UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JEFERSON ZAPPELINI PETRY

UM ESTUDO SOBRE OS AXIOMAS DE SEPARAÇÃO E O LEMA DE URYSOHN

JOINVILLE - SC
2012

JEFERSON ZAPPELINI PETRY

UM ESTUDO SOBRE OS AXIOMAS DE SEPARAÇÃO E O LEMA DE URYSOHN

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Rodrigo de Lima

JOINVILLE - SC
2012

P493u

Petry, Jeferson Zappelini

Um Estudo sobre os Axiomas de Separação e o Lema de Urysohn / Jeferson Zappelini Petry. - 2012.

85 p.

Bibliografia: f. 106

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática. Joinville, 2012.

Orientador: Rodrigo de Lima

1. Topologia. 2. Axiomas de Separação. 3. Lema de Urysohn. 4. Convergência. 5. Partição da Unidade. I. Lima, Rodrigo. II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Curso de Licenciatura em Matemática. III. Um Estudo sobre os Axiomas de Separação e o Lema de Urysohn.

CDD: 514

JEFERSON ZAPPELINI PETRY

UM ESTUDO SOBRE OS AXIOMAS DE SEPARAÇÃO E O LEMA DE URYSOHN

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Banca Examinadora

Orientador: ________________________
Prof. Ms. Rodrigo de Lima
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: ________________________
Prof. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro: ________________________
Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 30 de novembro de 2012.

Aos meus familiares

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo apoio durante todos esses anos de estudos, sem eles eu nada seria.

Agradeço a todos os meus amigos, Jonathan Sardo, Maicon Neddel, Luiz Longen, Caio Figueiredo, Arcésio Shultz, Thiago Rosa, Guilherme Turassi, José Sausen, Giorgio Diniz, Marcos Crivellaro e Anderson Nascimento por partilharem vários momentos alegres dentro e fora da UDESC, em especial agradeço ao Alexandre Orthey pela sua grande e preciosa amizade.

Agradeço a todos os meus professores, por tudo que me ensinaram, em especial ao meu orientador e à Profª Tatiana.

E por fim, agradeço muito a Tamara da Silveira por me apoiar nos momentos mais difíceis e por estar sempre ao meu lado.

Nós somos feitos de poeira estelar.

Carl Sagan

RESUMO

Após a definição de suas bases, no Congresso Internacional de Matemática de 1909 em Roma, a topologia obteve grande avanço com suas novas definições, mais arbitrárias e abrangentes, como a definição dos Axiomas de Separação. Tais axiomas são indispensáveis para a atribuição de algumas características aos espaços topológicos, como convergência para um único ponto, além de terem como uma grande consequência, o lema de Urysohn. Que por sua vez auxilia na demonstração de fatos importantes para o contexto matemático, como existência das finitas partições da unidade, dando algumas das condições necessárias para a mergulho de m-variedades em espaços euclidianos de dimensão finita. Neste trabalho, foi feito um estudo teórico de todas as definições topológicas necessárias para a compreensão dos Axiomas de Separação, bem como para o estudo do lema de Urysohn e suas aplicações. Este estudo teve como elemento base o livro intitulado *Topology* de James Munkres.

Palavras-chave: Topologia. Axiomas de Separação. Lema de Urysohn. Convergência. Partição da Unidade.

ABSTRACT

After defining their bases, at the International Congress of Mathematics 1909 in Rome, topology obtained big progress with their new definitions, more embracing and arbitrary, as the definition of Separation Axioms. These axioms are indispensable for the attribution to topological spaces some characteristics as convergence to a single point, as well as having a great result, the Urysohn lemma. Which assists in the statement of facts relevant to the mathematical context, such as the existence of finite partitions of unity, giving some of the necessary conditions for the ibeddings of m-manifolds in Euclidean spaces of finite dimension. In this work, a theoretical study was made, of all topological definitions necessary for understanding the separation axioms, as well as for the study of Urysohn lemma and its applications. This study was based on the book entitled *Topology* of James Munkres.

Key-words: Topology. Separation Axioms. Urysohn Lema. Convergence. Partition of Unity.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Topologia, apesar de ser uma das mais novas linhas de pesquisa da matemática, está intimamente associada a quase todas as vertentes da matemática moderna (VILCHES, 2005). Grandes foram os seus avanços científicos após a definição de suas bases, no Congresso Internacional de Matemática de 1909, em Roma. A medida que se intensificavam os estudos em Topologia, novas propriedades foram surgindo. Algumas dessas propriedades são conhecidas como Axiomas de Separação, que quando satisfeitos por algum espaço, dá-nos uma vasta gama de características intrínsecas ao espaço. Uma dessas característica nos permite formular um teorema de grande importância para a Topologia, o lema de Urysohn, que nos possibilita, como uma de suas consequências, determinar em quais condições uma m-variedade pode ser imersa em um espaço euclidiano de dimensão finita.

O estudo da topologia, nos mostra que nem toda propriedade é tão trivial quanto parece. Um clássico exemplo, é o fato de que nem toda sequência convergente, é obrigada a convergir para um único ponto. Isso pode ser garantido apenas em espaços que atendem ao axioma T_2 (Munkres, 2000), ou como comumente são chamados espaços de Hausdorff, e serão tratados juntamente com os outros axiomas no Capítulo 4. Porém, a maior consequência dos axiomas de separação, apresentada neste trabalho, é o lema de Urysohn, que inicialmente foi tratado como uma lema, pois foi desenvolvido apenas como auxílio na demonstração do *Teorema da Metrização de Urysohn* porém, mais tarde viu-se que este ia além desta aplicação, e que o lema de Urysohn era necessário para mostrar a existência das finitas partições da unidade.

Tendo em vista, a necessidade dos axiomas de separação para garantir, em espaços arbitrários, algumas propriedades indispensáveis na demonstração de vários teoremas, e visto que o lema de Urysohn é um destes teoremas, faz-se necessário o estudo e compreensão de tais fatos, bem como suas consequências e aplicações.

Portanto, neste trabalho, apresentaremos os axiomas de separação bem como o lema de Urysohn. Para que o estudo destes seja possível, é impressindível o conhecimento das bases da topologia geral, pois tais axiomas estão intimamente relacionados com as topologias definidas nos conjunto, e o lema de Urysohn, por sua vez, baseia-se em outros fatos topológicos importantíssimos, como um dos axiomas de separação, e as funções contínuas. Este estudo toma como pedra fundamental o livro *Topology*, do autor e pesquisador do Massachusetts Institute of Technology - MIT, Prof. Dr. James Munkres.

Este trabalho foi construido da seguinte forma: no Capítulo 1 estão apresentados os conceitos básicos de topologia como as devidas definições de espaços topológicos bem como suas bases até conceitos mais conhecidos porém, abordados de maneira mais gerais como funções contínuas e conexidade; no Capítulo 2, estão alguns exemplos de topologias importantes para o nosso trabalho, como topologia produto e topologia métrica, bem como algumas de suas propriedades; no Capítulo 3, encontra-se um dos conceitos mais importantes da topologia: os espaços compactos, pois apartir destes, segundo Vilches, é possível obter propriedades globais apartir de propriedades locais; no Capítulo 4, definiremos os axiomas de separação, bem como sua relação com os conhecimentos até então estudados; e no capítulo 5, apresentaremos o lema de Urysohn juntamente com algumas aplicações importantes deste. Finalmente, no último capítulo, serão apresentadas às devidas conclusões deste trabalho e sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Os primeiros conceitos de espaços topológicos surgiram a partir dos estudos sobre a reta real e sobre os espaços euclidianos, porém estes estavam intimamente associados a métrica de cada espaço. Defini-se, então, neste capítulo o que é um espaço topológico, na sua essência, as formas distintas de criar topologias em conjuntos, além de conceitos elementares associados a estes espaços. Bases, subespaços, conjuntos abertos e fechados, pontos de acumulação, funções contínuas e conexidade.

1.1 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Durante a primeira década do século XXI, vários matemáticos (Frechét, Hausdorff, e outros) propuseram diferentes formas de definir os espaços topológicos, porém, apenas anos após estas primeiras definições foi escolhida a "melhor" definição, uma que de certa forma fosse mais conveniente e abrangente. Assim, por Munkres(2000), temos a seguinte definição para espaços topológicos:

Definição 1.1.1 *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X, onde $\mathscr{T}$ possui as seguintes propriedades:*

1. *$\emptyset$ e X estão em $\mathscr{T}$.*

2. *A união de elementos de uma subcoleção arbitrária de $\mathscr{T}$ está em $\mathscr{T}$.*

3. *A intersecção de elementos de uma subcoleção finita de $\mathscr{T}$ está em $\mathscr{T}$.*

*O conjunto X para o qual a topologia $\mathscr{T}$ foi especificada é chamado de **Espaço Topológico**.*

Rigorosamente falando, um espaço topológico é um par ordenado $(X, \mathscr{T})$ que é formado pelo conjunto X e pela topologia $\mathscr{T}$ definida em X. Porém, por comodidade e se não houver ambiguidade, será omitido a específica menção de $\mathscr{T}$.

Definiremos agora, quais serão os conjuntos abertos de um espaço topológico:

Definição 1.1.2 *Se X é um espaço topológico com topologia $\mathscr{T}$, então todo subconjunto U de X será um* ***conjunto aberto*** *sempre que U pertencer a $\mathscr{T}$.*

Exemplo 1.1.3 *Seja X o conjunto discreto com três elementos, $X = \{a, b, c\}$. Neste conjunto é possível definir várias topologias, tais como:*

$$\mathscr{T}_1 = \{X, \emptyset\}$$

$$\mathscr{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

$$\mathscr{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

É possível notar que, de fato, estas três coleções de conjuntos são topologias em X, o mesmo acontece para $\mathscr{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ porém, se acrescentarmos a esta coleção o conjunto $\{b\}$, teremos então $\mathscr{T}' = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ e esta não é uma topologia em X, pois $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ não pertence a coleção $\mathscr{T}'$. De uma forma similar a coleção $\mathscr{T}' = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ não será uma topologia em X, pois $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ não pertence a coleção $\mathscr{T}'$.

