

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNO TELCH DOS SANTOS

MÉTODOS VARIACIONAIS APLICADOS A MODELOS
METEOROLÓGICOS

JOINVILLE - SC
2013

BRUNO TELCH DOS SANTOS

**MÉTODOS VARIACIONAIS APLICADOS A MODELOS
METEOROLÓGICOS**

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dra. Patrícia Sáez Pacheco

JOINVILLE - SC

2013

S231m

dos Santos, Bruno Telch

Métodos variacionais aplicados a modelos Meteorológicos/
Bruno Telch. - 2013.

91 p.: il

Bibliografia: f. 73-74

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática. Joinville, 2013.

Orientador(a): Patrícia Sáñez Pacheco

1. Cálculo de variações 1. 2. Equação de Euler 1.
3. Modelos meteorológicos I. Pacheco, Patrícia Sáñez.
II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Curso de Licenciatura em Matemática. III. Métodos variacionais aplicados a modelos Meteorológicos.

CDD: 515.39

BRUNO TELCH DOS SANTOS

**MÉTODOS VARIACIONAIS APLICADOS A MODELOS
METEOROLÓGICOS**

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador(a):

Prof. Dra. Patrícia Sánez Pacheco
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 19 de Junho de 2013.

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial ao Seu Joaci e à Dona Evani, meus pais, por tudo.

À minha orientadora Patrícia, pela dedicação, paciência e amizade.

Aos professores da Udesc-CCT.

Ao Luí Fellippe e à Bárbara Halter, meus amigos, por falta de opção.

À minha noiva, Cássia Soares.

RESUMO

DOS SANTOS, Bruno Telch. **Métodos variacionais aplicados a modelos meteorológicos**. 2013. 90. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013.

Neste trabalho são introduzidos conceitos e resultados de cálculo variacional para a minimização de funcionais a fim de aplicá-los a modelos meteorológicos. As aplicações consistem em encontrar boas condições iniciais para que, por exemplo, as soluções de modelos que fazem a previsão do tempo melhor se aproximem da realidade. Para isso, equações básicas que modelam a atmosfera são introduzidas, tais como as equações do movimento em um sistema rotacionando, a equação da continuidade e a relação geostrófica, além de conceitos de dinâmica como a pressão e o geopotencial.

Palavras-chave: Cálculo de variações. Equação de Euler. Modelos meteorológicos. Assimilação de dados.

ABSTRACT

DOS SANTOS, Bruno Telch. Variational methods applied to meteorological models. 2013. 90f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013.

This paper introduces concepts and results of variational calculus to minimize functional in order to apply them to meteorological models. The applications consist in find good initial conditions to, for example, solutions of models that do the weather forecast approximate of the reality. For this, basic equations that model the atmosphere are introduced, such as the equations of motion in a rotating system, the continuity equation and the geostrophic relation, and also the concepts of dynamic pressure and geopotential.

Key-words: Calculus of variations. Euler's equation. Variational methods. Data assimilation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Extremo $x^*(t)$ e uma curva $x(t)$ admissível.	27
2.2	Extremo t_f e $x(t_f)$ são livres e relacionados pela curva $y(t)$	31
3.1	Derivação isolada da Força de Gradiente de Pressão.	46
3.2	Mudança de coordenadas.	49
3.3	Rotação dos eixos de coordenadas.	50
3.4	Derivada em relação ao tempo de um vetor girante.	52
3.5	Aceleração centrípeta	55
4.1	Estações meteorológicas do território nacional.	60
4.2	Dados retirados das estações meteorológicas de SC no dia 05/05/2013.	60
4.3	Dependência longitudinal do vetor \mathbf{i}	89
4.4	$\delta\mathbf{i}$ depende das componentes \mathbf{j} e \mathbf{k}	89
4.5	Dependência do vetor unitário \mathbf{j} na longitude.	90
4.6	Dependência do vetor unitário \mathbf{j} na latitude.	90

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
1 Introdução ao Cálculo Variacional	13
1.1 Preliminares	14
1.1.2 Espaços Funcionais	14
1.2 Condições necessárias para um extremo	16
2 Equação de Euler e alguns problemas de Cálculo Variacional	21
2.1 Equação de Euler e o problema com fronteiras fixas	21
2.2 Problemas com fronteira móvel	25
2.2.1 Tempo final especificado e $x(t_f)$ livre	25
2.2.3 Tempo final e $x(t)$ livres	27
2.3 Funcional envolvendo várias funções independentes	32
2.3.1 Problemas com fronteiras fixas	32
2.3.3 Problemas com fronteiras móveis	37
2.4 Problemas variacionais com restrições	39
2.4.1 Restrições da forma $f(x, t) = 0$	39
2.4.2 Restrições da forma $f(x, x', t) = 0$	42
3 Equações básicas e conceitos de dinâmica	44
3.1 Equação do Movimento	44
3.1.1 Força de atração gravitacional	45
3.1.2 Força de Gradiente de Pressão	45
3.1.3 Equação da continuidade	46
3.2 Equações básicas em um sistema em rotação	47
3.2.1 Relação Geostrófica	57
4 Aplicações de Cálculo Variacional em assimilação de dados meteorológicos	58
4.1 Alguns sistemas observacionais de coletas de dados	59
4.2 Aplicações de Cálculo Variacional em problemas de análise atmosférica	61
4.2.1 Caso 1	62

4.2.2 Caso 2	67
CONCLUSÃO	72
REFERÊNCIAS	72
APÊNDICES	75
APÊNDICE A - Tópicos de Espaços Métricos	76
APÊNDICE B - Tópicos de Análise	78
APÊNDICE C - Tópicos de Cálculo Vetorial	83
APÊNDICE D - Tópicos de Estatística	86
APÊNDICE E - Equações do movimento em coordenadas esféricas	88

INTRODUÇÃO

O estudo do cálculo variacional ocorreu entre o século XVII e XVIII, com a necessidade de se estabelecer valores de maximais e minimais, como, por exemplo, determinar o máximo alcance de um projétil considerando a força da gravidade e a resistência do ar; o problema da braquistócrona, que consistia em achar a trajetória pela qual uma partícula, deslizando a partir do repouso, sem atrito, e acelerada somente pela força da gravidade iria de um ponto ao outro num plano vertical no menor tempo possível; ou também encontrar a forma de um objeto que, ao ser impulsionado através da água, tenha uma menor resistência.

O cálculo variacional é uma ferramenta matemática muito poderosa e possui uma infinidade de aplicações em várias áreas do conhecimento humano. Uma das contribuições é a utilização como ferramenta numérica para modelos matemáticos eficientes de análise e observação de dados, os quais são muito utilizados nas áreas de meteorologia e oceanografia para compreender e prever fenômenos. O Cálculo Variacional foi aplicado pela primeira vez em meteorologia por Yoshikazu Sasaki em 1970, em problemas de dinâmica atmosférica e, desde então, vem sendo uma ferramenta indispensável.

O trabalho estrutura-se da seguinte forma:

1. Capítulo 1: Introduz-se o cálculo de variações, no qual há uma infinidade de problemas, boa parte deles da mecânica. Apresenta-se o Lema e o Teorema Fundamental do Cálculo Variacional, que servem de base para encontrar a importante equação de Euler, a qual todo extremo deve obedecer.
2. Capítulo 2: Encontra-se a Equação de Euler. Apresentam-se, ainda, problemas com fronteiras e tempo final fixos e móveis, para funcionais de funções dependentes de uma mesma variável e, ainda, funcionais com restrições, utilizando-se o método dos multiplicadores de Lagrange;
3. Capítulo 3: Há o objetivo de encontrar as equações de conservação de massa e movimento na atmosfera, considerando a atração gravitacional, a pressão e também que o corpo se encontra em um sistema rotacionando, o que implica na existência de

forças "fictícias" conhecidas como a Força de Coriolis e a Força Centrífuga;

4. Capítulo 4: Utilizam-se os resultados desenvolvidos nos capítulos anteriores na aplicação em modelos meteorológicos, onde são apresentados um caso geral e dois específicos, o caso geral tem como objetivo encontrar velocidades horizontal e vertical $u(x, y, P)$ e $v(x, y, P)$ que satisfaçam os dados já analisados, além de satisfazer também uma restrição $f(x, y) = 0$ imposta, e sejam os mais convenientes para o problema. Matematicamente este problema é expresso da seguinte maneira: minimize o seguinte funcional

$$I = \iint_{PS} \{w_v(u_I - u_A)^2 + w_v(v_I - v_A)^2\} dP dS$$

sujeito a restrição

$$f_1(u, v) = 0.$$

O primeiro caso específico parte das observações já feitas, das quais estima-se alguns valores do campo de divergência, com o objetivo de encontrar o campo de divergência inicial que minimizasse o erro. O problema variacional pode ser expresso da seguinte forma: minimize o seguinte funcional

$$\int_{P_T}^{P_B} w_D(P) \{D_I(P) - D_A(P)\}^2 dP$$

sujeito a equação da continuidade do ponto de vista Lagrangeano

$$D_I + \frac{d\omega_I}{dP} = 0.$$

O segundo caso específico trata-se de um problema bidimensional com três variáveis dependentes e duas restrições, cujo objetivo é encontrar o geopotencial inicial Φ_I , que satisfaça a relação geostrófica, sendo o mais próximo possível dos campos já analisados, ou seja, não se trata de uma solução exata, mas sim de minimizar o erro. Este problema pode ser escrito como: minimize o seguinte funcional

$$I = \int_S \{w_v(u_I - u_A)^2 + w_v(v_I - v_A)^2 + w_\Phi(\Phi_I - \Phi_A)^2\} dS$$

sujeitos à relação geostrófica

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - f_o v_I = 0, \quad \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + f_o u_I = 0,$$

de acordo com Daley(1999).

Capítulo 1

Introdução ao Cálculo Variacional

Neste capítulo serão introduzidos resultados de Cálculo Variacional bastante importantes. Basicamente, o Cálculo Variacional generaliza a teoria de máximos e mínimos de funções definidas em um domínio contido em \mathbb{R}^n para funções cujo domínio é um conjunto de funções chamadas "funções admissíveis". A maior aplicabilidade do Cálculo Variacional está em buscar o melhor resultado, de acordo com um critério pré-estabelecido, como por exemplo lucro máximo, custo mínimo, tempo mínimo, tamanho ótimo, caminho mais curto, etc.

Os primeiros estudos do Cálculo Variacional ocorreram em 1696, quando Jean Bernoulli propôs o problema da braquistócrona, que consistia em achar a trajetória pela qual uma partícula, deslizando a partir do repouso, sem atrito, e acelerada somente pela força da gravidade, iria de um ponto ao outro num plano vertical, no menor tempo possível. Cinco matemáticos chegaram à mesma resposta, um arco de cicloide: Isaac Newton, Jacob Berboulli, Leibniz, L'Hopital e o próprio Jean Bernoulli. Todos usaram diferentes métodos geométricos para chegar ao mesmo resultado. Porém, foram os métodos de Jean Bernoulli para resolver estes problemas, além de outros semelhantes, que fizeram com que, anos depois, Euler e Lagrange desenvolvessem o Cálculo Variacional.

A maior parte do Cálculo de Graduação conhecida hoje já havia sido estabelecida por volta de 1700, juntamente com tópicos mais avançados, aí incluído o Cálculo Variacional. Durante o século XVIII, Lagrange e Euler foram, em geral, os mais notáveis matemáticos. A primeira contribuição de Lagrange para a Matemática foi na seara do Cálculo Variacional, um ramo novo da Matemática naquela época, cujo nome se originou das notações utilizadas por Lagrange. Em 1755, Lagrange escreveu a Euler sobre os métodos gerais que tinha desenvolvido para tratar de problemas de isoperimetria, que nada mais foi do que encontrar caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixos que cercam a maior área, além de problemas de mais rápida queda. Euler retardou a publicação de um de seus trabalhos sobre o tema para que o autor mais jovem ficasse

com todo o crédito pelos novos métodos.

1.1 Preliminares

Os conceitos e definições a seguir foram trabalhados com base em Gelfand e Fomin(1963).

Definição 1.1.1 Representaremos um funcional por $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Um funcional é uma expressão que tem como entrada funções de uma dada classe de funções Ω e de saída um único número real. Ω é chamado de Espaço Funcional.

1.1.2 Espaços Funcionais

Para fixar as ideias, podemos intuitivamente relacionar funções $x(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de n variáveis com pontos de um espaço euclidiano, ou seja, cada função $x(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de uma certa classe Ω de funções será vista como um ponto do espaço euclidiano. Para cada funcional devemos fazer a escolha de seu espaço de funções, por exemplo, se considerarmos funcionais do tipo

$$J_1(x(t)) = \int_a^b F(x, x', t) dt$$

convém escolher um espaço de todas as funções $x(t)$ onde a primeira derivada é contínua no intervalo $[a, b]$. O mesmo caso para funcionais do tipo

$$J_2(x(t)) = \int_a^b F(x, x', x'', t) dt$$

que seria apropriado escolher o espaço funcional como sendo o conjunto de todas as funções $x(t)$ que possuem derivadas de segunda ordem contínuas em $[a, b]$.

Para estender o conceito de continuidade para espaços funcionais, precisamos também estender o conceito de vizinhança, para isso iremos introduzir uma norma para determinar "distâncias" entre funções, cabendo aqui a analogia de funções com pontos no espaço euclidiano. Embora trabalharemos com espaços funcionais, é conveniente definir espaços vetoriais normados.

Um espaço vetorial é um conjunto Ω de elementos de um mesmo tipo, para os quais as operações de soma e multiplicação por escalar estão bem definidos e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \Omega$ valem os seguintes axiomas:

- (i) $x + y = y + x$ (comutatividade);
- (ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associatividade);
- (iii) $x + 0 = x$ (elemento neutro da soma);

- (iv) para cada $x \in \Omega$ existe um elemento $-x$ tal que $x + (-x) = 0$;
- (v) $1.x = x$ (elemento neutro da multiplicação);
- (vi) $\alpha.(\beta x) = (\alpha\beta).x$;
- (vii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- (viii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Um espaço vetorial Ω é dito normado se cada elemento $x \in \Omega$ é associado a um número não negativo $\|x\|$ chamado norma de x , tal que

- (i) $\|x\| = 0$ se, e somente se $x = 0$;
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|. \|x\|$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Num espaço vetorial normado pode-se introduzir o conceito de distância de dois elementos $x, y \in \Omega$ como sendo o número real não negativo $\|x - y\|$. Consideremos alguns espaços importantes aqui:

1. Definimos o espaço funcional $\mathcal{C}(a, b)$ de todas as funções $x(t)$ contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. É evidente que se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{C}(a, b)$, tem-se que $x_1(t) + \alpha.x_2(t) \in \mathcal{C}(a, b)$. Nesse espaço define-se a norma de uma função $x(t) \in \mathcal{C}(a, b)$ por

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

Ainda, a distância $\|x - \bar{x}\|$ de duas funções neste intervalo é representada pela maior distância por essas assumida num mesmo ponto $x_0 \in [a, b]$.

2. Definimos o espaço funcional $\mathcal{C}^1(a, b)$ de todas as funções $x(t)$ com derivada de primeira ordem contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Da mesma forma, é evidente que se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{C}^1(a, b)$, tem-se que $x_1(t) + \alpha.x_2(t) \in \mathcal{C}^1(a, b)$, mas neste espaço define-se a norma de uma função $x(t) \in \mathcal{C}^1(a, b)$ por

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

Portanto, duas funções em \mathcal{C} são consideradas próximas se ambas as funções e suas primeiras derivadas são próximas, ou seja

$$\|x - z\| < \epsilon$$

implica em

$$|x(t) - z(t)| < \epsilon, \quad |x'(t) - z'(t)| < \epsilon$$

3. O mesmo caso acima, considerando o espaço $\mathcal{C}^n(a, b)$, seguindo a mesma ideia.

Definição 1.1.3 *Um funcional $J(x)$ é contínuo em $\bar{x} \in \Omega$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - \bar{x}\| < \delta$ implica em $|J(x) - J(\bar{x})| < \epsilon$.*

Definição 1.1.4 *Dado um espaço vetorial normado Ω , para cada elemento $x \in \Omega$ será associado um único número $J(x)$, ou seja, $J(x)$ é um funcional linear definido em Ω . Então, $J(x)$ é um funcional linear contínuo se*

1. $J(\alpha x) = \alpha J(x)$ para todo $x \in \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \Omega$.
3. $J(x)$ é contínuo para todo $x \in \Omega$.

1.2 Condições necessárias para um extremo

Apresentaremos nesta sessão o Lema e o Teorema fundamental do Cálculo, que servem de base para encontrar a Equação de Euler abordada no segundo capítulo. Além disso apresentaremos alguns outros lemas importantes do Cálculo Variacional.

Lema 1.2.1 (Lema Fundamental do Cálculo de Variações) *Se $\alpha(t)$ é contínua em $[a, b]$ e se*

$$\int_a^b \alpha(t)h(t)dt = 0$$

para toda função $h(t)$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, então $\alpha(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Demonstração: Suponhamos, sem perder a generalidade, que exista $t_0 \in (a, b)$ para o qual $\alpha(t_0) > 0$. Como a função $\alpha(t)$ é por hipótese contínua, então deve existir um $\delta > 0$ para o qual todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\alpha(t) > 0$. Além disso, como a função $h(t)$ é qualquer, podemos escolhê-la como

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]; \\ 0 & \text{se } x \notin [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Logo

$$\int_a^b h(t)\alpha(t) dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \alpha(t) dt > 0$$

Contradição. Logo $\alpha(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. ■

Lema 1.2.2 *Se $\alpha(t)$ é contínua em $[a, b]$ e se*

$$\int_a^b \alpha(t)h'(t)dt = 0$$

para toda função $h(t) \in \mathcal{C}^1(a, b)$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, então $\alpha(t) = c$ para todo $t \in [a, b]$, onde c é uma constante.

Demonstração: Como $\alpha(t)$ é contínua em $[a, b]$, então ela admite um valor de mínimo em a_0 e um valor de máximo em b_0 para $a_0, b_0 \in [a, b]$. Pelo teorema do valor médio para integrais existe um $c \in [\alpha(a_0), \alpha(b_0)]$ tal que

$$\int_a^b \alpha(t)dt = c(b - a)$$

logo, podemos escrever

$$\int_a^b [\alpha(t) - c]dt = 0.$$

Propomos então $h(t) = \int_a^t [\alpha(\theta) - c]d\theta$. Vemos que $h(t) \in \mathcal{C}(a, b)$, pois $h'(t) = \alpha(t) - c$ é contínua. Temos ainda que

$$h(a) = \int_a^a [\alpha(\theta) - c]d\theta = 0$$

e

$$h(b) = \int_a^b [\alpha(\theta) - c]d\theta = 0.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_a^b [\alpha(t) - c].h'(t)dt &= \int_a^b \alpha(t)h'(t) - c.h'(t)dt \\ &= \int_a^b \alpha(t)h'(t)dt - \int_a^b c.h'(t)dt \\ &= \int_a^b \alpha(t)h'(t)dt - c.[h(b) - h(a)] = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [\alpha(t) - c].h'(t)dt \\ &= \int_a^b [\alpha(t) - c].[\alpha(t) - c]dt \\ &= \int_a^b [\alpha(t) - c]^2 dt \end{aligned}$$

Logo, como $\alpha(t) - c$ é contínua, temos que para ter $\int_a^b [\alpha(t) - c]^2 dt = 0$, devemos ter $\alpha(t) - c = 0$, ou seja, $\alpha(t) = c$. ■

Introduziremos agora o conceito de variação de um funcional que será utilizado para obtermos extremos de um funcional. Seja $J(x)$ um funcional definido em algum espaço vetorial normado e seja

$$\Delta J(x, \delta x) = J(x + \delta x) - J(x)$$

o incremento de $J(x)$ correspondente ao incremento δx da variável independente. Se $x(t)$ é fixada, $\Delta J(\delta x)$ é um funcional de δx , mas em geral não-linear. Suponhamos que

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(\delta x) + \epsilon \|\delta x\|,$$

onde $\delta J(\delta x)$ é um funcional linear e $\epsilon \rightarrow 0$ quando $\|\delta x\| \rightarrow 0$. Neste caso, o funcional $J(x)$ é dito diferenciável e a parte principal do incremento é chamada variação de $J(x)$ e é denotado por $\delta J(\delta x)$.

