UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE: IDEIAS E CONTEXTOS

JÉSSICA MEYER SABATKE

JOINVILLE, 2016

JÉSSICA MEYER SABATKE

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE: IDEIAS E CONTEXTOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

JOINVILLE-SC
2016

JÉSSICA MEYER SABATKE

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE: IDEIAS E CONTEXTOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: ______________________________
Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Universidade do Estado de Santa Catarina

Coorientadora: ______________________________
Prof. Dra. Ivanete Zuchi Siple
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: Eliane Bihuna de Azevedo
Prof. Me. Eliane Bihuna de Azevedo
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: Adriano Luiz dos Santos Né
Prof. Me. Adriano Luiz dos Santos Né
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 23/06/2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e pelas oportunidades que tem me concedido nesse mundo.

À minha orientadora, Elisandra, não somente pela orientação desse trabalho, mas por toda aprendizagem concedida durante as matérias que ministrou na minha Graduação e nas inúmeras contribuições fornecidas na Iniciação Científica. Obrigada por todo apoio, atenção e amizade, você é uma profissional exemplar.

À professora Ivanete, que além de auxiliar imensamente na coorientação desse trabalho, sempre ajudou com ideias, críticas e correções em trabalhos desenvolvidos.

À professora Eliane, por disponibilizar suas turmas para ser aplicada a sequência didática, e também por aceitar a fazer parte da banca.

Ao professor Adriano, por aceitar o convite de fazer parte da banca e de contribuir em minha formação como educadora.

Aos alunos de Graduação e Pós-Graduação que realizaram as sequências didáticas, sem vocês esse trabalho não seria possível.

Obrigada pai e mãe por batalharem tanto e sempre me apoiarem a continuar nessa caminhada, vocês são meus exemplos.

Agradeço ao meu namorado, André, pela paciência e incentivo dados em todos os momentos.

As minhas colegas de curso, principalmente Bruna, Carol, Dienifer, Jaqueline, Raiane, Tati, Thaís, Dátila, Maysa, Mari e Suelen, obrigada pelos conhecimentos compartilhados, pela amizade e risadas durante esses anos.

Obrigada GC 152 e Deeper/UDESC por todas as orações feitas.

Gostaria de agradecer também a todos os meus professores que me capacitaram e de alguma forma contribuíram em minha formação.

“Ser sábio é melhor do que ser forte; o conhecimento é mais importante do que a força. Afinal, antes de entrar numa batalha, é preciso planejar bem, e, quando há muitos conselhos, é mais fácil vencer.”

Provérbios 24:5-6

RESUMO

SABATKE, Jéssica Meyer. **Construção do conceito de limite**: ideias e contextos. 2016. 151 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2016.

Neste trabalho, apresenta-se um percurso da história da construção do conceito de limite, destacando alguns expoentes e as dificuldades encontradas nesse caminho, bem como uma breve biografia de alguns precursores não tão comumente conhecidos no ensino de Cálculo. Baseando-se na história e em pesquisas sobre a dificuldade da compreensão do conceito formal de limite, foram formuladas e aplicadas sequências didáticas em três turmas de Graduação e em uma turma de Pós-Graduação no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina. A proposta desse trabalho foi a elaboração de sequências didáticas que explorassem as ideias intuitivas e a definição formal de limite sob o ponto de vista de funções e sequências. Para realização deste, adotamos a metodologia da Engenharia Didática. Descremos as atividades elaboradas, seus objetivos, a analise a priori, a analise a posteriori, e a institucionalização dessas em sala de aula. Com as aplicações das sequências didáticas os estudantes conseguiram desenvolver as ideias intuitiva e geométrica, e a definição formal do limite em termos de epsilons e deltas. Também foi possível averiguar algumas dúvidas e dificuldades dos estudantes com relação à aprendizagem do conceito.

Palavras-chave: Definição de limite. História do limite. Engenharia didática. Sequência didática.

ABSTRACT

SABATKE, Jéssica Meyer. **Construction of the limit concept:** ideas and contexts. 2016. 151 pages. Course Conclusion Paper (Mathematics Teaching Degree) – Santa Catarina State University, Joinville, 2016.

In this paper, we present one path of the limit concept construction history, highlighting some exponents and the difficulties encountered on such path, as well as a short biography of some not-so-commonly-known precursors in Calculus teaching. Based on the history and some research on the difficulty of understanding the formal concept of limit, didactic sequences were formulated and applied in three undergraduate classes and in a graduate class in the Technological Sciences Center at the Santa Catarina State University. The proposal of this work was the elaboration of didactic sequences that explore the intuitive ideas and the formal definition of limit from the point of view of functions and sequences. To carry this out, we adopted the methodology of Didactic Engineering. We describe the elaborated activities, their objectives, the priori analysis, the posteriori analysis, and their institutionalization in the classroom. With the application of the didactic sequences, the students were able to develop the intuitive and geometric ideas, and the formal definition of the limit in terms of epsilons and deltas. It was also possible to acknowledge some doubts and difficulties of the students regarding the learning of the concept.

Key words: Limit definition. Limit history. Didactic Engineering. Didactic sequence.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) desempenham um papel fundamental, e em vários países essa temática já é contemplada nos currículos do Ensino Médio. Pelo fato de muitos cursos de Graduação ter em sua grade curricular essa disciplina, a investigação sobre os processos de ensino, de aprendizagem e compreensão dos conceitos que são desenvolvidos nele, tem um grande impacto na comunidade acadêmica. Neste trabalho, em especial, focamos o ensino do limite, visto que ele é base da fundamentação do Cálculo.

Na disciplina de Cálculo, ainda é possível identificar várias dificuldades nos processos de ensino aprendizagem do conceito de limite.

> É bem sabido que muitos alunos têm problemas com as definições formais sobre os conceitos de limite e derivada. Eles também não conseguem utilizar a definição adequadamente num dado contexto, ou, são capazes de resolver problemas num plano formal, mas carecem de uma compreensão avançada dos conceitos (WEIGAND, 2014, p.603, tradução nossa).

Essas dificuldades em entender o conceito de limite não são comuns apenas no Brasil, mas em vários países há essa preocupação com seu entendimento. Assim, desde a década de 70, já se encontram estudos relativos às dificuldades do aluno em sua compreensão, por exemplo, Churchman (1972); Tall e Vinner (1981); Sierpinska (1987); Swinyard e Larsen (2012). Porém, apesar de já existirem uma quantidade significativa de pesquisas, ainda observamos que os estudantes têm problemas em entender o conceito de limite, principalmente sua definição formal em termos de epsilons e deltas. Rasmussen et al (2015) comentam que, embora saibamos muito sobre como os alunos aprendem ideias particulares em Cálculo e o potencial de tecnologias digitais e o alto envolvimento pedagógico, ainda existe a questão de como os investigadores podem coordenar vários avanços que são fundamentados e informados por diferentes perspectivas teóricas.

Com isso, muitos alunos saem do curso de CDI sem entender o conceito de limite, particularmente, sua definição formal. Os principais resultados das investigações relativas à aprendizagem, ensino e compreensão do limite, de pesquisas feitas em níveis nacionais e internacionais nas últimas décadas são:

> a) A compreensão conceitual do conceito de limite formal é um desafio para os estudantes do ensino médio, bem como para estudantes universitários e exige explicações e visualizações usando diferentes representações (além da representação simbólica).
> b) A compreensão do processo de construção ou do cálculo dos limites, no sentido passo a passo de processos sobre os níveis numéricos e gráficos é essencial para a compreensão do conceito de limite para além da definição formal de limites, e esta pode ser apoiada por visualizações no computador (WEIGAND, 2014, p. 604, tradução nossa).

Temos também que, a aprendizagem do CDI envolve conhecimentos conceituais e procedimentais,

> Procedimentais porque o limite, a derivada e a integral podem ser vistos como ferramentas quando se trabalha para resolver problemas e, principalmente, quando esses são usados para modelar situações reais. Por outro lado, o conhecimento conceitual é caracterizado por ser rico em relações. É o conhecimento conceitual que dá sentido e aplicação ao conceito de limites, tão questionado pelos estudantes (CUNHA; HOLANDA; SILVA, 2015, p. 5).

Pelo fato da compreensão de limite ainda ser um desafio para os alunos, e vendo que o conhecimento da definição formal – utilizando o ponto de vista de aproximação (δ, ε) – auxilia tal compreensão, é que surge a proposta de utilizar sequências didáticas elaboradas conforme a resposta dada por alguns pesquisadores com relação ao questionamento de como os professores devem abordar o ensino do limite: "Uma resposta reside em combinar essas abordagens: começar com as ideias intuitivas do aluno sobre limite e depois desenvolver noções informais que se alinhem com a definição formal" (DUCA; HALL e KEENE, 2014, p. 564, tradução nossa).

Visto então que muitos alunos têm problemas com as definições relativas ao conceito de limite, a questão que buscamos responder durante este trabalho foi: é possível construir uma sequência didática que possa contribuir para a aprendizagem da definição formal do limite?

Logo, a proposta desse trabalho foi de elaborar sequências didáticas que explorassem as ideias intuitivas e a definição formal de limite fundamentadas nos aspectos históricos da construção do conceito de limite e nos obstáculos relativos ao seu desenvolvimento.

No que diz respeito ao processo de Ensino, também sabemos que a disciplina de Cálculo engloba vários tópicos, os quais o professor deve ensinar para os alunos em um curto período de tempo, geralmente em um semestre. Então, muitas vezes pelo pouco tempo disponível para disciplina, e também por outros motivos – falta de recursos tecnológicos, falta de incentivo, tempo insuficiente para elaborar atividades – o professor acaba não desenvolvendo atividades diferenciadas com seus alunos. Assim, o desenvolvimento da sequência didática visa também auxiliar o professor em sua prática, já que as atividades aqui desenvolvidas, podem ser aplicadas e ou adaptadas para outros cursos.

O objetivo geral do trabalho foi construir e aplicar sequências didáticas para que pudessem contribuir para a aprendizagem dos alunos com relação a definição formal do conceito de limite, baseando-se no estudo da história e de pesquisas já feitas com relação ao tema. E, os objetivos específicos foram:

- Apresentar um percurso da história da construção do conceito de limite destacando alguns expoentes e as dificuldades encontradas nesse caminho;
- Apresentar uma breve biografia e as contribuições com relação ao estudo de limite de alguns precursores não tão comumente conhecidos no ensino de Cálculo;
- Propor sequências didáticas que envolvam aplicação do limite;
- Aplicar as atividades em turmas piloto;
- Analisar os resultados.

E para realização deste, adotamos a metodologia da Engenharia Didática, pois “a Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p. 66).

Segundo Pommer (2013), essa metodologia representa um método, um caminho ou um meio adequado para alcançar determinada meta ou objetivo, e, além disso, sua função é:

> Mostrar como trilhar no 'caminho das pedras' para a investigação de uma pesquisa ou para a prática de sala de aula, com a pretensão de ajudar o pesquisador/professor a refletir e instigar um novo olhar sobre o mundo, um olhar que seja organizador, dedutivo, curioso, indagador e criativo (POMMER, 2013, p. 20).

A Engenharia Didática, é um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas. Assim, a seguir, apresentamos as etapas dessa metodologia, de acordo com ARTIGUE (1988), juntamente com a respectiva descrição da realização de cada uma:

1. Análise preliminar: Caracteriza-se pelo levantamento das concepções envolvidas, que buscam referências teóricas que fundamentem a pesquisa. Aqui, fizemos a pesquisa em bibliografias sobre a história e origem do conceito de limite, buscando quais foram os personagens responsáveis pela formulação do conceito e quais contribuíram para sua evolução. Com esse estudo, almejamos verificar a decorrência dos obstáculos e dificuldades no entendimento do limite.

2. Concepção e análise a priori: Essa etapa tem como objetivo elaborar sequências pertinentes de aprendizagem, tendo como meta, ao mesmo tempo, os alunos e o problema didático proposto. Aqui, será apresentada a sequência didática e os objetivos de se trabalhar com as atividades propostas. Sendo descritas as situações e predições do que pode ocorrer na implementação da experiência.

3. Experimentação: Fase em que se aplica a sequência didática a uma determinada população de estudantes. Aqui, estarão presentes, a determinação das turmas que participaram da aplicação, os relatos do desenvolvimento e também a realização das sequências didáticas construídas.

4. Análise a posteriori: Corresponde à análise do conjunto dos dados obtidos na fase da experimentação e às observações realizadas durante a aplicação da sequência. Nesta etapa, organizamos os resultados colhidos das atividades e os analisamos, verificando se eram confirmadas ou refutadas as hipóteses formuladas na análise a priori.

A estrutura do trabalho foi desenvolvida da seguinte forma: No primeiro capítulo apresentamos uma investigação histórica do conceito de limite. No segundo capítulo são apresentadas as sequências didáticas propostas, juntamente com seus objetivos de realização e a análise a priori das atividades. No terceiro capítulo é feito a análise a posteriori das sequências didáticas, essas que foram aplicadas em três turmas de CDI I da Graduação e na disciplina de Fundamentos do Cálculo do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias (PPGECMT) da Udesc/Joinville. Neste capítulo, também foram colocadas as observações da experimentação e a institucionalização das questões feita pelos professores em sala de aula. Por fim, são realizadas as considerações finais do trabalho.

1 HISTÓRIA DO CONCEITO DE LIMITE: ALGUNS DEGRAUS DA ESCADA

Neste capítulo, inicialmente apresentamos alguns degraus da história relativa ao desenvolvimento do conceito de limite, exibindo os personagens envolvidos e suas respectivas contribuições.

Depois, colocamos algumas contribuições, trabalhos realizados e um pouco da história de estudiosos pouco conhecidos no ambiente acadêmico com relação ao ensino de Cálculo, sendo esses: Luca Valerio, Gregoire de Saint Vincent, George Berkeley e Niels Henrik Abel.

1.1 CONTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE AO LONGO DA HISTÓRIA

O desenvolvimento do conceito de limite seguiu um longo e irregular caminho, e se sucedeu a partir das ideias de vários estudiosos. Foram necessários cerca de 2500 anos de estudo, para se chegar à definição formal em termos de epsilons (ε) e deltas (δ) que usamos atualmente.

A primeira construção teórica elaborada por nossos antepassados, com relação ao desenvolvimento do conceito de limite, pode ser encontrada na era grega. Inicialmente os seguidores de Pitágoras (586?-500? a.C.) se baseavam na crença de que todos os números eram comensuráveis, ou seja, que eram grandezas medidas por um número inteiro ou fracionário. Porém, após a descoberta de que nem todas as grandezas poderiam ser comparadas por meio de números inteiros, houve por volta de 420 a.C. a crise dos incomensuráveis, considerada a primeira crise nos fundamentos da matemática. Considerada de grande importância, pois a partir dela começou a necessidade pelo conceito de limite, que permitiria explicar números irracionais (LIRA, 2008).

Com essa crise, surgiram algumas outras concepções acerca da natureza do mundo físico. Demócrito (460-370 a.C.) foi o primeiro a considerar a possibilidade de trabalhar com o infinitamente compondo o todo, segundo Boyer (2009), ele utilizou lâminas de secções infinitamente finas e iguais, para calcular o volume de cilindros e cones, assim, antecipando o teorema de Cavalieri.

Logo depois, veio Zenão de Eléia, ou também chamado de Zeno (489? - 430? a.C.), e seus seguidores combatendo a teoria de Demócrito propondo quatro paradoxos - da Dicotomia, de Aquiles e a Tartaruga, da Flecha e do Estádio. De acordo com Baron (1985a, p.23), logicamente, o seu argumento desenvolve-se assim: “ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, isto é, divisíveis sem fim, ou existe um menor elemento indivisível de tempo (um instante) e de espaço (um ponto) ”. Para exemplificar, temos que o paradoxo de Aquiles e a tartaruga pode ser formulado assim:

> Suponha que Aquiles deve disputar uma corrida com a tartaruga. Sendo de longe a mais lenta dos dois, a tartaruga é autorizada a começar num ponto a certa distância à frente. Aquiles jamais conseguirá alcançar seu adversário, afirma Zenão. Para isso, ele precisa chegar ao ponto de partida. A esta altura, a tartaruga terá avançado até algum ponto adiante na pista de corridas. E quando Aquiles alcançar este ponto, a tartaruga terá avançado ainda mais. É óbvio, afirma Zenão, que a série é interminável. Haverá sempre alguma distância, por menor que seja, entre os dois competidores. (MORRIS, 1998 *apud* ZUCHI, 2005, p.38).

Aristóteles (384-322 a.C.) tentou refutar os paradoxos de Zenão com argumentos filosóficos. Para ele era desnecessário usar a ideia do infinitamente pequeno, pois: “se adicionarmos continuamente a uma quantidade finita, excederemos qualquer grandeza dada e, do mesmo modo, se subtrairmos continuamente dela chegaremos a alguma coisa menor do que ela” (BARON, 1985a, p.27).

Então, Eudoxo (408-355 a.C.) propôs o método da Exaustão, “uma técnica de aproximação da área de uma região com um número crescente de polígonos, com aproximações melhorando a cada etapa e a área exata sendo obtida depois de um número infinito dessas etapas” (THOMAS, 2002, p.7).

Esse método também ficou conhecido como “Postulado de Arquimedes”, e pode ser considerado como uma resposta aos paradoxos de Zenão, Eves (2011) relata que dos antigos, quem aplicou de maneira mais elegante o método da exaustão foi Arquimedes (287-212 a.C) se aproximando da atual e verdadeira integração. A base da proposição do método é o seguinte:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p.419).

O postulado excluía o infinitesimal[1] de todas as demonstrações geométricas dos gregos, pois afirmava que se poderia chegar a uma grandeza tão pequena quanto qualquer outra dada, mas não propunha ir até o infinito para de fato atingir um limite, pois nessa época não se tinha essa noção.

Arquimedes também deu um importante passo para a construção do limite, pois ele usou um conceito relativo a limites: indivisíveis – quantidades infinitamente pequenas. Nas suas demonstrações rigorosas das fórmulas para certas áreas e volumes, ele encontrou várias séries infinitas e não possuindo o conceito de limite propriamente dito, inventou argumentos muito engenhosos chamados de "redução ao absurdo duplo", que, na verdade, incorporam alguns detalhes técnicos do que agora chamamos de limites (THOMAS, 2002). Baron (1985b) comenta que de todos os matemáticos gregos, Arquimedes foi o que mais se destacou na aplicação da matemática a problemas físicos, devido a isso, se tornou um modelo ideal no final do século XVI.

Muitos dos problemas e paradoxos encontrados pelos gregos foram estudados por filósofos e matemáticos por vários séculos. Porém, somente a partir do século XV encontramos novamente registros do desenvolvimento do Cálculo. Os problemas envolvendo infinitesimais eram bem populares nessa época, sendo discutidos aproximadamente até o início do século XX. Alguns estudiosos percebiam a falta de algum conceito para seus estudos e demonstrações se tornarem mais rigorosas, mas não conseguiam definir precisamente o que era. Boyer (1949) destaca que a tendência que mais prendeu os matemáticos por quase dois séculos para a base lógica do Cálculo foi a tentativa de resolver problemas usando

---

[1] Originalmente *infinitésimo* significava $1/\infty$ ou "a unidade dividida pelo infinito", uma quantidade infinitamente pequena. Em linhas gerais, um *infinitésimo* e considerado uma magnitude não nula menor do que qualquer outra magnitude não nula da mesma classe (BERTATO; D'OTTAVIANO, 2012, p.1).

.

métodos geométricos, em vez de aritméticos, como concepção fundamental. No entanto, embora hoje a base do Cálculo seja aritmética, esta resultou das sugestões extraídas da geometria. Então, a seguir, descreveremos algumas contribuições e passos dados por alguns estudiosos a respeito do conceito de limite nessas concepções.

Os procedimentos substituídos por Simon Stevin (1548-1620) para o método da exaustão constituíram um passo marcante para o conceito de limite. Ele analisava a Matemática normalmente para fins práticos, e de acordo com Baron (1985b), assim como Arquimedes, se interessou pelo problema da determinação de centros de gravidade, desse modo, dando o primeiro passo radical para modificar a estrutura da demonstração de Arquimedes. Apesar de manter o método de exaustão, em sua demonstração o elemento de redução era aos poucos substituído pela passagem direta ao limite.

Luca Valerio (1552-1618) usava métodos comparáveis aos de Arquimedes, porém, tentou evitar a "redução ao absurdo duplo" do método de exaustão, fazendo uma passagem direta ao limite. Boyer (1949) informa que foi Valério que de certa forma antecipou o conceito de limite, na forma geométrica.

Johann Kepler (1571-1630), segundo Baron (1985b), foi um dos primeiros a abandonar a estrutura de demonstração introduzida por Arquimedes em troca dos indivisíveis, mas não utilizou o mesmo método de Valério. Kepler, aplicou suas ideias no cálculo de áreas e volumes, utilizando a noção de que eram compostos de uma quantidade infinita de retas ou planos, conforme a descrição a seguir.

> Ele considerava o círculo como um polígono regular com um número infinito de lados, e sua área vista como composta de triângulos infinitesimais dos quais os lados do polígono eram as bases e o centro do círculo o vértice. A totalidade destes foi então dada por metade do produto do perímetro e o apótema (ou raio). (BOYER, 1949, p.108, tradução nossa).

Também Eves (2011) diz que, Kepler observou que os incrementos de uma função se tornam infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximo ou de mínimo comum.

Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667), na busca de uma resolução para uma série infinita de trissecção de um ângulo, aceitou pela primeira vez na história da matemática, a existência de um limite, ele disse que, “o término de uma progressão é o fim da série de que a progressão não alcança, mesmo que continue até ao infinito, mas que pode aproximar-se mais perto do que por qualquer intervalo dado” (BOYER, 1949, p.137, tradução nossa).

Já Bonaventura Cavalieri (1598-1647), “transformou o uso da reta e de superfície ‘indivisíveis’ num conjunto poderoso de técnicas para comparar áreas e volumes” (BARON, 1985b, p.12). Cavalieri,

> Concebia uma superfície como composta por um número indefinido de linhas paralelas equidistantes e um sólido como composto de planos paralelos equidistantes, sendo estes elementos designados os indivisíveis de superfície e de volume, respectivamente. (BOYER, 1949, p.117, tradução nossa).

Porém, ele em nenhum ponto em seus livros explicou precisamente o que entendia pela palavra indivisível - que empregou para caracterizar os elementos infinitesimais utilizados em seu método.

Pierre Fermat (1601-1665) encontrou um processo para determinar pontos de máximo ou de mínimo de uma função, observados por Kepler. Fermat também,

> descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua ideia consistia em achar a subtangente relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo. A ideia de tangente usada pelo método é a de posição limite de uma secante quando os dois pontos de intersecção com a curva tendem a coincidir (EVES, 2011, p. 430).

Além disso, é atribuído a Fermat, à invenção do processo que atualmente chamamos de diferenciação.

Apesar de muitos rejeitarem o uso dos indivisíveis, proposto por Cavalieri, Eves (2011, p. 395) afirma que Gilles Personne de Roberval (1602-1675), “empregou com sucesso o método dos indivisíveis para determinar muitas áreas, volumes e centroides”. Ele também mostrou uma notável flexibilidade, utilizando vários elementos infinitesimais, tais como triângulos, paralelogramos, paralelepípedos, cilindros e cascas cilíndricas concêntricas. Em tudo isso, a ideia de limites está implícita, mas está oculta sob a terminologia de seu método de indivisíveis. Boyer (1949) informa que, Roberval parece ter trabalhado no seu método dos indivisíveis entre os anos de 1628 e 1634, isto é, apenas alguns anos após que Gregorie de St. Vincent e Cavalieri haviam desenvolvido seus trabalhos e antes que estes tivessem publicado algo. A aparência quase simultânea destes procedimentos indica quão disseminado era a tendência para considerações infinitesimais durante o início século XVII.

Evangelista Torricelli (1608-1647) se encantava com problemas envolvendo infinitésimos. Um exemplo disso, é que em seu trabalho *De dimensione parabolae,* deu vinte e uma provas diferentes da quadratura da parábola, em dez destas a proposição é estabelecida pelo método dos antigos (exaustão), e nas outras onze, pela nova geometria dos indivisíveis. Torricelli superou de longe seu mestre Cavalieri na flexibilidade e perspicácia da sua utilização do método dos indivisíveis em fazer novas descobertas. Um dos novos resultados que lhe agradava grandemente foi a determinação, de que o volume de um sólido infinitamente longo, obtido através da rotação em torno da assíntota de uma hipérbole equilátera, era finito. Torricelli acreditava que ele foi o primeiro ao descobrir que uma figura com dimensões infinitas poderia ter uma magnitude finita; mas a este respeito ele tinha sido antecipado, provavelmente por Fermat e Roberval. (BOYER, 1949).

Embora o trabalho de Torricelli possa ter marcado um passo significativo em direção ao Cálculo, os conceitos básicos utilizados ainda estavam longe do ponto de vista moderno.

Então, depois de um século de dúvidas, definições claras foram formuladas e o Cálculo foi estabelecido sobre aritmética em vez das concepções geométricas.

O trabalho de John Wallis (1616-1703) foi uma tentativa de provocar tal aritmetização, e nesse contexto, ganhou o apoio de seu contemporâneo, James Gregory (1638-1675). Este último, em sua obra *Vera circuli et hipérbolae quadratura* de 1667, visualizou a passagem para o limite como uma operação aritmética independente, adequando como um meio para definir novos números não pertencentes aos irracionais comuns. Em conexão com esse trabalho, ele construiu polígonos circunscritos num círculo e numa hipérbole e mostrou que, dobrando o número de lados destes, séries convergentes eram obtidas nas quais a diferença se tornava cada vez menor.

Essas séries, consequentemente, tinha um limite, que, por conseguinte, iria dar a área da figura curvilínea (BOYER, 1949).

Boyer (1949, p.169, tradução nossa) afirma que, "Wallis chegou mais perto do conceito de limite do que qualquer outro antecessor de Newton". A forma que Wallis fez a transição da geometria de linhas para a aritmética dos números foi quando fez uma prova de que a área de um triângulo é o produto da base pela metade da altura. O atual símbolo de infinito (∞), muito utilizado no Cálculo, também foi introduzido, de acordo com Eves (2011), por Wallis e, além disso, ele foi o primeiro a explicar o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários.

René de Sluse (1622-1685) inventou um método ainda mais complicado que o de Fermat para obter tangentes a curvas, chegando, em 1653, a um processo para achar a tangente a uma curva da forma, $f(x, y) = 0$, sendo f um polinômio. Esse processo foi publicado em 1673 e pode ser enunciado como segue:

> a subtangente será o quociente obtido colocando no numerador todos os termos contendo y, cada um multiplicado pelo expoente da potência y que nele aparece, e colocando em denominador todos os termos contendo x, cada um multiplicando pelo expoente da potência de x que nele aparece depois dividindo por x. (BOYER, 2009, p.257).