Exemplo 1.1.4 *Seja X um conjunto qualquer, então se definirmos $\mathscr{T}$ como a coleção de todos os subconjuntos de X, é notório que $\mathscr{T}$ será uma topologia em X, e tal coleção é chamada de* ***topologia discreta***. *Neste mesmo conjunto X, se definirmos $\mathscr{T}$ como sendo apenas o conjunto X e o conjunto vazio, esta também será uma topologia em X, e será chamada de* ***topologia indiscreta***.

Como é possível criar várias topologias em um único conjunto, seria interessante poder comparar estas topologias. Munkres (2000) define esta comparação da seguinte forma:

Definição 1.1.5 *Suponha que $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ são duas topologias definidas sobre o conjunto X. Se $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$, então $\mathscr{T}'$ é dita* ***mais fina*** *que $\mathscr{T}$; se $\mathscr{T}'$ contém propriamente $\mathscr{T}$, então $\mathscr{T}'$ é dita* ***estritamente mais fina*** *que $\mathscr{T}$. Também é possivel dizer que $\mathscr{T}$ é* ***mais grossa*** *que $\mathscr{T}'$, ou* ***estritamente mais grossa***, *nas duas respectivas situações. É dito que $\mathscr{T}$ é* ***comparável*** *com $\mathscr{T}'$, se $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}$ ou $\mathscr{T} \supset \mathscr{T}'$.*

Porém, nem sempre é possível comparar duas topologias. Um exemplo fácil de se ver são as topologias $\mathscr{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ e $\mathscr{T} = \{X, \emptyset, \{b\}\}$ definidas sobre $X = \{a, b, c\}$, ambas são, de fato, topologias em X porém, não existe relação de inclusão entre elas.

1.2 BASE PARA UMA TOPOLOGIA

Note que para cada exemplo na sessão anterior, foi possível representar todos os conjuntos abertos das topologias, porém isto normalmente é muito difícil. Na maioria dos casos, uma coleção menor de subconjuntos é escolhida de forma que esta defina a topologia em questão. Poderia-se fazer aqui uma analogia aos espaços vetoriais, onde em vez de descrever todos os vetores nele contidos, defini-se suas bases e a partir de combinações lineares, pode-se obter cada um dos vetores contidos no espaço, mas tenhamos em mente que, apesar da semelhança, bases de espaços vetorias são em muito diferentes de bases de espaços topológicos. Assim Munkres (2000) define base como:

Definição 1.2.1 *Seja X um conjunto. Então, a* ***base*** *para uma topologia em X é a coleção $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X chamados de* ***elementos da base*** *tal que:*

1. *Para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento da base B contendo x.*

2. *Se x pertence a interseção de dois elementos da base B_1 e B_2, então existe um elemento da base B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Se $\mathscr{B}$ satisfaz essas duas condições, então defini-se a ***topologia $\mathscr{T}$ gerada por $\mathscr{B}$*** *da seguinte maneira: Um subconjunto U de X é dito aberto em X se para cada $x \in U$, existe um elemento da base $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$. Note que cada elemento da base é também um elemento de $\mathscr{T}$.*

Verifiquemos então se a topologia $\mathscr{T}$ gerada por $\mathscr{B}$ é, de fato, uma topologia em X. Se U é o conjunto vazio, ele satisfaz a condição de ser um aberto por vacuidade. Da mesma forma, X está em $\mathscr{T}$, pois para cada $x \in X$ existe algum elemento da base B contendo x e está contido em X, pois por definição $\mathscr{B}$ é uma coleção de subconjuntos de X. Agora seja uma familia indexada $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, de elementos de $\mathscr{T}$ e mostraremos que

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

pertence a $\mathscr{T}$. Dado $x \in U$, existe um índice α tal que $x \in U_\alpha$. Como U_α é aberto , existe um elemento da base B tal que $x \in B \subset U_\alpha$. Logo $x \in B$ e $B \subset U$, logo U é aberto.

Agora tomemos dois elementos U_1 e U_2 de $\mathscr{T}$ e mostraremos que $U_1 \cap U_2$ pertence a $\mathscr{T}$. Seja $x \in U_1 \cap U_2$, e sejam os elementos da base B_1 e B_2 tal que $x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2$. Pela segunda condição da definição de base, existe um elemento B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Logo $x \in B_3 \subset U_1 \cap U_2$, assim $U_1 \cap U_2$ pertence a $\mathscr{T}$. Mas a definição de topologia nos diz que qualquer interseção finita de elementos de $\mathscr{T}$ deve pertencer a $\mathscr{T}$, isto é mostrado por indução, seja a interseção finita $U_1 \cap ... \cap U_n$ de elementos de $\mathscr{T}$. Para $n = 1$ é trivial, e para $n = 2$, provamos anteriormente. Assim, suponha que a propriedade valha para n:

$$U = U_1 \cap ... \cap U_n,$$

mostremos que a propriedade é validade para $n+1$.

$$U_1 \cap ... \cap U_{n+1}.$$

Para tal basta notar que

$$U_1 \cap ... \cap U_{n+1} = (U_1 \cap ... \cap U_n) \cap U_{n+1} = U \cap U_{n+1},$$

como U e U_{n+1} são elementos de $\mathscr{T}$, logo $U \cap U_{n+1}$ também o será, como provado anteriormente.

Por hipótese, $U_1 \cap ... \cap U_n$ pertence a $\mathscr{T}$; e pelo resultado provado anteriormente, a interseção $U_1 \cap ... \cap U_n$ com U_{n+1} também pertence a $\mathscr{T}$.

Outra forma de descrever a topologia gerada por uma base é dada, por Munkres (2000), no lema a seguir:

Lema 1.2.2 *Seja X um conjunto e seja $\mathscr{B}$ uma base para a topologia $\mathscr{T}$ em X. Então $\mathscr{T}$ é igual a coleção de todas as uniões de elementos de $\mathscr{B}$.*

Demonstração: Seja $\mathscr{D}$ a coleção de todas as uniões dos elementos de $\mathscr{B}$. Dada uma coleção de elementos B_α de $\mathscr{B}$, eles também são elementos de $\mathscr{T}$. Como $\mathscr{T}$ é uma topologia, então $\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha \in \mathscr{T}$, logo $\mathscr{D} \subset \mathscr{T}$. Reciprocamente, dado $U \in \mathscr{T}$, para cada $x \in U$ escolha um B_x de $\mathscr{B}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Logo $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, logo $U \in \mathscr{D}$, o que implica em $\mathscr{T} \subset \mathscr{D}$. Portanto $\mathscr{T} = \mathscr{D}$. ■

Note que este lema expõe que todo elemento U em X pode ser expresso como uma união de elementos da base. Entretanto, esta expressão para U não é única. Este é um dos pontos que difere base de espaços topológicos de base de espaços vetorias, pois todo elemento de um espaço vetorial, pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da base, e esta é única.

Até o momento descrevemos como, a partir de uma base, obter a topologia. Algumas vezes necessitaremos fazer o caminho inverso, a partir da topologia obter uma base, assim Munkres (2000) apresenta o seguinte lema.

Lema 1.2.3 *Seja X um espaço topológico. Suponha que $\mathscr{C}$ é uma coleção de subconjuntos abertos de X tal que para cada subconjunto aberto U de X e para cada x de U, existe um elemento C de $\mathscr{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Então, $\mathscr{C}$ é uma base para a topologia de X.*

Demonstração: Devemos mostrar que $\mathscr{C}$ é uma base. Primeira condição: Dado $x \in X$, uma vez que X é um conjunto aberto, existe por hipótese um elemento C de $\mathscr{C}$ tal que $x \in C \subset X$. Segunda condição: Seja $x \in C_1 \cap C_2$, onde C_1 e C_2 são elementos de $\mathscr{C}$. Uma vez que C_1 e C_2 são abertos, logo $C_1 \cap C_2$ também o é, e este pertence a X, pois X é um espaço topológico. Assim por hipótese existe C_3 em $\mathscr{C}$ tal que $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

Seja $\mathscr{T}$ a coleção de subconjuntos abertos de X. Agora devemos mostrar que a topologia $\mathscr{T}'$ gerada por $\mathscr{C}$ é a mesma que $\mathscr{T}$. Primeiro note que se U pertence a $\mathscr{T}$ e se $x \in U$, então existe por hipótese um elemento C de $\mathscr{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Logo segue que U pertence a topologia $\mathscr{T}'$ por definição, e assim $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. Reciprocamente, se W pertence a $\mathscr{T}'$, então W é igual a união de elementos de $\mathscr{C}$, pelo lema anterior. Como cada elemento de $\mathscr{C}$ pertence a $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}$ é uma topologia, logo W também pertence a $\mathscr{T}$, assim $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. Portanto, $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$ ■

Ao definirmos topologia, também definimos como comparar as topologias. Agora suponha que duas topologias, cada uma dada por uma base, são comparáveis. Será que as bases são de alguma forma comparáveis? A resposta é sim, e por Munkres (2000) é dada pelo seguinte lema:

Lema 1.2.4 *Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ bases para as respectivas topologias $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$, em X. Logo as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathscr{T}'$ é mais fina que $\mathscr{T}$.*

2. *Para cada $x \in X$ e para cada elemento B da base $\mathscr{B}$, existe um elemento B' da base $\mathscr{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.*

Demonstração: (2) $\Rightarrow$ (1): Dado um elemento U de $\mathscr{T}$, devemos mostrar que $U \in \mathscr{T}'$. Seja $x \in U$. Como $\mathscr{B}$ gera $\mathscr{T}$, existe um elemento $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subset U$. A condição (2) diz que existe um elemento $B' \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Logo $x \in B' \subset U$, e $U \in \mathscr{T}'$, por definição.