Exemplo 1.2.3 *Consideremos o funcional*

$$J(x(t)) = \int_a^b [x(t)]^2 dt$$

O incremento é dado por

$$\begin{aligned} \Delta J(x(t), \delta x) &= \int_a^b [x + \delta x(t)]^2 dt - \int_a^b [x(t)]^2 dt. \\ &= \int_a^b [2x(t)\delta x(t)] dt + \int_a^b [\delta x(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

O primeiro termo é linear em relação a δx para cada $x(t)$ fixo. No segundo termo, temos

$$\int_a^b [\delta x(t)]^2 dt = \int_a^b |\delta x(t)|^2 dt \leq \max_{t \in [a,b]} |(\delta x)|^2 \int_a^b dt$$

Se tivermos $\|\delta x\| \rightarrow 0$, temos que $(b - a)\|\delta x\| \rightarrow 0$.

Assim, o incremento ΔJ é representado como a soma de um termo linear em δx e um termo que é um infinitésimo comparado a δx . Então J é diferenciável em $x(t)$ e a variação δx é dada por

$$\delta J(x(t)) = 2 \int_a^b x(t) \delta x(t) dt$$

Teorema 1.2.4 *A variação de um funcional diferenciável é única.*

Demonstração: Primeiramente, devemos notar que se $\delta J(\delta x)$ é um funcional linear e se

$$\frac{\delta J(\delta x)}{\|\delta x\|} \rightarrow 0$$

quando $\|\delta x\| \rightarrow 0$, então $\delta J(\delta x)$ deve ser a função identicamente nula. De fato, supondo $\delta J(\delta x) \neq 0$ para algum $\delta x_0 \neq 0$, podemos gerar uma sequência

$$\delta x_n = \frac{\delta x_0}{n}, \quad \lambda = \frac{\delta J(\delta x_0)}{\|\delta x_0\|},$$

vemos que $\|\delta x_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta J(\delta x_n)}{\|\delta x_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \delta J(\delta x_0)}{n \|\delta x_0\|} = \lambda \neq 0$$

contrariando a hipótese.

Agora, suponhamos que

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J_1(\delta x) + \epsilon_1 \|\delta x\|,$$

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J_2(\delta x) + \epsilon_2 \|\delta x\|$$

onde $\delta J_1(\delta x)$ e $\delta J_2(\delta x)$ são funcionais lineares e $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ quando $\|\delta x\| \rightarrow 0$. Isso implica que

$$\delta J_1(\delta x) - \delta J_2(\delta x) = \epsilon_1 \|\delta x\| - \epsilon_2 \|\delta x\| = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \|\delta x\|$$

ou seja

$$\frac{\delta J_1(\delta x) - \delta J_2(\delta x)}{\|\delta x\|} = (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

e como $\delta J_1(\delta x)$ e $\delta J_2(\delta x)$ são funcionais lineares, tem-se pela primeira parte que,

$$\delta J_1(\delta x) - \delta J_2(\delta x) = 0$$

demonstrando o teorema. ■

Definição 1.2.5 *Seja $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. J tem um extremo relativo, ou extremal, ou extremo funcional em $x^*(t)$ quando existe $\epsilon > 0$ tal que, para todas as funções que satisfazem $|x - x^*(t)| < \epsilon$, tivermos:*

(i) um minimal, quando $\Delta J > 0$.

(ii) um maximal, quando $\Delta J < 0$.

Teorema 1.2.6 (Teorema Fundamental do Cálculo de Variações) Seja $x \in \Omega$ e $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional diferenciável. Suponhamos que as funções de Ω não sejam limitadas. Se $x^*(t)$ é um extremo funcional, então

$$\delta J(x^*(t), \delta x) = 0.$$

Demonstração: Suponhamos $x^*(t)$ um extremal, mas $\delta(x^*(t), \delta x) \neq 0$, assim, como J é diferenciável,

$$\Delta J(x^*(t), \delta x) = J(x^*(t) + \delta x) - J(x^*(t)) = \delta J(x^*(t), \delta x) + g(x^*(t), \delta x) \cdot \|\delta x\|$$

onde $g(x^*, \delta x) \rightarrow 0$ quando $\|\delta x\| \rightarrow 0$. Sendo assim, existe uma vizinhança $\|\delta x\| < \epsilon$ onde $g(x^*(t), \delta x) \cdot \|\delta x\|$ é pequeno o suficiente para que δJ domine o sinal de ΔJ . Consideremos agora a variação dada por $\delta x = \alpha \delta \bar{x}$, com $\alpha > 0$ e $\|\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon$. Suponhamos que para essa variação teremos $\delta J(x^*(t), \alpha \delta \bar{x}) < 0$. Assim como δJ é linear, temos

$$\delta J(x^*(t), \delta x) = \delta J(x^*(t), \alpha \delta \bar{x}) = \alpha \cdot \delta J(x^*(t), \delta \bar{x}) < 0$$

assim os sinais de ΔJ e δJ são os mesmos para $\|\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon$ e isso implica que nesse caso tem-se $\Delta J(x^*(t), \delta x) < 0$.

Consideramos agora a variação dada por $\delta x = -\alpha \delta \bar{x}$. É óbvio que $\|-\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon$ e analogamente, temos que o sinal de $\Delta J(x^*(t), -\alpha \delta \bar{x})$ é o mesmo de $\delta J(x^*(t), -\alpha \delta \bar{x})$ e da mesma forma

$$\delta J(x^*(t), \delta x) = \delta J(x^*(t), -\alpha \delta \bar{x}) = -\alpha \cdot \delta J(x^*(t), \delta \bar{x}) > 0$$

Logo $\Delta J(x(t), \delta x)$ oscila de sinal em uma vizinhança de $x^*(t)$, Contradizendo o fato de $x^*(t)$ ser extremal. Portanto $\delta J(x^*(t), \delta x) = 0$ para todo δx admissível. ■

Capítulo 2

Equação de Euler e alguns problemas de Cálculo Variacional

Existem muitos problemas de Cálculo Variacional, serão apresentados neste capítulo poucos deles, quais sejam: o problema de fronteiras fixas, fronteiras móveis, tempo final livre, funcionais dependendo de mais de uma função e problemas com alguns outros tipos de restrições, Flores(2011). Será apresentada no capítulo 04 uma aplicação importante do Cálculo variacional em um modelo meteorológico.

2.1 Equação de Euler e o problema com fronteiras fixas

Seja $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Demonstraremos aqui a Equação de Euler, que é uma condição necessária para que uma função $\bar{x} \in \Omega$ seja um extremal de J . Vamos considerar um problema com fronteiras fixas e procurar tal $\bar{x} \in \Omega$ que seja um extremo funcional. Consideremos o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt$$

com $g \in C^2$, $x(t_0) = x_0$ e $x(t_f) = x_f$. As curvas que satisfazem estas condições são ditas curvas admissíveis. Queremos $\bar{x} \in \Omega$ tal que esta caracteriza curva admissível e seja um extremal de J .

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt \end{aligned}$$

com $x'(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ e $\delta x'(t) = \frac{d}{dt}\delta x(t)$.

Expandindo o primeiro termo da integral por uma série de Taylor em torno de

$(x(t), x'(t))$, encontramos

$$\begin{aligned} g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) &= g(x(t), x'(t), t) \\ &+ \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t), \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right) \cdot (\delta x(t), \delta x'(t)) \\ &+ r(\delta x(t), \delta x'(t)). \end{aligned}$$

Substituindo na integral, encontramos

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t), \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right) (\delta x(t), \delta x'(t)) + r(\delta x(t), \delta x'(t)) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \delta x'(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} r(\delta x(t), \delta x'(t)) dt \end{aligned}$$

Pela hipótese, existe $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x(t), x'(t), t) \right|, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}(x(t), x'(t), t) \right| < M,$$

então

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} r(x(t), x'(t), \delta x(t), \delta x'(t)) dt &\leq 2M \int_{t_0}^{t_f} \|\delta x\|^2 dt \\ &= 2M(t_f - t_0) \|\delta x\|^2 \end{aligned}$$

onde

$$\|\delta x\| = \max_{t_0 \leq t \leq t_f} (|\delta x|, |\delta x'|).$$

Logo $\int_{t_0}^{t_f} r(\delta x(t), \delta x'(t)) dt$ é um infinitésimo de segunda ordem. Portanto J é diferenciável em $C^1(x_0, x_f)$ e sua variação é dada por

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{dg}{dx}(x(t), x'(t), t) \delta x(t) + \frac{dg}{dx'}(x(t), x'(t), t) \delta x'(t) \right] dt$$

Usando o teorema fundamental do cálculo, podemos dizer que

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^t \delta x'(t) dt + \delta x(t_0),$$

ou seja, para cada $\delta x(t)$ teremos um único $\delta x'(t)$. Integrando por partes a parcela da variação que envolve $\delta x'(t)$, obtemos

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \delta x'(t) dt = \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right) dt \quad (2.1.1)$$

Como as curvas admissíveis devem passar pelos pontos (t_0, x_0) e (t_f, x_f) , temos que

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \delta x(t) \right|_{t_0}^{t_f} = 0$$

pois

$$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0.$$

Logo

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \delta x(t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) dt$$

ou seja,

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \quad (2.1.2)$$

O Teorema Fundamental do Cálculo de Variações nos diz que para uma função $x(t)$ ser um extremal, deveremos ter

$$\delta J(x, \delta x) = 0,$$

portanto,

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt = 0$$

e o Lema Fundamental do Cálculo de Variações nos diz que se

$$\int_{t_0}^{t_1} h(t) \delta x(t) dt = 0$$

para toda função δx contínua em $[t_0, t_1]$, então

$$h(t) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

que é a Equação de Euler.

Exemplo 2.1.1 Seja $J(x) = \int_0^1 [x'(t)]^2 + 12tx(t) dt$, com $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$. Queremos encontrar uma função $x(t)$ de classe $C^2(0, 1)$ que seja um extremo desse funcional. Neste caso, teremos $g(x(t), x'(t), t) = [x'(t)]^2 + 12tx(t)$ e sabemos que esta deve satisfazer a Equação de Euler. Então

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] = 0$$

$$12t - \frac{d}{dt} [2x'(t)] = 0$$

$$x''(t) - 6t = 0$$

Resolvendo esta equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes e aplicando as condições de contorno, encontramos

$$x(t) = t^3$$

Encontramos pela Equação de Euler este candidato, agora, usando as definições, verificaremos algebricamente se ele é um extremal. Temos

$$\begin{aligned} J(x(t) + \delta x) &= \int_0^1 \{[x'(t) + \delta x'(t)]^2 + 12t(x(t) + \delta x(t))\} dt - \int_0^1 [x'(t)]^2 + 12tx(t) dt \\ &= \int_0^1 \{[x'(t)]^2 + 2x'(t)\delta x'(t) + 12tx(t) + [\delta x'(t)]^2 + 12t\delta x(t)\} dt \\ &= J(x(t)) + \int_0^1 2x'(t)\delta x'(t) + [\delta x'(t)]^2 + 12t\delta x(t) dt \end{aligned}$$

Substituindo $x(t) = t^3$,

$$J(t^3 + \delta x(t)) = J(t^3) + \int_0^1 \{6t^2\delta x'(t) + [\delta x'(t)]^2 + 12t\delta x(t)\} dt$$

ou seja, basta analisarmos o segundo termo verificando se este oscila ou não de sinal.

Observe que se integrarmos por partes o primeiro termo da integral, encontramos

$$\int_0^1 6t^2\delta x'(t) dt = 6\delta x(t)t^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 12t\delta x(t) dt.$$

Como $x(t) + \delta x(t)$ devem ser uma curvas admissíveis, tem-se que $\delta x(0) = \delta x(1) = 0$.

Portanto

$$\int_0^1 6t^2\delta x'(t) dt = - \int_0^1 12t\delta x(t) dt$$

assim, temos que

$$J(t^3 + \delta x(t)) = J(t^3) + \int_0^1 [\delta x'(t)]^2 dt.$$

e como

$$\int_0^1 [\delta x'(t)]^2 dt \geq 0$$

segue, pela definição (1.2.5), que $x(t)$ é um minimal.

2.2 Problemas com fronteira móvel

2.2.1 Tempo final especificado e $x(t_f)$ livre

Estudaremos aqui um problema em que fixaremos t_0 , t_f , x_0 e deixaremos livre x_f . As curvas admissíveis passam por (t_0, x_0) e por em algum ponto da reta $t = t_f$. Consideremos o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt.$$

Das equações (2.1.1) e (2.1.2), chegamos que a variação pode ser dada por

$$\begin{aligned} \delta J(x(t), \delta x) &= \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t_f), x'(t_f)) \delta x(t_f) - \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t_0), x'(t_0)) \delta x(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \end{aligned}$$

Das curvas admissíveis, sabemos que $\delta x(t_0) = 0$ e $\delta x(t_f)$ é arbitrário. Consideremos então $x^*(t)$ um extremo funcional, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Variacional, temos

$$\begin{aligned} \delta J(x^*(t), \delta x(t)) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x(t_f) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

É natural que um extremo para fronteiras livres é também um extremo para um problema com fronteiras fixas, basta considerar os mesmos pontos inicial e final e o mesmo funcional. Portanto, a condição (2.1.3) deve ser satisfeita.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] = 0 \quad (2.2.4)$$

Assim, a equação é reduzida a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \cdot \delta x(t_f) = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0 \quad (2.2.5)$$

pois $x(t_f)$ e $\delta x(t_f)$ são arbitrários. (2.2.5) é chamada de condição natural de contorno.

Exemplo 2.2.2 Consideremos o funcional dado por $\int_0^1 [x(t)]^2 + [x'(t)]^2 dt$ com $x(0) = 1$ e $x(1)$ arbitrário. Aplicando a condição de Euler (2.1.3), chegamos à seguinte equação

diferencial

$$x(t) - x''(t) = 0$$

que possui solução

$$x^*(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Aplicando a condição natural de contorno (2.2.5), temos

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(1), x^{*\prime}(1), 1) = 0$$

$$2x^{*\prime}(1) = 0$$

$$2c_1 e^1 - 2c_2 e^{-1} = 0$$

logo, resolvendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 e^1 - 2c_2 e^{-1} = 0 \end{cases}$$

obtemos $c_1 = \frac{e^{-1}}{e + e^{-1}}$ e $c_2 = \frac{e}{e + e^{-1}}$. Portanto, o candidato a extremal é $x^*(t) = \frac{e^{t-1} + e^{1-t}}{e + e^{-1}}$. Verifiquemos agora algebricamente se este, de fato, trata-se de um extremal. Temos que

$$\begin{aligned} J(x^*(t) + \delta x) &= \int_0^1 [x^*(t) + \delta x(t)]^2 + [x^{*\prime}(t) + \delta x'(t)]^2 dt \\ &= J(x^*(t)) + 2 \int_0^1 x^*(t) \cdot \delta x(t) dt + 2 \int_0^1 x^{*\prime}(t) \cdot \delta x'(t) dt + \int_0^1 \{[\delta x(t)]^2 + [\delta x'(t)]^2\} dt \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\int_0^1 x^{*\prime}(t) \cdot \delta x'(t) dt = x^{*\prime}(t) \cdot \delta x(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^{*\prime\prime}(t) \cdot \delta x(t) dt$$

$x^{*\prime}(0) \cdot \delta x'(0) = 0$ pois $x(0)$ é fixo, $x^{*\prime}(1) \cdot \delta x'(1) = 0$ (resultado obtido usando a condição natural de contorno) e como para este candidato, $x^{*\prime\prime}(t) = x^*(t)$, então

$$\int_0^1 x^*(t) \cdot \delta x(t) dt = \int_0^1 x^{*\prime\prime}(t) \cdot \delta x(t) dt$$

e o raciocínio se reduz a

$$J(x^*(t) + \delta x) = J(x^*(t)) + \int_0^1 \{[\delta x(t)]^2 + [\delta x'(t)]^2\} dt.$$

Como $\int_0^1 \{[\delta x(t)]^2 + [\delta x'(t)]^2\} dt \geq 0$, então, pela definição (1.2.5) $x^*(t)$ é um minimal.

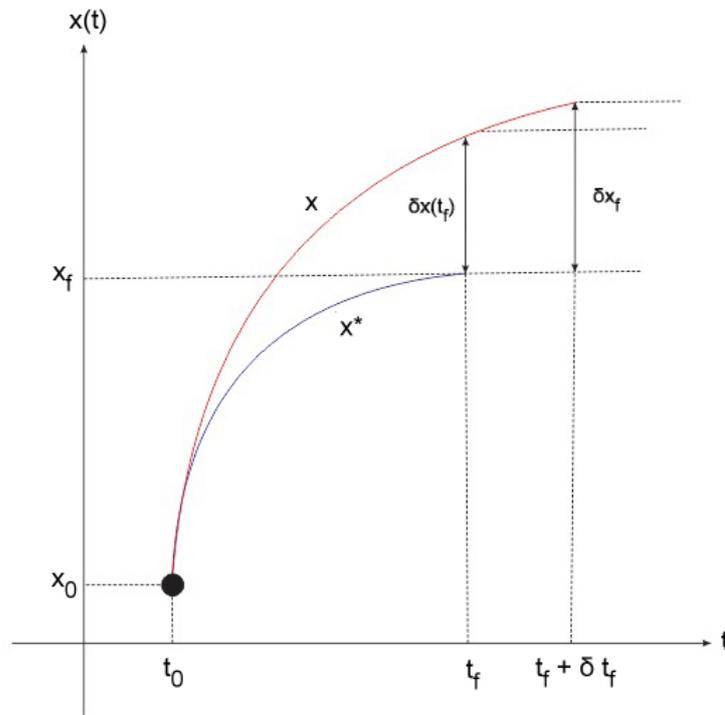
2.2.3 Tempo final e $x(t)$ livres

Neste problema consideraremos o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt$$

no caso onde t_0 e $x(t_0) = x_0$ são especificados e t_f e $x(t_f)$ são livres. Ainda, $x(t)$ deve ser uma função com a primeira derivada contínua e g deve ter suas derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Pela figura (2.1), vamos supor que x^* seja um extremal e o compararemos com outras curvas admissíveis para este funcional.

Figura 2.1: Extremo $x^*(t)$ e uma curva $x(t)$ admissível.



Fonte: produção do próprio autor.