Isaac Barrow (1630-1677), de acordo com Moares et al (2013), produziu contribuições significativas para o desenvolvimento posterior do Cálculo, em especial com a criação do método para determinação de tangentes a curvas, pelo uso do triângulo diferencial denominado também triângulo de Barrow. Nesse método, Eves (2011) relata que ele chega a razão a/e, que é nosso moderno dy/dx, assim, esse procedimento pode facilmente tornar-se rigoroso com o uso da teoria dos limites. Apesar da falta de clareza e precisão em seus pontos de vista sobre o contínuo, os resultados geométricos de Barrow representam uma notável aproximação aos métodos do Cálculo. Eles incluem não só muitos teoremas sobre quadraturas e tangentes, mas também, talvez o mais claro reconhecimento até então da importância da relação entre estes dois tipos de problemas (BOYER, 1949).

O aparecimento de várias regras e fórmulas, como citadas anteriormente, indicavam que logo após a metade do século XVII, devido as considerações infinitesimais serem tão amplamente empregadas e desenvolvidas, chegou ao ponto que uma notação adequada e uma unificação analítica de um algoritmo estava prestes a aparecer.

Um dos pesquisadores que ajudou grandemente neste aparecimento foi Isaac Newton (1642-1727), que utilizou o infinitésimo em seu Cálculo - baseado no método das fluentes e fluxões, em que esses correspondem atualmente ao que denominamos funções e derivadas. Porém, segundo Zuchi (2005), Newton não usou o limite no processo que utilizou em seus cálculos. Em contrapartida, ele foi o primeiro a reconhecer a necessidade do limite, dando uma formulação precisa sobre o que entendia sobre ele na sua obra *Principia Mathematica:*

> Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais (BOYER, 2009, p.274).

As principais contribuições ao Cálculo de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foram as notações e as fórmulas básicas para as derivadas e integrais (as quais usamos desde então) e o Teorema Fundamental do Cálculo. Com essas ferramentas poderosas, o número de curvas e sólidos para os quais derivadas e integrais podiam ser facilmente calculadas se expandiram rapidamente. Problemas desafiadores de geometria foram resolvidos; mais e mais aplicações do Cálculo à ciência, principalmente física e astronomia, foram descobertas; e novos campos da matemática, especialmente equações diferenciais e o cálculo de variações, foram criados.

Após a difusão das ideias relativas ao Cálculo proposto por Newton e também por Leibniz, houveram muitas críticas, pois existia uma falta de consistência em seus fundamentos. Um dos primeiros críticos foi George Berkeley (1685-1753), questionando que os princípios utilizados necessitavam de maior clareza e segurança. Bertato e D'ottaviano (2009) complementam que, Berkeley ataca fortemente a lógica do método das fluxões, argumentando que o infinitésimo de Newton era autocontraditório, pois inicialmente o tratava como uma grandeza finita e, em um estágio posterior, como zero, conforme sua conveniência.

Essa controvérsia de Berkeley e Newton sobre o método das fluxões adquiriu uma grande magnitude, fazendo alguns matemáticos a se posicionarem a respeito dele. Nessas discussões, foi sugerido o conceito de limite como solução para os problemas levantados. Um dos primeiros a se posicionar foi Benjamin Robins (1707-1751), dando a seguinte explicação sobre o que entendia por limite: “...nós... definimos uma grandeza última como sendo o limite do qual uma grandeza variável pode aproximar-se em qualquer grau de proximidade, embora ela nunca possa tornar-se absolutamente igual a ele” (BARON, 1985c, p.27).

Outro importante matemático que se manifestou foi Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), que defendeu o uso da teoria dos limites para fundamentar as bases do Cálculo. Ele explicou o conceito de limite da seguinte forma:

> Limite substantivo (matemática). Diz-se que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável (BARON, 1985c, p. 28).

Após essa definição feita por d’Alembert, o conceito de limite foi, durante cerca de mais de meio século, uma das maneiras de acertar os fundamentos do Cálculo. Porém, esta não foi aceita como solução, já que necessitava de maior clareza no conceito de variável (BARON, 1985c).

Simon L'Huilier (1750-1840) ganhou um prêmio da Academia de Ciência de Berlim, por escrever um ensaio *Exposition élémentarire des príncipes des calculs* spérieurs, publicado em 1795, que explicava a teoria do "infinitamente pequeno" e do "infinitamente grande". Nesse trabalho L'Huilier propôs mostrar que o método de exaustão, usado pelos antigos, convenientemente estendido, era suficiente para estabelecer com clareza os princípios no novo Cálculo. De acordo com essa proposta, ele modificou o método de exaustão, para interpretá-lo em termos do limite. Porém, apesar de receber o prêmio, sua teoria não foi considerada como uma solução viável.

Assim, a indecisão quanto a verdadeira base do Cálculo, permanecia tão grave como antes.

Como resultado, surgiu em 1797, o que foi talvez a mais famosa tentativa de esclarecer as dificuldades da situação: o *Reflexexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, escrito por Lazare N. M. Carnot (1753-1823). O trabalho de Carnot foi notável em termos de popularidade, aparecendo em inúmeras edições e em várias línguas desde aquele tempo até muito recentemente (BOYER, 1949). Tendo em vista a falta de clareza e uniformidade nas então atuais exposições do Cálculo, Carnot desejava fazer uma teoria rigidamente precisa. Ele propôs assim, uma tentativa popular de explicar o papel do limite no Cálculo como "a compensação dos erros", mas não explicou como esses erros se balançariam sempre perfeitamente. Logo, embora seu trabalho tenha sido amplamente lido, não se pode dizer que levava a uma compreensão mais clara das dificuldades inerentes àquela época.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) tentou definir a convergência de uma série infinita, porém, sem usar limites, então ele afirmou que qualquer função poderia ser escrita como uma de suas séries, e não mencionou a convergência ou divergência dessa série.

Um dos grandes nomes do cálculo diferencial é o de Bernhard Bolzano (1781-1848), que deu base ao cálculo infinitesimal. Uma das suas grandes participações é o Teorema do Valor Intermediário ou conhecido como o Teorema de Bolzano. No primeiro estudo cuidadoso e rigoroso das diferenças entre curvas contínuas e descontínuas e funções, ele olhou além da noção intuitiva da ausência de buracos e quebras e encontrou os conceitos mais fundamentais os quais expressamos hoje em termos de limites. Bolzano foi um dos pioneiros com relação a um maior rigor nas concepções fundamentais do Cálculo - em sua aritmetização e no cuidadoso estudo do infinito.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) procurava por uma exposição clara e rigorosamente correta do Cálculo para apresentar aos seus estudantes de engenharia na *École polytechnique* em Paris (THOMAS, 2002) e, com base no conceito de limite de d'Alembert, ele conseguiu dar uma definição mais clara de limite:

> Chamamos quantidade variável aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade constante aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado limite de todos os outros. Assim, por exemplo, a área do círculo é o limite para o qual convergem as áreas de todos os polígonos regulares inscritos, se o número de seus lados aumentar cada vez mais (...) indicaremos o limite para o qual

> converge determinada variável pela abreviação "lim" escrita antes da variável em questão (BARON, 1985c, p. 46).

A diferença da definição de limite proposto por Robins e d'Alembert com relação à de Cauchy reside no fato de Cauchy não excluir a possibilidade de a variável alcançar seu limite. Contudo, Thomas (2002) comenta que ele perdeu alguns dos detalhes técnicos, especialmente na aplicação da sua definição de limite a funções contínuas e à convergência de certas séries infinitas.

A participação de Niels Henrik Abel (1802-1829) na história do limite se da pelos estudos dos problemas não intuitivos da definição de limite propostos por Cauchy, porém seu trabalho era voltado para a área de equações algébricas.

A construção, fundamentação e consolidação do cálculo diferencial e integral só seria possível com uma constituição rigorosa de número real, e isto só ocorre na segunda metade do século XIX, com as contribuições de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Georg Cantor (1845-1918), Augustin Louis Cauchy, Richard Dedekind (1831-1916) e Karl Weirstrass (1815-1897) (ZUCHI, 2005).

Então, com a noção de limite estabelecida por Cauchy, Weierstrass formaliza o Cálculo utilizando a linguagem de epsilons e deltas propondo a seguinte definição:

> O número L é o limite da função f(x), onde $x = x_0$ se, dado qualquer número arbitrariamente pequeno ε, outro número δ possa ser encontrado tal que para todos os valores de x diferindo de x_0 por menos que δ, o valor de f(x) diferir de L por menos que ε (BOYER, 1949, p. 287, tradução nossa).

E esta é muito similar a definição atual dos livros didáticos.

1.2 ALGUNS ESTUDIOSOS POUCO CONHECIDOS NA HSTÓRIA DO LIMITE

No estudo realizado foram encontrados alguns nomes pouco conhecidos na história do limite. Assim, a seguir apresentamos alguns desses, falando sobre sua vida e seus trabalhos realizados.

1.2.1 Luca Valerio

Luca Valerio nasceu em Nápoles na Itália em 1552, veio de uma família nobre, estudou teologia e filosofia, mas seu principal interesse era a matemática. Ele desenvolveu seu trabalho nos padrões da geometria euclidiana. Há indícios que conheceu Galileu e que trocavam correspondência durante certo período.

Publicou algumas obras, as mais importantes foram *De Centro Gravitatis Solidorum* e *De Quadratura parabolae.*

Em 1604 ele publicou *De Centro Gravitatis Solidorum,* em que aplicava os métodos de Arquimedes para calcular volume e centro de gravidade de corpos sólidos. Ele utilizou ideias sobre quociente de limite, que na linguagem de hoje poderiam ser traduzidos como:

$$lim(x) = a \cdot lim(y) = b \; e \; se \; \frac{x}{y} = C \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{lim(x)}{\lim(y)} = \lim\left(\frac{x}{y}\right) = C$$

Com C, sendo uma constante.

Venturin (2007) comenta que nessa obra, apesar de continuar utilizando o método de exaustão, aos poucos Valerio estava fazendo a aproximação das figuras inscritas e circunscritas com o objeto estudado diretamente, sem fazer uso da prova por dupla redução ao absurdo, desse modo, utilizando a ideia de limite.

Na obra *De Quadratura parabolae*, que foi publicada em 1606, Valerio empregou métodos gregos para calcular áreas de figuras planas. Assim, de certa forma, ele resgatou conceitos utilizados na Grécia Antiga e os aprimorou.

Luca Valerio faleceu no dia 17 de janeiro de 1618, em Roma, e pode ser considerado como uma das figuras mais importantes do século XVI, inclusive Galileu o descreveu como "o maior geômetra", "o maior Arquimedes" da época (BOYER, 1949, p.112, tradução nossa).

1.2.2 Gregoire de Saint Vincent

Gregoire de Saint Vincent nasceu em Gante na Bélgica em 1584 e faleceu em 1667. Não se sabe muito sobre sua vida particular, apenas que além da matemática, também estudou filosofia e teologia.

De acordo com Eves (2011), foi um eminente quadrador do círculo do século XVII e aplicou métodos do Pré-Cálculo a vários problemas de quadratura. Conforme O'Connor e Robertson (2010), as primeiras investigações de Saint-Vincent eram relacionadas a reflexão e refração. Um dos problemas que surgiu foi a trisecção de um ângulo, e em busca de maneiras de obter uma trissecção, se deparou com a série:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ ...$$

Essa série, segundo o matemático era igual a $\frac{2}{3}$, a qual ele chamou de terminal. O'Connor e Robertson (2010) destacam que, em contraste com a matemática grega clássica, Saint-Vincent aceita pela primeira vez na história da matemática, a existência de um limite. Enquanto Euclides escreve que "um vai obter finalmente algo menor do que a menor quantidade", Gregoire vai mais longe e corajosamente escreve: "a quantidade será esgotada".

O estudioso reconheceu também que o paradoxo de Aquiles poderia ser explicado em termos de limite de uma série infinita. Ele afirmou que as velocidades de Aquiles e a tartaruga deveriam ter uma proporção e calculadas pela progressão geométrica no ponto que as posições dos dois coincidiriam. No entanto, não conseguiu reconhecer, neste contexto, que a questão de Zenão não era *quando* ou *onde* Aquiles iria ultrapassar a tartaruga, mas sim, como poderia fazê-lo. Este apelo no paradoxo era sem dúvida o principal obstáculo no desenvolvimento do Cálculo em termos de limite de uma sequência infinita. E, embora Gregorie não tenha se expressado com rigor e clareza como foram características do século XIX, o seu trabalho é considerado a primeira tentativa explícita para formular de uma forma coerente - embora ainda na terminologia geométrica – o conceito de limite (BOYER, 1949).

Saint-Vicent foi o primeiro a desenvolver a teoria de série geométrica; elaborou a teoria de seções cônicas; e ele juntamente com Leibniz, Descartes e Fermat são considerados os fundadores da Geometria Analítica.

Boyer (1949) afirma que não pode haver dúvida de que a obra de Gregoire de Saint Vincent exerceu uma forte influência em muitos dos matemáticos de seu tempo, além disso, como foi professor em várias escolas jesuítas, alguns de seus discípulos como, Paul Guldin (1577-1643), Andreas Tacquet (1612-1660), Jean-Charles della Faille (1597-1652), e outros, usaram considerações infinitesimais, particularmente no problema então popular de determinar os centros de gravidade.

1.2.3 George Berkeley

George Berkeley nasceu em Dysert, no condado de Kilkenny, Irlanda, em 12 de março de 1685 e morreu em Oxford na Inglaterra, em 14 de janeiro de 1753. Seu interesse pela matemática se manifestou desde sua juventude, prova disso, são seus cadernos de anotações, escritos entre 1706 e 1708 que se tornaram conhecidos como *Philosophical commentaries* (Comentários filosóficos). Conforme Calazans (2010), neles se encontram afirmações que apresentam uma postura crítica tanto com relação à consagrada matemática clássica, quanto com relação ao novo Cálculo infinitesimal.

Ele também escreveu várias obras criticando as ideias do Cálculo, a mais fundamentada é *The Analyst* (O Analista), publicada em 1734, onde discute à falta de fundamentos rigorosos ao método das fluxões de Newton. Berkeley reconheceu a precisão das fórmulas de Newton e a exatidão das suas aplicações abrangentes em física e astronomia, porém, criticou as quantidades infinitamente pequenas e os incrementos imperceptíveis dos fundamentos das derivadas. Berkeley,

> Ataca fortemente a *lógica* do método de fluxões, ou cálculo infinitesimal, argumentando que o infinitésimo de Newton era autocontraditório: o infinitésimo era um zero-incremento, uma quantidade finita de nenhum tamanho, tratada por Newton, em um estágio inicial, como grandeza finita e, em estágio posterior, como zero, de acordo com a conveniência; seu efeito era mantido, mesmo depois que ele se esvaia. (BERTATO; D'OTTAVIANO, 2012, p.6).

As opiniões distintas entre Berkeley e Newton, em torno da lógica do método de fluxões, foram tão impactantes, que muitos matemáticos se sentiram forçados a se posicionar de um dos lados. Um desses foi d'Alembert, que tentou explicar as dificuldades apontadas por Berkeley em termos da ideia de limite, obtendo sucesso, pois suas explicações eram equivalentes à ideia intuitiva de limite que adotamos hoje (ÁVILA, 2006).

Dentre outras obras que devem ser citadas, relacionadas com suas críticas ao CDI introduzido por Newton, mencionamos *De motu sive de motus princípio & natura, et de causa communicationis motuum* (1721) e *Alciphron, or the minute philosopher* (1732).

Apesar de não ser considerado um matemático, Berkeley possuía um profundo conhecimento da matemática, escrevendo outros trabalhos, como: *An essay towards a new theory of vision* (1709) no qual desenvolve cuidadosos comentários sobre as relações entre geometria e a percepção visual humana, e na obra *Treatise* (1710), que é um dos mais importantes trabalhos filosóficos de Berkeley, são discutidas questões relativas a ideias abstratas e a linguagem; a natureza da aritmética e números inteiros finitos; extensão espacial e divisibilidade infinita (BERTATO; D'OTTAVIANO, 2012).

1.2.4 Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel nasceu em 1802 em Findö na Noruega. Tornou-se um matemático proficiente já na adolescência, e morreu quando tinha apenas vinte e seis anos, com tuberculose, em 1829.

De meados do século XVIII até o fim do século XIX, a matemática se desenvolveu e mudou profundamente, contando com as contribuições dos trabalhos de Abel. Segundo Eves (2011), Abel disse que desenvolveu rapidamente seus estudos, por estudar seus mestres, não seus discípulos. Em particular, ele pegou inspiração nas obras de Lagrange, Gauss e Cauchy e foi nos estudos dos problemas da definição de limite proposta por Cauchy, que está sua participação na história do limite. Ele escreveu vários artigos em áreas diversas da matemática, como, convergência de séries infinitas, integrais abelianas e funções elípticas. No entanto, a relevância de seus trabalhos teve uma notabilidade maior na área da álgebra, por exemplo, conforme Boyer (2009), ele deu a primeira prova da impossibilidade de resolver equações algébricas de quinto grau usando raízes.

Abel nunca conseguiu um cargo de professor em uma universidade, e teve pouco reconhecimento sobre seus trabalhos em vida. Porém, nos nossos estudos, encontramos que foi através de um trabalho feito por Abel sobre representação dada por uma função, que fez Weierstrass decidir a se dedicar integralmente a matemática, o que foi bem importante, visto que foi Weierstrass que formalizou o conceito de limite.

1.3 SÍNTESE DA HISTÓRIA

A noção do conceito de limite foi desenvolvida gradualmente, iniciando na era Grega, e sendo formulada precisamente apenas no século XIX. As dificuldades da sua construção se fizeram presentes nas etapas do refutamento do infinito, na crise dos incomensuráveis, na inclusão dos infinitesimais e no desenvolvimento da transparência das regras e dos fundamentos teóricos.

Em nossa experiência docente e discente, identificamos várias dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de limite. E vemos que algumas dessas dificuldades já estavam presentes no contexto histórico, tal como a dificuldade de se trabalhar com grandezas infinitesimais e com a noção do infinito (FIGUEIREDO; SABATKE; SIPLE, 2015).

Assim, no próximo capítulo apresentamos uma proposta de sequência didática desenvolvida com o propósito de amenizar tais dificuldades atualmente encontradas no Ensino Superior.

2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Foram desenvolvidas duas sequências didáticas, uma para ser aplicada na disciplina de CDI I da Graduação e outra na disciplina de Fundamentos do Cálculo na Pós-Graduação. Essas se encontram no apêndice C e no apêndice F, respectivamente.

Na sequência didática elaborada para a Graduação, o objetivo foi apresentar atividades que possibilitassem abordar o conceito de limite desde a intuição inicial até a formalização em termos de epsilons e deltas, já que seria a primeira vez que os alunos estariam tendo contato com esse conceito. Assim nas atividades dessa sequência, foram trabalhadas situações problemas, com a finalidade de que os estudantes conseguissem visualizar de uma forma mais prática a utilização do limite.

Já na sequência didática da Pós-Graduação, o intuito foi trabalhar com situações problemas que possibilitassem a abordagem do conceito de limite por sequências, haja vista que o objetivo da disciplina, nesse nível, é discutir os fundamentos do Cálculo e a relação dessa com o Ensino Básico.

Assim, cada sequência didática será apresentada separadamente a seguir.

2.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE À PRIORI DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA GRADUAÇÃO

Neste tópico é apresentada a sequência didática proposta para turma de CDI I, os objetivos de cada atividade, e também a análise a priori de todas as questões.

Na análise a priori encontram-se as estratégias de resoluções esperadas, baseadas em resultados já obtidos em outras pesquisas e na nossa experiência como discente e docente.

2.1.1 Primeiro Momento – Questionário Inicial

Antes dos alunos iniciarem as atividades, foi desenvolvido um questionário (Apêndice B), que contém perguntas relacionadas ao estudante, como por exemplo, qual o seu curso, se já cursou alguma vez a disciplina, se dedica tempo de estudo e como costuma sanar suas dúvidas com relação ao conteúdo.

O objetivo desse questionário é identificar o perfil dos alunos e das turmas em que serão aplicadas a sequência didática.

No Quadro 1 está o questionário:

Quadro 1 – Questionário da Graduação

1. Qual é o seu curso? ________________________
2. Já cursou esta disciplina (CDI-I)?
( ) não ( ) sim quantas vezes _________
*3.*Quantas horas semanais de estudo você dedica a essa disciplina?________
4. Quando você não compreende o conteúdo você procura sanar suas dúvidas com:
( ) professor ( ) monitor ( ) colegas ( ) outros ________________
5. Qual a sua idade? __________________________
6. Atualmente você está trabalhando?
( ) não ( ) sim

Fonte: Produção da autora

2.1.2 Segundo Momento – Atividade 1: Investigação Preliminar

Após os alunos responderem o questionário, será solicitado que façam a Atividade 1 (Apêndice C) em equipes, composta de cinco perguntas sobre limite, que foram adapatadas do trabalho: “Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction” (DUCA; HALL; KEENE, 2014).

O objetivo desta investigação é de identificar as intuições iniciais que os alunos têm a respeito do conceito de limite.

A atividade 1 está apresentada no Quadro 2.

Quadro 2 – Atividade 1 da Graduação

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende? *2.* Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite". *3.* Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1? *4.* Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a seguinte expressão: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = L$ Tente descrever o que ela significa. *5.* Como você poderia resolver a expressão dada na questão 4?

Fonte: Produção da autora

A análise a priori dessa atividade foi feita considerando cada pergunta separadamente. Nesta análise vamos levar em consideração também os resultados já obtidos na aplicação de perguntas de um questionário bem semelhante em uma universidade nos Estados Unidos durante o curso chamado, "Cálculo para futuros professores do Ensino Fundamental" (DUCA; HALL; KEENE, 2014).

1. Espera-se que os alunos respondam algo de como usam a palavra limite no seu cotidiano, como por exemplo, se referindo a restrições, fronteiras, e/ou o quão alto/rápido/distante alguma coisa possa ir.

2. Aqui, novamente, acredita-se que os estudantes escrevam questões que usam no seu dia a dia com a palavra limite, compreendendo a palavra limite como limitação, como por exemplo:
- "O limite de velocidade é de 80km/h";
- "Seu limite de crédito é de R$1000,00";

Ou, escrever alguma frase usando algum conhecimento prévio do limite do Cálculo, como:
- "O limite da função *f(x)* tende para *L*, quando *x* tende para um *a*".

3. Levando em consideração que alguns alunos da UDESC já têm algum contato inicial com o Cálculo e que outros que ainda não tiveram, podem ocorrer as seguintes respostas:
- Relacionar com o gráfico;
- Máximos e mínimos (derivadas);
- Assíntotas - suas declarações podem indicar a ideia de que uma curva se aproximando de uma linha nunca vai alcançá-la.

4. O aluno poderá identificar a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, e responder que:
- O limite da função $f(x)$ quando x *tende* a *2*, é igual a L;
- O número L é o limite de $f(x)$, quando x *está se aproximando* a *2*;
- Os valores de $f(x)$ ficarão *próximos* de L sempre que x *aproxima-se* de *2*;

Ou tentar explicar algebricamente, realizando as devidas simplificações, com valor numérico.

5. Inicialmente acredita-se que os alunos possam tentar substituir o x por *2*. E depois, verificando que chegam a uma indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$ podem tentar simplificar a expressão, visto que já estudaram sobre produtos notáveis nessa disciplina. Com a simplificação ficaria:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$$

e substituindo o *2* depois da simplificação, encontrariam o limite igual a *4*.

Também é possível que os alunos façam a conta do limite, sem colocar sua notação.

2.1.3 Terceiro Momento – Atividade 2: Área do Círculo

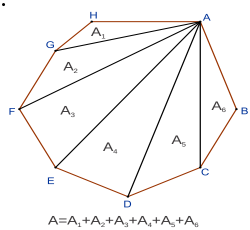
Esta atividade (Apêndice C) será realizada novamente em equipes, para que os alunos possam interagir uns com os outros. Pretende-se que os alunos atinjam os seguintes objetivos:

- Perceber como era o método utilizado pelos gregos para fazer o cálculo de áreas;
- Verificar a diferença entre polígonos - regulares e não regulares;
- Construir a ideia geométrica de limite.

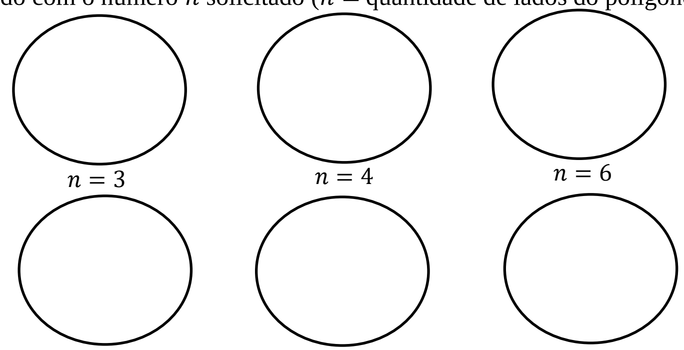
Nos quadros 3 e 4 estão a segunda atividade proposta aos alunos.

Quadro 3 – Parte 1 da Atividade 2 da Graduação

As origens do cálculo remontam à Grécia Antiga, pelo menos 2500 anos atrás. Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na figura abaixo e, em seguida, somando as áreas obtidas.



Entretanto, é muito mais difícil determinar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com uma sequência de polígonos, aumentando-se o número de lados desses polígonos.
Assim, utilizando esse método, inscreva nos círculos abaixo, os polígonos de acordo com o número n solicitado ($n =$ quantidade de lados do polígono):



$n = 3$ $n = 4$ $n = 6$

$n = 8$ $n = 10$ $n = 12$

Fonte: Produção da autora

Quadro 4 – Parte 2 da Atividade 2 da Graduação

Responda: *1.* Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos n ? *2.* Para encontrar a melhor aproximação para a área do círculo é suficiente apenas aumentar a quantidade dos lados do polígono? Justifique.

Fonte: Produção da autora

A análise a priori dessa atividade será feita considerando cada pergunta:

1. Se os alunos com o aumento do n, desenharem polígonos que aparentam ter uma área maior, vão perceber que a área A_n aumenta. Porém, podem não relacionar o aumento de n com a proximidade da área do círculo.
A resposta esperada seria que, à medida que n cresce, a área do polígono se aproxima da área do círculo, ou seja, fazendo n crescer indefinidamente, a área do polígono tende a um limite e este é definido pela área do círculo.

2. Pode acontecer que na construção dos polígonos inscritos os alunos não percebam que à escolha do polígono de lado n faz diferença e respondam que é suficiente apenas aumentar a quantidade de lados.
O esperado seria que os alunos percebessem que não basta à escolha de qualquer polígono de lado n, esse deve ser regular, pois ocupa a maior área dentro da circunferência. Pois por exemplo, pode-se inscrever um polígono de 20 lados ocupando apenas a parte superior da circunferência, tendo uma área menor que polígono regular de 20 lados ou até mesmo de outros polígonos regulares com menos quantidade de lados.

