DIENIFER TAINARA CARDOSO

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UMA ABORDAGEM DINÂMICA

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Ivanete Zuchi Siple

JOINVILLE-SC
2016

DIENIFER TAINARA CARDOSO

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UMA ABORDAGEM DINÂMICA

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: ______________________
Prof. Dra. Ivanete Zuchi Siple
Universidade do Estado de Santa Catarina

Coorientadora: ______________________
Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: ______________________
Prof. Dra. Katiani da Conceição Loureiro
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: ______________________
Prof. Dr. Rogério de Aguiar
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 24/06/2016

Aos meus pais, Sérgio e Célia que me deram tanta força nesse período tão importante.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ser significado de minha existência e por estar sempre iluminando meu caminho.

Aos meus pais Sérgio e Célia e meu irmão Júnior por todo amor, carinho, apoio e compreensão.

Ao meu noivo Alexandre que sempre tem me apoiado. Obrigada por todo seu amor, carinho e compreensão.

A minha orientadora Professora Dra. Ivanete Zuchi Siple e minha coorientadora Professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo por toda dedicação, paciência, compreensão e amizade.

Ao Professor Marnei Luis Mandler pelas contribuições e por ter possibilitado a realização da aplicação desse trabalho em sua classe.

A todos os alunos que participaram desse trabalho o meu muito obrigada.

Por fim, não menos importante, agradeço as minhas amigas de curso pelos momentos de descontração e pela alegria de suas companhias nesse momento tão importante: Pamela, Jéssica, Gislaine, Franciara e Jhulie.

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos”.

Issac Newton

RESUMO

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Teorema Fundamental do Cálculo**: uma abordagem dinâmica. 2016. 132 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2016.

Neste trabalho focamos no ensino e aprendizagem do Cálculo Integral, mais especificamente o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), o qual aborda de maneira explícita a conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Todavia, a maioria dos alunos têm dificuldade em compreender essa conexão. Diante disso, o principal objetivo foi desenvolver duas sequências didáticas mediadas pelas tecnologias, que possibilitassem essa conexão. As aplicações dessas sequências se apoiaram na metodologia da Engenharia Didática e foram feitas em uma turma da Graduação e em uma turma da Pós-Graduação. Foi elaborada a análise a priori para ambas as sequências aplicadas e nelas foram previstas estratégias baseadas no trabalho de Hoffkamp (2010), bem como no conhecimento prévio de cada turma. Após a aplicação de cada atividade foi elaborada a análise a posteriori, que nos permitiu confrontar nossas hipóteses referentes a cada turma. Além desses importantes resultados, este trabalho aborda um breve histórico do Cálculo Integral, a importância do Cálculo Diferencial e Integral no currículo do estudante de licenciatura e a análise de diferentes livros de Cálculo, com objetivo de averiguar como ocorre a passagem das somas de Riemann para a primitiva da função que aparece no TFC.

Palavras-chave: Dependência funcional. Sequência Didática. Conceito geométrico. Somas de Riemann. Engenharia Didática.

ABSTRACT

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Fundamental Theorem of Calculus:** a dynamic approach. 2016. 132 p. Course Conclusion Paper (Mathematics Teaching Graduation Course) – Santa Catarina State University, Joinville, 2016.

In this work we focus on the teaching and learning of the Integral Calculus, specifically the Fundamental Theorem of Calculus (FTC), which explicitly addresses the connection between the Differential Calculus and Integral Calculus. However, most students have difficulty understanding this connection. Thus, the main objective was to develop two didactic sequences mediated by technology that would enable this connection. The application of these sequences were based on the methodology of Didactic Engineering and took place in an undergraduate class and in a Master's Program class. The priori analysis was prepared for both applied sequences, for which strategies were set based on the work of Hoffkamp (2010), as well as on the prior knowledge of each class. After the application of each activity a posteriori analysis was elaborated, which allowed us to confront our assumptions for each class. In addition to these important results, this work presents a brief history of the Integral Calculus, the importance of Differential and Integral Calculus in undergraduate student curriculum and the analysis of different Calculus books, in order to ascertain how the passage from Riemann sums to the primitive function that appears on the FTC takes place.

Key words: Functional Dependence. Didactic Sequence. Geometric Concept. Riemann Sums. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDI	Cálculo Diferencial e Integral
TFC	Teorema Fundamental do Cálculo
TVM	Teorema do Valor Médio

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitas são as pesquisas existentes que tratam das dificuldades observadas na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), disciplina obrigatória em diversos cursos de graduação por tratar de conceitos aplicáveis em muitos campos do saber, como física, matemática, economia, administração etc. Henriques (2007) se baseia na didática francesa para desenvolver um estudo sobre o ensino e aprendizagem do CDI. Enquanto, Rezende (2003) parte do pressuposto que as maiores dificuldades do Cálculo são de natureza essencialmente epistemológica.

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) traduz a ideia central do CDI, que é a conexão entre esses dois cálculos, o que consequentemente possibilita que muitos alunos também sintam dificuldades em compreendê-lo.

Segundo Anacleto (2007) os obstáculos dos estudantes para compreender o TFC estão principalmente relacionados com uma incompleta mobilização das noções de derivada, integral e continuidade. Isto, possivelmente, pelos alunos optarem pelo ensino orientado aos processos ao invés de compreensão estrutural.

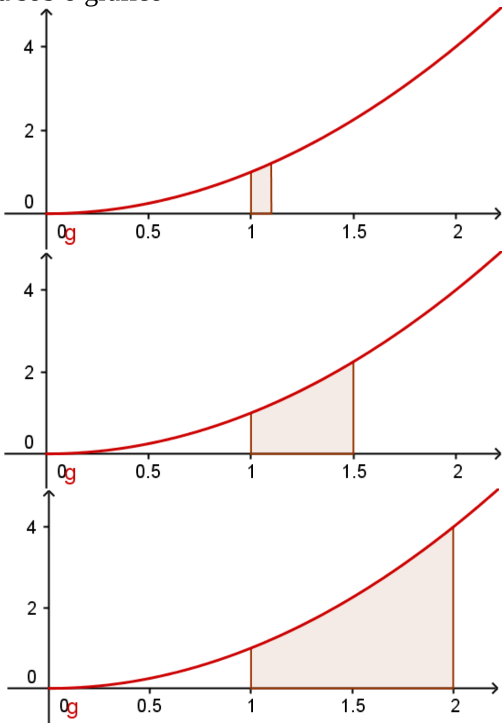
Esse teorema demonstra que a integração e a diferenciação são operações inversas, assim pode-se concluir que os problemas de áreas limitadas sob o gráfico de uma função num intervalo e o problema da determinação da inclinação da reta tangente num ponto da função podem ser resolvidos juntos, pois resolvido um problema o outro também passa a ser solucionado (GRANDE, 2011). Todavia, os alunos na maioria das vezes não enxergam ou têm dificuldades em compreender essa relação que é o maior significado desse teorema.

Outro problema também citado em diversas pesquisas sobre as dificuldades que os alunos apresentam com relação aos conceitos envolvidos no TFC é a interpretação geométrica deste teorema.

Uma questão tem se apresentado diante dessas dificuldades: Como a tecnologia pode auxiliar o aluno para que ele possa compreender as conexões entre o Cálculo Diferencial e Integral?

Segundo Bianchini(2000) a abordagem do Cálculo de Newton busca substituir o cálculo de área de uma região fixa pelo cálculo da área de uma região variável, ou seja, no cálculo de área irá existir uma dependência funcional que é quando um extremo do intervalo é móvel, como ilustra a Figura 1:

Figura 1- Área sob o gráfico



Fonte: adaptada de Bianchini (2000, p. 301) – TFC e Integrais Indefinidas

Pelo TFC, temos que:

1. Se a função $F(x)$ é definida em $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{1}$$

então, $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a,b]$, desta forma, $F(x)$ é uma primitiva de f .

2. Se F é uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Sabemos assim que (1) nos retornará uma função de x (que será nossa primitiva) a qual irá definir a área sob o gráfico de f neste intervalo de $[a, x]$ diferente de (2) que nos retornará também a área sob o gráfico f, mas não mais em função de x e sim em um valor numérico. Diante dessa análise, podemos concluir que em (1) existe uma dependência funcional de x para obter o valor da área.

Um estudo, elaborado por Hoffkamp (2010) com alunos de uma escola secundária em Berlin- Alemanha, que seria o equivalente ao ensino médio no Brasil, mostra alguns resultados obtidos a partir da aplicação de algumas atividades programadas no software Cinderella[1] que envolvem visualizações interativas do Cálculo. Segundo Hoffkamp (2010) a disciplina de Cálculo foi introduzida no currículo do ensino médio da Alemanha após a *Meraner Reform* de 1905. A reforma foi iniciada por Felix Klein e foi concebida como uma reforma de toda a matemática e educação científica na escola.

As atividades elaboradas por Hoffkamp (2010) abordaram a dependência funcional do TFC mediadas por softwares de geometria dinâmica. De acordo com o referido autor, estas atividades geraram discussões significativas entre os estudantes, contribuindo para um desenvolvimento gradativo do conceito do Cálculo. Tais resultados motivaram o desenvolvimento do presente trabalho.

Deste modo, busca-se através deste trabalho desenvolver sequências didáticas mediadas pelas tecnologias, que possibilitem as conexões entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. E ainda, de maneira específica, formalizar as seguintes etapas:

- Apresentar um breve histórico do TFC;
- Abordar o TFC num contexto de formação para alunos de Licenciatura em Matemática;
- Estabelecer as conexões entre Somas de Riemann e o TFC;
- Implementar sequências didáticas do TFC no GeoGebra.
- Aplicar as sequências em turmas piloto;
- Analisar os resultados.

---

[1] Software de construção em geometria desenvolvido por Jürgen Richter-Gebert & Ulrich Kortenkamp. É um software de construção que nos oferece “régua e compasso eletrônicos”. Um diferencial deste software é que permite que se trabalhe também em geometria hiperbólica e esférica (EDUMATEC, 2008).

Tomaremos como referencial teórico da concepção e aplicação de sequências didáticas de CDI, Rocha (2010) e Melo (2002) que apresentam atividades nas quais os conceitos de limite, derivada e integral, foram trabalhados em sala de aula com o auxílio de softwares de geometria dinâmica. Tais atividades buscavam desenvolver uma compreensão mais profunda desses conceitos.

Com base na fundamentação teórica e na questão problema que norteia este trabalho, a metodologia que será utilizada em busca de alcançar os objetivos é a Engenharia Didática. Essa metodologia se caracteriza de uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisa desenvolvidos no contexto de sala de aula.

Segundo Zuchi (2005) um dos trabalhos mais interessantes realizados por um professor tem sido o de escolher ou organizar sequências de atividades que explorem um domínio do conhecimento do aluno.

Artigue (1988) descreve a Engenharia Didática como sendo um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, observação e análise de uma sequência de ensino.

As práticas educativas desenvolvidas a partir de princípios da engenharia didática podem ser compreendidas como práticas de investigação, através da qual se estabelece uma dependência entre prática e teoria (BERENGUER, 2010).

> A engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didática, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido (PAIS, 2008, p. 99).

Diante da organização de procedimentos metodológicos, a Engenharia Didática possui quatro fases consecutivas: Análise preliminar; Concepção e Análise a priori; Experimentação; Análise a posteriori. Essas quatro etapas serão descritas abaixo segundo Artigue (1988), bem como, a elaboração deste trabalho em cada etapa:

1. Análise preliminar: Caracteriza-se pelo levantamento das concepções envolvidas, que buscam referências teóricas que

fundamentem a pesquisa. Além disso, segundo Pais (2008) é necessário levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. Nesta fase busca-se analisar as possíveis causas do problema a ser pesquisado bem como subsídios para o tratamento desse problema, com vistas a embasar a concepção da Engenharia Didática.

Para alcançar os objetivos dessa primeira etapa faremos uma breve apresentação sobre a história e apresentação do TFC no capítulo 1. Sua demonstração será deixada para o capítulo 2, em que é descrita a análise de alguns livros didáticos com o objetivo de averiguar como e se os livros didáticos estabelecem a conexão entre a integral definida como limite de somas e como cálculo da primitiva nos extremos, bem como o estudo de artigos científicos que fundamentam a pesquisa.

2. Concepção e Análise a priori: Essa etapa tem como objetivo elaborar sequências pertinentes de aprendizagem, tendo como meta, ao mesmo tempo, os alunos e o problema didático proposto. São previstas as ações e comportamentos dos estudantes durante a experimentação, indicando de que modo as atividades propostas propiciarão a aprendizagem desejada.

Aqui elaboramos a sequência didática, levantamento de hipóteses e identificação de variáveis de análise. Foram desenvolvidas duas sequências didáticas: uma para ser aplicada na Graduação, e outra para ser aplicada na Pós-Graduação. Ambas as sequências são compostas por atividades no ambiente lápis e papel e também computacional. Na análise a priori previmos estratégias de resolução para cada atividade levando em consideração o público e resultados da aplicação de Hoffkamp (2010), a qual aplicou uma atividade semelhante em uma escola secundária em Berlim – Alemanha. Esta etapa da Concepção e Análise a priori será descrita no capítulo 3 deste trabalho.

3. Experimentação: Fase em que se aplica a sequência didática a uma determinada população de estudantes. É neste momento que se dá o contato pesquisador/professor/observadores com a população de alunos, sujeitos de pesquisa, e são explicitados os

objetivos e condições em que se realizará a investigação (BERENGUER, 2010).

Foram selecionadas duas turmas para a aplicação da sequência, uma na Graduação e outra na Pós-Graduação do Centro de Ciências Tecnológicas- UDESC. O TFC, nessa universidade, é abordado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI- II). A aplicação ocorreu na turma do curso de Engenharia de Produção. Na Pós-Graduação, a aplicação se fez na disciplina de Fundamentos do Cálculo, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologia. Durante cada aplicação a autora deste trabalho ficou como observadora da classe, coletando dados que ajudassem na análise a posteriori. A organização e institucionalização se deram como acordado com o professor responsável pela turma. A descrição completa da experimentação será feita no capítulo 4, juntamente com a análise a posteriori.

4. Análise a posteriori: Corresponde à análise do conjunto dos dados obtidos na fase da experimentação e às observações realizadas durante a aplicação da sequência. O confronto das análises a priori e a posteriori fundamenta a validação das hipóteses formuladas. Assim, a quarta fase que é a validação do resultado de confronto entre as análises a priori e a posteriori, se qualifica como validade interna, limitada ao contexto da experiência realizada. Segundo Pais (2008, p.103), a validação é “uma etapa onde a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico”.

No capítulo 4 apresentaremos o confronto entre a análise a priori e o resultado da aplicação. Com esta etapa certificamos algumas hipóteses relatadas na análise a priori e analisamos outras respostas não esperadas. Nosso trabalho vai ao encontro do que é preconizado na Engenharia Didática:

> Na área da Didática, o termo Engenharia visa introduzir o campo de ação prática ao domínio teórico da mesma. A Engenharia Didática confere à Didática o estudo epistemológico de ciência de ação e não, unicamente, de ciência do conhecimento; atenta às ciências da comunicação, susceptíveis de , ajudar o professor a se comunicar

> com seus alunos, atenta às tecnologias da educação auxiliares às atividades pedagógicas e às progressões e implementações de escolhas didáticas. (DEVELAY, 1992, apud ROSA, 1998, p.).

Neste contexto seguimos nosso trabalho com a apresentação da sequência realizada, bem como sua análise preliminar começando com um resgate de alguns pontos da história.

1 TFC: UMA BREVE HISTÓRIA

O conceito da integral, tal como abordamos atualmente, é o resultado do desenvolvimento do Cálculo há mais de 2500 anos, envolvendo vários expoentes que contribuíram na sua evolução. No contexto histórico os problemas clássicos de quadratura e tangentes permeiam as aplicações desde a matemática antiga até a contemporânea. Esses dois problemas clássicos conectam o Cálculo Diferencial e o Integral, porém, por muito tempo eles foram tratados de forma independente. Tal conexão é recente e conta com a contribuição dos trabalhos de vários matemáticos, como por exemplo, Fermat (1601-1655), Torricelli (1608-1647), Barrow (1630-1677) Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), dentre outros.

Fermat, por exemplo, apresentou um método para determinar a tangente e a quadratura de curvas do tipo $y = x^n$ chegando ao resultado que, na notação moderna, são expressas por $y' = nx^{n-1}$ e $\int_0^T x^n\, dx = \frac{T^{n+1}}{n+1}$, respectivamente. Porém, segundo Boyer (1996) não estabeleceu a relação entre as duas operações:

> Dificilmente poderia deixar de notar que ao achar tangentes a $y = kx^n$ multiplica-se o coeficiente pelo expoente e baixa-se o expoente de uma unidade, ao passo que para achar áreas aumenta-se o expoente e divide-se pelo novo expoente. Poderia a natureza inversa desses dois problemas ter-lhe escapado? Embora isso seja improvável, no entanto ao que parece em lugar nenhum ele chamou a atenção para a relação que hoje se chama o teorema fundamental do cálculo (BOYER, 1996, p. 242).

Segundo Boyer (1996), Torricelli foi um dos precursores no movimento dessa conexão, ao relacionar os problemas de quadratura e tangente, passando de uma equação para as funções da distância e velocidade em relação ao tempo. Torricelli percebeu de maneira intuitiva a relação inversa entre a área e a tangente. Porém, de acordo com Eves (2011) o enunciado dessa conexão, conhecida atualmente como o Teorema Fundamental do Cálculo- TFC, foi estabelecido por Barrow em seu trabalho intitulado *Lectiones opticae et geometricae* .

De acordo com Palaro (2006), Newton e Leibniz trouxeram importantes contribuições para o Cálculo, unificando os estudos realizados anteriormente. Eles são considerados fundadores do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) pela generalidade de seus métodos e por suas técnicas terem feito da Análise Infinitesimal um ramo autônomo, independente da Geometria.

Apesar das denominações de integração e derivação serem recentes e muitas vezes atribuídas a alguns matemáticos específicos, a lente da história nos fornece indícios que desde os tempos dos gregos vários expoentes sabiam derivar e integrar e conheciam intuitivamente a relação entre ambas. Para a formalização do Cálculo, tal como a conhecemos, foi necessária a conexão de várias peças já existentes e a criação de novas para complementar o tabuleiro chamado Cálculo.

> Era um verdadeiro mosaico, cujos caquinhos estavam espalhados por toda a Europa, só estavam faltando homens que os juntassem, ou melhor, unificarem as ideias, criando um simbolismo geral, regras consistentes e um processo que generalizasse todos os precedentes. Esses homens, na realidade, já faziam parte da sociedade de então, um na Alemanha, Leibniz, e outro na Inglaterra, Newton. Com eles, o grande mosaico, que levaria o nome de *Cálculo*, seria montado. (CONTADOR, 2012, p.262)

Após as ideias generalizadas, no início do século XIX Cauchy (1789-1857) e Riemann (1826-1866) contribuíram com resultados significativos sobre a integral como uma soma de infinitas parcelas (SIPLE; CARDOSO; FIGUEIREDO, 2015). Em 1823, Cauchy formulou uma definição construtiva, de maneira muito parecida com as atuais. Essa definição nos diz que dada uma função qualquer definida em um intervalo $[a, b]$, o intervalo é particionado em subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, formando a soma

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \cdots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Assim, sendo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, a integral a Cauchy é definida como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Riemann, partindo de uma função limitada em $[a, b]$, apresentou uma partição desse intervalo e, em seguida, escolheu para cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ um ponto arbitrário c_k em seu interior, diferente de Cauchy, que calculava usando os pontos sempre a esquerda do intervalo. Sendo assim, Riemann definiu sua integral como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

O método das somas de Riemann é eficaz, mas nem sempre é simples de ser utilizado, já que estamos lidando com o cálculo de um limite de um somatório. Como comentado anteriormente, foi Barrow quem estabeleceu a conexão entre o Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, chegando ao enunciado que hoje chamamos de TFC.

Na sequência enunciamos o TFC em duas partes conforme Guidorizzi (2001a). Nos livros didáticos existem formas distintas de abordagem desse teorema, logo deixamos a demonstração desse teorema para ser apresentada no capítulo 2 em que é feita uma análise sobre a abordagem do TFC em livros didáticos.

1º Teorema Fundamental do Cálculo: *se f for integrável em $[a, b]$ e se F for um primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

2º Teorema Fundamental do Cálculo – Existência de Primitivas: *seja f definida e contínua no intervalo I e seja $a \in I$. Nestas condições, a função F dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in I$, é uma primitiva de f em I, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.*

As aplicações do TFC estão presentes em várias situações problemas, tais como no cálculo de áreas, comprimentos, volumes, trabalho realizado por uma força, dentre outras. As discussões dos fundamentos do Cálculo são importantes em todos os cursos, mas especialmente na formação do futuro professor de matemática, para que ele possa estabelecer as conexões do Ensino Superior com o Ensino Básico. Muniz e Silva (2013, p.20) ampliam as discussões salientando que:

> No curso de Cálculo Diferencial e Integral, as ideias essenciais decorrem dos conceitos de infinitésimos

> e de somas infinitas, e essas ideias se articulam com a atuação do egresso no Ensino Fundamental e Médio, pois, no Cálculo é preciso estudar (e aprender) como fazer somas de infinitas parcelas ou como tomar um intervalo numérico infinitamente pequeno, noções completamente diferentes daquelas adquiridas no Ensino Fundamental e Médio. Entretanto, o conceito de soma de infinitos termos pode ser articulado com o conhecimento do aluno sobre comprimento de curvas, ou ainda, de área de figuras planas, através da discussão do método da exaustão introduzido pelos matemáticos gregos para calcular a área de algumas figuras geométricas, como, por exemplo, a área do círculo.

Para Ávila (1991) o CDI amplia diversos conhecimentos da matemática, como geometria, trigonometria, álgebra etc. Por exemplo, podemos usar os conhecimentos adquiridos do Cálculo para discutir o volume de recipientes de diferentes formatos, no qual somente a limitação à geometria espacial fica fragilizada.

Nesse contexto, propiciar discussões sobre aproximações, somas infinitas e dependência funcional são fundamentais em um curso de Licenciatura em Matemática.

O Ensino de Cálculo que leva em consideração a exploração de seus fundamentos, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos.

Em um curso de Cálculo para a licenciatura é possível compreender a importância dos conceitos de funções e suas aplicações vistas desde o 8º ano do Ensino Fundamental, assim como ampliar a visão do futuro professor sobre o desenvolvimento histórico da própria matemática, que teve consequências contundentes para a humanidade nos últimos séculos (MUNIZ; SILVA, 2013).

Com a utilização do Cálculo diversos conteúdos poderiam ser aprendidos paralelamente de uma maneira mais incitante. Um bom exemplo, novamente, seria funções, que como diz Muniz e Silva (2013, p. 20):

> O conceito de função é um dos mais importantes em Matemática e as funções permeiam a modelagem de problemas da nossa vida cotidiana. Tornar essa ideia mais consistente e clara, para que seja mais compreendida e aproveitada por mais pessoas na sociedade é papel do professor de Matemática.