Observe que $\delta x(t_f) = x(t_f) - x^*(t_f)$ e $\delta x_f = x(t_f + \delta t_f) - x^*(t_f)$ e que para a maioria das curvas admissíveis $\delta x(t_f) \neq \delta x_f$. Pela figura (2.1), vemos que o incremento neste caso pode ser dado por

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), x^{*'}(t), t) dt$$

que pode ser escrito também como

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} [g(x(t), x'(t), t) - g(x^*(t), x^{*'}(t), t)] dt - \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} g(x^*(t), x^{*'}(t), t) dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt.\end{aligned}$$

Como $\delta x(t) = x(t) - x^*(t)$, podemos substituir e encontrar

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(g(x^*(t) + \delta x(t), x^{*'}(t) + \delta x'(t), t) - g(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right) dt \\ &\quad - \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x^*(t), x^{*'}(t), t) dt.\end{aligned}$$

Expandindo $g(x^*(t) + \delta x(t), x^{*'}(t) + \delta x'(t), t)$ em uma série de Taylor em torno de $(x^*(t), x^{*'}(t))$, encontramos

$$\begin{aligned}g(x^*(t) + \delta x(t), x^{*'}(t) + \delta x'(t), t) &= g(x^*(t), x^{*'}(t), t) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \delta x(t) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \delta x'(t) + o(\delta x(t), \delta x'(t))\end{aligned}$$

onde $o(\delta x(t), \delta x'(t))$ representa os termos de ordem superior ou igual a dois. Para simplificar, denotaremos $\int_{t_0}^{t_f} o(\delta x(t), \delta x'(t)) dt$ por $o(\cdot)$.

Substituindo o termo expandido pela série de Taylor no primeiro integrante, temos

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt \\ &\quad + o(\cdot) + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt\end{aligned}\tag{2.2.6}$$

Usando o Teorema do Valor Médio para integrais na última parcela, temos

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt = g(x(t), x'(t), t)|_{t_f + \theta \delta t_f} \delta t_f$$

com $\theta \in (0, 1)$. Além disso, da continuidade de g , teremos

$$g|_{t=t_f + \theta \delta t_f} = g|_{t=t_f} + \epsilon$$

onde $\epsilon \rightarrow 0$ quando $\delta t_f \rightarrow 0$ e $\delta x(t_f) \rightarrow 0$. Assim

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt = g(x(t), x'(t), t)|_{t=t_f} \delta t_f + \epsilon \delta x(t_f).\tag{2.2.7}$$

Integrando por partes o termo envolvendo $\delta x'(t)$ da equação (2.2.6), temos

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x'(t) dt = \left. \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \cdot \delta x(t) \right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x(t) dt$$

e como $\delta x(t_0) = 0$, por ser curva admissível, temos

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x'(t) dt = \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x(t_f) \quad (2.2.8)$$

$$- \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*, x^{*'}, t) \right] \delta x(t) dt \quad (2.2.9)$$

Substituindo (2.2.7) e (2.2.9) em (2.2.6), temos

$$\begin{aligned} \delta J &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}, t) \right] \delta x(t_f) + g(x(t_f), x'(t_f), t) \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}, t) \right] \right\} \delta x(t) dt + o(\cdot) \end{aligned}$$

Expandindo agora por Taylor em torno de $(x^*(t_f), x^{*'}(t_f))$ o termo $g(x(t_f), x'(t_f), t_f) = g(x^*(t_f) + \delta x(t), x^{*'}(t_f) + \delta x'(t), t_f)$, temos

$$\begin{aligned} g(x(t_f), x'(t_f), t_f) &= g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x(t_f) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x'(t_f) + o(\cdot). \end{aligned}$$

A razão para calcularmos ΔJ é para encontrarmos a variação δJ . Como já vimos, δJ é a parte linear de ΔJ , então $g(x(t), x'(t), t)$ será aproximada linearmente por $g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f)$. Substituindo em ΔJ , encontramos

$$\begin{aligned} \delta J &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t_f), x'(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) + g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + o(\cdot) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Podemos fazer uma relação entre δt_f e δx_f usando o teorema do valor médio por $\delta x_f = \delta x(t_f) + x'(t_f) \delta t_f$. Como a curva $x^*(t)$ é extremal e admissível, segue que

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + x^{*'}(t_f) \delta t_f$$

logo, substituindo na equação (2.2.11) e agrupando os termos, é obtida a variação de J :

$$\begin{aligned}\delta J(x^*, \delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x_f \\ &+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt.\end{aligned}$$

Da mesma forma que no problema anterior, a equação de Euler deve ser obedecida, portanto a integral se anula. Assim

$$\begin{aligned}\delta J(x^*, \delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x_f \\ &+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f\end{aligned}$$

O teorema fundamental do cálculo variacional nos diz que se $x^*(t)$ é um extremal então devemos ter $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$. Note que existem muitas possibilidades de termos para que $\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$, estudaremos dois casos.

1. Suponhamos t_f e $x(t_f)$ arbitrários. Então devemos ter da equação (2.2.11) $\delta x(t_f) = \delta t_f = 0$. Isso nos leva a

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) = 0$$

e

$$g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) = 0.$$

Isto nos levaria a

$$g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0$$

que é a condição natural de contorno, ou seja, a condição encontrada quando t_f era fixo, mas $x(t_f)$ arbitrário.

2. No mesmo caso acima, mas com $x(t_f)$ especificado e t_f livre. Neste caso, similarmente, teríamos

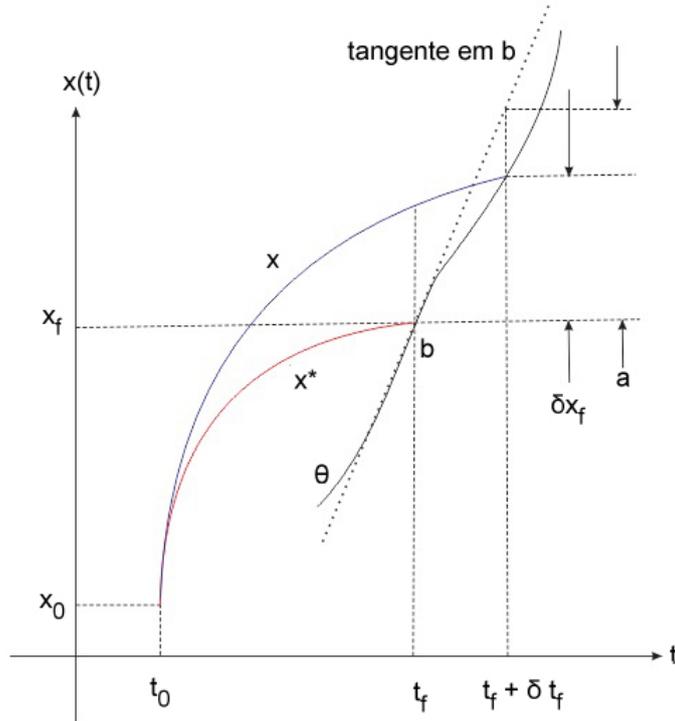
$$g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) = 0.$$

3. Suponhamos que t_f e $x(t_f)$ são relacionados, ou seja, o valor de $x(t)$ deve estar relacionado com t_f , digamos, por uma função $y(t)$, ou seja

$$x^*(t_f) = y(t_f)$$

Na figura (2.2) podemos notar que

Figura 2.2: Extremo t_f e $x(t_f)$ são livres e relacionados pela curva $y(t)$.



Fonte: produção do próprio autor.

$$\frac{dy}{dt}(t_f) = \frac{a}{\delta t_f}$$

A distância a é uma aproximação linear para δx_f que estão relacionados com δt_f por

$$\delta x_f \approx \frac{dy}{dt}(t_f) \delta t_f$$

Substituindo então em $\delta J(x(t), \delta x)$ e considerando que δt_f é arbitrário, temos que

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) \right] \left[\frac{dy}{dt}(t_f) - x'^*(t_f) \right] + g(x^*(t_f), x'^*(t_f), t_f) = 0. \quad (2.2.11)$$

Esta equação é conhecida como a Equação da Transversalidade.

Exemplo 2.2.4 Considere o funcional

$$J(x(t)) = \int_0^{t_f} \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt$$

onde $x(0) = 0$ e termina sobre a curva $y(t) = -4t + 5$.

O funcional só depende da variável $x'(t)$, então da equação de Euler

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] = 0$$

temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] = 0$$

ou seja

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{x^*(t)}{\sqrt{1 + (x^{*\prime}(t))^2}} \right] = 0.$$

Considerando a condição inicial, a solução desse problema é $x^*(t) = c_1 t + 2$. Usando a Equação da Transversalidade para determinar c_1 , temos

$$\frac{x^*(t_f)}{\sqrt{1 + (x^{*\prime}(t_f))^2}} \cdot [-4 - x^*(t_f)] + \sqrt{1 + (x^*(t_f))^2} = 0$$

que nos dá $x^*(t_f) = \frac{1}{4}$ e assim

$$x^*(t) = \frac{1}{4}t + 2$$

é o candidato a extremo desse funcional.

2.3 Funcional envolvendo várias funções independentes

2.3.1 Problemas com fronteiras fixas

Consideremos o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) dt$$

onde $x_1(t), \dots, x_n(t)$ são funções independentes com suas primeiras derivadas contínuas e g com sua derivada de segunda ordem contínua, consideremos também t_0 e t_f especificados.

Consideremos ainda as condições de contorno

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{1_0}, & x_1(t_f) &= x_{1_f} \\ &\vdots & &\vdots \\ x_n(t_0) &= x_{n_0}, & x_n(t_f) &= x_{n_f}. \end{aligned}$$

Nosso objetivo aqui será encontrar condições para que x_1^*, \dots, x_n^* representem juntos um extremo para o funcional $J(x(t))$. Evidentemente usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo Variacional, então calculemos o incremento.

$$\begin{aligned} \Delta J(x(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} [g(x_1(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n(t) + \delta x_n(t), x_1'(t) + \delta x_1'(t), \dots, x_n'(t) + \delta x_n'(t), t) \\ &\quad - g(x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t)] dt. \end{aligned}$$

Expandindo $G^* = g(x_1(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n(t) + \delta x_n(t), x'_1(t) + \delta x'_1(t), \dots, x'_n(t) + \delta x'_n(t), t)$ em uma série de Taylor em torno de $(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t))$, obtemos

$$\begin{aligned}
G^* &= g(x_1(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n(t) + \delta x_n(t), x'_1(t) + \delta x'_1(t), \dots, x'_n(t) + \delta x'_n(t), t) \\
&= g(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_1(t) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_n(t) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x'_1}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_1(t) + \dots \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x'_n}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_n(t) \\
&\quad + o(\cdot) \\
&= g(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i(t) \\
&\quad + o(\cdot)
\end{aligned}$$

onde $o(\cdot)$ representam os termos não-lineares δx_i e $\delta x'_i$ com $1 \leq i \leq n$. Substituindo no incremento

$$\begin{aligned}
\Delta J(x(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i(t) dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i(t) dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} o(\cdot) dt.
\end{aligned}$$

Como estamos considerando funcionais lineares, a variação δJ será representada pelos termos que envolvem δx_i e $\delta x'_i$. Portanto

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i(t) dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i(t) dt
\end{aligned}$$

Integraremos agora por partes os termos que envolvem $\delta x'_i$, então

$$\begin{aligned}
K^* &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right] \delta x_i(t) dt.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\delta J &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i dt \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right] \delta x_i(t) dt.
\end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos do Problema de Fronteiras Fixas da Seção 2.1 de uma só função, temos $\delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_f) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Logo o primeiro termo da expressão é zero, ou seja

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i(t) dt \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right] \delta x_i(t) dt.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Variacional, temos que a possibilidade de ocorrer extremal é onde $\delta J = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i(t) dt \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right] \delta x_i(t) dt
\end{aligned}$$

Como os δx_i são independentes, podemos por exemplo tomar $\delta x_i(t) = 0$ para todo $i \neq 1$ e $\delta x_1 \neq 0$ assumindo valores arbitrários no intervalo (t_0, t_f) . Logo, teríamos reduzido

o problema para

$$0 = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_i^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) \delta x_1(t) dt \\ - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x_1'}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) \right] \delta x_1(t) dt$$

Aplicando o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, teremos

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_i^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x_1'}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) \right] = 0$$

e ainda, repetindo os mesmos argumentos acima, teremos, por exemplo

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_i^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x_2'}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) \right] = 0$$

ou seja, podemos repetir esse argumento n vezes,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_i^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i'}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1^{*'}(t), \dots, x_n^{*'}(t), t) \right] = 0$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Temos nada mais do que n equações de Euler a serem resolvidas. Vale a pena enfatizar que $x_i(t)$ devem satisfazer as n equações ao mesmo tempo, o que de fato aumenta a complexidade do problema.

Usaremos agora, por ser mais conveniente, a notação matricial. Usaremos vetores e matrizes. Consideremos o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt$$

e as condições de contorno dadas por $x(t_0) = x_0$ e $x(t_f) = x_f$ representadas por

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad e \quad x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

Logo o incremento torna-se

$$\Delta J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right]^T \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right]^T \delta x'(t) \right\} dt \\ + o(\cdot)$$

onde, para recordar, $o(\cdot)$ representa os termos não-lineares $\delta x(t)$ e $\delta x'(t)$. No incremento, temos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(x(t), x'(t), t), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x(t), x'(t), t) \right]^T$$

e analogamente

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x'_1}(x(t), x'(t), t), \dots, \frac{\partial g}{\partial x'_n}(x(t), x'(t), t) \right]^T.$$

Então reescrevemos a equação de Euler da seguinte forma:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = \mathbf{0}$$

onde $\mathbf{0}$ representam a matriz coluna $n \times 1$ nula. É interessante observar que a equação de Euler para o caso de fronteiras fixas encontrado anteriormente nada mais é do que um caso particular do caso em que se tem n funções da variável independente t no funcional quando $n = 1$.

Exemplo 2.3.2 *Consideremos o seguinte funcional:*

$$J(x(t)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + 2x_1(t)x_2(t) \right\} dt$$

com $x_1(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, $x_2(0) = 0$, e $x_2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Aplicando a equação de Euler para $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $g(x(t), x'(t), t) = [x_1(t)]^2 + [x_2(t)]^2 + 2x_1(t)x_2(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}([x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + 2x_1(t)x_2(t)) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x'_1}([x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + 2x_1(t)x_2(t)) \right] &= 0 \\ \Rightarrow 2x_2(t) - \frac{d}{dt} [2x'_1(t)] &= 0 \\ \Rightarrow 2x_2(t) - 2x''_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$x''_1(t) - x_2(t) = 0.$$

Para $x_2(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}([x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + 2x_1(t)x_2(t)) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x'_2}([x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + 2x_1(t)x_2(t)) \right] &= 0 \\ \Rightarrow 2x_1(t) - \frac{d}{dt} [2x'_2(t)] &= 0 \\ \Rightarrow 2x_1(t) - 2x''_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$x_2''(t) - x_1(t) = 0.$$

Resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1''(t) - x_2(t) = 0 \\ x_2''(t) - x_1(t) = 0 \end{cases}$$

e aplicando as condições de contorno $x_1(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, $x_2(0) = 0$, e $x_2(\frac{\pi}{2}) = 1$, encontramos

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

que é nosso candidato a extremal.

2.3.3 Problemas com fronteiras móveis

Consideremos o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt$$

onde $x(t) = (x_1, \dots, x_n)$ é uma função de n funções independentes com primeira derivada contínua, g possui suas derivadas parciais de segunda ordem contínua, mas não tem-se t_f e $x(t_f)$ especificados. O caminho é basicamente o mesmo do problema anterior, com algumas pequenas mudanças, uma delas é que já trabalharemos com a forma matricial.

De

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(x(t), x'(t), t), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x(t), x'(t), t) \right]^T$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1'}(x(t), x'(t), t), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n'}(x(t), x'(t), t) \right]^T$$

ao substituir no incremento já expandido por Taylor, que é dado por

$$\begin{aligned} \Delta J(x(t)) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right]^T \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right]^T \delta x'(t) \right\} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} o(\cdot) dt, \end{aligned}$$

integraremos por partes o termo que envolve $\delta x'(t)$ e relacionaremos os termos $\delta x(t_f)$ com δx_f e δt_f , como vimos no problema com fronteiras fixas de uma só função, por

$\delta x(t_f) = \delta x_f - x^*(t_f)\delta t_f$, obtemos a seguinte variação:

$$\begin{aligned}\delta J(x^*(t), \delta x(t)) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T \delta x(t_f) \\ &+ \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\}^T \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\}^T \delta x(t) dt\end{aligned}$$

É claro que um extremo para esse funcional obedece a equação de Euler,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = \mathbf{0}$$

e a equação se reduz a

$$\begin{aligned}\delta J(x^*(t), \delta x(t)) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T \delta x(t_f) \\ &+ \left\{ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\}^T \delta t_f\end{aligned}$$

A equação de Euler é a que todo extremo deve satisfazer, já a outra equação encontrada é usada para encontrar as condições de contorno necessárias para um candidato a extremal. Verifiquemos alguns casos:

1. Se $x(t_f)$ é livre e x_f é dado, é claro que teremos $\delta x(t_f) \neq 0$ e δt_f não necessariamente nulo, então teremos

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T \delta x(t_f) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0.$$

2. Se $x(t_f)$ é dado, mas x_f é livre, fica evidente que $\delta x(t_f) = 0$ e δt_f não precisa ser necessariamente nulo, então

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\}^T \delta t_f = 0$$

implica em

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) = 0.$$

Exemplo 2.3.4 Consideremos o mesmo funcional do problema anterior

$$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1(t)x_2(t) \right\} dt$$

mas com $x_1(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2})$ livre, $x_2(0) = 0$, e $x_2(\frac{\pi}{2}) = 1$.

A condição de Euler nos leva a

$$\begin{cases} x_1^*(t) = c_1 e^t + c_2 e^t + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) \\ x_2^*(t) = c_1 e^t + c_2 e^t - c_3 \cos(t) - c_4 \sin(t) \end{cases}$$

Usando agora a condição do item 1, temos que mais uma condição de contorno é dada por

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial g}{\partial x_1'} \left(x^* \left(\frac{\pi}{2} \right), x^{*'} \left(\frac{\pi}{2} \right), \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Resolvendo o sistema gerado por estas duas equações, encontramos

$$x_1^*(t) = -x_2^*(t) = -\sin(t).$$

Note que com estas condições o candidato a extremo é diferente do candidato do exercício anterior.

2.4 Problemas variacionais com restrições

Problemas variacionais com restrições são problemas em que se procura um extremo do funcional J , sendo impostas certas condições que devem ser satisfeitas pelo extremo, as quais são chamadas de restrições. São muitos os casos, mas apresentaremos apenas dois deles.

2.4.1 Restrições da forma $f(x, t) = 0$

Consideremos o funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

no simples caso onde t_0 , t_f , $x(t_0)$ e $x(t_f)$ são fixos. Queremos encontrar o candidato a extremo x^* desse funcional, onde esse deve ser um vetor de funções de dimensões $(m +$

$n) \times 1$, com $m, n \geq 1$, que deve satisfazer as n restrições da forma

$$f_i(x, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Uma saída seria resolver o sistema de todas as n restrições e obter um funcional da forma $\bar{J}(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ com m funções independentes que pode ser resolvido pelos métodos estudados anteriormente, mas esse método às vezes é inviável. Apresentaremos uma técnica que utiliza o método dos Multiplicadores de Lagrange que é mais eficiente para eliminar a dependência do funcional J das funções x_1, x_2, \dots, x_n .

Começaremos construindo um novo funcional \bar{J} como

$$\bar{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(x, t)] \right\} dt$$

que na notação matricial fica

$$\bar{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) [f(x, t)] \right\} dt$$

As restrições devem ser satisfeitas em todo $t \in [t_0, t_f]$, ou seja, os multiplicadores de Lagrange λ_i são funções de t . A variação do funcional \bar{J} é encontrada aplicando variações nas funções como antes de costume e agora também nas funções λ .