2.1.4 Quarto Momento – Atividade 3: Ideia Intuitiva de Limite

Nessa atividade (Apêndice C) será proposto inicialmente um problema físico envolvendo uma equação de segundo grau - conteúdo já visto no Ensino Médio e, na segunda parte da atividade, será proposto que os alunos verifiquem o que acontece com uma função quando ela tem uma descontinuidade. A realização desses problemas será feita em equipes e visa atingir os seguintes objetivos:

- Perceber que com problemas comuns é possível identificar a ideia de limite;
- Verificar o que acontece com as funções quando se atribui valores à esquerda e à direita de um número;
- Visualizar graficamente o que acontece com a função;
- Desenvolver a ideia intuitiva de limite.

Após os alunos finalizarem esta atividade, será feita uma discussão com toda a turma, pedindo para comentarem quais resultados chegaram. E então, a professora da turma conduzirá a formalização da ideia intuitiva.

No Quadro 5 se encontra a atividade proposta:

Quadro 5 – Atividade 3 da Graduação

1. Um projétil é arremessado verticalmente de uma altura s_0, dada em metros, com uma velocidade inicial v_0, dada em m/s, sabe-se que a trajetória descrita é uma parábola representada pela função $s(t) = -t^2 + v_0 t + s_0$ *a.* Sabendo que um projétil é lançado do solo (e, portanto s_0=0,) e que leva *6* segundos para voltar a atingir o solo, use a equação acima para determinar sua velocidade inicial. *b.* Examine o comportamento da função quando o tempo se aproxima de *3*. *c.* Desenhe o gráfico da função $s(t)$. *2.* Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. O que acontece com os valores de f quando x está próximo de *2*? Desenhe o gráfico da função

Fonte: Produção da autora

A análise a priori desse problema será feita considerando cada questão, colocando a tarefa, a estratégia de resolução e possíveis resultados que os alunos podem chegar.

1. a.
Tarefa: Encontrar o valor da velocidade inicial

Estratégia de resolução: Substituir t por *6* na equação $s(t)$ e igualar a zero, já que o projétil volta a atingir o solo nesse tempo:

$$s(t) = -t^2 + v_0 t + s_0$$
$$s(6) = 0 \; e \; s_0 = 0$$
$$s(6) = -6^2 + v_0 6 + 0 = 0$$
$$36 + v_0 6 = 0$$
$$v_0 = 6m/s$$

Pode acontecer de os alunos errarem em algum passo desse cálculo e chegar a uma velocidade diferente.

b.
Tarefa: Examinar o comportamento da função $s(t)$ quando o tempo se aproxima de 3.

Estratégia de resolução: Substituir o valor da velocidade inicial, encontrada da questão (*a*), na função $s(t)$ para encontrar sua lei de formação, que será:

$$s(t) = -t^2 + 6t$$

Então atribuindo valores para t, próximos de *3* encontram-se os valores respectivos para $s(t)$. Com o auxílio de uma tabela, pode-se ter uma visualização melhor do que acontece, por exemplo:

Valores menores que *3*:

t	$s(t)$
2,5	8,75
2,9	8,99
2,99	8,9999

Valores maiores que *3*:

t	$s(t)$
3,5	8,75
3,1	8,99
3,01	8,9999

E assim chega-se à conclusão que quando t se aproxima de *3*, pela esquerda ou direita, $s(t)$ se aproxima de *9*. Aqui, pode acontecer de o aluno aproximar por valores maiores e menores que *3*, mas também pode ocorrer que alguns apenas considerem valores maiores do que *3* ou só menores do que *3*. E, ainda, podem acabar substituindo o valor de t por

3, não entendendo o significado de "próximo", como se pede no enunciado da questão.

A resposta esperada é que quando o tempo se aproxima pela direita ou pela esquerda de *3*, esses valores sendo tão perto quanto se queira, mas não igual a *3*, tem-se que $s(t)$ se aproxima de *9*.

c.
Tarefa: Desenhar o gráfico

Estratégias de resolução:
i. Usar artifícios aprendidos no Ensino Médio para a construção de gráficos, como achar o ponto de máximo ou mínimo, verificar onde se localizam as raízes, entre outros, e então plotar o gráfico.

ii. Construir uma tabela para alguns valores de t e $s(t)$ respectivamente, plotar esses pontos no gráfico, e então traçar a curva que os liga.

Nessas duas situações pode ser que os alunos não reflitam a situação do problema e esqueçam-se de no desenho restringir o domínio da função entre *0* e *6*, já que essa é a trajetória que o projétil faz.

2.
Tarefa: Analisar o que acontece com a função quando x se aproxima de *2* e desenhar o gráfico.

Estratégia de resolução: Atribuir valores para x, próximos de *2*, a esquerda e direita, e verificar que a função tende para *4*. E desenhar o gráfico.

Pode ocorrer de os alunos analisarem o que acontece com a função apenas por um dos lados (esquerdo ou direito), mas mesmo se fizerem isso, encontrarão a resposta tendendo a *4*.
Outra possibilidade é que o aluno possa não saber o que aconteça com a função, ou pode dizer que não existe resposta, já que não é possível calcular $f(2)$.

No desenho do gráfico pode acontecer de os alunos desenharem a reta contínua, pois podem ter simplificado a função,

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$, mas não colocarem uma bola aberta no ponto $(2,4)$, ponto em que a função inicial não está definida.

2.1.5 Quinto Momento - Atividade 4: Perspectiva Salarial

Após a realização das atividades 1, 2 e 3, será proposta esta atividade (Apêndice C), realizada em equipes, com os seguintes objetivos:

- Utilizar e relembrar conceitos já vistos no Ensino Médio, como função afim, inequação e construção de gráfico;
- Construir uma relação entre os deltas e epsilons da definição formal de limite.

O Quadro 6 apresenta a quarta atividade:

Quadro 6 – Atividade 4 da Graduação

1. O salário dos funcionários de uma empresa é composto de uma parte fixa no valor de R$ 900,00, acrescidos de mais uma parte variável (comissão) de 10% sobre o valor de suas vendas no mês. *Responda:* *a.* Se um funcionário recebeu o pagamento de R$ 1400,00, qual foi o valor adquirido com as vendas desse empregado? *b.* Suponha que esse mesmo funcionário deseja receber no mês seguinte um salário entre R$ 1200,00 e R$ 1600,00, qual será o valor que deverá arrecadar com suas vendas? *c.* Refaça a questão (b) supondo que este funcionário planeja receber, no mês seguinte, o pagamento no intervalo de R$ 1300,00 à R$ 1500,00. *d.* Represente graficamente as situações dos itens (a, b, c) e responda: O que acontece com a variação do valor arrecadado dos projetos quando o pagamento está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 1400,00? *e.* Agora, suponha que esse funcionário deseje receber mensalmente, em torno de R$ 1400,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno da resposta encontrada na letra (a)? Você pode denotar a variação do

Fonte: Produção da autora

A análise a priori desse problema será feita considerando cada item e também se baseando nas considerações feitas no trabalho de Zuchi (2005).

1. a.
Tarefa: Encontrar valor adquirido com as vendas dos projetos correspondente ao salário de R$1400,00.

Estratégia de resolução:

i. Lei de formação da função linear:
Os alunos podem representar, matematicamente, a situação dada no problema por:

$$s\ (v)\ =\ 900\ +\ 0{,}1v$$

Para expressar essa função podem optar também por $f(x) = 900 + 0{,}1x$ ou $y = 900\ +\ 0{,}1v$, já que geralmente estão mais acostumados com essas notações. E também podem expressar o 0,1 por $\frac{10}{100}$.
Então, para encontrar o valor das vendas dos projetos (v), substituem $s\ (v)$ por 1400, e concluem que $v = 5000$.

ii. Raciocínio lógico
Sem usar função os alunos podem fazer alguns cálculos e chegar ao resultado do valor das vendas de R$5000,00.

b. e c.
Tarefa: Encontrar a variação do valor dos projetos, considerando os salários dados na questão

Estratégias de Resolução:

i. Através de inequações*:*
Resolvendo as inequações:
b. $1200 < s(v) < 1400$
c. $1300 < s(v) < 1500$

Aqui, caso a equipe não tenha encontrado na questão anterior a lei da função, terá que fazê-la.

ii. Através dos extremos:
Resolvendo as equações:
b. $s(v) = 1200$ e $s(v) = 1400$
c. $s(v) = 1300$ e $s(v) = 1500$

Nesta opção os alunos podem usar as mesmas estratégias citadas na questão a.

Usando a estratégia i. ou ii. serão obtidas as respostas:
b. $v = 3000$ e $v = 7000$
c. $v = 4000$ e $v = 6000$

Os alunos poderão dar a resposta utilizando o raciocínio de intervalo, $3000 \leq v \leq 7000 \ e \ 4000 \leq v \leq 6000$, ou representar a resposta como, por exemplo, "o valor que o funcionário deverá arrecadar com as vendas é *entre* 3000 e 7000, e *entre* 4000 e 6000".

d.
Tarefa: Desenhar e interpretar o gráfico dos itens (*a*, *b*, *c*).

Estratégias de Resolução:

i. Representação da função linear:
Após esboçar o gráfico da função linear $s\ (v) \ = \ 900 + \ 0{,}1v$ e concluir, gráfica e algebricamente, que os valores estão cada vez mais próximos de $v = 5000$ ou que o raio de variação de v está cada vez menor (ou próximo de zero).

ii. Representação dos pontos:
Representar apenas os pontos $P_1(5000{,}1400)$, $P_2(3000{,}1200)$, $P_3(7000{,}1600)$, $P_4(4000{,}1300)$, $P_5(6000, 1500)$, observando o que ocorre nos eixos das ordenadas e das abscissas.

e.
Tarefa: Encontrar a relação entre o δ e ε

Estratégias de Resolução:
i. Raciocínio lógico:

Com relação ao raciocínio utilizado para responder as questões anteriores, as equipes poderão dizer que quanto menor o erro mais próximo de 5000 estará o valor arrecadado com os projetos. Nesse caso, os alunos utilizarão uma linguagem natural sem uma preocupação com a formalização matemática da questão.

ii. Inequações:
Através do conhecimento de inequações modulares pode-se estabelecer o seguinte procedimento:

$$1400 - \varepsilon \leq s(v) \leq 1400 + \varepsilon$$
$$1400 - \varepsilon \leq 900 \ + \ 0{,}1v \ \leq 1400 + \varepsilon$$
$$500 - \varepsilon \leq 0{,}1v \ \leq 500 + \varepsilon$$
$$5000 - 10\varepsilon \leq v \ \leq 5000 + 10\varepsilon \ \ [1]$$

e,

$$5000 - \delta \leq v \ \leq 5000 + \delta \ [2]$$

Comparando o desenvolvimento em [1] e [2] pode-se concluir que $\delta = 10\varepsilon$.

iii. Representação gráfica:
Esboçar a função $s\ (v) \ = \ 900 \ + \ 0{,}1v$, representando os pontos: P_1(5000- δ,1400- ε) e P_2(5000+ δ,1400+ ε), concluindo a questão, geometricamente.

2.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PÓS-GRADUAÇÃO

Nesta seção será apresentada a sequência didática proposta para a turma de Fundamentos do Cálculo, do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias. Aqui apresentaremos as adaptações que foram realizadas na sequência da Graduação, bem como os objetivos, organização e a análise a priori das atividades.

2.2.1 Primeiro momento – Questionário Inicial

O questionário inicial (Apêndice E) contém perguntas relacionadas ao estudante, como por exemplo, qual a sua Graduação, se possui alguma Pós-Graduação, e se já ministrou ou ministra a disciplina de CDI I.

O objetivo desse questionário é identificar o perfil dos alunos para no fim avaliar se estas variáveis influenciam ou não no desenvolvimento das atividades.

No Quadro 7 está esse questionário:

Quadro 7 – Questionário da Pós-Graduação

1. Qual a sua formação na Graduação? ____________________
2. Quando concluiu sua Graduação? ______________________
3. Possui alguma Pós-Graduação? Se sim, qual? _____________
4. Você atua/ atuou como Professor? Se sim, em qual nível?
 ( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio
 ( ) Ensino Técnico ( ) Ensino Superior
5. Você ministra/ministrou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral? ( ) Sim ( ) Não

Fonte: Produção da autora

2.2.2 Segundo momento – Atividade 1: Investigação Preliminar

Após os alunos responderem o questionário, será solicitado que façam a Atividade 1 (Apêndice F) individualmente. Essa atividade é composta de quatro perguntas sobre limite, que foram adapatadas do trabalho: “Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction” (DUCA; HALL; KEENE, 2014). Essa atividade é semelhante a atividade 1 da Graduação, porém aqui pedimos para calcular o limite de uma sequência, não de uma função.

O objetivo da aplicação desta atividade é identificar como os estudantes da Pós-Graduação defininem o que é limite, com base em seus conhecimentos prévios, já que imaginamos que boa parte possa já ter visto o conceito de limite em sua Graduação.

No Quadro 8 se encontra a primeira atividade.

Quadro 8 – Atividade 1 da Pós-Graduação

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende? *2.* Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite". *3.* Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1? *4.* Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a sequência dada por: $a_n = b^n$, sendo b um número real. Conjecture sobre a existência do limite dessa sequência

Fonte: Produção da autora

Como na análise a priori da atividade 1 da Graduação, aqui será feita considerando cada pergunta separadamente e também a hipótese desses alunos já terem cursado a disciplina de Cálculo, e já conhecerem o conceito do limite matematicamente.

1. Considerando que os estudantes já viram o conceito de limite em algum momento de sua Graduação, é provável que deem uma definição mais matemática. Ou, pelo fato de talvez fazer tempo que não trabalham com esse conceito, podem responder essa questão relacionado a palavra limite como usam no seu cotidiano, como por exemplo, se referindo a restrições ou fronteiras.

2. Nesta questão, acredita-se que os alunos podem escrever sentenças relacionadas ao significado matemático da palavra limite, como, por exemplo: "O limite da função $f(x)$ tende para L, quando x tende para um a".
Ou podem escrever frases com a palavra limite, como usam no seu dia-a-dia, como citado na análise à priori dessa questão na seção da sequência didática da Graduação.

3. Aqui, considerando que os estudantes provavelmente já passaram pela disciplina de CDI I, podem relacionar o limite com o gráfico de funções, máximos e mínimos ou assíntotas. Também podem lembrar da definição formal e escrevê-la, como, por exemplo: "Seja f uma função definida numa vizinhança do ponto a, exceto possivelmente em a, dizemos que o limite de $f(x)$ é igual a L quando x tende para a e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se para todo número $\varepsilon > 0$ (por menor que seja) é possível encontrar $\delta > 0$ (que dependa de ε) tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$".

4. Como no enunciado da questão trata-se de sequência, supõe-se que os alunos lembrem que n tende a infinito, para então tentar falar sobre a existência do limite.
Porém, se não lembrarem desse conceito, pode ser que se confundam para conseguir encontrar o limite da sequência.
Os alunos podem tentar descrever o que acontece com a sequência quando n tende a infinito usando apenas texto, ou podem tentar resolver algebricamente, obtendo os resultados: $\lim_{n \to \infty} b^n = 0$ se $|b| < 1$ e $\lim_{n \to \infty} b^n$ não existe se $|b| > 1$.
Aqui pode acontecer de os alunos não perceberem que quando se coloca valores para b entre $-1 < b < 1$ o limite vai ser zero, já que eles podem atribuir apenas valores inteiros maiores que 1, não percebendo que b é um número real, e que então poderia assumir qualquer valor. Além disso, se considerarem valores apenas positivos (maiores que 1) para b, vão encontrar que o limite vai para mais infinito. E se considerarem valores apenas negativos (menores que 1) para b, encontrarão que o limite não existe. Logo o limite não existe quando $|b| > 1$.

2.2.3 Terceiro momento – Atividade 2: O corredor de Zeno

Esta atividade (Apêndice F) foi adaptada do artigo "Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction" (DUCA; HALL; KEENE, 2014), será realizada em equipes para que os alunos possam interagir uns com os outros e tentar encontrar a melhor solução para as questões propostas.

Na atividade original, os personagens abordados eram de um famoso desenho da televisão americana – "Sesame Street" - que apesar de esse ter sua versão no Brasil, ela não é tão conhecida. Assim, resolvemos alterar os personagens da atividade original. A alteração ficou com os personagens Sheldon Cooper e Leonard Hofstadter, que fazem parte da série, “Big Bang: A Teoria” – versão brasileira – em que os personagens são gênios da ciência, e passam seus dias debatendo sobre problemas do universo. E como nossa atividade proposta foge um pouco do comum, acreditamos que esses personagens se encaixam no que foi planejado.

Após ser introduzido uma tirinha relacionando com o paradoxo de Zenão, na tarefa 1, será proposto aos alunos fazerem um experimento na sala e responder duas questões.

Na segunda tarefa dessa atividade, será solicitado que os alunos simulem o problema proposto, novamente fazendo um experimento prático e depois respondendo algumas perguntas.

Nesta atividade o conceito de limite é abordado via série e sequência, diferente do que se vê em CDI I na Graduação, em que o limite é visto através de funções.

Um dos objetivos dessa atividade é que os alunos possam ver que é possível verificar o conceito do limite de uma forma diferente. Além disso, como se tratam de futuros professores, visa-se que eles percebam como é possível relacionar o conceito de limite com a matemática de ensino básico, onde eles poderão vir a ensinar, ou que até mesmo já estejam ministrando.

Nos Quadros 9, 10 e 11 estão a segunda atividade proposta aos alunos.

Quadro 9 – Introdução da Atividade 2 da Pós-Graduação

Fonte: Produção da autora

Quadro 10 – Tarefa 1 da Atividade 2 da Pós-Graduação

Tarefa nº 1: Experimente!
Vá e encontre um ponto cerca de 6 passos (normais) de uma parede. Tente seguir as instruções: cada passo de Zeno que der deve ser metade da distância que há entre você e a parede. Continue a tomar passos até que você não consiga mais! Assim que estiver pronto, sente-se com seu grupo e responda às seguintes perguntas:

1. Quantos passos de Zeno você deu?

2. Você poderia ter dado mais passos? Se sim, quantos passos a mais poderia ter dado? Se não, explique por que o número de passos é o máximo.

Fonte: Produção da autora

Quadro 11 – Tarefa 2 da Atividade 2 da Pós-Graduação

Tarefa nº 2: Contagem de Sheldon e Leonard
Vamos ajudar Sheldon e Leonard descobrir quantos passos Leonard terá que dar para atravessar esse corredor estranho. Digamos que esse corredor é semelhante ao corredor do bloco D da UDESC, então inicialmente meça quantos metros ele tem.

1. Com a medida que você encontrou para o comprimento do corredor, quantos passos você estima que Leonard terá que dar a fim de atravessá-lo? Explique sua estimativa.

2. Até que ponto Leonard percorre com o seu primeiro passo? Até que ponto ele percorre após seu segundo passo?

3. Seja $\{a_n\}$ a sequência em que o enésimo termo corresponde à distância que Leonard percorreu após seu enésimo passo. Compute os cinco primeiros termos desta sequência.

4. Leonard ficaria eternamente dentro de 0,5 metros da extremidade do corredor? Argumente sua resposta.

5. Leonard faz uma revelação impressionante: Ele afirma que se Sheldon falar qualquer distância, tão perto do comprimento do corredor quanto ele queira, se ele seguir as instruções do Senhor Zeno, depois de um certo passo, ele terá percorrido essa distância. Você acredita que isso é verdade? Por quê?

6. Você deve ter notado que a distância que Leonard tem percorrido parece estar ficando perto do final do corredor. No seu grupo, escreva uma descrição do comportamento que a sequência apresenta e como Leonard continuaria sua jornada até o final do corredor.

Fonte: Produção da autora

A análise a priori dessa atividade será feita de cada tarefa considerando cada questão e também algumas partes são baseadas nos resultados obtidos no trabalho de Duca, Hall e Keene (2014).

i) Análise a priori Tarefa 1: Experimente

1.

Tarefa: Descobrir quantos passos de Zeno é possível tomar a partir de uma distância de cerca de 6 passos normais de uma parede.

Estratégia de resolução: Inicialmente os alunos terão que se afastar 6 passos da parede e então tentar simular os passos de Zeno, ou seja, inicialmente terão que dar um passo (salto) de cerca de 3 passos - metade de 6, e então terão que contar quantos passos foi possível dar. As respostas possíveis são 5 ou 6, visto que é mais ou menos isso que é possível dar nessa distância, considerando um pé de tamanho normal

2.

Tarefa: Dizer se há como dar mais passos que o afirmado anteriormente e explicar o porquê da resposta.

Estratégia de resolução: Os estudantes devem perceber que o número de passos que conseguiram dar é máximo, pois o domínio de passos é discreto, então terão que parar em algum ponto. Além disso, outra observação que pode ser posta é com que a quantidade de passos poderia ser alterada considerando o pé da pessoa, por exemplo, caso fosse um bebê, o comprimento do seu pé é menor, logo poderia ter dado alguns passos a mais.

ii) Análise a priori Tarefa 2: Contagem de Sheldon e Leonard

1.

Tarefa: Medir o corredor e estimar a quantidade de passos dados.

Estratégia de resolução: Inicialmente os alunos terão que medir o corredor, pois é longo, ficará difícil estimar sem ter o valor certo, e essa medida poderão fazer com metro ou trena – esse material será solicitado para os alunos levarem para esta aula. Nessa medição, encontraram o valor de aproximadamente 20,4 metros.

Depois, poderão experimentar, ou seja, simular esses passos na prática, andando pelo corredor. Ou, também, podem escolher fazer os cálculos manualmente, sem precisar andar pelo corredor.

2.

Tarefa: Calcular a distância percorrida nos dois primeiros passos.

Estratégia de resolução: No primeiro passo, basta dividir o comprimento total por *2*, e encontrarão aproximadamente 10,2m, esse valor vai depender da distância total que os estudantes encontraram na medida.
No segundo passo, devem fazer $\frac{20.4-10.2}{2} = 5{,}1$. Logo, Leonard, percorreu 5,1m mais os 10,2m do primeiro passo, assim tem-se: $10{,}2 + 5{,}1 = 15{,}3$ metros percorridos no segundo passo.

3.

Tarefa: Calcular os cinco primeiros termos da sequência a_n.

Estratégia de resolução: Como já calcularam os dois primeiros passos na questão anterior, ou seja tem $a_1 = 10{,}2$ e $a_2 = 15{,}3$. Agora, precisam encontrar, $a_3 = 15{,}3 + 2{,}55 = 17{,}85$; $a_4 = 17{,}85 + 1{,}257 = 19{,}107$; $a_5 = 19{,}107 + 0{,}6375 = 19{,}7445$.

4.

Tarefa: Responder se Leonard ficaria eternamente dentro dos 0,5 metros da extremidade do corredor?

Estratégia de resolução: Os alunos podem responder recorrendo a definição formal do limite de sequência e de série. Percebendo que para qualquer epsilon dado, Leonard conseguiria dar uma quantidade de passos que ultrapassaria essa marca, ficando eternamente dentro dos 0,5m do final do corredor.
Porém, pode acontecer de os alunos responderem "não", não percebendo que para qualquer epsilon fixo, sempre podem aumentar o número de passos e estar mais próximos que 0,5m do final. Aqui, o que pode leva-los ao erro é a tarefa 1 dessa atividade que tinha a parede como barreira.

5.

Tarefa: Responder se dado qualquer distância, tão perto quanto se queira do fim do corredor, é possível alcançar esse valor dado.

Estratégia de resolução: Essa questão é a mesma argumentação da questão *4, o*s alunos podem usar a definição de limite de sequência respondendo corretamente.
No entanto, pode acontecer de dizerem que a resposta não é válida.

6.

Tarefa: Descrever o comportamento da sequência até o final do corredor.

Estratégia de resolução: Usando o conceito formal de limite, podem dizer que Leonard conseguirá atravessar o corredor.
Contudo, os estudantes podem responder que Sheldon nunca vai atravessar o corredor, que ele vai ficar indefinidamente dentro dos 20,4m.

3 APLICAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

3.1 INTRODUÇÃO

A análise a posteriori das sequências didáticas estão apoiadas sobre:

- As resoluções apresentadas pelos alunos às questões propostas em cada atividade;
- Observações feitas em sala de aula, durante o desenvolvimento das atividades.

As aplicações tanto na Graduação como na Pós-Graduação foram realizadas na própria sala de aula das turmas pelas professoras das respectivas turmas. A autora estava presente em todas as aplicações em sala de aula, observando tanto a realização das atividades quanto dando suporte para as professoras – entregando e recolhendo as atividades; montando o datashow quando necessário para monstrar geometricamente com auxílio do Geogebra alguns gráficos; e ajudando a tirar as dúvidas dos alunos durante a realização das atividades.

Como as atividades aplicadas nas turmas de CDI I da Graduação e na turma de Fundamentos do Cálculo da Pós-Graduação são diferentes, separamos as análises delas em subtópicos diferentes. E na turma de CDI I, como nem todas as atividades da sequência didática foram realizadas numa mesma aula, separamos as análises em seções diferentes, conforme as atividades foram desenvolvidas.

3.2 APLICAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA GRADUAÇÃO

As atividades foram realizadas com três turmas de CDI I da UDESC/Joinville, sendo elas:

- Licenciatura em Física (FIS);
- Bacharelado em Ciência da Computação (BCC);
- Turma não-exclusiva[2] (NEX).

[2] Trata-se de uma turma de CDI I que não é exclusiva de um determinado curso, mas possui uma miscelânea de estudantes de Graduação da instituição.

A escolha das turmas foi feita de acordo a disponibilidade e aceitação de alguns professores da UDESC, acreditamos que a aplicação da sequência didática em três turmas era suficiente para este trabalho, pois teríamos uma amostra maior para fazer a análise dos resultados.

A professora Eliane disponibilizou dois dias, com duas aulas faixa cada, para realização da sequência em suas turmas de FIS e BCC. E a professora Elisandra a mesma quantidade em sua turma - NEX.

Com relação a quantidade de alunos matriculados em cada turma, temos que:

- 40 alunos na turma de FIS;
- 38 alunos na turma de BCC;
- 40 alunos na turma NEX.

A aplicação da sequência didática foi realizada sem as professoras terem previamente passado algum conceito de limite para suas turmas, pois o intuito era que as atividades fossem trabalhadas para introduzir o conceito de limite, na forma intuitiva, algébrica e formal.