E segundo Ávila (1991), a melhor forma de mostrar ao aluno a importância do conceito de função, é primeiramente ensinar-lhe os conceitos de derivada e integral e para que servem esses conceitos.

Diante do posicionamento destes autores, percebemos o quão é importante um estudante de matemática aprender as reais utilidades e importância da matemática no mundo moderno (muitas dessas a partir da disciplina de Cálculo) e, assim, lecionar a matemática para seus alunos de maneira mais significativa.

O Cálculo permite ampliar nosso conhecimento em diversas áreas. Todavia, mesmo o curso de Cálculo aprofundando em estudos do Ensino Básico, o licenciando deve ter clareza de que parte desse aprofundamento pode ser levado ao Ensino Médio.

Como dito anteriormente, dentro da disciplina de Cálculo são vistos outros conteúdos também muito importantes, como Geometria, Aritmética, Trigonometria etc. O conteúdo de Soma de Riemann, logo mais o TFC, poderia ser explorado em uma turma do Ensino Médio. Esse conteúdo não exige muito mais do que geometria plana e aritmética, mas infelizmente muitos alunos de Licenciatura em Matemática ainda não perceberam isso. Por esse motivo muitas vezes é que o Cálculo é visto como uma barreira na formação acadêmica de um aluno de licenciatura em matemática.

Diante disso, é essencial que um estudante de licenciatura em matemática curse a disciplina de CDI. Essa disciplina permite explorar e conectar diversas definições da matemática que colaboram para um conhecimento mais amplo do professor sobre aplicações do Cálculo no cotidiano. Algumas dessas aplicações podem ser exemplificadas na sala de aula do Ensino Básico, obtendo com isso, um aumento na probabilidade de uma aprendizagem significativa do aluno. Da mesma forma, que amplia a visão da matemática moderna do futuro professor.

No próximo capítulo apresentamos uma análise feita em diferentes livros de Cálculo, com o intuito de averiguar como é apresentada pelos autores a passagem de um limite de somas para uma primitiva.

2 ANÁLISE DOS LIVROS – DE UM LIMITE DE SOMA PARA UMA ANTIDERIVADA

Sabemos que, apesar de eficiente, o cálculo por limite de somas de uma integral definida não é um método muito prático e facilitador. Entretanto, o TFC minimiza o cálculo dessas integrais, não mais pela soma, e sim por primitivas, que são exploradas na passagem da soma de Riemann para o TFC. Pensando nisso, analisaremos como os livros didáticos abordam essa passagem de um limite de somas para uma primitiva.

Tomando como referencial a tese de Palaro (2006) que fez uma análise do TFC nos seguintes livros didáticos: Cálculo com Geometria Analítica (George F. Simmons); Cálculo (George B. Thomas Jr); Elementos de Cálculo Diferencial e Integral (Willian Anthony Granville, Percey F. Smith e William Raymond Longley); Curso de Análise (Elon Lages Lima), nós optamos por escolher outros.

Inicialmente nossa escolha foi fundamentada em analisar livros que Palaro (2006) não analisou. Posteriormente, contemplar livros de Cálculo disponíveis na bibliografia dos cursos da nossa universidade. Além disso, contemplar um livro de análise voltado para o curso de Licenciatura em Matemática, e um livro de matemática aplicada, com o intuito de verificar como é abordado este assunto nesses diferentes referenciais. Logo, optamos por analisar: Análise Matemática para Licenciatura (Ávila, 2006); Um Curso de Cálculo (Guidorizzi, 2001a); Um Curso de Cálculo (Guidorizzi, 2001b); Cálculo (Stewart, 2011); Cálculo Um Curso Moderno e Suas Aplicações (Hoffmann e Bradley, 2002).

Os livros citados serão analisados com a pretensão de responder as seguintes questões: Como é definida a integral de Riemann? Ela está relacionada com o problema de cálculo de área? O livro apresenta representações gráficas? Como é introduzido o TFC? É demonstrado? Faz alguma conexão com a soma de Riemann? Quais os tipos de exemplos o livro apresenta? Quais aplicações do TFC o livro cita?

2.1 ANÁLISE MATEMÁTICA PARA LICENCIATURAS (ÁVILA)

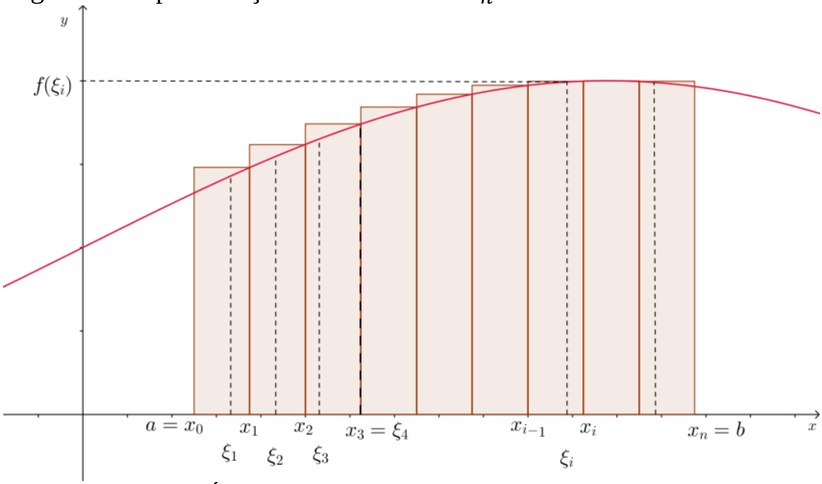
Este livro foi publicado, em 2006, pela Editora Blucher, São Paulo. O autor inicia o capítulo Teoria da Integral com uma breve introdução histórica sobre a integral, e em seguida parte para o conceito de Integral de Riemann, considerando-a como sendo um problema de definição da área delimitada pelo gráfico de uma função f positiva, pelo eixo x e por duas retas $x = a$ e $x = b$.

> Começamos considerando a soma das áreas de uma série de retângulos (...), obtidos da seguinte maneira: dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, de comprimentos $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ os pontos dessa divisão, a qual é chamada partição do intervalo $[a, b]$. Em cada um dos subintervalos da partição escolhemos pontos quaisquer (usaremos a letra grega ξ, que se lê "csi"): ξ_1 no primeiro desses subintervalos, ξ_2 no segundo, ξ_3 no terceiro, etc. Estes últimos pontos podem ser escolhidos arbitrariamente, podendo mesmo ser um dos extremos do subintervalo (...). Dessa maneira formamos n retângulos, todos com base Δx e alturas dadas por $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$. (ÁVILA, 2006, p.193-194).

Logo após, o autor apresenta a representação geométrica dessa soma (Figura 2) e sua representação algébrica dada pelo somatório

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x.$$

Figura 2 - Representação Geométrica de S_n



Fonte: adaptada de Ávila (2006, p. 194)

Agora, imaginando uma sequência infinita dessas somas Ávila conclui que o limite dos valores das somas é o que devemos tomar como sendo a área do gráfico delimitada anteriormente. E assim, o limite obtido é chamado de integral de f no intervalo $[a, b]$, e por definição é indicada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{3}$$

Ávila observa que essa definição da integral, representada em (3), é puramente numérica não dependendo da noção da área, mas utiliza dela apenas como elemento motivador. Na verdade, conhecendo a integral, definimos a área como sendo a integral da função positiva no intervalo.

Na sequência, ele apresenta alguns teoremas e propriedades de funções integráveis e enfatiza a complexidade de calcular integrais através de somas de Riemann. Com isso, introduz o TFC como um cálculo de primitivas, justificando que essa técnica é mais fácil e por isso, é aplicada nos cursos de Cálculo.

Antes de chegar ao TFC, ele demonstra o Teorema da Média (denominado muitas vezes como Teorema do Valor Médio para integrais) necessário na demonstração do TFC.

Para concluir a demonstração do Teorema da Média, Ávila utiliza do resultado do Teorema do Valor Intermediário enunciado como:

Teorema do Valor Intermediário. *Seja f for contínua num intervalo $I = [a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$. Então, dado qualquer número d compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Em outras palavras, $f(x)$ assume todos os valores compreendidos entre $f(a)$ e $f(b)$, com x variando em (a, b).*

A demonstração desse teorema pode ser consultada no livro analisado - Análise Matemática para Licenciaturas, Ávila (2006, p.161). Apresentaremos abaixo a demonstração do Teorema da Média.

Teorema da Média. *Sejam f uma função contínua num intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$, e m e M o mínimo e o máximo de f, respectivamente. Então, existe um número $c \in I$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{4}$$

Demonstração. Como os valores de f estão compreendidos entre m e M, podemos verificar pela Figura 3, que apresenta as áreas $m(b-a)$ que é um retângulo inscrito na região e $M(b-a)$ que é a área de um retângulo circunscrito na região, que qualquer que seja a soma de Riemann que se considere, valem as seguintes desigualdades:

$$ABFE \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq ABCD.$$

ou seja,

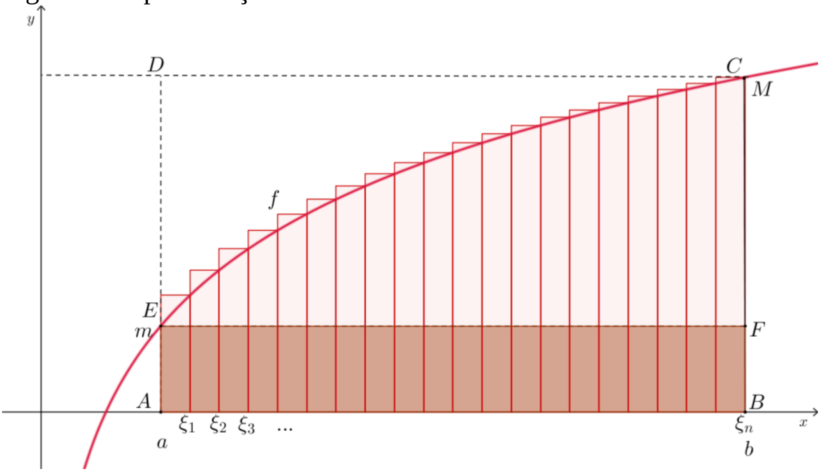
$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq M(b-a).$$

Nessas desigualdades, se aplicarmos o limite com $n \to \infty$, teremos

$$\lim_{n\to\infty} m(b-a) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \lim_{n\to\infty} M(b-a)$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \qquad (5)$$

Figura 3- Representação Soma de Riemann



Fonte: produção da autora

Pelo Teorema do Valor Intermediário f assume todos os valores do intervalo $[m, M]$, de modo que existe um número $c \in I$ tal que

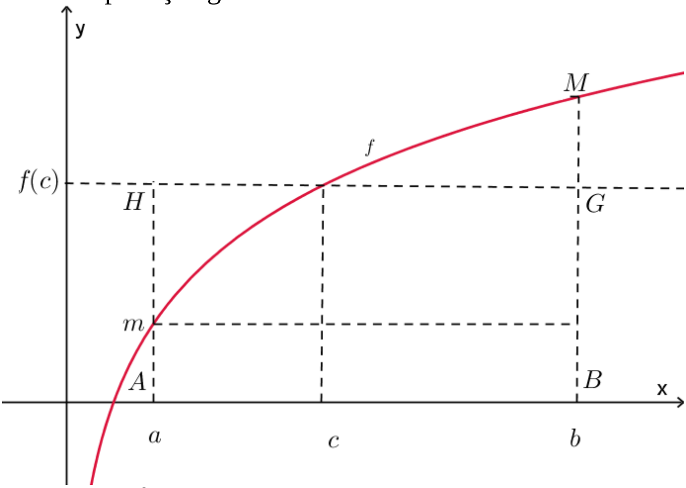
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

e daqui segue o resultado desejado.

Observe que a igualdade (4) permanece válida mesmo que b seja menor do que a, pois isso implica mudança de sinais nos dois membros da igualdade.

Em se tratando de uma função $f \geq 0$, (4) e (5) têm interpretações geométricas interessantes: como vimos na Figura 3, a integral representa a área sob o gráfico de f e as desigualdades (5) significam que essa área está compreendida entre as áreas de dois retângulos, ABCD e ABFE, de mesma base $b - a$ e alturas m e M, respectivamente. A equação (4) significa que a referida área é igual à de um retângulo ABGH, de base $b - a$ e altura $f(c)$ (Figura 4).

Figura 4 - Interpretação geométrica do Teorema da Média



Fonte: adaptada de Ávila (2006, p. 207)

Seguido disto, Ávila enuncia e demonstra o TFC da seguinte forma:

Teorema Fundamental do Cálculo: *Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Então, a função F, definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{6}$$

é derivável nesse intervalo e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Supondo primeiro que x seja ponto interno ao intervalo $[a, b]$, então:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Agora pelo Teorema da Média esta última integral é igual a $hf(\xi)$ em que ξ é um ponto do intervalo $[x, x+h]$. Assim,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi).$$

Finalmente, fazendo h tender a zero nesta última igualdade, ξ tende a x; e, como f é contínua, $f(\xi)$ tende a $f(x)$, ou seja:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

o que completa a demonstração de que $F'(x)=f(x)$.

O autor ainda evidencia que caso x coincida com a ou b não haveria maiores dificuldades na resolução, mas deixa a critério do leitor verificar. Nesse caso, usam-se os limites laterais: pois para $x=a$ deve-se ter $h>0$ e consequentemente é apenas um limite pela direita e, para $x=b$ deve-se ter $h<0$.

Tendo assim provado a existência de primitivas, para concluir o TFC Ávila evidencia a diferença de primitivas, não o enuncia como um novo teorema, mas sim, como o resultado do teorema provado anteriormente e também do Teorema do Valor Médio (TVM) enunciado abaixo.

Teorema do Valor Médio*: Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$ e derivável nos pontos internos, então existe um ponto interno $c\in(a,b)$ tal que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.*

A demonstração desse teorema pode ser consultada no livro analisado - Análise Matemática para Licenciaturas, Ávila (2006, p.184). E como consequência desses resultados, o autor ainda complementa, que se duas funções F e G têm a mesma derivada em todo um intervalo, então elas diferem por uma constante C nesse intervalo, ou seja,

$$G'(x)=F'(x)\Rightarrow G(x)=F(x)+C.$$

Sendo f contínua, uma de suas primitivas particulares é dada por (6), e sua primitiva geral é

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt+C \qquad (7)$$

em que C é uma constante arbitrária. De (7) obtemos a importante fórmula:

$$G(b) - G(a) = \left(\int_a^b f(t)dt + C\right) - \left(\int_a^a f(t)dt + C\right)$$
$$= \int_a^b f(t)dt$$

Assim, para calcularmos a integral de uma função contínua f no intervalo $[a, b]$, basta encontrar uma primitiva qualquer de f e calcular a diferença nos extremos.

Os exemplos apresentados no livro pelo autor, no capítulo de Integrais, são de abordagem demonstrativa sobre a análise de conteúdos conectados ao assunto de integrais, e não sobre aplicações do TFC. Apenas no final do capítulo Ávila comenta de algumas funções definidas por integrais, entre elas a importante fórmula nos estudos de Probabilidade e Estatística, chamada Distribuição Normal:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\, dt.$$

Deste modo, visto que o foco da nossa pesquisa é, sobretudo as aplicações deste teorema, não iremos desenvolver as ideias contidas nos exemplos trazidos pelo autor.

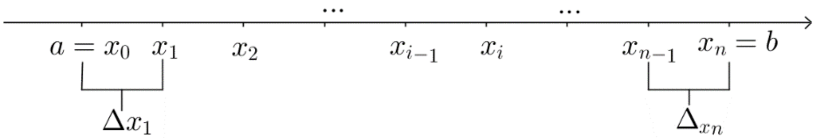
Ávila faz a conexão entre o TFC e Soma de Riemann implicitamente durante a demonstração do Teorema da Média em que usa o Teorema do Valor Intermediário.

2.2 UM CURSO DE CÁLCULO (GUIDORIZZI)

Usaremos nessa análise o volume 1 e 2 do livro 'Um Curso de Cálculo' de Guidorizzi, isso porque o autor divide o TFC em duas partes e as apresenta em volumes diferentes. Assim usaremos o volume 1, 5ª edição, publicado em 2001 pela Editora LTC, Rio de Janeiro, e o volume 2 com mesma edição, editora e ano de publicação que o volume 1.

No capítulo Integral de Riemann do volume 1, Guidorizzi inicia apresentando a definição da partição de um intervalo. O autor chama de P a partição do intervalo $[a, b]$ que é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Essa partição P está dividida em n intervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \dots, n$. Como ilustra a Figura 5, $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ representa a amplitude desse intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Figura 5 - Partição do intervalo $[a, b]$



Fonte: Adaptada de Guidorizzi (2001)

Tomamos agora um número $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente. Desta forma, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

denomina-se Soma de Riemann definindo-a para uma função f em um intervalo $[a, b]$, particionado por P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e relativo aos números c_i.

Agora, seja F uma função definida em $[a, b]$ e seja P a partição desse intervalo definido anteriormente. Dizemos que o acréscimo $F(b) - F(a)$ que F sofre quando se passa de $x = a$ para $x = b$ é igual à soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$, ou seja, será o extremo superior menos o inferior do intervalo:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \tag{8}$$

E ainda, através de um exemplo o autor demonstra o seguinte:

Exemplo 1: *Sejam F e f definidas em $[a,b]$ e tais que $F' = f$ em $[a,b]$; assim F é uma primitiva de f em $[a,b]$.*

Solução: Seja a partição $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$.

Como F é diferenciável, temos que F é contínua, logo pelo TVM existe $\overline{c_i}$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\overline{c_i})$, logo de (8) obtemos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i})\Delta x_i. \tag{9}$$

A partir desse exemplo o autor utiliza alguns parágrafos para aplicar (8) em uma versão cinemática.

Assim, segundo Guidorizzi (2001) devemos considerar uma partícula deslocando-se sobre o eixo $0x$ com função de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a,b]$. Observamos que $x = x(t)$ é uma primitiva de $v = v(t)$. Seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ uma partição de $[a,b]$ e suponhamos $max\Delta t_i$ suficientemente pequeno (o que implica que todos os Δt_i são suficientemente pequenos). Sendo c_i um instante qualquer entre t_{i-1} e t_i; a velocidade $v(c_i)$ é um valor aproximado para a velocidade média entre os instantes t_{i-1} e t_i:

$$v(c_i) \cong \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \quad \text{ou} \quad \Delta x_i \cong v(c_i)\Delta t_i$$

(devemos observar segundo o autor que, pelo TVM, existe um instante $\overline{c_i}$ entre t_{i-1} e t_i tal que $\Delta x_i = v(\overline{c_i})\Delta t_i$), onde Δx_i é o deslocamento da partícula entre os instantes t_{i-1} e t_i. Como a soma dos deslocamentos Δx_i, para i variando de 1 a n, é igual ao deslocamento $x(b) - x(a)$, resulta

$$x(b) - x(a) \cong \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i.$$

É razoável esperar que, à medida que as amplitudes Δt_i tendem a zero, a soma $\sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$ tendem a $x(b) - x(a)$:

$$x(b) - x(a) = \lim_{max\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i. \qquad (10)$$

Vale ressaltar que além da aplicação cinemática de (8) o autor utiliza da mesma como motivação para integral quando aplica o limite em (10).

Em seguida, o autor apresenta a integral de Riemann, partindo da definição de soma de Riemann e aplicando o limite nessa soma

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Se a integral $\int_a^b f(x)dx$ existir, Guidorizzi, conclui que f é integrável segundo Riemann no intervalo, comumente chamada de integral definida de f em $[a, b]$.

Na sequência o autor apresenta e demonstra algumas propriedades de funções integráveis e então introduz o que chama de 1º Teorema Fundamental do Cálculo.

1º Teorema Fundamental do Cálculo: *se f for integrável em $[a, b]$ e se F for um primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Demonstração. Suponha f integrável em $[a, b]$ e com primitiva $F(x)$ neste intervalo, isto é, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$.

Aplicando o limite em (9) do Exemplo 1 para $max\, \Delta x_i \to 0$, obtemos:

$$F(b) - F(a) = \lim_{max\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i}\,)\Delta x_i$$

E, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Assim, fica provado o que o autor chama de 1º TFC.

Após concluir a demonstração, Guidorizzi (2001a) apresenta diversos exemplos numéricos que utilizam o resultado provado em 1º TFC, como por exemplo:

Exemplo 2: Calcule $\int_1^2 x^2\,dx$.

Partimos para o volume 2, em que o autor complementa o TFC, denominando-o 2º Teorema Fundamental do Cálculo Existência de Primitivas.

2º Teorema Fundamental do Cálculo – Existência de Primitivas: *seja f definida e contínua no intervalo I e seja $a \in I$. Nestas condições, a função F dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ \ x \in I$, é uma primitiva de f em I, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.*

Demonstração. Guidorizzi inicia a demonstração do 2º TFC evidenciando com a utilização da definição de derivada o que precisamos provar:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \quad \forall x \in I\ .$$

Temos que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Pelo Teorema da Média, denominado por Guidorizzi como Teorema do Valor Médio para integrais, demonstrado durante a análise do livro do Ávila, existe um c entre x e $x+h$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h,$$

ou seja,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c).$$

Analisando a expressão acima, percebemos que c tende a x quando h tende a zero e sabendo da continuidade de f em I, temos:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Assim, concluímos o 2º TFC o qual completa a demonstração do TFC. “Observe que o teorema fundamental do cálculo garante-nos que toda função contínua em um intervalo admite, neste intervalo, uma primitiva e, além disso, exibe-nos, ainda, uma primitiva” (GUIDORIZZI, 2001b, p.20).

Após concluir as demonstrações Guidorizzi (2001b) apresenta diversos exemplos numéricos que utilizam do conceito do TFC relacionado com primitivas, como por exemplo:

Exemplo 3: *Seja* $F(x) = \int_1^x \frac{3}{1+t^4}\,dt$*. Calcule* $F'(x)$.

Percebemos por fim que Guidorizzi faz a relação com o cálculo de área durante a definição de Soma de Riemann, inclusive quando representa $f(c_i) > 0$ e $f(c_i) < 0$. Ainda mais, numa seção posterior ao 1º TFC, que Guidorizzi chama de Cálculo de Áreas, ele faz a aplicação da integral definida como cálculo de áreas e cálculo de área entre curvas.

Durante esta seção Guidorizzi também aborda outro exemplo de aplicação na física envolvendo o cálculo da velocidade e espaço percorrido, assim como a observação após o Exemplo 1 no início da análise deste livro.

Após essa seção sobre cálculo de áreas, Guidorizzi apresenta outra seção sobre a aplicação do TFC, agora como o trabalho realizado por uma força. E por fim um capítulo ‘Mais Algumas Aplicações da Integral. Coordenadas Polares’, no qual apresenta aplicações do volume de sólidos de revolução, centro de massa, comprimento da curva e área em coordenadas polares.

Guidorizzi utiliza representação gráfica durante a definição de Soma de Riemann e as demonstrações do TVM e Teorema do Valor Médio para Integrais.