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) \right] \right] \delta x(t) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) + [f^T(x(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt \end{aligned}$$

Integrando por partes o termo envolvendo $\delta x'(t)$ e substituindo, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) \right] \right] \delta x(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + [f^T(x(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt \\ &\quad + \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \end{aligned}$$

Como estamos considerando o caso onde $x(t_0)$ e $x(t_f)$ são fixos, isso leva a $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) \right] \right] \delta x(t) \right. \\ & \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + [f^T(x(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt \end{aligned}$$

Para este problema temos que $f_i(x(t), t) = 0$, então

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) \right] \right] \right. \\ & \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \end{aligned}$$

O Teorema Fundamental do Cálculo Variacional nos garante que $\delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) = 0$ no extremo. Do Lema Fundamental do Cálculo variacional e com alguns ajustes, tem-se que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \lambda^*(t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0. \quad (2.4.12)$$

Conseguimos mais n condições do argumento inicial da integral, que obviamente deve satisfazer a equação de Euler. Definimos

$$\bar{g} = g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t)[f(x, t)]$$

e então teremos da equação (2.4.12) que

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0$$

ou seja, podemos aplicar a equação de Euler para o funcional inicial,

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (g(x^*(t), x^{*'}(t), t)) dt,$$

obtendo $m + n$ equações diferenciais. Quando reduzimos à equação

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) \right] \right] \right. \\ & \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt \end{aligned}$$

de fato, poderemos escolher n Multiplicadores de Lagrange de modo a anular o coeficiente de $\delta x(t)$, ou seja, obtemos mais n equações diferenciais, somando num total $2n + m$ equações, estas para encontrar os candidatos a extremos e também os multiplicadores de Lagrange.

2.4.2 Restrições da forma $f(x, x', t) = 0$

Resolvido de maneira semelhante ao anterior, com algumas observações. Consideremos o funcional

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

onde $t_0, t_f, x(t_0)$ e $x(t_f)$ são fixos. Queremos encontrar o candidato a extremo x^* desse funcional, onde esse deve ser um vetor de funções de dimensões $(m+n) \times 1$, com $m, n \geq 1$, que deve satisfazer as n restrições da forma

$$f_i(x, x', t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como antes, usaremos o método dos Multiplicadores de Lagrange. Então começaremos construindo um novo funcional \bar{J} como

$$\bar{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(x, x', t)] \right\} dt$$

que na notação matricial fica

$$\bar{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) [f(x, x', t)] \right\} dt$$

Se as restrições são satisfeitas, existe $\lambda(t)$ tal que $J = \bar{J}$. A variação do funcional \bar{J} é dada por

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \right] \delta x(t) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) + [f^T(x(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt \end{aligned}$$

O Teorema Fundamental do Cálculo Variacional nos garante que $\delta \bar{J}(x, \delta x, \lambda, \delta \lambda) = 0$ no extremo. Considerando o problema com fronteiras fixas, $f_i(x, x', t) = 0$, os n Multiplicadores de Lagrange que convém e nos rendem m equações diferenciais e as demais manipulações matemáticas identicamente ao caso anterior, tem-se que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right]^T \lambda^*(t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0.$$

Consequimos mais n condições do argumento inicial da integral, que obviamente deve satisfazer a equação de Euler. Definimos

$$\bar{g} = g(x(t), x'(t), t) + \lambda_i^T(t)[f_i(x, t)]$$

e então teremos

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0$$

ou seja, podemos aplicar a equação de Euler para o funcional inicial,

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (g(x^*(t), x^{*'}(t), t)) dt.$$

Obtemos no total $2n + m$ equações diferenciais para encontrar os candidatos a extremos e também os multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 3

Equações básicas e conceitos de dinâmica

A atmosfera e os oceanos são compostos basicamente por fluidos que estão em constante movimento e estes movimentos acontecem por diversas causas, Lemes e Moura(2002). O objetivo deste capítulo é estudar os movimentos na atmosfera causados pelo movimento de rotação da Terra entre outras coisas. A segunda Lei de Newton só é válida para sistemas inerciais de coordenadas, mas o fato de fluidos presentes na atmosfera sofrerem uma pequena influência do movimento de rotação da Terra, trabalhar com um sistema inercial de coordenadas não seria prático, portanto é necessário a introdução de um novo sistema, o qual é feito através de um eixo fixo e um sistema rotacionando em torno desse.

O candidato mais apropriado seria um sistema com um dos eixos sendo o eixo z na direção de um vetor velocidade angular Ω constante e os outros dois orientados a formar um sistema ortogonal. No entanto, um sistema de rotação não é inercial, o que exige certas modificações nas equações do movimento. As modificações consistem em incluir forças aparentes, no sentido de que só são percebidas por um observador fixo em relação à Terra, essas forças aparentes que tornam o sistema inercial são chamadas de Coriolis e força Centrífuga.

3.1 Equação do Movimento

A segunda Lei de Newton afirma que a quantidade de movimento de uma parcela de massa só pode ser alterada se houver forças externas \mathbf{f}_n atuando sobre ela. Em termos matemáticos

$$\frac{D_a}{Dt}\{m\mathbf{V}_a\} = \sum_n \mathbf{f}_n = \mathbf{F},$$

onde D_a/Dt e V_a indicam a derivada e a velocidade relativa ao sistema inercial. Considerando parcelas de fluido, como as massas se conservam, é possível se referir as forças

externas por unidade de massa, ou seja

$$\frac{D_a}{Dt}\{\mathbf{V}_a\} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Para os casos em que iremos trabalhar, estas são: a força da atração gravitacional de Newton e a força de gradiente de pressão.

3.1.1 Força de atração gravitacional

A lei de atração gravitacional afirma que dois corpos se atraem com uma força cuja magnitude é proporcional ao produto de suas massas é inversamente proporcional ao quadrado da distância r que separam seus centros de massa. Assim, se M representa a massa da Terra e m a massa de um corpo, a força de atração exercida pela Terra sobre este tem uma magnitude F_g dada por

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2},$$

onde G é a constante gravitacional universal cujo valor é $6.673 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$. A força da atração gravitacional por unidade de massa do corpo define a chamada força da gravidade,

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM}{r^2}.$$

Vetorialmente, a força de gravidade é dada por $\mathbf{g} = -g \mathbf{k}$, onde \mathbf{k} é o vetor unitário paralelo ao eixo dos z . A gravidade é uma força conservativa, ou seja, ela é o gradiente de uma função Φ , chamada, segundo Symon(1982), de geopotencial. Então podemos escrever

$$\nabla\Phi = -g \mathbf{k}$$

por exemplo, para o caso em que g é constante.

3.1.2 Força de Gradiente de Pressão

Partiremos da definição de pressão como força normal por unidade de área. Suponhamos um elemento de fluido cuja forma é um cubo de arestas δx , δy e δz centrado em um ponto $P(x, y, z)$. Pegamos, por exemplo, as forças que atuam sobre as faces direita e esquerda do cubo, estas são dadas respectivamente por

$$F_{dir} = p_{dir} \delta x \delta z = - \left[p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right]$$

e

$$F_{esq} = p_{esq} \delta x \delta z = + \left[p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right]$$

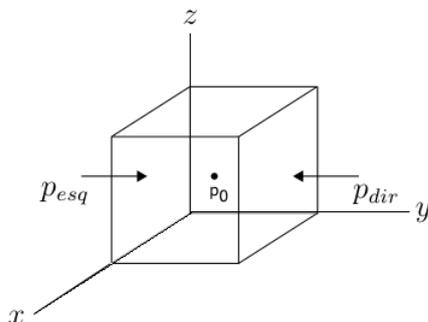
onde p é a pressão no ponto central e os sinais indicam se o sentido da força é concordante ou não com o sentido do versor, que neste caso é o \mathbf{j} . A componente total na direção y , por unidade de massa, considerando ρ como a densidade do fluido, é

$$\frac{F_{dir} + F_{esq}}{\delta m} = \frac{F_{(y)}}{\delta m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

onde

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta x \delta y \delta z}.$$

Figura 3.1: Derivação isolada da Força de Gradiente de Pressão.



Fonte: produção do próprio autor.

Segue o mesmo raciocínio para as outras componentes. Em suas formas vetoriais, a força de gradiente de pressão, por unidade de massa, é

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{\rho} \nabla P$$

3.1.3 Equação da continuidade

A Equação da Continuidade é uma lei fundamental que diz respeito à conservação de massa. Ela afirma que, na ausência de fontes de massa dentro de um volume de controle, sua massa deve ser conservada, independente se ele for material ou não. A equação da continuidade pode ser abordada do ponto de vista Euleriano e Lagrangeano, veremos a abordagem lagrangeana.

Suponhamos um volume elementar de fluido, cuja massa $\delta m = \rho \delta x \delta y \delta z$, onde $\rho = \rho(t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$, é conservada ao longo do movimento em relação ao tempo. Matematicamente,

$$\frac{D}{Dt}(\delta m) = 0$$

que ao ser expandida, resulta em

$$\delta x \delta y \delta z \frac{D\rho}{Dt} + \rho \delta y \delta z \frac{D(\delta x)}{Dt} + \rho \delta x \delta z \frac{D(\delta y)}{Dt} + \rho \delta x \delta y \frac{D(\delta z)}{Dt} = 0.$$

Note agora que vale a inversão dos operadores, como por exemplo

$$\frac{D(\delta x)}{Dt} = \delta \frac{Dx}{Dt} = \delta u$$

então

$$\delta x \delta y \delta z \frac{D\rho}{Dt} + \rho \delta y \delta z \delta u + \rho \delta x \delta z \delta v + \rho \delta x \delta y \delta w = 0.$$

Dividindo por $\delta x \delta y \delta z$, obtém-se

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) = 0.$$

Fazendo $\delta x \rightarrow 0$, $\delta y \rightarrow 0$ e $\delta z \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

ou ainda

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0.$$

Num fluido onde as parcelas conservam suas densidades individuais, tem-se

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

e então a equação se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Para um fluido homogêneo é verdade que

$$\frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{\partial w}{\partial P},$$

portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial P} = 0.$$

3.2 Equações básicas em um sistema em rotação

A segunda lei de Newton vale apenas para um sistema inercial de coordenadas. Por outro lado, os fluidos movimentam-se aproximadamente junto com a Terra e são desses pequenos desvios que geram as circulações de grande escala no oceano e na atmosfera. Introduziremos um sistema de rotação fixo ao planeta pelo fato de que um sistema inercial

não é prático para esses casos, Symon(1996). Esse sistema terá como um dos eixos a direção do vetor constante Velocidade Angular Ω que coincide com o eixo de rotação da Terra e os outros dois orientados de forma que teremos um sistema ortogonal.

Como este sistema introduzido não é um sistema inercial, deveremos fazer algumas modificações nas equações de movimento. As modificações consistem em incluir duas forças aparentes ou fictícias, no sentido de que só são percebidas por um observador fixo em relação à Terra. Essas duas forças são conhecidas como Coriolis e Centrífuga.

Consideremos um ponto no espaço que é localizado pelos vetores \mathbf{r} e \mathbf{r}_1 em relação a duas origens diferentes O e O_1 e que O_1 seja localizada por um vetor h em relação a O . Assim, teremos

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + h$$

ou seja

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - h.$$

Em termos das coordenadas retangulares, com eixos x_0, y_0 e z_0 paralelos aos eixos x, y e z , estas equações podem ser escritas por

$$x_0 = x - h_x, \quad y_0 = y - h_y, \quad z_0 = z - h_z.$$

Se a origem O_1 estiver em movimento em relação à origem fixa O , a relação entre as velocidades relativas aos dois sistemas é obtida derivando-se $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - h$ em relação ao tempo, ou seja

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dh}{dt} \quad (3.2.1)$$

$$= v_1 + v_h, \quad (3.2.2)$$

onde v e v_1 são as velocidades em relação a O e O_1 do ponto em movimento e v_h é a velocidade de O_1 em relação a O . Da mesma forma encontramos a aceleração derivando a velocidade em relação ao tempo, ou seja

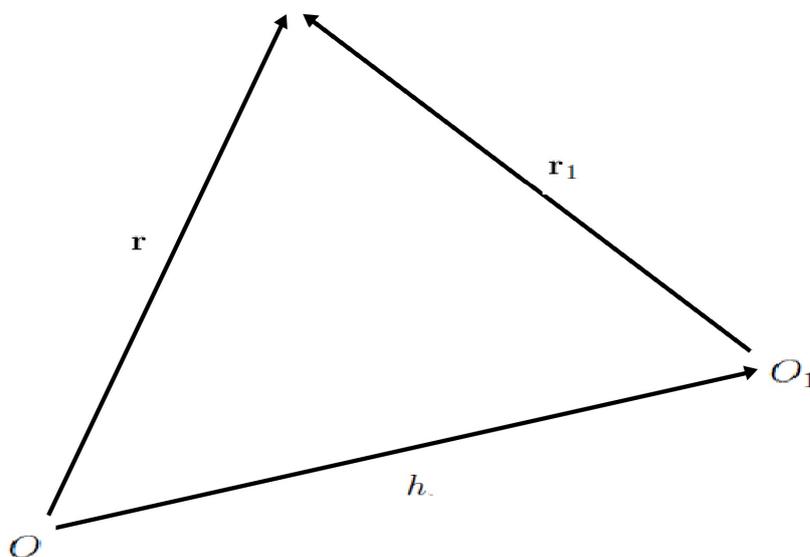
$$a = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} + \frac{d^2h}{dt^2} \quad (3.2.3)$$

$$= a_1 + a_h. \quad (3.2.4)$$

As equações de movimento, deduzidas por Newton, são válidas num sistema fixo de coordenadas, assim, para uma partícula de massa m sujeita à ação de uma força F , tem-se

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = F$$

Figura 3.2: Mudança de coordenadas.



Fonte: produção do próprio autor.

usando que $a = a_1 + a_h$, tem-se

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m a_h = F.$$

Se O_1 move-se com velocidade constante em relação a O , tem-se que $a_h = 0$, e portanto

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = F.$$

Logo, se as equações do movimento são válidas para um sistema de coordenadas fixo, também estarão valendo para um sistema de coordenadas que se move com velocidade constante em relação ao primeiro. Para qualquer deslocamento de O_1 pode-se escrever

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = F - m a_h.$$

Essa equação tem a forma $F^* = ma$, onde no lugar de F^* tem-se $F - m a_h$, chamada de força fictícia. Pode-se tratar o movimento de uma massa m em relação a um sistema de coordenadas que se move, usando as equações do movimento de Newton somando-se esta força fictícia à força real em ação. Esta segunda parcela da força, na realidade não é uma força, mas sim uma parte da massa multiplicada pela aceleração que foi transportada para o outro membro da equação. A diferença essencial é que as forças reais F agindo sobre m dependem das posições e dos movimentos dos outros corpos, enquanto a força fictícia depende da aceleração do sistema de coordenadas com origem em O_1 em relação ao sistema com origem em O .

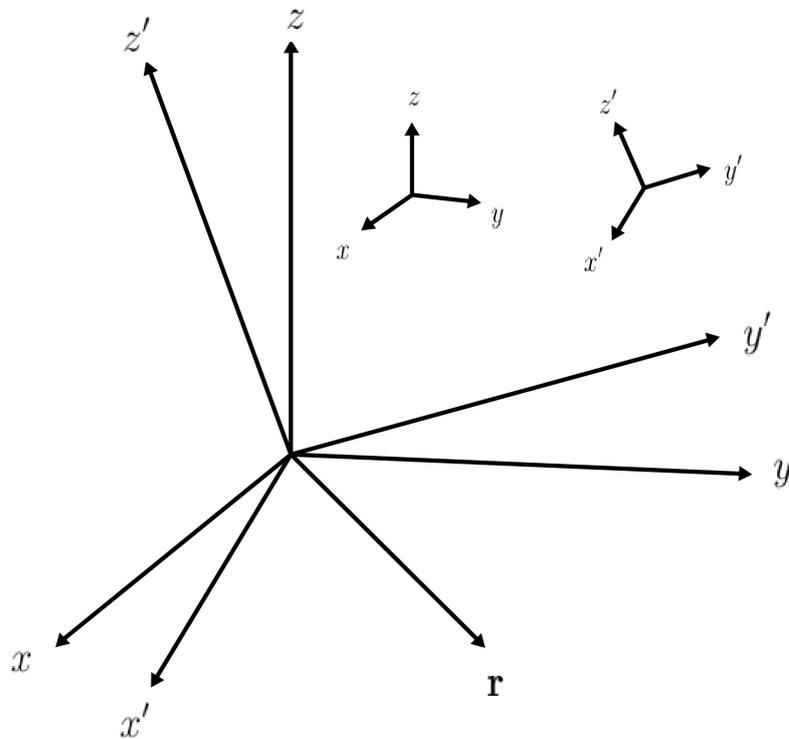
Consideremos agora os sistemas de coordenadas fixos x , y e z e x' , y' e z' cujos eixos giram um em relação ao outro e coincidem na origem. Consideremos também os vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} e \mathbf{i}' , \mathbf{j}' e \mathbf{k}' para cada um dos sistemas, respectivamente. Podemos expressar o vetor posição \mathbf{r} em termos de suas componentes como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'.$$

Figura 3.3: Rotação dos eixos de coordenadas.



Fonte: produção do próprio autor.

Como as origens coincidem, um ponto será representado pelo mesmo vetor \mathbf{r} nos dois sistemas de coordenadas, somente as componentes de \mathbf{r} serão diferentes, ao longo de eixos diferentes. As relações entre os sistemas de coordenadas podem ser obtidas pelo produto escalar entre qualquer um dos vetores unitários.

