

Tabela 2.2: Aproximações $\tilde{y}_3$ e solução exata $y(x) = e^x$.

Valores para x / **Método**	0	0.3	0.7	1
Subdomínio	1	1.3502500000	2.0141250000	2.7187500000
Colocação	1	1.3462857143	2.0080000000	2.7142857143
Mínimos Quadrados	1	1.3497630571	2.0135699006	2.7182575412
Momentos	1	1.3498591549	2.0135211267	2.7183098592
Galerkin	1	1.3498591549	2.0135211267	2.7183098592
Solução exata($y = e^x$)	1	1.3498588076	2.0137527075	2.7182818285

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 2.3: Erro relativo para os métodos estudados.

Valores para x / **Método**	0	0.3	0.7	1
Subdomínio	0	0.0003911924	0.0003722925	0.0004681715
Colocação	0	0.0035730933	0.0057527075	0.0039961142
Mínimos Quadrados	0	0.0000957505	0.0001828069	0.0000242873
Momentos	0	0.0000003473	0.0002315808	0.0000280307
Galerkin	0	0.0000003473	0.0002315808	0.0000280307

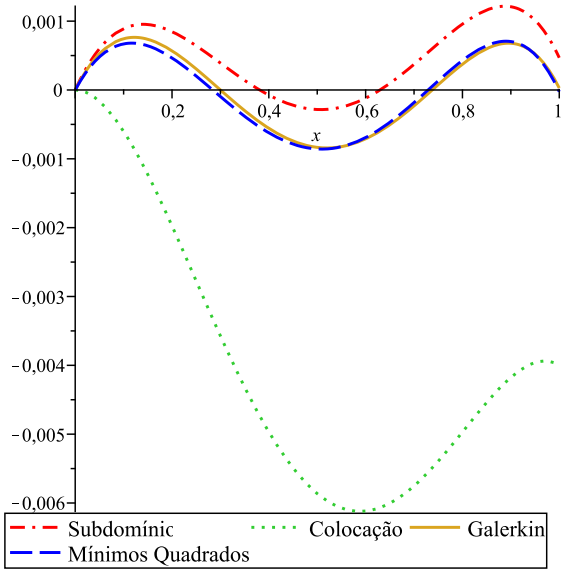
Fonte: Produção do próprio autor

Tanto o método dos mínimos quadrados quanto o MGT, apresentam acurácia elevada, como mostrado na Figura 2.3. Alguns autores classificam o método dos mínimos quadrados como o melhor critério de ponderação na aplicação dos MRPs. Embora toda a dificuldade encontrada para sua aplicação limite consideravelmente a utilização desta metodologia, enquanto que o MGT tem boa aproximação, com esforço calculacional diminuto. Segundo Snyder et al. (1964), a convergência do MGT com o aumento do número de termos da expansão é mais rápida, comparada ao método da colocação e dos mínimos quadrados. Para alguns casos de estudo, os resultados obtidos pela aplicação do MGT podem ser comparados a soluções obtidas pela aplicação de técnicas analíticas como descrevem Finlayson e Scriven (1966).

O método dos subdomínios tem formulação simples e, além disso, apresenta um erro baixo. Porém não é o tratamento mais acurado dentre os métodos estudados.

Wedel et al. (1977) compararam o método da colocação ao método de Galerkin. Segundo os autores, o método da colocação é muito mais fácil de ser aplicado, já que o esforço computacional necessário à integração é evitado. Entretanto, este tratamento apresentou a pior aproximação no exemplo estudado. A baixa acurácia do método, se deve a escolha dos pontos de colocação. Na próxima seção, um tratamento que otimiza o método da colocação será apresentado.

Figura 2.3: Erro relativo a cada método estudado.



Fonte: Produção do próprio autor

2.3 MÉTODO DA COLOCAÇÃO ORTOGONAL

Voltando aos resultados da seção 2.2, o método da colocação foi o que alcançou menor acurácia entre os tratamento estudados. Porém, a precisão do método de colocação pode ser melhorada se os pontos de colocação forem judiciosamente escolhidos. Neste contexto surge o *método da colocação ortogonal*, que foi desenvolvido por Villadsen e Stewart (1967) visando associar resultados mais precisos, como os fornecidos pela aplicação do método dos momentos e de Galerkin, à simplicidade do método da colocação. Este método é uma extensão do método clássico da colocação, diferindo apenas no critério de seleção adotado para escolha dos pontos de colocação, que não é mais feito de forma arbitrária e sim *utilizando as raízes de um polinômio ortogonal no domínio pretendido.*

Vale ressaltar, que o método da colocação ortogonal faz parte da classe dos MRP. Entretanto, a grande diferença entre este método e os demais MRP é que o resíduo não é diretamente ortogonalizado, mas sim aproximado por um polinômio ortogonal que se anula nos mesmos pontos, tornando os resultados mais confiáveis.

Villadsen e Stewart (1967) ocasionaram um grande avanço ao desenvolver o método da colocação ortogonal. Eles escolheram as funções de base como conjuntos de polinômios ortogonais , $P_N(x)$, da forma

$$P_N(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j x^i,$$

que satisfazem as condições de contorno e cujas raízes são os pontos de colocação. Ou

seja, devem satisfazer a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_a^b w(x)P_i(x)P_j(x)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j, \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Fletcher (1984) destaca que, se o MGT, fosse utilizado com funções peso e de base na forma $w(x)P_j(x)$, para resolver a equação diferencial $A(u) = 0$, o produto interno da eq. (2.1.3) ficaria

$$\int_\Omega w(x)P_k(x)A(u)\mathrm{d}x = 0. \tag{2.3.15}$$

Com este método, obtém-se fórmulas de quadratura[4] acuradas, e por conta das raízes de $P_N(x)$, a eq. (2.3.15) assume a forma

$$\sum_{i=1}^{N} H_i w(x_i)P_k(x_i)A(u(xi)) = 0, \tag{2.3.16}$$

sendo H_i o peso no regime da quadratura.

Desta forma, a solução da equação diferencial $A(u) = 0$, segundo o método da colocação ortogonal, torna-se

$$A[u(x_i)] = 0. \tag{2.3.17}$$

O problema todo é reduzido a um conjunto de equações matriciais que são facilmente resolvidas com computação algébrica. O livro de Villadsen (1970) traz uma ampla discussão do método e algumas aplicações. A seguir, tem-se dois exemplo que comparam o método da colocação convencional com o método da colocação ortogonal.

2.3.1 Problema de difusão e reação química

Considera-se o problema de difusão e reação química regido pela equação

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x) = 0,$$

no intervalo $[0, 1]$ com as condições $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ e $y(1) = 1$. Se a solução teste para este problema for descrita por

$$\tilde{y}(x) = 1 + \sum_{j=1}^{N} a_j(1 + x^{2j}),$$

com as condições $\tilde{y}(1) = 1$ e $\frac{d\tilde{y}}{dx} = 0$. O resíduo é

$$R = \frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}(x) - \tilde{y}(x).$$

[4]Fórmula de quadratura não é mais do que a média ponderada dos valores da função a integrar em determinados pontos do intervalo de integração

Quando $N = 1$ na eq. (2.3.1), a solução aproximada fica

$$\tilde{y}(x) = 1 + a_1(1 + x^2),$$

e o resíduo torna-se

$$R = -2a_1 - [1 + a_1(1 - x_1^2)].$$

Para o método da colocação convencional, escolhe-se $x_1 = 0.5$ como ponto de colocação (corresponde ao ponto localizado no meio do domínio). Desta forma, anulando o resíduo neste ponto obtém-se

$$R(x_1) = -2a_1 - [1 + a_1(1 - x_1^2)] = 0,$$

de modo que

$$a_1 = -\frac{1}{2 + (1 - x_1^2)} = -0.36363636364$$

Ou seja, a aproximação $\tilde{y}(x)$ para este caso é

$$\tilde{y}(x) = 1 - 0.36363636364(1 - x^2).$$

Antes de resolver o problema pelo método da colocação ortogonal, é necessário definir o *fator de eficiência* η, como

$$\eta = \int_0^1 y(x)\mathrm{d}x.$$

Suponha-se que se utiliza uma fórmula de quadratura para calcular esta integral numericamente. No caso presente, podemos escrever a quadratura da seguinte forma

$$\eta = \int_0^1 y(x) \approx \sum_{k=1}^{M} \alpha_k y(x_k) + \alpha_{m+1} y(1); \qquad 0 \leq x_1 < x_2 \ldots < x_m < 1,$$

sendo α_k coeficientes desconhecidos. Quanto mais pontos foram incluídos na fórmula mais precisa ela será. É por este motivo que se inclui o ponto $x = 1$ no conjunto de pontos de quadratura. Para $x = 1$ conhece-se o valor exato da solução.

O problema que se coloca agora é: *Quais deverão ser os valores dos coeficientes α_k e dos pontos de quadratura x_k para que a fórmula seja o mais precisa possível?* Considera-se a fórmula de quadratura mais simples, com um único ponto interno de quadratura dada por

$$\eta = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(1).$$

Esta fórmula de quadratura tem 3 incógnitas, α_1, α_2 e x_1. Portanto, são necessárias três equações para resolver o problema. Se a solução fosse constante em todo o domínio, isto

é, $y(x) = 1$, a aplicação da fórmula de quadratura originaria

$$\eta = \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Supondo aqora que o perfil de concentração é um polinômio de segundo grau

$$y(x) = 1 + a_1(1 + x^2),$$

se a fórmula de quadratura for válida para $y(x) = 1$ e $y(x) = 1 - x_2$ então ela será necessariamente válida para $y(x) = 1 + a_1(1 - x_2)$ por ser uma combinação linear dos polinômios anteriores. Por uma questão de simplicidade usa-se então $y(x) = 1 - x_2$. Aplicando a fórmula de quadratura à integral obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 y(x)\mathrm{d}x &= \frac{2}{3} = \alpha(1 - x_1^2) + \alpha_2(1 - 1^2) \\ &= \frac{2}{3} = \alpha_1(1 - x_1^2). \end{aligned}$$

Para encontrar a terceira equação considera-se $y(x) = 1 - x_4$. Se a fórmula de quadratura for válida para $y(x) = 1$, $y(x) = 1 - x_2$ e $y(x) = 1 - x_4$, então ela será válida para qualquer polinômio do tipo $y(x) = 1 + a_1(1 - x_2) + a_2(1 - x_4)$. Para $y(x) = 1 - x_4$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 y(x)\mathrm{d}x &= \frac{4}{5} = \alpha(1 - x_1^4) + \alpha_2(1 - 1^4) \\ &= \frac{4}{5} = \alpha_1(1 - x_1^4). \end{aligned}$$

Agora já tem-se

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ (1 - x_1^2)\alpha_1 = \dfrac{2}{3} \\ (1 - x_1^4)\alpha_1 = \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

sendo possível determinar $x_1 = 0.44721359550$. Voltando a resolver o problema de difusão e reação pelo método de colocação com $N = 1$ e $x_1 = 0.44721359550$ em vez de $x_1 = 0.5$ e anulando-se o resíduo neste ponto, fica-se com

$$a_1 = -\frac{1}{2 + (1 - x_1^2)} = -0.35714285714.$$

Assim, a solução aproximada para este caso torna-se

$$\tilde{y}(x) = 1 - 0.35714285714(1 - x^2).$$

A solução exata do problema da difusão e reação é

$$y(x) = \frac{\cosh(x)}{\cosh(1)}.$$

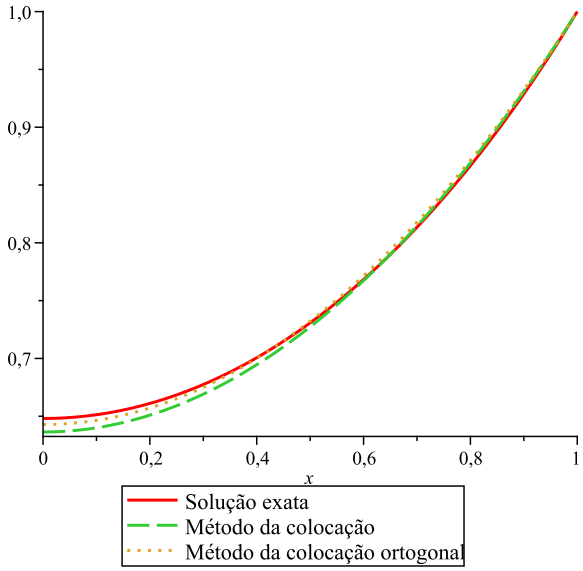
Na Tabela 2.4 tem-se a comparação entre as soluções obtidas com o método da colocação convencional e da colocação ortogonal, em relação a solução exata. Na Figura 2.4 tem-se os gráficos das soluções perante o método da colocação convencional, ortogonal e a solução exata.