3.2.1 Conhecendo as Turmas – Questionário Inicial

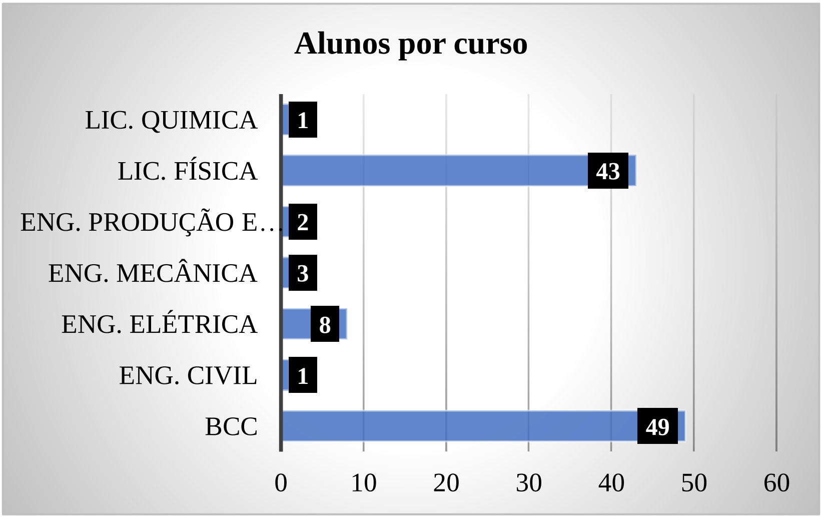
Antes do início das atividades com as turmas foi aplicado o questionário (Apêndice E), apresentado no capítulo anterior com os alunos.

Responderam ao questionário inicial:

- 35 alunos da turma de FIS;
- 34 alunos da turma de BCC;
- 38 alunos da turma NEX.

A primeira pergunta era qual o curso que o estudante cursava, já que na turma de NEX, alunos de qualquer curso podem se matricular. Assim, tivemos o resultado segundo o Gráfico 1:

Gráfico 1 - Relação de alunos por curso da Graduação

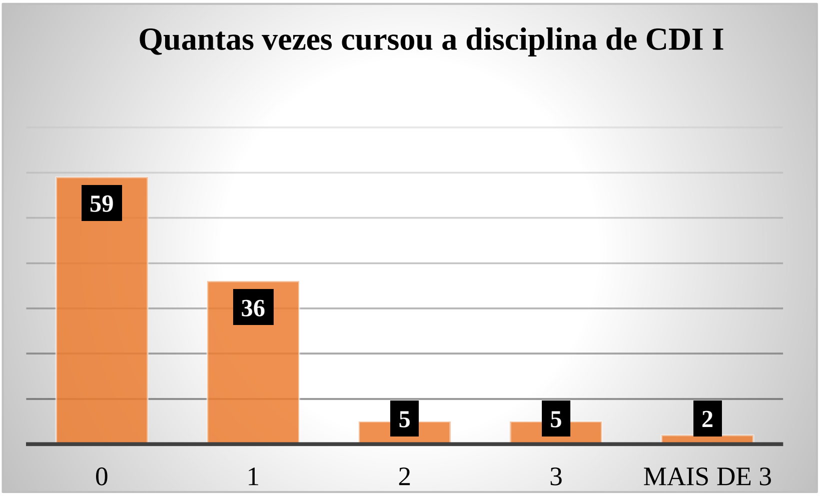


Fonte: Produção da autora

Percebemos que a maioria dos alunos, das turmas que foram aplicadas as atividades, cursam FIS ou BCC. Isso aconteceu pois mesmo da turma NEX, a maior parte dos alunos também está matriculado nesses cursos.

As turmas de FIS e BCC, em geral, são de alunos calouros, ou seja, que acabaram de entrar na Universidade. Na turma NEX, são alunos que já cursaram alguma vez CDI I, mas não obtiveram a aprovação. O Gráfico 2 apresenta a relação da quantidade de vezes que os alunos já cursaram a discipina:

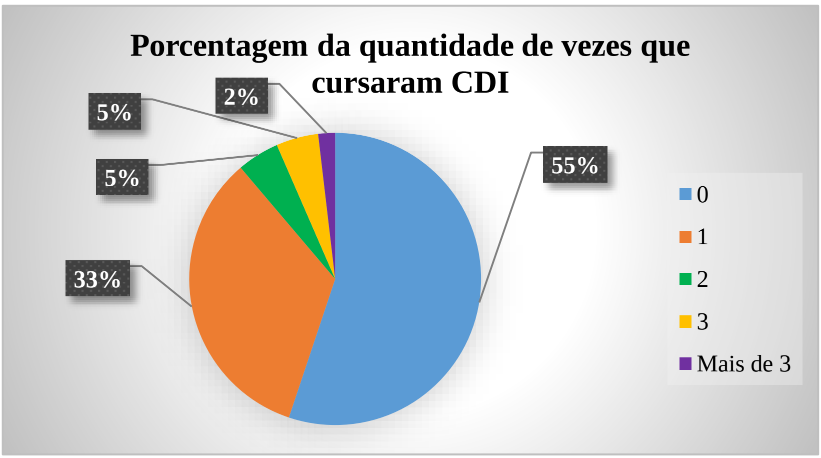
Gráfico 2 - Quantidade de vezes que o aluno cursou CDI I



Fonte: Produção da autora

Em termos de porcentagem, temos, conforme o Gráfico 3:

Gráfico 3 - Porcentagem da quantidade de vezes que o aluno cursou CDI I

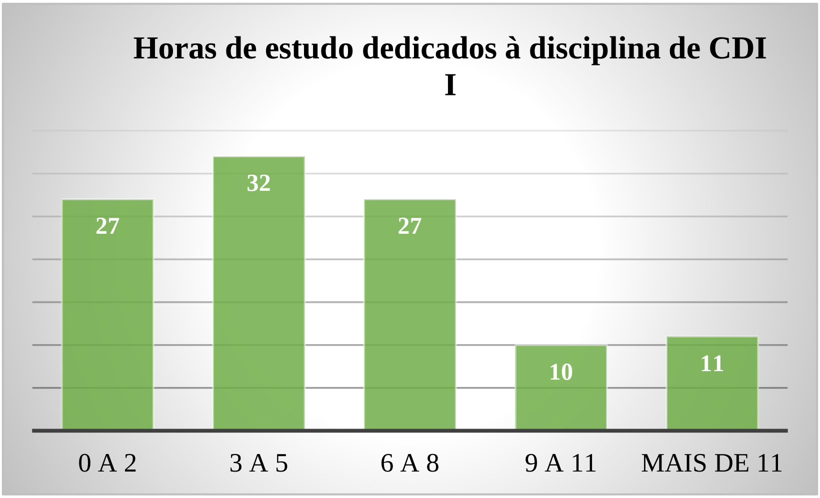


Fonte: Produção da autora

Vemos então, que a maioria dos alunos está vendo CDI I pela primeira vez.

A terceira questão do questionário, foi perguntado aos alunos a respeito da quantidade das horas de estudo semanais, tendo o resultado das tumas de acordo com o Gráfico 4:

Gráfico 4 - Horas de estudo semanal dos alunos de Graduação

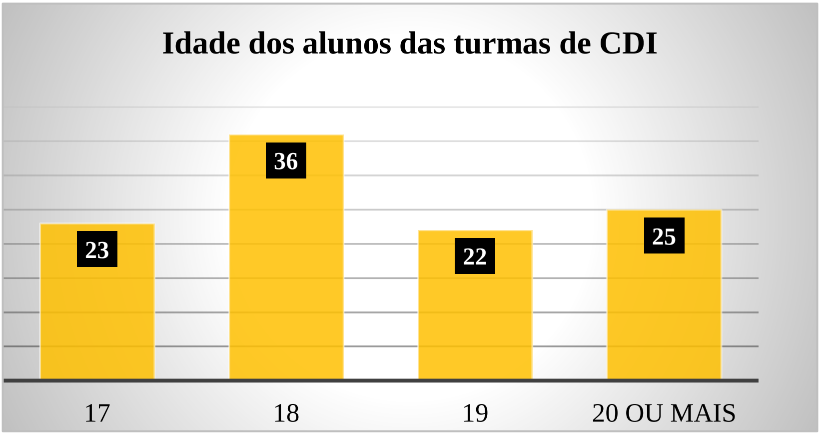


Fonte: Produção da autora

Pelo Gráfico 4, temos que a maior parte dos alunos, estuda até 8h por semana, mas desses, alguns não dedicam nenhum tempo extra além das aulas presenciais para a disciplina.

A faixa etária dos alunos está representada no Gráfico 5:

Gráfico 5 - Faixa etária dos alunos de Graduação

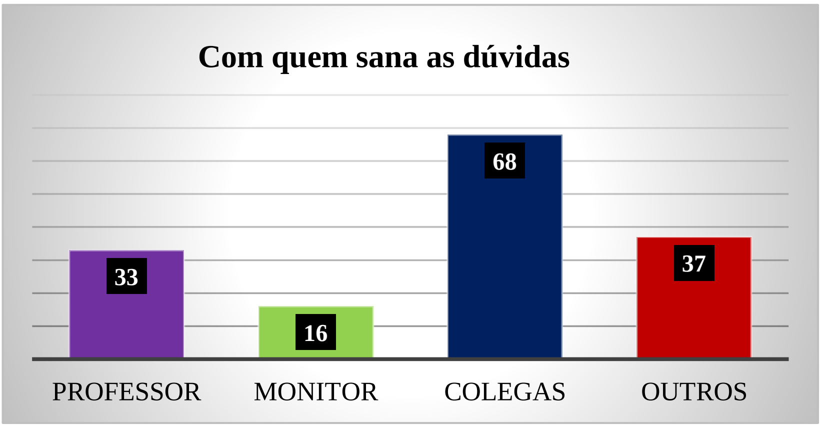


Fonte: Produção da autora

A maior parte dos alunos tem até 20 anos, ou seja, a maioria saiu do Ensino Médio recentemente. E também, poucos trabalham, apenas 20%.

A respeito de com quem os alunos sanam suas dúvidas referente a disciplina, teve-se o resultado apresentado no Gráfico 6:

Gráfico 6 – Representação da quantidade de alunos e com quem sanam suas dúvidas de CDI I



Fonte: Produção da autora

A maioria colocou que tiram suas dúvidas com os colegas, também apareceu em grande quantidade a resposta “outros”, nesse os alunos citaram: amigos, livros e internet.

3.2.2 Análise a Posteriori da Primeira Seção – Atividades 1, 2 e 3.

3.2.2.1 Análise a posteriori da atividade 1

A atividade 1 (Apêndice C) foi realizada nas três turmas, com 39 equipes no total, sendo, 17 da turma NEX, 14 da turma de BCC e 8 da FIS. Foi deixado livre a formação das equipes, alguns se juntaram em duplas, trios, quartetos, e outros preferiram fazer individualmente.

Para ajudar na análise nomeamos as equipes como, Equipe 1; Equipe 2; Equipe 3, e assim por diante, sendo divididas entre suas turmas.

Apresenta-se a análise, conforme explanada na análise a priori, questão por questão.

1) Ideia de limite na Graduação

Quadro 12 – Enunciado questão 1 da atividade 1, Graduação

1) Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

Fonte: Produção da autora

Classificamos as respostas dadas pelos alunos nas categorias abaixo:

i) Usaram conceito de fronteira, barreira ou restrição: treze equipes, alguns exemplos:

- “Algo que não pode ser ultrapassado”. (Equipe 15, BCC).
- “Limite é uma barreira em que você nunca pode chegar”. (Equipe 2, FIS).

ii) Relacionaram com máximos ou mínimos: quinze equipes, alguns exemplos:

- “Algo próximo do máximo ou mínimo”. (Equipe 14, NEX).
- “É o ponto máximo onde alguma coisa pode chegar, mas não chega”. (Equipe 6, FIS).

iii) Usaram ideias do Cálculo com funções: seis equipes, um exemplo:

- “Que o limite é um ‘lugar’ até onde uma função pode ir”. (Equipe 1, NEX).

iv) Usaram a ideia de vizinhança e/ou aproximação do Cálculo: três equipes, um exemplo:

- “Um valor numérico que não pode ser calculado em um ponto, mas que está próximo de suas vizinhanças que podem ser determinadas”. (Equipe 7, NEX).

v) Outras respostas: duas equipes, que escreveram:

- “O término de uma sequência”. (Equipe 5, BCC).
- “Uma lei que determina um fim para algo em determinado ponto”. (Equipe 13, BCC).

Vimos que os alunos, no geral, apresentaram respostas como esperadas na análise a priori, relacionando a palavra limite como uma palavra que usam no dia a dia.

Os alunos que deram respostas com um conhecimento prévio de Cálculo, provavelmente já cursaram alguma vez a disciplina, visto que esses resultados foram mais ocorrentes na turma de repetentes.

2) Frases sobre limite na Graduação

Quadro 13 – Enunciado questão 2 da atividade 1, Graduação

2) Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra “limite”.

Fonte: Produção da autora

Como previsto, os alunos responderam usando a palavra limite como usam no seu cotidiano, ou utilizando algum conhecimento prévio do Cálculo.

Como eram duas sentenças, alguns alunos escreveram uma delas usando a palavra “limite” no uso do dia a dia, e a outra usando ideias do Cálculo. Assim, classificamos as respostas por quantidade de frases e não por equipes. E também, dividimos as frases, em categorias, com suas devidas ocorrências[3] e exemplos, abaixo:

i) Usaram conceito de fronteira, barreira ou restrição: trinta e cinco frases, alguns exemplos:

- “Essa menina precisa de limite, ela não sai do celular. O limite dessa terra foi demarcado com um muro”. (Equipe 16, NEX).
- “Um cômodo de uma casa é limitado por suas paredes. Toda criança precisa de limite”. (Equipe 7, BCC).
- “Barra Velha faz limite com São João do Itaperiú. Esta vaga limita-se a cadeirantes”. (Equipe 8, FIS).

ii) Relacionaram com máximos ou mínimos: vinte e quatro frases, alguns exemplos:

- “Você está próximo do limite de velocidade. O limite de peso do elevador é 600kg”. (Equipe 14, NEX).
- “O limite de velocidade é de 90km/h. O limite de profundidade para mergulho é de 30 metros”. (Equipe 1, FIS).

iii) Usaram ideias do Cálculo: dezoito frases, como:

- “A função possui limite. Calcule o limite das funções a seguir”. (Equipe 1, NEX).
- “A derivada é um limite. O limite da soma, é a soma dos limites”. (Equipe 2, NEX).

3) Utilização matemática do limite para Graduação

Quadro 14 – Enunciado questão 3 da atividade 1, Graduação

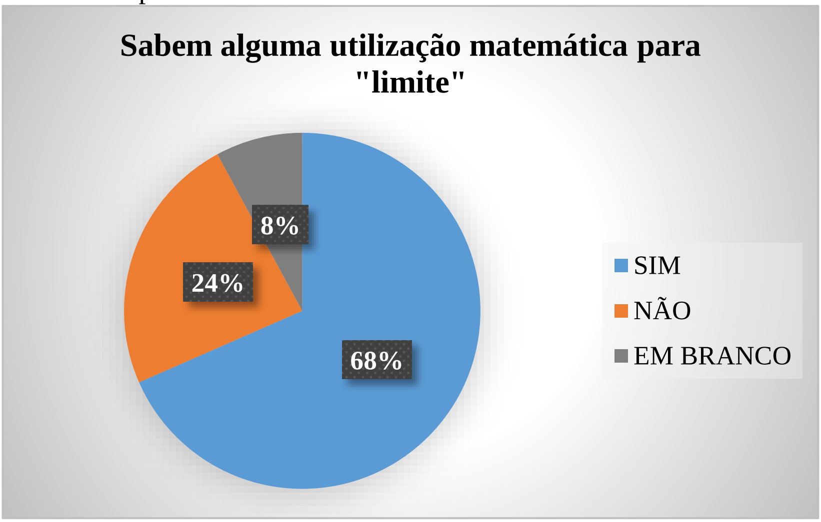
3) Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?

Fonte: Produção da autora

[3] Uma das equipes, escreveu apenas uma frase, por isso não temos o total de 78, visto que 39 equipes realizaram essa atividade.

Nesta questão, tivemos os resultados, conforme representados no Gráfico 7:

Gráfico 7 – Respostas dos alunos da Graduação a respeito da utilização matemática para o limite



Fonte: Produção da autora

Ou seja, mais da metade das equipes responderam que sabiam alguma utilização matemática para o conceito de limite. Essa resposta não era esperada, já que 55% dos alunos nunca cursaram Cálculo. Porém, nove equipes escreveram respostas que não fazem sentido no que diz respeito à aplicação de limite, como, por exemplo:

- “Sim, sabemos que limite é uma função matemática”. (Equipe 9, BCC).
- “O limite dos números positivos é o zero. Semelhante, ‘ponto final’”. (Equipe 13, NEX).

Mas, também surgiram respostas conforme esperávamos na análise a priori. Inicialmente, relacionando com o gráfico, duas respostas, exemplificando:

- “Para análise de gráficos, do tipo dele, se ele é contínuo ou se houve um salto, etc.”. (Equipe 9, NEX).

Três equipes relacionaram com derivadas ou suas aplicações:

- “Sim, uma aplicação seria para encontrar velocidade instantânea...”. (Equipe 3, NEX).

Ainda, surgiram oito respostas, relacionando com limite de uma função, como:

- “Matematicamente, o limite de uma função é o valor que a mesma tende em um determinado ponto. É semelhante pois em alguns casos o limite de uma função é o valor da função em que não se pode calcular”. (Equipe 2, FIS).

Logo, parece que os alunos mesmo sem ter visto os conceitos relacionados ao limite, tentaram achar uma utilização matemática para ele, o que fez alguns equivocarem-se. As respostas deixadas em branco, ocorreram talvez pelo receio de escreverem algo errado.

4) Existência limite de uma função

Quadro 15 – Enunciado questão 4 da atividade 1, Graduação

4) Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a seguinte expressão: $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = L$$ Tente descrever o que ela significa.

Fonte: Produção da autora

Treze equipes da turma NEX, duas de BCC e todas de FIS usaram a palavra “tende”. Com relação à palavra “próximo” ou “aproxima-se”, ocorreram cinco respostas na turma NEX e uma na turma de FIS. Em algumas frases, ocorreram ambas as palavras, como:

- “Que devemos calcular o limite dessa função quando ela tende a 2. Ela nunca chega a 2, mas se aproxima dele. ” (Equipe 1, NEX).

Na turma da Computação, houveram bastantes respostas dizendo que o limite estava, entre x e 2, que o x era igual a 2, ou que x seria menor ou maior que 2. Já na Física, a maioria conseguiu interpretar corretamente. Essas duas turmas são quase a totalidade de calouros, assim, houve uma dispersão maior de respostas. Na turma de repetentes a maioria das respostas foram interpretações corretas.

5) Resolução possível da questão 4

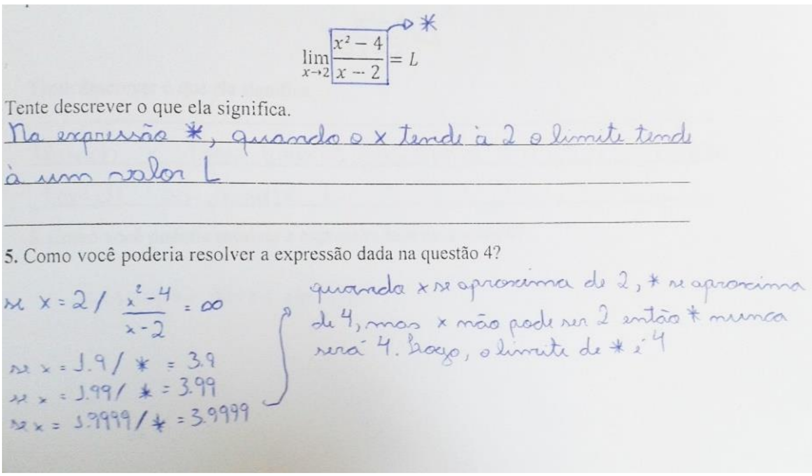
Quadro 16 – Enunciado questão 5 da atividade 1, Graduação

5) Como você poderia resolver a expressão dada na questão 4?

Fonte: Produção da autora

Nesta questão, quatorze equipes chegaram ao resultado correto para o limite, sendo nove da turma NEX, uma de BCC e quatro da FIS. Desse total, três colocaram as notações de limite em todas as etapas da resolução, dez em algum momento esqueceram a notação, e a outra, desenvolveu o raciocínio ilustrado na Figura 1:

Figura 1 - Resposta dada na questão 5 da atividade 1 pela equipe 1 da turma de FIS



$$\lim_{x \to 2} \boxed{\frac{x^2-4}{x-2}} = L \quad \rightarrow *$$

Tente descrever o que ela significa.

Na expressão *, quando o x tende à 2 o limite tende à um valor L

5. Como você poderia resolver a expressão dada na questão 4?

se $x = 2$ / $\frac{x^2-4}{x-2} = \infty$

se $x = 1.9$ / $* = 3.9$

se $x = 1.99$ / $* = 3.99$

se $x = 1.9999$ / $* = 3.9999$

quando x se aproxima de 2, * se aproxima de 4, mas x não pode ser 2 então * nunca será 4. Logo, o limite de * é 4

Fonte: Produção dos alunos

Outras respostas que surgiram foram substituir o *2* na função, porém, depois comentaram que não sabiam como continuar, ou que a resposta era uma indeterminação, já que o resultado foi *0/0*. Algumas equipes também responderam que ainda não estavam familiarizados com o conceito matemático de limites, logo, não poderiam responder à questão.

3.2.2.2 Análise a posteriori da atividade 2

A atividade 2 foi aplicada logo após os alunos entregarem a atividade 1.

Esta atividade foi realizada pelas mesmas equipes da atividade 1, porém na turma de BCC, uma das equipes entrou em divergência entre as respostas, então, decidiram entregar separado o que cada membro pensava. Logo, tivemos respostas de quarenta equipes.

Na primeira parte desta atividade – quando deveriam desenhar os polígonos inscritos – todas as equipes tentaram desenhar polígonos regulares inscritos na circunferência. Inclusive, algumas equipes, acabaram gastando bastante tempo no desenho, pois queriam encontrar uma maneira de fazer o polígono com todos os lados com a mesma medida, conforme o n dado.

A seguir, vamos analisar as respostas das duas questões dessa atividade.

1) Área da circunferência

Quadro 17 – Enunciado questão 1 da atividade 2, Graduação

1) Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos n?

Fonte: Produção da autora

Trinta e duas equipes responderam que se aumentasse o n, aumentaria a área do polígono e/ou a área se aproximaria da área do círculo. Desses, onze mencionaram apenas que a área do polígono aumenta, e vinte e uma, que a área se aproximava da área do círculo.

Com relação a isso, destacamos que nem todas as equipes colocaram área do círculo, pois muitas escreveram “área da circunferência”, classificamos mesmo assim como respostas corretas, já que, apesar do objeto matemático não estar certo, a lógica dos alunos estava. Além disso, esse ponto não era o objetivo da atividade, mas surgiu à tona nas respostas.

Nas outras respostas, as equipes mencionaram que a área não mudaria, que duplicaria, ou, fizeram uma interpretação equivocada do significado de área, por exemplo:

- "Aumentar o número de lados, diminui a área de cada lado do polígono." (Equipe 3, FIS).
- "A área total não muda, ela será dividida em menores áreas." (Equipe 16, NEX).

2) Polígonos regulares

Quadro 18 – Enunciado questão 2 da atividade 2, Graduação

2) Para encontrar a melhor aproximação para a área do círculo é suficiente apenas aumentar a quantidade dos lados do polígono? Justifique.

Fonte: Produção da autora

Inicialmente, classificamos as respostas dos alunos, como no Tabela 1:

Tabela 1 - Respostas das equipes sobre os polígonos da atividade 2

Sim	Não	Em branco e indefinidas.
28	7	5

Fonte: Produção da autora

Das vinte e oito respostas dadas como sim, vinte e seis argumentaram que bastaria aumentar o número de lados para a área do polígono se aproximar da área do círculo. Uma equipe falou que "quanto mais arestas, mais elas se aproximariam do diâmetro do círculo" (Equipe 8, NEX). E a outra equipe, escreveu que sim, porém, que era necessário que a medida dos lados, de cada aresta do polígono, fosse igual.

Dos sete "não" que apareceram, somente dois relacionaram com o comportamento do lado do polígono, afirmando que todos eles teriam que ser iguais. As outras cinco respostas, não seguiram um padrão, pois falaram, que “polígonos eram ultrapassados”, “para encontrar um valor mais apurado devemos calcular com o limite de lados tendendo ao infinito”, por exemplo.

Nas respostas indefinidas, os alunos não se posicionaram sobre uma opinião de “sim” ou “não”, deixaram em aberto.

A seguir, são expostos outros pontos, com relação a essa atividade:

- Uma das equipes quando respondeu à questão 1 colocou “sendo o polígono regular, a área deste se aproxima da área de uma circunferência”, porém, na questão 2, escreveu que, “Sim, é suficiente, pois quanto mais lados, mais próximo de uma figura curva (nesse caso, o círculo) ele se torna”. Outra, colocou na primeira questão que “a área aumenta se a medida do lado continuar a mesma”, e na segunda “sim, pois o polígono com o maior número de lados possíveis se assemelha a um círculo”. Ou seja, esses não conseguiram conectar a resposta dada na primeira pergunta com a segunda.
- Somente três equipes perceberam que os polígonos deveriam ser regulares para que realmente a área total do polígono se aproximasse cada vez mais da área do círculo.

3.2.2.3 Análise a posteriori da atividade 3

Esta atividade foi realizada após ser feita a discussão da atividade 2 com os alunos das três turmas.

Mesmo sendo realizadas as três atividades na mesma aula, nem todos os alunos continuaram na mesma equipe que estavam antes, alguns separam, outros se juntaram, um dos motivos foi que alguns estudantes chegaram mais tarde para a aula e outro foi por discordâncias de opiniões.

Aqui, como nas atividades anteriores, a análise também será realizada questão por questão.

1) a) Encontrar a velocidade inicial

Quadro 19 – Enunciado letra *a* da primeira questão da atividade 3, Graduação

1. Um projétil é arremessado verticalmente de uma altura s_0, dada em metros, com uma velocidade inicial v_0, dada em m/s, sabe-se que a trajetória descrita é uma parábola representada pela função $s(t) = -t^2 + v_0 t + s_0$ **a.** Sabendo que um projétil é lançado do solo (e, portanto $s_0 = 0$,) e que leva 6 segundos para voltar a atingir o solo, use a equação acima para determinar sua velocidade inicial.

Fonte: Produção da autora

Do total de quarenta e uma equipes que fizeram essa questão, vinte e sete chegaram ao resultado correto de $v_0 = 6m/s$, substituindo os valores fornecidos na fórmula. Na turma de FIS todas as equipes acertaram.

Quatorze equipes ou deixaram em branco ou erraram em algum momento de substituir os valores na fórmula dada no enunciado. O erro mais comum, foi que não perceberam que $s(6) = 0$, já que o projétil voltou a atingir o solo. Desse modo, ficaram com duas variáveis, e não conseguiram encontrar um resultado, deixando na forma $s(6) = -36 + 6v_0$, ou chutaram valores, como 6 e 30 para $s(6)$. Outras equipes também esqueceram de substituir alguma variável na fórmula, e consequentemente chegaram a outros resultados.