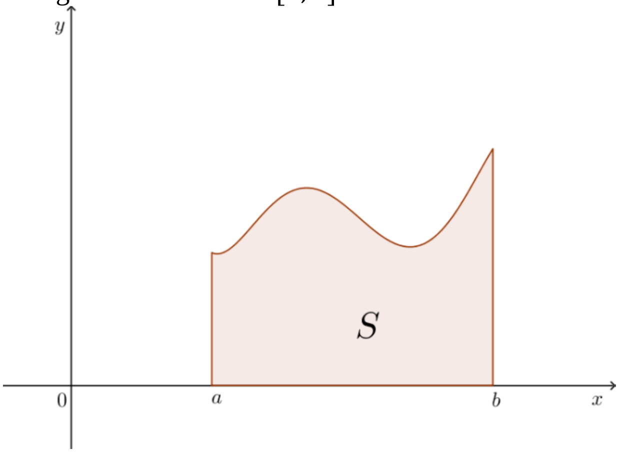
2.3 CÁLCULO (STEWART)

A 6ª edição, versão traduzida deste livro, foi publicada em 2011, São Paulo, pela editora Cengage Learning. Nesse livro Stewart inicia o capítulo Integrais falando sobre a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral.

> Há uma conexão entre o cálculo integral e o diferencial. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e veremos, neste capítulo, que isso simplifica bastante a solução de muitos problemas (STEWART, 2011, p. 334).

Após essa introdução ao capítulo, Stewart inicia a seção sobre Áreas e Distâncias. Partindo do conceito de área e distância, que será usado para formular a ideia de integral, tenta resolver o problema da área da região S delimitada pela função $f(x) \geq 0$, pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x (Figura 6). Antes de fazer o cálculo numérico da área dessas regiões, o autor questiona qual o significado da palavra área, concluindo que essa questão é fácil de ser respondida para regiões com lados retos, mas não é fácil quando se trata de regiões com lados curvos. Diz o autor que "Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área (STEWART, 2011, p. 335)".

Figura 6 - Região S no intervalo $[a, b]$



Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 335)

Em seguida, expõe a ideia do cálculo para essas regiões curvadas, aproximando a região S utilizando retângulos e depois tomando o limite da soma das áreas à medida que aumenta o número de retângulos. Stewart apresenta exemplos ilustrados graficamente que mostram esses procedimentos, antes de generalizar a definição.

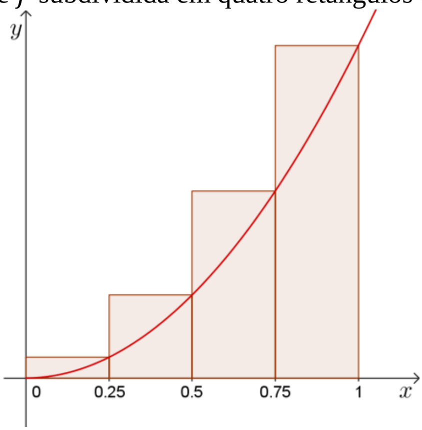
No primeiro exemplo Stewart faz uma estimativa da área sob a parábola $f(x) = x^2$, no intervalo de 0 até 1:

Exemplo 4: *Use retângulos para estimar a área sob a parábola* $f(x) = x^2$ *de 0 até 1.*

Solução. Observamos primeiro que a área de S (área sob a curva) deve ter valor entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1.

Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$. Tome $A = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa, como ilustra a Figura 7.

Figura 7 - Área de f subdividida em quatro retângulos circunscritos



Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 336)

Cada um dos retângulos tem largura $\frac{1}{4}$ e as alturas são $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$ e $(1)^2$. Se chamarmos R_4 a soma das áreas desses retângulos aproximantes, obteremos

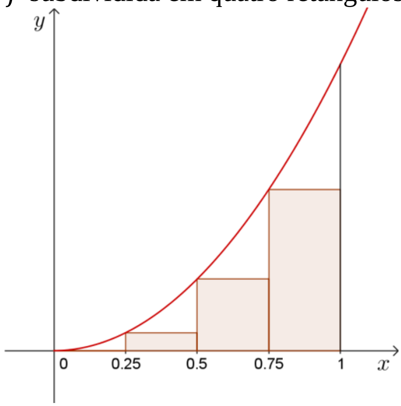
$$R_4 = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.(1)^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Pela Figura 7 vemos que área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875$$

Em vez de usar os retângulos da Figura 7, poderíamos usar os retângulos menores como na Figura 8, cujas alturas seguem os valores de f nas extremidades esquerdas dos subintervalos.

Figura 8 - Área de f subdividida em quatro retângulos inscritos



Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 336)

A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

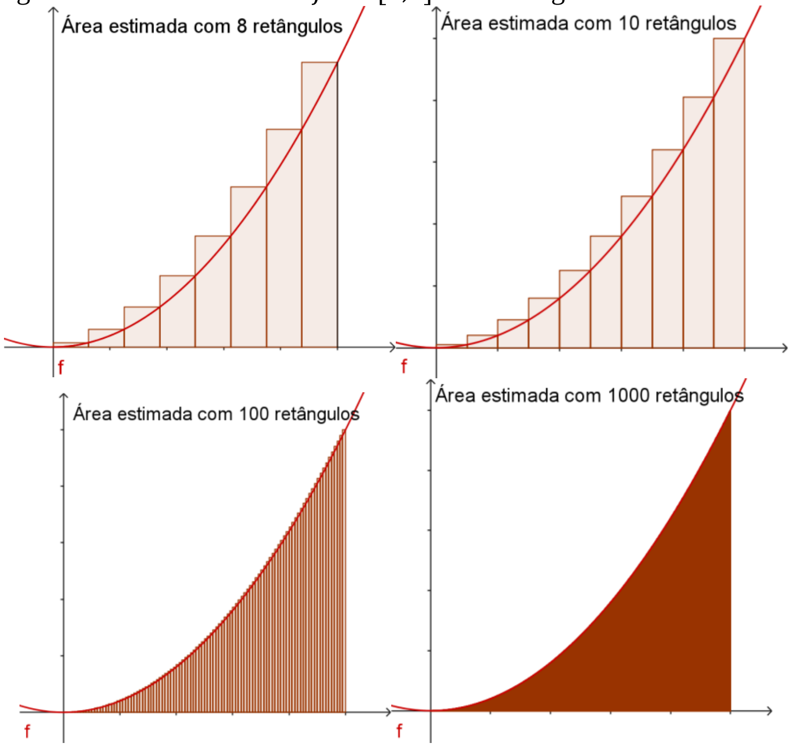
$$L_4 = \frac{1}{4}.0^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$$

Assim temos,

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

Podemos repetir esse procedimento com maior número de retângulos, por exemplo, usando somas 8, 10,..., 1000 áreas de retângulos inscritos e circunscritos na região, como mostra a Figura 9, concluindo então que a área é aproximadamente 1/3.

Figura 9 - Área estimada de f em $[0,1]$ com retângulos circunscritos



Fonte: produção da autora

Na sequência o autor apresenta outro exemplo.

Exemplo 5: *Para a região S do Exemplo 3, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a* $\frac{1}{3}$, *isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}.$$

Solução. R_n é soma das áreas dos n retângulos . Cada retângulo tem uma largura $\frac{1}{n}$, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$; isto é, as alturas são $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n}{n}\right)^2$. Assim,

$$R_n = \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}.\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}.\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}.\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Utilizamos aqui a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (11)$$

Substituindo (11) em R_n, obtemos

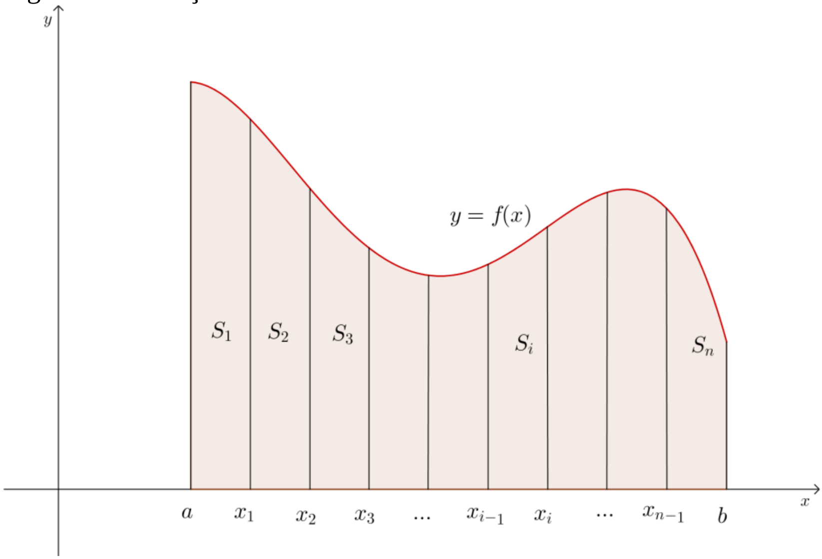
$$R_n = \frac{1}{n^3}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Assim, temos

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}.1.2 = \frac{1}{3}$$

Apenas depois desses exemplos é que o autor generaliza e apresenta o cálculo de área por limite de somas. Primeiramente, parte da região S representada na Figura 6, e calcula genericamente esta área subdividindo em n faixas $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de igual largura, como mostra a Figura 10. Assim, a largura de cada uma das faixas é $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, e $[a, b]$ fica dividido em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

Figura 10 - Partição de S

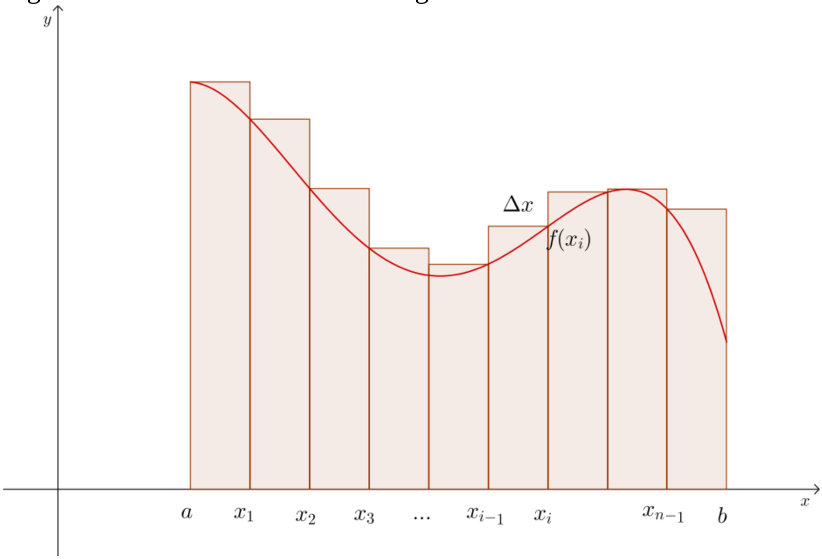


Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 338)

Vendo agora essas faixas como retângulos circunscritos (Figura 11), podemos dizer que a área do i-ésimo retângulo é dada por $f(x_i)\Delta x$, já que Δx representa a base e $f(x_i)$ a altura. Portanto, podemos concluir intuitivamente que a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é:

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Figura 11 - Área S dividida em retângulos circunscritos



Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 339)

Observe que essa aproximação de área se torna cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, $n \to \infty$. Portanto, o autor define a área A da região S como:

A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]. \qquad (12)$$

Na sequência ele aborda o problema da distância, que se baseia em calcular a distância percorrida pelo objeto (uma aplicação na física) que usa um limite similar a (12).

Após isso, define a integral definida como sendo o limite em (12), desde que ele exista, ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x. \qquad (13)$$

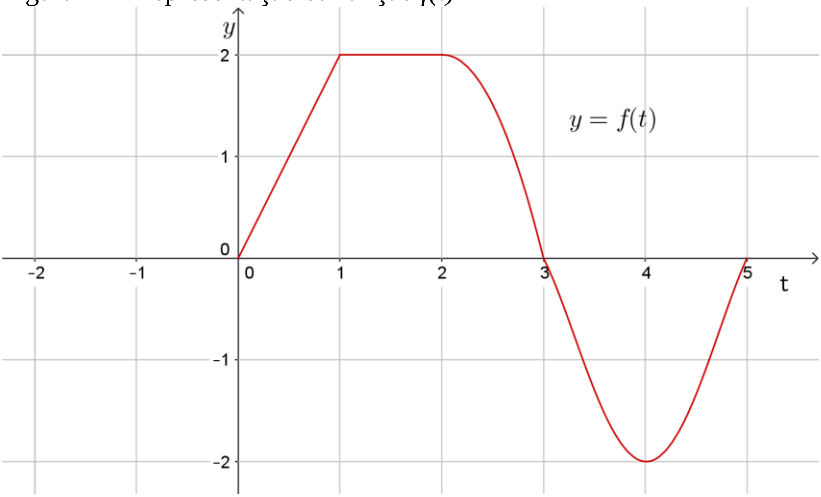
Stewart esclarece que $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$, que ocorre em (13), é chamado soma de Riemann. Ele enfatiza que a integral definida pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ quando f é uma função positiva.

Após ele apresentar alguns teoremas sobre integrabilidade de funções, propriedades e exemplos sobre somas de Riemann relacionados a área, ele enuncia o TFC. Stewart, enfatiza que o nome TFC é apropriado, pois estabelece uma conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ele cita que Barrow percebeu a derivação e a integração como processos inversos.

No livro, o TFC é divido em duas partes. Para introduzir a parte I, o autor se baseia no seguinte exemplo:

Exemplo 6: *Se f é a função contínua cujo gráfico está mostrado na Figura 12 e $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, ache os valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ e $g(5)$. A seguir, faça um esboço do gráfico de g.*

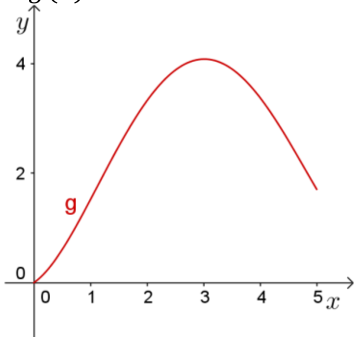
Figura 12 - Representação da função *f(t)*



Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 358)

Solução. Após calcular os valores pedidos no Exemplo 6, o autor apresenta o gráfico de g plotado a partir dos valores obtidos (Figura 13). Stewart explica que o gráfico de g é crescente até $x = 3$ e também atinge seu máximo porque $f(t) > 0$ neste intervalo, diferente de $3 < x \leq 5$, em que g é decrescente já que $f(t) < 0$.

Figura 13 - Gráfico de $g(x)$



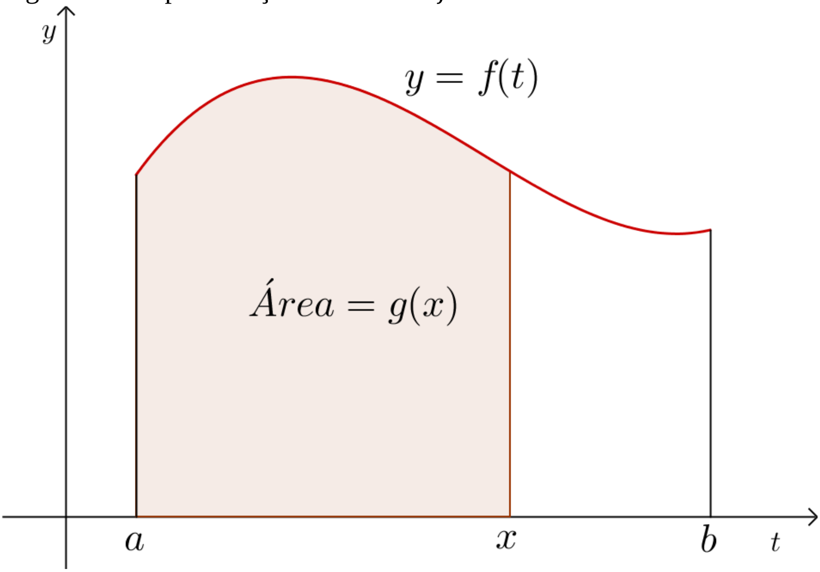
Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 358)

Isto conclui a solução do Exemplo 6.

Com o objetivo de introduzir a Parte I do TFC, Stewart toma $f(t) = t$, e $a = 0$, assim, a partir da igualdade $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ (pedida para ser provada em um exercício anterior), obtêm $g(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$. Observe que $g'(x) = x$, isto é, $g' = f$. Em outras palavras, g é a antiderivada de f, pelo menos neste caso. E se esboçarmos a derivada da função g mostrada da Figura 13 pelas inclinações estimadas das tangentes, teremos um gráfico semelhante ao de f. Portanto, suspeitamos que $g' = f$.

Para verificar que isso possa ser verdadeiro o autor toma uma função contínua f qualquer com $f(x) \geq 0$. Então, $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, como mostra a Figura 14.

Figura 14 - Representação da área sob f de a até x



Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 358)

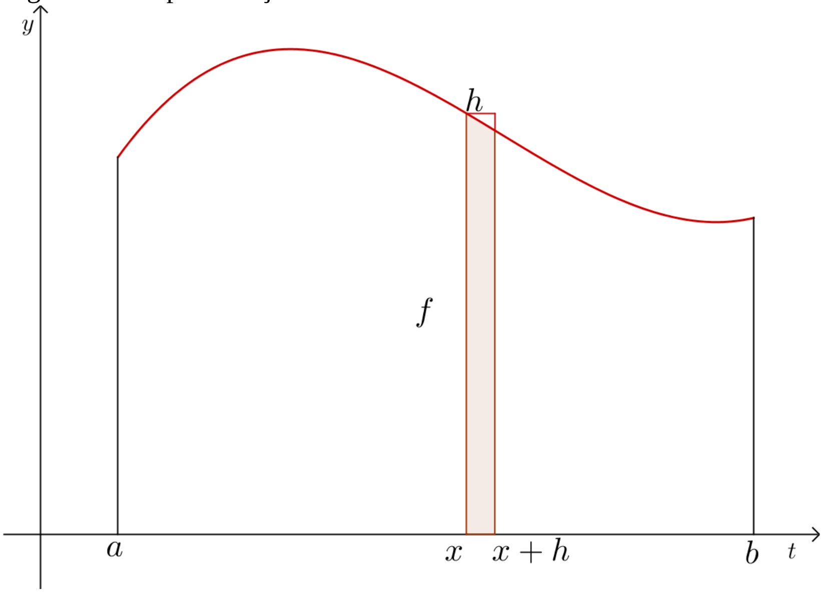
Para computar $g'(x)$ a partir da definição de derivada, observamos que, para $h > 0, g(x+h) - g(x)$ é obtida subtraindo-se as áreas. Para h pequeno podemos verificar pela Figura 15 que essa diferença é aproximadamente igual à área do retângulo com altura $f(x)$ e base h, ou seja:

$$g(x+h) - g(x) \cong hf(x)$$

logo,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Figura 15 - Representação de *h*



Fonte: adaptada de Stewart (2011, p. 359)

Intuitivamente, o autor conclui que podemos esperar que:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Na sequência o autor confirma esse resultado na demonstração da primeira parte do TFC.

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte I: *se* f *for contínua em* $[a, b]$, *então a função* g *definida por* $g(x) = \int_a^x f(t)dt,\ a \leq x \leq b$ *é contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b) *e* $g'(x) = f(x)$.

Stewart demonstra a parte I utilizando algumas propriedades demonstradas por ele anteriormente, e alguns teoremas, sendo elas:

Propriedade 1: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Propriedade 2: *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$*, então,* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Teorema do Valor Extremo: *Se* f *for contínua em um intervalo fechado* $[a,b]$*, então* f *assume um valor máximo global* $f(v) = M$ *e um valor mínimo global* $f(u) = m$ *em pontos* $u, v \in [a,b]$.

Teorema do Confronto: *Sejam* f, g *e* h *três funções tais que* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$*, para todo* $x \neq a$*. Se* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$*, então existe* $\lim_{x\to a} g(x)$ *e é também igual a L.*

Assim, a demonstração é dada por Stewart da seguinte forma:
Demonstração Parte I. Se x e $x+h$ estão em (a,b), então,

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

Pela propriedade 1:

$$\left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt\right) - \int_a^x f(t)dt$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Para um $h \neq 0$, temos:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \tag{14}$$

Assumindo $h > 0$ e como f é contínua em $[x, x+h]$, pela propriedade 2, segue que:

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$$

e pelo Teorema do Valor Extremo

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)$$

Assim, pela equação (14), obtemos que:

$$f(u) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(v) \qquad (15)$$

Agora tomando $h \to 0$ temos que $u \to x$ e $v \to x$, já que u e v estão entre x e $x+h$. Portanto,

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

Assim, pelo Teorema do Confronto e a desigualdade (15), concluímos que:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

Nessa demonstração não fica evidente a conexão com a Soma de Riemann, visto que foram usados propriedades e teoremas que não evidenciam isso, no entanto essa conexão está escondida na passagem da equação (14) para equação (15), quando de certa forma trocamos a integral pela função f. Na sequência Stewart apresenta o que chama de Parte II do TFC, como segue.

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte II: *se f for contínua em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ em que F' é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.*

A parte II é demonstrada a partir da Parte I.

E assim, o autor conclui dizendo que a parte II do TFC afirma que para calcular $\int_a^b f(x)dx$ basta simplesmente conhecer uma primitiva de f e aplicar nas extremidades do intervalo.

> É surpreendente que $\int_a^b f(x)dx$, definida por um procedimento complicado envolvendo todos os valores de $f(x)$ para $a \leq x \leq b$, possa ser encontrada sabendo-se os valores de $F(x)$ em somente dois pontos, a e b. Embora o teorema possa ser surpreendente à primeira vista, ele fica plausível se interpretarmos em termos físicos. Se $v(t)$ for a velocidade de um objeto e $s(t)$ for sua posição no instante t, então $v(t) = s'(t)$, portanto

> s é uma primitiva de v. Na seção 5.1 consideramos um objeto que se move sempre no sentido positivo e fizemos a conjectura de que a área sob a curva da velocidade é igual à distância percorrida. Em símbolos: $\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$. Isso é exatamente o que o TFC2 diz nesse contexto. (STEWART, 2011, p.362)

Para finalizar, Stewart fala sobre a derivação e integração como processos inversos, justapondo as duas partes do TFC. Assim, é observado pelo autor que a parte I pode ser escrita como $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$. O que quer dizer que se f for integrada e o resultado, derivado, obteremos de volta a função original f. Como $F'(x) = f(x)$, a parte II pode ser reescrita como $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$.