Tabela 2.4: Valores obtidos perando o método da colocação convencional e da colocação ortogonal em comparação com a solução exata.

x	Método da colocação	Método da colocação ortogonal	Solução analítica
0	0.63636363636	0.64285714286	0.64805427367
0.1	0.64000000000	0.64642857143	0.65129724619
0.2	0.65090909091	0.65714285715	0.66105862040
0.3	0.66909090909	0.67500000000	0.67743609149
0.4	0.69454545454	0.70000000000	0.70059357069
0.5	0.72727272727	0.73214285714	0.73076282585
0.6	0.76727272727	0.77142857143	0.76824580094
0.7	0.81454545454	0.81785714286	0.81341763826
0.8	0.86909090909	0.87142857143	0.86673043271
0.9	0.93090909091	0.93214285714	0.92871775660
1	1	1	1

Fonte: Produção do próprio autor

Figura 2.4: Solução exata para o problema da difusão e reação e soluções aproximadas perante os métodos da colocação convencional e ortogonal.



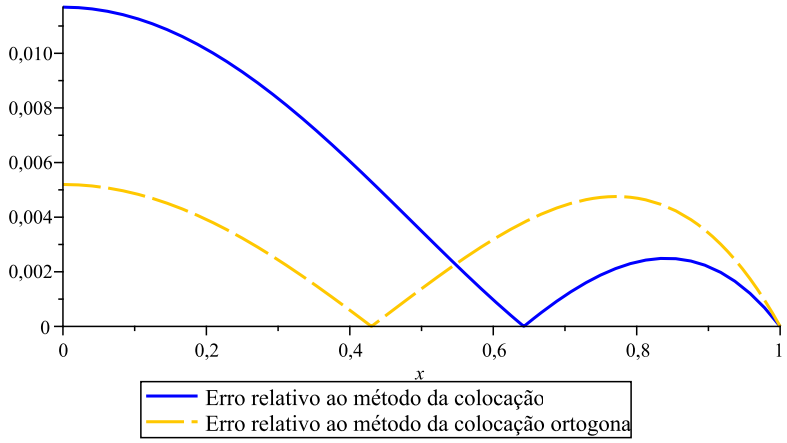
Fonte: Produção do próprio autor

Os erros relativos tanto para o método convencional quanto para o ortogonal são mostrados na Figura 2.5, onde é possível verificar com clareza a diferença entre os dois resultados, e a melhora da acurácia quando utiliza-se pontos de colocação judiciosamente escolhidos. O ponto $x_1 = 0.44721359550$ funcionou bem porque ele é um zero de um *polinômio de Jacobi* específico que está relacionado com o problema em questão. Estes polinômios são uma sequência de polinômios ortogonais, sendo que um polinômio de Jacobi de grau N tem a seguinte representação em série de potências

$$J_N^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{N-i} \gamma_{N,i} x^i,$$

com $\gamma_{N,0} = 1$. Os coeficientes $\gamma_{N,i}$ são constantes e α e β caracterizam o tipo do polinômio.

Figura 2.5: Erro relativo para os métodos da colocação convencional e ortogonal.



Fonte: Produção do próprio autor

2.3.2 Problema de valor de contorno

Agora, considera-se o seguinte problema de valor de contorno

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2}\left(x^6 + 3\,x^2\right) + u(x) = 0,$$

no intervalo $[-1, 1]$ com as condições de contorno $u(-1) = 1$ e $\frac{du}{dx}(1) = 1$. A solução exata deste problema é

$$u\left(x\right) = \frac{\mathrm{e}^{x^4/4,}}{\mathrm{e}^{1/4}}.$$

A solução de teste a ser utilizada perante o método da colocação será

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i x^{i-1}\left(1 - x^2\right) + 1. \tag{2.3.18}$$

Esta solução satisfaz as condições de contorno de forma independente. Os comandos abaixo, inserem as informações da equação diferencial no Maple:

```
>restart:
>L:=(u,x)->diff(u,x$2)-(x^6+3*x^2)*u;
>bv := u(-1)=1, u(1)=1;
```

O resíduo para esta aproximação, quando $N = 11$ na eq. (2.3.18) é dado pelos seguintes comandos:

```
>n:=11;
>u2:=sum(a[i]*x^(i-1),i=1..n)*(1-x^2)+1;
>resid:=diff(u2,x$2)-(x^6+3*x^2)*u2;
```

Como condição de minimização de erros, escolhe-se fazer com que o resíduo obtido se anule em um conjunto de pontos iguais ao número de coeficientes indeterminados na aproximação $\tilde{u}_{11}$. Em uma abordagem de colocação convencional, escolhe-se 11 pontos no intervalo $[-1, 1]$, com separação uniforme, ou seja

$$\begin{aligned} x_1 &= -1.0, \quad x_2 = -0.8, \quad x_3 = -0.6, \\ x_4 &= -0.4, \quad x_5 = -0.2, \quad x_6 = 0.0, \\ x_7 &= 0.2, \quad x_8 = 0.4, \quad x_9 = 0.6, \\ x_{10} &= 0.8, \quad x_{11} = 1.0. \end{aligned}$$

Esses pontos de colocação são gerados a partir de:

```
>h:=2/10.;
>T:=evalf([seq(-1+j*h,j=0..n-1)]);
>F:=[seq(R(T[i]),i=1..n)];
```

Este último comando avalia o resíduo nos pontos de colocação. Os coeficientes a_i são encontrados por:

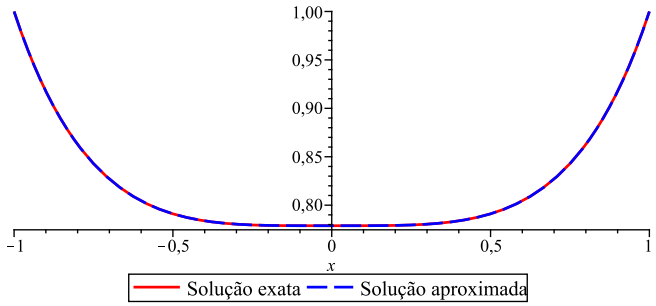
```
>sols:=solve({seq(F[i],i=1..n)},[seq(a[i],i=1..n)]);
```

Assim, a solução aproximada para $N = 11$ é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{11}(x) &= 0.77879637258 + 0.19470861028\,x^4 - 0.00013732543400\,x^6 + \\ &\quad +0.024976142946\,x^8 - 0.0011984305624\,x^{10} + 0.002854630192\,x^{12}. \end{aligned}$$

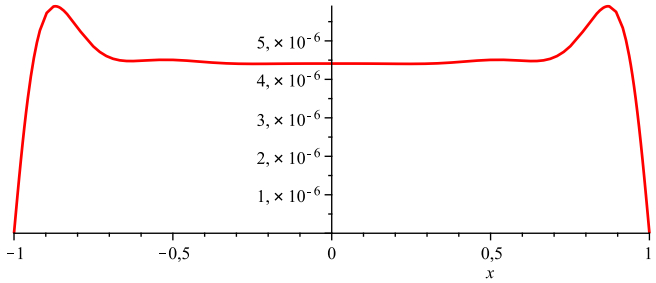
Os respectivos gráficos da solução exata e da aproximação são apresentados na Figura 2.6. O gráfico para o erro em cada ponto é dado na Figura 2.7.

Figura 2.6: Solução exata e solução aproximada perante o método da colocação convencional.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 2.7: Erro no método da colocação convencional.



Fonte: Produção do próprio autor

Agora, considera-se a aplicação do método da colocação ortogonal. Escolhe-se 11 pontos no intervalo $[-1, 1]$, com separação de Chebyshev[5]. A obtenção de tais pontos pode ser feita com:

```
>T:=evalf([seq(-cos((2*j-1)*Pi/(2*n)),j=1..n)]);
```

Este comando fornece os pontos de colocação:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.9898214419, \quad x_2 = -0.9096319953, \quad x_3 = -0.7557495743, \\ x_4 &= -0.5406408173, \quad x_5 = -0.2817325565, \quad x_6 = 0.0, \\ x_7 &= 0.2817325565, \quad x_8 = 0.5406408173, \quad x_9 = 0.7557495743, \\ x_{10} &= 0.9096319953, \quad x_{11} = 0.9898214419. \end{aligned}$$

A avaliação do resíduo nestes pontos e a solução para os coeficientes a_i são dadas por:

```
>F:=[seq(R(T[i]),i=1..n)];
>sols:=solve({seq(F[i],i=1..n)},[seq(a[i],i=1..n)]);
```

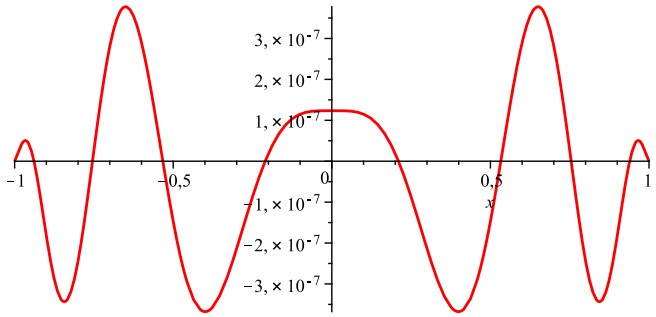
[5]Os polinômios de Chebyshev são um caso particular dos polinômiios de Jacobi.

Desta forma, a solução $\tilde{u}_{11}$ perante o método da colocação ortogonal é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{11}(x) &= 0.7788006596 + 0.1947914172\,x^4 - 0.0007138264600\,x^6 + \\ &\quad 0.02636024573\,x^8 - 0.002549337239\,x^{10} + 0.003310841213\,x^{12}\end{aligned}$$

O gráfico para o erro neste método encontra-se na Figura 2.8.

Figura 2.8: Erro no método da colocação convencional.



Fonte: Produção do próprio autor

A mera escolha dos pontos de Chebyschev em lugar de pontos igualmente espaçados diminuiu muito o erro nas aproximações, pois os polinômios de Chebyschev são ortogonais no domínio da equação diferencial estudada.