Algumas conclusões da resolução desta questão, são:

- Temos que 34% das equipes erraram, o que é um percentual relativamente alto, visto que a questão envolvia apenas conceitos vistos no Ensino Básico. Assim, percebe-se que os alunos têm dificuldade de interpretação, pois não conseguiram substituir os valores corretamente na fórmula dada no enunciado, e chegaram até mesmo, em respostas negativas para a velocidade.
- Outro dado importante é que todas as equipes da turma de FIS acertaram, ou seja, a dificuldade muitas vezes não é apenas a matemática em si, mas a interpretação do problema. E aqui, por ser tratar de um problema físico, os alunos desta turma estão mais familiarizados com o tema.

1) b) Função próxima de $t = 3$

Quadro 20 – Enunciado letra b da primeira questão da atividade 3, Graduação

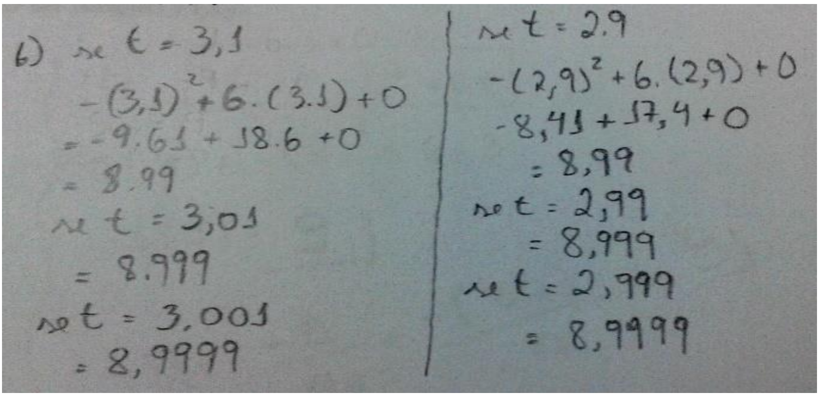
*b)*Examine o comportamento da função quando o tempo se aproxima de 3.

Fonte: Produção da autora

Vinte equipes substituíram o tempo igual à $3s$ na fórmula. Destes, dez equipes chegaram ao resultado correto que seria igual a $9m$. Os outros grupos que não chegaram a esse valor, ou fizeram os cálculos errados, ou não substituíram a velocidade que teriam que ter encontrado na letra a. Alguns, que já tinha errado a questão anterior, consequentemente usando outra velocidade – a que tinham encontrado – chegaram a um deslocamento diferente. Também aconteceu dos estudantes considerarem $s(0) = 0$, como na questão a, e daí isolaram v_0.

Apenas quatro equipes jogaram valores para t próximo de 3, como imaginávamos na análise à priori, um exemplo pode ser visto na Figura 2:

Figura 2 - Resposta dada na questão b da atividade 3 pela equipe 1 da turma de FIS



Fonte: Produção dos alunos

Apesar de não fazerem suas considerações, este foi o único grupo que, atribuíndo os valores, encontrou o valor correto para $s(t)$. As outras equipes que também atribuiram valores próximos a 3, erraram na resolução, e isolaram a velocidade v_0, em vez do espaço $s(t)$.

Cinco grupos, relacionaram o tempo igual $3s$ ao ponto máximo da função, como, por exemplo:

- "Representa o ponto máximo o limite de altura". (Equipe 5, BCC).

Quatro equipes deixaram essa questão em branco, e as outras relacionaram com o tempo ou com a velocidade.

1) c) Gráfico da função s(t).

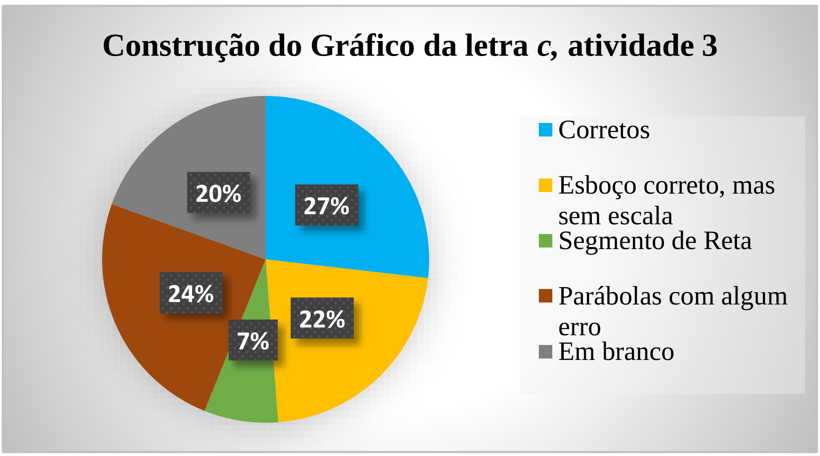
Quadro 21 – Enunciado letra *c* da primeira questão da atividade 3, Graduação

c) Desenhe o gráfico da função s(t).

Fonte: Produção da autora

Classificamos as respostas dos estudantes, segundo mostrado no Gráfico 8:

Gráfico 8 – Porcentagem de respostas das equipes de Graduação que apareceram da construção do gráfico da questão *c* da atividade 3



Fonte: Produção da autora

Temos que onze equipes desenharam corretamente - com escala certa. Nove equipes até fizeram o esboço correto de como ficaria a parábola, porém, não colocaram nenhuma escala em seus gráficos para identificar os pontos, logo, como alguns tinham feito as primeiras questões erradas, não seria possível identificar se realmente colocariam os valores certos.

Dez equipes desenharam uma parábola, no entanto, com alguns erros – que no geral foram: concavidade errada; curvas inteiras ou com uma parte nos eixos negativos; ponto inicial, final ou vértice incorretos.

Além disso, oito equipes deixaram em branco e três desenharam um segmento de reta.

Um ponto importante a ser destacado nessa questão é que nem metade das equipes conseguiram desenhar o gráfico corretamente, o que é preocupante, já que a parábola é um gráfico estudado desde o Ensino Fundamental.

2) Função com indeterminação

Quadro 22 – Enunciado da questão 2 da atividade 3, Graduação

2) Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. O que acontece com os valores de *f* quando *x* está próximo de 2? Desenhe o gráfico da função *f(x)*.

Fonte: Produção da autora

Aqui vamos separar a questão em dois tópicos, na resposta dada sobre o que acontecia com a função e o desenho do gráfico.

i) Resposta dada do comportamento da função.

Sete equipes chegaram a conclusão - sem usar especificamente o limite em algum momento - que quando x está próximo de 2, a função f se aproxima de 4. Estas, usaram atribuição de valores próximo de 2, algumas colocaram no papel os cálculos, outras apenas escreveram a resposta, como:

- "f se aproxima de 4, conclusão definida por atribuição de valores." (Equipe 8, BCC).

Seis equipes usaram somente o cálculo de limite para dar a resposta, desses, dois calcularam incorretamente.

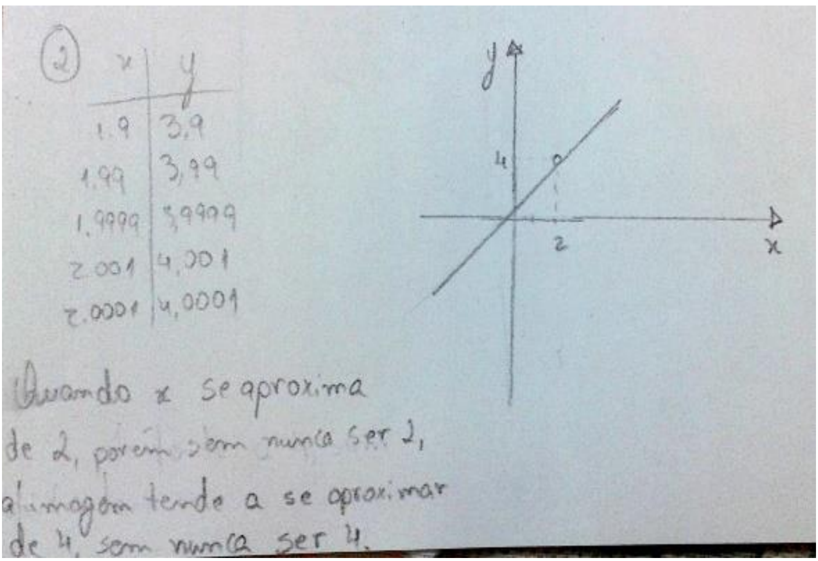
Surgiram em treze equipes, as seguintes respostas com relação ao valor que a função $f(x)$ tendia quando x se aproximava de 2: tende a zero; se aproxima de 2; tende a infinito; ou, tende a não existir.

Dez equipes tentaram fazer os cálculos para valores de x, próximo a 2, porém, a maioria cometeu algum erro em alguma etapa, fazendo com que não conseguissem chegar a uma conclusão a respeito dos resultados. Também, oito grupos deixaram em branco.

ii) Desenho do gráfico da função.

Com relação ao gráfico, oito grupos conseguiram fazer completo, fazendo a reta $f(x) = x - 2$, colocando a escala e também uma bola aberta no ponto $(2{,}4)$, como na Figura 3:

Figura 3 - Resposta dada na questão 2 da atividade 3 pela equipe 12 da turma de BCC

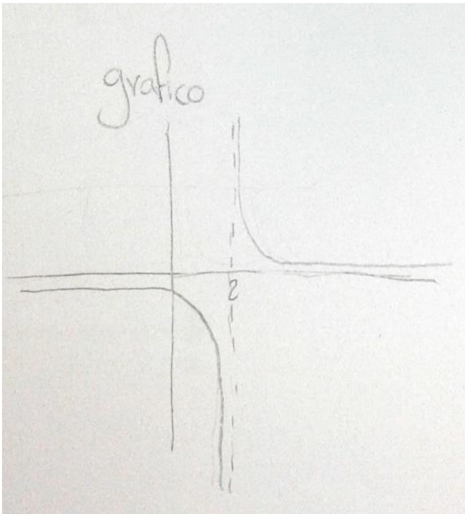


Fonte: Produção dos alunos

Sete equipes desenharam uma reta, que parece ser a função $f(x)$, porém, ou não colocaram escala e/ou não colocaram a bola aberta.

Na representação gráfica saíram outros tipos de curvas, como: parábolas; exponenciais; três equipes (uma de cada turma), desenharam a função $f(x) = 1/(x-2)$, colocando uma assíntota em $x = 2$, como na Figura 4; e também surgiram outros tipos indefinidos de curvas. E, nove equipes não desenharam nenhum gráfico.

Figura 4 - Resposta dada na questão 2 da atividade 3 pela equipe 11 da turma de BCC



Fonte: Produção dos alunos

Algumas conclusões gerais que tiramos desta questão, foram:

- Ocorreram muitos erros na hora dos estudantes calcularem a função em algum ponto, parece que eles têm problemas com o sinal negativo e também com números decimais.
- Talvez pelo fato de não terem ainda muito conhecimento de proximidade, acabaram atribuindo valores relativamente distantes um dos outros na função, como por exemplo, atribuiram $x = 1$ e $x = 3$. Assim, ficou difícil de perceber que f estava tendendo para o número 4.
- Muitos também não têm conhecimento que $0/0$ é uma

indeterminação, assim, acabaram chutando valores para ele.

- No geral, as resoluções apresentadas, foi o que prevíamos na análise a priori.

3.2.2.4 Observação e institucionalização da primeira seção da sequência didática na Graduação

Nas três turmas, antes de começar as atividades, foi entregue o termo de consentimento (Apêndice A) aos alunos explicando o contexto da pesquisa para eles assinarem e assim declararem estarem cientes na participação das atividades propostas.

Após responderem o questionário inicial, foram passadas as três primeiras atividades em sequência. Apesar de serem realizadas na mesma aula, a seguir vamos dividir em itens a aplicação de cada uma delas.

3.2.2.4 .1 Atividade 1: Investigação Preliminar

Como as respostas desta atividade, não foram discutidas juntamente com a turma depois que entregaram, a seguir, citamos algumas situações que ocorreram durante sua realização em sala.

- Algumas equipes não estavam discutindo entre elas as questões, estavam fazendo cada um por conta, talvez por não terem proximidade com os colegas;
- A questão 2 gerou dúvidas, perguntaram se as sentenças poderiam ou deveriam ser matemáticas.
- Na turma NEX, muitos não sabiam ou não lembravam de como faziam para resolver o limite da questão 5, inclusive um membro de uma equipe falou "Eu já vi isso, mas não lembro como calcula".
- Na turma de BCC na questão 5, uma equipe estava usando o celular, então quando questionados sobre o que estavam procurando, eles mostraram que estavam pesquisando no *Google* como escrevia *L´Hopital*, então perguntei se eles já tinham cursado Cálculo I (já que só se vê a regra de *L'Hopital* depois), eles disseram que não, mas que um amigo deles já tinha feito e tinha falado a respeito disso, então imaginaram que poderia ser assim que se resolveria a questão.

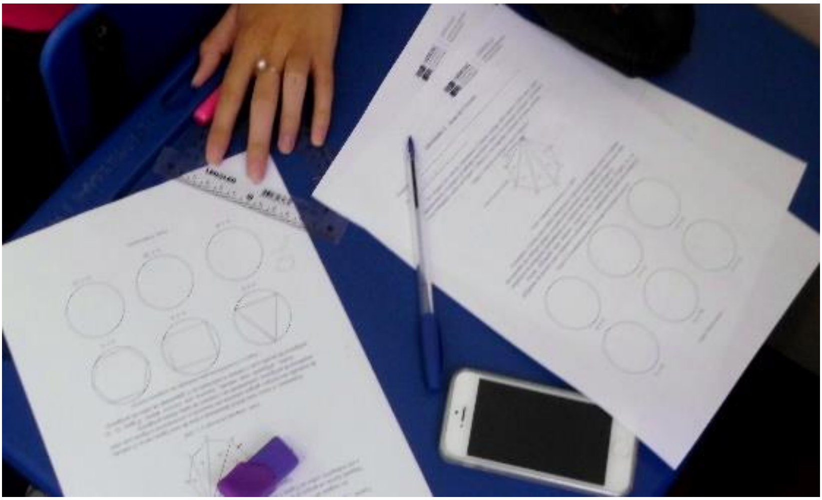
- Alguns alunos estavam com celular, pode-se considerar que alguns podem ter pesquisado as questões na internet. E, outros estavam com a apostila de CDI I aberta.

3.2.2.4 .2 Atividade 2: Área do círculo

Logo após entregarem a atividade 1, já foi entregue para os grupos resolverem a atividade 2.

Os alunos, de todas as turmas, focaram demais no desenho dos polígonos inscritos, muitos estavam preocupados em desenhar os polígonos perfeitamente com todos os lados da mesma medida, inclusive, alguns estavam usando transferidor para medir os ângulos e marcar os pontos, para então traçar as retas, como ilustra a foto da Figura 5.

Figura 5 - Foto da atividade 2 de uma equipe da turma NEX



Fonte: Produção dos alunos

Por esse fato, umas equipes deixaram pouco tempo para responder as questões da atividade, que era o foco principal.

Depois de serem recolhidas as respostas, as professoras das turmas, fizeram a institucionalização das questões dessa atividade.

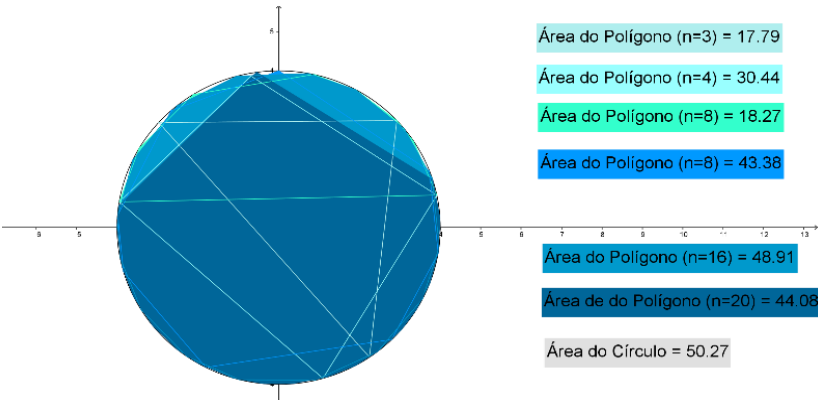
Na turma NEX, depois de ser iniciado a discussão com a turma um aluno levantou o questionamento: “Poderia inscrever uma estrela?”.

A professora então desenhou no quadro a estrela inscrita, que ficaria como um polígono de dez lados. Os alunos se divertiram na discussão de como teria que ser o polígono ideal para responder à questão 2, então eles chegaram à conclusão que esse polígono deveria ter lados iguais, ou seja, ser um polígono regular.

Nas turmas de BCC e FIS, também com algumas perguntas feitas pela professora, os alunos concluíram que na questão 1, a área do polígono tendia a área do círculo, mas que isso só aconteceria se os polígonos fossem regulares – resposta da questão 2. Inclusive, com relação aos polígonos serem regulares, uma equipe estava esperando ansiosa por esta resposta, pois cada membro entregou folhas separadas da sua resolução, visto que um deles achava que teria que ser um polígono regular e outro não.

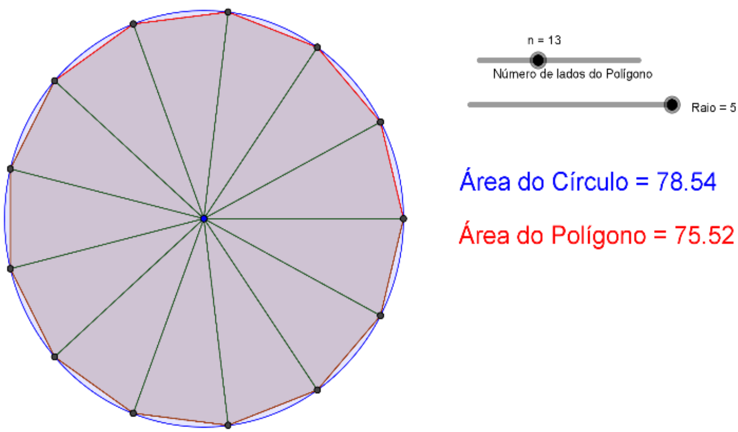
Além disso, para ilustrar para os alunos esses fatos, a autora produziu alguns recursos do Geogebra – Figura 6 e 7 – que foram utilizados pelas professoras durante a explicação da atividade.

Figura 6 - Tela do Geogebra ilustrando a área dos polígonos quando esses são irregulares



Fonte: Produção da autora

Figura 7 - Tela do Geogebra ilustrando a área dos polígonos quando esses são regulares



Fonte: Produção da autora

3.2.2.4 .3 Atividade 3: Ideia intuitiva de limite

Após feita a institucionalização da atividade 2, foi entregue, para as equipes, a atividade 3.

Na primeira questão dessa atividade, foi observado que os alunos faziam gestos com as mãos uns para os outros para mostrar o movimento que o projétil iria fazer.

Outro ponto percebido foi que algumas equipes colocaram as funções dessa atividade na calculadora científica ou no celular para verificar seu comportamento e para desenhar o gráfico.

Na segunda questão surgiram mais dúvidas, como as relatadas abaixo:

- Na turma NEX: Perguntaram o seguinte: “Não entendemos direito, jogamos pontos e percebemos que tende para *4*, mas quando jogamos o 2, não da certo, o que fazer aqui?”.
- Na turma de FIS: Com relação ao gráfico, um aluno perguntou se o que ele tinha desenhado estava certo, porque ele não sabia o que acontecia quando tinha chegado em $0/0$,

> assim, foi explicado que isso significava uma indeterminação, e não 0 como ele tinha colocado no gráfico (colocou o ponto (2,0)), daí ele falou: "ah então é como se a função se dividisse em duas?".

Ainda na questão 2, um fato observado é que algumas equipes estavam comentando entre si sobre o que acontecia com a função quando x se aproximava do número 2, porém, não escreviam na folha que iriam entregar essas conclusões que chegavam. Por exemplo, na turma de BCC, uma equipe estava comentando quais valores estavam atribuindo próximos de 2: "jogando 2,1 se aproxima de 4" e "se jogarmos 1,9 também".

Depois dos alunos entregarem a atividade, foi feito a discussão junto com a professora das questões dessa atividade. Sendo resolvidas no quadro todas elas.

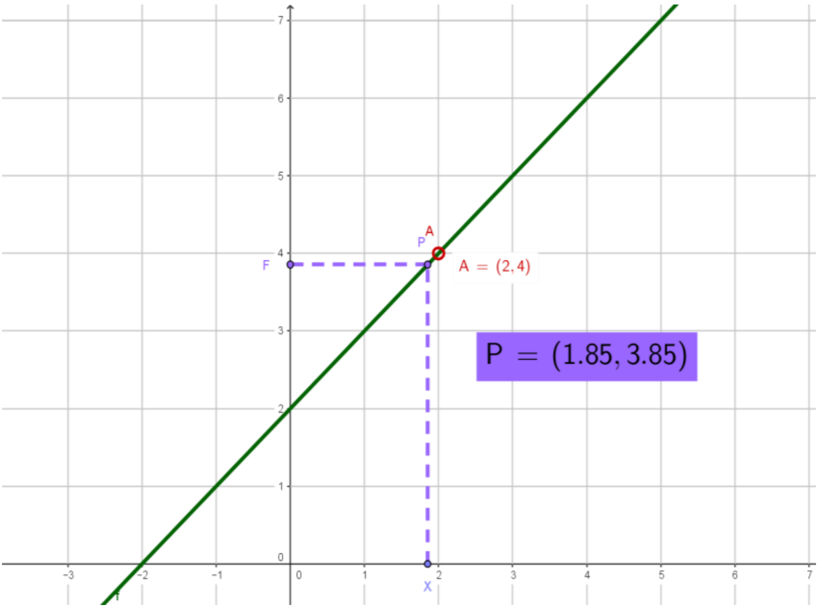
A letra a, da questão 1, não gerou questionamentos pelos alunos, mas a letra b sim, com relação ao significado da palavra "aproxima". Por exemplo, na turma de BCC, alguns alunos falaram que jogaram o número 3 na equação e outros disseram que não poderia ser colocado o número 3, assim, a professora da turma usou um exemplo para explicar essa situção: "Se eu estou caminhando em direção a parede, eu estou na parede?". O que foi bem interessante, pois parece que então os alunos realmente entenderam o que signica a palavra aproximar.

Sobre o desenho do gráfico da função $s(t) = -t^2 + 6t$, quando foi mostrado que ele se limitava no domínio entre 0 e 6, alguns alunos notaram que tinham feito errado, pois não colocaram essa restrição, e um aluno de uma equipe da turma NEX ainda brincou sobre isso, dizendo, "Nosso projétil afundou na terra!".

Na discussão da questão 2, uma dúvida levantada pela professora da turma NEX foi a respeito do gráfico, se $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ e $f(x) = x + 2$ eram realmente iguais, já que alguns levantaram a hipótese de simplificar a função. Alguns alunos falaram que sim, outros falaram que não - pois tinha uma diferença, que era a bola aberta no ponto (2,4).

Esse fato então foi mostrado para os alunos pelas professoras com o auxílio de uma contrução feita pela autora no Geogebra (Figura 8), usando um controle deslizante, que mostrava que quando x estava próximo de 2, a função $f(x)$ se aproximava de 4, tanto pela direita quanto pela esquesda, e que no ponto (2,4) – a indeterminação – a resposta que o programa fornecia era um ponto de interrogação.

Figura 8 - Tela do Geogebra ilustrando a indeterminação no ponto (2,4) com auxílio de um controle deslizante



Fonte: Produção da autora

A aula da turma NEX e de BCC encerraram com a professora passando mais dois exemplos para eles pensarem em casa, que foram retomados na aula seguinte – colocados na institucionalização da próxima sessão. Na turma de FIS não, pois já foi preciso estender 10 minutos extra da aula para terminar a resolução da atividade 3, nessa turma durante a realização das atividades, acabou a luz na sala, então foi preciso encontrar outra disponível para os alunos trabalharem.

3.2.3 Análise a Posteriori da Segunda Seção – Atividade 4

3.2.3.1 Análise a posteriori da atividade 4

Esta atividade foi aplicada utilizado duas aulas faixas nas três turmas. Com um total de 41 equipes, sendo, 16 da turma NEX, 14 da turma de BCC e 11 da FIS.

Apresenta-se esta análise, conforme realizada na análise a priori, aqui, apenas separamos a análise das questões *b* e *c*.

a) Valor das vendas

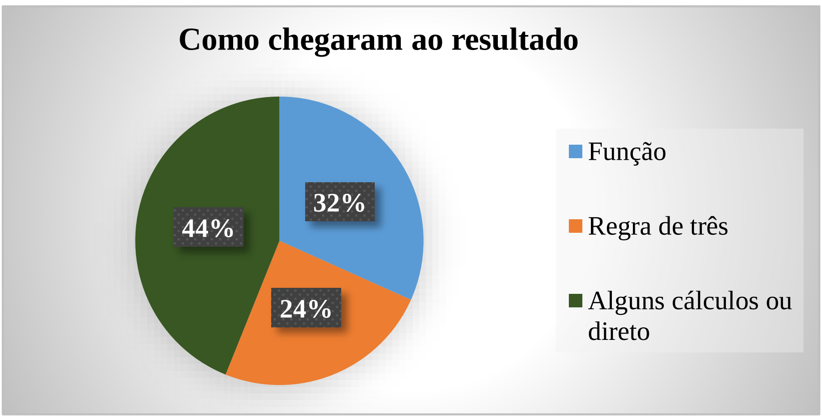
Quadro 23 – Enunciado questão *a* da atividade 4 da Graduação

1. O salário dos funcionários de uma empresa é composto de uma parte fixa no valor de R$ 900,00, acrescidos de mais uma parte variável (comissão) de 10% sobre o valor de suas vendas no mês. a) Se um funcionário recebeu o pagamento de R$ 1400,00, qual foi o valor adquirido com as vendas desse empregado?

Fonte: Produção da autora

De todas as equipes apenas uma não chegou ao resultado correto. Os métodos utilizados para a resolução foram semelhantes aos que colocamos na analise a priori. E esses estão representados no Gráfico 9, com sua respectiva porcentagem da quantidade de respostas.

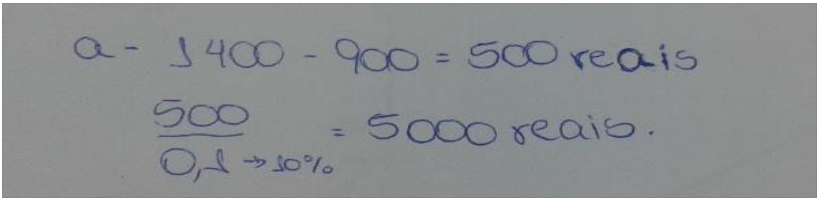
Gráfico 9 – Método de resolução pelas equipes de Graduação da questão *a* da atividade 4



Fonte: Produção da autora

Percebemos que boa parte dos estudantes ou utilizaram alguns cálculos – geralmente somente uma multiplicação – para encontrar a resposta ou fizeram as contas direto e colocaram apenas a resposta, como ilustra da Figura 9.