(1) $\Rightarrow$ (2). Seja $x \in X$ e $B \in \mathscr{B}$, com $x \in B$. Por definição B pertence a $\mathscr{T}$ e pela condição (1) $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$; logo $B \in \mathscr{T}'$. Como $\mathscr{T}'$ é gerado por $\mathscr{B}'$, existe um elemento $B' \in \mathscr{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. ■

Defininеremos agora três topologias na reta real $\mathbb{R}$, a topologia usual, a topologia do limite inferior e a K-topologia, que futuramente nos auxiliarão a entender alguns conceitos.

Definição 1.2.5 *Se $\mathscr{B}$ é a coleção de todos os intervalos abertos da reta real,*

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

*a topologia gerada por $\mathscr{B}$ é chamada **topologia usual** na reta real. Quando é dado $\mathbb{R}$ sem especificar a topologia, entende-se que é a topologia usual. Se $\mathscr{B}'$ é a coleção de todos os intervalos meio-abertos da forma*

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

*onde $a < b$, a topologia gerada por $\mathscr{B}'$ é chamada **topologia do limite inferior** em $\mathbb{R}$. Tal topologia será denotada por $\mathbb{R}_l$. Finalmente, seja K o conjunto formado por todos os* *elementos da forma $1/n$, com $n \in \mathbb{Z}_+$, e seja $\mathscr{B}''$ a coleção de todos os intervalos (a,b), juntamente com todos os conjuntos da forma $(a,b) - K$. A topologia gerada por $\mathscr{B}''$ é chamada **K-topologia** em $\mathbb{R}$. Denotaremos tal topologia por $\mathbb{R}_K$.*

Note que $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}''$ são bases para topologias em $\mathbb{R}$, para tal verifiquemos se satisfazem as definições. Primeiro: Dado $x \in \mathbb{R}$ basta tomar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$, logo os elementos $(a,b), [a,b), (a,b)$ das respectivas bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}''$ contém x. Segundo: Neste ponto consideraremos apenas as intersecções não triviais. Sejam $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, logo se $B_1 = (a,b)$ e $B_2 = (c,d)$, então se $c < a < d < b$ temos $B_1 \cap B_2 = (a,d)$ e se $a < c < b < d$ temos $B_1 \cap B_2 = (c,b)$, onde ambos são elementos da base $\mathscr{B}$. Suponha agora que $B_1, B_2 \in \mathscr{B}'$ logo se $c \leq a < d < b$ temos $B_1 = [a,b)$ e se $a \leq c < b < d$ $B_2 = [c,d)$, então $B_1 \cap B_2 = [a,d)$ ou $B_1 \cap B_2 = [c,b)$ e, novamente, ambos são elementos da base $\mathscr{B}'$. Por fim, suponha agora que $B_1, B_2 \in \mathscr{B}''$ logo, para $B_1 = (a,b)$ e $B_2 = (c,d)$ é trivial que a interseção é um elemento da base, suponha então $B_1 = (a,b) - K$ e $B_2 = (c,d)$, logo, por teoria básica de conjuntos, se $c < a < d < b$ temos $B_1 \cap B_2 = (a,d) - K$ e se $a < c < b < d$ temos $B_1 \cap B_2 = (c,b) - K$ e ambos são elementos da base $\mathscr{B}''$ porém, também temos o caso em que $B_1 = (a,b) - K$ e $B_2 = (c,d) - K$, suas possíveis interseções são $B_1 \cap B_2 = (a,d) - K$ com $c < a < d < b$ e $B_1 \cap B_2 = (c,b) - K$ com $a < c < b < d$, que são elementos da base $\mathscr{B}''$.

Como as topologias geradas por $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ e $\mathscr{B}''$, estão definidas sobre o conjunto $\mathbb{R}$, faz sentido compararmos elas.

Primeiramente, note que para qualquer x dentro do elemento da base $(a,b) \in \mathscr{B}$, o elemento da base $[x,b) \in \mathscr{B}'$ está contido em (a,b), logo $\mathbb{R}_l$ é mais fina que $\mathbb{R}$. De forma semelhante, para qualquer x dentro do elemento da base $(a,b) \in \mathscr{B}$, o elemento da base $(a,b) \in \mathscr{B}''$ está contido em (a,b), logo $\mathbb{R}_K$ é mais fina que $\mathbb{R}$.

Note também que $\mathbb{R}_l$ e $\mathbb{R}_K$ não são comparáveis entre si, pois não existe um elemento da base da forma (a,b) que contenha o ponto a do intervalo $[a,b)$, e esteja contido neste. Por outro lado, não existe nenhum elemento da base da forma $[a,b)$ que contenha o ponto 0 do intervalo $(-1,1) - K$, e esteja contido neste.

Até o momento vimos uma topologia gerada por $\mathscr{B}$ como sendo a coleção das uniões arbitrárias de elementos da base $\mathscr{B}$. O que aconteceria se, dada uma coleção de conjuntos, tomassemos a coleção de todas as interseções finitas? Essa pergunta nos leva a definição de sub-base, por Munkres (2000).

Definição 1.2.6 *Uma **sub-base** $\mathscr{S}$ para uma topologia em X é uma coleção de subconjuntos de X tal que sua união é igual a X. A **topologia gerada pela sub-base** $\mathscr{S}$ é definida como a coleção $\mathscr{T}$ de todas as uniões de interseções finitas de elementos de $\mathscr{S}$.*

Verifiquemos, então, se $\mathscr{T}$ é uma topologia. Para tal basta mostrar que a coleção $\mathscr{B}$, formada por todas as interseções finitas de elementos de $\mathscr{S}$, é uma base. A primeira condição é satisfeita, pois dado $x \in X$, sabendo que $X = \bigcup_{S \in \mathscr{S}} S$, logo x pertence a pelo menos um elemento S da sub-base $\mathscr{S}$, que por sua vez está contido em um elemento de $\mathscr{B}$. Para checar a segunda condição, sejam

$$B_1 = S_1 \cap ... \cap S_m$$

$$B_2 = S'_1 \cap ... \cap S'_n$$

dois elementos de $\mathscr{B}$. A sua interseção é

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap ... \cap S_m) \cap (S'_1 \cap ... \cap S'_n)$$

que por sua vez também se constitui de uma interseção finita de elementos de $\mathscr{S}$, logo pertence a $\mathscr{B}$.

1.3 TOPOLOGIA DO SUBESPAÇO

Nesta sessão faremos um breve estudo sobre subespaços, ou seja, a partir de um espaço topológico X com a topologia $\mathscr{T}$ e um subconjunto Y de X, definiremos uma topologia em Y a partir de $\mathscr{T}$. Munkres (2000) define tal topologia na forma:

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço topológico com topologia $\mathscr{T}$. Se Y é um subconjunto de X, a coleção*

$$\mathscr{T}_Y = \{Y \cap U | U \in \mathscr{T}\}$$

*é uma topologia em Y, chamada de **topologia do subespaço**. Com esta topologia, Y é chamado de **subespaço** de X e seus conjuntos abertos consistem de todas as interseções de conjuntos abertos de X com Y.*

Devemos agora verificar se $\mathscr{T}_Y$ é uma topologia. Primeira condição, obviamente $\emptyset$ e Y pertencem a $\mathscr{T}_Y$, basta notar que

$$\emptyset = Y \cap \emptyset, \qquad Y = Y \cap X,$$

onde $\emptyset$ e X são elementos de $\mathscr{T}$. Segunda condição, seja a união arbitrária $\bigcup_{\alpha \in J}(U_\alpha \cap Y)$, através de teoria básica de conjunto temos que

$$\bigcup_{\alpha \in J}(U_\alpha \cap Y) = \bigcup_{\alpha \in J}(U_\alpha) \cap Y,$$

e esta pertence a $\mathscr{T}_Y$. Para mostrar que interseções finitas também pertencem a $\mathscr{T}_Y$, novamente utilizaremos conhecimentos em teoria básica de conjuntos, este fato segue da

equação
$$(U_1 \cap Y) \cap ... \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap ... \cap U_n) \cap Y$$

Novamente se faz necessário definir uma base para esta topologia, mas esta segue de forma intuitiva da própria definição de topologia do subespaço. Munkres (2000) apresenta a base para topologia do subespaço através do Lema a seguir.

Lema 1.3.2 *Se $\mathscr{B}$ é uma base para a topologia de X, então a coleção*

$$\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y | B \in \mathscr{B}\}$$

é uma base para a topologia do subespaço em Y.

Demonstração: Dado um conjunto U aberto em X e dado um elemento $y \in U \cap Y$, podemos escolher um elemento B de $\mathscr{B}$ tal que $y \in B \subset U$. Logo $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. Pelo Lema 1.2.3 temos que $\mathscr{B}_Y$ é uma base para a topologia do subespaço em Y. ■

Neste momento torna-se necessário fazer uma definição terminológica, pois um mesmo conjunto visto em relação ao subespaço pode ser aberto porém, não necessariamente será aberto no espaço, para evitar algum possível mal entendido, definiremos o seguinte: Se Y é um subespaço de X, diremos que um conjunto U é ***aberto em*** Y se pertence a topologia de Y. Diremos que U é ***aberto em*** X se pertencer a topologia de X.

Existe um caso em que todo conjunto aberto em Y é também aberto em X, o lema a seguir ilustra tal fato.

Teorema 1.3.3 *Seja Y um subespaço de X. Se U é aberto em Y e Y é aberto em X, então U é aberto em X.*

Demonstração: Dado U aberto em Y, temos por definição de subespaço que $U = Y \cap V$ para algum V aberto em X. Mas Y e V são abertos em X logo sua interseção também é aberta em X, assim U é aberto em X. ■

O exemplo a seguir deixará mais claro este teorema.