Capítulo 3

APLICAÇÕES FÍSICAS

Neste capítulo, são descritos alguns exemplos representativos do MGT que aparecem na literatura, sendo que a ênfase desta parte do estudo é apresentar a resolução do problema de fluxo viscoso em um canal e condução de calor não-estacionária.

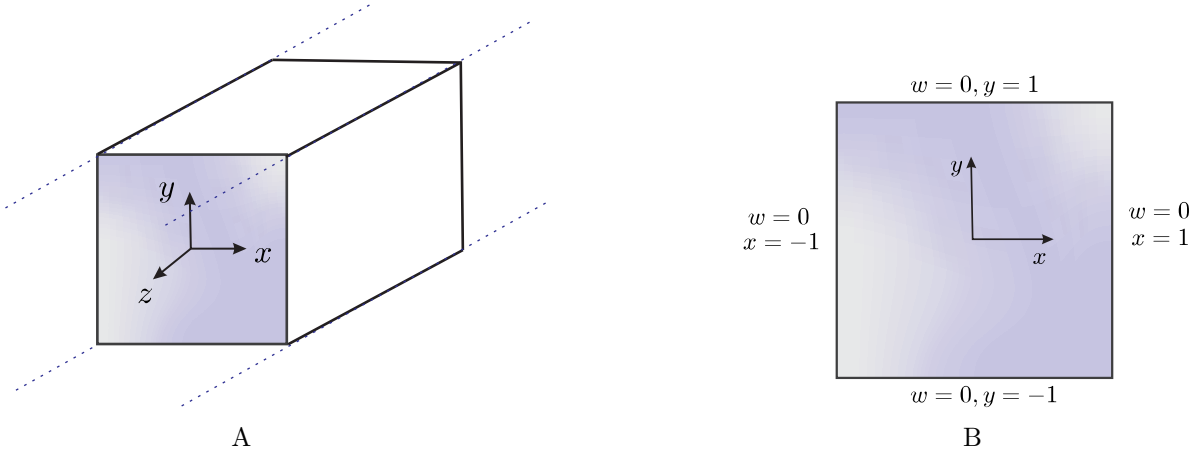
3.1 FLUXO VISCOSO EM UM CANAL

Considere um canal com seção transversal quadrada, como mostrado na Figura 3.1. Se este canal estiver sujeito a um fluido viscoso incompressível, a equação que rege seu fluxo, $w(x, y, z)$, é

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{3.1.1}$$

sendo ρ a densidade do fluido, u e v componentes da velocidade do fluido (assim como w), ν a viscosidade e $p = p(z)$ a pressão do fluido no canal (White, 1985). Essa formulação

Figura 3.1: Canal quadrado (A) e seção quadrada (B).



A B

Fonte: Produção do próprio autor

define (3.1.1) como uma equação de momento[1] em z, ou a componente z da equação de Navier-Stokes[2]. Longe da entrada ou saída do canal, o fluxo w não varia na direção de z e, os vetores u e v são iguais a zero (Fletcher, 1984, p.13). Desta forma, pode-se reescrever a equação (3.1.1) como

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{3.1.2}$$

sendo $\mu = \rho\nu$. Supondo $\partial p/\partial z$ constante, a eq. (3.1.2) toma a forma adimensional

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 = 0, \tag{3.1.3}$$

que é justamente a *equação de Poisson* em relação a w, comumente expressa por

$$\nabla^2 w = -1. \tag{3.1.4}$$

As condições de contorno para a eq. (3.1.3) são

$$w = 0, \text{ com } x = \pm 1 \text{ e } y = \pm 1, \tag{3.1.5}$$

como indicado na Figura 3.1.B.

Na aplicação do MGT, poderia-se utilizar funções de base da forma

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(x,y) &= \alpha_i(x)\beta_j(y) \\ &= (x^i - x^{i+1})(y^j - y^{j+1}), \end{aligned}$$

conforme sugere MacCluer (2000). Ou então

$$\phi_{ij}(x,y) = \sum_{j}^{N} a_j (1-x^2)^j (1-y^2)^j,$$

conforme Finlayson (1969). Neste trabalho, seguindo Fletcher (1984), serão utilizadas funções de base trigonométricas da forma

$$\phi_{ij}(x,y) = \cos i\frac{\pi}{2}x \cos j\frac{\pi}{2}y, \qquad i = 1,3,5,\ldots,\ j = 1,3,5,\ldots.$$

Assim, a solução aproximada $\tilde{w}$, conforme o MGT, é

$$\tilde{w} = \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N} \sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} a_{ij} \cos i\frac{\pi}{2}x \cos j\frac{\pi}{2}y, \tag{3.1.6}$$

[1] A equação de momento é uma afirmação decorrente da Segunda Lei de Newton e diz respeito à "[...]soma das forças que atuam sobre um elemento de fluido para a sua aceleração ou a taxa de variação do momento"(Garde, 1997, p.170).

[2] As equações de Navier Stokes são equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos.

que satisfaz as condições de contorno estabelecidas em (3.1.5).

Substituindo (3.1.6) na eq. (3.1.3), obtém-se o resíduo R, expresso por

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} a_{ij}\cos i\frac{\pi}{2}x\cos j\frac{\pi}{2}y\right] + \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} a_{ij}\cos i\frac{\pi}{2}x\cos j\frac{\pi}{2}y\right] + 1. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Efetuando o cálculo das derivadas parciais na eq. (3.1.7) tem-se

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} a_{ij}\left(\frac{-i\pi}{2}\right)\cos i\frac{\pi}{2}y\sin j\frac{\pi}{2}x\right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} a_{ij}\left(\frac{-j\pi}{2}\right)\cos i\frac{\pi}{2}x\sin j\frac{\pi}{2}y\right] + 1 \\ &= 1 - \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} a_{ij}\left[\left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{2}\right)^2\right]\cos i\frac{\pi}{2}x\cos j\frac{\pi}{2}y. \end{aligned}$$

Pela condição de Galerkin, sabe-se que

$$\left\langle R, \cos i\frac{\pi}{2}x\cos j\frac{\pi}{2}y\right\rangle = 0, \qquad i = 1,3,5,\ldots,\ j = 1,3,5,\ldots. \tag{3.1.8}$$

Nos exemplos do Capítulo 1, resolvia-se um sistema de equações para encontrar os coeficientes desconhecidos. Neste caso, a particular escolha das funções de base permite obter os coeficientes a_{ij} de maneira diferenciada. Uma expressão geral para o cálculo dos a_{ij} é obtida através da abordagem computacional (Apêndice B) e escrita por

$$a_{ij} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}+1}}{ij(i^2+j^2)}. \tag{3.1.9}$$

Observa-se que a escolha de funções trigonométricas evita um sistema de equações, pois as mesmas são ortogonais no domínio considerado. O uso de tais funções permite que o cálculo dos coeficientes a_{ij} seja independentemente dos coeficientes que os precedem. E ainda, segundo Kantorovich e Krylov (1958) a aplicação do MGT com funções de base trigonométricas produz as mesmas equações e soluções que o método de Fourier com um número finito de termos na expansão.

Substituindo (3.1.9) na eq. (3.1.6) , tem-se

$$\tilde{w} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}+1}}{ij(i^2+j^2)}\cos i\frac{\pi}{2}x\cos j\frac{\pi}{2}y. \tag{3.1.10}$$

A taxa de fluxo adimensional, $\dot{q}$, mais conhecida como vasão, está relacionada com $\tilde{w}$ por

$$\dot{q} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{w}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.11}$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}+1}}{ij(i^2+j^2)} \cos i\frac{\pi}{2}x \cos j\frac{\pi}{2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.1.12}$$

$$= \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}+1}}{ij(i^2+j^2)} \left(\frac{8.2}{\pi^2 ij}\right) 2\sin i\frac{\pi}{2} 2\sin j\frac{\pi}{2} \tag{3.1.13}$$

$$= 2\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}+1}.(-1)^{\frac{i+j}{2}+1}}{i^2j^2(i^2+j^2)} \tag{3.1.14}$$

$$= 2\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{N}\sum_{j=1,3,5,\ldots}^{N} \frac{1}{i^2j^2(i^2+j^2)}. \tag{3.1.15}$$

As aproximações $\tilde{w}$ e $\dot{q}$, mostradas na Tabela 3.1 podem ser calculadas através do seguinte procedimento:

```
>restart:
>Digits:=11:
>assume(i,integer):
>assume(j,integer):

>p := proc (i, j) options operator, arrow;(-1)^(i+j)*cos((2*i+1)*Pi*0/2)
*cos((2*j+1)*Pi*0/2)/((2*i+1)*(2*j+1)*((2*i+1)^2+(2*j+1)^2)) end proc:
>w[aprox]:=evalf((8/Pi^2)^2*(sum(sum(p(i, j), i = 0..N), j = 0..N)));

>m := proc (i, j) options operator, arrow; 1/((2*i+1)^2*(2*j+1)^2*
     ((2*i+1)^2+(2*j+1)^2)) end proc:
>q[aprox]:= evalf(2*(8/Pi^2)^3*(sum(sum(m(i, j), j = 0 .. N), i = 0 .. N)));
```

Alterando os valores de N no comando acima, obtém-se as aproximações mostradas na Tabela 3.1. Tais aproximações convergem rapidamente para as soluções exatas, como era esperado. As soluções exatas para w e $\dot{q}$ foram obtidas por Dryden et.al (1956) e também são mostradas na Tabela 3.1. A determinação destas últimas não é simples pois envolve um estudo aprofundado de equações diferenciais parciais não-homogêneas, potêncial newntoniano e espaços de Hölder[3]. Como estes temas extrapolam o objetivo deste trabalho, a obtenção das soluções analíticas de w e $\dot{q}$ foi suprimida.

[3]Para mais detalhes ver Haroske e Triebel (2008)

Tabela 3.1: Soluções para o fluxo viscoso usando o MGT.

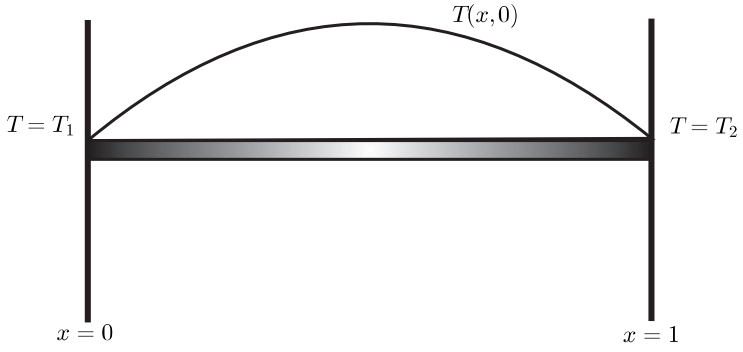
	Funções	
N	$\tilde{w}$	$\dot{q}$
1	0.32851143216	0.53256267433
2	0.28876560457	0.55696266517
3	0.29682270667	0.56055252209
4	0.29377661477	0.56153332310
5	0.29518151146	0.56190157081
6	0.29440211844	0.56206923801
7	0.29487012795	0.56215612460
Solução exata	0.29470000000	0.56230000000

3.2 CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA

Os problemas de calor, cujo comportamento conduz a um *estado não-estacionário* ou *estado transiente* são aqueles nos quais, uma alteração de temperatura ou fonte de calor pode ser repentinamente introduzida, e a condução de calor no interior de um objeto não tem tempo de se ajustar ao novo fluxo de calor (Çengel, 2010). A análise de sistemas de condução de estado não-estacionário é mais complexa que sistemas de estado estacionário, e (exceto para formas simples) requer a aplicação de métodos numéricos. No exemplo a seguir, usa-se o MGT para reduzir uma equação diferencial parcial, relacionada a um problema de condução de calor não-estacionária, a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Tal procedimento é particularmente útil pois, os algoritmos para integração de equações diferenciais são mais eficientes do que os algoritmos para a solução direta de equações diferenciais parciais (Gear, 1981).