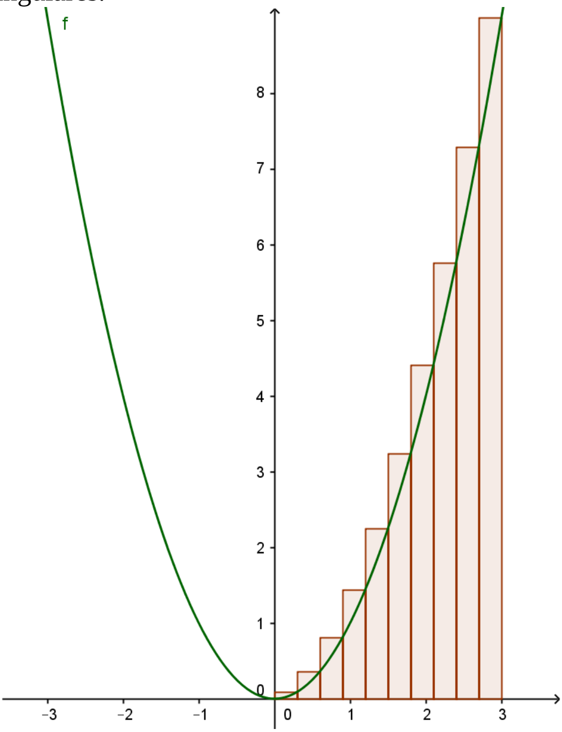
> Essa versão, afirma que se tomarmos uma função F, a derivarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas, as duas partes do TFC mostram que a derivação e a integração são processos inversos (STEWART, 2011, p. 363).

Após concluir esse capítulo de Integrais, o autor aborda no capítulo seguinte apenas aplicações da integral definida, utilizando-a para calcular áreas entre curvas, volumes de sólidos e o trabalho realizado por uma força variável. E além disso, em outro capítulo 'Mais Aplicações de Integração' apresenta comprimento de arco, sólido de revolução, centro de massa, probabilidade, economia e biologia.

2.4 CÁLCULO UM CURSO MODERNO E SUAS APLICAÇÕES (HOFFMANN E BRADLEY)

Este livro é a tradução da 7ª edição do *Calculus For Business, Economics, And The Social Life Sciences*. Publicado em 2002 pela LTC no Rio de Janeiro. Os autores Laurence D. Hoffmann e Gerald L. Bradley iniciam o capítulo 'Outros Tópicos de Integração' falando sobre a área como limite de uma soma. Apresentam a soma de Riemann considerando uma área A sob uma curva $y = f(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$, em que $f(x) \geq 0$ e f contínua. Os autores sugerem que o leitor pense como se calcula a área de uma região A supondo as curvas $y_1 = x^2$ (Figura 16) ou $y_2 = e^x$, antes mesmo de continuar a leitura. Sabemos que se esta região fosse um quadrado, um triângulo ou parte de círculo, poderíamos calcular a área usando expressões conhecidas, e uma ideia para calculá-la é relacionar a um problema conhecido, como talvez um desses citados. Ou seja, podemos dividir a região dada y_1 ou y_2 em uma série de regiões retangulares, e calcularmos o valor aproximado da área A somando as áreas dessas regiões retangulares.

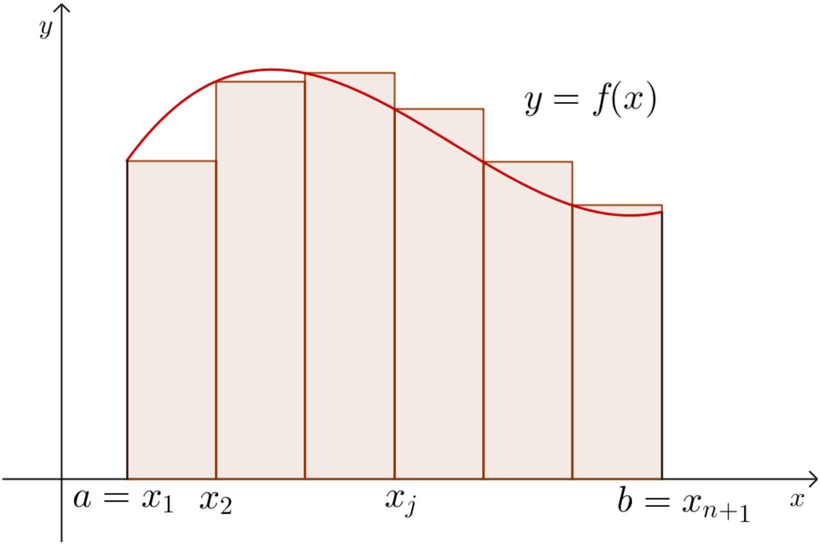
Figura 16 - Exemplo de área $y_1 = f$ no intervalo [0,3] dividida em regiões retangulares.



Fonte: produção da autora

Consideremos agora uma $f(x)$ qualquer. Dividimos um intervalo $a \leq x \leq b$ em n subintervalos iguais de largura Δx e chamamos de x_j a extremidade esquerda do intervalo de ordem j. Em seguida, traçamos n retângulos tais que o retângulo de ordem j tenha uma largura igual a Δx e uma altura igual a $f(x_j)$, como mostra a Figura 17:

Figura 17 - Aproximação por retângulos da área sob uma curva com *n* subintervalos



Fonte: adaptada de Hoffmann e Bradley (2002, p.312)

A Integral Definida é apresentada da seguinte forma:

> Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $a \leq x \leq b$. Suponha que esse intervalo tenha sido dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = (b - a)/n$ e seja x_j um número pertencente ao intervalo de ordem j, para $j = 1,2, \dots, n$. Neste caso, a integral definida de $f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é representada pelo símbolo $\int_a^b f(x)dx$ e é dada pelo limite $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$. (HOFFMANN; BRADLEY, 2002, p.314)

Definem ainda uma notação de integral para expressar a definição de área sob uma curva, da seguinte forma: "Área sob uma curva: Se $f(x)$ é uma função contínua e $f(x) \geq 0$ no intervalo $a \leq x \leq$

b, a área da região sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é dada por $A = \int_a^b f(x)dx$."(HOFFMANN; BRADLEY, 2002, p.314)

Notamos o quanto é evidenciado pelos autores a aplicação da integral definida como um cálculo de área, mas eles citam que existem diversas grandezas que também se aplica a integral definida.

Os autores chamam a atenção do leitor para o fato do porquê que é definido a integral definida, e assim comentam que se calcular o limite de uma soma fosse a única forma de obter o valor de uma integral definida, o processo de integração provavelmente não passaria de uma curiosidade matemática. Mas felizmente existe um meio mais simples de executar o cálculo, devido a um teorema, que chamamos de TFC, que relaciona a integral definida à antiderivação, ou ainda, um limite de soma à antiderivação (HOFFMANN; BRADLEY, 2002).

Após essa introdução ao TFC, os autores apresentam o teorema.

Teorema Fundamental do Cálculo: *se $f(x)$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, em que $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$.*

A demonstração do teorema os autores deixam para o final do capítulo. Sendo assim, antes disso apresentam alguns exemplos sobre cálculo de áreas usando o resultado do TFC e com uma nota explicam o porquê na integral definida não é mais somada a constante C no resultado final. O argumento para justificar isso, é que $F(x) + C$ é a antiderivada genérica de $f(x)$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = (F(x) + C)\,\Big|_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C]$$
$$= F(b) - F(a)$$

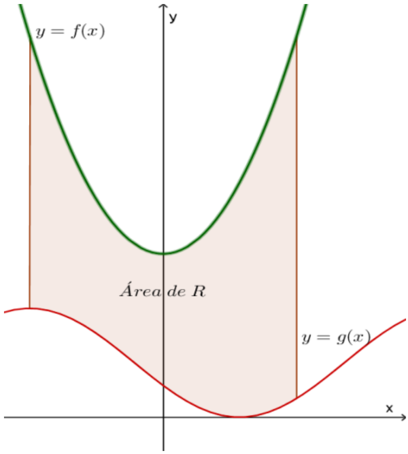
Os exemplos apresentados no livro são apenas numéricos a respeito do uso do TFC para calcular uma região de uma função limitada por um intervalo, como por exemplo, determinar a área da região limitada pela curva $y = -x^2 + 4x - 3$ e pelo eixo x.

Antes ainda da demonstração do TFC, os autores definem a integral para o cálculo de área entre duas curvas:

Área entre duas curvas: Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções no intervalo $a \leq x \leq b$ com $f(x) \geq g(x)$ e se R é a região limitada pelas curvas de f e g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ (Figura 18)

$$\text{Área de } R = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Figura 18 - Área entre duas curvas



Fonte: produção da autora

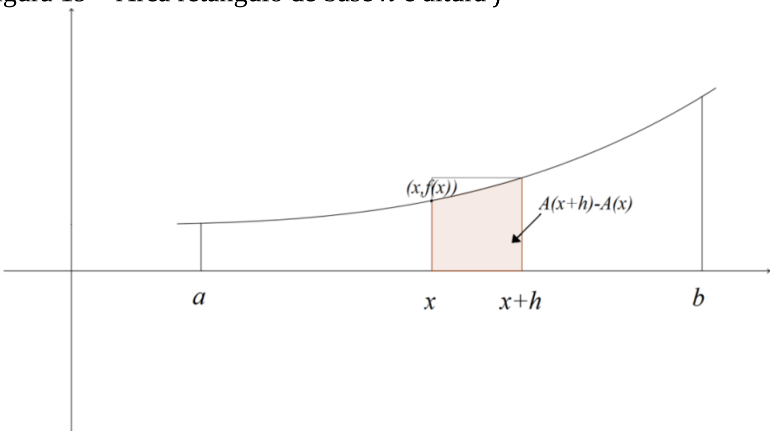
O TFC é demonstrado pelos autores apenas para caso particular em que $f(x) \geq 0,$ ou seja, para o cálculo de área.

Demonstração do TFC. Iniciamos, neste caso, com uma integral definida $\int_a^b f(x)dx$ que representa a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Para um valor de x qualquer entre a e b, seja $A(x)$ a área sob a curva $f(x)$ no intervalo $[a, x]$. Então, o quociente-diferença de $A(x)$ é

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

em que , por definição, a expressão $A(x+h) - (A)$ é a área sob a curva $y = f(x)$ entre x e $x + h$, ou seja, $\int_x^{x+h} f(x)dx$. Para pequenos valores de h, essa área é aproximadamente igual à área de um retângulo de altura $f(x)$ e largura h. Vemos isso na Figura 19:

Figura 19 – Área retângulo de base h e altura f



Fonte: adaptada de Hoffmann e Bradley (2002, p. 319)

Logo,

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \cong f(x). \qquad (16)$$

Neste passo o autor deixa subentendido o Teorema da Média para concluir (16), usando apenas a parte intuitiva.

Em seguida, fazendo h tender a zero, e conforme a definição de derivada, temos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = A'(x) = f(x)$$

Portanto, $A(x)$ é a antiderivada de $f(x)$.
Suponhamos que $F(x)$ seja outra antiderivada de $f(x)$. Então:

$$A(x) = F(x) + C.$$

Como $A(x)$ é a área sob a curva $y = f(x)$ entre a e x, $A(a)$, a área entre a e a, é 0, logo:

$$A(a) = 0 = F(a) + C$$

e $C = -F(a)$. A área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é $A(b)$, que satisfaz à relação

$$A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

e como a área sob a curva $y = f(x)$ também é dada pela integral definida $\int_a^b f(x)dx$, temos, finalmente como estabelece o TFC

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a).$$

Os autores se referiram ao conceito de área várias vezes, nos remetendo assim ao conceito de soma de Riemann. A demonstração se torna simples por utilizar apenas o conceito de área e definição de derivada, mas é válida apenas para $f(x) \geq 0$. E além disso, não deixa evidente a conexão entre soma de Riemann e o TFC quando utiliza intuitivamente e informalmente o Teorema da Média.

Além do conteúdo apresentado pelos autores sobre o TFC como um cálculo de área, é apresentado outras diversas aplicações, principalmente na área da Economia, como por exemplo: Montante de um investimento contínuo, Excesso líquido de lucro, Demanda do Consumidor, Tendência do Consumidor para Gastar, etc.

2.5 CONSIDERAÇÕES

Das obras analisadas percebemos que o assunto em questão é apresentado de diversas maneiras. Os livros analisados apresentam uma motivação para as somas de Riemann pelo cálculo da área, uns com mais ênfase que outros, como por exemplo, Hoffmann e Bradley (2002) que evidenciam e demonstram o TFC para o caso particular de cálculo de área, e Guidorizzi (2001) por sua vez, faz apenas uma observação que a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma de áreas de retângulo. Porém, todos definem a integral definida como o limite dessas somas.

No que diz respeito a representação geométrica das somas de Riemann, observamos que Guidorizzi (2001a) apresenta poucas representações na construção das somas de Riemann, porém complementa numa seção denominada Cálculo de Áreas. Por outro lado, mesmo Ávila (2006) sendo um livro com foco em análise, apresenta desde a introdução várias figuras para ilustrar o problema, e Stewart (2013), assim como Hoffmann e Bradley (2002), contemplam várias representações geométricas para ilustrar a noção intuitiva da aproximação da área pelo somatório.

Observamos que as abordagens das somas de Riemann são de certa maneira similares nos livros analisados, diferindo essencialmente em termos de representação geométrica e de aplicações. Porém, na apresentação do TFC há algumas diferenças. Ávila e Hoffmann e Bradley introduzem como um cálculo de primitivas justificando facilitar os cálculos, enquanto Guidorizzi apenas como cálculo de primitivas, e Stewart além do cálculo de primitivas complementa como uma conexão entre o Cálculo Diferencial e o Integral.

Guidorizzi (2001a e 2001b) e Stewart (2011) propõem a demonstração do TFC em duas partes, uma apresentando uma primitiva e a outra o cálculo da integral definida oriundo da aplicação de uma primitiva nos extremos do intervalo de integração. Entretanto, o que é apresentado na primeira parte de Guidorizzi é a segunda parte de Stewart. Isso tem consequências didáticas evidentes visto que essa inversão altera a ordem dos fatores, pois para Stewart (2011) a segunda parte é uma consequência da primeira, enquanto para Guidorizzi (2001a e 2001b) as demonstrações são independentes, sendo inclusive abordadas em volumes distintos. Temos como hipótese que para Guidorizzi, num primeiro momento do curso de Cálculo, a abordagem do TFC para o cálculo da integral definida depende do resultado $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ e num momento posterior, com melhor embasamento teórico, da compreensão de $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in I,$ como sendo uma primitiva de f em I. Uma coisa muito interessante é que mesmo apresentando as duas partes do TFC não sequencialmente, Guidorizzi as demonstra rigorosamente. Já para Ávila (2006) e Hoffmann e Bradley (2002) o TFC é abordado como um teorema de única parte. Ávila (2006) e Hoffmann e Bradley (2002) diferem na forma de demonstrar o TFC. Hoffmann e Bradley consideram apenas para um caso particular, ou seja, $f(x) \geq 0,$ e não usam formalmente o Teorema da Média. Enquanto que Ávila, ao utilizar do resultado de outros teoremas, como o Teorema da Média, prova o TFC não apenas para o cálculo de área e sim para uma f contínua em um intervalo I.

Analisando as diferentes demonstrações do TFC, temos que a conexão entre soma de Riemann e o TFC é percebida quando exploramos os teoremas necessários para realizar a demonstração do TFC. Ávila faz essa conexão implicitamente durante a demonstração do Teorema da Média em que utiliza do resultado do Teorema do Valor Intermediário. Guidorizzi deixa evidente essa conexão quando utiliza durante a demonstração do TFC o resultado do TVM, mais especificamente, quando prova a igualdade (9) no Exemplo 1 e a utiliza na demonstração do 1º TFC. Em Stewart e Hoffmann e Bradley as conexões não são evidentes. Ambos utilizam do Teorema do Valor Médio para Integrais (ou Teorema da Média) sem citar isso. Stewart durante a introdução do TFC, e Hoffmann durante a demonstração. Em termos didáticos se apresentarmos apenas o(s) enunciado(s) do TFC esta conexão não será estabelecida. Por isso, consideramos fundamental que o professor aborde tal demonstração (de maneira formal e/ou intuitiva) para que o aluno possa compreender tal conexão.

Os exemplos abordados nos livros analisados se diferem conforme o objetivo do livro. No livro de análise do Ávila os exemplos são apenas de abordagem demonstrativa. Os de Guidorizzi variam conforme a seção analisada. Por exemplo, a seção que tratava das demonstrações do TFC traziam exemplos que completavam essas demonstrações, enquanto que a seção do cálculo de área abordava exemplos na maioria das vezes numéricos. Stewart aproveita alguns exemplos para introduzir os subitens do conteúdo de integral (como soma de Riemann e TFC Parte 1) e os demais também numéricos de modo a fixar o conteúdo. Por fim, Hoffmann e Bradley por se tratar de um livro de aplicações, os exemplos seguiam esta mesma abordagem, iniciando com alguns numéricos e concluindo o capítulo com diversas aplicações.

Todos os livros apresentam alguma aplicação do TFC, seja ela explorada ou não. Ávila comenta de algumas funções definidas por integrais, entre elas cita uma aplicação bastante importante nos estudos de Probabilidade e Estatística, todavia não explora essa aplicação. Guidorizzi utiliza uma seção individual para apresentar aplicações do TFC a partir de exemplos no cálculo de áreas (e áreas entre curvas), velocidade e distância, e outra seção, também individual, para abordar o conceito de trabalho realizado por uma força variável. Além disso, ele apresenta um capítulo falando somente sobre aplicações da integral, em que aborda sólidos de revolução, centro de massa e área em coordenadas polares. Stewart cita a aplicação de área desde soma de Riemann, e após concluir o capítulo de Integrais, separa outro capítulo chamado “Aplicações de Integração”. Neste o autor aborda o TFC aplicado como cálculo de áreas entre curvas, volume de sólidos e o trabalho realizado por uma força variável. Além disso, no capítulo ‘Mais Aplicações de Integração’ apresenta comprimento de arco, sólido de revolução, centro de massa, probabilidade, economia e biologia. Por fim, o livro de Hoffmann e Bradley por se tratar de um livro de aplicações, além do cálculo de área, é apresentado outras aplicações: Economia, Medicina e Curvas de Lorentz.

De modo a sintetizar nossa análise, apresentamos abaixo uma tabela respondendo às perguntas apresentadas no início do capítulo e outra contendo as aplicações abordadas pelos livros.

Tabela 1 - Perguntas diretrizes da análises dos livros

Perguntas	Ávila	Guidorizzi	Stewart	Hoffmann e Bradley
A soma de Riemann é relacionada com cálculo de área?	Sim, como elemento motivador.	Apenas faz uma observação sobre a relação com a área de um retângulo.	Sim, inclusive introduz soma de Riemann como um problema de área.	Sim, partindo da área de uma função f qualquer e dividindo essa área em retângulos.
O livro apresenta Representação Gráfica?	Todos os livros apresentam.			
Como é introduzido o TFC?	Como cálculo de primitivas, justificando facilitar os cálculos.	Como cálculo de primitivas.	A partir de um exemplo em que verifica $g' = f$. E ainda, como uma conexão entre o cálculo diferencial e o integral.	Como cálculo de primitivas e um facilitador.
Faz alguma conexão com a soma de Riemann?	Implicitamente durante a demonstração do Teorema da Média em que utiliza o TVI.	Evidentemente quando utiliza o resultado do TVM.	Sem evidências, quando utiliza o Teorema da Média implicitamente na introdução	Sem evidências, quando utiliza o Teorema da Média implicitamente na demonstra-

			do TFC.	ção do TFC.
Quais os tipos de exemplos?	Abordagem demonstrativa.	Abordagem demonstrativa e numérica.	Utiliza de exemplos para introduzir o conteúdo e fixar após apresentado, sendo todos numéricos.	Todos numéricos, sendo alguns sobre aplicações do TFC.

Fonte: produção da autora

Tabela 2 - Aplicações do TFC apresentadas nos livros analisados

Aplicações	Ávila	Guidorizzi	Stewart	Hoffmann e Bradley
Cálculo de área		X	X	X
Área em coordenadas polares		X		
Comprimento de arco		X	X	
Probabilidade e Estatística	X		X	
Física (Trabalho realizado por uma força, cinemática e centro de massa)		X	X	
Volume		X	X	X
Outras (economia, medicina, biologia e curvas de Lorentz)			X	X

Fonte: produção da autora

3 DESENVOLVIMENTO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentaremos a sequência didática proposta para as turmas de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI-II) da Graduação e Fundamentos do Cálculo do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias. Iniciaremos com a concepção das sequências e objetivo das atividades. Após, a organização e análise a priori de cada atividade.

3.1 CONCEPÇÃO DAS SEQUÊNCIAS

A concepção das atividades foi baseada no trabalho de Hoffkamp (2010), o qual segundo a autora obteve resultados significativos, como comentado anteriormente.

Deste modo, a ideia é apresentar o cálculo de área de forma dinâmica, evidenciando graficamente e analiticamente o comportamento da função área de diferentes polígonos formados por funções reais. Ou seja, interpretaremos o significado geométrico da primitiva de uma função. Assim sendo, consideraremos neste tópico uma aplicação do TFC: o cálculo de área.

Adaptamos algumas atividades realizadas por Bianchini (2000) e Hoffkamp (2010), utilizando como plataforma tecnológica o GeoGebra. Desta forma, descreveremos as atividades que visam estabelecer o comportamento gráfico e analítico da função área de uma região variável, ou seja, explorar a dependência funcional quando consideramos um extremo do intervalo sendo móvel.

O objetivo de cada atividade em ambas as turmas é descrito da seguinte forma:

- A Atividade 01 (ver Quadro 2) tem como objetivo possibilitar ao estudante desenvolver o conceito geométrico do TFC, de modo que compreenda a relação entre o gráfico da derivada e o da primitiva. Além disso, na turma da Pós-Graduação, o objetivo também é o mestrando explorar o conceito algébrico do TFC.
- A Atividade 2 (ver Quadro 3 e 4) tem como objetivo possibilitar a exploração da dependência funcional entre a distância NP e a área do polígono. Esta atividade será dividida em dois momentos.

- A Atividade 3 (ver Quadro 10 e 11), que será aplicada apenas a turma da Pós-Graduação, tem como objetivo explorar, a partir de visualizações interativas, outros conceitos do CDI além de primitivas, como por exemplo: pontos de máximo, simetria e não linearidade, usando uma abordagem dinâmica que conecta uma situação geométrica com um gráfico de função.

Na sequência descreveremos as atividades individualmente. Nos Apêndices A e B encontram-se a proposição das atividades desenvolvidas conjuntamente da Graduação e da Pós-Graduação, respectivamente.

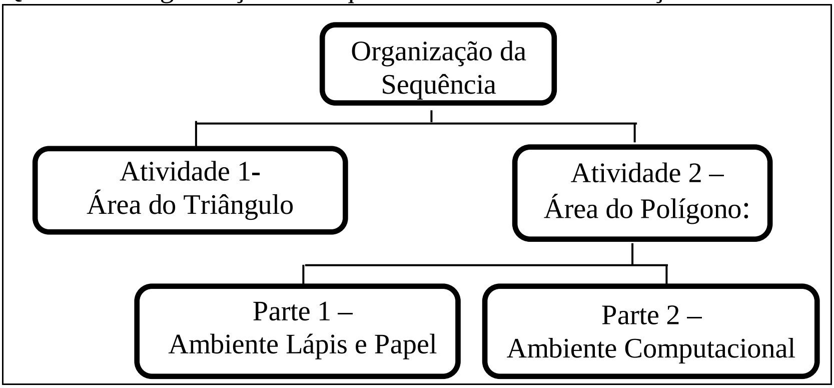
Visto que a aplicação da sequência na turma da Pós-Graduação ocorreu depois da aplicação na Graduação, a Atividade 01 sofreu algumas adaptações. Essa adaptação se deu principalmente pelos resultados a posteriori da sequência aplicada a Graduação, que inclusive é uma etapa prevista pela metodologia da Engenharia Didática.