Exemplo 1.3.4 *Considere a reta real $\mathbb{R}$, com a topologia usual, e considere os seguintes subespaços $X = (0, 1)$ e $Y = [0, 1)$. Os conjuntos pertencentes a primeira topologia são da forma $(a, b) \cap X$, logo os conjuntos que formam uma base para a topologia do subespaço de X são:*

$$\begin{aligned} (a, b), &\quad \textit{se a e b pertencerem a } X \\ (0, b), &\quad \textit{se apenas b pertencer a } X \\ (a, 1), &\quad \textit{se apenas a pertencer a } X \\ X \textit{ ou } \emptyset, &\quad \textit{se nem a nem b pertencerem a } X \end{aligned}$$

Por definição estes conjuntos são abertos em X, e pelo Teorema 1.3.3, como X é aberto em $\mathbb{R}$ logo seus conjuntos também são abertos na reta. Isto fica bem visível ao olharmos diretamente para os conjuntos que formam a base da topologia de X, todos são abertos em $\mathbb{R}$, pois são da forma (a, b) e portanto pertencem a base da topologia usual de $\mathbb{R}$.

O mesmo não acontece com Y. Note que Y não é aberto em $\mathbb{R}$, portanto nem todos os conjuntos abertos em Y serão abertos em $\mathbb{R}$. Isto fica mais claro quando olhamos para os conjuntos da base de Y que são:

$$(a, b), \qquad \textit{se } a \textit{ e } b \textit{ pertencerem a } Y$$

$$[0, b), \qquad \textit{se apenas } b \textit{ pertencer a } Y$$

$$(a, 1), \qquad \textit{se apenas } a \textit{ pertencer a } Y$$

$$Y \textit{ ou } \emptyset, \qquad \textit{se nem } a \textit{ nem } b \textit{ pertencerem a } Y$$

Veja que os conjuntos da forma $[0, b)$, com b pertencente a Y, são abertos em Y, pois pertencem a base da topologia do subespaço, porém estes não são abertos em $\mathbb{R}$, uma vez que abertos em $\mathbb{R}$ são da forma (a, b).

1.4 CONJUNTOS FECHADOS E PONTOS LIMITES

Nesta sessão definiremos o que são os conjuntos fechados, que serão de extrema importância, uma vez que alguns dos axiomas de separação são definidos através de conjuntos fechados, fecho de conjuntos, que está intimamente ligado a definição de conjuntos fechados e Pontos Limites, que, juntamente com o fecho, nos dará uma nova forma de ver os conjuntos fechados.

1.4.1 Conjuntos Fechados

Comecemos então com a devida definição de conjuntos fechados, por Munkres (2000).

Definição 1.4.2 *Um subconjunto de um espaço topológico X é dito **fechado** se seu complementar é aberto.*

Vejamos alguns exemplos na reta real $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.4.3 *O subconjunto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ é fechado, pois seu complemento*

$$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

é aberto, uma vez que este é igual a união de dois subconjuntos abertos $(-\infty, a)$ *e* $(b, +\infty)$*. De forma análoga, teremos que o intervalo* $[a, +\infty)$ *é fechado, já que seu complementar* $(-\infty, a)$ *é aberto.*

O seguinte exemplo nos mostra uma clássica situação onde podemos ter conjuntos abertos e fechados, além do próprio espaço X e do conjunto vazio.

Exemplo 1.4.4 *Seja o subconjunto da reta real:*

$$X = [0, 1] \cup (2, 3)$$

na topologia do subespaço. Neste caso o conjunto $[1, 0]$ *é aberto, pois é igual e interseção de um aberto de* $\mathbb{R}$, $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, *com* X*. De forma semelhante temos que* $(2, 3)$ *é aberto, pois ele mesmo é aberto em* $\mathbb{R}$*. Porém, sabemos que* $[0, 1]$ *e* $(2, 3)$ *são complementares em* X*, assim, pela definição de conjuntos fechados, ambos são fechados em* X*.*

Agora veremos algumas propriedades das coleções de conjuntos fechados, basicamente, estas são similares às satisfeitas pelas coleções de conjuntos abertos, Munkres (2000) apresenta tais particularidades através do teorema seguinte:

Teorema 1.4.5 *Seja* X *um espaço topológico. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. $\emptyset$ *e* X *são fechados.*

2. *Interseções arbitrárias de conjuntos fechados são fechados.*

3. *Uniões finitas de conjuntos fechados são fechados.*

Demonstração: (1) $\emptyset$ é fechado, pois seu complementar X é aberto. Da mesma forma temos que X é fechado, pois seu complementar $\emptyset$ é aberto.

(2) Dada uma coleção de conjuntos fechados $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, devemos mostrar que

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$$

é aberto. Basta aplicarmos a Lei de DeMorgan,

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha).$$

Sabemos que $(X - A_\alpha)$ é aberto, pois A_α é fechado, logo o lado direito desta equação representa uma união arbitrária de conjuntos abertos, que por sua vez é aberto. Assim sendo, $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ é fechado.

(3) De forma similar, sejam A_i, com $i = 1, ..., n$, fechados. Considerando a equação a seguir

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i)$$

temos que a parte direita da equação apresenta uma interseção finita de conjuntos abertos, logo é aberto e, portanto, $\bigcup A_i$ é fechado. ■

Com auxilio deste teorema podemos definir uma topologia em X utilizando os conjuntos fechados, ao invés de conjuntos abertos, e por fim denotar os conjuntos abertos como sendo os complementares dos conjuntos fechados, porém esta definição não traz nenhuma vantagem sobre a definição adotada no início deste trabalho.

Neste momento faz-se necessário mais uma pequena definição terminológica, assim como a adotada ao nos referirmos a conjuntos abertos de um subespaço e de um espaço topológico. Se Y é subespaço de X, diremos que um conjunto A é **fechado em** Y se A é um subconjunto de Y e se $(Y - A)$ é aberto em Y. Assim, Munkres (2000) propõe o seguinte teorema:

Teorema 1.4.6 *Seja Y um subespaço de X. Então, o conjunto A é fechado em Y se, e somente se, é igual a interseção de um conjunto fechado de X com Y.*

Demonstração: Suponha que A é fechado em Y, logo $Y - A$ é aberto e, por definição de subespaço, é igual a interseção de um aberto U, em X, com Y. Logo $X - U$ é fechado em X, e temos que

$$A = Y \cap (X - U),$$

Basta lembrar que $Y - A = Y \cap U$ e que o complementar do complementar de A, em Y, é o próprio A. Assim, temos que A é igual a interseção de um conjunto fechado de X com Y.

Reciprocamente, suponha que $A = C \cap Y$, com C fechado em X. Logo $X - C$ é aberto em X, e por definição de subespaço $(X - C) \cap Y$ é aberto em Y, mas

$$(X - C) \cap Y = (X \cap Y) - (C \cap Y) = Y - A,$$

portanto A é fechado em Y. ■

Como visto no Exemplo 1.4.4 não necessariamente um conjunto fechado no subespaço, será fechado no espaço. Assim, o seguinte teorema dá as condições para que um conjunto fechado no subespaço seja também fechado no espaço.

Teorema 1.4.7 *Seja Y um subespaço de X. Se A é fechado em Y e Y é fechado em X, então A é fechado em X.*

Demonstração: Seja A fechado em Y, logo $A = Y \cap U$, com U fechado em X, mas sabemos que Y é fechado em X, logo pelo Teorema 1.4.5 temos que A é fechado. ■

1.4.8 Fecho e Interior de um Conjunto

Trabalharemos agora com Fecho e Interior, que nos proporcionará uma nova visão dos conjuntos abertos e fechados. Munkres (2000) define tais termos da seguinte forma:

Definição 1.4.9 *Seja um subconjunto A de um espaço topológico X. Definiremos:*

Interior *de A como a união de todos os conjuntos abertos contidos em A, será denotado por $Int(A)$.*

Fecho *de A como a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A, será denotado por $\bar{A}$.*

Obviamente Int$A$ será aberto, já que é igual a união de conjuntos abertos, e $\bar{A}$ será fechado, uma vez que é igual a interseção de conjuntos fechados. Além disto, também temos que

$$IntA \subset A \subset \bar{A}.$$

Se A é aberto, $A = Int(A)$, e se A é fechado, $A = \bar{A}$.

Alguns autores como Dugundji (1978) definem um elemento a mais, juntamente com fecho e interior, que é conhecido como fronteira, e é dado por tal na seguinte definição:

Definição 1.4.10 *Seja $A \subset X$. A **fronteira** $Fr(A)$ de A é a intersecção de $\bar{A}$ com $\overline{(X - A)}$*

Desta definição, decorrem vários fatos importantes, como $Fr(A) = \bar{A} - Int(A)$, ou então que $Fr(A) \cap Int(A) = \emptyset$. Porém, no decorrer desta sessão trabalharemos apenas com o fecho de um conjunto, já que este possui características mais interessantes do que o interior e fronteira de um conjunto.

Ao trabalharmos com subespaço, novamente teremos que nos ater as definições ao tratarmos de fecho no espaço e no subespaço, assim como ao trabalharmos com conjuntos fechados e abertos. Munkres apresenta a relação entre o fecho de um conjunto no subespaço e no espaço através do seguinte teorema:

Teorema 1.4.11 *Sejam Y um subespaço de X, A um subconjunto de Y, $\bar{A}$ o fecho de A em X. Então, o fecho de A em Y é igual a $\bar{A} \cap Y$.*

Demonstração: Seja B o fecho de A em Y. O conjunto $\bar{A}$ é fechado em X, logo $\bar{A} \cap Y$ é fechado em Y pelo Teorema 1.4.6. Como $A \subset (\bar{A} \cap Y)$, e por definição B é igual a interseção de todos os conjuntos fechados de Y que contém A, logo temos que $B \subset (\bar{A} \cap Y)$.