Considera-se uma barra, cujas extremidades são mantidas a temperaturas T_1 na posição $x = 0$ e, T_2 na posição $x = 1$, como mostra a Figura 3.2. No instante $t = 0$, a

Figura 3.2: Condução de calor não-estacionária.



Fonte: Produção do próprio autor

temperatura da barra é expressa por

$$T(x,0) = T_1 + [\sin(\pi x) + x]\,[T_2 - T_1].$$

O comportamento da temperatura , após este instante é determinado pela equação diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

sendo α a difusividade térmica dada por

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p},$$

na qual ρ é a massa específica, c_p é o calor específico à pressão constante, e k é a condutividade térmica (Incropera et al., 2008). Neste momento é conveniente definir uma temperatura adimensional θ da forma

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}.$$

Se α for absorvido em um tempo adimensional, o problema pode ser resolvido através da equação

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \tag{3.2.16}$$

sujeita as condições de contorno

$$\theta(0,t) = 0 \text{ e } \theta(1,t) = 1,$$

e a condição inicial

$$\theta(x,0) = \sin(\pi x) + x. \tag{3.2.17}$$

Pelo MGT, uma aproximação para a solução é introduzida por

$$\tilde{\theta}_N(x,t) = \theta_0(x) + \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\phi_j(x), \tag{3.2.18}$$

sendo que θ_0 é a condição inicial expressa na eq. (3.2.17) e a função de base ϕ_j é dada por

$$\phi_j = x^j - x^{j+1}.$$

Percebe-se que θ_0 satisfaz tanto a condição de contorno, quanto a condição inicial e, as funções ϕ_j satisfazem as condições de contorno homogêneas.

Substituindo (3.2.18) na eq. (3.2.16), produz-se o resíduo R da seguinte forma

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial}{dt}\left[\theta_0(x) + \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\phi_j(x)\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\theta_0(x) + \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\phi_j(x)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x) - \frac{da_j}{dt} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d\theta_0}{dx} + \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\frac{d\phi_j(x)}{dx}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{N}\left[\phi_j(x)\frac{da_j}{dt}\right] - \frac{d^2\theta_0}{dx^2} - \sum_{j=1}^{N}\left[a_j(t)\frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\right] \\ &= -\frac{d^2\theta_0}{dx^2} + \sum_{j=1}^{N}\left[\phi_j(x)\frac{da_j}{dt} - a_j(t)\frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\right]. \end{aligned}$$

Aplicando o produto interno

$$\langle R, \phi_k\rangle = 0,$$

tem-se

$$\langle R, \phi_k\rangle = \int_0^1 \left[-\frac{d^2\theta_0}{dx^2} + \sum_{j=1}^{N}\left(\phi_j(x)\frac{da_j}{dt} - a_j(t)\frac{d^2\phi_j(x)}{dx^2}\right)\right]\phi_k \ \mathrm{d}x. \tag{3.2.19}$$

Como pode-se notar, a resolução da eq. (3.2.19) envolve uma expressão muito grande. Matricialmente, ela pode ser reescrita como um sistema de EDOs da seguinte forma

$$\langle R, \phi_k\rangle = M\dot{A} + BA + C = 0, \tag{3.2.20}$$

sendo A a matriz dos dos coeficientes a_j, e

$$\begin{aligned} m_{kj} &= \int_0^1 \phi_j(x)\phi_k \ \mathrm{d}x, \\ &= \int_0^1 (x^j - x^{j+1})(x^k - xk + 1) \ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x^{j+k} - 2x^{j+k+1} + x^{k+k+2}) \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{j+k+1} - \frac{2}{j+k+2} + \frac{1}{j+k+3}, \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

$$\begin{aligned} b_{kj} &= -\int_0^1 \frac{d^2\phi_j}{dx^2}\phi_k \ \mathrm{d}x, \\ &= -\int_0^1 [(j^2 - j)x^{j-2} - (j^2 + j)x^{j-1}](x^k - x^{k+1}) \ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{j^2 - j}{j+k-1} + \frac{2j^2}{j+k} - \frac{j^2 + j}{j+k+1}, \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_j &= \frac{da_j}{dt}, \\
c_k &= -\int_0^1 \frac{d^2\theta_0}{dx^2}\phi_k \ \mathrm{d}x, \\
&= \int_0^1 \pi^2 \sin(\pi x)(x^k - x^{k+1}) \ \mathrm{d}x. \qquad (3.2.23)
\end{aligned}
$$

A forma explícita de c_k será determinada mais adiante para cada k. Evidenciando a matrix $\dot{A}$ na eq. (3.2.20) fica-se com

$$
\begin{aligned}
\dot{A} &= M^{-1}(-BA - C) \\
\dot{A} &= SA + T, \qquad (3.2.24)
\end{aligned}
$$

sendo

$$S = -M^{-1}B \quad \text{e} \quad T = -M^{-1}C.$$

Como o sistema de equações diferenciais ordinárias da eq. (3.2.24) é linear, é possível obter a solução analítica. A seguir, atribui-se alguns valores para N na eq. (3.2.18) para encontrar a solução aproximada $\tilde{\theta}_N$ em cada caso.

N=1

Para $N = 1$, a eq. (3.2.24) pode ser reescrita como

$$\left[\frac{da_1}{dt}\right] = -[10][a_1] - \left[\frac{120}{\pi}\right], \qquad (3.2.25)$$

segundo as equações (3.2.21), (3.2.22) e (3.2.23). Como a condição $\theta_0(x)$ satisfaz as condições iniciais exatamente, pode-se considerar que o vetor dos coeficientes $a_j(0)$, denominado A_0, é igual a zero. Ou seja

$$a_1(0) = a_2(0) = \ldots = a_j(0) = 0.$$

Desta forma, considerando $a_1(0) = 0$, a solução para a EDO da eq. (3.2.25) é dada por

$$a_1(t) = -\frac{12}{\pi} + 12\,\frac{\mathrm{e}^{-10\,t}}{\pi}.$$

De modo que a primeira aproximação é

$$\tilde{\theta}_1(x,t) = \sin(\pi x) + x + \left(-\frac{12}{\pi} + \frac{12e^{-10t}}{\pi}\right)(x - x^2).$$

N=2

Agora, a equação matricial (3.2.24) torna-se

$$\begin{bmatrix} da_1/dt \\ da_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 16 \\ 0 & -42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -120\pi^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como as condições iniciais são $a_1(0) = a_2(0) = 0$, a solução para este sistema é

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -\frac{24 - 24\,\mathrm{e}^{-10\,t}}{2\pi}, \\ a_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\tilde{\theta}_2(x,t) = \sin(\pi\,x) + x - \frac{(12 - 12\,\mathrm{e}^{-10\,t})}{\pi}\left(x - x^2\right).$$

Nota-se que $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_1$. Mais adiante será comentado que isso não ocorre por acaso.

N=3

Neste caso, a eq. (3.2.24) fica

$$\begin{bmatrix} da_1/dt \\ da_2/dt \\ da_3/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 7 & -9 \\ 84 & 0 & 84 \\ -84 & -42 & -126 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(18480\,\pi^2 - 181440)\pi^{-3} \\ (85680\,\pi^2 - 846720)\pi^{-3} \\ -(85680\,\pi^2 - 846720)\pi^{-3} \end{bmatrix}.$$

A solução de um sistema como o descrito acima, envolve expressões demasiadamente grandes que serão omitidas neste trabalho. Entretanto, esta solução pode ser obtida através dos comando abaixo:

```
>restart:
>eq1:=diff(a1(t),t)=-28*a1(t)+7*a2(t)-9*a3(t)+4200/Pi-(22680*(-8+Pi^2))
      /Pi^3:
>eq2:=diff(a2(t),t)=84*a1(t)+84*a3(t)-20160/Pi+(105840*(-8+Pi^2))/Pi^3:
>eq3:=diff(a3(t),t)=-84*a1(t)-42*a2(t)-126*a3(t)+20160/Pi-(105840*(-8+Pi
      ^2)/Pi^3:
>ic:=a1(0)=0,a2(0)=0,a3(0)=0;
>simplify(dsolve({eq1,eq2,eq3,ic}));
```

Uma vez obtidos os valores para a_1, a_2 e a_3, é fácil encontrar a aproximação $\tilde{\theta}_3$.

N=4

Para este valor de N a eq. (3.2.24) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} da_1/dt \\ da_2/dt \\ da_3/dt \\ da_4/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 40 & 24 & 24 \\ 84 & -264 & -180 & -220 \\ -84 & 552 & 468 & 624 \\ 0 & -396 & -396 & -528 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{18480\,\pi^2 - 181440}{\pi^3} \\ \frac{85680\,\pi^2 - 846720}{\pi^3} \\ -\frac{85680\,\pi^2 - 846720}{\pi^3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os comandos para obtenção da solução deste sistema são

```
>restart:

>eq1:=diff(a1(t),t)=-28*a1(t)+40*a2(t)+24*a3(t)+24*a4(t)+31920/Pi
      -(272160*(-8+Pi^2))/Pi^3+(221760*(-9+Pi^2))/Pi^3:
>eq2:=diff(a2(t),t)=84*a1(t)-264*a2(t)-180*a3(t)-220*a4(t)-241920
      /Pi+(2101680*(-8+Pi^2))/Pi^3-(1774080*(-9+Pi^2))/Pi^3:
>eq3:=diff(a3(t),t)=-84*a1(t)+552*a2(t)+468*a3(t)+624*a4(t)+519120
      /Pi-(4596480*(-8+Pi^2))/Pi^3+(3991680*(-9+Pi^2))/Pi^3:
>eq4:=diff(a4(t),t)=-396*a2(t)-396*a3(t)-528*a4(t)-332640/Pi+
      (2993760*(-8+Pi^2))/Pi^3-(2661120*(-9+Pi^2))/Pi^3:
>ic:=a1(0)=0,a2(0)=0,a3(0)=0, a4(0)=0:
>simplify(dsolve({eq1,eq2,eq3,eq4,ic}));
```