Uma vez que as atividades foram adaptadas de Hoffkamp (2010) a análise a priori levará em consideração os resultados já obtidos na aplicação da autora, e além desses resultados, a análise da sequência na Pós-Graduação usará dos resultados a posteriori da Graduação.

3.2 Apresentação e Análise a Priori da Sequência Didática da Graduação

A organização da sequência é composta por duas atividades, como mostra o Quadro1. As atividades podem ser consultadas no Apêndice A.

Quadro 1 - Organização da Sequência Didática da Graduação



Fonte: produção da autora

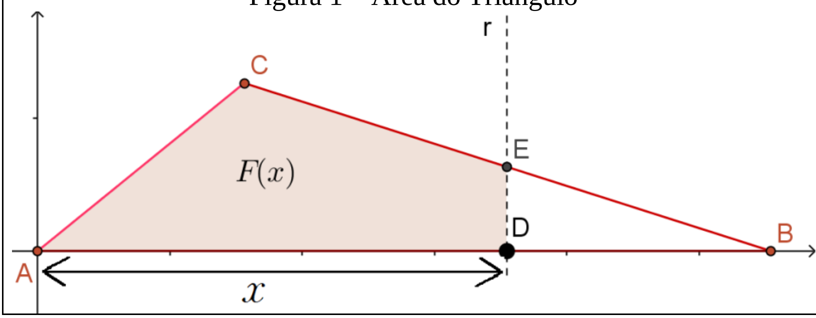
3.2.1 Atividade 1: Função Área do Triângulo [2]

O Quadro 2 apresenta a Atividade 1: Área do triângulo proposta para a turma da Graduação.

Quadro 2 – Atividade 1 – Área do Triângulo

1) Seja ABC o triângulo representado na Figura 1 e seja r a linha tracejada que se move de A para B.

Figura 1 – Área do Triângulo



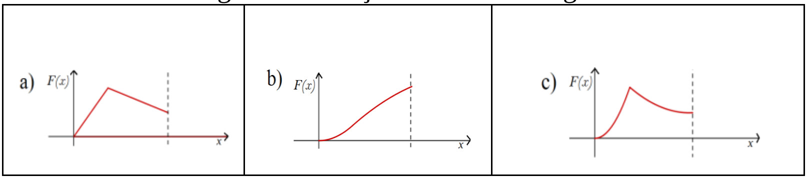
---

[2] http://ggbtu.be/mSPY3Qq3s

Fonte: adaptada de Schlöglhofer, apud Hoffkamp, 2010.

Seja $F(x)$ a função que determina a área do polígono ACED sombreado na figura 1, onde x é a distância do ponto A até o ponto D. Assinale, na figura 2, o item que representa o gráfico da função área desse polígono. Justifique sua resposta.

Figura 2 – Função Área do Triângulo



Fonte Adaptada de Schlöglhofer, apud Hoffkamp, 2010.

Fonte: produção da autora

> *Tarefa:* Analisar e justificar qual alternativa *(a, b* ou *c)* representa corretamente a função área do triângulo ABC da Figura 1.

Uma possível estratégia é analisar que o comportamento da função que descreve a área do polígono é sempre crescente. O aluno pensando desta forma elimina as alternativas a e c imediatamente, visto que nessas o comportamento do gráfico que descreve a área é decrescente a partir do ponto C. Logo, resta a alternativa b que descreve uma função crescente em todo o intervalo $[A, D]$.

Outra estratégia é verificar para um caso particular, e não funções gerais, dando coordenadas para os pontos A, B e C e assim encontrar funções que descrevam o comportamento do triângulo, por exemplo, tomando A(0,0), C(2,2) e B(6,0) temos:

$$g(x) = x \quad \text{e} \quad h(x) = -\frac{x}{2} + 3$$

em que $g(x)$ representa a reta AC e $h(x)$ a reta BC.

Assim, para estes casos particulares possivelmente iniciaria calculando a área a partir de uma integral definida, em que $g \in [0,2]$ e $h \in [2,6]$:

$$\int_0^2 x dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_2^6 (-x/2 + 3)\, dx = 4$$

o que o levaria a um valor numérico de toda a área do triângulo, que não representa a dependência funcional da área.

Outra estratégia seria o uso do TFC para estas funções encontradas, com o limitante superior variável, ou seja, em função da variável x:

$$\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \tag{17}$$

e

$$\int_2^x (-t/2 + 3) dt = -\frac{x^2}{4} + 3x - 5 \tag{18}$$

E por fim, para concluir a lei de formação da função área para este caso particular, bastaria somar a área em [0, 2] sob a curva g em (18), e definir os intervalos de cada função:

$$F(x) \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \in [0,2] \\ -\frac{x^2}{4} + 3x - 3, & x \in [2,6] \end{cases}$$

Todavia, é provável que o aluno não verifique isto tão precisamente e nem mude as variáveis de integração, apenas certifique-se que as funções (17) e (18) são parábolas que se aproximam da alternativa b.

O aluno pode inclusive elaborar o mesmo raciocínio de um caso particular, entretanto sem observar a concavidade das funções e a variação da área, o que possivelmente o faria assinalar a alternativa c, que estaria incorreta. Ou ainda, pensando que o gráfico da área é apenas como a área $F(x)$, o aluno pode assinalar a alternativa a, o que também estaria incorreto e mostra que não estabeleceu a dependência funcional.

3.2.2 Atividade 2: Função Área do Polígono[3]

O Quadro 3 apresenta a Atividade 2 (Parte 1): Área do polígono proposta para a turma da Graduação.

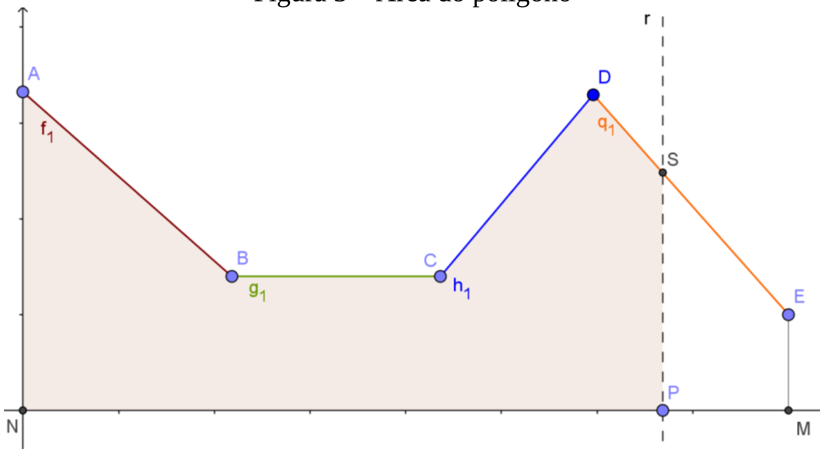
---

[3] http://ggbtu.be/muJuV9sHh

Quadro 3 - Atividade 2 (Parte 1): Área do polígono - Ambiente lápis e papel

Considere o polígono sombreado na Figura 3

Figura 3 – Área do polígono



Fonte: produção da autora

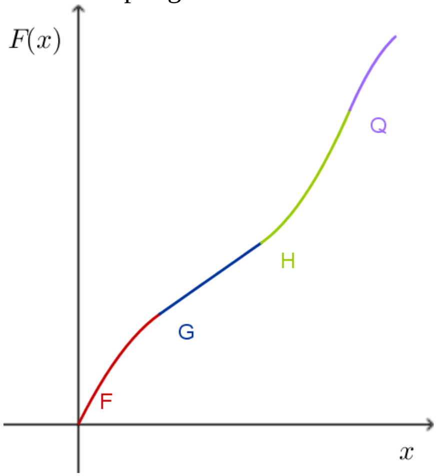
Sabendo que a área do polígono ABCDSPN depende da abscissa x do ponto P, represente graficamente a função que descreve a sua área. Justifique sua representação.

Fonte: produção da autora

Tarefa: Representar graficamente a função área dos polígonos.

Espera-se que os alunos observem que o polígono é formado por três funções afins ($f_1,\ h_1\ e\ q_1$) e uma função constante (g_1). Desta forma, sabe-se que independente da lei de formação destas funções, os alunos terão, a partir do TFC para as funções afins, duas funções quadráticas côncavas para baixo (F e Q), uma côncava para cima (H) e uma função afim (G). Desta forma, o gráfico pode ser representado similarmente ao gráfico apresentado na Figura 20.

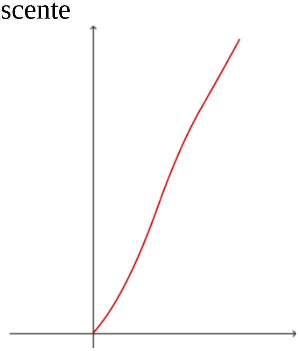
Figura 20 - Função área do polígono



Fonte: produção da autora

Outra possível estratégia é a representação de uma função área como a Figura 21 sem considerar o conceito do TFC em cada intervalo das funções, apenas usando o raciocínio lógico que uma função que descreve a área do polígono é crescente e positiva. Não seria uma estratégia errada, entretanto não alcançaria um dos objetivos da atividade que é relacionar o gráfico da derivada com o da primitiva.

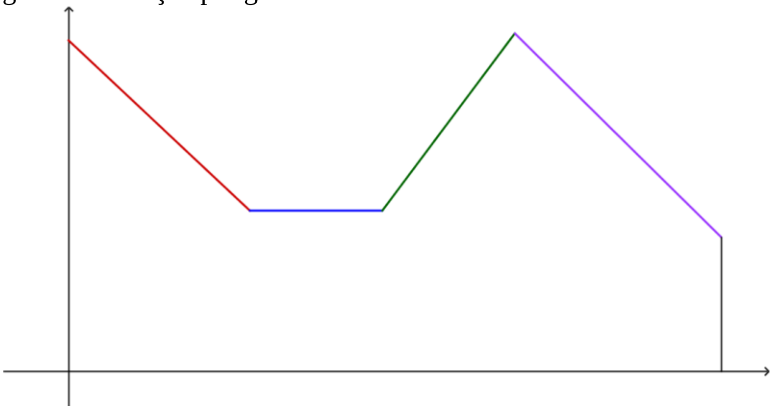
Figura 21 - Função crescente



Fonte: produção da autora

Sem ter compreendido corretamente a dependência funcional introduzida na Atividade 1, o aluno pode representar o gráfico da área apenas como a área sombreada, como mostra a Figura 22, que estaria errada.

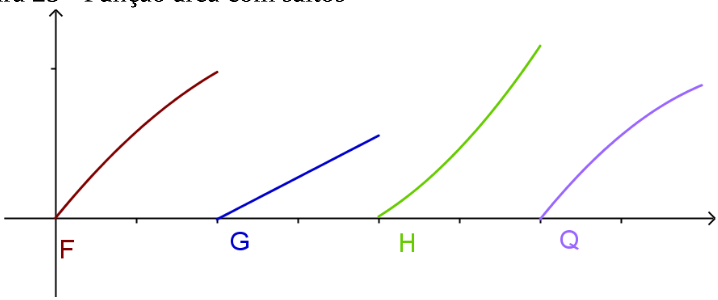
Figura 22 - Função polígono



Fonte: produção da autora

Ainda é possível que o aluno utilize do conceito do TFC, em intervalos independentes, não verificando a influência da área de um dado intervalo no intervalo subsequente como ilustra a Figura 23.

Figura 23 - Função área com saltos

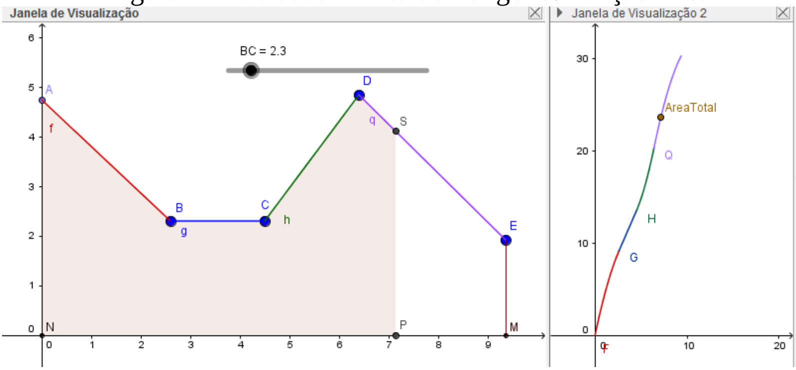


Fonte: produção da autora

O Quadro 4 apresenta a Atividade 2 (Parte 2): Área do polígono proposta para a turma da Graduação.

Quadro 4 - Atividade 2 (Parte 2): Área do Polígono – Ambiente computacional

Figura 4- Atividade 2 Área de Polígono: Função Área



Fonte: produção da autora

a) Movimente o ponto P e observe a construção do gráfico da área na janela (ao lado). O gráfico construído no ambiente lápis e papel foi similar a esse? Justifique.

b) Quais as influências dos pontos A, B, C e D no gráfico da área?

c) Se e o segmento BC estivesse sobre o eixo x, o que mudaria no gráfico da função?

Fonte: produção da autora

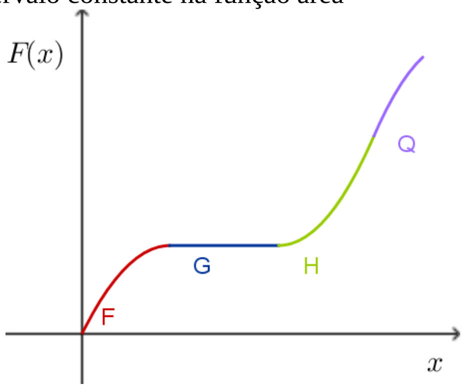
Tarefa: Nesta parte da atividade o aluno deverá confrontar o gráfico representado na Parte 1 com o gráfico do aplicativo; verificar as influências dos pontos A, B, C e D no gráfico da área; e por fim, verificar o que ocorre com o gráfico da área quando o segmento BC está sobre o eixo x.

Nesse momento, o aplicativo poderá auxiliar na exploração dinâmica do comportamento gráfico da área do polígono. É o momento de validação das hipóteses ou refutação, em função do desenvolvimento realizado no ambiente lápis e papel. Espera-se que o aplicativo auxilie, em especial, os alunos que não souberam descrever o comportamento da função área do polígono.

Nesse ambiente, os pontos A, B, C e D são dinâmicos, sendo possível validar que a influência de cada ponto está diretamente ligada a situação em si e a função como um todo. Segundo Hoffkamp (2010) essa forma de influência é nomeada como metavariação. Outra influência que os alunos podem citar é que estes são pontos de não diferenciabilidade, o que também estaria correto, mas não seria uma resposta tão completa quanto a justificativa da metavariação.

O aplicativo permite que o aluno verifique o que acontece com o gráfico da área quando BC está sobre o eixo x. Neste caso, se o aluno levar em consideração corretamente que não tem acréscimo de área de B até C, justificaria que neste caso teríamos um intervalo constante na função área. A Figura 24 ilustra o gráfico resultante nessa situação.

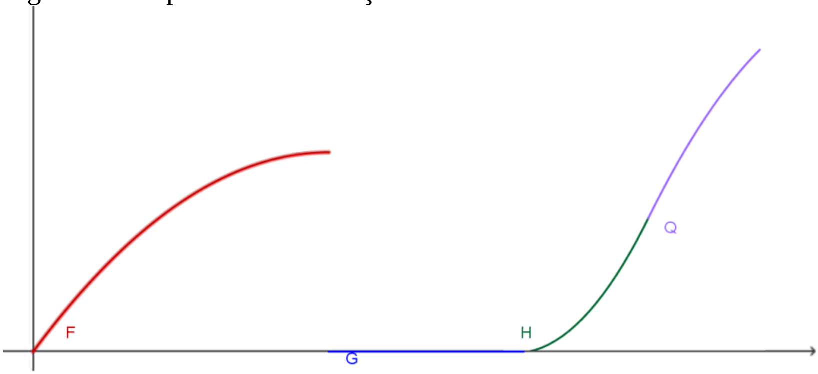
Figura 24 - Intervalo constante na função área



Fonte: produção da autora

Porém, é possível que o aluno, mesmo com o auxílio do software, acabe não verificando dinamicamente o que ocorre quando BC está sobre o eixo x, e de imediato escreva que obteria um intervalo igual a zero e justifique que isso acontece porque não existe área neste intervalo. Logo teria-se uma queda no gráfico de área, como representado na Figura 25. O que estaria incorreto, pois novamente o aluno não está considerando a variação da área.

Figura 25 - Impacto nulo na função área.

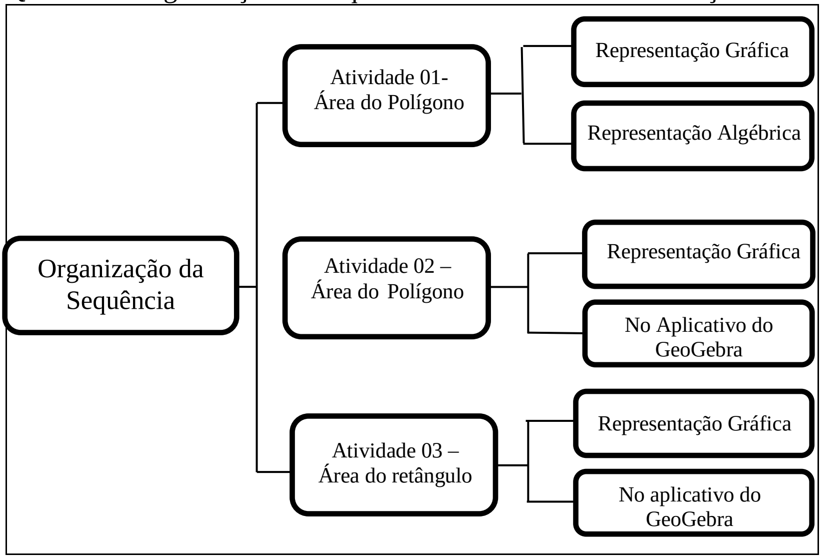


Fonte: produção da autora

3.3 Apresentação e Análise a Priori da Sequência Didática da Pós-Graduação

A organização da sequência é composta por três atividades, como mostra o Quadro 5. As atividades podem ser consultadas no Apêndice B.

Quadro 5 - Organização da Sequência Didática da Pós-Graduação



Fonte: produção da autora

3.3.1 Atividade 01- Função Área do Triângulo[4]

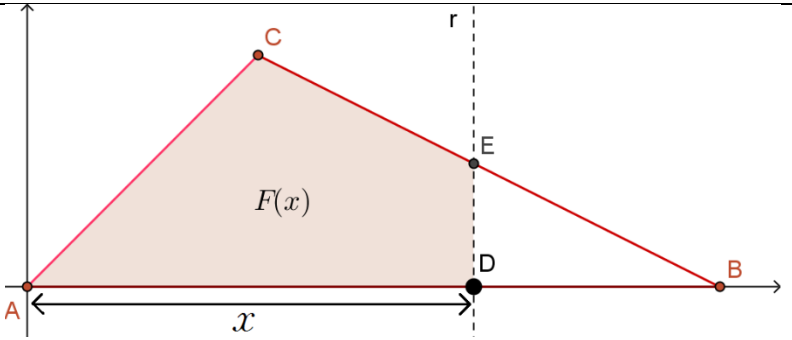
A Atividade 01 proposta para a Pós-Graduação apresenta algumas alterações em relação a Atividade 1 da Graduação, pois percebemos que ela poderia ficar mais completa, como por exemplo, ter duas opções com uma função sempre crescente como resposta.

O Quadro 6 apresenta a Atividade 01 – Representação gráfica proposta para a turma da Pós-Graduação.

Quadro 6 - Atividade 01: Área do Polígono- Representação gráfica

Seja ABC o triângulo representado na Figura 1 e r a linha tracejada que se move de A para B. Figura 1 – Triângulo ABC

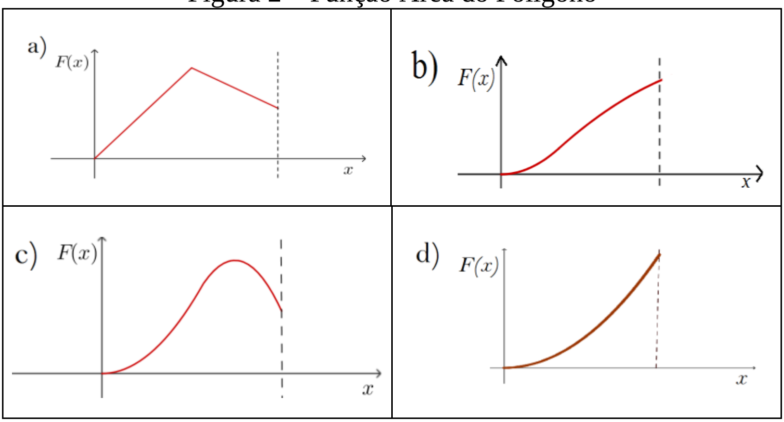
[4] http://ggbm.at/SPY3Qq3s



Fonte: adaptada de Schlöglhofer, apud Hoffkamp, 2010

i. Seja $F(x)$ a função que determina a área do polígono sombreado na Figura 1, e x a distância do ponto A até o ponto D. Assinale, na Figura 2, o item que representa o gráfico de $F(x)$. Justifique sua resposta.

Figura 2 – Função Área do Polígono



Fonte: adaptada de Hoffkamp, 2010, p. 5

Fonte: produção da autora

Tarefa: Analisar e justificar qual alternativa *(a,b,c* ou *d)* representa corretamente a representação gráfica da função área do triângulo ABC da Figura 1.

Uma possível estratégia é analisar que o comportamento da função que descreve a área do polígono é sempre crescente. O aluno pensando desta forma elimina as alternativas a e c imediatamente. Como ainda restam duas alternativas que satisfazem esse comportamento de área o mestrando precisará ver mais detalhes do problema. Uma possibilidade é o mestrando utilizar a integral definida com uma visão dinâmica da área. Logo, partindo desse pressuposto, acreditamos que, diferente do aluno de CDI-II, o mestrando parta da integral definida das funções $g(t) = at$ e $h(t) = -ct + b$, ou seja:

$$\int_0^x (at)dt = \frac{ax^2}{2}\ , \qquad x \in [0, x_1] \qquad (19)$$

e

$$\int_{x_1}^x (-ct + b)\, dt = -\frac{cx^2}{2} + bx - \left(\frac{cx_1^2}{2} + bx_1\right), \qquad x \in (x_1, x(B)] \ (20)$$

em que x_1 é o ponto da interseção entre g e h.

Para concluir esta estratégia o mestrando pode intuitivamente considerar, na lei de formação da função área, a área sob a curva $g(t)$ em $[0, x_1]$. Assim, a partir dos resultados obtidos concluir que a alternativa correta seria o item *b*, pois as funções encontradas são duas parábolas que condizem com essa opção: (19) côncava para cima e (20) côncava para baixo. Outra possibilidade seria o mestrando calcular a integral indefinida de uma função afim encontrando como primitiva uma parábola e concluir que a área seria dada pela alternativa *d*. Nesse caso ele estaria equivocado, pois não consideraria o comportamento do gráfico da área do ponto C até B que cresce com um comportamento diferente da área entre A e C.