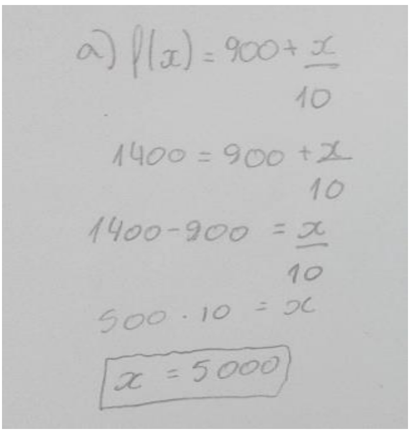
Figura 9 - Resolução da questão a da atividade 4 pela equipe 8 NEX



Fonte: Produção dos alunos

Outros - treze equipes - inicialmente escreveram a função e depois substituíram os valores e chegaram ao resultado, como ilustra a Figura 10. Destes, alguns escreveram os 10% na forma decimal e outros na forma de fração. Usaram, a nomenclatura de $f(x), y, s(v)$, e na variável independente, a grande parte usou x, outros v e também teve uma equipe que usou n.

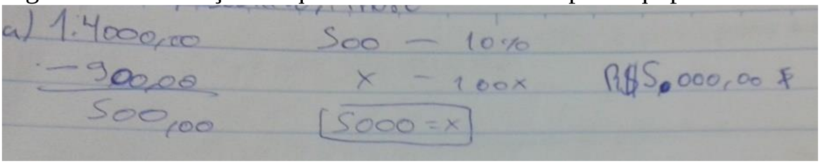
Figura 10 - Resolução da questão a da atividade 4 pela equipe 13 BCC



Fonte: Produção dos alunos

E, dez grupos preferiram fazer por regra de três, um exemplo está representado na Figura 11.

Figura 11 - Resolução da questão *a* da atividade 4 pela equipe 10 FIS



Fonte: Produção dos alunos

b) Valor das vendas – primeiro intervalo

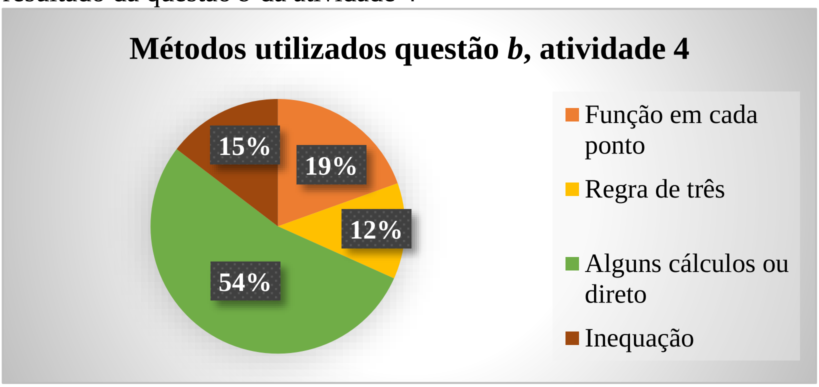
Quadro 24 – Enunciado questão *b* da atividade 4, Graduação

b) Suponha que esse mesmo funcionário deseja receber no mês seguinte um salário entre R$ 1200,00 e R$ 1600,00, qual será o valor que deverá arrecadar com suas vendas?

Fonte: Produção da autora

Apenas uma equipe não chegou ao resultado de 3000 e 7000 da questão. Os métodos usados para tentarem chegar a resposta estão dispostos no Gráfico 10:

Gráfico 10 – Métodos usados pelas equipes de Graduação para chegar ao resultado da questão *b* da atividade 4

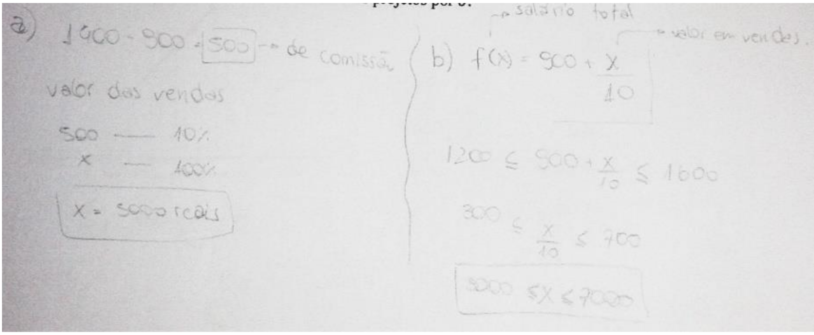


Fonte: Produção da autora

Como na resposta da letra *a*, aqui também o modo mais usado para chegar ao resultado foi fazer apenas alguns cálculos ou colocar o resultado direto, sem justificar os cálculos na folha.

Muitas equipes também não usaram o mesmo modo para encontrar o resultado da *b*, como fizeram na letra *a*. Por exemplo, algumas que tinham feito inicialmente usando a função, nesta, fizeram o cálculo direto ou usaram inequação. Outros que primeiramente tinham feito direto ou usando regra de três, agora construíram a função, como, na Figura 12:

Figura 12 - Resolução das questões *a* e *b* da atividade da equipe 10 FIS



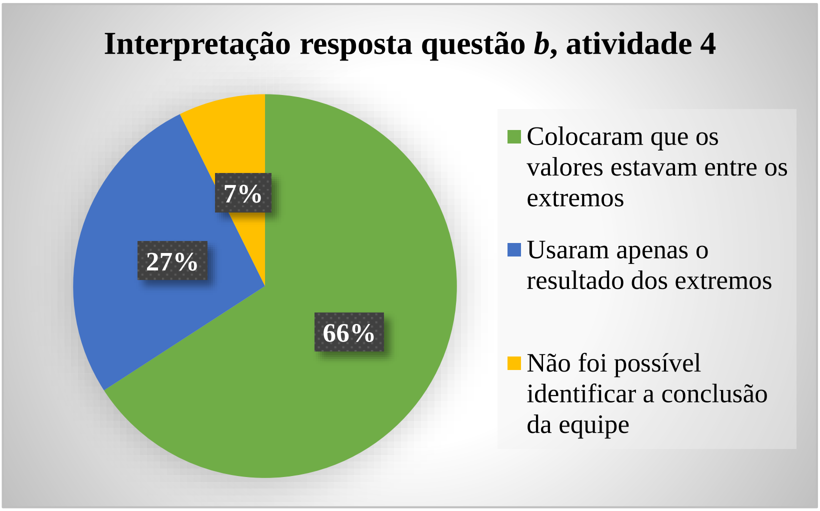
Fonte: Produção dos alunos

Seis grupos optaram por usar inequação desde o início do desenvolvimento da resposta. E outros seis grupos, apesar de não usarem inequação durante o desenvolvimento, deram a resposta final usando inequação, da forma: $3000 < v < 7000$, ou usando o sinal de $\leq$, e/ou usando outra variável no lugar do *v*. Porém, duas dessas equipes, usaram um sinal errado, colocando: $3000 > x < 7000$, ou seja, não interpretaram corretamente.

Assim, como foi imaginado na análise à priori, apesar de praticamente todas as equipes chegarem ao resultado de 3000 e 7000, nem todas interpretaram o significado de “entre” que estava falando na pergunta.

O Gráfico 11 ilustra os percentuais de interpretação dessa questão.

Gráfico 11 – Resultado da interpretação das equipes da Graduação da letra *b* da atividade 4



Fonte: Produção da autora

Vimos que mais da metade conseguiu entender a pergunta, escrevendo a resposta em forma de inequação, ou escrevendo que "o valor das vendas estava entre 3000 e 7000 reais", ou que "terá que vender de 3000 a 7000".

Nas equipes que não foi possível identificar sua conclusão duas deixaram respostas, como: $3000 \rightarrow 7000$; $3000 \sim 7000$.

Outros, deixaram apenas os cálculos feitos com a resposta, e não escreveram nada, e outras, colocaram apenas que seria 3000 e 7000 reais.

c) Valor das vendas – segundo intervalo

Quadro 25 – Enunciado questão *c* da atividade 4, Graduação

c) Refaça a questão (b) supondo que este funcionário planeja receber, no mês seguinte, o pagamento no intervalo de R$ 1300,00 à R$ 1500,00.

Fonte: Própia autora

Para resolução desta questão, com exceção de duas equipes que deixaram a questão em branco, todas usaram o mesmo método que já tinham resolvido a questão *b*.

Da mesma forma aconteceu com a interpretação do que significa estar "entre" os valores, apenas uma equipe fez diferente, pois na letra *b* tinha colocado como $3000 \rightarrow 7000$, e nesta só fez os cálculos, não escrevendo sua conclusão.

d) Gráfico

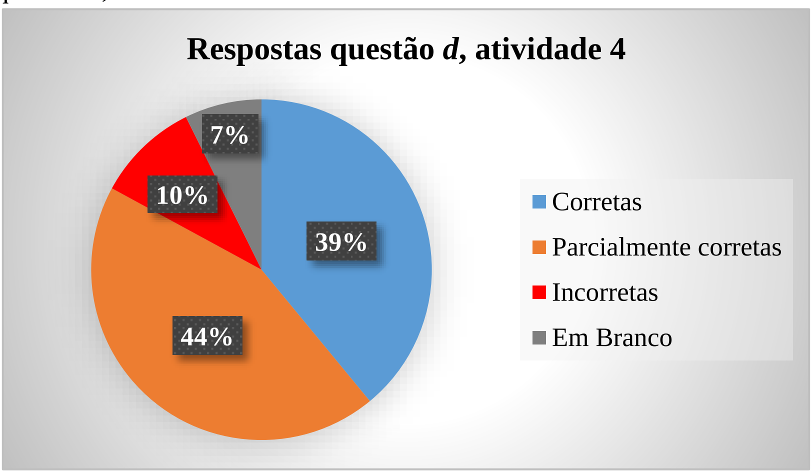
Quadro 26 – Enunciado questão *d* da atividade 4 da Graduação

d) Represente graficamente as situações dos itens (*a*, *b*, *c*) e responda: O que acontece com a variação do valor arrecadado dos projetos quando o pagamento está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 1400,00?

Fonte: Própria autora

A primeira parte da questão consistia em desenhar o gráfico e as respostas ficaram classificadas como no Gráfico 12:

Gráfico 12 – Porcentagem das respostas pelas equipes da Graduação da questão *d*, atividade 4

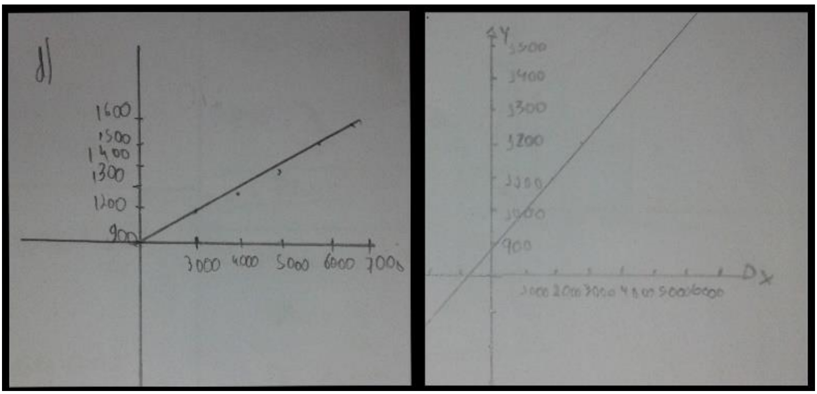


Fonte: Produção da autora

A maior ocorrência foi de gráficos parcialmente corretos, classificamos dessa forma, pois muitas equipes tiveram algum tipo de erro na plotagem, como por exemplo: esqueceram da restrição do domínio da função, passando a reta para o eixo negativo do plano cartesiano; não marcaram todos os pontos necessários para representar as questões *a*, *b* e *c*; e muitos também, marcaram os pontos corretamente, porém, colocaram o início da reta na origem, como se ali fosse o ponto (0,900).

Como exemplo apresentamos as fotos da Figura 13:

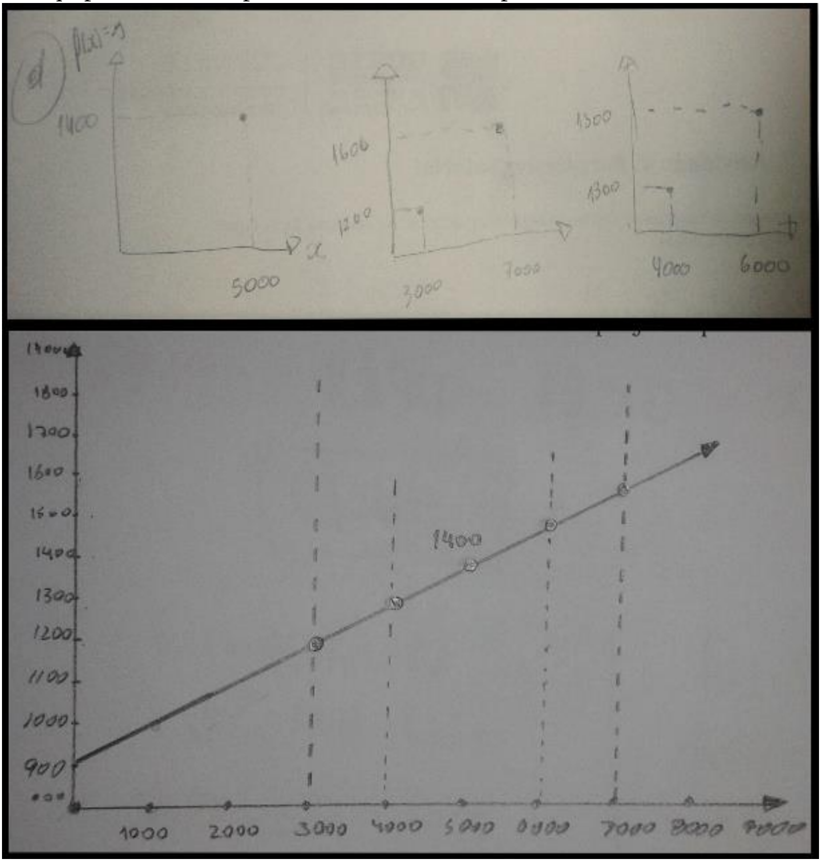
Figura 13 - Resolução da questão *d* da atividade 4 da equipe 14 BCC e da equipe 1 FIS, respectivamente



Fonte: Produção dos alunos

Com relação aos gráficos corretos, alguns alunos optaram por desenhar três gráficos, um para cada questão, e outros colocaram todos os pontos num só, como ilustrado na Figura 14:

Figura 14 – Resolução da questão *d* da atividade 4 da equipe 13 BCC e da equipe 6 NEX, respectivamente, de cima para baixo



Fonte: Produção dos alunos

Nessa questão, além do gráfico, os alunos deveriam responder ao questionamento sobre a variação do valor arrecadado, mas vinte e três equipes deixaram em branco.

Assim, um pouco menos da metade dos grupos colocaram alguma justificativa, as quais estão classificadas no Gráfico 13:

Gráfico 13 – Porcentagem das justificativas pelas equipes de Graduação da questão *d* da atividade 4

Fonte: Produção da autora

Das equipes que responderam, onze conseguiram ver que o valor se aproximava de 5000, como a resposta de uma equipe da turma NEX: “com um salário de aproximadamente de 1400, o valor de vendas tende a 5000” (Equipe 11). Duas equipes, classificadas como sua resposta estando parcialmente correta, analisaram apenas um dos lados da função, como por exemplo, a resposta dada pela equipe 6 da turma de BCC: “a variação do valor arrecado aumenta conforme o pagamento aumenta”.

E as cinco respostas incorretas, colocaram que, ou não sofria variação, ou, que se aproximava de 1400, logo, confundiram a dependência do domínio e imagem.

e) ε e δ

Quadro 27 – Enunciado questão *e* da atividade 4, Graduação

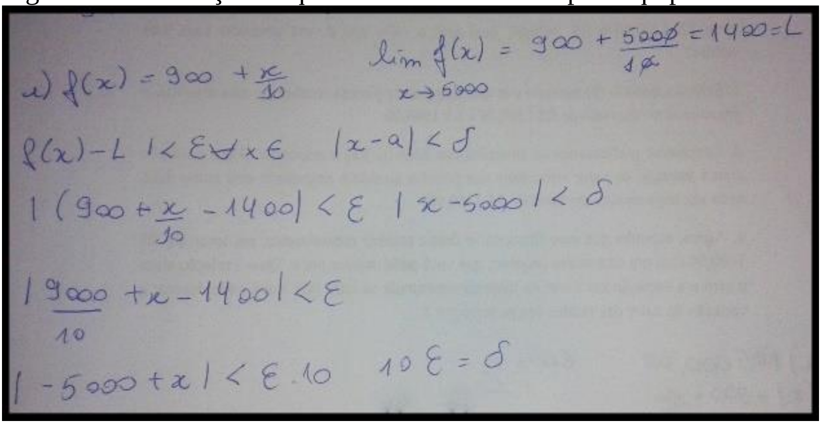
e) Agora, suponha que esse funcionário deseje receber mensalmente, em torno de R$ 1400,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno da resposta encontrada na letra (*a*)? Você pode denotar a variação do valor das vendas dos projetos por δ.

Fonte: Produção da autora

Esse item foi o que mais gerou discussões e dúvidas, e muitos não conseguiram resolver.

Do total, cinco equipes conseguiram visualizar graficamente e/ou fazendo alguns cálculos que $\delta = 10\varepsilon$, porém, algumas não souberam como mostrar isso matematicamente – sendo mais comum nas turmas de BCC e FIS, provavelmente isso aconteceu, porque esses alunos são iniciantes, e este foi o contato inicial com os epsilons e deltas do Cálculo. Já na turma de repetentes, foi um pouco diferente, pois algumas equipes chegaram na relação usando a definição formal como, por exemplo, a apresentada pela equipe 5 da turma NEX que pode ser observada na Figura 15.

Figura 15 - Resolução da questão *e* da atividade 4 pela equipe 5 NEX


$\lim_{x \to 5000} f(x) = 900 + \frac{500\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 1400 = L$

e) $f(x) = 900 + \frac{x}{10}$

$|f(x) - L| < \varepsilon \; \forall x \in \quad |x - a| < \delta$

$|(900 + \frac{x}{10} - 1400| < \varepsilon \quad |x - 5000| < \delta$

$|\frac{9000}{10} + x - 1400| < \varepsilon$

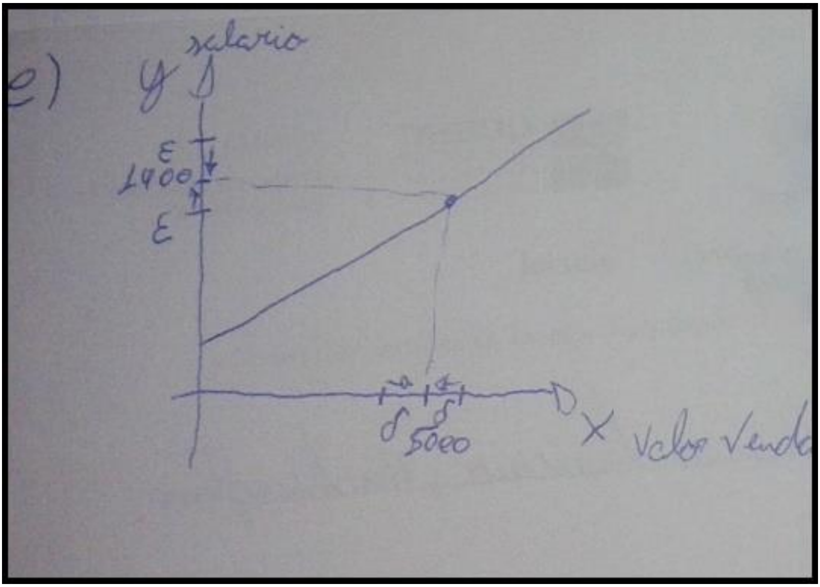
$|-5000 + x| < \varepsilon . 10 \quad 10\varepsilon = \delta$

Fonte: Produção dos alunos

Um erro de interpretação que ocorreu foi que duas equipes chegaram a $\varepsilon = 10\delta$ e uma deixou da seguinte forma $10\%\varepsilon \leftrightarrow 100\%\delta$, ou seja, estes trocaram o δ pelo ε.

Quatro equipes não chegaram na relação final, mas conseguiram interpretar corretamente o significado de δ e ε no gráfico, como ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Resolução da questão *e* da atividade 4 feita pela equipe 2 NEX



Fonte: Produção dos alunos

Muitos grupos tentaram de alguma maneira - graficamente ou algebricamente - chegar na relação, porém não conseguiram chegar a um resultado coerente. Alguns desses, então, apenas escreveram suas conclusões, como a Equipe 1 da turma de BCC, que colocou: “dependendo do valor do erro, o valor do salário aumentará ou diminuirá (reta se deslocará ao longo da reta y). A variação de ε é proporcional à variação do salário”. E, quatorze equipes deixaram essa questão em branco.

3.2.3.2 Observação e institucionalização da segunda seção da sequência didática na Graduação

Diferentemente da observação e institucionalização da primeira seção da sequência didática, aonde em todas as turmas de Graduação as situações ocorridas durante a aplicação foram semelhantes, aqui, na atividade 4, aconteceram fatos distintos, por isso, separamos em subseções cada uma das turmas.

3.2.3.2.1 Observação e institucionalização da segunda seção - turma NEX

Na turma NEX, a aula iniciou com a explicação da professora das questões que tinha deixado para os alunos como tarefa de casa na aula anterior: O que acontece quando x se aproxima de zero das funções: $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ e $g(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$?

Quando foi questionado aos alunos de quem tinha tentado fazer, apenas dois se manifestaram. Um desses falou que fez por comparação, comparando áreas e o setor circular:

$$\frac{1}{2}sen(x) \leq \frac{1}{2}x \leq tg(x)$$

$$sen(x) \leq x \leq \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

$$sen(x) \leq x \leq \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{1}{sen(x)} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{cos(x)}{\mathrm{sen}(x)}$$

$$1 \leq \frac{sen(x)}{x} \leq \cos(x)$$

Ou seja, o aluno usou o teorema do confronto, e como $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, segue que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen(x)}}{\mathrm{x}} = 1$. Essa resolução é formal para provar que esse limite é igual a 1. Na proposição desses exercícios as estratégias esperadas para resolução eram bem mais simples, apenas analisar os valores de f e g quando x está próximo de zero, como por exemplo:

$$f(0.1) \cong 0{,}99833$$
$$f(-0.01) \cong 0{,}99998$$

Assim, atribuindo valores para x, próximo de zero, pode-se perceber que a função f tende para 1. Neste momento também foi enfatizado o uso da calculadora, já que muitos não sabem como operá-la, nesta questão é necessário mudar para radianos, caso contrário não calculará o valor desejado.

Na função g jogando valores para x, por exemplo:

$$g(0{,}1) = 0$$
$$g(0{,}12) = 0{,}8660$$
$$g(-0{,}01) = 0,$$

encontram-se valores bem dispersos, não tendendo a um ponto específico. Neste momento um aluno levantou a questão do período da função, que ela oscilava muito, por isso não existiria um limite. E, de fato variações pequenas de x próximo de zero faz com que $\frac{1}{x}$ oscile muito, percorrendo o período de $sen(x)$ várias vezes.

Essa é a ideia intuitiva de limite, analisar o valor das imagens da função quando x se aproxima de um ponto fixo. Porém, somente com o uso dessas tabelas de valores pode induzir a erros, como visto na função g. Logo, precisa-se de mais argumentos para afirmar o valor do limite e também para prová-lo. Dessa forma foi motivada a definição formal para o limite.

Assim, iniciou-se a atividade 4, e as dúvidas que surgiram durante a atividade foram:

- Se na letra a deveriam calcular a venda total, ou a porcentagem ganha pela empresa ou pelo funcionário nas vendas;
- Perguntaram se era necessário montar a equação;
- Muitas dúvidas em como resolver a letra e. Não entendiam o que era para fazer na relação entre δ e ε.
- Alguns alunos lembravam que a definição formal envolvia módulo, então eles queriam saber o que seria o "*a*" e o que seria o "*L*", ou seja, queriam encaixar essa questão na definição formal, porém eles não conseguiam identificar o que seria cada um. Assim, nessa equipe, já ter uma base de limite, dificultou no seu desenvolvimento, pois eles já tinham uma ideia formada na cabeça e não conseguiram pensar de uma forma diferente, interpretando as questões dadas.

Após a entrega das atividades, na discussão com a professora, comentaram que tinham montado a equação, alguns tinham resolvido as letras *b* e *c* por desigualdades e outros falaram que calcularam a função apenas no ponto solicitado.

Quando a professora mostrou como resolveria a letra *e*, alguns alunos ficaram surpresos, pois não imaginavam que era tão simples, já que eles estavam tentando fazer algo muito complexo.

Então, a professora passou a definição formal para eles:

Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *se para todo ponto* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, existe* $\delta > 0$, *tal que* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

E, por fim, deixou como tarefa de casa:

Prove por definição que:

a) $\lim_{x \to 5000} \frac{\mathrm{x}}{100} + 900 = 1400$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{\mathrm{x}^2 - 4}{\mathrm{x} - 2} = 4$

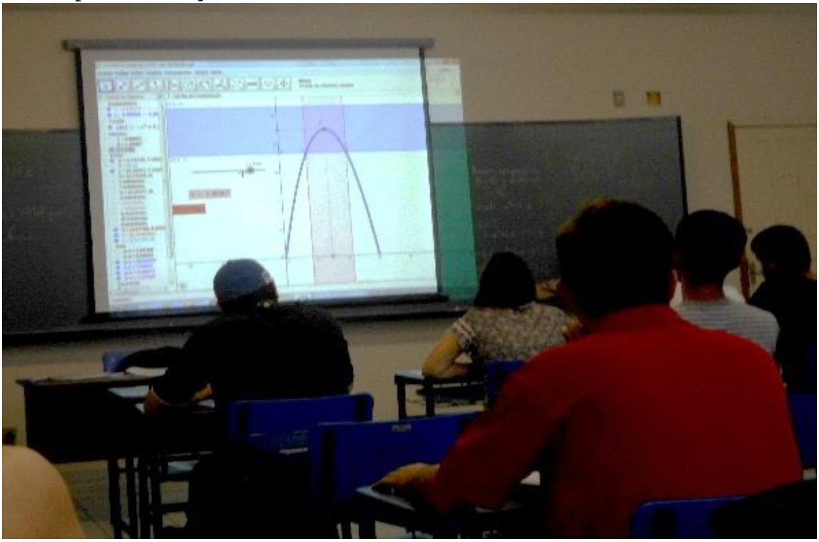
c) $\lim_{x \to 3} (-\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x}) = 9$

Esses limites eram das funções já vistas nas atividades 2 e 3 aplicadas anteriormente na sequência didática.