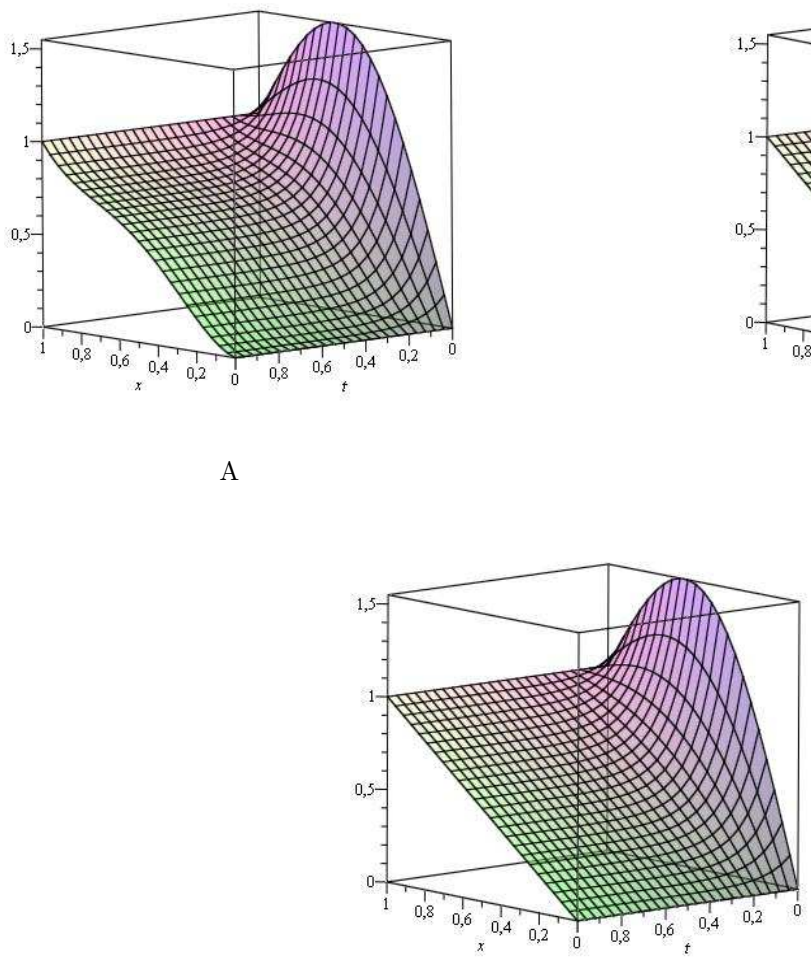
Da mesma forma que nos casos anteriores é obtida uma solução aproximada $\tilde{\theta}_4$. A Tabela 3.2 mostra os resultados das aproximações $\tilde{\theta}_N$ quando $x = 0.5$. Na Figura 3.3 tem-se os gráficos das aproximações para $N = 1$ (A) e $N = 3$ (B) em contraste com a solução exata (C). Na Figura 3.4 é possível perceber a qualidade das aproximações, para os valores de N analisados. As soluções para $N = 3$ e $N = 4$ são iguais, assim como para $N = 1$ e $N = 2$. Isso se deve à particular escolha das funções de base na eq. (3.2.18).

A solução exata deste problema (Apêndice D) é

$$\theta = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + x, \tag{3.2.26}$$

sendo que a condição inicial da eq. (3.2.17) pode ser interpretada como uma perturbação da forma $\sin(\pi x)$, em uma variação linear x. Com o aumento de t, a perturbação diminui gradativamente, deixando a distribuição de temperatura linear, que é uma característica de problemas estacionários.

Figura 3.3: Solução aproximada do problema de condução de calor não-estacionária para $N = 1$ (A) e $N = 3$ (B) em comparação com a solução exata (C).



A B C

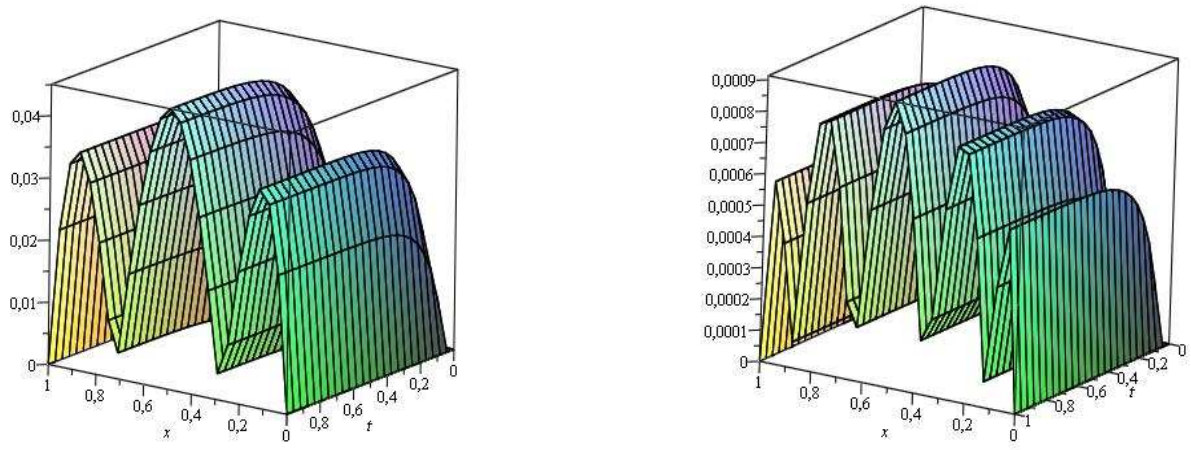
Fonte: Produção do próprio autor

3.3 Aplicações adicionais

Tento em vista a quantidade de trabalhos publicados na literatura referentes ao MGT, buscou-se fazer uma revisão sobre as aplicações citando apenas as principais aplicações encontradas na literatura.

Eversman et al. (1975) e Eversman e Astley (1981) estudaram problemas de transmissão acústica em dutos bidimensionais não-uniformes. O fato de ser não-unifome está associado tanto com o formato do duto, quanto com as propriedades acústicas da parede condutora. A geometria de duto considerado neste caso é mostrada na Figura 3.5. Nota-se que a parte (ou seção) não uniforme junta-se com a parte uniforme e que a impedância

Figura 3.4: Erro nas soluções aproximadas para o problema de condução de calor não estacionária quando $N = 1$ (A)e $N = 3$ (B).



A B

Fonte: Produção do próprio autor

Tabela 3.2: Solução numérica para o problema de condução de calor não estácionária.

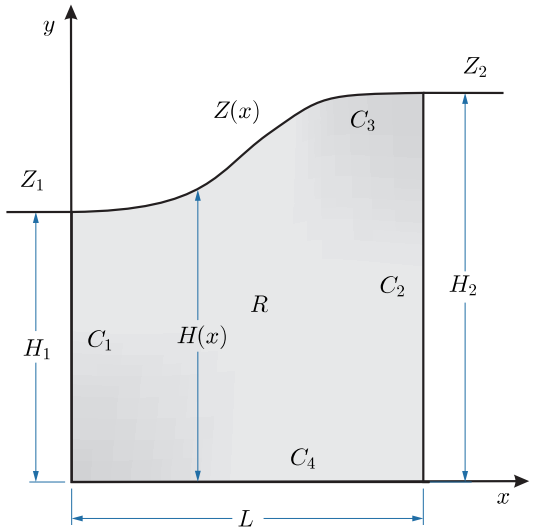
	Aproximações para $\tilde{\theta}(0.5, t)$				
t	N=1	N=2	N=3	N=4	Solução exata
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
0.01	1.409126428	1.409126428	1.406084242	1.406084228	1.406018056
0.02	1.326900620	1.326900620	1.321006680	1.321006706	1.320868717
0.03	1.252499632	1.252499632	1.243929242	1.243929241	1.243721879
0.04	1.185178834	1.185178834	1.174097286	1.174097300	1.173825451
0.05	1.124264457	1.124264457	1.110828935	1.110828934	1.110498025
0.06	1.069146850	1.069146850	1.053506940	1.053506952	1.053122234
0.07	1.019274376	1.019274376	1.001572343	1.001572331	1.001138731
0.08	0.9741478958	0.9741478958	0.9545187334	0.9545187209	0.9540407386
0.09	0.9333157679	0.9333157679	0.9118873697	0.9118873690	0.9113691072
0.10	0.8963693309	0.8963693309	0.8732626570	0.8732626584	0.8727078387

acústica[4] da seção não-uniforme $Z(x)$, que é limitada por Z_1 e Z_2, é contínua. Este problema é regido por equações diferenciais parciais que são reduzidas a equações diferenciais ordinárias quando aplica-se o MGT.

Catton et al. (1974) obteve soluções para o problema de convecção bidimensional constante e natural em uma fenda retangular, que é orientada arbitrariamente em relação ao vetor da gravidade. Tal convecção proporciona uma interação importante entre temperatura e velocidade. A geometria básica da fenda considerada é mostrada na Fig. 3.6. As paredes em $x = \pm h$ são isotérmicas e mantidas em temperaturas adimensionais

[4]Impedância acústica pode ser caracterizada como uma propagação de som de um meio, com determinadas características específicas, para outro meio com características diferentes.

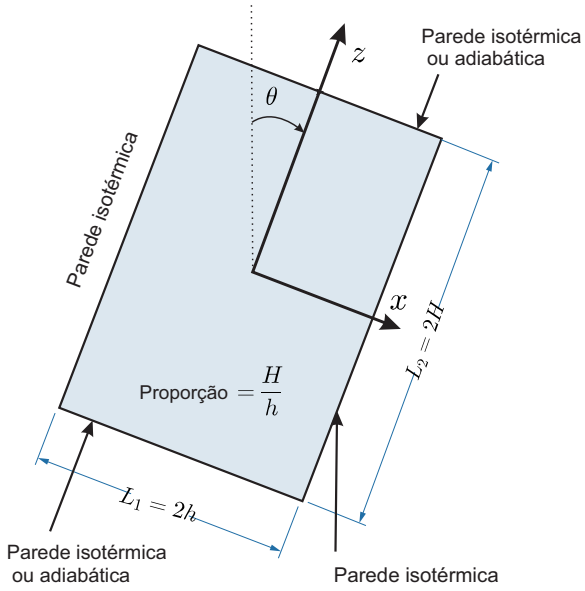
Figura 3.5: Geometria do duto para transmissão acústica.



Fonte: Produção do próprio autor

$T(\pm 1, Z) = \pm 1$. Esta diferença de temperatura fornece o mecanismo de condução para o problema. As duas paredes de $Z = \pm H$ são ou isotérmicas ou adiabáticas. Ao variar o ângulo θ, considera-se a influência da inclinação da fenda nas características de convecção. A relação $A = \frac{H}{h}$ também pode variar, tendo um efeito significativo sobre a temperatura e os perfis de velocidade dentro da fenda (Çegel, 2010). Este mesmo problema também foi estudado por De Val Davis (1968) e Poots (1958) que obtiveram soluções semelhantes as de Catton et al. (1974) com até 32 termos na solução teste.

Figura 3.6: Geometria para o problema de convecção natural.



Fonte: Produção do próprio autor

Snyder et al. (1964) avaliaram a aplicação do MGT na resolução numérica de

equações de troca. A metodologia proposta foi avaliada na resolução do modelo que descreve o fluxo estacionário de um fluido newtoniano com densidade e viscosidade constante entre duas placas planas inclinadas. A convergência do método foi avaliada comparando a solução numérica com o valor da solução exata. Os perfis de velocidade aproximados com não mais que três termos da expansão foram capazes de reproduzir o perfil analítico com um alto grau de precisão.

McGowin e Perlmutter (1971) estudaram a estabilidade local de um reator tubular não adiabático operando em estado estacionário aplicando o MGT na estimação do valor característico dominante do sistema linearizado de equações. O MGT foi aplicado na resolução do modelo, requerendo apenas três termos da função tentativa para obtenção de uma aproximação acurada.