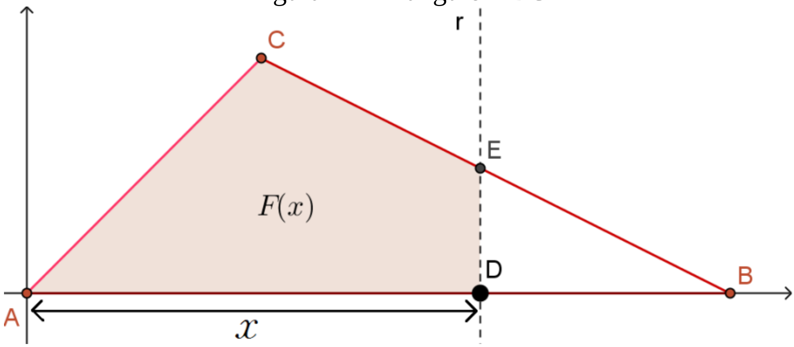
A alternativa *c* seria escolhida caso o aluno elabore o mesmo raciocínio anterior para determinar a área em cada parcela como as equações (19) e (20), entretanto sem considerar a dinâmica da função área, a qual não deve ser descrita quando decrescente já que a área do polígono apenas cresce. O item *a* seria marcado se o aluno não distinguir a função área da representação geométrica da mesma, similar a argumentação do aluno da Graduação.

O Quadro 7 apresenta a Atividade 01 - Representação algébrica proposta para a turma da Pós-Graduação.

Quadro 7 - Atividade 01: Área do Polígono - Representação algébrica

ii. Considere o triângulo da Figura 1 formado pelos vértices A(0,0), B(3,0) e C(1,1). Defina a função $F(x)$ que descreve a área da região sombreada.

Figura 1 – Triângulo ABC



Fonte: adaptada de Hoffkamp, 2010

Fonte: produção da autora

Tarefa: Definir a função que descreva a área do polígono.

Tendo dois pares ordenados de uma função afim o mestrando sabe que é possível encontrar sua lei de formação. Logo, para definir a função que passa por AC, tem-se:

$$\begin{cases} x = 0, y = 0 \;\rightarrow\; b \;=\; 0 \\ x = 1, y = 1 \;\rightarrow\; a + b \;=\; 1 \end{cases}$$

Portanto, $f_1(x) = x$.

Outra forma de encontrar f_1 seria calcular o coeficiente angular pela definição de derivada.

Agora, para CB:

$$\begin{cases} x = 1, y = 1 \rightarrow a + b = 1 \\ x = 3, y = 1 \ \rightarrow 3a + b = 0 \end{cases}$$

Portanto, $f_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Encontradas as funções das retas que delimitam o triângulo ABC, deve-se encontrar a lei de formação que descreve a área do polígono.

Usando o TFC podemos calcular:

$$F_1 = \int_0^x f_1\,(t)dt = \frac{x^2}{2}$$

e

$$F_2 = \int_1^x f_2(t)dt = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}.$$

Assim, a lei de formação será:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2}, & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Outra estratégia para encontrar a lei de formação da função área seria utilizar o conceito de geometria: área de triângulo + área de trapézio.

3.3.2 Atividade 02 - Função Área do Polígono[5]

O Quadro 8 apresenta a Atividade 02 – Representação gráfica proposta para a turma da Pós-Graduação.

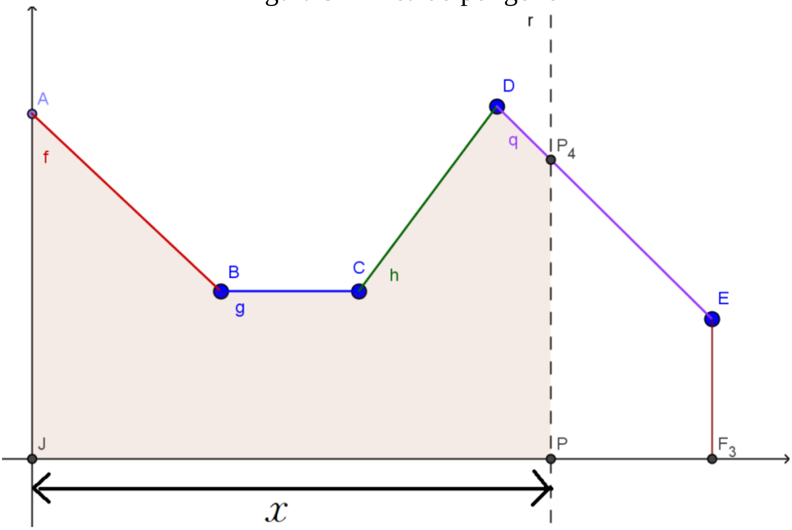
---

[5] http://ggbm.at/uJuV9sHh

Quadro 8 - Atividade 02: Área do Polígono - Representação gráfica

Considere o polígono sombreado na Figura 3.

Figura 3 – Área do polígono



Fonte: produção da autora

Sabendo que a área da região sombreada depende da abscissa x do ponto P, represente graficamente a função que descreve a sua área. Justifique sua representação.

Fonte: produção da autora

Tarefa: Representar graficamente a função área dos polígonos.

Analisando as primitivas de cada parcela o mestrando deve apresentar o gráfico da função área similar ao gráfico da Figura 20, apresentada na análise a priori da Graduação.

O Quadro 9 apresenta a Atividade 02 no aplicativo do GeoGebra proposta para a turma da Pós-Graduação.

Quadro 9 - Atividade 02: no aplicativo do GeoGebra

a) Movimente o ponto P e observe a construção do gráfico da área na janela de visualização. O gráfico construído no ambiente lápis e papel foi similar a esse? Se não, justifique. b) Quais as influências dos pontos $A, B, C\ e\ D$ no gráfico da área? c) Se o segmento BC estivesse sobre o eixo x, o que mudaria no gráfico da área?

Fonte: produção da autora

Justificativa para a solução das questões a, b e c:

Visto que nesse momento, o aplicativo poderá auxiliar na exploração dinâmica do comportamento gráfico da área do polígono, esperamos que o mestrando valide suas hipóteses, em função do desenvolvimento realizado no ambiente lápis e papel. Assim, tendo os pontos A, B, C e D dinâmicos é possível o mestrando validar que a influência de cada ponto pode ser justificada pela metavariação. E ainda, movendo o segmento BC sobre o eixo x, verifique a influência no gráfico da função área de tal forma a obtermos um intervalo constante, que seria a imagem da função área no intervalo BC, como mostra a Figura 24.

3.3.3 Atividade 03 - Área do Retângulo[6]

A atividade a seguir tem como objetivo explorar outros conceitos do CDI além de primitivas, como por exemplo: pontos de máximo, simetria e não linearidade, usando uma abordagem dinâmica que conecta uma situação geométrica com um gráfico de função, como citado anteriormente.

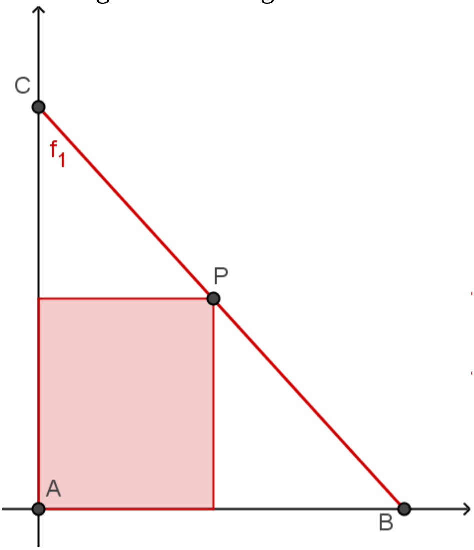
O Quadro 10 apresenta a Atividade 03 – Representação gráfica proposta para a turma da Pós-Graduação.

[6] http://ggbm.at/TLExwKy1

Quadro 10 - Atividade 03: Área do retângulo: Representação gráfica

Considere o retângulo inscrito no triângulo ABC na Figura 4:

Figura 4 – Retângulo inscrito



Fonte: Adaptada de Hoffkamp (2010)

a) O que ocorre com a área do retângulo inscrito na Figura 4 movimentando P sobre o segmento de reta BC?

b) Existem diferentes retângulos inscritos como na Figura 4 com a mesma área? Justifique.

c) Qual o comportamento do gráfico que representa a área desse retângulo?

Fonte: produção da autora

Justificativa para a solução das questões *a, b* e *c:*

Utilizando o conceito de área de um retângulo da geometria plana o mestrando pode verificar o comportamento da função que descreve a área do retângulo (base x altura). Sabendo que BC é um segmento de reta decrescente, e que assim, a função que descreve uma reta é dada por:

$$f(x) = -ax + b$$

facilmente o mestrando encontra uma função para o gráfico da área fazendo,

$$A(x) = x(-ax + b) = -ax^2 + bx$$

em que x seria a base do retângulo e $(-ax + b)$ a altura.

Logo, sendo $A(x)$ uma parábola o mestrando verifica que haverá diferentes retângulos com a mesma área, e certifica-se que a área do retângulo é zero em dois pontos (B e C) que representam as raízes da parábola.

Outra maneira de encontrar a função que descreve a área é a aplicação do TFC. Assim, o mestrando poderia tomar uma constante k sobre o segmento AC e calcular uma integral definida no intervalo $[0, x]$, ou seja:

$$A(x) = \int_0^x k dx = kx$$

mas k é a altura do retângulo com base x e vértice P sobre CB, logo

$$k = -ax + b \quad \text{e} \quad A(x) = -ax^2 + bx$$

obtendo a parábola que descreve a função área do retângulo. Com isso ele conseguirá verificar que diferentes retângulos assumem a mesma área e que área do retângulo é zero em dois pontos (B e C).

Todavia, também é esperado que o mestrando ao invés de utilizar o cálculo da integral definida da constante ou o conceito de geometria para encontrar o comportamento do gráfico da área, calcule a integral definida da reta BC e com isso encontre a área do trapézio ao invés do retângulo, ou seja:

$$\int_0^x (-at + b)dt = -\frac{ax^2}{2} + bx.$$

O que estaria incorreto.

O Quadro 11 apresenta a Atividade 03 no aplicativo do GeoGebra proposta para a turma da Pós-Graduação.

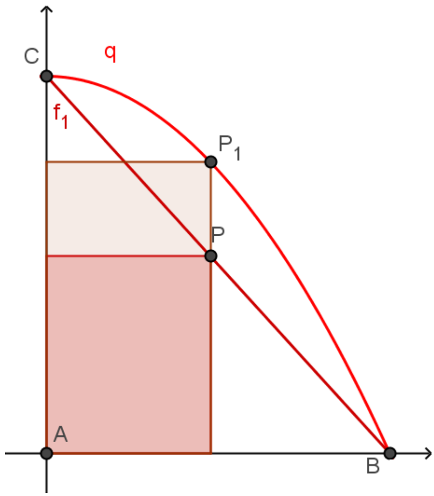
Quadro 11 - Atividade 03: Área do retângulo- no aplicativo do GeoGebra

a) Movimente o ponto P e observe a construção do gráfico da área na janela de visualização. Confronte os resultados obtidos no ambiente lápis e papel com os resultados do ambiente computacional.

b) Qual a área máxima do retângulo inscrito? Justifique.

c) Se o retângulo estivesse ‘inserido’ em um segmento parabólico, como mostra a Figura 5, o que mudaria no gráfico da função área?

Figura 5 – Retângulo inscrito na parábola



Fonte: produção da autora

Fonte: produção da autora

A questão *c* foi elaborada pela autora, logo não consideramos resultados de outras aplicações para a análise a priori. Enquanto que as demais são semelhantes as questões de Hoffkamp (2010).

Justificativa para a solução das questões *a*, *b* e *c:*

Os mestrandos poderão validar a representação no ambiente lápis e papel. Para encontrar o ponto de máximo basta utilizarmos a definição do vértice V da parábola que está equidistante das raízes, logo sabendo que as raízes estão em:

$$x = 0 \text{ e } x = \frac{b}{a}$$

o vértice x do ponto de máximo pode ser calculado fazendo:

$$v_x = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{2} = \frac{b}{2a}.$$

Portando, o ponto de máximo é:

$$V = \left(v_x\,, A(v_x)\right).$$

Outra maneira do mestrando encontrar o ponto de máximo seria encontrando os pontos críticos da função:

Sendo $A(x) = -ax^2 + bx,$ fazemos:

$$A'(x) = -2ax + b$$

Os pontos críticos são os valores de x no domínio da função A tais que $A'(x) = 0$, ou seja:

$$-2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2a}.$$

Pelo teste da segunda derivada podemos verificar se $x = \frac{b}{2a}$ é ponto de máximo ou mínimo:

$$A''(x) = -2a$$

sendo $a > 0$, $A''(x) < 0$ temos que $x = \frac{b}{2a}$ é ponto de máximo.
Portanto, substituindo $x = \frac{b}{2a}$ em $A(x)$ encontramos seu valor máximo:

$$A\left(\frac{b}{2a}\right) = -a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a}$$

Assim o ponto de máximo é:

$$V = \left(\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a}\right).$$

Para resolução da questão c devemos considerar que os mestrandos estarão com livre acesso ao objeto de aprendizagem (OA), o que poderá induzir ao erro por analogia gráfica, em virtude da escala utilizada no gráfico - a visualização apresentada na tela poderá induzir ao erro se não confrontada com a representação algébrica. Logo, para responder o que acontece com a área do retângulo quando este está inscrito na parábola, de imediato é possível que mestrando alegue que o comportamento da função área ainda seria uma parábola. Todavia, isto estaria incorreto, pois na verdade a função área para este caso é representada por uma função cúbica.

3.4 CONSIDERAÇÕES

A sequência didática proposta coloca em evidência o desenvolvimento do conceito do TFC. De modo, que mesmo não sendo o objetivo principal das atividades o cálculo algébrico da integral, o aluno desenvolva a noção geométrica da primitiva de uma função.

Na maioria dos casos os alunos se preocupam com o cálculo algébrico, e não compreendem o que o resultado geométrico significa, não estabelecendo a transição entre as duas representações. Portanto, ao expor essa atividade procuramos possibilitar essa transição.

Na sequência será apresentada a análise a posteriori. Em que confrontamos as análises a priori com a posteriori e fundamentamos a validação das hipóteses formuladas.

4 ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo serão apresentados o contexto da aplicação das atividades descritas no capítulo 3 e as análises a posteriori das atividades aplicadas nas turmas da Graduação e Pós-Graduação.

Ambas as análises a posteriori se apoiaram sobre:

- As resoluções apresentadas às questões propostas;
- Registros da observadora;
- Análise a priori de ambas as turmas.

4.1 CONTEXTO GRADUAÇÃO

A aplicação da sequência didática ocorreu em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI-II) do curso de Engenharia de Produção, todavia, também comportava alunos dos cursos de Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica e Ciência da Computação. Essa turma totalizava 40 alunos, desses 34 compareceram no dia da aplicação e participaram.

A sequência foi aplicada após o professor já ter abordado o conteúdo de somas de Riemann e o TFC, incluindo definições, propriedades e aplicações. Diante disso, a aplicação serviu como uma revisão de modo que os alunos compreendessem o comportamento gráfico do conceito do TFC.

4.1.1 Organização

Na concepção da sequência didática foram elaboradas as atividades, bem como a articulação das questões presentes em cada parte da sequência. Foi acordado com o professor da turma que esse aplicaria a sequência e que a autora estaria presente na sala de aula, na qualidade de observadora da classe.

O professor da turma desenvolveu em sala a sequência didática elaborada pela autora (Apêndice A), num período de 2 (duas) aulas com duração de 50 minutos cada no primeiro semestre de 2016, com o objetivo de propiciar as conexões entre o Cálculo Diferencial e Cálculo Integral a partir de visualizações interativas e a dependência funcional.

A organização da turma para a realização desta atividade se deu da seguinte maneira:

- Os alunos foram encaminhados a um laboratório de informática, por conta do ambiente computacional requerido na parte 2 da Atividade 2;
- Foi solicitado aos estudantes que durante a Atividade 1 trabalhassem individualmente e durante Atividade 2 trabalhassem em duplas ou trios;
- Os alunos iniciaram desenvolvendo, individualmente, a Atividade 1, e após a conclusão da atividade, os alunos a entregaram para o professor da turma;
- Após, ocorreu a discussão desta atividade, ministrada pelo professor da turma;
- A Atividade 2 (Parte 1) foi entregue aos alunos que em grupos desenvolveram a atividade e após concluída entregaram ao professor da turma;
- A Atividade 2 (Parte 2) foi entregue aos alunos juntamente com o link de acesso ao aplicativo que, ainda em grupos desenvolveram a atividade e após concluída entregaram ao professor da turma;
- Assim, ocorreu a discussão da Atividade 2, novamente ministrada pelo professor da turma.

4.1.2 Análise a Posteriori

A seguir é apresentada a análise a posteriori correspondente a cada atividade aplicada a Graduação.

4.1.2.1 Atividade 01

Essa análise corresponde a atividade do Quadro 2 (página 75).

A Tabela 3 apresenta a porcentagem de cada questão assinalada.

Tabela 3 - Porcentagem de cada alternativa assinalada

Alternativa	Porcentagem (%)
a	11,8
b	79,4
c	8,8

Fonte: produção da autora

A estratégia utilizada pelos alunos que assinalaram a alternativa a, foi a mesma citada na análise a priori, em que alunos justificam ser esta alternativa pensando que o gráfico da área é apenas como a área $F(x)$.

Dos 79,4% dos alunos que assinalaram a alternativa b, 7,4% justificaram errado. Uma das justificativas erradas foi a seguinte:

"Representa esse gráfico por causa dos pontos de máximo, mínimo e ponto crítico, crescimento e decrescimento."

O aluno ao justificar dessa forma, mostra que não sabia qual conceito utilizar para justificar corretamente a alternativa assinalada, ou ainda, que pelo "chute" na alternativa, citando qualquer conceito do cálculo poderia estar justificando corretamente.

Dentre todas as estratégias corretas, a mais utilizada foi o da análise do comportamento da função que descreve a área do polígono que é sempre crescente. Assim como citada na análise a priori. Inclusive, obtemos uma justificativa bastante significativa de um aluno da Graduação:

"De C até B a função é decrescente em direção a 0 (zero), então se espera que a área aumente com uma tendência a se manter constante, porém, com a soma de n termos positivos, não se espera um comportamento decrescente no valor absoluto. Ou pode-se derivar a alternativa e se obter o gráfico da Figura 1."

Este aluno justificou usando tanto conceito de área como Cálculo Integral, quando fala em primitiva.

Outra estratégia utilizada corretamente foi o uso da taxa de crescimento da função área:

"O gráfico da área é representado pela letra b, pois a área $F(x)$ sempre aumenta a medida que deslocamos x... Até o ponto C temos um crescimento mais rápido da área, o qual pode ser percebido pela inclinação de $F(x)$. Após o ponto C o crescimento da área não é tão rápido...."

Essa resposta foi mais detalhada que a prevista na análise a priori.

Um dos alunos que assinalaram a alternativa c usou cinemática para justificar:

“Chamando de h a distância de D até E, a taxa da velocidade do crescimento do polígono depende de h, então se h cresce a velocidade aumenta e se h diminui a velocidade diminui, logo h funciona como uma aceleração na velocidade de crescimento e o gráfico de $F(x)$ deve ser igual a um de uma velocidade com aceleração diferente de zero.”

Percebemos a partir dessa justificativa que o aluno confundiu o gráfico da área, com o gráfico da velocidade de crescimento da área.

Outro aluno justificou com uma estratégia que condiz a alternativa b, e mesmo assim a alternativa assinalada foi c:

“*A função cresce até certo ponto, então a área deve crescer também. Porém, há um momento que a função começa a decrescer, mas a área continua aumentando. Na Figura 1 a função está sempre decrescendo a partir de um certo ponto.”*

Possivelmente a dificuldade deste aluno estava em conseguir transpor graficamente sua justificativa.

Por fim, a terceira estratégia utilizada para a alternativa c foi a citada na análise a priori, em que o aluno esquece de analisar a concavidade da parábola.

“*AC crescente e CD decrescente, no caso a $F(x)$ não é uma reta.”*

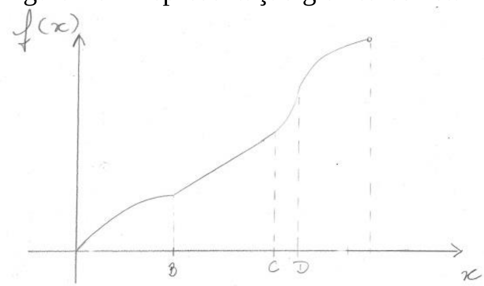
4.1.2.2 Atividade 02

Iniciamos com análise corresponde a Atividade 2 – Parte 1 do Quadro 3 (página 78).

Tivemos cinco representações diferentes nesta atividade como mostra o Quadro 12 abaixo:

Quadro 12 - Diferentes representações da Atividade 02: Parte 1

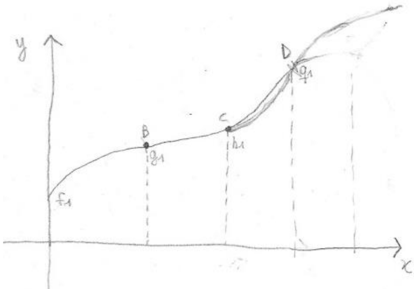
Figura 26 - Representação gráfica correta



64,6% utilizaram essa representação

Fonte: alunos que participaram da aplicação

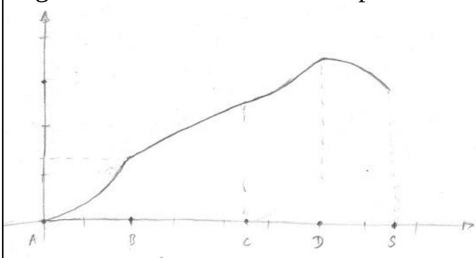
Figura 27 - Gráfico deslocado em x=0



5,9% utilizaram essa representação

Fonte: alunos que participaram da aplicação

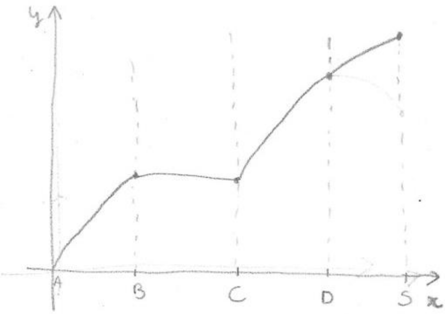
Figura 28 - Conceito de área e primitiva incorretos



11,8% utilizaram essa representação

Fonte: alunos que participaram da aplicação

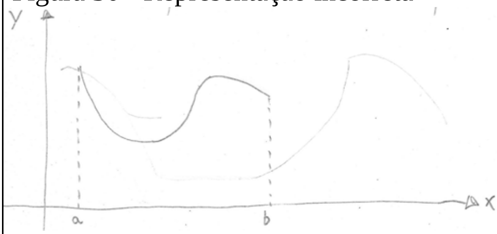
Figura 29 - Análise errada da constante



Fonte: alunos que participaram da aplicação

11,8% utilizaram essa representação

Figura 30 - Representação incorreta



Fonte: alunos que participaram da aplicação

5,9% utilizaram essa representação

Fonte: produção da autora

Dentre essas representações a única prevista na análise a priori foi a representada na Figura 26. Nessa os 64,6% dos alunos utilizaram o conceito de área e primitivas corretamente.