A derivada em relação ao tempo de um vetor \mathbf{A} é definida por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \delta t) - \mathbf{A}(t)}{\delta t}.$$

Esta definição ao ser aplicada para o caso em que estamos estudando encontra alguns

problemas, pois um vetor que é constante em relação a um sistema de coordenadas pode não ser ao outro, pois há movimento de rotação. Durante um intervalo de tempo δt o sistema de coordenadas x', y' e z' girará em relação ao sistema de coordenadas x, y e z de forma que no tempo $t + \delta t$ os dois sistemas não concordarão com a definição de quem será $\mathbf{A}(t)$, ou seja, qual vetor estará na posição que \mathbf{A} ocupava no tempo t . Como resultado, a derivada de um vetor será diferente nos dois sistemas de coordenadas. Usaremos D/Dt para indicar a derivada em relação ao tempo referente ao primeiro sistema, e usaremos D_a/Dt para indicar a derivada em relação ao tempo referente ao segundo sistema de coordenadas que está rotacionando. Consideremos o vetor \mathbf{A} qualquer dado por

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{A} = A_{x'} \mathbf{i}' + A_{y'} \mathbf{j}' + A_{z'} \mathbf{k}'$$

Podemos obter a derivada em relação ao tempo de \mathbf{A} por derivação das equações acima, por

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{DA_x}{Dt} \mathbf{i} + \frac{DA_y}{Dt} \mathbf{j} + \frac{DA_z}{Dt} \mathbf{k}$$

e para o segundo sistema

$$\frac{D_a\mathbf{A}}{Dt} = \frac{D_a\mathbf{A}_{x'}}{Dt} \mathbf{i}' + \frac{D_a\mathbf{A}_{y'}}{Dt} \mathbf{j}' + \frac{D_a\mathbf{A}_{z'}}{Dt} \mathbf{k}'$$

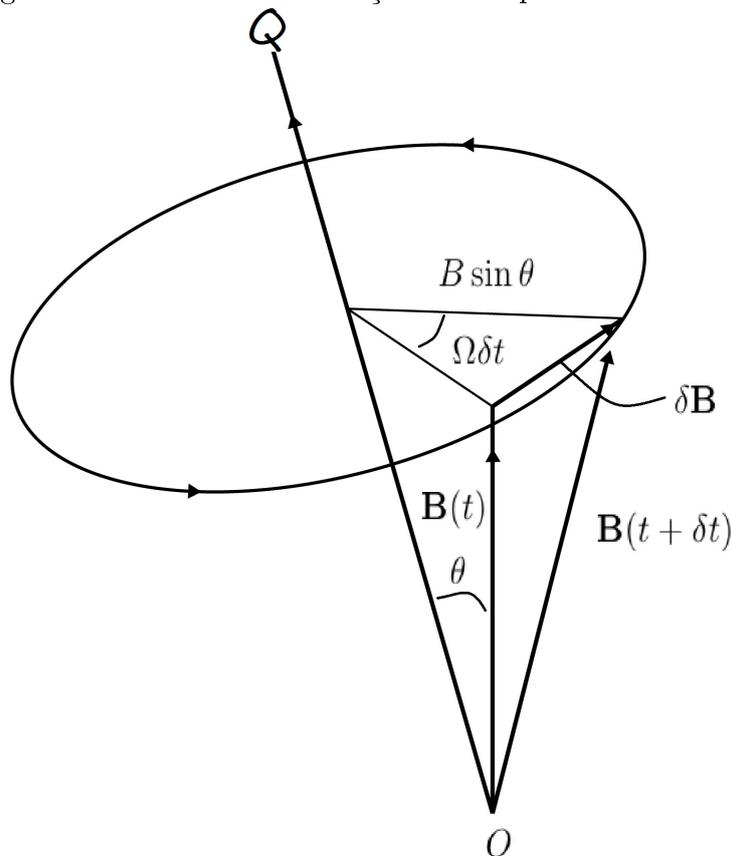
Essas são as definições de derivadas de um vetor em relação ao tempo referente a cada um dos sistemas. Podemos também obter a fórmula para D/Dt nas componentes com índice a , tomando a derivada sem o índice a da equação $\mathbf{A} = A_{x'} \mathbf{i}' + A_{y'} \mathbf{j}' + A_{z'} \mathbf{k}'$ e lembrando que os vetores unitários x', y' e z' movem-se em relação ao sistema fixo, tem-se, então, a seguinte derivada em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{A}}{Dt} &= \frac{D_a\mathbf{A}_{x'}}{Dt} \mathbf{i}' + \frac{D_a\mathbf{A}_{y'}}{Dt} \mathbf{j}' + \frac{D_a\mathbf{A}_{z'}}{Dt} \mathbf{k}' + \mathbf{A}_x \frac{D}{Dt} \mathbf{i}' + \mathbf{A}_y \frac{D}{Dt} \mathbf{j}' + \mathbf{A}_z \frac{D}{Dt} \mathbf{k}' \\ &= \frac{D_a\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A}_x \frac{D}{Dt} \mathbf{i}' + \mathbf{A}_y \frac{D}{Dt} \mathbf{j}' + \mathbf{A}_z \frac{D}{Dt} \mathbf{k}' \end{aligned}$$

e a mesma fórmula é obtida para $\frac{D_a}{Dt}$.

Suponhamos então que existe um eixo que passe pelo segmento OQ que passa pela origem do sistema fixo e que o segundo sistema gire em torno desse eixo com velocidade angular Ω . Define-se o vetor velocidade angular Ω como um vetor de módulo $|\Omega|$ orientado ao longo do eixo OQ e na direção tomada por um parafuso com rosca direita, que gira com o segundo sistema. Consideremos também o vetor \mathbf{B} em repouso no segundo sistema. Sua derivada no segundo sistema evidentemente é zero, então sua derivada no sistema fixo

Figura 3.4: Derivada em relação ao tempo de um vetor girante.



Fonte: produção do próprio autor.

é

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}. \quad (3.2.5)$$

Ainda tem-se que

$$\left| \frac{D\mathbf{B}}{Dt} \right| = |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}| = |\boldsymbol{\Omega}| |\mathbf{B}| \sin \theta.$$

Particularmente, a equação (3.2.5) aplicada a $\mathbf{B} = \mathbf{i}', \mathbf{j}'$ e \mathbf{k}' , resulta em

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{A}}{Dt} &= \frac{D_a\mathbf{A}}{Dt} + A_{x'}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}') + A_{y'}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}') + A_{z'}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}') \\ &= \frac{D_a\mathbf{A}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Essa é a relação fundamental entre as derivadas em relação ao tempo, para sistemas de coordenadas com movimento de rotação relativo. Essa equação pode ser aplicada mesmo quando $\boldsymbol{\Omega}$ varia com o tempo em módulo e direção. Derivando essa equação e aplicando novamente a \mathbf{A} e D_a/dt , obtemos o seguinte resultado para a derivada de segunda ordem

de um vetor \mathbf{A} qualquer

$$\begin{aligned}
\frac{D^2 \mathbf{A}}{Dt^2} &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} \right) + \Omega \times \frac{D \mathbf{A}}{Dt} + \frac{D\Omega}{dt} \times \mathbf{A} \\
&= \frac{D_a^2 \mathbf{A}}{Dt^2} + \Omega \times \frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} + \Omega \times \left(\frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} + \Omega \times \mathbf{A} \right) + \frac{D\Omega}{Dt} \times \mathbf{A} \\
&= \frac{D_a^2 \mathbf{A}}{Dt^2} + 2\Omega \times \frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{A}) + \frac{D\Omega}{Dt} \times \mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Se \mathbf{A} e Ω são paralelos, então $\Omega \times \mathbf{A} = 0$, as derivadas nos sistemas fixo e rotacionando de um vetor paralelo ao eixo de rotação são iguais, de acordo com (3.2.7), teremos em particular, para $\mathbf{A} = \Omega$,

$$\frac{D\Omega}{dt} = \frac{D_a \Omega}{Dt} + \Omega \times \Omega$$

e como $\Omega \times \Omega = 0$, segue

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \frac{D_a \Omega}{Dt}.$$

Vale a pena observar que o vetor Ω em ambos os lados da igualdade representa a velocidade angular do sistema rotacionando em relação ao sistema fixo, embora sua derivada em relação ao tempo no primeiro membro seja calculada em relação ao sistema rotacionando e no segundo membro em relação ao sistema fixo. A velocidade angular do sistema fixo em relação ao sistema rotacionando será denotada por $-\Omega$.

Mostraremos agora que as relações obtidas acima para a rotação de um sistema de coordenadas são gerais, pois se aplicam a qualquer movimento de eixos que rotacionam em torno de eixos fixos. Consideremos que a taxa de variação dos vetores unitários do sistema rotacionando em relação a um sistema fixo seja dada em termos das componentes ao longo dos eixos que rotacionam por

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \mathbf{i}' &= a_{11} \mathbf{i}' + a_{12} \mathbf{j}' + a_{13} \mathbf{k}' \\
\frac{D}{Dt} \mathbf{j}' &= a_{21} \mathbf{i}' + a_{22} \mathbf{j}' + a_{23} \mathbf{k}' \\
\frac{D}{Dt} \mathbf{k}' &= a_{31} \mathbf{i}' + a_{32} \mathbf{j}' + a_{33} \mathbf{k}'
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Temos, por exemplo, que $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$, derivando esta equação, temos que

$$2 \frac{D}{Dt} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 0$$

dessa e das outras duas equações idênticas referentes a \mathbf{j}' e \mathbf{k}' , tem-se

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

Como temos um sistema ortogonal, tem-se, por exemplo que $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' = 0$. Derivando esta

equação, obtemos

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}' + \frac{D}{Dt} \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' = 0,$$

dessa e das outras semelhantes, encontramos os seguintes resultados

$$a_{31} = -a_{13} \quad a_{12} = -a_{21} \quad a_{23} = -a_{32}.$$

Portanto, dados os termos a_{12} , a_{23} e a_{31} , todos os outros coeficientes estarão determinados. Definimos um vetor Ω com componentes no sistema de coordenadas x' , y' e z' como

$$\Omega_{x'} = a_{23} \quad \Omega_{y'} = a_{31} \quad \Omega_{z'} = a_{12}.$$

Esse resultado nada mais é do que uma definição, no entanto, podemos sempre definir um vetor fornecendo suas componentes em relação a um sistema de coordenadas qualquer. Chamaremos este vetor de Ω e ele é a velocidade angular do sistema que está rotacionando. Podemos reescrever as equações (3.2.8) da seguinte forma

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{i}' = \Omega \times \mathbf{i}'$$

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{j}' = \Omega \times \mathbf{j}'$$

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{k}' = \Omega \times \mathbf{k}'$$

Lembrando que $\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \Omega \times \mathbf{B}$, temos que as derivadas em relação ao tempo de \mathbf{i}' , \mathbf{j}' e \mathbf{k}' são as que deveriam ser obtidas caso os vetores unitários do sistema rotacionando estivessem girando em velocidade angular Ω . Logo, não importando como os eixos rotacionando se movam, pode-se definir, em qualquer instante o vetor velocidade angular Ω , de forma que a derivada em relação ao tempo de qualquer vetor nos sistemas de coordenadas fixo e rotacionando esteja relacionada de acordo com as equações (3.2.8) e (3.2.8).

Supondo ainda que os sistemas de coordenadas fixo e rotacionando tenham a mesma origem O , o vetor posição \mathbf{r} será o mesmo para ambos. Aplicando nas equações (3.2.8) e (3.2.8) ao vetor posição \mathbf{r} , tem-se a relação entre as velocidades e as acelerações nos dois sistemas de coordenadas dada por

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{D_a\mathbf{r}}{dt} + \Omega \times \mathbf{r} \quad (3.2.9)$$

$$\frac{D^2\mathbf{r}}{Dt^2} = \frac{D_a^2\mathbf{r}}{Dt^2} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2\Omega \times \frac{D_a\mathbf{r}}{Dt} + \frac{D\Omega}{Dt} \times \mathbf{r}. \quad (3.2.10)$$

A equação (3.2.10) denomina-se Teorema de Coriolis. O primeiro membro do lado direito da igualdade é a aceleração em relação ao sistema rotacionando. O segundo termo denomina-se aceleração centrípeta de um ponto em rotação em torno de um eixo. Pela

Figura (3.5), pode-se verificar que $\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$ aponta na direção perpendicular ao eixo de rotação e que o módulo é dado por

$$\begin{aligned} |\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})| &= |\Omega|^2 \mathbf{r} \sin \theta \\ &= \frac{v^2}{\mathbf{r} \sin \theta}, \end{aligned}$$

onde $v = \Omega \mathbf{r} \sin \theta$ é a velocidade do movimento circular e $\mathbf{r} \sin \theta$ é a distância da partícula ao eixo. O terceiro termo só estará presente quando o ponto \mathbf{r} se mover no sistema rotacionando e denomina-se aceleração de Coriolis. O último termo se anula quando a velocidade angular de rotação é constante em torno do sistema de eixos rotacionando, portanto

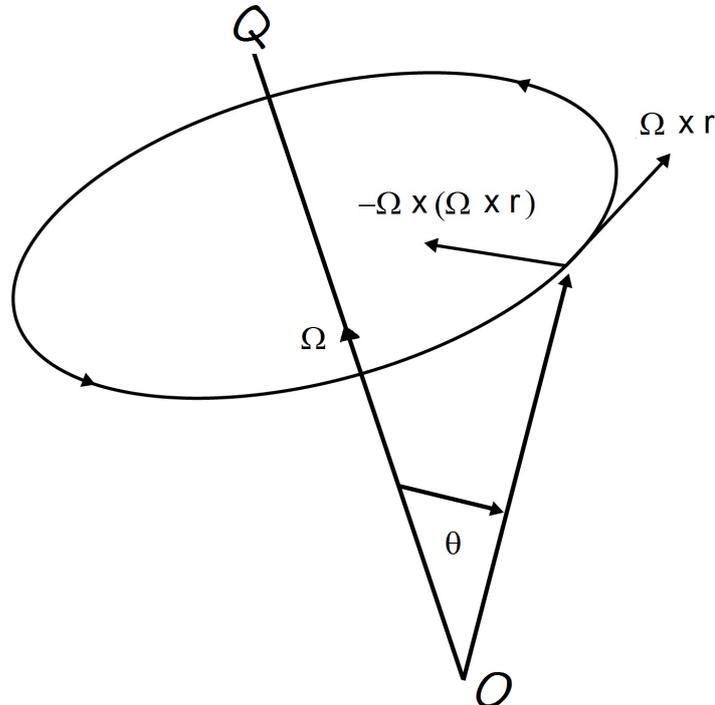
$$m \frac{D_a^2 \mathbf{r}}{Dt^2} + m \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2m \Omega \times \frac{D_a \mathbf{r}}{Dt} + m \frac{D\Omega}{Dt} \times \mathbf{r} = F$$

ou ainda

$$m \frac{D_a^2 \mathbf{r}}{Dt^2} = F - m \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - 2m \Omega \times \frac{D_a \mathbf{r}}{Dt} - m \frac{D\Omega}{Dt} \times \mathbf{r}.$$

O segundo termo à direita chama-se força Centrífuga, o terceiro chama-se força de Coriolis e o último não tem nome especial e só aparece em casos de rotação não-uniforme.

Figura 3.5: Aceleração centrípeta



Fonte: produção do próprio autor.

Portanto as equações a se considerar são

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + h, \\ \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \frac{D_a\mathbf{r}_1}{Dt} + \Omega \times \mathbf{r}_1 + \frac{dh}{dt}, \\ \frac{D^2\mathbf{r}}{Dt^2} &= \frac{D_a^2\mathbf{r}}{Dt^2} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2\Omega \times \frac{D_a\mathbf{r}}{Dt} + \frac{D\Omega}{Dt} \times \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Para trabalharmos num sistema rotacionando, como introduzido acima e além disso, para trabalhar com modelos meteorológicos, é muito mais conveniente trabalharmos com as equações do movimento em um outro sistema de coordenadas, o sistema de coordenadas esféricas, que para este caso é bem mais prático que o de coordenadas cartesianas. As coordenadas serão dadas por (λ, ϕ, z) , onde λ é a longitude (longitude de um lugar é o ângulo que o raio que passa por esse ponto faz com o Meridiano de Greenwich e ainda $\lambda \in [0, 2\pi]$), ϕ é a latitude (latitude de um lugar é o ângulo que o raio que passa por esse ponto faz com o plano do equador e ainda $\phi \in [0, \pi]$) e z é a distância vertical do ponto à superfície da terra. Novamente, denotaremos a velocidade como

$$V = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

onde as componentes u , v e w são definidas como

$$u = r \cos \phi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v = r \frac{D\phi}{Dt}, \quad w = \frac{Dz}{Dt}$$

onde r é a distância ao centro da Terra, que é dado por $r = z + a$, onde a é o raio da Terra. Nessas condições, as mesmas equações de conservação podem ser escritas como:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + \mathbf{F}_{rx} \quad (3.2.11)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + \mathbf{F}_{ry} \quad (3.2.12)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g - 2\Omega u \cos \phi + \mathbf{F}_{rz} \quad (3.2.13)$$

que são as equações de momentum para as componentes leste, norte e vertical, respectivamente. Os termos proporcionais a $1/a$ do lado esquerdo das equações (3.2.11), (3.2.12) e (3.2.13) são chamados os termos de curvatura, que surgem devido curvatura da Terra, pois não são lineares, pois são quadráticos nas variáveis dependentes e portanto difíceis de manusear. Felizmente, os termos de curvatura não são importantes para latitudes médias.

3.2.1 Relação Geostrófica

Válida em locais onde o parâmetro de Coriolis pode ser considerado constante, isto é $f = f_0$, a relação geostrófica é uma restrição linear simples que é derivada em livros-textos de meteorologia elementar em coordenadas cartesianas por

$$u = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (3.2.14)$$

onde u e v são as componentes da velocidade horizontal, Φ é campo geopotencial, x e y coordenadas espaciais leste e norte e f_0 o parâmetro de Coriolis. É uma aproximação de baixa ordem para as equações de conservação e momentum validas para latitudes médias ou extra-trópicos, ou seja, em latitudes entre 30° e 60° norte e 30° e 60° sul. Essas são inapropriadas no Equador.

Capítulo 4

Aplicações de Cálculo Variacional em assimilação de dados meteorológicos

A criação de modelos matemáticos eficientes é um dos ramos de pesquisa mais importante da atualidade, bem como a análise de observação de dados. Esses modelos são ferramentas numéricas utilizadas nas áreas de meteorologia e oceanografia para compreender e prever fenômenos. É colocada uma ênfase especial sobre tais modelos quando se trata de assimilação de dados observados. A importância da modelagem é intensificada pelo fato de que a coleta de dados em larga escala sobre o oceano e atmosfera e implementação de experimentos de observação envolvem grandes dificuldades e despesas. Para obter uma análise confiável da circulação oceânica e atmosférica é necessário desenvolver um sistema de assimilação de dados.

Vários sistemas computacionais de assimilação de dados para os oceanos e a atmosfera, como por exemplo o BRAMS (Brazilian developments on the Regional Atmospheric Modelling System), estão sendo desenvolvidos e de acordo com os métodos utilizados, esses podem ser divididos em dois grupos, os estatísticos e os variacionais. Esses sistemas destinam-se para a melhoria da qualidade e da confiabilidade dos prognósticos, incluindo a utilização de novos métodos para modelagem matemática e algoritmos computacionais Agoshkov e Zalesny(2012).

Entre os métodos de assimilação de dados, encontram-se o método de interpolação estatística e o método de máxima verossimilhança, ambos são equivalentes. Eles são formulados para um instante de tempo fixo como a soma de dois termos quadráticos no qual um avalia a diferença entre as análises e as observações e outro a diferença entre a análise e o modelo. A minimização é atingida com a obtenção de uma matriz de pesos ótima que depende dos erros do modelo e dos erros das observações, Dalley(1996). Entretanto, cabe ressaltar que esses erros e suas covariâncias não são bem conhecidos, pois dependem de uma minuciosa validação do modelo e da qualidade das observações. Portanto, há uma grande limitação para a produção de análises ótimas do ponto de vista matemático.

O Cálculo Variacional foi utilizado pela primeira vez em meteorologia por Yoshikazu

Sasaki em 1970 em problemas de dinâmica meteorológica e desde então vem crescendo as aplicações dos métodos variacionais neste meio como Olaguer(2011) na medição da poluição atmosférica, Shankar(2007) em modelos de emissão de agentes tóxicos na atmosfera, Storto(2009) em modelos de nebulosidade e Isaksen(2004) em comportamentos de ventos. A utilização desses métodos também desempenhou um papel importante na solução de problemas de assimilação de dados para encontrar boas condições iniciais, como Lindskog; Dee; Trémolet; Andersson; Radnóti e Fisher(2009) e Huang(2006) em modelos que minimizam os erros de observação. Neste capítulo iremos mostrar três exemplos desse último método.

4.1 Alguns sistemas observacionais de coletas de dados

Uma observação meteorológica consiste na medição, registro ou determinação de todos os elementos que representam as condições meteorológicas num dado momento e em determinado lugar, utilizando instrumentos adequados. Essas observações realizadas de maneira sistemática, uniforme, ininterrupta e em horas estabelecidas permitem conhecer as características e variações dos elementos atmosféricos, os quais constituem os dados básicos para confecção de cartas de previsão do tempo, para conhecimento do clima, para a investigação de leis gerais que regem os fenômenos meteorológicos etc. As observações devem ser feitas, invariavelmente, nas horas indicadas e sua execução terá lugar no menor tempo possível.