Reciprocamente, sabemos que B é fechado em Y. Logo pelo Teorema 1.4.6 $B = C \cap Y$ para algum conjunto C fechado em X. Logo C é um conjunto fechado contendo A, como $\bar{A}$ é a interseção de todos os conjuntos fechados contendo A, logo $\bar{A} \subset C$. Assim podemos concluir que $(\bar{A} \cap Y) \subset (C \cap Y) = B$. ■

Veremos, agora, outra maneira de denotarmos o fecho de um conjunto, uma maneira mais fácil já que não será necessário encontrar todos os conjuntos fechados que contém o conjunto em questão. O seguinte teorema, dado por Munkres (2000) ilustra o caso.

Primeiramente, vamos definir duas terminologias convenientes para nós. Diremos que um conjunto A **intercepta** B se $A \cap B$ não for vazio. Diremos, também, que U é uma **vizinhança** de x, se U for um conjunto aberto contendo x. Agora vamos ao teorema.

Teorema 1.4.12 *Seja A um subconjunto do espaço topológico X.*

1. *Então, $x \in \bar{A}$ se, e somente se, toda vizinhança de x intercepta A.*

2. *Supondo que a topologia em X é dada por uma base, então $x \in \bar{A}$ se, e somente se, todo elemento da base B contendo x intercepta A.*

Demonstração: Considerando o primeiro item, aplicando a contrapositiva temos:

$$x \notin \bar{A} \iff \text{existe pelo menos uma vizinhança de } x \text{ que não intercepta } A.$$

Assim, se $x \notin \bar{A}$, logo o conjunto $U = X - \bar{A}$ é uma vizinhança de x, que não intercepta A. Reciprocamente, se existe uma vizinhança U de x que não intercepta A, logo o conjunto $X - U$ é um fechdo contendo A. Por definição de fechado, o conjunto $X - U$ contem $\bar{A}$, portanto x não pertence a A.

O segundo item é consequência do primeiro. Se toda vizinhança de x intercepta A, logo os elementos da base, contendo x, também interceptam A, pois também são vizinhanças de x, já que são abertos. Reciprocamente, se todo elemento da base, contendo x, intercepta A, então todos as vizinhanças abertas de x também interceptam, pois em cada vizinhança de x, existe um elemento da base contendo x que está contido na vizinhança.
■

Exemplo 1.4.13 *Considere os subespaços $A = (0,1), B = (0,1], C = [0,1), D = [0,1]$ da reta real $\mathbb{R}$. Os seus respectivos fechos são $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C} = \bar{D} = [0,1]$. Basta notar que toda vizinhança de 0 e 1 intercepta os conjuntos.*

Exemplo 1.4.14 *Considere o subespaço $Y = (0,2]$ da reta real $\mathbb{R}$. O conjunto $A = (0,1)$ é um subconjunto de Y, o seu fecho em $\mathbb{R}$ é $[0,1]$, enquanto o seu fecho em Y é $[0,1] \cap Y = (0,1]$.*

1.4.15 Pontos Limites

Veremos agora mais uma forma de descrever o fecho de um conjunto, esta forma usará o conceito de pontos limites, que por Munkres (2000) é definido da seguinte maneira:

Definição 1.4.16 *Se A é um subconjunto do espaço topológico X e se x é um ponto de X, diremos que x é um* **ponto limite** *(ou* **ponto de acumulação***) de A, se toda vizinhança de x intercepta A em um algum outro ponto, diferente de x, em outras palavras x pertence ao fecho de $A - \{x\}$.*

Verifiquemos o exemplo a seguir, para fixar a idéia.

Exemplo 1.4.17 *Seja $A = (0, 1]$ um subespaço da reta real $\mathbb{R}$. Logo 0 é um ponto limite de A, pois $A - \{0\} = A$ e $\bar{A} = [0, 1]$.*

Os exemplos 1.4.13 e 1.4.17 nos levam a imaginar que existe uma relação entre o fecho de um conjunto e seus pontos limites, e de fato esta relação existe, e é dada, por Munkres (2000), através do teorema a seguir.

Teorema 1.4.18 *Seja A um subconjunto do espaço topológico X. Seja A' o conjunto de todos os pontos limites de A. Logo*

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

Demonstração: Se $x \in A'$, então, por definição de ponto limite, temos que toda vizinhança de x intercepta A, em um ponto diferente de x. Logo pelo Teorema 1.4.12, x pertence a $\bar{A}$. Assim, $A' \subset \bar{A}$ e por definição $A \subset \bar{A}$, portanto $A \cup A' \subset \bar{A}$.

Reciprocamente, seja x um ponto de $\bar{A}$. Se x pertencer a A, é trivial que $x \in A \cup A'$. Suponha que $x \notin A$, como $x \in \bar{A}$, obrigatoriamente toda vizinhança U de x deve interceptar A, como $x \notin A$, logo U deverá interceptar A em um ponto diferente de x, que é a própria definição de ponto limite. Então, $x \in A'$ e $\bar{A} \subset A \cup A'$ e portanto $\bar{A} = A \cup A'$.
■

Corolário 1.4.19 *Um subconjunto de um espaço topológico é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos limites.*

Demonstração: Seja A um conjunto fechado, logo $A = \bar{A}$, mas pelo teorema anterior $\bar{A} = A \cup A'$, logo $A' \subset A$.

Reciprocamente, se $A' \subset A$ então pelo teorema anterior $\bar{A} = A \cup A' = A$. ■

Este corolário, apesar de ter uma demonstração simples, fornece-nos uma nova forma de vermos os conjuntos fechados, não mais relacionando-os com um conjuntos abertos, mas apenas tratando com o próprio conjunto fechado, o que, em muitos casos, facilita o trabalho.

1.5 FUNÇÕES CONTÍNUAS

O estudo de funções contínuas é considerado, por muitos, como básico. Basta ver que estas estão presentes em todos os estágios da vida acadêmica. Porém, em cada estapa vemos sua definição denotada de formas diferentes, mas a sua essência é a mesma, vejamos a definição, por Munkres (2000):

Definição 1.5.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é dita* ***contínua*** *se para cada subconjunto aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.*

É visível que o conjunto $f^{-1}(V)$ nada mais é do que todos os pontos $x \in X$, tal que $f(x) \in V$. Será vazio se V não interceptar $f(X)$, ou seja, se não existir nenhum ponto x tal que $f(x) \in V$.

Verifiquemos agora que, para provar continuidade, basta mostrarmos que a imagem inversa de elementos da base de Y são abertos. Sendo V um subconjunto de Y, podemos escrevê-lo como a união de elementos da base

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha.$$

Temos

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha),$$

e por propriedade de imagem inversa teremos

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha),$$

portanto $f^{-1}(V)$ será aberto se cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ for aberto.

Temos até o momento duas formas semelhantes de classificar funções contínuas, uma através de conjuntos abertos e outra através dos elementos da base. O teorema a seguir relaciona outras características preservadas por funções contínuas, que por sua vez auxiliam na classificação. Vejamos o teorema dado por Munkres (2000).

Teorema 1.5.2 *Sejam X e Y espaços topológicos e seja a função $f : X \to Y$. Então, as afirmações a seguir são equivalentes:*

1. *f é contínua.*
2. *Para todo subconjunto A de X, tem-se que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Para todo conjunto B fechado em Y, o conjunto $f^{-1}(B)$ é fechado em X.*

4. *Para cada $x \in X$ e cada vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.*

Demonstração: Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) e (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1), apenas por comodidade.

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que f seja contínua. Seja A um subconjunto de X. Mostraremos que se $x \in \bar{A}$, então $f(x) \in \overline{f(A)}$. Seja x um ponto de $\bar{A}$ e seja V uma vizinhança de $f(x)$. Então, por definição de função contínua, o conjunto $f^{-1}(V)$ é aberto em X e contém o ponto x, portanto $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x. Como x pertence ao fecho de A, logo $f^{-1}(V)$ intercepta A em um outro ponto y, além de x. Então, V intercepta $f(A)$ no ponto $f(y)$, então $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja B fechado em Y e seja $A = f^{-1}(B)$. Queremos mostrar que A é fechado em X, basta mostrar que $A = \bar{A}$, ou mais precisamente, mostrar que $\bar{A} \subset A$, já que a inclusão $A \subset \bar{A}$ é trivial. Por teoria de conjuntos temos que

$$f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B. \tag{1.5.1}$$

Portanto, se $x \in \bar{A}$ então $f(x) \subset f(\bar{A})$, pela condição (2) temos que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Pela Equação 1.5.1 temos que B é um fechado contendo $f(A)$, logo $\overline{f(A)} \subset B = \bar{B}$. Organizando os fatos acima temos que

$$f(x) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B,$$

ou seja, $x \in f^{-1}(B) = A$. Assim concluímos que, de fato, $\bar{A} \subset A$, e A é fechado.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja V um conjunto aberto em Y, logo $B = Y - V$ é fechado em Y. Por teoria de conjuntos temos que

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - V) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V).$$

A condição (3) nos diz que $f^{-1}(B)$ é fechado em X, pois B é fechado em Y. Portanto, para que $X - f^{-1}(V)$ seja fechado, $f^{-1}(V)$ deve ser aberto. Assim sendo, temos que f é contínua.

(1) $\Rightarrow$ (4) Seja $x \in X$ e seja V uma vizinhança de $f(x)$. Logo o próprio conjunto $U = f^{-1}(V)$ será a vizinhança de x desejada, pois trivialmente temos que $f(U) \subset V$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Seja V aberto em Y e seja x um ponto de $f^{-1}(V)$. Assim, $f(x) \in V$, então pela condição (4), existe uma vizinhança U_x de x, tal que $f(U_x) \subset V$ e, portanto, $U_x \subset f^{-1}(V)$. Como a condição (4) é válida para todos os pontos de X, logo também o é para todos os pontos de $f^{-1}(V)$, assim podemos escrever $f^{-1}(V)$ da forma

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x,$$

uma união arbitrária de conjuntos abertos, que também será aberto. Assim, concluímos que f é contínua. ■

Até o momento trabalhamos apenas com funções contínuas, sem nada saber sobre suas inversas, se é que existiam. Veremos agora casos especiais de funções contínuas, onde suas inversas existem e também são contínuas. Vejamos como Munkres (2000) define tais funções.