Wedel et al. (1977) aplicaram o MGT no estudo da estabilidade de uma partícula de catalisador considerando três situações limites para o número de Lewis[5] (Le): Le=1, 0 e ∞. Os resíduos ponderados resultantes da aplicação do MGT foram computados através de quadraturas. Foram utilizadas como funções tentativas expansões em função seno e expansões em dois conjuntos de funções características.

Coimbra et al. (2001) aplicaram métodos de elementos finitos a uma variedade de modelos não estacionários, tendo como objetivo demonstrar a capacidade apresentada por este método em resolver numericamente tais tipos de problemas. As soluções em cada um dos elementos foram obtidas pela aplicação do MGT, utilizando como função tentativa o polinômio de Lagrange[6]. A metodologia foi aplicada a quatro exemplos que incorporam fenômenos de difusão, convecção e reação em estado não estacionário. O método apresentado mostrou-se bastante eficiente sendo capaz de obter resultados suficientemente precisos utilizando poucos elementos.

Al-Muftah e Abu-Reesh (2005) aplicaram o MGT na resolução de um modelo estacionário do reator. O método apresentou resultados satisfatórios sem que qualquer comparação com outros métodos fosse apresentada.

Kiparissides (2006) utilizou uma equação de balanço populacional para prever a evolução molecular e as propriedades morfológicas de um polímero em um reator de polimerização. O método de elementos finitos foi aplicado para calcular a distribuição de peso molecular. Segundo o autor, o MGT é o procedimento numérico mais indicado para resolução de equações de balanço populacional.

Fletcher (1984) ainda descreve outros problemas que podem ser resolvidos utilizando o MGT, tais como de estabilidade hidrodinâmica e fluxo em torno de aerofólios inclinados.

[5]O número de Lewis (Le) é um número adimensional definido como a razão da difusividade térmica e difusividade de massa .

[6]O polinômio de Lagrange é solução para problemas de interpolação.

Capítulo 4

LIMITAÇÕES DO MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL

Para os exemplos estudados até este momento, consegue-se uma acurácia elevada na solução de teste com a aplicação do MGT. O advento dos computadores trouxe consigo a demanda por soluções de alta precisão em problemas que são mais complexos do que os exemplos simples estudados no capítulo 1.

Neste capítulo apresentam-se algumas dificuldades que podem surgir se o MGT for aplicado a problemas que são mais elaborados do que aqueles considerados anteriormente.

4.1 O PROBLEMA DO MAL CONDICIONAMENTO

Inevitavelmente, a necessidade de atingir soluções de acurácia aceitável manifesta-se através da obrigação de manter um grande número de coeficientes na solução de ensaio, tais como os da eq. (2.1.2). Neste contexto, um grande número pode ser qualquer coisa maior que 20, mas mais provavelmente tão grande como 2000 ou 20000. Para começar a identificar alguns dos problemas do MGT, reconsidera-se a equação diferencial ordinária da seção 1.2.1. A aplicação do MGT com funções de base da forma x^j produz um sistema de equações algébricas para os coeficientes desconhecidos a_j que pode ser escrito como

$$Ma = T, \tag{4.1.1}$$

sendo os a_j elementos de a. Os elementos de M e T são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} m_{kj} &= \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}, \\ t_k &= \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Evidentemente, para k grande (o que implica em N grande)

$$m_{kj} \approx \frac{j-1}{j+k}, \tag{4.1.2}$$

e a diferença na magnitude entre os termos correspondentes para as equações com $(k-1)$ e k será muito grande. A verificação disto pode ser feita utilizando os comando

```
>m[k,j]:=(k,j)->(j/(k+j-1))-(1/(k+j));
```

Atribuindo valores para k e j, conforme o N escolhido, obtém-se o m_{kj} correpondente. Por exemplo:

```
>evalf(m[k,j](999,1));
>evalf(m[k,j](1000,1));
>evalf(m[k,j](999,1000));
>evalf(m[k,j](1000,1000));
```

A Tabela 4.1 mostra que para $N = 1000$ as diferenças podem variar entre 2×10^{-9} e 2×10^{-4}. Com isso, espera-se que a matriz M seja *mal condicionada* para N grande.

Tabela 4.1: Valores de m_{kj} quando $N = 1000$.

	$j = 1$	$j = 1000$
$k = 999$	10.01000×10^{-7}	0.50000
$k = 1000$	9.99001×10^{-7}	0.49975
Diferença	2×10^{-9}	0.00025

Uma matriz mal condicionada, como M na eq. (4.1.1), implica que a solução corrrespondente a, é muito sensível a pequenas mudanças em T ou M. Em uma situação mais complexa, os elementos de T e M podem ser calculados por meio de quadratura numérica, caso as pequenas alterações sejam identificadas como erro de arredondamento.

Isaacson e Keller (1966), apresentaram um *número de condicionamento*[1], μ, para verificar a condição da matriz M. Devido ao erro de arredondamento, o sistema de equações algébricas da eq. (4.1.1), é substituído por uma aproximação da forma

$$(M - \delta M)(a + \delta a) = T + \delta T, \tag{4.1.3}$$

sendo que a satisfaz a eq. (4.1.1) e δ é um vetor aleatório escolhido para produzir a aproximação. Se a e $(I + M^{-1}\delta M)$ são não singulares (admitem inversa), e se $\|\delta M\| < 1/\|M_1^{-1}\|$, pode-se escrever

$$\|(I + M^{-1}\delta M)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|M^{-1}\delta M\|} \leq \frac{1}{1 - \|M^{-1}\|\|\delta M\|}.$$

[1]Número de condicionamento de um problema é uma medida indicando se o problema tem "boas condições"para ser tratado numericamente.

Multiplica-se a eq. (4.1.3) por M^{-1} a esquerda e resolve-se para δa. Aplicando a norma e dividindo a equação resultante por $\|x\|$, obtém-se

$$\frac{\|\delta a\|}{\|a\|} \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}\|\|\delta M\|} \left(\frac{\|\delta T\|}{\|a\|} + \|\delta M\| \right).$$

Mas pela eq. (4.1.1) é claro que pode-se substituir $\|a\|$ à direita, desde que

$$\|a\| \geq \frac{\|T\|}{\|M\|}.$$

Conforme estabelecido anteriormente, $\|\delta M\| < 1/\|M_1^{-1}\|$, então

$$\frac{\|\delta a\|}{\|a\|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu\|\delta M\|/\|M\|} \left(\frac{\|\delta T\|}{\|T\|} + \frac{\|\delta M\|}{\|M\|} \right),$$

sendo μ definido por

$$\mu = \|M\|\|M^{-1}\|.$$

É conveniente calcular $\|M\|$ como a norma máxima, uma vez que este é justamente o máximo absoluto na soma

$$\|M\|_\infty = \max_k \sum_{j=1}^{N} |m_{kj}|.$$

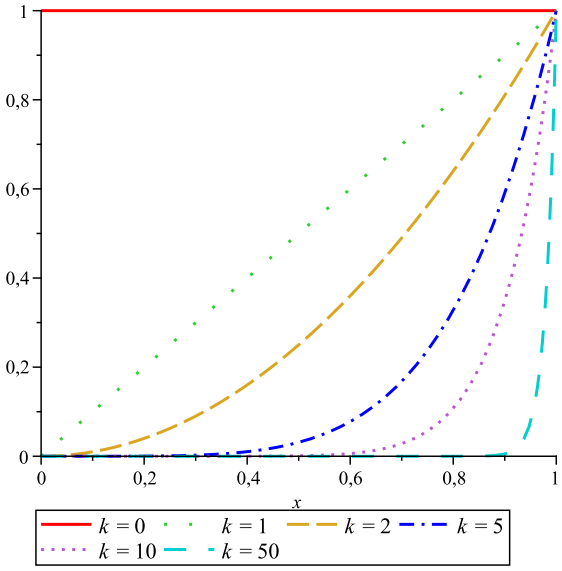
Uma regra útil para resolver um sistema como o da eq. (4.1.1) é a eliminação gaussiana, porém com o uso de números decimais a acurácia dos resultados é perdida devido a erros de arredondamento (Strang, 1980). Claramente o efeito para $N = 2000$ ou 20000 seria devastador.

Este exemplo levanta a questão: *Por que M fica mal condicionada quando N aumenta?* A resposta cabe a função de base x^j usada na eq. (2.1.3) para obter a eq. (4.1.1). Na Figura 4.1 , x^k é colocado sobre o domínio de interesse, $0 \leq x \leq 1$, para vários valores de k. É claro que, para k grande, há pouca diferença entre as funções peso w_{k-1} e w_k. Consequentemente espera-se que as equações algébricas que resultam da eq. (2.1.3) sejam *"quase linearmente dependentes"*. Este fato também pode ser notado na Tabela 4.1 e no mal condicionamento da matriz M.

4.2 OUTRAS LIMITAÇÕES DO MÉTODO DE GALERKIN TRADICIONAL

Além do problema do mal-condicionamento, outro problema surge quando N é grande, e se torna aparente depois de considerar a eq. (4.1.2). Todos os coeficientes m_{kj} são diferentes de zero. Assim, um processo $O(N^2)$ vai ser necessário para gerar a matriz M. No entanto, um processo $O(N^3)$ vai ser necessário para fatorar M se a eliminação

Figura 4.1: Variação de k na função de teste.



Fonte: Produção do próprio autor

de Gauss for utilizado como parte do procedimento para encontrar a. Este processo é responsável pelo grande tempo de execução quando o MGT é usado com N grande nos problemas que se reduzem a forma da eq.(4.1.1). Por exemplo, na seção 3.2, o caso para $N = 5$ não foi analisado pois o tempo de execução o algoritmo foi muito grande.

Sempre que o MGT é utilizado para reduzir uma equação diferencial parcial para uma equação diferencial ordinária, como na seção 3.2, são obtidos sistemas de equações tais como

$$M\dot{A} = -(BA + C). \tag{4.2.4}$$

Se não houver espaço para armazenar a matriz M, esta precisa ser fatorada uma vez, antes de realizar a integração em tempo, ou seja

$$M = LU.$$

Este é um algoritmo $O(N^3)$. Em cada intervalo de tempo é necessário para avaliar

$$Q = BA + C,$$
$$Q' = L^{-1}Q,$$

e resolver $U\dot{A} = -Q'$. Cada um destes processos exige $O(N^2)$ operações. Se $O(N)$ intervalos de tempo são necessários para integrar as equações diferenciais ordinárias, então essa parte da solução torna-se, menos dispendiosa que a fatoração inicial.

Outro problema surge para N grande quando a equação *não é linear*. Após a aplicação do MGT, é obtido um sistema de equações diferenciais ordinárias para os co-

eficientes desconhecidos a_j, que pode ser escrito sob a forma da eq. (4.2.4). Os passos descritos acima são igualmente aplicáveis a este caso, com uma exceção: Cada coeficientes b_{kj} (elemento da matriz B) depende da nova solução e é avaliado a partir deste momento por

$$b_{kj} = \sum_{i}^{N} a_i \left\langle T_j \frac{dT_i}{dx}, T_k \right\rangle . \tag{4.2.5}$$

Supondo-se que o produto interno pode ser feito através de uma fórmula de recorrência, a avaliação de b_{kj} em cada passo de tempo é um processo $O(N)$. Por conseguinte, a avaliação de B é um processo $O(N^3)$. Assim, cada passo de tempo requer agora a mesma ordem de tempo da fatoração inicial de M, mostrada na eq. (4.2.4)

Para armazenar o resultado da avaliação do produto interno mostrado na eq. (4.2.5) requer N^3 espaços de memória. O problema de armazenamento pode ser aliviado se for avaliado um produto interno de cada vez. No entanto, isso vai aumentar ainda mais o tempo de execução por passo de tempo. Assim, o tratamento de condições não-lineares acaba por ser um impedimento muito grave do MGT se N é grande.