As demais representações não foram previstas. Na Figura 27 os alunos tiveram um conceito correto sobre as representações das primitivas, mas não consideraram que a área era 0 (zero) quando $x = 0$. Na Figura 28 temos representações de área incorreta, já que os alunos consideraram uma função decrescente entre D e S, bem como, representação incorreta da primitiva, como podemos ver entre A e B. Na Figura 29 o erro foi na constante entre BC, as demais primitivas foram representadas corretamente. Possivelmente isso ocorreu pela falta de conexão entre o conceito de área com a primitiva. Por fim, temos a Figura 30, em que não houve conexão alguma entre área e primitiva.

A seguir a análise corresponde a Atividade 2 (Parte 2) do Quadro 4 (página81).

O confronto que ocorreu na parte 2 dessa atividade foi bastante significativo. Na questão *a* alguns dos alunos que representaram incorretamente a função área verificaram seu erro. Por exemplo, o grupo que representou a função área como mostra a Figura 30, justificou da seguinte forma:

"Não, ... por considerar que a função que descreve a área teve um intervalo de decrescimento. E agora ficou claro que a área só aumentou ."

Porém, houve grupos que mesmo representando incorretamente, disseram que a representação era similar, não mostrando ter verificado o erro cometido.

Na questão *b* obtemos respostas utilizando diferenciabilidade (11,8%) e metavariação (70,6%) - ambas citadas na análise a priori como estratégias corretas - e pontos de inflexão (17,4%) que não foram previstos, mas é uma estratégia incorreta. Por exemplo, sobre pontos de diferenciabilidade tivemos a seguinte justificativa:

"São pontos críticos pois é onde muda o comportamento do gráfico e, por consequência, a integral."

Para metavariação:

"Estes pontos delimitam os intervalos de cada comportamento da função. A alteração desses pontos altera os intervalos e consequentemente o valor da área."

E por fim, para pontos de inflexão, tivemos:

"São pontos de inflexão."

A maioria das respostas na questão *c* foram escritas corretamente e condiz com uma das estratégias da análise a priori, dizendo que a área neste intervalo seria representada por uma constante. 94,1% utilizaram essa resposta. Todavia, um grupo que representa 5,9% das respostas disse que:

"A inclinação antes e depois desses pontos seria alterado."

Essa estratégia não foi apresentada na análise a priori, visto que não faz sentido sobre a questão.

Dentre essas respostas dadas na questão *c*, temos uma resposta bastante relevante, em que o grupo utiliza do erro cometido na parte 1 desta atividade (Figura 29) para respondê-la:

"*Seria constante no intervalo BC, pois apesar de variar em x, varia sobre o eixo nulo... tornando o trecho constante como no gráfico desenhado na parte 1 da atividade."*

Aqui constatamos que o confronto entre as duas partes da atividade foi válida.

Percebemos que mesmo com o aplicativo para auxiliar na exploração dinâmica do comportamento gráfico da área do polígono, muitos alunos ainda sentiram dificuldades para justificar corretamente as perguntas. Tem-se as hipóteses que isso pode estar relacionado a falta de domínio do conteúdo ou dificuldade em interpretar representações gráficas.

4.2 CONTEXTO PÓS-GRADUAÇÃO

A aplicação da sequência didática ocorreu na turma de Fundamentos do Cálculo, do Programa de Pós-Graduação em Ciências, Matemática e Tecnologias. A turma tem um total de 5 alunos, e todos são formados em Licenciatura em Matemática.

A sequência aplicada visava introduzir o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). O conteúdo de integrais não tinha sido abordado ainda.

4.2.1 Organização

A organização do professor da turma e da autora foi a mesma que no contexto da Graduação.

O professor da turma desenvolveu em sala a sequência didática elaborada pela autora (Apêndice B), num período de 4 (quatro) aulas com duração de 50 minutos cada no primeiro semestre de 2016, com o objetivo de propiciar as conexões entre o Cálculo Diferencial e Cálculo

Integral e introduzir o TFC, a partir de visualizações interativas e a dependência funcional.

A organização da turma para a realização desta atividade se deu da seguinte maneira:

- Inicialmente os alunos trabalharam individualmente na Atividade 01 – *i;*
- Assim que os alunos concluíram a resolução ocorreu a discussão desta atividade, ministrada pelo professor da turma, e após isso, os alunos entregaram a atividade ao professor;
- Na sequência a turma foi dividida em dois grupos para encontrar a lei de formação na Atividade 01 – *ii*.
- Após, ocorreu a discussão, ministrada pelo professor da turma, e a entrega das resoluções;
- A Atividade 02- Representação Gráfica foi entregue aos alunos, que em grupos desenvolveram a atividade e após concluída entregaram ao professor da turma;
- A Atividade 02 – no aplicativo do GeoGebra foi disponibilizada para ser entregue pelo ambiente virtual Moodle;
- A Atividade 03 – Representação Gráfica foi disponibilizada e após os alunos discutirem e resolverem com seus colegas do grupo, foi entregue ao professor responsável;
- Na sequência houve a discussão sobre a atividade;
- Por fim, a Atividade 03 – no aplicativo do GeoGebra foi disponibilizada para ser entregue pelo ambiente virtual Moodle.

4.1.2 Análise a Posteriori

A seguir é apresentada a análise a posteriori correspondente a cada atividade aplicada a Pós-Graduação.

4.1.2.1 Atividade 01

Iniciamos com análise corresponde a Atividade 01 – *i* do Quadro 6 (página 85).

A Tabela 4 apresenta a quantidade de cada questão assinalada.

Tabela 4 – Quantidade de cada alternativa assinalada

Alternativa	Quantidade assinalada
a	2
b	0
c	1
d	2

Fonte: produção da autora

O que levou os mestrandos a assinalarem a alternativa a foi acreditar que o gráfico da área é apenas como a área $F(x)$, assim como citada na análise a priori e, tentar encontrar por geometria a função área. A tentativa de encontrar a função área por geometria estaria correta e levaria o mestrando a alternativa b se não houvesse cometido o erro de considerar o x_D fixo encontrando como área uma função polinomial de primeiro grau.

O mestrando que assinalou *c* justificou da seguinte forma:

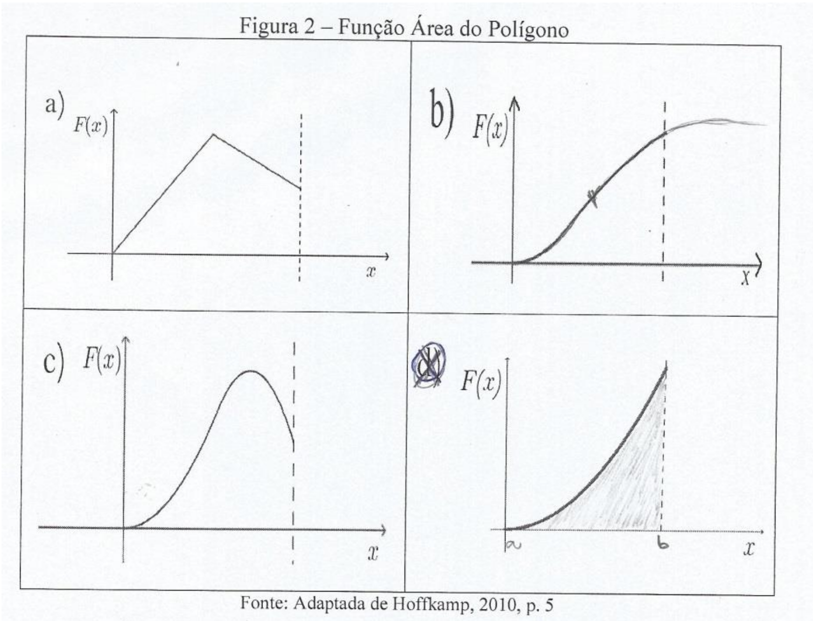
"A resposta é a letra c porque à medida que varia x*, a sua imagem varia em* $f(x)$*. O que se pede é a área correspondente a figura, no caso em questão* $F(x)$*. Como se trata das duas grandezas dimensionais, a representação é por intermédio de uma curva, com ponto de máximo e mínimo, relativos a imagem* $f(x)$*. Observa-se que em c temos o ponto em que temos mais área e a origem o ponto em que temos menor área."*

Diante dessa justificativa, percebemos que o mestrando confundiu a altura máxima do polígono com a área máxima. Esta estratégia não foi prevista na análise a priori.

Os mestrandos que assinalaram a alternativa d utilizaram estratégias diferentes e nenhuma delas foi citada na análise a priori. Uma das respostas analisa que a altura do ponto D em relação ao ponto E foi aumentando a medida que a distância x ia diminuindo até chegar o ponto C. Nesta resposta o mestrando poderia ter percebido, enquanto fazia o caminho contrário, que ao passar do ponto C a função área muda, assim concluindo *b*, todavia, apenas considerou que o valor da área seria menor.

A outra estratégia analisa a continuidade e o crescimento da função área. Porém, apesar de utilizar os conceitos certos, o mestrando erra ao considerar que o gráfico em b parece decrescer em algum momento, concluindo assim a alternativa d, pois é o único gráfico que representa uma função crescente e contínua. É interessante analisar as marcações na representação gráfica utilizada pelo mestrando enquanto analisava a atividade (Figura 31).

Figura 31 - Representação de uma estratégia utilizada para assinalar a alternativa *d*



Fonte: mestrando que participou da aplicação

O mestrando continua a representação da função em *b* como se fosse decrescer a partir de algum ponto, como cita na resolução "*O gráfico em b também parece que em algum momento vai decrescer*". Podemos dizer que essa estratégia está incorreta, pois o mestrando esqueceu de verificar que isso não ocorre com o gráfico em *b* pois o ponto B é estacionário.

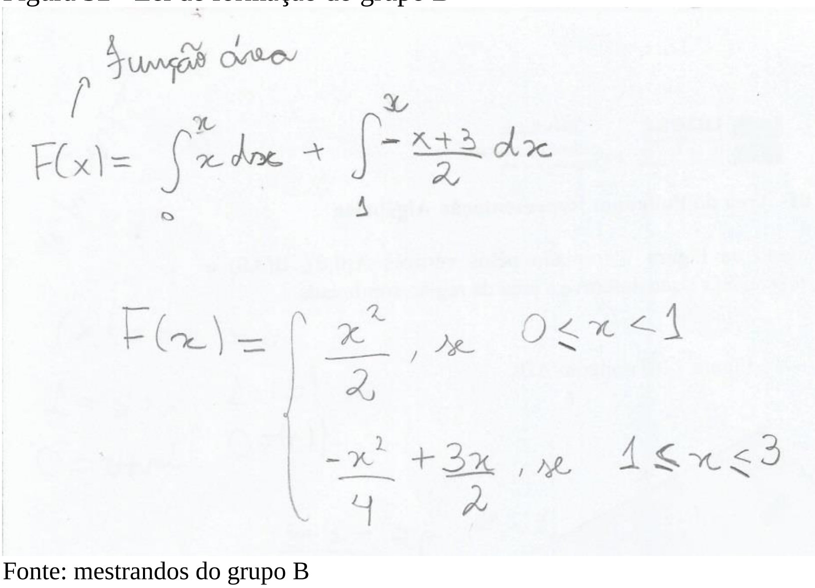
A seguir a análise corresponde a Atividade 01 – *ii* do Quadro 7 (página 87).

Visto que foram formados apenas dois grupos, chamaremos um de grupo A e o outro de grupo B.

O grupo A usou apenas geometria plana para encontrar a lei da função área, assim como previsto na análise a priori.

O grupo B usou geometria plana e Cálculo Integral. Sabendo pelo cálculo de primitivas que a integral de uma função afim é uma quadrática $ax^2 + bx + c$, e conhecendo os pontos de interseção das funções que delimitam o polígono, eles montaram um sistema de equações para descobrir a, b e c. A estratégia estava correta, porém o grupo esqueceu de acrescentar a área do triângulo no intervalo $x \in [1,3]$. E ainda, no final da resolução, o grupo apresentou a integral definida, mas a mesma não foi resolvida, pois não substituíram o extremo $x = 1$, como podemos ver na Figura 32. É provável que se tivessem resolvido esta integral teriam verificado o erro.

Figura 32 - Lei de formação do grupo B



Fonte: mestrandos do grupo B

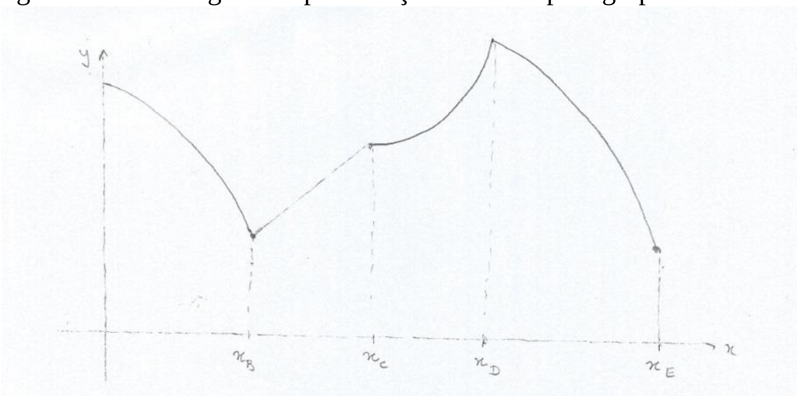
Essa estratégia foi prevista na análise a priori utilizando integral definida, porém o grupo cometeu um erro ao finalizá-la quando não substituiu o extremo $x = 1$ e não acrescentou a área do triângulo, que não tinha sido previsto.

4.1.2.2 Atividade 02

Iniciamos com análise correspondente a Atividade 2 – Representação gráfica do Quadro 8 (página 89).

A representação gráfica da função área que descreve o polígono foi representada incorretamente por ambos os grupos A e B. Os mestrandos consideraram a primitiva da função em cada intervalo corretamente, mas cometeram erro ao considerar a área diferente de 0 (zero) quando $x = 0$, ou seja, ambos os grupos iniciaram a representação do gráfico deslocado da origem (Figura 33 e 34). Além disso, ambos os grupos representaram em $[A, B]$ e $[D, E]$ um comportamento decrescente no gráfico da área, o que está errado já que a área é crescente. Não prevíamos erros nessa representação, visto que a atividade anterior embasava tais conceitos para uma representação correta.

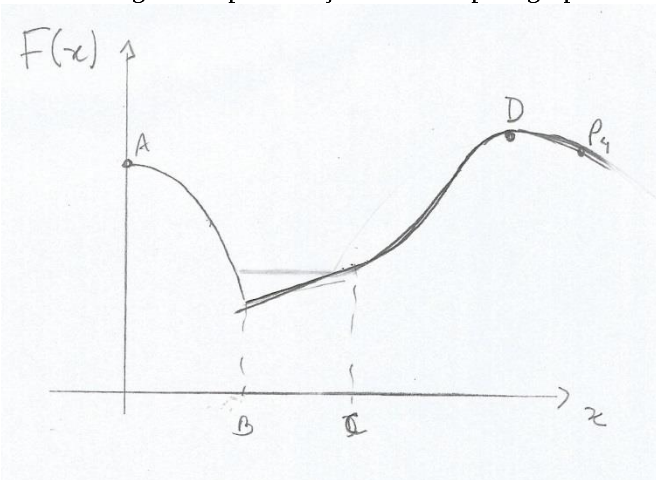
Figura 33 – Estratégia de representação utilizada pelo grupo A



Fonte: mestrandos do grupo A.

O grupo A obteve cada parcela do gráfico representado na Figura 33 calculando as primitivas por integral indefinida. O grupo B não justificou a representação.

Figura 34 - Estratégia de representação utilizada pelo grupo B



Fonte: mestrandos do grupo B.

No momento do confronto dessa atividade o grupo A deixou evidente ter percebido o erro na representação:

“O gráfico construído foi diferente. Em cada parte foi considerado o comportamento do gráfico correto. Nos quatro intervalos eram respectivamente, no sentido x crescente... O erro na representação ocorreu porque não nos atentamos ao fato de que a área é uma função somente crescente e que inicia em zero.”

O grupo B não deixou tão evidente, apenas citou que um dos erros foi não iniciar a função área em zero.

A seguir a análise corresponde a Atividade 2 – no aplicativo do GeoGebra do Quadro 9 (página 90).

Visto que essa atividade foi disponibilizada para ser entregue pelo aplicativo moodle, houve discórdia na opinião de alguns mestrandos do grupo B, pois para as questões *b* e *c* foram entregues estratégias diferentes.

Assim, para a questão *b* que perguntava da influência de cada ponto, um dos mestrandos do grupo B justificou acreditar que os pontos têm influência direta sobre o valor da área, o que está correto e foi previsto. Enquanto que outro mestrando do mesmo grupo, justificou como pontos de inflexão, o que está incorreto e não foi citada na análise a priori.

O grupo A não evidenciou que os pontos influenciam na função como um todo, apenas na situação si, citando o que ocorre quando movemos cada ponto.

Na resolução da questão *c* um dos mestrandos do grupo B, assim como o grupo A, citou, como previsto na análise a priori, que se B e C estivessem sobre o eixo x, existiria um intervalo constante no gráfico da área. Enquanto, outro mestrando do grupo B justificou que para esta situação, obteríamos a menor área para o gráfico mencionado. Esta estratégia estaria incorreta, pois o gráfico que representa a menor área não está diretamente ligado apenas ao segmento BC.

4.1.2.3 Atividade 03

Iniciamos com a análise correspondente a Atividade 3 – Representação gráfica do Quadro 10 (página 91).

O grupo A encontrou a função que descreve a área do retângulo a partir da integral definida, mas não mudou a variável de integração, ou seja:

$$A = \int_0^x (at + b)dt = \frac{ax^2}{2} + bx$$

o que representa a área do trapézio e não a do triângulo.

O grupo B utilizou geometria plana, e encontrou corretamente a área do retângulo. Ambas as estratégias foram previstas na análise a priori.

Mesmo o grupo A encontrando a área do trapézio ao invés do retângulo, verificou, assim como o grupo B, que a área do retângulo é zero em dois pontos, e ainda, utilizaram um caso particular para mostrar que existem diferentes retângulos com a mesma área. Por exemplo, a resposta de um dos grupos foi:

“Tomando um ponto $P(x_0, y_0)$ temos um retângulo de área $x_0 y_0$, arrastando P até $(x = y_0, y = x_0)$ também teremos um retângulo de área $y_0 x_0 = x_0 y_0$”.

A seguir a análise corresponde a Atividade 3 – no aplicativo do GeoGebra do Quadro 11 (página 93).

Durante o confronto, o grupo A disse que sua representação era muito parecida, mas justificou incorretamente como concertar o erro, pois disse que bastaria descontar a área do triângulo. O grupo B verificou que a representação estava correta.

Na questão *b* ambos os grupos verificaram o valor da área máxima do retângulo usando a definição do vértice V da parábola que está equidistante das raízes - estratégia citada na análise a priori.

Referente a questão *c* o grupo A verificou que não seria mais uma parábola, dizendo:

"O gráfico da função área não seria mais uma parábola, apesar de parecer que é uma parábola... Por geometria, a área é:

$$A = x(-ax^2 + bx + c)\,, \qquad a > 0$$
$$A = -ax^3 + bx^2 + cx."$$

O grupo B também verificou que não seria mais uma parábola, mas não apresentou a função cúbica que descreve a área.

Observou-se que ambos os grupos não ficaram restritos apenas a representação gráfica e transitaram nos dois registros, gráficos e algébricos, concluindo assim com êxito a tarefa.

4.3 INSTITUCIONALIZAÇÃO

A institucionalização do objeto de estudo na Graduação ocorreu após cada atividade, exceto na Atividade 2 – Parte 1. Durante institucionalização da Atividade 1 o professor responsável primeiramente questionou quais respostas foram assinaladas, vendo que poucos assinalaram a alternativa incorreta, o professor questiona como chegaram na resposta correta, a maioria dos alunos diz que foi pelo conceito de área crescente. O professor então apresenta dinamicamente com auxílio do GeoGebra o gráfico da área correspondente ao polígono, e cita que além do conceito de área, temos a primitiva de cada função envolvida nos intervalos.

A Atividade 2 – parte 1 não foi institucionalizada pois na parte 2 os alunos fariam o confronto.

A Atividade 2 – parte 2 foi institucionalizada rapidamente com o auxílio do aplicativo, de modo a explicar qual a influência dos pontos e fixar conceito de área e primitiva em cada intervalo.

Ambas as institucionalização permitiram que os alunos tirassem suas dúvidas. A maioria dos alunos mostrou compreender bem a dinâmica e o objetivo das atividades que estavam diretamente ligados ao conteúdo estudado no momento.

Na Pós-Graduação a institucionalização ocorreu de modo a introduzir o conteúdo de integrais. A institucionalização da atividade 01-*i* ocorreu após os alunos concluírem suas respostas. O professor responsável, primeiramente, questionou a cada aluno qual havia sido a alternativa assinalada e sua justificativa. Após ouvir a justificativa de cada mestrando, o professor comenta o comportamento da área de modo a induzir os alunos a alternativa correta. Enquanto isso, um dos mestrandos verificou seu erro e justificou que a alternativa correta seria *b*. O professor mostra dinamicamente o comportamento da área utilizando o GeoGebra. Todavia, não cita como podemos encontrar essa função área algebricamente, visto que isso poderia influenciar as repostas da atividade seguinte.

A institucionalização da Atividade 01- *ii* é feita de modo a introduzir o TFC, ou seja, o professor responsável, sem demonstrar, apresenta informalmente este teorema. Além disso, comenta qual a diferença entre a integral definida e a indefinida. Apenas após estes esclarecimentos, o professor retorna à atividade. Pede para que os grupos apresentem qual a lei de formação construída, e com esses valores o professor plota cada gráfico. Após isso, o professor constrói no quadro a lei de formação utilizando geometria plana e Cálculo Integral. O professor aproveita do contexto e relaciona com o cálculo de volume.

A Atividade 02 não foi institucionalizada em sala, pois foi entregue pelo moodle.

A institucionalização da Atividade 03 – representação gráfica o professor iniciou questionando as justificativas de cada equipe. O professor representa no quadro o erro que ocorreu na construção da integral do grupo A e mostra a maneira correta de calcular apenas a área do retângulo por integral definida.

A Atividade 03 – momento confronto também não foi institucionalizada em sala, pois também foi entregue pelo moodle.