A autora, pode acompanhar a aula seguinte dessa turma, para ver como foi o desenvolvimento desses exemplos com relação a definição formal de limite.

A professora da turma, na resolução da tarefa, além de mostrar algebricamente como era possível chegar na relação entre ε e δ, também mostrou graficamente com o auxílio do Geogebra como seria realizada a interpretação, como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Foto da explicação geométrica com auxílio do Geogebra do limite pela definição da atividade 3 na turma NEX



Fonte: Produção da autora

Vale enfatizar que os alunos pediam para professora mostrar no gráfico o que acontecia com a relação entre ε e δ para entender melhor. Assim, parece que com o auxílio de artifícios geométricos os estudantes conseguem compreender melhor o que acontece.

3.2.3.2.3 Observação e institucionalização da segunda seção - turma de BCC

Inicialmente a professora dessa turma discutiu o que acontecia com as funções: $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ e $g(x) = sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$, quando x tendia a *0*. Essa atividade tinha ficado como exercício para os alunos, porém parece que ninguém tinha tentado fazer.

Então, ela montou uma tabela no quadro com alguns valores, e pediu para os alunos calcularem os valores para saber o que acontecia com $f(x)$ próximo de zero. Aqui os alunos começaram a falar valores que não faziam sentido, e isso aconteceu porque não tinha mudado a função da calculadora para radianos. Depois de fazerem os cálculos certos perceberam que a função tendia para 1 quando se atribuía valores próximos de zero, e isso também foi confirmado explorando o gráfico com o GeoGebra.

Na função $g(x)$ atribuindo valores, alguns alunos falaram que ela ia para 0, e outros para 1. Então, com o auxílio do gráfico foi explicado que quando x tendia a 0, $g(x)$ não estava tendendo a nenhum ponto, pois a função oscila, ou seja, nesse caso não existiria o limite.

Depois, entregamos a atividade 4 da sequência didática para eles realizarem.

Nas primeiras questões parece que não tiveram muitas dúvidas, pelo menos não houve questionamentos. Porém, quando chegam na letra e, foi unanime, todas as equipes fizeram perguntas.

Uma equipe, conseguiu ver que $\delta = 10\varepsilon$, e falou: “Entendi a e, mas não consegui montar uma equação para demonstrar”.

Um comentário mais aleatório que surgiu, foi que um aluno me chamou até sua carteira, e questionou: “Que cor você acha que é esse marcador de texto?”, fiquei na dúvida porque o marcador não parecia ser amarelo e nem exatamente verde, era um meio termo, então ele me disse: “Esse marcador se aproxima de verde, mas não é verde!” (Figura 18).

Figura 18 - Marcador de texto que aluno da turma de BCC usou para relacionar com o limite

Fonte: Produção da autora

Depois que os alunos entregaram a atividade foi feita a discussão das questões. Então a professora da turma foi fazendo a discussão conforme os estudantes falavam de como eles tinham feito as questões. Nas letras *a, b, c* a maioria fez utilizando regra de três e no gráfico (letra *d*) traçaram uma reta ligando os pontos. Ou seja, esses alunos que utilizaram a regra de três, encontraram apenas os valores no ponto, não no intervalo que eles estavam localizados, aí a professora mostrou que a reta implicava que todos os valores estavam ali dentro, diferente do que eles tinham feito apenas achando os pontos da extremidade. Assim, a professora fez a atividades usando inequação, mostrando que desse modo, todos os valores estavam sendo englobados.

Na discussão da questão *e*, quando perguntado aos alunos o que eles fizeram, uma equipe disse que 1δ valia 10ε, pois, o salário dependia das vendas. Porém não sabiam como encontrar matematicamente esses valores, com isso, a professora colocou no quadro e tentou ir construindo com eles as ideias:

$$1400-\varepsilon<f(x)<1400+\varepsilon$$
$$-\varepsilon<f(x)-1400<+\varepsilon$$

Neste momento, um aluno falou que poderia usar a propriedade de módulo:

$$|f(x)-1400|<\varepsilon$$

e com relação a δ teria:

$$5000-\delta<x<5000+\delta$$
$$-\delta<x-5000<+\delta$$
$$|x-5000|<\delta$$

Então, a professora escreveu a definição formal do conceito.

3.2.3.2.1 Observação e institucionalização da segunda seção - turma de FIS

Nessa turma, não tinha dado tempo na aula anterior de passar exercício para os alunos tentarem fazer em casa, então inicialmente a professora colocou no quadro as questões: $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ e $g(x)=cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$, e perguntou o que ocorre com os valores das funções quando x se aproximava de 0. Aqui, na função $g(x)$, foi construída uma tabela dos valores da função g para x próximo a zero, como ilustra a Tabela 2:

Tabela 2– Construção feita em sala de aula

x	0,5	0,25	0,125	0,02	0,002
$g(x)$	1	1	1	1	1

Fonte: Própria autora

Ou seja, com essa construção, é induzido que o limite da função, quando x se aproxima de zero, é um. Na sequência, a professora mostrou que se escolhesse $x = \frac{2}{n}$ iria ter, para n ímpar $g\left(\frac{2}{n}\right) = 0$ e se n fosse par: $g\left(\frac{2}{n}\right) = 1$. E, então chegando à conclusão que o limite de $g(x)$ quando x e aproxima de 0 não existe.

Assim foi iniciado a atividade 4, pedindo para os alunos se reunirem em equipes.

Durante a realização um aluno estava dizendo para sua equipe: “só usar inequação; se você vê intervalo, é inequação” – se referindo ao que falava nas questões da atividade. Uma equipe tirou uma dúvida com relação a letra a, pois queriam saber se tinham montado certo a equação da função, pois falaram que nas outras questões também iriam precisar, e estavam com dúvidas com relação a porcentagem.

Na letra e, surgiram as seguintes discussões nas equipes: “se variação do salário é 400, a variação das vendas é 4000”; “Se o ε é 200 quanto vale δ?”; outra equipe que estava tentando chegar a alguma relação, disse “quer ver que vai ter que usar módulo, porque vai para menos e para mais” (no caso que ia para direita e esquerda). Outra equipe chegou a $\delta = \frac{10}{\varepsilon}$, apenas olhando e analisando as informações que tinham. Ou seja, muitos alunos conseguiram entender qual era a relação entre δ e ε, mas não conseguiram expressar algebricamente. O que é uma informação importante, já que muitas vezes nesse conteúdo, acontece o contrário: os alunos conseguem chegar a relação, como o professor explicou no quadro, porém não entendem o que isto significa.

Essa turma demorou um pouco mais para realizar a atividade, sobrando pouco tempo para discussão das questões com a professora No entanto, alguns estudantes não queriam sair da aula sem saber como fariam para mostrar algebricamente como chegavam a $\delta = 10\varepsilon$. Assim, a professora mostrou usando os exemplos das inequações das questões b e c, o que seria o δ e o ε - como foi descrito na institucionalização da turma de BCC - e depois escreveu a definição formal do conceito de limite.

3.3 APLICAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PÓS-GRADUAÇÃO

A aplicação da sequência didática foi realizada com a turma de Fundamentos do Cálculo, da Pós-Graduação da UDESC/JOINVILLE.

A professora Ivanete, responsável pela disciplina, forneceu um dia com quatro aulas faixa para o desenvolvimento das atividades. Nessa turma estavam matriculados cinco alunos.

Nessa disciplina os alunos ainda não tinham trabalhado com limites, então a sequência didática foi aplicada com esse intuito, para ser introduzido esse conceito, e também visto em termos de séries e sequências. Já que a disciplina trata dos fundamentos do Cálculo, e vimos que na história da construção do conceito, ele era inicialmente visto desse modo, sem usar funções.

3.3.1 Conhecendo a Turma – Questionário Inicial

Antes de iniciar as atividades, foi entregue um termo de consentimento (Apêndice D) e o questionário (apêndice E) para os alunos responderem.

A primeira pergunta era referente sua Graduação, na qual todos eles são formados em Licenciatura em Matemática, e o ano de conclusão desses, está apresentado na Tabela 3:

Tabela 3– Ano de conclusão de curso dos alunos da turma de mestrado

Aluno	Ano de Conclusão
A	2002
B	2006
C	2007
D	2014
E	2015

Fonte: Produção da autora

Dos cinco alunos da turma, quatro possuem Pós-Graduação, sendo em:

- Ciências exatas e naturais e Proeja[4];
- Metodologia e prática interdisciplinar;
- Mestrado em Matemática Aplicada;
- Engenharia de Produção.

Com relação ao nivel de ensino que os estudantes atuam ou atuaram como professor, temos que:

- 3 já deram aula no Ensino Fundamental;
- 2 no Ensino Médio;
- 2 no Ensino Superior;
- Nenhum no Ensino Técnico.

E a última pergunta do questionário foi referente se já tinham ministrado, ou se ministram atualmente CDI, sendo que dois estudantes responderam que sim e três que não.

3.3.2 Análise a Posteriori da Atividade 1

A primeira atividade, consistiu dos alunos responderem individualmente algumas questões. As quais serão analisadas pergunta por pergunta, tal como, na análise a priori.

1) Ideia de limite

Quadro 28 – Enunciado questão 1 da atividade 1, Pós-Graduação

1) Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

Fonte: Produção da autora

As respostas que os estudantes colocaram foram:

- Sequência de números onde, dependendo da relação estabelecida, pode ser finita ou infinita;
- Limite quando algo tende a...;
- Ideia de aproximação;

[4] Proeja: Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos.

- Entendo que em número deve se aproximar infinitamente a outro número;
- Imagino aproximações, tendências, chegar cada vez mais perto de um certo valor. Limite: algo que não pode ser ultrapassado.

Como já previsto na análise a priori, os estudantes escreveram respostas, relacionando o limite, como aproximação e fronteira. Também deram respostas mais matemáticas, usando a palavra "tende", e também sequência finita e infinita.

2) Frases limite

Quadro 29 – Enunciado questão 2 da atividade 1, Pós-Graduação

2) Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".

Fonte: Produção da autora

Tivemos as seguintes respostas:

- O limite da dimensão do universo é infinito. O limite da dimensão de uma estrada é finito.
- Podemos analisar numa função exponencial que o gráfico tende a se aproximar da assíntota que pode ser considerado como limite da função.
- Estou no meu limite. Limite territorial.
- Potência de um número real tendendo a 0. Divisão de um valor n por $n + 1$, com n tendendo a 0.
- O limite de uma função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ quando x tende a 1 é 2. Nesta via o limite de velocidade máxima permitida é $60km/h$.

Nenhum aluno, usou a definição formal de limite, como achávamos na análise a priori, porém, alguns usaram algum conceito de Cálculo para responder.

Outros também colocaram a resposta relacionando a palavra limite usada no cotidiano, com o sentido de aproximação ou fronteira.

3) Utilização matemática

Quadro 30 – Enunciado questão 3 da atividade 1, Pós-Graduação

3) Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?

Fonte: Produção da autora

As respostas dadas foram:

- Necessariamente existe um limite de tolerância para pressão abaixo do nível de água, em virtude das condições dos seres humanos. Assim existe "semelhança" do respondido da questão 1.
- $1,2,3,4,5, \ldots$ A sequência está tendendo ao infinito positivamente, então podemos representar $x \to \infty$.
- Limite de uma função; derivada; integral definida; continuidade. Todos os tópicos anteriormente mencionados usam aproximação.
- PG $(1,4,64, \ldots, n)$. Semelhante, pois o valor de n tende a um número infinito dependendo do objetivo da questão.
- É semelhante a questão 1 no sentido de aproximação de um valor.

Vemos que dois alunos, não colocaram uma utilização matemática para o limite. Dois colocaram relacionando com uma sequência tendendo a infinito. E outro, colocou várias utilizações do limite no Cálculo.

Ninguém relacionou com gráficos, assíntotas, máximos e mínimos ou citou a definição formal, como foi previsto na análise a priori

4) Existência limite de uma sequência

Quadro 31 – Enunciado questão 4 da atividade 1, Pós-Graduação

4) Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a sequência dada por: $a_n = b^n$, sendo b um número real. Conjecture sobre a existência do limite dessa sequência.

Fonte: Produção da autora

Os alunos, colocaram as seguintes conclusões:

- Se $b, n \in \mathbb{N}$ então o limite da sequência é infinito. Se $b \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$, o limite da sequência é zero. Em ambas situações o limite existe.
- $\lim_{x \to 1} b^n$ não entendi bem essa questão.
- Sequência: $(1, b, b^2, b^3, \dots, b^n)$, com $n \in N$.
  Se $|b| < 1$, então $\lim_{x \to \infty} b^n = 0$
  Se $|b| > 1$,então $\lim_{x \to \infty} b^n$ não existe.
  $$\lim b^n = \begin{cases} +\infty, \text{se } b > 1 \\ -\infty, \text{se } b < \text{-}1 \end{cases}$$
- Para o valor de n, esse poderá tender o valor de a num limite a esquerda ou a direita.
- $b, b^2, b^3, \dots, b^n \ \lim_{x \to \infty} b^n$
  Se $b > 1$ ou $b < -1 \quad \lim b^n = \infty$
  Se $b = 1 \quad \lim b^n = 1$
  Se $b = -1$, não me lembro, é uma sequência alternada $\lim(-1)^n$, acho que o limite não vai existir.
  Se $-1 < b < 1$, o limite vai existir e vai depender do valor de b.

Percebemos que na primeira resposta, o aluno restringiu o b para números Naturais e Racionais, porém, no enunciado falava-se que o b era um número Real. Além disso, suas interpretações também não estão corretas, pois para $b \in \mathbb{N}$, se o limite é infinito isso não significa que o limite existe. E para $b \in \mathbb{Q}$, a justificativa correta seria que para $b > 1$ o limite iria para infinito e para $b < -1$ não existe, pois oscila entre números positivos e negativos.

Na segunda resposta, percebemos que o estudante não está familiarizado com o conceito de sequência, pois colocou x tendendo ao número 1. Fato, previsto na análise a priori dessa questão. Também, na quarta resposta, temos que o mestrando não soube fazer a interpretação, já que n é sempre um número natural, mas o b não.

Em duas respostas, houve a tentativa da resolução correta. Colocaram os casos possíveis para a variável b. No entanto, na interpretação, quando $b < -1$, houve um equívoco nas duas respostas, pois um colocou que $\lim b^n = \infty$ e outro que, $\lim b^n = -\infty$, o que não é verdade, já que, como n é um número natural, temos que: quando n for par, o número resultante será positivo, e quando n foi ímpar, será negativo, onde então, o limite não vai existir, já que terão duas subsequências, cada uma delas tendendo para um valor diferente.

3.3.3 Análise a Posteriori da Atividade 2

Nesta atividade os alunos se reuniram em duas equipes, que chamamos equipe 1 e equipe 2 para ajudar na diferenciação durante o texto.

Como eram duas tarefas diferentes para fazer nessa atividade, vamos separar em subseções a análise a posteriori de cada uma.

3.3.3.1 Análise a posteriori da atividade 2 – tarefa 1

1) e 2) Experimento

Quadro 32 – Enunciado questão 1 e 2 da tarefa 1 da atividade 2, Pós-Graduação

Vá e encontre um ponto cerca de 6 passos (normais) de uma parede. Tente seguir as instruções: cada passo de Zeno que der deve ser metade da distância que há entre você e a parede. Continue a tomar passos até que você não consiga mais! Assim que estiver pronto, sente-se com seu grupo e responda às seguintes perguntas: 1. Quantos passos de Zeno você deu? 2. Você poderia ter dado mais passos? Se sim, quantos passos a mais poderia ter dado? Se não, explique por que o número de passos é o máximo.

Fonte: Produção da autora

Uma das equipes respondeu como esperávamos na análise a priori, que dariam 4 passos de Zeno, pois: “Esse número de passos é máximo, pois humanamente falando não podemos descartar a medida dos pés, pois um passo é a distância entre o dedão de um pé e o calcanhar do outro pé" (Equipe 1, Pós-Graduação).

A outra equipe, colocou que dariam 9 passos de Zeno e a justificativa dada foi que, com o metro não seria possível continuar. Esta equipe usou uma trena para medir todas as distâncias. Na segunda pergunta, responderam que, "Matematicamente é possível dar infinitos passos de Zeno" (Equipe 2, pós-Graduação).

Nessa tarefa, as duas equipes colocaram na folha que entregaram a distância até a parede de cada passo dado, e para isso usaram trena. Isso não era esperado, pois o intuito era que apenas simulassem os passos, sem precisar colocar a medida exata. Esse fato pode ter ocorrido, porque foi pedido para os alunos levarem trena para esta aula, mas era para a realização da tarefa 2, porém, provavelmente eles imaginaram que já nessa atividade teriam que usar esta ferramenta.

3.3.3.2 Análise a posteriori da atividade 2 – tarefa 2

1) *Passos de Leonard*

Quadro 33 – Enunciado questão 1 da tarefa 2 da atividade 2, Pós-Graduação

Vamos ajudar Sheldon e Leonard descobrir quantos passos Leonard terá que dar para atravessar esse corredor estranho. Digamos que esse corredor é semelhante ao corredor do bloco D da UDESC, então inicialmente meça quantos metros ele tem. 1. Com a medida que você encontrou para o comprimento do corredor, quantos passos você estima que Leonard terá que dar a fim de atravessá-lo? Explique sua estimativa.

Fonte: Produção da autora

Uma das equipes encontrou 20,45m para a distância do corredor, e a outra 20,43m, que foi próximo à medida que tínhamos previsto. A equipe 1 respondeu que "como um passo 'normal' mede cerca de 1m, então estimamos que Leonard terá que dar 21 passos para atravessar o corredor". E a equipe 2 disse, "terá que dar infinitos passos, conclusão tirada pelo item 2 da tarefa 1".

Ou seja, nenhuma das equipes chegou no resultado esperado, já que, uma delas não usou a restrição da questão de que - cada passo teria que ser a metade da distância até o final do corredor. E a outra desconsiderou o fato do tamanho do pé da pessoa.

2) Dois primeiros passos

Quadro 34 – Enunciado questão 2 da tarefa 2 da atividade 2, Pós-Graduação

2) Até que ponto Leonard percorre com o seu primeiro passo? Até que ponto ele percorre após seu segundo passo?

Fonte: Produção da autora

As duas equipes chegaram aos seguintes resultados:

- Primeiro passo: 10,225m; segundo passo: 15,3375m. (Equipe 1).
- Primeiro passo: 10,215m; segundo passo: 15,3225m. (Equipe 2)

O que era o esperado, conforme a medição da distância total do corredor.

Observamos aqui, que a equipe 1, não utilizou mais o mesmo raciocínio com que respondeu a primeira questão.

3) Cinco primeiros passos

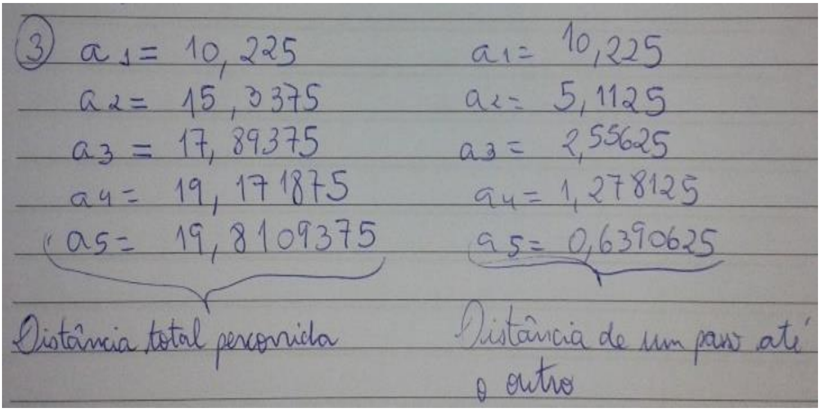
Quadro 35 – Enunciado questão 3 da tarefa 2 da atividade 2, Pós-Graduação

3) Seja $\{a_n\}$ a sequência em que o enésimo termo corresponde à distância que Leonard percorreu após seu enésimo passo. Compute os cinco primeiros termos desta sequência**.**

Fonte: Produção da autora

Essa questão gerou algumas dúvidas, tanto que as duas equipes colocaram duas sequências, como exemplo na Figura 19 estão as sequências colocadas pela equipe 1:

Figura 19 – Resposta da questão 3 da tarefa 2 da atividade 2 apresentada pela equipe 1



Fonte: Produção dos alunos

A dúvida que surgiu era se sequência pedida se referia a distância que Leonard tinha percorrido, ou a distância que restava para o fim do corredor. O que não foi previsto na análise a priori, já que a intenção era que chegassem na primeira sequência colocada pela equipe 1. Destacamos que na questão 2 dessa mesma tarefa não surgiu tal dúvida.

4) Extremidade do corredor

Quadro 36 – Enunciado questão 4 da tarefa 2 da atividade 2, Pós-Graduação

4) Leonard ficaria eternamente dentro de 0,5 metros da extremidade do corredor? Argumente sua resposta.

Fonte: Produção da autora

As respostas foram:

- Sim, porque a distância de um ponto até o outro chegaria cada vez mais perto de zero, mas não seria igual a zero, então ele ficaria dando infinitos passos, mas não chegaria na outra extremidade do corredor. Mas fisicamente, a distância a ser percorrida é finita. (Equipe 1).

- Sim, Leonard ficaria no corredor. Estaria cada vez mais próximo do final, mas não o atingiria. (Equipe 2).

Nesta resposta, as duas equipes responderam que sim, mas nenhuma usou a definição de limite de sequência como pensamos.

5) Limite de sequência

Quadro 37 – Enunciado questão 5 da tarefa 2 da atividade 2, Pós-Graduação

5) Leonard faz uma revelação impressionante: Ele afirma que se Sheldon falar qualquer distância, tão perto do comprimento do corredor quanto ele queira, se ele seguir as instruções do Senhor Zeno, depois de um certo passo, ele terá percorrido essa distância. Você acredita que isso é verdade? Por quê?

Fonte: Produção da autora

Os estudantes escreveram o seguinte:

- Sim. Porque pensando matematicamente ele não conseguiu atingir a distância exata, pois $a_n \neq 0$, porém, conseguirá chegar tão perto de 20,45m quanto se queira. (Equipe 1).
- Acredito que sim, pois o número de passos de Zeno é infinito, mas o comprimento do corredor é finito. (Equipe 2).

Apesar de responderem corretamente, nenhuma das duas equipes utilizou a argumentação de limite de sequências para responder.

6) Atravessando o corredor

Quadro 38 – Enunciado questão 6 da tarefa 2 da atividade 2, Pós-Graduação

6) Você deve ter notado que a distância que Leonard tem percorrido parece estar ficando perto do final do corredor. No seu grupo, escreva uma descrição do comportamento que a sequência apresenta e como Leonard continuaria sua jornada até o final do corredor.

Fonte: Produção da autora

Para esta questão, as equipes responderam:

- $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Ou seja, quando der infinitos passos se chegará muito perto da distância almejada. (Equipe 1).
- Termo geral da sequência: $a_n = \frac{20{,}43}{2^n}, n \in N, n \geq 1$. Cada passo de Leonard é dado por $a_n = \frac{20{,}43}{2^n}$. (Equipe 2).

Vemos que apesar da equipe 2 não ter colocado a simbologia de limite, chegaram a uma resposta semelhante a equipe 1. Pois se o n tende a infinito o limite da sequência tende a zero.

No entanto, nenhuma delas respondeu que Leonard atravessaria o corredor de Zeno.

O erro pode ter acontecido no fato dos estudantes não considerarem a distância percorrida por Leonard, que seria a soma dos a_n e nesse caso, quando n tendesse a infinito, chegaria no comprimento do corredor, mostrando que é possível atravessá-lo.

Na questão 2 dessa tarefa, as equipes tinham montado a sequência somando os termos, porém aqui só ficaram com a sequência que dava o tamanho do passo, e não mais a soma dos passos anteriores, ou seja, perderam a série na sequência.

3.3.4 Observação e institucionalização das atividades aplicadas na turma do mestrado

Inicialmente os alunos responderam o questionário inicial e a atividade 1 individualmente.

Na atividade 2 se reuniram em equipes para realizar. Na tarefa 1, depois de ler o enunciado, um aluno perguntou: “Seis passos normais é de caminhada, né?”. Então as equipes encontraram um lugar na sala para contar os passos. Logo em seguida, uma das equipes pegou a trena para medir a distância, e depois, a outra equipe fez a mesma coisa. Durante as discussões entre os membros de cada equipe, surgiram alguns questionamento, como: “É para medir o pé?”; “E se fosse passo de formiga?”.

Conforme terminaram a tarefa 1 da atividade 2, começaram a tarefa 2, iniciando medindo a distância do corredor do bloco D da Udesc, como ilustra a foto na Figura 20.

Figura 20 - Foto dos alunos da Pós-graduação medindo o corredor para realização da atividade 2

Fonte: Produção da autora

Depois de medirem o corredor e contar alguns passos, voltaram para a sala para responder as questões da atividade.

Após as duas equipes entregarem suas respostas, a professora da turma iniciou a discussão das questões com os alunos.

Com relação a tarefa 1 da atividade 2, quando questionados sobre a quantidade de passos que dariam usando as informações dadas no enunciado, uma equipe disse que deu 4 passos pois consideraram o tamanho do pé, e a outra disse que deu 9, pois fizeram com a trena.

Na tarefa 2 da atividade 2, na terceira questão, os alunos falaram que o enunciado não ficou claro, por isso fizeram duas sequências, eles disseram que na questão que dizia "Seja $\{a_n\}$ a sequência em que o enésimo termo corresponde à distância que Leonard percorreu após seu enésimo passo", a palavra "após" deixou essa dúvida, se no lugar, fosse a palavra "até", teriam feito diferente.

Depois ser feita a discussão a professora fez a formalização, mostrando mais alguns exemplos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelas pesquisas bibliográficas feitas, na minha experiência como aluna, e também por fatos relatados por professores, é possível identificar que existem algumas dificuldades de compreensão do conceito de limite pelos estudantes.

Com o estudo da história da construção do conceito de limite, percebi que realmente sua formalização não foi trivial, sendo necessário o desenvolvimento de várias ideias e do trabalho de muitos pesquisadores. Assim, estudando a história, me ajudou a ver que os conceitos prontos que aplicamos hoje, surgiram rapidamente. E, conhecer um pouco desse trajeto, me fez refletir que algumas dificuldades que os estudantes têm atualmente, também eram presentes no passado.

Como em alguns trabalhos, foram encontradas respostas positivas com relação a aplicação de sequências didáticas, nesta monografia foram desenvolvidas duas sequências didáticas com o intuito de contribuir para a aprendizagem dos alunos com relação a definição formal do conceito de limite.