A última dificuldade citada neste trabalho para o MGT diz respeito à resolução de problemas em um domínio espacial, cujos limites não coincidem com linhas coordenadas. A dificuldade está na construção de funções de teste que satisfazem as condições de contorno automaticamente em um limite distorcido.

CONCLUSÃO

Neste trabalho considerou-se alguns aspectos do método de Galerkin tradicional (MGT), e como ele se compara com outros métodos de resíduos ponderados (MRPs), tais como: método do subdomínio, método da colocação, método dos mínimos quadrados e método dos momentos. Através de exemplos ilustrativos e da análise literária (seção 2.2), foi possível estabelecer um paralelo entre os MRPs.

Neste estudo, viu-se que dentre os MRPs, o método de subdomínio é o mais fácil de ser implementado, porém não é o de melhor aproximação. O MGT e o método dos mínimos quadrados apresentaram acurácia muito parecida. No entando, o MGT não tem restrições em sua formulação, enquanto o método dos mínimos quadrados apresenta dificuldades em sua aplicação que limitam consideravelmente a utilização desta metodologia. O método da colocação é de fácil aplicação, entretanto teve a pior acurácia entre os métodos estudados. Na seção 2.3 foi apresentado o método da colocação ortogonal, que otimiza o método da colocação tradicional através da utilização de pontos de colocação como sendo as raízes de um polinômio ortogonal no domínio pretendido.

O capítulo de aplicações mostra problemas físicos tradicionais, cuja formulação matemática se faz através de uma equação diferencial parcial (EDP). A aplicação do MGT tanto para o problema de fluxo (seção 3.1) quanto para o de condução de calor (seção 3.2), trouxe resultados muito próximos aos exatos.

No capítulo 4 identificaram-se algumas propriedades do MGT que limitam a sua utilização para encontrar soluções de precisão elevada em problemas complexos, isto é, situações em que o número de coeficientes desconhecidos na solução teste será grande. Formas específicas de superar algumas dessas deficiências foram discutidas.

Atualmente, o MGT tem avançado em dois sentidos bastante distintos, embora ambos têm procurado alcançar a máxima eficiência computacional.

Primeiro, o desenvolvimento do *método de elementos finitos de Galerkin* que busca o uso de polinômios como funções de peso e de base. Esses são utilizados *localmente* e produzem aproximações de baixa ordem. As primeiras tentativas de introduzir uma solução a partir de polinômios de séries de Fourier foi bastante complicada. Utilizando polinômios lineares por partes, as equações algébricas resultantes muitas vezes coincidem para primeira e segunda derivadas em uma dimensão. As expressões obtidas são as mesmas encontradas no método das diferenças finitas (Fletcher, 1984).

O segundo sentido é caracterizado pelos *métodos espectrais* que são *métodos globais*, isto é, as funções de peso e de base abrangem todo o domínio. A precisão do método está associada ao número de termos da solução tentativa. No entanto, como as funções de base são por definição linearmente independentes, o uso de funções de peso e de base ortogonais torna as equações algébricas resultantes ortogonais também. Além disso, características diferenciadas nas matrizes de entrada garantem rapidez computacional. O MGT é classificado por Boyd (2000) como um método espectral.

A partir de 1972, o uso do MGT foi sendo substituido pelo método de elementos finitos de Galerkin, e mais tarde por outros métodos espectrais (Fletcher, 1984). Entretanto, dentro do contexto dos métodos espectrais o MGT é utilizado por Boyd (2000), que explica que ele ainda é essencial onde grande acurácia é necessária. A analise do MGT dentro do contexto de elementos finitos ou métodos espectrais é uma sugestão para trabalhos futuros.

Por fim, o MGT garante soluções de precisão significativa, com um esforço manual diminuto já que a sua aplicação neste trabalho foi aliada a computação algébrica, permitindo que as tarefas pudessem ser realizadas de modo integrado e relativamente rápido. Tal característica tem grande valor instrutivo pois a ênfase pôde ser concentrada nos aspectos matemáticos e físicos fundamentais dos problemas, e não em cálculos mecânicos.

REFERÊNCIAS

AL-MUFTAH, A., ABU-REESH, I. M. Effects of Simultaneous Internal and External mass Transfer and Product Inhibition on Immobilized Enzyme-catalyzed Reactor. **Biochemical Engineering Journal,** v. 27, p. 167-178, 2005.

ANDERSSEN, R. S.; MITCHELL, A. R. Analysis of Generalised Galerkin methods in the numerical solution of elliptic equations. **Mathematical Methods in the Applied Sciences.** v.1, p. 3–15, 1979.

BARLETT, E. P.; KENDALL, R. M. An analysis of the coupled chemically reacting boundary layer and charring ablator, Parte 2. **National Aeronautics and Space Administration**, 1968.

BIEZENO, C. B.; KOCH, J.J. Over een Nieuwe Methode ter Berekening van Vlokke Platen met Toepassing op enkele voor de techniek belangrijke Belastingsgevallen. **Ing. Grav.** v. 38, p. 25-36, 1923.

BICKLEY, W. G. Experiments in approximating to solutions of a partial differential equation. **Phil. Mag. J. Sci.** London, v. 32, n. 7, p. 50-66, 1941.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica.** 8ª edição. São Paulo: Cengage, 2011.

CATTON, et al. Natural Convection Flow in a Finite Rectangular Slot. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. v. 17, p. 173-184, 1974.

ÇENGEL, Y.; AFSHIN G. **Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications + EES DVD for Heat and Mass Transfer.** 1ª edição. New York: McGraw-Hill Education, 2010.

COIMBRA, M. C., SERENO, C., RODRIGUES, A. Application of moving finite element method. **Chemical Engineering Science.** v. 30, p. 587-596, 2001.

CRANDALL, S. H. **Engineering analysis: a survey of numerical procedures.** 1ª edição. Universidade de Michigan: McGraw-Hill, 1956.

COLLATZ, L. **The numerical treatment of differential equations.** 3ª edição.

Universidade de Michigan: Springer, 1960.

CRUZ, P., MENDES, A; MAGALHÃES, F. D. High-order approximations for intra-particle mass transfer. **Chemical Engineering Science.** v. 59 , p. 4393-4399, 2004.

DORODNITSYN, A. A. **Advances in aeronautical sciences.** 1ª edição. New York: Pergamon, 1960.

DRYDEN, H.L.; MURNAGHAN, F. P. BATEMAM, H. **Hydrodynamics.** Edição reimpressa. New York: Dover Publications, 1956.

DUNCAN, W.J. Galerkin's method in mechanics and differential equations **Aeronautical Research Committee.** n. 1798, 1937.

FINLAYSON, B. A. Packed Bed Reactor Analysis by Orthogonal Collocation. **Chemical Engineering Science** v. 26, p. 1081-1091, 1971.

FINLAYSON, B. A., **The Method of Weighted Residuals and Variational Principles.** 1ª edição. USA: Academic Press, 1972.

FINLAYSON, B. A., SCRIVEN, L.E. The Method of Weighted Residuals – A review. **Applied Mechanics Review.** n. 9, v. 19, setembro, p. 735-748, 1966.

FLETCHER, C. A. J. **Computational Galerkin methods.** Edição ilustrada. Universidade da Califórnia: Springer-Verlag, 1984.

FLETCHER, C. A. J.; HOLT, M. An improvement to the method of integral relations. Comput. **J. Comp. Phys.** v. 18, p.154-164, 1975.

FRAZER, R. A.; JONES, W.P.,SKAN, S. W. Approximations to functions and to the solutions of difference equations. **Gt. Brit. Aero. Res. Council Reut and Memo.** v.. 1, p. 517-549, 1937.

GARDE, R. J. **Fluid Mechanics Through Problems.** 2ª edição. New Delhi: New Age International, 1997.

GEAR, C. W. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations: Is There Anything Left to Do? **Society for Industrial and Applied Mathematics.** v.23, p.10-24, 1981.

HAROSKE, D. D.; TRIEBEL, H. **Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations.** 1ª edição. Germany:European Mathematical Society, 2008.

HARRINGTON, R. F. **Field Computation by Moment Methods.** Edição reimpressa. IEEE Antennas and Propagation Society: Oxford University Press, 1968.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, David P. **Fundamentos de transferência de calor e de massa.** 6ª edição. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2008.

ISAACSON, E.; KELLER, H. B. **Analysis of numerical methods.** 1ª edição. New York: Wiley, 1966.

KANTOROVICH, L. V.; KRYLOV, A. N. **Approximate methods of higher analysis.** 2ª edição. Universidade de Michigan: Interscience, 1958.

KRYLOV, A. N. et al.Academician B. G. Galerkin: On the seventieth anniversary of his birth. **Vestnik Akademii nauk SSSR.** v.4, 91–94, 1941.

MCGOWIN, C. R., PERLMUTTER, J. A Comparison of Techniques for Local Stability Analysis of Tubular Reactor Systems. **The Chemical Engineering Journal.** v. 2 , p. 125-132, 1971.

MIKHLIN, S. G. **Variational methods in mathematical physics.** Universidade de Michigan: Pergamon Press; [distributed by Macmillan, New York], 1964.

MURPHY, J. D. Application of the Generalised Galerkin Method to the Computation of Fluid Flows. **Proceedings 1st AIAA computational fluid dynamics conference.** p. 63-68, 1973.

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F., Biography of B.G.Galerkin. **Dictionary pf scientific biography.** New York, 1990.

PALLONE, A. J. Nonsimilar Solutions of the Compressible-Laminar Boundary-Layer Equations with Applications to the Upstream-Transpiration Cooling Problem. **Aeronautical Science Department.** v. 28, 449-456. 1961.

POOTS, G. A Solution of the Compressible Laminar Boundary Layer Equations with

Heat Transfer and Adverse Pressure Gradient. **Quart. J. Mech. Appl. Math.** v. 13, p. 57-84, 1960.

SNYDER, L. J., SPRIGGS, T. W., STEWART, W. E. Solution of the Equation of Change by Galerkin's Method. **AIChE Journal.** n. 4, v. 10, julho, p. 535-540, 1964.

SOLOLOVSKI, V. V. On the life and scientific career of academician B. G. Galerkin. **Izvestiya Akademii nauk SSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk.** v.8, p. 1159-1164, 1951.

STRANG, G. **Linear Algebra and Its Applications.** 2ª edição. New York: Academic Press, 1980.

VILLADSEN, J. V., STEWART, W.E. Solution of Boundary Value Problems by Orthogonal Collocation. **Chemical Engineering Science.** v. 22, p. 1483-1501, 1967.

VIVIAND, H.; GHAZZI, W. Formes conservatives des equations de la Dynamique des Gaz. **La recherche aerospatiale.**, 1974.

WEDEL, S., MICHELSEN, M. L., VILLADESEN, J. Asymptotic Stability of a Catalyst Particle. **Chemical Engineering Science.** v. 32, p. 179-190, 1977.