Nos serviços meteorológicos, essas observações têm a finalidade, entre outras, de informar aos meteorologistas nos centros de previsão, a situação e as mudanças de tempo que estão ocorrendo nas diferentes estações meteorológicas; obter dados unitários para fins de estatísticas meteorológicas e climatológicas; fazer observações meteorológicas para cooperação com outros serviços de meteorologia e difusão internacional, por isso é necessário fazer às observações com o máximo de precisão e de honestidade.

A reunião de instrumentos de coleta de dados como o termômetro (temperatura do ar), o barômetro (pressão atmosférica), o higrômetro (umidade relativa do ar) etc. em um mesmo local, é denominada estação meteorológica. Em Santa Catarina existem 6 estações meteorológicas, em Campos Novos, Chapecó, Florianópolis, Lages, Indaial e São Joaquim.

A previsão do tempo é baseada em dados observados de hora em hora nas estações meteorológicas chamadas de estações de superfície, convencionais ou automáticas que estão presentes na maior parte do território brasileiro. No Brasil, o INMET administra mais de 400 estações. Ele possui 10 Distritos Regionais que recebem, processam e enviam estes dados para a sede, localizada em Brasília. A sede processa estes dados e os enviam por satélite para todo o mundo.

Após a coleta de dados como: precipitação; ventos; umidade relativa do ar; pressão

Figura 4.1: Estações meteorológicas do território nacional.



Fonte: <http://www.inmet.gov.br/>

Figura 4.2: Dados retirados das estações meteorológicas de SC no dia 05/05/2013.

<p>Estação: CAMPOS NOVOS-SC Registro: 18 UTC 04/05/2013 Temperatura: 18 °C Umidade: 83% Pressão: 908.6 hPa Vento Vel: 3.1 m/s Vento Dir: 32 ° Precipitação: 0 mm</p> <p>Dados Estação Aberta em: 01/07/1923 Latitude: -27.38° Longitude: -51.22° Altitude: 964.23 metros</p>	<p>Estação: CHAPECÓ-SC Registro: 18 UTC 04/05/2013 Temperatura: 17.2 °C Umidade: 96% Pressão: 938.6 hPa Vento Vel: 1 m/s Vento Dir: 23 ° Precipitação: 0 mm</p> <p>Dados Estação Aberta em: 10/05/1973 Latitude: -27.09° Longitude: -52.64° Altitude: 679.01 metros</p>	<p>Estação: FLORIANÓPOLIS-SC Registro: 18 UTC 04/05/2013 Temperatura: 24.6 °C Umidade: 82% Pressão: 1010.2 hPa Vento Vel: 1.5 m/s Vento Dir: 14 ° Precipitação: 0 mm</p> <p>Dados Estação Aberta em: 01/12/1921 Latitude: -27.58° Longitude: -48.57° Altitude: 1.84 metros</p>
<p>Estação: INDAIAL-SC Registro: 18 UTC 04/05/2013 Temperatura: 30.9 °C Umidade: 49% Pressão: 1002.3 hPa Vento Vel: 5.1 m/s Vento Dir: 23 ° Precipitação: 0 mm</p> <p>Dados Estação Aberta em: 14/10/1970 Latitude: -26.9° Longitude: -49.22° Altitude: 86.13 metros</p>	<p>Estação: LAGES-SC Registro: 18 UTC 04/05/2013 Temperatura: 19 °C Umidade: 85% Pressão: 907.8 hPa Vento Vel: 3.1 m/s Vento Dir: 32 ° Precipitação: 0 mm</p> <p>Dados Estação Aberta em: 01/01/1914 Latitude: -27.8° Longitude: -50.34° Altitude: 936.83 metros</p>	<p>Estação: SÃO JOAQUIM-SC Registro: 18 UTC 04/05/2013 Temperatura: 16.6 °C Umidade: 89% Pressão: 860 hPa Vento Vel: 3.1 m/s Vento Dir: 27 ° Precipitação: 0 mm</p> <p>Dados Estação Aberta em: 01/08/1954 Latitude: -28.28° Longitude: -49.94° Altitude: 1415 metros</p>

Fonte: <http://www.inmet.gov.br/>

etc. com o auxílio de computadores faz-se uma simulação, através de modelos numéricos, de como se comportará o tempo num intervalo determinado. Usaremos, por exemplo u_A e v_A para indicar a velocidade horizontal e vertical já analisadas e é dessas aproximações computacionais que estamos falando. Porém, só as informações do modelo numérico não são suficientes para a realização da previsão do tempo, conta-se também com o auxílio das imagens de satélites para elaborar a previsão em curto prazo. Essas imagens podem ser geradas em variados intervalos de tempo e estão disponíveis e são diariamente atualizadas no site do INMET (<http://www.inmet.gov.br>).

No INMET há uma seção própria para a recepção e tratamento dessas imagens de satélites, os meteorologistas mapeiam e analisam essas informações e só depois de feitas todas as análises, como por exemplo: de cartas de superfície; modelos numéricos; imagens de satélites etc. tem-se maior segurança em elaborar a previsão do tempo para todo o Brasil. Essas informações são diariamente utilizadas por vários meios, como por exemplo na agricultura para a garantia de uma boa colheita, na marinha para a proteção aos seus marinheiros, navios e passageiros, na aeronáutica para a segurança de seus pilotos, aeronaves e passageiros, por pescadores para averiguar se há condições favoráveis à pesca etc.

4.2 Aplicações de Cálculo Variacional em problemas de análise atmosférica

O cálculo variacional fornece uma poderosa estrutura para resolução de problemas de análise atmosférica. Neste capítulo, serão apresentados dois problemas de análise simples específicos usando as ferramentas variacionais e conceitos de dinâmica desenvolvidos nos capítulos anteriores.

Vamos discutir um problema geral. Consideremos primeiramente um problema tridimensional com duas variáveis dependentes. Supondo que $u(x, y, P)$ e $v(x, y, P)$ são variáveis atmosféricas que representam a velocidade do vento onde x, y e P são variáveis independentes. Supondo que já existam dados $u_A(x, y, P)$ e $v_A(x, y, P)$ analisados, um objetivo interessante aqui seria produzir valores iniciais $u_I(x, y, P)$ e $v_I(x, y, P)$ através de alguma restrição imposta e assim obter resultados numéricos que melhores se aproximam da realidade.

Num problema de análise atmosférica, considerando que $u(x, y, P)$ e $v(x, y, P)$ representem as velocidades horizontal e vertical do vento, respectivamente, essas variáveis deverão respeitar uma restrição, tal como a relação geostrófica

$$u = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

onde f_0 é o parâmetro de Coriolis, ou a equação da continuidade

$$\nabla \cdot V_H + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

onde

$$V_H = (u, v).$$

Em resumo, o objetivo seria encontrar $u(x, y, P)$ e $v(x, y, P)$ que satisfaça os dados já analisados e satisfaça ao mesmo tempo uma das restrições impostas e sejam os mais

convenientes para o problema. Esse problema pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira: minimize o seguinte funcional

$$I = \iint_{PS} \{w_v(u_I - u_A)^2 + w_v(v_I - v_A)^2\} dP dS \quad (4.2.1)$$

sujeito a restrição

$$f_1(u, v) = 0.$$

Essa integral está definida sobre um domínio em \mathbb{R}^3 , onde S representa os pontos (x, y) do plano e P representa os valores reais da pressão. Também no funcional, w_v e w_Φ são os pesos especificados, que são funções contínuas de variáveis independentes, f_1 é a restrição externa imposta.

Um problema com apenas estas informações seria resolvido da seguinte maneira: como há valores de u_A e v_A já analisados, podemos montar uma grade tridimensional de pontos \mathbf{r}_j onde temos valores analisados, com $1 \leq j \leq J$, onde $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, P_j)$, e a solução numérica desta integral é dada por Daley(1996) como

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^J \{w_v(\mathbf{r}_j)[u_I(\mathbf{r}_j) - u_A(\mathbf{r}_j)]^2 + w_v(\mathbf{r}_j)[v_I(\mathbf{r}_j) - v_A(\mathbf{r}_j)]^2\} \\ &= [\underline{u}_I - \underline{u}_A]^T \underline{w}_u [\underline{u}_I - \underline{u}_A] + [\underline{v}_I - \underline{v}_A]^T \underline{w}_v [\underline{v}_I - \underline{v}_A] \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

onde \underline{u} é o vetor coluna de dimensão J com elementos $u_I(\mathbf{r}_j)$, e w_v uma matriz diagonal $J \times J$ com elementos $w_v(\mathbf{r}_j)$ e com definições correspondentes para \underline{u}_A , \underline{u}_I , \underline{v}_A e \underline{w}_u . A função de restrição deve ser representada da mesma forma.

A estatística nos diz que as funções peso \underline{w}_u e \underline{w}_v podem ser especificadas arbitrariamente e uma escolha razoável, pelo Apêndice D, seria

$$w_v(\mathbf{r}_j) = 0.5 < \epsilon_u^A(\mathbf{r}_j)^2 >^{-1} \quad e \quad w_v(\mathbf{r}_j) = 0.5 < \epsilon_v^A(\mathbf{r}_j)^2 >^{-1}$$

onde ϵ_u^A e ϵ_v^A são os erros de análise das variáveis u e v no j -ésimo ponto da grade.

4.2.1 Caso 1

Consideremos agora a formulação e solução de um problema unidimensional simples. O campo de velocidade vertical w geralmente não é observado, mas mesmo assim são obtidas boas aproximações usando a equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{dw}{dP} = 0. \quad (4.2.3)$$

Das observações já feitas podemos estimar alguns valores do campo de divergência. O problema variacional pode ser expresso da seguinte forma: minimize o seguinte funcional

$$\int_{P_T}^{P_B} w_D(P) \{D_I(P) - D_A(P)\}^2 dP \quad (4.2.4)$$

sujeito a restrição

$$D_I + \frac{dw_I}{dP} = 0 \quad (4.2.5)$$

onde $D_I = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ é o campo de divergência inicial, a restrição dada nada mais é do que a equação da continuidade, P_B e P_T são as pressões no fundo e no topo de uma coluna de ar, respectivamente, $\omega_D(P) = \frac{0.5}{\langle \epsilon_D^2 \rangle}$ é o peso e w_I é o movimento vertical inicial. Reescrevemos a equação (4.2.5) como

$$D_I = -\frac{dw}{dP}$$

e integrando em relação a P no intervalo de P_T a P_B ,

$$\int_{P_T}^{P_B} D_I dP = - \int_{P_T}^{P_B} \frac{dw}{dP} dP$$

e portanto

$$\int_{P_T}^{P_B} D_I dP = w(P_B) - w(P_T). \quad (4.2.6)$$

Assumindo que D_I não depende da pressão, tem-se

$$D_I = \frac{w(P_B) - w(P_T)}{P_B - P_T}$$

ou ainda

$$D_I + \frac{w(P_T) - w(P_B)}{P_B - P_T} = 0. \quad (4.2.7)$$

Então temos o problema variacional com restrição. Utilizando então o método dos multiplicadores de Lagrange, o novo funcional fica

$$I_1 = \int_{P_T}^{P_B} \left\{ w_D (D_I - D_A)^2 + \lambda \left(D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} \right) \right\} dP \quad (4.2.8)$$

onde λ é uma constante desconhecida, $D_I(P)$ também é desconhecido, mas todo o resto do integrando é conhecido. Vamos então calcular o incremento de I_1 , mas para isso, vamos separar em duas integrais:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

onde

$$I_2 = \int_{P_T}^{P_B} w_D (D_I - D_A)^2 dP$$

e

$$I_3 = \int_{P_T}^{P_B} \lambda \left(D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_B - P_T} \right) dP$$

Calculando primeiramente o incremento de I_2 ,

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= \int_{P_T}^{P_B} w_D (D_I + \delta D_I - D_A)^2 dP - \int_{P_T}^{P_B} w_D (D_I - D_A)^2 dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} w_D (2D_I \cdot \delta D_I + \delta D_I^2 - 2D_A \cdot \delta D_I) dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} w_D (2D_I \cdot \delta D_I - 2D_A \cdot \delta D_I) dP + \int_{P_T}^{P_B} w_D \delta D_I^2 dP. \end{aligned}$$

Agora calculemos o incremento de I_3 ,

$$\begin{aligned} \Delta I_3 &= \int_{P_T}^{P_B} (\lambda + \delta \lambda) \left(D_I + \delta D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_T - P_B} \right) dP - \int_{P_T}^{P_B} \lambda \left(D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_T - P_B} \right) dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} \left\{ \lambda \cdot \delta D_I + \delta \lambda \left(D_I + \delta D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_T - P_B} \right) \right\} dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} \left\{ \lambda \cdot \delta D_I + \delta \lambda \left(D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_T - P_B} \right) \right\} dP + \int_{P_T}^{P_B} \delta \lambda \cdot \delta D_I dP. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \int_{P_T}^{P_B} w_D (2D_I \cdot \delta D_I - 2D_A \cdot \delta D_I) + \lambda \cdot \delta D_I + \delta \lambda \left(D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_T - P_B} \right) dP \\ &\quad + \int_{P_T}^{P_B} w_D \cdot \delta D_I^2 + \delta \lambda \cdot \delta D_I dP. \end{aligned}$$

Considerando que $\delta \lambda$ não depende de P , então

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \int_{P_T}^{P_B} \delta D_I \{2w_D (D_I - D_A) + \lambda\} dP + \delta \lambda \int_{P_T}^{P_B} \left\{ D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_B - P_T} \right\} dP \\ &\quad + \int_{P_T}^{P_B} w_D \cdot \delta D_I^2 + \delta \lambda \cdot \delta D_I dP. \end{aligned}$$

Portanto chegamos a variação do funcional, que é dada por

$$\delta I_1 = \int_{P_T}^{P_B} \delta D_I \{2w_D (D_I - D_A) + \lambda\} dP + \delta \lambda \int_{P_T}^{P_B} \left\{ D_I + \frac{\omega_B - \omega_T}{P_B - P_T} \right\} dP. \quad (4.2.9)$$

Encontraremos agora a variação em relação a λ no funcional dado por (4.2.8),

então calculemos para isso o incremento de I_1 ,

$$\begin{aligned}\Delta I_{1,\lambda} &= \int_{P_T}^{P_B} w_D(D_I - D_A)^2 + (\lambda + \delta\lambda) \left(D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} \right) dP \\ &\quad - \int_{P_T}^{P_B} w_D(D_I - D_A)^2 + \lambda \left(D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} \right) dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} \delta\lambda \left(D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} \right) dP\end{aligned}$$

logo

$$\delta I_{1,\lambda} = \int_{P_T}^{P_B} \delta\lambda \left(D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} \right) dP$$

e $\delta I_{1,\lambda} = 0$, pelo lema fundamental do cálculo variacional, quando

$$D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} = 0$$

que é exatamente a restrição dada por (4.2.7). Agora procuramos a variação em relação a D_I , começamos então encontrando o incremento de I_1 em relação a D_I ,

$$\begin{aligned}\Delta I_{1,D_I} &= \int_{P_T}^{P_B} w_D(D_I + \delta D_I - D_A)^2 + \lambda \left(D_I + \delta D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} \right) dP \\ &\quad - \int_{P_T}^{P_B} w_D(D_I - D_A)^2 + \lambda \left(D_I + \frac{w_B - w_T}{P_B - P_T} \right) dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} \{w_P (2D_I \cdot \delta D_I + \delta D_I^2 - 2\delta D_I \cdot D_A) + \lambda \delta D_I\} dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} \{w_P (2D_I \cdot \delta D_I - 2\delta D_I \cdot D_A) + \lambda \delta D_I\} dP + \int_{P_T}^{P_B} \delta D_I^2 dP\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\delta I_{1,D_I} &= \int_{P_T}^{P_B} \{w_P (2D_I \cdot \delta D_I - 2\delta D_I \cdot D_A) + \lambda \delta D_I\} dP \\ &= \int_{P_T}^{P_B} \{[w_P (2D_I - 2D_A) + \lambda] \delta D_I\} dP\end{aligned}$$

e para termos $\delta I_{1,D_I} = 0$, pelo lema fundamental do cálculo de variações,

$$w_P(2D_I - 2D_A) + \lambda = 0,$$

ou ainda,

$$D_I - D_A = -\frac{\lambda}{2w_D}. \quad (4.2.10)$$

Como o funcional I_1 não envolve derivada parcial de D em relação à pressão, a condição natural do contorno não nos daria nenhuma informação. Integrando em relação a P no intervalo de P_T a P_B na equação (4.2.10), temos

$$\int_{P_T}^{P_B} \{D_I - D_A\} dP = - \int_{P_T}^{P_B} \frac{\lambda}{2w_D} dP$$

$$\int_{P_T}^{P_B} D_I dP - \int_{P_T}^{P_B} D_A dP = -\lambda \int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{2w_D}$$

logo

$$\lambda = \frac{\int_{P_T}^{P_B} D_A dP - \int_{P_T}^{P_B} D_I dP}{\int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{2w_D}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\int_{P_T}^{P_B} D_A dP - \int_{P_T}^{P_B} D_I dP}{\int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{w_D}}.$$

Usando a equação (4.2.6), temos que

$$\lambda = 2 \cdot \frac{\int_{P_T}^{P_B} D_A dP + w_B - w_T}{\int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{w_D}}. \quad (4.2.11)$$

Substituindo este resultado em (4.2.10), temos

$$D_I - D_A = - \frac{2 \cdot \frac{\int_{P_T}^{P_B} D_A dP + w_B - w_T}{\int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{w_D}}}{2w_D}$$

$$= \frac{w_T - w_B - \int_{P_T}^{P_B} D_A dP}{w_D \int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{w_D}},$$

logo

$$D_I = D_A + \frac{w_T - w_B - \int_{P_T}^{P_B} D_A dP}{w_D \int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{w_D}}. \quad (4.2.12)$$

Tomando $w_D = 0.5 \langle \epsilon_D^2 \rangle^{-1}$, e definindo

$$\begin{aligned}\alpha(P) &= \frac{1}{w_D \int_{P_T}^{P_B} \frac{dP}{w_D}} \\ &= \frac{0.5 \langle \epsilon_D^2 \rangle}{\int_{P_T}^{P_B} 0.5 \langle \epsilon_D^2 \rangle^{-1} dP} \\ &= \frac{\langle \epsilon_D^2 \rangle}{\int_{P_T}^{P_B} \langle \epsilon_D^2 \rangle^{-1} dP}\end{aligned}$$

chegamos a

$$D_I = D_A + \alpha(P) \left(w_T - w_B - \int_{P_T}^{P_B} D_A dP \right). \quad (4.2.13)$$

O termo entre $\langle \rangle$ é a medida que o campo de divergência observada falha em satisfazer a equação de continuidade. Se considerarmos que $\langle \epsilon_D^2 \rangle^{-1}$ não depende da pressão, tem-se que

$$\alpha(P) = \frac{1}{P_B - P_T}$$

e portanto

$$D_I = D_A + \frac{1}{P_B - P_T} \left(w_T - w_B - \int_{P_T}^{P_B} D_A dP \right). \quad (4.2.14)$$

Assim, é fácil ver que o segundo termo do resultado acima fornece um termo de correção para a $D_A(P)$ de modo que a $D_I(P)$ satisfaça a equação de continuidade (4.2.6). Se $\omega_T = \omega_B = 0$, então a equação acima implica que a divergência é deslocada por um valor constante, de modo que $D_I(P)$ se anula.