Definição 1.5.3 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma bijeção. Se ambas as funções f e sua inversa*

$$f^{-1} : Y \to X$$

*são contínuas, então f é chamada de **homeomorfismo**.*

Sempre que existir um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, diremos que estes são **homeomorfos**.

Até então, ao trabalharmos com funções contínuas, vimos que $f(f^{-1}(U)) \subset U$, ou seja, a imagem da imagem inversa de U não necessáriamente seria U, pois nada sabiamos sobre f^{-1}. Agora, ao trabalharmos com homeomorfismos, a igualdade $f(f^{-1}(U)) = U$ é válida, pois f é uma bijeção. Este fato trará muitas características úteis aos homeomorfismos, uma delas é a preservação de estruturas topológicas, ou seja, características da topologia de X serão preservadas ao aplicarmos a função f a qualquer subconjunto de X e estas aparecerão nas respectivas imagens em Y, em outras palavras, não há diferenças entre trabalhar em X e trabalhar em Y.

Outra notação que usaremos, será a **mergulho** de X em Y. Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \to Y$ é uma função injetiva e contínua. Então, $f' : X \to Z$ será uma restrição do contra domínio de f, onde $Z = f(X)$, e portanto f' será bijetiva. Se f' for um homeomorfismo, então diremos que $f : X \to Y$ será uma mergulho de X em Y.

Vamos agora ver um exemplo muito interessante, onde aplicaremos uma mesma função a um mesmo conjunto, porém com topologias diferentes.

Exemplo 1.5.4 *Considere $\mathbb{R}$ a topologia usual na reta real e $\mathbb{R}_l$ a topologia dos limites inferiores da reta real.*

Se definirmos

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

como sendo a função identidade, teremos que esta será um homeomorfismo, uma vez que sabemos que a função identidade é bijetora e que a imagem inversa de (a, b), um elemento da base de $\mathbb{R}$, é o próprio conjunto (a, b).

Agora considere a função

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$$

também como sendo a função identidade. Sabemos $\mathbb{R}_l$ tem como elementos da base os conjuntos da forma $[a, b)$, logo devemos calcular a imagem inversa de $[a, b)$, que será o próprio conjunto $[a, b)$. Porém, este não é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Por fim, consideremos a função

$$h : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R},$$

novamente como sendo a função identidade. Teremos agora, que os conjuntos da base do contradomínio serão da forma (a, b), portanto as imagens inversas serão também da forma (a, b) e este conjunto é aberto no espaço $\mathbb{R}_l$.

Analisando, com cuidado, este exemplo, é fácil perceber que a continuidade de uma função esta intimamente ligada a topologia do conjunto. Portanto não é um trabalho simples construir funções contínuas e muito menos construir homeomorfismos. Para tal Munkres (2000), apresenta algumas funções, onde estas são contínuas em espaços topológicos arbitrários.

Teorema 1.5.5 *Sejam X, Y, e Z espaços topológicos.*

1. *(Função Constante) Se $f : X \to Y$ associar todo X com apenas um ponto y_0 de Y, então f é contínua;*

2. *(Inclusão) Se A é um subespaço de X, então a função inclusão $j : A \to X$ é contínua;*

3. *(Composição) Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

4. *(Restrição do Domínio) Se $f : X \to Y$ é contínua, e se A é um subespaço de X, então a função restrita $f|_A : A \to Y$ é contínua.*

5. *(Restrição ou Expansão do Contradomínio) Seja $f : X \to Y$ contínua. Se Z é um subespaço de Y contendo conjunto imagem $f(X)$, a função $g : X \to Z$, obtida pela restrição do contradomíno de f, é contínua. Se Z é um espaço contendo Y como um subespaço, então a função $h : X \to Z$, obtida pela expansão do contradomínioo de f, é contínua.*

6. *(Formulação Local de Continuidade) A função $f : X \to Y$ será contínua se X puder ser escrito como uma união de conjuntos abertos U_α tal que $f|U_\alpha$ é contínua para cada α.*

Demonstração:

1. Seja $f(x) = y_0$ para todo x em X. Seja V um aberto em Y, logo $f^{-1}(V)$ será igual a X se $y_0 \in V$, e será igual a $\emptyset$ se $y_0 \notin V$. Em ambos os casos X e $\emptyset$ são abertos, logo f é contínua.

2. Seja U aberto em X. Logo $j^{-1}(U) = U \cap A$, pois a função j associa o subespaço A com ele mesmo. Portanto j será contínua, uma vez que $U \cap A$ é aberto em A, por definição de subespaço.

3. Se U é aberto em Z, logo $g^{-1}(U)$ é aberto em Y, pois g é contínua e como f é contínua e $g^{-1}(U)$ é um aberto de Y, logo $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é um aberto em X, mas pela teoria de conjunto sabemos que

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U),$$

portanto $g \circ f$ é contínua.

4. A função $f|A$ nada mais é do que a composição da função inclusão $j : A \to X$ com a própria função $f : X \to Y$, as quais são contínuas logo pelo item (3), a função $f \circ j : A \to Y$ também o será.

5. Seja $f : X \to Y$ contínua. Suponha $f(X) \subset Z \subset Y$, mostraremos que $g : X \to Z$ obtida a partir de f é contínua. Seja B um aberto em Z, como Z é subespaço de Y, logo $B = Z \cap U$ para algum U aberto em X. Como $f(X)$ está contida em Z, temos que pela teoria dos conjuntos

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B),$$

como $f^{-1}(U)$ é aberto em X, logo g é contínua.

Agora, considerando Y subespaço de Z, para mostrar que $h : X \to Z$ é contínua, basta tomar a função inclusão $j : Y \to Z$ e compor com a função $f : X \to Y$. Portanto, pelo item (3), a função $h = j \circ f$ é contínua.

6. Por hipótese temos que X pode ser escrito como a união de conjuntos abertos U_α, tal que $f|U_\alpha$ é contínua para cada α. Seja V um aberto em Y, assim a equação a seguir é valida

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f|U_\alpha)^{-1}(V),$$

pois ambas as expressões representam o conjunto dos pontos x em U_α tal que $f(x) \in V$. Como $f|U_\alpha$ é contínua então $f^{-1}(V) \cap U_\alpha$ é aberto em U_α e logo aberto em X. Mas

$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f^{-1}(V) \cap U_\alpha),$$

portanto $f^{-1}(V)$ é aberto em X e f é contínua.

$\blacksquare$

Agora vejamos uma forma de construir uma função contínua entre um espaço topológico e um produto cartesiano de dois espaços topológicos. Primeiramente, vejamos que o produto de dois espaços topológicos é um espaço topológico.

Definição 1.5.6 *Sejam X e Y espaços topológicos. A* ***topologia produto*** *em $X \times Y$ é a topologia que possui como base a coleção $\mathscr{B}$ de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é aberto em X e V é aberto em Y.*

Com esta definição, vamos ao teorema.

Teorema 1.5.7 *Seja $f : A \to X \times Y$ dada pela equação*

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Logo, a função f é contínua se, e somente se, as funções

$$f_1 : A \to X \qquad e \qquad f_2 : A \to Y$$

são contínuas.

As funções f_1 e f_2 são chamadas ***funções coordenadas*** *de f.*

Demonstração: Sejam $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ as projeções no primeiro e segundo fatores, respectivamente. Essas projeções são contínuas, pois dados U e V abertos em X e Y, respectivamente, temos que $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ e $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ são abertos. Note também que

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \qquad \text{e} \qquad f_2(a) = \pi_2(f(a)).$$

Sabendo tais fatos, vamos a devida demonstração. Se f é contínua, então f_1 e f_2 são, nada mais que, composições de funções contínuas, logo são contínuas.

Reciprocamente, suponha f_1 e f_2 sejam contínuas e seja $U \times V$ um elemento da base de $X \times Y$. Por propriedade de imagem inversa temos

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V),$$

e como $f_1^{-1}(U)$ e $f_2^{-1}(V)$ são abertos, pois f_1 e f_2 são contínuas, logo sua interseção é aberta. Logo, f é contínua. $\blacksquare$

Exemplos clássicos de funções que levam um espaço em um produto de espaços, são as parametrizações de curvas no plano, onde a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é definida da forma $f(t) = (x(t), y(t))$, e constantemente afirma-se que f é contínua se suas componentes x e y forem contínuas.

1.6 ESPAÇOS CONEXOS

Começaremos a sessão logo com a definição de espaços conexos, dada por Munkres (2000).

Definição 1.6.1 *Seja X um espaço topológico. Uma* ***separação*** *de X é um par de conjuntos abertos disjuntos e não vazios U, V de X, tal que a sua união é igual a X. O espaço X é dito* ***conexo*** *se não existir uma separação de X.*

Note que a conexidade é uma propriedade totalmente topologica. Pois está baseada completamente em termos de conjuntos de X. Porém, esta não é a única maneira de definir conexidade, outra definição que também é válida é a seguinte, utilizada por Lima (1970)

> Um espaço topológico X chama-se conexo quando X e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de X simultâneamente abertos e fechados.

Esta outra forma de definir conexidade também é verdadeira, e pode ser escrita em termos da definição utilizada por Munkres. Seja X um espaço conexo e seja A um subconjunto de X, que é simultâneamente aberto e fechado. Logo se tomarmos $U = A$ e $V = X - A$, temos que U e V são abertos disjuntos não vazios que a união é igual a X, portanto formam uma separação de X, absurdo pois X é conexo.