4.4 CONSIDERAÇÕES

Na análise a posteriori da turma de CDI-II percebemos que a maioria dos alunos obteve êxito na realização da tarefa, e aproveitaram da institucionalização para questionar e esclarecer alguns conceitos. A análise a posteriori também nos auxiliou a perceber a limitação da atividade 01 a qual apresentava falhas, pois permitia o aluno responder utilizando apenas conceito de área (função sempre crescente) e não necessariamente o TFC. Essas falhas permitiram evoluir a atividade proposta na Pós-Graduação. Assim, no contexto de revisar/reforçar o conteúdo de integrais definidas, a sequência aplicada teve resultados positivos. Entretanto, seria interessante aplicar essa sequência, levando em consideração a reformulação da atividade 01 e em outro contexto, no sentido de introduzir o TFC, para verificar se os alunos conseguem estabelecer as conexões da variação funcional da área do retângulo.

Na análise a priori da turma da Pós-Graduação tinha-se a hipótese que os erros seriam menos recorrentes, em função da formação dos alunos. Todavia, para as atividades 01 e 02 os resultados foram diferentes do previsto. Devemos considerar o contexto que os mestrandos estavam inseridos. Essa atividade foi aplicada de modo a introduzir um conteúdo que, por mais que tenha sido estudado durante a Graduação, a grande maioria não tinha contato há anos. Também, devemos considerar que a abordagem do TFC geralmente nos cursos de graduação é feita de maneira estática e não de maneira dinâmica. Geralmente usa-se a aplicação do TFC para determinar o valor numérico de áreas, volumes e comprimentos, por exemplo, mas não para explorar a dependência funcional da área. Na atividade 03 os alunos obtiveram êxito, visto que ambos os grupos resolveram corretamente a maioria das questões. Este resultado pode estar diretamente conectado as institucionalizações, as quais serviram como base para cada atividade subsequente.

CONSIDERAÇÕES

A hipótese de pesquisa propulsora desse trabalho foi a de que a compreensão da conexão entre o Cálculo Diferencial e o Integral não é uma tarefa fácil. O desenvolvimento histórico que durou mais de 2500 anos para formalizar o Cálculo Integral tal como é atualmente, evidencia que essa dificuldade está diretamente ligada ao fato de o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral serem tratados de forma independente.

Em minha experiência como aluna do curso de Licenciatura, tenho notado que além dos alunos não estabelecerem a conexão, a maioria dos estudantes de licenciatura questionam a importância em ter essa disciplina em seu currículo, visto que o foco do curso é lecionar para o Ensino Básico. Essa questão perturba a maioria dos acadêmicos por não conseguirem conectar as diversas definições da matemática que colaboram para um conhecimento mais amplo do professor com aplicações do Cálculo no cotidiano que podem ser introduzidas em sala de aula do Ensino Básico.

Nos diferentes livros analisados percebemos que somas de Riemann são apresentadas sempre antes do TFC, mas nem sempre é evidenciado o porquê e como ocorre essa passagem de um limite de somas para uma primitiva. O livro Um Curso de Cálculo de Guidorizzi (2001a) é o único, entre os analisados, que aborda evidentemente essa conexão entre o TFC e as somas de Riemann quando utiliza o resultado do TVM. Os demais não evidenciam ou tratam de maneira implícita. No livro de análise do Ávila (2006), a conexão é tratada implicitamente durante a demonstração do Teorema da Média. O livro de Cálculo de Stewart (2011) e o de aplicações de Hoffamnn e Bradley (2002), fazem essa conexão quando utilizam o Teorema da Média implicitamente, mas essa conexão não fica evidente em ambos os livros. Logo, percebemos o quanto a atuação do professor neste processo é fundamental, pois ele age como um mediador, de modo a evidenciar aos alunos essa conexão que não é evidente, e está presente durante as demonstrações feitas entre a definição de soma de Riemann e o resultado do TFC. Além de tudo, é importante salientar a analogia existente entre o Exemplo 6, que aborda a interpretação da área sob f de a até x citado na análise de Stewart (2011), com os objetivos das sequências didáticas aplicadas. O mesmo explora, apesar de que de maneira estática, a representação gráfica do TFC de modo a conectar o Cálculo Diferencial e o Integral. Do mesmo exemplo podemos enfatizar o conceito de área quando $f(t) > 0$ que foi tão citado nas análises a priori e a posteriori.

Com objetivo de evidenciar a principal importância do TFC que é a conexão existente entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, elaboramos duas sequências didáticas que foram aplicadas numa turma da Graduação e numa da Pós-Graduação.

Tínhamos como objetivo na Atividade 01 possibilitar ao estudante desenvolver o conceito geométrico do TFC, e também o algébrico na Pós-Graduação. Na turma da Graduação obtemos bons resultados, mas verificamos que essa atividade necessitava de algumas formalizações para então ser aplicada na Pós-Graduação. Assim, após a atividade ser reformulada com outras alternativas ela foi aplicada na Pós-Graduação e obtivemos mais variações entre erros e acertos nas resoluções, pois agora a atividade intuitivamente exigia para resolução a relação entre o conceito de área e o cálculo de primitivas, e não apenas o conceito de área.

A Atividade 02 tinha como objetivo possibilitar a exploração de uma dependência funcional e a área de um polígono. A atividade na turma da graduação teve bons resultados. Na turma da Pós-Graduação ambos os grupos na parte 1 iniciaram a representação do gráfico da área deslocado e alguns intervalos com variação decrescente. Na parte 2 que servia como um confronto, os grupos verificaram o erro, um com mais ênfase que outro. Assim, a atividade alcançou seu objetivo em ambas as turmas.

A Atividade 03, aplicada apenas na turma da Pós-Graduação, tinha como objetivo explorar a partir de visualizações interativas outros conceitos do CDI além de primitivas. Os resultados positivos obtidos nessa atividade mostram que as atividades anteriores e a institucionalização serviram como base para que os objetivos da Atividade 03 fossem alcançados.

Temos a hipótese que o resultado obtido em cada turma individualmente está diretamente ligado ao contexto em que cada turma está inserida. No caso da Graduação a aplicação foi feita de modo a revisar/reforçar o conteúdo de integrais definidas. Na Pós-Graduação a aplicação serviu como uma introdução ao conteúdo que, por mais tenha sido estudado durante a Graduação, a grande maioria não tinha contato com o conteúdo há anos.

As sequências estão disponíveis aos professores que poderão utilizá-las em seus cursos, ou ainda, adaptá-las. No caso da adaptação, a mesma pode ser feita a partir dos feedbacks das aplicações, os quais permitem evoluir as sequências como prevê a metodologia da Engenharia Didática. Inclusive, o professor pode utilizar/adaptar para outros contextos que achar conveniente.

Por fim, percebemos o quanto é importante o estudo geométrico do TFC além do algébrico. As visualizações interativas colaboram com a formalização/fixação de conceitos e técnicas bastante importante no Cálculo. Portanto, a recomendação para trabalhos futuros é a investigação da aprendizagem a partir da construção desses aplicativos que colaboram com esta formalização, bem como, a aplicação de aplicativos que abordam outras diversas aplicações do Cálculo, de modo a instigar a importância presente em aprender Cálculo.

REFERÊNCIAS

ANACLETO, G. M. C**. Uma Investigação sobre a Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. 2007. 134 p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2007.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique de Mathématiques**. França, vol 9, no 3, p. 281-308, 1988.

ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2.°grau . **Revista do Professor de Matemática**, n.°18. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Editora Blucher. 2006.

BERENGUER, M. I. S. **A Aplicação da engenharia didática no ensino das ciências exatas**. 2010. 36p. Monografia (Especialista) – Universidade Candido Mendes. Rio de Janeiro. 2010.

BIANCHINI, W. O Teorema Fundamental do Cálculo e Integrais Indefinidas. In: BIANCHINI, Waldecir. **Aprendendo Cálculo com Maple.** IM-UFRJ, 2000. Capítulo 22.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: E. Blucher, 1996.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. Vol 2. 5ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2012.

EDUMATEC. Software de Geometria**. Instituto de Matemática – UFRGS.** 2008. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php. Acessado em: 24 de maio de 2016.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GRANDE, A. L. O Teorema Fundamental do Cálculo: um estudo didático e epistemológico. **III Encontro Regional em Educação Matemática - Diálogos de Educação Matemática e Outros Saberes.** RN, vol. 3, 2011.

GUIDORIZZI, H. L**. Um Curso de Cálculo**. Vol 1. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 2001a.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol 2. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 2001b.

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do *software* Maple. **Educação matemática Pesquisa**, vol 9, p. 51-81, 2007.

HOFFKAMP, A.: The Use of Interactive Visualizations to foster the Understanding of Concepts of Calculus - Design Principles and Empirical Results. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education,** v. 43, No. 3, p. 359-372, 2010.

HOFFMANN, L. D; BRADLEY, G.L. **Cálculo : um curso moderno e suas aplicações**. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 2002

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral : Uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem.** 2002. 180 p. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2002.

MUNIZ, C. A.; SILVA, H. A. A Formação do Professor de Matemática no Curso de Licenciatura: Reflexões Produzidas pela Comissão Paritária SBM/SBEM. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática.** No 21. 2013.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**. Luiz Carlos Pais. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PALARO. L. A**. A Concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue**. 2006. 340 p. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2006.

REZENDE, W. M. O ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica. **Anais: II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Santos: 2003.

ROCHA, M. D. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação**. 2010. 172 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. 2010.

ROSA, S. B. **A Integração do Instrumento ao Campo da Engenharia Didática: o caso do perspectógrafo**. 1998. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina.

SIPLE, I. Z.; CARDOSO, D. T.; FIGUEIREDO, E. B. **As somas de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo: como conectá-los?.** In: 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Ilhéus. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015. v.4. p. 2555-2565.

STEWART, J. **Cálculo**. Vol 1. 6ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ZUCHI, Ivanete. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática**: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina. 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A –

Sequência Didática da Graduação

Atividade 1 - Área do Triângulo

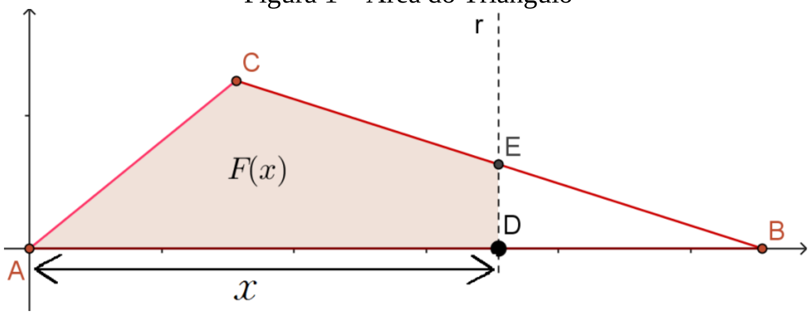
Aluno:

Curso:

Disciplina:

1) Seja ABC o triângulo representado na Figura 1 e seja r a linha tracejada que se move de A para B.

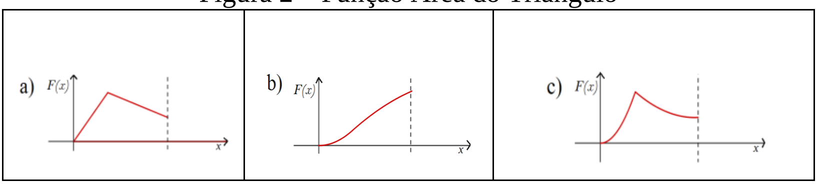
Figura 1 – Área do Triângulo



Fonte: Adaptada de Schlöglhofer, apud Hoffkamp, 2010.

Seja $F(x)$ a função que determina a área do polígono ACED sombreado na figura 1, onde x é a distância do ponto A até o ponto D. Assinale, na figura 2, o item que representa o gráfico da função área desse polígono. Justifique sua resposta.

Figura 2 – Função Área do Triângulo



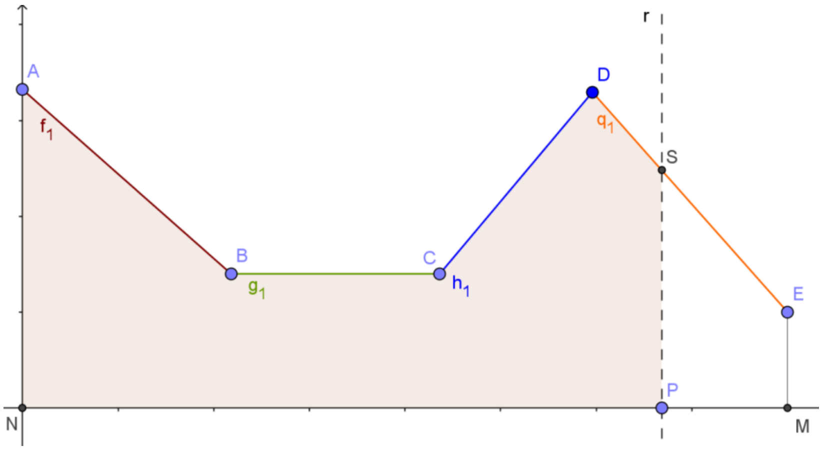
Fonte Adaptada de Schlöglhofer, apud Hoffkamp, 2010.

Atividade 2 – Parte 1: Área do polígono- Ambiente lápis e papel

Alunos:
Curso:
Disciplina:

Considere o polígono sombreado na Figura 3

Figura 3 – Área do polígono



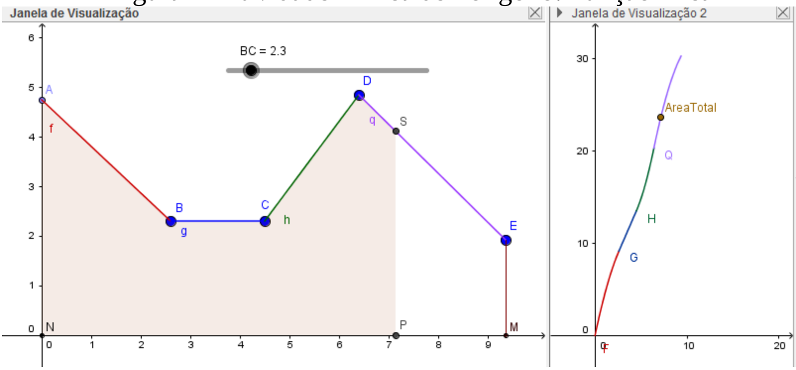
Fonte: produção da própria autora

Sabendo que a área do polígono ABCDSPN depende da ordenada x do ponto P, represente graficamente a função que descreve a sua área. Justifique sua representação.

Atividade 2 – Parte 2: Área de polígono – ambiente computacional

Alunos:
Curso:
Disciplina:

Figura 4- Atividade 2 Área de Polígono: Função Área



Fonte: produção da própria autora

a) Movimente o ponto P e observe a construção do gráfico da área na janela (ao lado). O gráfico construído no ambiente lápis e papel foi similar a esse? Justifique.

b) Quais as influências dos pontos $A, B, C\ e\ D$ no gráfico da área?

c) Se e o segmento BC estivesse sobre o eixo x, o que mudaria no gráfico da função?

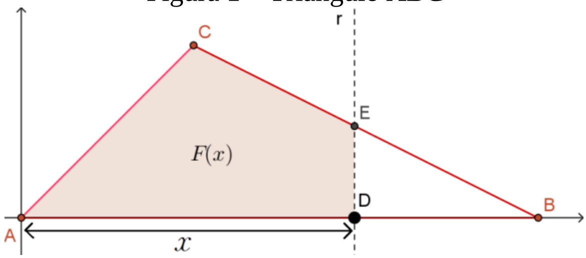
APÊNDICE B -

Sequência Didática da Pós-Graduação

Atividade 01- Área do Polígono: Representação Gráfica

Seja ABC o triângulo representado na Figura 1 e r a linha tracejada que se move de A para B.

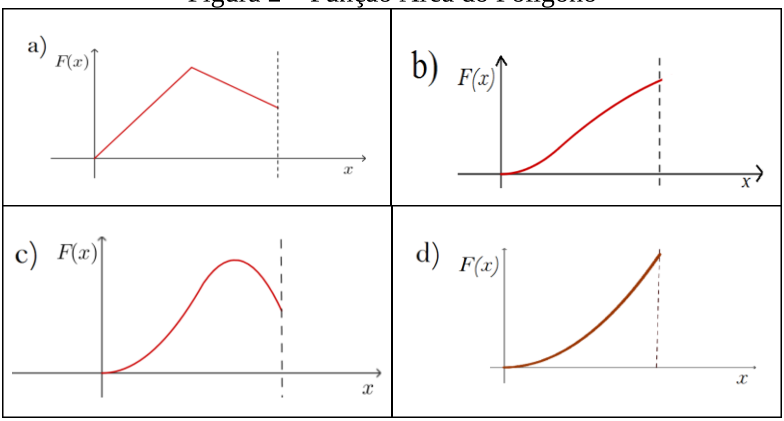
Figura 1 – Triângulo ABC



Fonte: Adaptada de Hoffkamp, 2010

i. Seja $F(x)$ a função que determina a área do polígono sombreado na Figura 1, e x a distância do ponto A até o ponto D. Assinale, na Figura 2, o item que representa o gráfico de $F(x)$. Justifique sua resposta.

Figura 2 – Função Área do Polígono

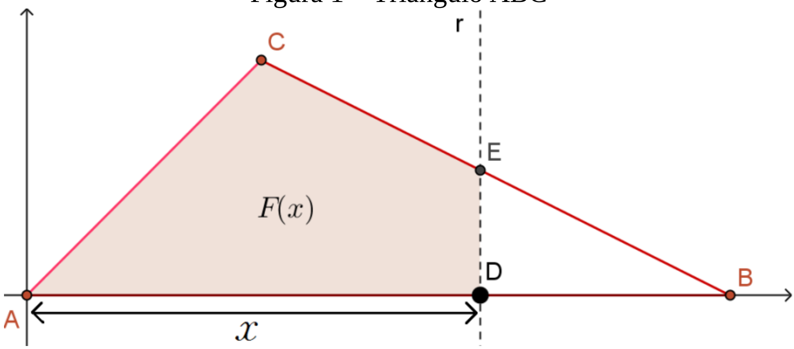


Fonte: Adaptada de Hoffkamp, 2010, p. 5

Atividade 01- Área do Polígono: Representação Algébrica

i. Considere o triângulo da Figura 1 formado pelos vértices A(0,0), B(3,0) e C(1,1). Defina a função $F(x)$ que descreve a área da região sombreada.

Figura 1 – Triângulo ABC

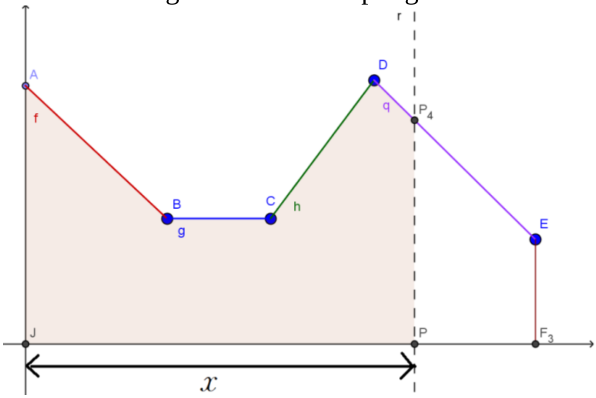


Fonte: Adaptada de Hoffkamp, 2010

Atividade 02- Área do Polígono: Representação Gráfica

Considere o polígono sombreado na Figura 3.

Figura 3 – Área do polígono



Fonte: produção da própria autora

Sabendo que a área da região sombreada depende da abscissa x do ponto P, represente graficamente a função que descreve a sua área. Justifique sua representação.

Atividade 02 Área do Polígono: no aplicativo do GeoGebra

a) Movimente o ponto P e observe a construção do gráfico da área na janela de visualização. O gráfico construído no ambiente lápis e papel foi similar a esse? Se não, justifique.

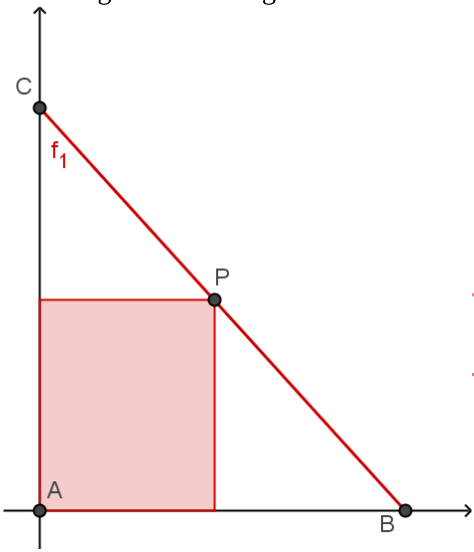
b) Quais as influências dos pontos A, B, C e D no gráfico da área?

c) Se o segmento BC estivesse sobre o eixo x, o que mudaria no gráfico da área?

Atividade 03 – Área do retângulo: Representação gráfica

Considere o retângulo inscrito no triângulo ABC na Figura 4:

Figura 4 – Retângulo inscrito



Fonte: Adaptada de Hoffkamp (2010)

a) O que ocorre com a área do retângulo inscrito na Figura 4 movimentando P sobre o segmento de reta BC?

b) Existem diferentes retângulos inscritos como na Figura 4 com a mesma área? Justifique.

c) Qual o comportamento do gráfico que representa a área desse retângulo?

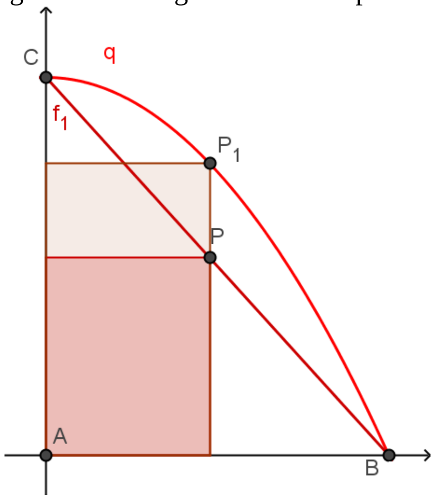
Atividade 03 – Área de retângulo: no aplicativo do GeoGebra

a) Movimente o ponto P e observe a construção do gráfico da área na janela de visualização. Confronte os resultados obtidos no ambiente lápis e papel com os resultados do ambiente computacional.

b) Qual a área máxima do retângulo inscrito? Justifique.

c) Se o retângulo estivesse 'inserido' em um segmento parabólico, como mostra a Figura 5, o que mudaria no gráfico da função área?

Figura 5 – Retângulo inscrito na parábola



Fonte: produção da própria autora

APÊNDICE C
Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa, inserida no Trabalho de Graduação intitulado "*Teorema Fundamental do Cálculo: conexão do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral a partir do uso de visualizações interativas*" da acadêmica Dienifer Tainara Cardoso, respondendo atividades que serão propostas com o objetivo de propiciar tais conexões. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Os benefícios e vantagens em participar desta pesquisa serão que os dados oriundos dela poderão substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão as professoras Dra. Ivanete Zuchi Siple e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas nessa pesquisa para a produção do trabalho final de graduação, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.
PESSOA PARA CONTATO:
Profa. Dra Ivanete Zuchi Siple
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7836
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO
Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
1		
2		
3		
4		