4.2.2 Caso 2

Agora consideraremos um problema bidimensional com três variáveis dependentes e duas restrições. Em um domínio (x, y) com geopotencial inicial Φ_A e ventos (u_A, v_A) obtêm-se valores iniciais Φ_I, u_I, v_I que satisfazem exatamente a relação geostrófica e são tão próximas quanto o possível dos campos analisados. O objetivo é encontrar "ventos de equilíbrio geostrófico" e geopotenciais que são minimamente diferentes dos campos analisados. Esse problema é escrito por Daley(1991) como: minimize o seguinte funcional

$$I = \int_S \{w_v(u_I - u_A)^2 + w_v(v_I - v_A)^2 + w_\Phi(\Phi_I - \Phi_A)^2\} dS \quad (4.2.15)$$

sujeitos às restrições

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - f_o v_I = 0, \quad \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + f_o u_I = 0 \quad (4.2.16)$$

que é a relação geostrófica. Consideremos que os pesos w_v e w_Φ são especificados. Esse problema pode ser resolvido usando o método para problemas com restrições, mas verifi-

camos primeiramente que no caso simples, poderíamos fazer uma simples substituição de (4.2.16) em (4.2.15), e encontramos

$$I = \int_S \left\{ w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right)^2 + w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right)^2 + w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A)^2 \right\} dS. \quad (4.2.17)$$

Reescrevemos I como

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

onde

$$I_1 = \int_S w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right)^2 dS, \quad (4.2.18)$$

$$I_2 = \int_S w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right)^2 dS \quad (4.2.19)$$

e

$$I_3 = \int_S w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A)^2 dS. \quad (4.2.20)$$

Queremos a variação de I em relação à variável Φ_I , começamos com a equação (4.2.18),

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \int_S w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_I + \delta \Phi_I) + u_A \right)^2 dS - \int_S w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right)^2 dS \\ &= \int_S w_v \left\{ \left(\frac{1}{f_o^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) + \left(\delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) \right)^2 \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1}{f_o} \left[\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) \right] u_A + u_A^2 \right\} dS - \int_S w_v \left\{ \frac{1}{f_o^2} \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} u_A + u_A^2 \right\} dS \\ &= \int_S w_v \left\{ \frac{1}{f_o^2} \left[\delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) + \left(\delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) \right)^2 \right] + \frac{2}{f_o} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) u_A \right\} dS. \end{aligned}$$

Logo

$$\delta I_1 = \int_S w_v \left\{ \frac{1}{f_o^2} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) + \frac{2}{f_o} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) u_A \right\} dS. \quad (4.2.21)$$

Agora tomemos a variação de (4.2.19) em relação a Φ_I ,

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= \int_S w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_I + \delta \Phi_I) - v_A \right)^2 dS - \int_S w_v \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right)^2 dS \\ &= \int_S w_v \left\{ \left(\frac{1}{f_o^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) + \left(\delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) \right)^2 \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1}{f_o} \left[\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} + \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) \right] v_A + v_A^2 \right\} dS - \int_S w_v \left\{ \frac{1}{f_o^2} \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} v_A + v_A^2 \right\} dS \\ &= \int_S w_v \left\{ \frac{1}{f_o^2} \left[\delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) + \left(\delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) \right)^2 \right] - \frac{2}{f_o} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) v_A \right\} dS. \end{aligned}$$

Logo

$$\delta I_2 = \int_S w_v \left\{ \frac{1}{f_0^2} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) - \frac{2}{f_0} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) v_A \right\} dS. \quad (4.2.22)$$

Agora tomemos a variação de (4.2.20) em relação a Φ_I ,

$$\begin{aligned} \Delta I_3 &= \int_S w_\Phi (\Phi_I + \delta \Phi_I - \Phi_A)^2 dS - \int_S w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A)^2 dS \\ &= \int_S w_\Phi (\Phi_I^2 + 2\Phi_I \delta \Phi_I + (\delta \Phi_I)^2 - 2\Phi_I - \Phi_I \Phi_A - 2\Phi_A \delta \Phi_I + \Phi_A^2) dS \\ &\quad - \int_S w_\Phi (\Phi_I^2 - 2\Phi_I \Phi_A + \Phi_A^2) dS \\ &= \int_S w_\Phi (2\Phi_I \delta \Phi_I + (\Phi_I)^2 - 2\Phi_A \delta \Phi_I) dS \end{aligned}$$

e portanto

$$\delta I_3 = 2 \int_S w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) \delta \Phi_I dS. \quad (4.2.23)$$

De (4.2.21), (4.2.22) e (4.2.23), temos que

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_S \left\{ w_v \left[\frac{1}{f_0^2} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) + \frac{2}{f_0} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) u_A + w_v \frac{1}{f_0^2} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) - \frac{2}{f_0} \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) v_A \right] \right. \\ &\quad \left. + 2w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) \delta \Phi_I \right\} dS \\ &= 2 \int_S \left\{ \frac{w_v}{f_0} \left(\frac{1}{2f_0} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) + \frac{w_v}{f_0} \left(\frac{1}{2f_0} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} + v_A \right) \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) \delta \Phi_I \right\} dS. \end{aligned}$$

Reescrevemos então

$$\delta I = 2(I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)})$$

onde

$$I^{(1)} = \int_S \left\{ \frac{w_v}{f_0} \left(\frac{1}{2f_0} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) \right\} dS \quad (4.2.24)$$

$$I^{(2)} = \int_S \left\{ \frac{w_v}{f_0} \left(\frac{1}{2f_0} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} + v_A \right) \delta \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right) \right\} dS \quad (4.2.25)$$

e

$$I^{(3)} = \int_S w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) \delta \Phi_I dS. \quad (4.2.26)$$

Assumindo $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ como o vetor normal ao bordo de S parametrizada, integrando (4.2.24) por partes, usando (4.2.32) do apêndice B, obtemos

$$I^{(1)} = \int_{\partial S} \frac{w_v}{f_0} \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \delta \Phi_I \cdot \tau_2 \cdot dS - \int_S \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w_v}{f_0} \left(\frac{1}{2f_0} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \right] \delta \Phi_I dS \quad (4.2.27)$$

e o mesmo para (4.2.25),

$$I^{(2)} = \int_{\partial S} \frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right) \delta \Phi_I \cdot \tau_1 \cdot dS - \int_S \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right) \right] \delta \Phi_I dS. \quad (4.2.28)$$

Logo

$$\begin{aligned} \delta I &= 2 \int_S \left\{ w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right) \right] \right\} \delta \Phi_I dS \\ &\quad + \int_{\partial S} \frac{w_v}{f_o} \left[\left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \tau_2 + \left(\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right) \tau_1 \right] \delta \Phi_I dS \\ &= 2 \int_S \left\{ w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right) \right] \right\} \delta \Phi_I dS \\ &\quad + \int_{\partial S} \frac{w_v}{f_o} \left[\frac{1}{f_o} \nabla \Phi_I \cdot (\tau_1, \tau_2) - (u_A, v_A) \cdot (-\tau_2, \tau_1) \right] \delta \Phi_I dS. \end{aligned}$$

Temos $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ é o vetor normal e, de fato, $n = (-\tau_2, \tau_1)$ é o vetor tangente ao bordo de S , podemos considerar o vetor velocidade horizontal $\mathbf{v}_A = (u_A, v_A)$ e reescrever

$$\begin{aligned} \delta I &= 2 \int_S \left\{ w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right) \right] \right\} \delta \Phi_I dS \\ &\quad + \int_{\partial S} \frac{w_v}{f_o} \left[\frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \tau} - \mathbf{v}_A \cdot n \right] \delta \Phi_I dS, \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial \Phi_I}{\partial \tau}$ é a derivada direcional na direção do vetor normal ao bordo de S e $n \cdot \mathbf{v}_A$ é a componente tangencial da velocidade horizontal. Esta variação é zero nos extremos, assumindo que w_Φ e w_v são independentes, para que a variação do funcional se anule é preciso que no interior de ∂S tenhamos

$$w_\Phi (\Phi_I - \Phi_A) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} + u_A \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{w_v}{f_o} \left(\frac{1}{2f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} - v_A \right) \right] = 0,$$

$$w_{\Phi_I} \Phi_I - w_{\Phi_I} \Phi_A - \frac{w_v}{f_o} \left[\frac{1}{2f_o} \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial y^2} + \frac{\partial u_A}{\partial y} \right] - \frac{w_v}{f_o} \left[\frac{1}{2f_o} \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^2} - \frac{\partial v_A}{\partial x} \right] = 0,$$

$$w_{\Phi_I} \Phi_I - \frac{w_v}{2f_o^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^2} \right] = w_{\Phi_I} \Phi_A + \frac{w_v}{f_o} \left[\frac{\partial u_A}{\partial y} - \frac{\partial v_A}{\partial x} \right]$$

e portanto

$$w_\Phi \Phi_I - \frac{w_v}{2f_o^2} \nabla^2 \Phi_I = w_\Phi \Phi_A + \frac{w_v}{f_o} \left[\frac{\partial u_A}{\partial y} - \frac{\partial v_A}{\partial x} \right].$$

Define-se

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

como a vorticidade, e neste caso, teremos

$$\zeta_A = \frac{\partial u_A}{\partial y} - \frac{\partial v_A}{\partial x}$$

como a vorticidade inicial analisada. Então, no interior de ∂S , devemos ter

$$w_{\Phi} \Phi_I - \frac{w_v}{2f_o^2} \nabla^2 \Phi_I = w_{\Phi} \Phi_A + \frac{w_v}{f_o} \zeta_A.$$

Sobre a borda de S , teremos

$$\delta \Phi_I = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f_o} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \tau} = n \cdot \mathbf{v}_A. \quad (4.2.29)$$

CONCLUSÃO

Este trabalho visou explorar os conceitos de Cálculo Variacional e aplicações em modelos de assimilação de dados meteorológicos. Para que isso fosse possível, deu-se a necessidade de introduzir vários assuntos que não estavam na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC (Universidade do Estado de Santa Catarina), começando pelo próprio Cálculo Variacional. Foram utilizados conceitos e resultados de Análise em \mathbb{R}^n , Espaços Métricos, Cálculo Vetorial, Álgebra Linear, entre outros.

Após todos esses conceitos e resultados estarem bem claros, introduziu-se o estudo do Cálculo Variacional com a Equação de Euler, a qual todo extremo deve satisfazer. É impressionante a quantidade de resultados que conseguimos encontrar com apenas uma expansão por série de Taylor e uma integração por partes. Foram também apresentados alguns problemas de Cálculo Variacional, tais como os problemas de fronteiras fixas, fronteiras móveis, tempo final livre, funcionais dependendo de mais de uma função e também problemas com alguns outros tipos de restrições.

A fim de fazer uma aplicação do Cálculo Variacional na meteorologia, viu-se a necessidade de estudar as equações de conservação de momentum e de massa para logo focalizar em equações particulares deduzidas a partir delas para regiões particulares da Terra. Nesses modelos foram incluídos dados observados para assim melhorar as condições iniciais. O conjunto de métodos matemáticos que permitem esta inclusão são chamados de métodos de assimilação de dados, um deles é o Cálculo Variacional. Após isso, começamos a trabalhar nas aplicações, onde o objetivo nada mais era do que encontrar boas condições iniciais para que o modelo resultasse em uma equação que melhor se aproximasse da realidade.

De fato o Cálculo Variacional é de imensa aplicabilidade na meteorologia, as equações aqui estudadas são casos particulares e apenas foi visto a teoria, um passo seguinte para o estudo seria a implementação numérica e computacional para estes casos. Um seguinte estudo poderia ser feito em outras equações. A complexidade numérica e computacional para implementar esses métodos são objeto de grandes estudos. Pesquisando sobre outras aplicações do Cálculo Variacional não é difícil encontrar artigos sobre as mais variadas áreas, o que deixa um grande leque de opções para o acadêmico. Entre eles, um ramo de estudo interessante dentro das aplicações seria na resolução de equações diferenciais ordinárias não lineares com condições de contorno do tipo de Dirichlet.

REFERÊNCIAS

- [1] DALEY, R. **Atmospheric Data Analysis**. Cambridge atmospheric and space science series. Cambridge University Press. 1999.
- [2] FLORES, Ana Paula Ximenes. **Cálculo Variacional: aspectos teóricos e aplicações**. Rio Claro, 2011. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
- [3] GELFAND, I.M. and FOMIN S.V. **Calculus of Variations**. Prentice-Hall, Inc. 1963. 232.
- [4] HOLTON, J.R. **Introduction to dynamic meteorology**. 3.ed. New York: Academic Press, 1992. 511 p. (International geophysics series).
- [5] HUANG, SIXUN; CAO, XIAOQUN ; DU, HUADONG ; WANG, TINGFANG ; XIANG, JIE. **Retrieval of atmospheric and oceanic parameters and the relevant numerical calculation**. Advances in Atmospheric Sciences, 2006, Vol.23(1), pp.106-117.
- [6] ISAKSEN, LARS ; JANSSEN, PETER A. E. M. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**. 2004, Vol.130, pp.1793-1814.
- [7] LEMES, M. A. M.; MOURA, A. D. **Fundamentos de dinâmica aplicados a meteorologia e oceanografia**. 2.ed. Ribeirão Preto: Holos, 2002.
- [8] LIMA, E.L. **Curso de análise, volume II**. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1995. Desc. física 344 p.
- [9] LIMA, E.L. **Espacos métricos**. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. Desc. física 299 p.
- [10] LINDSKOG, MAGNUS ; DEE, DICK ; TRÉMOLET, YANNICK ; ANDERSSON, ERIK ; RADNÓTI, GABOR ; FISHER, MIKE. **A weak-constraint four-dimensional variational analysis system in the stratosphere**. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2009, Vol.135, pp.695-706.
- [11] OLAGUER, EDUARDO P. **Atmospheric Environment**. 2011, Vol.45(38), pp.6980-6986.
- [12] PAPOULIS, A. **Probability, random variables and stochastic processes**. 2965. McGraw-Hill.
- [13] REKTORYS, Karel. **Variational methods in mathematics, science and engineering**. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Co, 1977.

- [14] SHANKAR RAO, K. **Atmospheric Environment**. 2007, Vol.41(33), pp.6964-6973.
- [15] STORTO, ANDREA. **Meteorological Applications**. 2009, Vol.16, pp.461-479.
- [16] STEWART, J. **Cálculo, volume II**. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.
- [17] SYMON, KEITH R. **Mecânica**. 2.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1986.
- [18] V. I. AGOSHKOV; V. B. ZALESNY. **Variational Data Assimilation Technique in Mathematical Modeling of Ocean Dynamics**. Pure Appl. Geophys. 169 (2012), 555-578.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Tópicos de Espaços Métricos

O apêndice A foi feito com base em Lima(1977) onde encontram-se as demonstrações.

Métrica

Seja M um conjunto. Definiremos métrica como uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa elementos $x, y \in M$ a um único número real $d(x, y)$. Este número real $d(x, y)$ representará a distância de x até y e uma métrica estará definida quando, para quaisquer $x, y, z \in M$, valer:

(i) $d(x, x) = 0$

(ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Espaços Métricos

Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M . No espaço Euclidiano \mathbb{R}^n há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos:

(i) $d^{(1)}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = [\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{1/2}$

(ii) $d^{(2)}(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(iii) $d^{(3)}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

e vale para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d^{(2)}(x, y) \leq d(x, y) \leq d^{(1)}(x, y) \leq n \cdot d^{(2)}(x, y) \quad (4.2.30)$$

Bolas e Esferas

Seja a um ponto do espaço métrico M . Dado $r > 0$, definiremos *Bola Aberta* ao conjunto $B(a; r)$ de todos os pontos cuja distância até o ponto a é menor do que r ou equivalente a isto,

$$B(a; r) = \{x \in M, d(x, a) < r\},$$

Bola Fechada ao conjunto $B[a; r]$ de todos os pontos cuja distância até o ponto a é menor ou igual do que r ou equivalente a isto,

$$B[a; r] = \{x \in M, d(x, a) \leq r\},$$

e *Esfera* ao conjunto $S(a; r)$ de todos os pontos cuja distância até o ponto a é igual a r ou equivalente a isto,

$$S(a; r) = \{x \in M, d(x, a) = r\}$$

Funções contínuas

Definição 4.2.3 *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Diz-se ainda que $f : M \rightarrow N$ é contínua quando esta é contínua em todos os pontos $a \in M$.*

Proposição 4.2.4 *A composta de duas funções contínuas é contínua. Mais precisamente, se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ e $g : N \rightarrow P$ é contínua no ponto $b = f(a)$, então $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua no ponto a .*

Proposição 4.2.5 *A aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, suas coordenadas $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ são contínuas no ponto a .*

Corolário 4.2.6 *Se $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ são contínuas, então também é contínua a aplicação*

$$\phi = f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$$

definida por

$$\phi(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

APÊNDICE B

Tópicos de Análise

O apêndice B foi feito com base em Lima(1995) onde encontram-se as demonstrações.

Aplicações contínuas

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, se pode obter $\delta > 0$ tal que todo ponto $x \in X$ cuja distância ao ponto a seja menor do que δ é transformado por f num ponto $f(x)$ que dista de $f(a)$ menos que ϵ . Em linguagem matemática,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Se f é contínua em todos os pontos de X diz-se simplesmente que f é contínua.

Conjuntos abertos

Seja X um conjunto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um ponto $a \in X$ chama-se ponto interior a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X , ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$ implica $x \in X$. O interior de X é o conjunto $intX$, formado pelos pontos interiores a X . Quando $x \in intV$, dizemos que o conjunto V é uma vizinhança de x .

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset X$. Assim, X é aberto se, e somente se $intX = X$.

Teorema 4.2.7 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R}^n - X$ é aberto.*

Derivadas Direcionais

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis reais definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$, a derivada direcional de f com respeito ao vetor v é definida pelo limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

quando este limite existe. Notemos que as derivadas parciais são casos particulares das derivadas direcionais, onde teríamos $v = e_i$.

Teorema 4.2.8 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a + v]$ esteja contido em U , que $f([a, a + v])$ seja contínua e que exista a*

derivada direcional com respeito a qualquer vetor v em todo ponto $x \in (a, a + v)$. Então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v)$$

Funções diferenciáveis

Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ com $U \subset \mathbb{R}^n$ é dita diferenciável num ponto $a \in U$ quando existem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$ e para todo vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tal que $a + v \in U$ tem-se

$$f(a + v) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i + r(v)$$

onde $\lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$. Como $\lim_{|v| \rightarrow 0} r(v) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{|v| \rightarrow 0} f(a + v) &= \lim_{|v| \rightarrow 0} f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i + \frac{r(v)}{|v|} \cdot |v| \\ &= f(a) \end{aligned}$$

ou seja, se f é diferenciável em $a \in U$, então f é contínua neste ponto. Notemos ainda que, se f é diferenciável em $a \in U$, então f deve ter derivadas direcionais contínuas para todo vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. De fato

$$\frac{\partial f}{\partial v} = df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i.$$

Regra da Cadeia 4.2.9 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(U) \subset V$ e cada função coordenada $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$. Seja ainda $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então, a função composta $(g \circ f) : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e suas derivadas parciais são*

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

Teorema 4.2.10 *Se a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e cada uma delas é contínua no ponto c , então f é diferenciável no ponto c .*

A Diferencial de uma função

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis reais. A derivada de f será representada por um funcional linear, ou seja, seu domínio é um espaço vetorial (aqui \mathbb{R}^n) e sua imagem

será o conjunto dos reais. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ diferenciável em um ponto $a \in U$. A diferencial de f no ponto a é o funcional linear $df : U \rightarrow \mathbb{R}$ cujo valor no vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i$$

e como toda transformação linear $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $df(a)$ possui uma matriz de ordem $1 \times n$ dada por

$$df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Quando $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto $a \in U$, temos a aplicação $df : U \rightarrow \mathbb{R}^*$ cuja matriz é:

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Essa aplicação é contínua se suas coordenadas forem contínuas, ou seja, $df(x)$ é contínua se, e somente se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ for de classe C^1 , para $i = 1, 2, \dots, n$.