Ao definir conexidade em um subespaço Y de um espaço topológico X, a faremos de uma forma mais vantajosa que a própria definição. Esta é dada por Munkres (2000) conforme o seguinte lema.

Lema 1.6.2 *Se Y é um subespaço de X, uma separação de Y é um par de conjuntos disjuntos não vazios A e B, tal que a união é igual a Y se, e somente se, nenhum destes conjuntos possui pontos limites do outro. O subespaço Y é dito conexo se não existir tal separação.*

Demonstração: Suponha que A e B formem uma separação de Y. Então A é aberto e fechado em Y. O fecho de A em Y é o conjunto $\bar{A} \cap Y$, onde $\bar{A}$ é o fecho de A em X. Como A é fechado em Y, logo $A = \bar{A} \cap Y$. E pelo Teorema 1.4.18 $\bar{A} = A \cup A'$ com A' sendo o conjunto dos pontos limites de A, por fim como B é subconjunto de Y, logo $B = B \cap Y$. Assim, temos que

$$\emptyset = A \cap B = (\bar{A} \cap Y) \cap B = \bar{A} \cap B = (A \cup A') \cap B = (A \cap B) \cup (A' \cap B) = A' \cap B,$$

e portanto B não possui pontos limites de A. O mesmo aplica-se a B, logo $\bar{B} \cap A = \emptyset$, e A também não possui pontos limites de B.

Reciprocamente, suponha que A e B são disjuntos não vazios tais que sua união é igual a Y, nenhum deles contém pontos limites do outro, provaremos que A e B são abertos logo formam uma separação. Então $\bar{B} \cap A = \bar{A} \cap B = \emptyset$, portanto temos que

$$A \cup B = Y$$

$$Y \cap \bar{A} = (A \cup B) \cap \bar{A} = (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) = A,$$

assim A é fechado, seguindo a mesma lógica teremos que B também será fechado. Mas $A = Y - B$ e $B = Y - A$, logo estes também são abertos e formam uma separação de Y. ■

Para fixar as idéias vejamos alguns exemplos

Exemplo 1.6.3 *Seja X o espaço de dois pontos com a topologia indiscreta. Logo não existe separação de X, uma vez que os únicos conjuntos da topologia de X são X e $\emptyset$, portanto não existem dois conjuntos não vazios disjuntos tal que a união destes é igual a X.*

Exemplo 1.6.4 *Seja $Y = [-1, 0) \cup (0, 1]$ um subespaço da reta real $\mathbb{R}$. Os conjuntos $[-1, 0)$ e $(0, 1]$ formam uma separação para Y, pois são dois conjuntos abertos disjuntos não vazios que a união é igual a Y, ou pelo ponto de vista do Lema 1.6.2, $[-1, 0)$ não possui o ponto limite 0 de $(0, 1]$, e vice-versa.*

Suponha por um momento que tenhamos X um espaço não conexo. Em quais condições um subespaço Y de X é conexo? O seguinte lema trata deste fato, dado por Munkres (2000).

Lema 1.6.5 *Se os conjuntos C e D formam uma separação de X, e se Y é um subespaço conexo de X, então ou $Y \subset C$ ou $Y \subset D$.*

Demonstração: Como C e D são abertos em X, os conjuntos $C \cap Y$ e $D \cap Y$ são abertos em Y. Estes são disjuntos e sua união é igual a Y, logo se ambos forem não vazios, logo formariam uma separação para Y. Um absurdo, pois Y é conexo. Então ou $C \cap Y = \emptyset$ ou $D \cap Y = \emptyset$, e desta forma teriamos que ou $Y \subset D$ ou $Y \subset C$, respectivamente. ■

Vejamos um exemplo que exprime bem este lema.

Exemplo 1.6.6 *Seja o espaço $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ na topologia discreta. Logo X não é conexo, uma vez que é igual a união de dois conjuntos abertos disjuntos não vazios $A = [0, 1]$ e $B = [2, 3]$. Note que o subespaço $Y = [0, \frac{1}{2})$ é conexo e está contido inteiramente em A.*

Se no exemplo anterior selecionarmos os subespaços conexos $[0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, 1)$, $(2, 3)$ e unirmos o primeiro com o segundo, teremos o conjunto $[0, 1)$ que é conexo em X pelo Lema 1.6.2, mas se unirmos os três, mesmo todos sendo conexos, a sua união $[0, 1) \cup (2, 3)$ não será. Uma condição para que a união de espaços conexos seja também conexa é dada no teorema a seguir, enunciado por Munkres (2000).

Teorema 1.6.7 *A união de uma coleção de subespaços conexos de X, que possuem um ponto em comum, é conexa.*

Demonstração: Seja $\{A_\alpha\}$ uma coleção de subespaços conexos de X, seja p um ponto de $\bigcap A_\alpha$ e seja $Y = \bigcup A_\alpha$. Suponha que $Y = C \cup D$ forme uma separação de Y. Logo o ponto p pertence a C ou a D. Suponha que $p \in C$, logo como A_α é conexo, deve estar inteiramente contido em C ou D, pelo lema anterior, e portanto $A_\alpha \subset C$, pois $p \in A_\alpha$. Como $A_\alpha \subset C$ para todo α, logo $\bigcup A_\alpha \subset C$, contradizendo o fato de D ser não vazio. ■

Considere por um momento o subespaço $Y = (a, b)$ da reta real $\mathbb{R}$. Os seguintes subespaços também serão conexos: $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$. Isto, para quem já estudou o básico de cálculo, é trivial(na verdade, é assumido como trivial), mas o motivo pelo o qual isto é válido é o teorema a seguir, dado por Munkres (2000).

Teorema 1.6.8 *Seja A um subespaço conexo de X. Se $A \subset B \subset \bar{A}$, então B é também conexo.*

Demonstração: Seja A conexo e $A \subset B \subset \bar{A}$. Suponha que $B = C \cup D$ é uma separação de B. Pelo Lema 1.6.5, o conjunto A deve pertencer a C ou D. Logo $\bar{A} \subset \bar{C}$, pois $\bar{C}$ é um fechado contendo A. Como $\bar{C} \cap D = \emptyset$, logo $B \cap D = \emptyset$ o que é um absurdo, pois D é um subconjunto não vazio de B. ■

Outra propriedade muito útil dos espaços conexos, é a preservação da conexidade ao aplicarmos uma função contínua ao espaço. O fato é apresentado por Munkres (2000) através do teorema seguinte.

Teorema 1.6.9 *A imagem de um espaço conexo por uma função contínua é conexo.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ contínua e seja X conexo. Como visto no item (5) do Teorema 1.5.5 a restrição do contradomínio de f para $Z = f(X)$, ainda é contínua. Logo basta considerar a função

$$g : X \to Z$$

definida pela restrição do contradomínio de f, trivialmente g será sobrejetora. Então suponha que $Z = A \cup B$ seja uma separação de Z por dois conjuntos disjuntos abertos não vazios de Z (note que não estamos usando o fato de Z ser um subespaço de Y, estamos considerando Z como um espaço). Como A e B são abertos não vazios e disjuntos, logo

$g^{-1}(A)$ e $g^{-1}(B)$ também serão abertos disjuntos, pois é g é uma função e é contínua, e serão não vazios, pois g é sobrejetora. Sabendo também que como $Z = A \cup B$ então $X = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B)$ e portanto teremos uma separação de X, um absurdo, pois X é conexo. ■

Outra forma de associação de espaços conexos é pelo produto cartesiano. Neste caso teremos que o produto será conexo quando tivermos um produto finito de espaços conexos, ou quando tivermos um produto infinito de espaços conexos na topologia produto. Como o segundo fato não será de grande valia para nossos estudos, fixaremos nossas atenções ao produto finito, que é dado por Munkres (2000) no seguinte teorema.

Teorema 1.6.10 *Um produto cartesiano finito de espaços conexos será conexo.*

Demonstração: Mostraremos, primeiramente, que o fato é válido para o produto de dois espaços conexos, depois por indução mostraremos que é valido para qualquer produto finito de espaços conexos.

Fixe um ponto $a \times b$ pertencente ao produto $X \times Y$. Perceba que os espaços $X \times b$ e $a \times Y$ são homeomorfos a X e Y, respectivamente, portanto são conexos. Logo se definirmos

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

teremos que este espaço será conexo, pois é igual a união de dois conjuntos conexos com o ponto $x \times b$ em comum. Agora tomemos a união

$$\bigcup_{x \in X} T_x$$

de todos os espaços T_x. Uma vez que todos T_x são conexos e possuem o espaço $X \times b$ em comum, ou mais particularmente o ponto $a \times b$, que nos basta para aplicar o Teorema 1.6.7, e portanto teremos que esta união é conexa. Mas, o espaço $\bigcup_{x \in X} T_x$ nada mais é do que o produto $X \times Y$, que por sua vez será conexo.

Para provarmos que a propriedade é válida para um produto finito, consideremos o produto de espaços conexos

$$X_1 \times ... \times X_n.$$

Para $n = 1$ é trivial e para $n = 2$ acabamos de provar. Agora suponha que a propriedade valha para n, logo o espaço

$$Y = X_1 \times ... \times X_n$$

será conexo. Então devemos mostrar que a propriedade é valida para o produto de $n + 1$ espaços conexos

$$X_1 \times ... \times X_{n+1}.$$

Para tal basta ver que

$$X_1 \times ... \times X_{n+1} = (X_1 \times ... \times X_n) \times X_{n+1} = Y \times X_{n+1},$$

como Y e X_{n+1} são conexos, logo o seu produto também o será pelo o que provamos no início da demonstração. Portanto o produto cartesiano finito de espaços conexo é, de fato, conexo. ■

Agora com o intuito de enunciarmos uma nova forma de definir conexidade, mostremos que $\mathbb{R}$ é conexo. Para tal precisaremos da definição seguinte, dada por Munkres (2000).