Com a realização das atividades, pelo que foi observado, após os alunos tentarem fazer primeiramente sozinhos as questões, e assim verem quais eram suas dificuldades, a professora então tomando como base as resoluções propostas por eles, fazia a institucionalização das questões e formalizava o conteúdo abordado, onde os estudantes tiravam suas dúvidas e entendiam o que estavam fazendo incorretamente. E assim, participavam ativamente de todo o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo.

Na realização da análise a posteriori das sequências didáticas pudemos chegar à algumas conclusões.

Nas turmas de Graduação, na atividade 1, vimos que a ideia principal da maioria dos alunos com relação a palavra limite, na questão 1 e 2, foi de relacionar ela com seu uso cotidiano, e que na questão 3 muitos tentaram dar alguma utilização matemática para limite, sem ao menos terem visto o conceito. Na questão 4 e 5 fizeram algumas tentativas para resolver e interpretar o limite, ou seja, nessa atividade os alunos tentaram descrever quais eram suas ideias iniciais sobre o limite.

A atividade 2, da turma de Graduação, houve um exagero desnecessário de preocupação dos estudantes com o desenho dos polígonos inscritos na circunferência, esse não era o foco da questão, pois gostaríamos que as equipes dessem mais importância para as questões a serem respondidas, para conseguirmos fazer uma análise de seu entendimento. Essa atividade mostrou, que muitos alunos não conseguiram passar a ideia de seus desenhos para as respostas, pois quase todas as equipes desenharam polígonos regulares, mas quase ninguém conseguiu observar esse fato nas respostas dadas nas questões. Por outro lado, conseguiram ver o significado do limite geometricamente, escrevendo que a área do polígono tendia a um limite, conforme o número de lados do polígono aumentava, e que este era definido pela área do círculo.

A realização da atividade 3, nas turmas de CDI I, primeiramente nos fez perceber que muitos alunos ainda têm dificuldades com questões do Ensino Básico, pois muitos não conseguiram resolver a questão a, que consistia apenas em interpretação do problema e substituição das variáveis na representação analítica da função dada. Com relação ao significado da palavra "próximo", na questão 1b e na questão 2, percebemos que poucos estudantes na realização entenderam seu sentido, pois aplicaram na função o próprio número, e não os números correspondentes a vizinhança desse número. Visto isso, acreditamos que durante a explicação do professor, é importante enfatizar esse ponto – o significado de "aproximar-se". Nessa atividade, levantamos a hipótese de as respostas não terem sido obtidas como pensávamos, pelo fato do enunciado formulado não ficar explícito para os alunos deixarem claro todos seus pensamentos e tentativas na folha a ser devolvida para nós com as resoluções.

Na institucionalização dessas três primeiras atividades, as professoras explicaram a ideia intuitiva e geométrica do limite, e então, sugerindo mais alguns exemplos, os que foram mostrados na institucionalização do terceiro capítulo, foi chego juntamente com os alunos na conclusão de que nem sempre somente com essas ideias era possível ter certeza absoluta da resposta do limite de uma função, e que então era necessária uma definição mais completa, e esta foi introduzida após a realização da atividade 4.

A atividade 4 foi explorado a relação δ e ε, da definição formal. Nas quatro primeiras questões da atividade (a,b,c,d) os alunos resolveram da forma que achavam mais conveniente, por exemplo, usando regra de três, funções ou inequações. Algumas equipes, no entanto, não entenderam o significado da palavra "entre" do enunciado das questões b

e *c*, deixando sua resposta apenas como sendo os valores do extremo dos intervalos.

Durante a aplicação da sequência didática, principalmente na Graduação, percebemos que os alunos já estavam mais familiarizados com o modo de resolução das atividades e que o intuito era que eles conseguissem visualizar os conceitos envolvidos, tanto que um dos alunos surgiu com o comentário do seu marcador de texto que segundo ele “se aproximava da cor verde, mas não era ela”, ou seja, tentou aplicar a ideia do significado de aproximação com um objeto não matemático. A respeito da questão *e* – onde o objetivo era que os alunos chegassem a relação entre δ e ε - foi observado que já ter um conhecimento prévio da definição formal pode ter dificultado a resolução, visto que, uma equipe de repetentes da turma NEX, falaram que não conseguiam pensar numa forma de resolução diferente a não ser usando a definição formal que continha módulo, porém, como não lembravam exatamente como era, não conseguiram resolver. Uma questão que não foi prevista na análise a priori foi o fato de equipes trocarem o ε pelo δ, errando sua colocação no gráfico, e também na sua representação final. Mas também aconteceu, de muitos alunos - dentre estes, estudantes que estavam tendo o primeiro contato com a definição formal de limites - conseguiram entender qual era a relação entre δ e ε intuitivamente ou geometricamente, contudo, não conseguiram expressar algebricamente. O que é uma informação importante, já que muitas vezes nesse conteúdo, acontece o contrário: os alunos conseguem chegar a relação das duas variáveis usando a definição como o professor explicou no quadro, mas, não entendem qual é o sentido disso.

Outros aspectos pertinentes a aplicação da sequência didática na Graduação é que percebemos que apesar de ser a mesma professora que ministra a disciplina de CDI I para as turmas de FIS e de BCC e, ainda, ambas serem turmas de calouros, houveram algumas respostas e interpretações bem distintas entre as turmas. Assim, com essas atividades, é possível o professor analisar qual é o conhecimento prévio que os alunos têm de uma expressão com limite e de conceitos relativos ao seu entendimento. E, a partir daí ver quais são as dificuldades e as dúvidas dos graduandos, para então, construir os conceitos do limite, baseando-se nas particularidades de cada turma, para que a aprendizagem possa ser realizada da melhor forma possível.

Na turma de Pós-Graduação, na atividade 1, as respostas dos alunos na questão 1, foi de relacionar o conceito de limite de uma forma mais matemática, já na questão 2, intercalaram frases da palavra limite usada no cotidiano e matematicamente. Na questão 3, nem todos souberam colocar uma utilização matemática para o limite, e na questão 4, também alguns não souberam resolver o limite da sequência colocada. Algumas conclusões gerais que chegamos com relação à esta atividade foi que pelas respostas obtidas, vemos que alguns estudantes não lembram de alguma utilização matemática para o limite e outros também não conseguiram fazer considerações corretas sobre o limite de uma sequência. Isso pode acontecer, devido ao fato de que alguns se graduaram há mais de 10 anos, e também não deram aula para o Ensino Superior, assim, não tendo mais contato com conceitos relativos ao limite, acabaram esquecendo das suas utilizações matemáticas. Além disso, nessa disciplina em nenhum momento tinha sido abordado o conceito de limite, nem mesmo por funções.

Na atividade 2, da turma de Fundamentos do Cálculo, temos que na tarefa 1 os alunos usaram trena para resolver a questão, fato que não foi previsto, já que a ideia era que os alunos apenas contassem seus passos. Na tarefa 2, na questão 1 ocorreram algumas dúvidas com relação a estimativa de passos para atravessar o corredor, talvez as equipes esqueceram das suposições do corredor de Zeno dadas no enunciado que estava na tirinha. Nas questões 2 e 3, aconteceu de uma equipe não usar nas duas questões o mesmo raciocínio de resolução, e a hipótese levantada sobre isso, foi a respeito do enunciado da questão 3, pois na institucionalização da atividade, os estudantes falaram que acharam o enunciado confuso. Nas outras questões dessa atividade, as equipes não usaram o conceito de limite para responder as questões como havíamos previsto, porém conseguiram de maneira geral responder as atividades. Esse fato pode ter acontecido devido nesta atividade o limite ser trabalhado via sequências, e não funções como normalmente é conhecido.

A utilização da metodologia da Engenharia Didática proporcionou uma visão mais ampla de todo o desenvolvimento das duas sequências didáticas. Pois, na análise a priori das atividades foi pensado nas respostas e resoluções que poderiam ocorrer, e após a aplicação em sala de aula, na análise a posteriori foi possível identificar as variáveis já previstas e ao mesmo tempo as quais não foram. E, consequentemente, analisar os motivos de respostas previstas não terem ocorrido, e do porquê de respostas não imaginadas anteriormente, aparecerem. Para meu desenvolvimento como professora isso foi ótimo, uma vez que, nas minhas futuras preparações de aulas e atividades posso levar como base as ideias vistas nessa metodologia.

A respeito do desenvolvimento e aplicação das sequências didáticas foi possível perceber que elas demandam um certo tempo devido toda a preparação do material – desenvolvimento da atividade; implementação em recursos digitais, como o Geogebra; impressão da atividade; verificação dos recursos disponíveis na sala de aula, como computador e datashow; e, providenciar os equipamentos, bem como suas instalações necessárias, caso a sala não possua tais recursos. Logo, apesar da sequência didática proporcionar um momento diferente com os alunos, os professores nem sempre tem todo esse tempo disponível para elaboração dessas atividades. Porém, caso elas já estivessem disponíveis em algum lugar, prontas para serem aplicadas, ficaria mais viável a utilização. Sendo assim, uma proposta para trabalhos futuros seria desenvolver atividades relacionando com o conceito de limite, que sejam disponibilizadas para professores poderem usar e/ou adaptarem conforme sua conveniência. E essas atividades poderiam ser desenvolvidas englobando todos os conceitos relativos ao conceito de limite, como a noção intuitiva de limite, limites laterais, limites pela definição, limites infinitos, limites no infinito e limites infinitos no infinito. E estes podendo ser visto utilizando funções, com foco de poderem ser usados como material de apoio ao professor de CDI I. Como também poderiam ser desenvolvidas atividades, que utilizem limite de sequência, para serem aplicadas na disciplina de Análise Real ou CDI II.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista eletrônica de Educação Matemática,** v.3, n.6, p. 62-77, UFSC, 2008.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique de Mathématiques.** França, vol 9, no 3, p. 281-308, 1988.

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura.** 3 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

BARON, Margaret. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Matemática grega. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 1, Brasília: Universidade de Brasília, 1985a.

______________. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Indivisíveis e infinitésimos. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 2, Brasília: Universidade de Brasília, 1985b.

______________. **Curso de história da matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Fundamentos. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 4, Brasília: Universidade de Brasília, 1985c.

BERTATO, Fábio Maia; D'OTTAVIANO, Itala M. Loffredo. George Berkeley e os Fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. **Seminários Filosóficos em Engenharia, Ciências e Áreas Afins**. Unicamp, 2009. Disponível em < ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/Thematic-LogCons-FAPESP/Report-02-2012/Papers/[DB12].pdf>. Acesso em 27 de abril de 2015.

BOYER, Carl Benjamin. **The history of the calculus and its conceptual development.** New York: Dover, 1949.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2009.

CALAZANS, Alex. Um panfleto de Berkeley contra as práticas matemáticas de Newton e de Leibniz. **Scientiae Studia,** São Paulo, v. 8, n. 4, p. 623-32, 2010. Disponível em < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662010000400006 >. Acesso em: 05 dez. 2014.

CHURCHMAN, Frank Leslie. **A comparative study of three different approaches to the limit concept.** Dissertation. University of Georgia, 1972.

CUNHA, Katia Silva; HOLANDA, Dorghisllany Souza; SILVA, José Marcos. Um estudo sobre a aprendizagem do conceito de limite de função de uma variável real. In: 8º ENCONTRO INTERNACIONAL DE PROFESSORES e 9º FÓRUM PERMANENTE DE INOVAÇÃO EDUCACIONAL. v. 8, n.1. **Anais eletrônicos...** Sergipe, 2015. Disponível em: <https://eventos.set.edu.br/index.php/enfope/article/view/1414>. Acesso em: 23 fev. 2016.

DUCA, Alina; HALL, William; KEENE, Karen Allen. Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 561-574, ago. 2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Higino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, Elisandra Bar; SABATKE, Jéssica Meyer; SIPLE, Ivanete Zuchi. Um Percurso pela História da Construção do Conceito de Limite de uma Função: um pouco do muito. In: **4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2015, Ilhéus. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015. v. 4. p. 2635-2646.

LIRA, Antonio Fonseca. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com utilização de objetos digitais.** [Tese de Doutorado] UFRGS, 2008.

MORAES, Mônica Suelen Ferreira; et al. Alguns apontamentos sobre o desenvolvimento histórico do conceito de limite de função. In: **Seminário de História da Matemática**, n. 10, Universidade Federal do Pará - UFPA, 2013.

MORRIS, R. **Uma Breve História do Infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico.** Tradução de Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro, Editora Jorge Zahar, 1998.

O'CONNOR, John; ROBERTSON Edmund. Gregorius Saint-Vincent. **The MacTutor History of Mathematics archive.** 2010. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Saint-Vincent.html>. Acesso em: 18 dez. 2014.

POMMER, Wagner Marcelo. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo, 2013. Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/296486970_A_Engenharia_Didatica_em_sala_de_aula_Elementos_basicos_e_uma_ilustracao_envolvendo_as_Equacoes_Diofantinas_Lineares>.

RASMUSSEN, Chris, et al. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p 507-515, ago. 2014.

SIERPINSKA, Anna. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 371–397, 1987.

STEWART, James. **Cálculo**. Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SWINYARD, Craig; LARSEN, Sean. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. **Journal for Research in Mathematics Education**, 43(4), 465–493, 2012.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151–169, 1981.

THOMAS, George Brinton. **Cálculo**: material complementar para os professores. 10. ed. Unidade 1. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

VENTURIN, Jamur André. **O processo de integração em blaise pascal.** 2007. 118f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

WEIGAND, Hans-Georg. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 603-619, ago. 2014.

ZUCHI, Ivanete. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática:** do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. [Tese de Doutorado] UFSC, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A
Termo de consentimento turma de Graduação

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, inserida no Trabalho de Graduação intitulado os "C*onstrução do conceito de limite: ideias e contextos*" da acadêmica Jéssica Sabatke Meyer, respondendo atividades que serão propostas com o objetivo de introduzir o conceito de limite de funções. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar desta pesquisa serão que os dados oriundos dela poderão substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão as professoras Dra. Ivanete Zuchi Siple e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas nessa pesquisa para a produção do trabalho final de graduação, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.
PESSOA PARA CONTATO:
Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7665
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		

APÊNDICE B
Questionário inicial turma de Graduação

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Questionário

Este questionário faz parte da metodologia do projeto de Trabalho de Graduação intitulado "C*onstrução do conceito de limite: ideias e contextos*" e visa identificar o perfil do público selecionado para a aplicação da sequência didática. Esperamos contar com sua contribuição, a qual será muito importante.

1. Qual é o seu curso? _________________________

2. Já cursou esta disciplina (CDI-I)?
( ) não ( ) sim quantas vezes __________

3. Quantas horas semanais de estudo você dedica a essa disciplina?_________

4. Quando você não compreende o conteúdo você procura sanar suas dúvidas com:
( ) professor ( ) monitor ( ) colegas ( ) outros ________________

5. Qual a sua idade? ___________________________

6. Atualmente você está trabalhando?
( ) não ( ) sim

APÊNDICE C
Sequência didática da turma de Graduação

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Atividade 1: Investigação Preliminar

Fonte: Adaptada de *Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction* (DUCA, HALL, KEENE, 2014).

Nomes: ____
Turma:____

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

____
____
____

2. Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".

____
____
____
____

3. Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?

____
____

4. Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = L$$

Tente descrever o que ela significa.

____
____

5. Como você poderia resolver a expressão dada na questão 4?

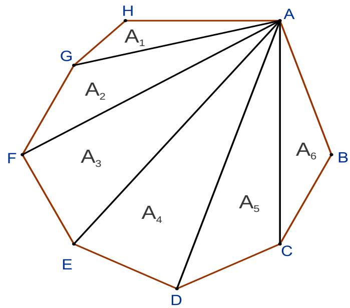
UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Atividade 2: Área do Círculo

Nomes:____

Turma:____________________________

As origens do Cálculo remontam à Grécia Antiga, pelo menos 2500 anos atrás. Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área A de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na figura abaixo e, em seguida, somando as áreas obtidas.

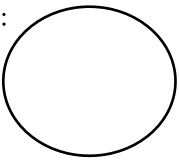


$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

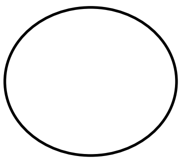
Fonte: Adaptada de Stewart, p. 3, 2009.

Entretanto, é muito mais difícil determinar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com uma sequência de polígonos, aumentando-se o número de lados desses polígonos.

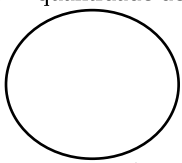
Assim, utilizando esse método, inscreva nos círculos abaixo, os polígonos de acordo com o número n solicitado ($n =$ quantidade de lados do polígono):



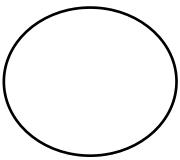
$n = 2$



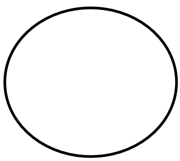
$n = 4$



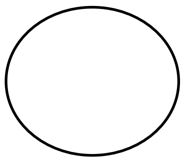
$n = 6$



$n = 8$



$n = 10$



$n = 12$

Responda:

1. Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados, o que acontece com a área à medida que aumentamos n ?

2. Para encontrar a melhor aproximação para a área do círculo é suficiente apenas aumentar a quantidade dos lados do polígono? Justifique.

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Atividade 3: Ideia intuitiva de limite

Nomes:____
Turma:______________________________

1. Um projétil é arremessado verticalmente de uma altura s_0, dada em metros, com uma velocidade inicial v_0, dada em m/s, sabe-se que a trajetória descrita é uma parábola representada pela função $s(t) = -t^2 + v_0 t + s_0$

a. Sabendo que um projétil é lançado do solo (e, portanto s_0=0,) e que leva 6 segundos para voltar a atingir o solo, use a equação acima para determinar sua velocidade inicial.

b. Examine o comportamento da função quando o tempo se aproxima de 3.

c. Desenhe o gráfico da função $s(t)$ (se for necessário utilize o verso desta folha).

2. Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. O que acontece com os valores de f quando x está próximo de 2? Desenhe o gráfico da função $f(x)$.

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Atividade 4: Perspectiva salarial

Fonte: Adaptada de *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional* (ZUCHI, 2005).

Nomes:____
Turma:______________________________

1. O salário dos funcionários de uma empresa é composto de uma parte fixa no valor de R$ 900,00, acrescidos de mais uma parte variável (comissão) de 10% sobre o valor de suas vendas no mês.

Responda:
a. Se um funcionário recebeu o pagamento de R$ 1400,00, qual foi o valor adquirido com as vendas desse empregado?
b. Suponha que esse mesmo funcionário deseja receber no mês seguinte um salário entre R$ 1200,00 e R$ 1600,00, qual será o valor que deverá arrecadar com suas vendas?
c. Refaça a questão (b) supondo que este funcionário planeja receber, no mês seguinte, o pagamento no intervalo de R$ 1300,00 à R$ 1500,00.
d. Represente graficamente as situações dos itens (a, b, c) e responda: O que acontece com a variação do valor arrecadado dos projetos quando o pagamento está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 1400,00?
e. Agora, suponha que esse funcionário deseje receber mensalmente, em torno de R$ 1400,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno da resposta encontrada na letra (a)? Você pode denotar a variação do valor das vendas dos projetos por δ.

APÊNDICE D

Termo de consentimento turma de Pós-Graduação

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, inserida no Trabalho de Graduação intitulado os "C*onstrução do conceito de limite: ideias e contextos*" da acadêmica Jéssica Sabatke Meyer, respondendo atividades que serão propostas com o objetivo de trabalhar com o conceito de limite de sequências. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar desta pesquisa serão que os dados oriundos dela poderão substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Fundamentos de Cálculo.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão as professoras Dra. Ivanete Zuchi Siple e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas nessa pesquisa para a produção do trabalho final de graduação, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.
PESSOA PARA CONTATO:
Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7665
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
1		
2		
3		
4		
5		

APÊNDICE E

Questionário Inicial da turma de Pós-Graduação

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Questionário

Este questionário faz parte da metodologia do projeto de Trabalho de Graduação intitulado "C*onstrução do conceito de limite: ideias e contextos*" e visa identificar o perfil do público selecionado para a aplicação da sequência didática. Esperamos contar com sua contribuição, a qual será muito importante.

1. Qual a sua formação na Graduação?

   ____

2. Quando concluiu sua Graduação? _________________________

3. Possui alguma Pós-Graduação? Se sim, qual?

   ____

4. Você atua/ atuou como Professor? Se sim, em qual nível?

   ( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio

   ( ) Ensino Técnico ( ) Ensino Superior

5. Você ministra/ministrou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral?

   ( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE F
Sequência didática turma de Pós-Graduação

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Atividade 1: Investigação Preliminar

Fonte: Adaptada de *Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction* (DUCA, HALL, KEENE, 2014).

1. Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?

____
____
____

2. Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".

____
____
____
____

3. Você sabe alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?

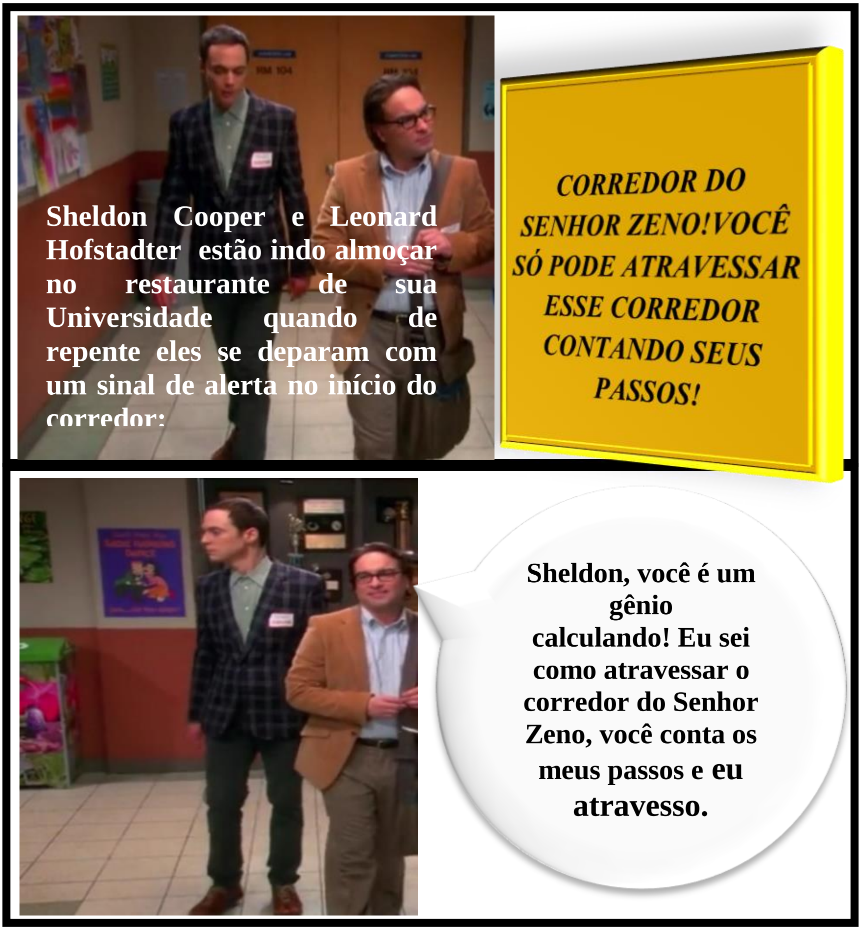
____
____
____
____

4. Mesmo se você não estiver familiarizado com a notação, considere a sequência dada por: $a_n = b^n$, sendo b um número real. Conjecture sobre a existência do limite dessa sequência.

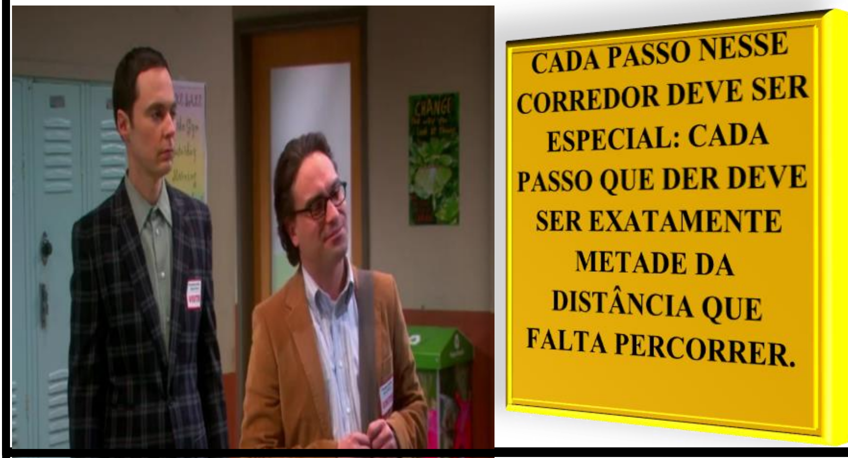
____
____
____

Atividade 2: O corredor de Zeno

Fonte: Adaptada de *Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction* (DUCA, HALL, KEENE, 2014).



...



Senhor Zeno deve ser um sujeito estranho. Este é um estranho corredor de fato! Vamos tentar descobrir como Sheldon e Leonard vão atravessar!

Tarefa nº 1: Experimente!

Vá e encontre um ponto cerca de 6 passos (normais) de uma parede (cerca de 6m da parede). Tente seguir as instruções: cada passo de Zeno que der deve ser metade da distância que há entre você e a parede. Continue a tomar passos até que você não consiga mais! Assim que estiver pronto, sente-se com seu grupo e responda às seguintes perguntas:
1. Quantos passos de Zeno você deu?
2. Você poderia ter dado mais passos? Se sim, quantos passos a mais poderia ter dado? Se não, explique por que o número de passos é o máximo.

Tarefa nº 2: Contagem de Sheldon e Leonard

Vamos ajudar Sheldon e Leonard descobrir quantos passos Leonard terá que dar para atravessar esse corredor estranho. Digamos que esse corredor é semelhante ao corredor do bloco D da UDESC, então inicialmente meça quantos metros ele tem e depois responda:
1. Com a medida que você encontrou para o comprimento do corredor, quantos passos você estima que Leonard terá que dar a fim de atravessá-lo? Explique sua estimativa.
2. Até que ponto Leonard percorre com o seu primeiro passo? Até que ponto ele percorre após seu segundo passo?
3. Seja $\{a_n\}$ a sequência em que o enésimo termo corresponde à distância que Leonard percorreu após seu enésimo passo. Compute os cinco primeiros termos desta sequência.
4. Leonard ficaria eternamente dentro de 0,5 metros da extremidade do corredor? Argumente sua resposta.
5. Leonard faz uma revelação impressionante: Ele afirma que se Sheldon falar qualquer distância, tão perto do comprimento total do corredor quanto ele queira, se ele seguir as instruções do Senhor Zeno, depois de um certo passo, ele terá percorrido essa distância. Você acredita que isso é verdade? Por quê?
6. Você deve ter notado que a distância que Leonard tem percorrido parece estar ficando perto do final do corredor. No seu grupo, escreva uma descrição do comportamento que a sequência apresenta e como Leonard continuaria sua jornada até o final do corredor.