Aqui, usou-se para representar a base canônica de $(\mathbb{R})^*$ por (dx_1, \dots, dx_n) , assim temos $dx_i v = \alpha_i$. Portanto podemos escrever

$$df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot dx_i$$

Teorema 4.2.11 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos do segmento aberto de reta $(a, a + v)$ e seja contínua no segmento fechado $[a, a + v] \subset U \subset \mathbb{R}^n$. Então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(a + v) - f(a) = df(a + \theta v) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta v) \cdot \alpha_i \quad (4.2.31)$$

onde $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

O Gradiente de uma função diferenciável

Dada uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, com $U \subset \mathbb{R}^n$, definimos o gradiente de f no ponto $a \in U$ como o vetor $\mathbf{grad} f(a)$ por

$$\langle \mathbf{grad} f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i$$

para todo vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Em particular, $\langle \mathbf{grad} f(a), e_i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, ou seja

$$\mathbf{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Fixemos $a \in U$ tal que $\mathbf{grad} f(a) \neq 0$. As três propriedades mais importantes do gradiente de uma função diferenciável f são:

- (i) O gradiente aponta para uma direção segundo a qual a função f é crescente;
- (ii) Dentre todas as direções ao longo das quais a função f cresce, a direção do gradiente é a de crescimento mais rápido;
- (iii) O gradiente de f é perpendicular à superfície de nível de f que passa por este ponto.

Fórmula de Taylor; pontos críticos

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A fórmula de Taylor de f é dada por

$$f(a+v) = f(a) + df(a).v + \frac{1}{2}d^2f(a).v^2 + \dots + \frac{1}{p!}d^p f(a).v^p + r_p(v)$$

e temos as três situações principais:

- (1) **Fórmula de Taylor infinitesimal:** Se f é p vezes diferenciável no ponto a , então

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_p(v)}{|v|^p} = 0.$$

- (2) **Resto de Lagrange:** Suponto $[a, a+v] \subset U$, f de classe C^p , $p+1$ vezes diferenciável no segmento aberto $(a, a+v)$, então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$r_p(v) = \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(a + \theta v).v^{p+1}$$

- (3) **Resto Integral:** Se f é de classe C^{p+1} e $[a, a+v] \subset U$, então

$$r_p(v) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p d^{p+1} f(a+tv).v^{p+1} dt$$

onde em cada um dos itens acima, tem-se

$$d^2 f(a).v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a). \alpha_i \alpha_j$$

$$d^3 f(a).v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a). \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

e assim por diante.

Teorema 4.2.12 (*Integração por partes*): *Sejam $u, v \in \mathcal{C}^1(U)$. Então*

$$\int_U u_{x_i} v dx = \int_U u v_{x_i} dx - \int_{\partial U} u v \nu^i dS, \quad (4.2.32)$$

onde $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ é o vetor normal ao bordo de U .

APÊNDICE C

Tópicos de Cálculo Vetorial

O apêndice C foi feito com base em Stewart(2002).

Multiplicadores de Lagrange

O método dos Multiplicadores de Lagrange é uma ferramenta que nos ajudará a maximizar ou minimizar uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis reais sujeita a uma outra função de n variáveis reais da forma $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$.

Em \mathbb{R}^2 por exemplo, maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ nada mais é do que encontrar o par ordenado (x_0, y_0) que está sobre a curva de nível $g(x, y) = k$ onde $f(x, y)$ assume seu valor máximo. Dessa forma, isto implicaria num $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = c$ seja tangente a $g(x, y) = k$, ou seja, a reta perpendicular de $f(x, y) = c$ e $g(x, y) = k$ neste ponto de tangência se trata da mesma, então temos que os vetores gradientes são paralelos, logo

$$\mathbf{grad}f(x, y) = \lambda \cdot \mathbf{grad}g(x, y)$$

Essa ideia pode ser estendida para \mathbb{R}^n . Trabalharemos com \mathbb{R}^3 . Para determinar os valores de máximo e mínimo que $f(x, y, z)$ restrita a $g(x, y, z) = k$, uma vez que as componentes de f e g tenham derivadas contínuas e $\mathbf{grad}g \neq \vec{0}$ sobre $g(x, y, z) = k$, então basta resolver

$$\begin{cases} \mathbf{grad}f(x, y, z) = \lambda \cdot \mathbf{grad}g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

e calcular $f(x, y, z)$ em todos os pontos (x, y, z) encontrados, obviamente o maior vai ser o ponto de máximo e o menor o ponto de mínimo. Em resumo, deve-se resolver o seguinte sistema de 4 equações e 4 incógnitas:

$$\begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ f_z = \lambda \cdot g_z \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

Vale a pena enfatizar que não nos interessa encontrar o valor de λ , e sim dos valores x, y e z .

Campos Vetoriais

Seja D um subconjunto de \mathbb{R}^n . Um campo vetorial sobre \mathbb{R}^n é uma função F que associa a cada ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) um vetor n -dimensional $\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Aqui trabalharemos em \mathbb{R}^3 , ou seja, domínios $D \subset \mathbb{R}^3$ e funções $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Integrais de linha

Consideremos C uma curva plana dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

ou o que é equivalente, pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Consideremos que C seja uma curva lisa, ou seja, $\mathbf{r}'(t)$ é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n intervalos do tipo $[t_{i-1}, t_i]$ e consideremos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos $p_i(x_i, y_i)$ dividem a curva C em n subarcos de comprimento Δs_i . Escolhendo um ponto qualquer $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ e calculando f em $P_i(x_i^*, y_i^*)$, onde f é uma função de duas variáveis cujo a curva C está definida em seu domínio, e multiplicamos o resultado por Δs_i , somando temos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta s_i$$

e então definimos a integral de linha de f sobre C como

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta s_i$$

quando este limite existe. Se sobre C f é contínua, então este limite sempre existe e

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

onde

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

é o comprimento da curva C . Essa mesma ideia segue para uma curva C em \mathbb{R}^3 ,

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \Delta s_i$$

e ainda

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Seja \mathbf{F} um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa C , dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$ com $a \leq t \leq b$. Então, a integral de linha de \mathbf{F} ao longo de C é dada por

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Rotacional

Se $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o Rotacional de F é o campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 definido por

$$\mathbf{rot} F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$$

ou simplesmente como

$$\mathbf{rot} F = \nabla \times F$$

onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Uma interpretação física do rotacional que vale a pena citar aqui é que se $F(x, y, z)$ é um campo de vetores que representa a velocidade de um fluido, então $\mathbf{rot} F$ está relacionado ao fenômeno de rotação deste fluido. Consideremos agora um ponto (x_0, y_0, z_0) . As partículas situadas numa vizinhança deste ponto tendem a rodar ao redor do eixo formado pelo vetor $\mathbf{rot} F(x_0, y_0, z_0)$, o comprimento deste vetor é a velocidade com que as partículas se movem ao redor desse eixo. Se acontecer de $\mathbf{rot} F(x_0, y_0, z_0) = 0$, o fluido está livre de rotações numa vizinhança do ponto (x_0, y_0, z_0) .

Divergência

Se $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então a divergência de F é definida por

$$\mathbf{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Se $F(x, y, z)$ é um campo de vetores que representa as velocidades de um fluido, então a divergência do campo está relacionada com a expansão ou contração do volume do fluido pelo fluxo do campo. Temos que num ponto (x_0, y_0, z_0) admissível, se $\mathbf{div} F(x_0, y_0, z_0) > 0$ então isto representa que há uma expansão do fluido numa vizinhança deste ponto, caso $\mathbf{div} F(x_0, y_0, z_0) < 0$, isto representa que há uma contração numa vizinhança deste ponto. Caso $\mathbf{div} F(x, y, z) = 0$, dizemos que F é incompressível.

APÊNDICE D

Tópicos de Estatística

Introduziremos alguns conceitos básicos de estatística que serão usados com frequência no desenvolvimento das aplicações e podem ser encontradas em qualquer bibliografia (por exemplo Papoulis, A. (1965)). O conceito de variável aleatória pode ser entendido como uma variável quantitativa, cujo resultado depende de fatores aleatórios. Matematicamente, variável aleatória é uma função que associa elementos do espaço amostral a valores numéricos. Consideremos a variável s como uma variável aleatória, a Esperança de s é definida como a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Isto é, representa o valor médio esperado de uma experiência se ela for repetida muitas vezes. Supondo que s pode pegar valores entre $-\infty$ e $+\infty$, então a esperança de s é dada por

$$\langle s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s p(s) ds \quad (4.2.33)$$

onde $p(s)$ é a função densidade de probabilidade de s , $p(s)$ é a probabilidade que o valor de s esteja num intervalo infinitesimal formado por s e $s + ds$ e satisfaz

$$p(s) \geq 0, \quad e \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(s) ds = 1.$$

Definimos a variância de s como

$$\sigma_s = \sqrt{\langle (s - \eta)^2 \rangle}$$

onde $\eta = \langle s \rangle$.

Supomos que existem N observações s_1, s_2, \dots, s_N de uma variável s . Assumimos que estas observações são pegadas com diversos tipos de instrumentos diferentes e que o erro associado com cada medição é dado por $\epsilon_n = s_n - s$. Assumimos que os erros de observação são aleatórios e distribuídos normalmente. Então a probabilidade que o erro associado à n -ésima observação esteja entre ϵ_n e $\epsilon_n + d\epsilon_n$ é

$$p(\epsilon_n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\epsilon_n^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (4.2.34)$$

onde

$$\sigma_n^2 = \langle (s_n - s)^2 \rangle = \langle \epsilon_n^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_n^2 p(\epsilon_n) d\epsilon_n^2 \quad e \quad \langle \epsilon_n \rangle = 0$$

Se considerarmos ainda N observações, a probabilidade de que ϵ_1 esteja entre $\epsilon_1 + d\epsilon_1$, ϵ_2 esteja entre $\epsilon_2 + d\epsilon_2, \dots$, ϵ_n esteja entre $\epsilon_n + d\epsilon_n$, é dado pelo produto individual

das probabilidades dada por (4.2.34). Assim

$$p(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) = p(\epsilon_1)p(\epsilon_2)\dots p(\epsilon_N) \quad (4.2.35)$$

$$= \prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{\epsilon_n^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (4.2.36)$$

$$= \left[\prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \right] \exp \left[-\sum_{n=1}^N \frac{(s_n - s)^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (4.2.37)$$

O mais provável valor é denotado por s_a e este deve minimizar o seguinte funcional

$$I = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^{-2} (s_a - s_n)^2 = \frac{(s_a - s_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(s_a - s_2)^2}{2\sigma_2^2} + \dots + \frac{(s_a - s_N)^2}{2\sigma_N^2} \quad (4.2.38)$$

Esta equação pode também ser reescrita, segundo Daley(1996) como

$$I = \sum_{n=1}^N w_n d_n^2$$

onde w_n são conhecidos como pesos, $d_n = s - s_n$ é o residual da n -ésima observação. Uma boa aproximação para os erros de observação é dada por $w_n = 0.5\sigma_n^{-2}$.

APÊNDICE E

Equações do movimento em coordenadas esféricas

Para trabalharmos num sistema rotacionando, como introduzido acima e além disso, para trabalhar com modelos meteorológicos, é muito mais conveniente trabalharmos com as equações do movimento em um outro sistema de coordenadas, o sistema de coordenadas esféricas, que para este caso é bem mais prático que o de coordenadas cartesianas. As coordenadas serão dadas por (λ, ϕ, z) , onde λ é a longitude (longitude de um lugar é o ângulo que o raio que passa por esse ponto faz com o Meridiano de Greenwich e ainda $\lambda \in [0, 2\pi]$), ϕ é a latitude (latitude de um lugar é o ângulo que o raio que passa por esse ponto faz com o plano do equador e ainda $\phi \in [0, \pi]$) e z é a distância vertical do ponto à superfície da terra. Novamente, denotaremos a velocidade como

$$V = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

onde as componentes u , v e w são definidas como

$$u = r \cos \phi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v = r \frac{D\phi}{Dt}, \quad w = \frac{Dz}{Dt}$$

onde r é a distância ao centro da Terra, que é dado por $r = z + a$, onde a é o raio da Terra. O sistema de coordenadas (x, y, z) definido deste modo não é um sistema de coordenadas cartesianas, porque as direções dos vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} não são constantes e sim funções da sua posição na esfera. Essa dependência da posição dos vetores unitários é levada em consideração quando o vetor aceleração é expandido em suas componentes sobre a esfera. Assim, escrevemos

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\mathbf{i} + \frac{Dv}{Dt}\mathbf{j} + \frac{Dw}{Dt}\mathbf{k} + u\frac{D\mathbf{i}}{Dt} + v\frac{D\mathbf{j}}{Dt} + w\frac{D\mathbf{k}}{Dt} \quad (4.2.39)$$

A fim de obter as equações das componentes de movimento é necessário avaliar as variações dos vetores unitários seguindo o movimento. Consideraremos primeiro $\frac{D\mathbf{i}}{Dt}$, expandindo sua derivada total e notando que \mathbf{i} é dependente apenas de x , temos

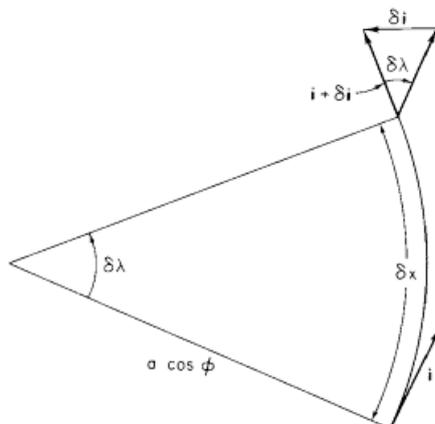
$$\frac{D\mathbf{i}}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}$$

e observando a Figura (4.3) podemos notar que

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta \mathbf{i}|}{\delta x} = \left| \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} \right| = \frac{1}{a \cos \phi}$$

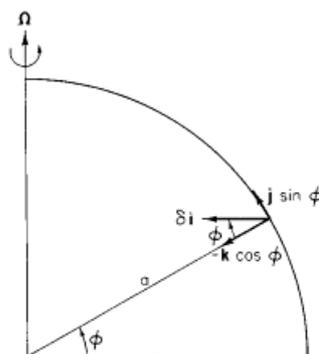
e ainda o vetor $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}$ aponta para o eixo de rotação.

Figura 4.3: Dependência longitudinal do vetor \mathbf{i} .



Fonte: HOLTON(1972).

Figura 4.4: $\delta\mathbf{i}$ depende das componentes \mathbf{j} e \mathbf{k} .



Fonte: HOLTON(1972).

Portanto

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{i} = \frac{u}{a \cos \phi}(\sin \phi \mathbf{j} - \cos \phi \mathbf{k}). \quad (4.2.40)$$

Considerando agora $\frac{D}{Dt}\mathbf{j}$, notemos que \mathbf{j} é função de x e y . Assim, com o auxílio da Figura (2.3), vemos que para o movimento leste, $|\delta\mathbf{j}| = \frac{\delta x}{a/\tan \phi}$. Como o vetor $\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial x}$ está direcionado no sentido negativo do eixo x , temos então

$$\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial x} = -\frac{\tan \phi}{a}\mathbf{i} \quad (4.2.41)$$

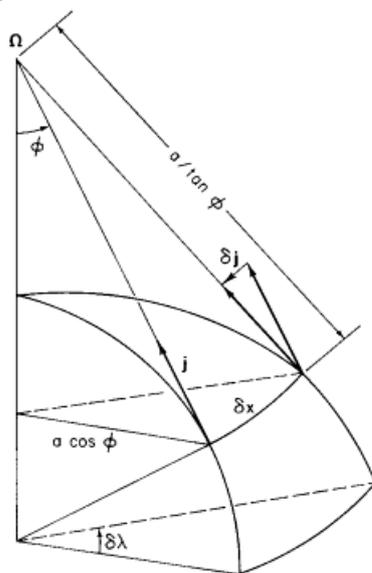
Pela Figura (4.5) fica claro que para o movimento ao norte $|\delta\mathbf{j}| = \delta\phi$, mas $\delta\phi = a\delta y$ e $\delta\mathbf{j}$ é direcionado ao sul, então

$$\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial y} = -\frac{\mathbf{k}}{a} \quad (4.2.42)$$

logo

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{j} = -\frac{u \tan \phi}{a}\mathbf{j} - \frac{v}{a}\mathbf{k} \quad (4.2.43)$$

Figura 4.5: Dependência do vetor unitário \mathbf{j} na longitude.



Fonte: HOLTON(1972).

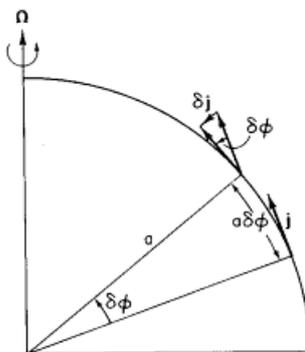
e da mesma forma, temos

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{k} = \frac{u}{a}\mathbf{i} + \frac{v}{a}\mathbf{j} \quad (4.2.44)$$

Substituindo (4.2.42) e (4.2.43) em (4.2.44) e reorganizando os termos, obtemos a expansão em coordenadas esféricas da aceleração dada por

$$\frac{DV}{Dt} = \left(\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} \right) \mathbf{k} \quad (4.2.45)$$

Figura 4.6: Dependência do vetor unitário \mathbf{j} na latitude.



Fonte: HOLTON(1972).

Voltando a componente de expansão dos termos de força em (??). A força de Coriolis é expandida notando que Ω não tem nenhuma componente paralela a \mathbf{i} e que as suas componentes paralelas a \mathbf{j} e \mathbf{k} são $2\Omega \cos \phi$ e $2\Omega \sin \phi$ respectivamente. Assim, temos

que

$$-2\Omega \times V = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ u & v & w \end{bmatrix}$$

ou seja

$$-2\Omega \times V = -(2\Omega w \cos \phi - 2\Omega v \sin \phi)\mathbf{i} - 2\Omega u \sin \phi \mathbf{j} + 2\Omega u \cos \phi \mathbf{k} \quad (4.2.46)$$

O gradiente de pressão pode ser expresso como

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{k} \quad (4.2.47)$$

e a gravidade é representada por

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \quad (4.2.48)$$

onde g é aproximadamente $9.8m/s^2$. Agora, para uma força qualquer \mathbf{F}_r , temos que

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{rx}\mathbf{i} + \mathbf{F}_{ry}\mathbf{j} + \mathbf{F}_{rz}\mathbf{k} \quad (4.2.49)$$

substituimos o que foi desenvolvido e obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + \mathbf{F}_{rx} \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + \mathbf{F}_{ry} \\ \frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g - 2\Omega u \cos \phi + \mathbf{F}_{rz} \end{aligned}$$

que são as equações de momentum para as componentes leste, norte e vertical, respectivamente. Os termos proporcionais a $1/a$ do lado esquerdo das equações (3.2.11), (3.2.12) e (3.2.13) são chamados os termos de curvatura, que surgem devido curvatura da Terra, pois não são lineares, pois são quadráticos nas variáveis dependentes e portanto difíceis de manusear. Felizmente, os termos de curvatura não são importantes para latitudes médias.