WHITE, Frank M. **Mecânica dos Fluidos.** 6ªedição. Porto Algre: McGraw Hill Brasil, 1985.

YAMADA, H. High water due to a traveling pressure disturbance. **TEP. res. inst. fluid eng. Kyushu Univ.** vol. 4, n. 1, p. 21-41, 1947.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Um pouco sobre a vida de Galerkin

O matemático e engenheiro Boris Grigorievitch Galerkin (ver Figura 4.2), nasceu em 04 de março de 1871 em Polotsk, atualmente localizada na Bielo-Rússia. Provindo de família humilde, começou a trabalhar aos 12 anos como caligrafista, mas as dificuldades financeiras não impediram que Galerkin estudasse. Completou a escola em Polatsk e fez os estudos secundários em Minsk, em seguida, no ano de 1893, entrou no Instituto Tecnológico Petersburgo para estudar matemática e engenharia, formando-se em 1899. Krylov (1941) destaca que durante este período, ele sustentou-se trabalhando como desenhista e professor particular. Ainda no mesmo ano, tornou-se membro do Partido Operário Social-Democrata Russo, que mais tarde se tornaria o Partido Comunista. Como participava deste tipo de atividade política, trocava de emprego com frequência por conta das perseguições sofridas.

Figura 4.2: Boris Grigorievitch Galerkin.

Fonte: Yad Vashem Arquivo de Fotos

No ano de 1899, começou a trabalhar como engenheiro em uma fábrica de locomotivas em Kharkov, atualmente localizada na Ucrânia. Em 1903, foi para São Petersburgo, e lá ocupou o carpo de engenheiro na construção da ferrovia Trans-Manchuriana e mais tarde, gerente técnico na fábrica de aquecimento Mecânica do Norte. Conforme O' Connor e Robertson (1990), isso tornou Galerkin conhecido no círculo da engenharia.

Em 1907 foi preso por defender suas ideologias políticas e, ao sair da prisão, em 1909, preferiu voltar-se para a ciência e engenharia, perdendo o interesse por atividades revolucionárias. O' Connor e Robertson (1990) destacam que neste mesmo ano, Galerkin

foi convidado a trabalhar como professor no Instituto Tecnológico Petersburgo, onde publicou um artigo de 130 páginas sobre curvatura longitudinal, que havia escrito no tempo em que esteve na prisão.

Participou de viagens de estudos para vários paises da Europa. Neste período (1909-1914) ele conheceu Alemanha, Suíça, Austria, Bélgica e Suécia. Sokolovski (1951) descreve que nos anos posteriores, Galerkin fez vários estudos nas áreas de torção e curvatura de hastes, teoria da carcaça, planejamento de barragens, dentre outros. "O governo soviético estabeleceu prêmios em nome de Galerkin para o trabalho de destaque na teoria da elasticidade, mecânica estrutural, e da teoria da plasticidade." (Krilov, 1941, p. 92).

Galerkin morreu no dia 12 de julho de 1945, mas seu legado e seus estudos ainda são amplamente utilizados nos dias de hoje.

APÊNDICE B - A escolha das funções de base

Conforme foi dito na seção 2.1, não há um critério definido sobre a escolha das funções de teste. Porém alguns autores falam um pouco a respeito deste assunto.

Finlayson(1971, 1972) recomenda iniciar com uma aproximação polinomial de caráter geral e aplicar as condições de contorno e as condições de simetria de forma que a aproximação proposta satisfaça ambas as restrições. Considerar soluções para problemas simples, mais correlatos ao problema de interesse bem como a solução do problema linear correspondente pode na grande maioria dos casos servir como base para desenvolvimento das funções tentativas do problema original.

A utilização de polinômios ortogonais como funções tentativas é bastante útil e apresenta algumas vantagens computacionais. Os primeiros trabalhos que se tem conhecimento da aplicação desta metodologia são de Lanczos em 1956 que fez uso das raízes do polinômio de Chebyshev como pontos de colocação para resolução de problemas em uma dimensão, concluindo que a seleção de tal polinômio tendia a minimizar a máxima magnitude do resíduo. E de Falklk que fez uso das raízes do polinômio de Hermite como pontos de colocação (Villadsen e Stewart, 1967) .

Segundo Snyder et al. (1964), a utilização de funções tentativas que satisfaçam as condições de contorno e tenham sua própria propriedade de simetria, proporciona que resultados mais precisos sejam obtidos com a utilização de poucos termos de expansão.

Cruz et al. (2004) comparam a utilização de diferentes tipos de aproximações na resolução da equação da difusão homogênea em uma partícula esférica de catalisador. Utilizando como critério de comparação a razão entre o maior valor característico e o menor valor característico.

A grande maioria dos trabalhos encontrados na literatura faz uso da aproximação polinomial de Lagrange, adotando como pontos de colocação as raízes do polinômio de Jacobi, com os parâmetros α e β da função peso selecionados de acordo com o tipo de problema. Observa-se, em inúmeros exemplos encontrados na literatura, que não existe um procedimento sistemático para seleção destes parâmetros, fazendo com que na maioria das vezes os valores sejam escolhidos de forma errada, comprometendo a eficiência do método.

APÊNDICE C - Comandos utilizados na resolução do problema de fluxo viscoso em um canal quadrado

Na seção 3.1, estudou-se o problema de fluxo viscoso em um canal quadrado. A particular escolha das funções de base em sua formulação, permite que os coeficientes desconhecidos a_{ij} da eq. (3.1.6) sejam determinados a partir dos seguintes comandos:

```
>restart:

>assume(k,integer);
>assume(m,integer);
>assume(i,integer);
>assume(j,integer);
```

O comando `assume` insere as variáveis k, m, i e j no Maple. Os comandos abaixo sumarizam outras informações necessárias para o cálculo pretendido:

```
>f:=(k,m)->a[2*k+1,2*m+1]*cos((2*k+1)*Pi*x/2)*cos((2*m+1)*Pi*y/2)
         (((2*k+1)*Pi/2)^2+((2*m+1)*Pi/2)^2):
>f1:= -sum(sum(f(k,m),m=0..N),k=0..N):
>R:=f1+1:
>Rf:=unapply(R,N):
>Rf(2):
>g:=(i,j)->cos(i*Pi*x/2)*cos(j*Pi*y/2):
>Pij:=int(int(Rf(3)*g(1,1),x=-1..1),y=-1..1)=0:
>solve(Pij);
```

Para encontrar os coeficientes a_{ij}, basta atribuir valores para i e j em `>Pij`, com $i = 1, 3, 5, \ldots$ e $j = 1, 3, 5, \ldots$. Por exemplo, para $i = j = 1$ tem-se:

```
>P11:=int(int(Rf(3)*g(1,1),x=-1..1),y=-1..1)=0:
>solve(P11);
```

$$a_{11} = \frac{32}{\pi^4}. \tag{4.2.6}$$

Igualmente faz-se para outros valores.

$i = 1$ e $j = 3$:

```
>P13:=int(int(Rf(3)*g(1,3),x=-1..1),y=-1..1)=0;
>solve(P13);
```

$$a_{13} - \frac{32}{15\pi^4}.$$

$i = 1$ e $j = 5$:

```
>P15:=int(int(Rf(3)*g(1,5),x=-1..1),y=-1..1)=0;
>solve(P15);
```

$$a_{15} = \frac{32}{65\pi^4}.$$

$i = 3$ e $j = 1$:

```
>P31:=int(int(Rf(3)*g(3,1),x=-1..1),y=-1..1)=0;
>solve(P31);
```

$$a_{31} = -\frac{32}{15\pi^4}.$$

$i = 3$ e $j = 3$:

```
>P33:=int(int(Rf(3)*g(3,3),x=-1..1),y=-1..1)=0;
>solve(P33);
```

$$a_{33} = \frac{32}{(81\pi^4)}.$$

De maneira geral, observa-se que os coeficientes a_{ij} podem ser escritos como a seguinte função

$$a_{ij} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}+1}}{ij(i^2+j^2)},$$

que é justamente a eq. (3.1.9).

APÊNDICE D - Obtenção da solução exata para o problema de condução de calor não-estácionária

A EDP que representa o problema de condução de calor não-estácio da seção 3.2 é escrita por

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \tag{4.2.7}$$

cuja condição inicial é

$$\theta(x, 0) = \sin(\pi x) + x,$$

e as condições de contorno são

$$\theta(0, t) = 0,$$
$$\theta(1, t) = 1.$$

Este é conhecido como *problema de Dirichlet* com condições não homogêneas. A obtenção da solução deste problema será feita através de algumas considerações físicas.

É de se esperar que, após decorrido um tempo suficientemente longo, devido ao fato do calor se propagar rapidamente, os efeitos da distribuição inicial de temperaturas na barra se dissiparão e será atingida uma distribuição de temperaturas permanente $v(x)$, ou seja, independente do tempo t e da condição inicial. Como v deve obedecer à eq. (4.2.7), mas $v_t = 0$, segue que v é solução do problema

$$v''(x) = 0, \qquad 0 < x < 1,$$

com as condições $v(0) = 0$ e $v(1) = 1$, sendo v chamada de *solução de estado estacionário.* Da equação de v'', obtém-se $v(x) = ax + b$. Os valores das constantes a e b são obtidos através das condições de contorno, de modo que a solução de estado estácionário é

$$v(x) = \frac{0 - 1}{1} x + 0 = x.$$

O fato da distribuição de temperaturas no estado estacionário ter a forma de uma reta é sugerida pela eq. (4.2.7). O significado da eq. do calor, neste caso, é que a variação da temperatura $\partial\theta/\partial t$ em um ponto da barra, com o passar do tempo é igual à curvatura da função temperatura naquele ponto(isto é, $\partial^2\theta/\partial x^2$). Logo, se a curvatura da função temperatura é positiva, então $\partial\theta/\partial t$ é positiva também, e portanto a tendência nesta região da curva é que as temperaturas aumentem, diminuindo a concavidade e retificando a curva na região. Se a curvatura da função temperatura é negativa, então $\partial\theta/\partial t$ é também negativa, o que significa que a tendência é que as temperaturas diminuam naquela região, diminuindo a concavidade e retificando a curva na região.

Para encontrar a solução $\theta(x, t)$ para a eq. (4.2.7), tenta-se expressá-la como soma

da solução de estado estácionário $v(x)$ e uma outra distribuição de temperatura $u(x,t)$, ou seja

$$\theta(x,t) = v(x) + u(x,t).$$

A distribuição de temperatura $u(x,t)$ é chamada transiente, por que ela desaparece à medida que o tempo passa, ou seja, torna-se arbitrariamente pequena até o ponto de se tornar plenamente irrelevante. Como $u(x,t) = \theta(x,t) - v(x)$, segue que $u(x,t)$ satisfaz o problema de Dirichlet homogêneo, cuja solução é dada por

$$u(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty} c_N e^{-N^2\pi^2 t} \sin(N\pi x),$$

onde c_N são os coeficientes de Fourier, isto é

$$c_N = 2\int_0^1 (\sin(\pi x) - x) \sin N\pi x \mathrm{d}x.$$

Então, a solução procurada é a soma

$$\theta(x,t) = x + \sum_{N=1}^{\infty} c_N e^{-N^2\pi^2 t} \sin(N\pi).$$

Se a soma acima tiver apenas um termo, obtém-se a solução exibida na eq. (3.2.26).