Definição 1.6.11 *Um conjunto L ordenado* [1] *contendo mais que um elemento será chamado de **continuidade linear**, se satisfizer as seguintes propriedade:*

1. *Todo subconjunto limitado de L possui supremo,*
2. *Se $x < y$, então existe z tal que $x < z < y$.*

Com o teorema abaixo, teremos o necessário pra mostrar que $\mathbb{R}$ é conexo. Dado por Munkres (2000).

Teorema 1.6.12 *Se L é uma continuidade linear na topologia da ordem (Definição 2.1.1), então L e todos os seus intervalos e raios são conexos.*

A prova deste teorema, basea-se em teoria dos conjuntos e como não trará novos conhecimentos em topologia, esta será omitida. Nos preocuparemos apenas com o seu resultado.

Corolário 1.6.13 *A reta real $\mathbb{R}$ é conexa, bem como todos os seus intervalos e raios.*

Este corolário segue direto do teorema, uma vez que $\mathbb{R}$ é uma continuidade linear, pois todo intervalo limitado da reta $\mathbb{R}$ possui supremo, e que sendo $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, então tomando $z = \dfrac{x+y}{2}$ teremos que $x < z < y$. Por fim, sabemos que a topologia usual em $\mathbb{R}$ é a mesma que a topologia de ordem. Portanto satisfaz as premissas do Teorema 1.6.12 e então $\mathbb{R}$ é conexo, assim como seus intervalos e raios.

Neste ponto é muito importante analizar a generalização do Teorema do Valor Intermedipario, que associa espaços conexos com conjuntos ordenados. Vejamos a o teorema apresentado por Munkres (2000).

Teorema 1.6.14 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua , onde X é um espaço conexo e Y é um conjunto ordenado. Se a e b são dois pontos distintos de X e r é um ponto de Y tal que $f(a) < r < f(b)$. Então, existe um ponto $c \in X$ tal que $f(c) = r$*

[1] Munkres (2000) define conjuntos simplesmente ordenado como: Um conjunto X é dito simplesmente ordenado se possuir uma relação que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Demonstração: Assumindo as hipóteses do teorema, e considerando os conjuntos a seguir:

$$A = f(X) \cap (-\infty, r) \qquad \text{e} \qquad B = f(X) \cap (r, +\infty).$$

Temos que A e B são disjuntos e não vazios, pois $f(a) \in A$ e $f(b) \in B$. Ambos conjuntos são abertos em $f(X)$, pois são iguais a interseção de um raio aberto com o conjunto $f(X)$. Se não existir um ponto c tal que $f(c) = r$, então $f(X) = A \cup B$ é uma separação de $f(X)$, contradizendo o fato de que a imagem de um espaço conexo por uma função contínua é conexa. ■

Se no teorema anterior tomarmos X como um intervalo fechado de $\mathbb{R}$ e Y como a própria reta real $\mathbb{R}$, teremos o caso especial que é estudo em cálculo e análise.

Sabendo agora destes fatos, podemos construir uma nova maneira de definir se espaços são conexos. Dado por Munkres (2000) a seguir.

Definição 1.6.15 *Dado dois pontos x, y pertencentes ao espaço topológico X, um **caminho** em X de x para y é uma função contínua $f : [a, b] \to X$ que leva um intervalo fechado de $\mathbb{R}$ em X, tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$. Um espaço X é dito **conexo por caminhos** se todo par de pontos de X podem ser ligados por um caminho em X.*

É fácil ver que todo espaço conexo por caminhos é conexo. Para tal, suponha que $X = A \cup B$ seja uma separação de X e seja $f : [a, b] \to X$ uma caminho em X. Como f é contínua, logo a imagem do intervalo conexo $f^{-1}([a, b])$ é conexa, e portanto está contida em A ou B. Assim sendo, não existe nenhum caminho ligando pontos de A a pontos de B, absurdo pois X é conexo por caminhos.

Apesar de conexidade por caminhos ser uma nova forma de verificarmos conexidade, isto não implica que todo espaço conexo seja conexo por caminhos, um exemplo deste fato é I_0^2 o quadrado unitário fechado na topologia do dicionário [2]. Não mostraremos com detalhes que este conjunto é conexo e não conexo por caminhos, pois para tal precisaremos de algumas propriedades que não apresentamos aqui.

Devemos explicitar aqui que apresentamos a definição de conexidade por caminhos, não por curiosidade, mas pela sua semelhança com o lema de Uryshon, que veremos mais tarde.

[2]Exemplo disponível no livro *Topology* de James Munkres, p. 156.

Capítulo 2

ALGUMAS TOPOLOGIAS IMPORTANTES

2.1 TOPOLOGIA DA ORDEM

Se X é um conjunto ordenado, logo existe uma topologia padrão para X, definida pela relação de ordem. Tal topologia é chamada de *topologia da ordem*.

Suponha que X é um conjunto com a relação de ordem simples $<$. Dados dois elementos a e b de X tal que $a < b$, existem 4 possíveis subconjuntos de X definidos a partir destes dois pontos. Estes conjuntos são chamados de intervalos e são da seguinte forma:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$$

Apesar desta notação ser muito familiar a usada na reta real, esta não se limita apenas a $\mathbb{R}$, pois X é um conjunto ordenado arbitrário. Apesar da abrangência desta notação, algumas noções são idênticas, como por exemplo, os conjuntos do primeiro tipo são chamados **intervalos abertos**, os do quarto tipo são **intervalos fechados**, e os do segundo e terceiro tipo são **intervalos meio-abertos**. O fato de termos os intervalos chamados de abertos não é por acaso, eles serão também os próprios conjuntos abertos ao criarmos topologias em X. Segue a definição segundo Munkres (2000).

Definição 2.1.1 *Seja X um conjunto com uma relação de ordem simples. Suponha X com mais de um elemento. Seja $\mathscr{B}$ a coleção de todos os conjuntos da seguinte forma:*

1. *Todos os intervalos abertos $(a, b) \in X$.*

2. Todos os intervalos da forma $[a_0, b)$, onde a_0 é o menor elemento (se existir) de X.

3. Todos os intervalos da forma $(a, b_0]$, onde b_0 é o maior elemento (se existir) de X.

A coleção $\mathscr{B}$ é uma base para uma topologia em X, que é chamada de ***topologia da ordem****.*

É notável que se X não possui um menor elemento, então não há conjuntos da forma (2) na base $\mathscr{B}$. De forma análoga não existirão conjuntos da forma (3) na base $\mathscr{B}$ se não existir um maior elemento em X.

Exemplo 2.1.2 *O conjunto $\mathbb{Z}_+$ é um conjunto ordenado com menor elemento. A topologia de ordem em $\mathbb{Z}_+$ é a mesma que a topologia discreta, basta notar que para todo conjunto unitário, se $n > 1$, logo o conjunto $\{n\} = (n-1, n+1)$ é um elemento da base, e se $n = 1$, o conjunto $\{1\} = [1, 2)$ é um elemento da base.*

Agora tome novamente o conjunto Z_+ na topologia de ordem, a definição de topologia gerada diz que esta é igual a coleção de todas as uniões de elementos da base, então poderíamos definir um subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ na forma $A = \{x | x > 1\}$, note que $A = \bigcup_{n>1}(n-1, n+1)$, logo é aberto, pois é igual a união de elementos da base e pertence a topologia $\mathscr{T}$. Munkres (2000) define tais conjuntos da seguinte forma:

Definição 2.1.3 *Se X é um conjunto ordenado, e a é um elemento de X, então existem quatro subconjuntos de X que são chamados de* ***raios*** *determinador por a. Eles são o seguinte:*

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$

Conjuntos da primeira e da segunda forma são chamados de ***raios abertos****, e conjuntos da terceira e quarta forma são chamados de* ***raios fechados****.*

Note que o termo "*aberto*" não é utilizado como convenção, e sim porque os raios da forma $(a, +\infty)$ de X são, de fato, abertos na topologia da ordem, basta considerá-los como a união de todos os elementos da base da forma (a, x) com $x > a$, e como sabemos, a união arbitrária de conjuntos abertos de uma topologia gera um elemento da topologia, que por sua vez é aberto.

Agora tome a coleção $\mathscr{S}$ de todos os raios abertos em X. Logo $\mathscr{S}$ forma uma sub-base para a topologia da ordem em X. Dado as sub-bases $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ com $a < b$, logo $(-\infty, b) \cup (a, +\infty) = X$, e portanto a união de todos os elementos de $\mathscr{S}$ é igual a X. Por fim, notemos que todo intervalo (a, b) de X é igual a intersecção dos raios $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$. Assim temos que a sub-base $\mathscr{S}$ gera a topologia da ordem.

2.2 TOPOLOGIA PRODUTO $X \times Y$

Nesta seção veremos com mais detalhes a topologia formada ao efetuarmos o produto cartesiano entre espaços topológicos. Sejam X e Y espaços topológicos, considere o produto cartesiano $X \times Y$, vejamos agora algumas propriedades desta topologia, juntamente com a sua definição por Munkres (2000).

Definição 2.2.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. A* ***topologia produto*** *em $X \times Y$ é a topologia que possui como base a coleção $\mathscr{B}$ de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é aberto em X e V é aberto em Y.*

Verifiquemos se $\mathscr{B}$ é uma base. A primeira condição é trivial, pois $X \times Y$ é um elemento da base. A segunda condição não é trivial, porém é fácil de checar a veracidade, já que a interseção de dois elementos da base $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ é um outro elemento da base. Temos que

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

como $U_1 \cap U_2$ é aberto em X e $V_1 \cap V_2$ é aberto em Y, logo $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ pertence a coleção $\mathscr{B}$.

Agora, o que aconteceria se as topologias X e Y, fossem dadas por bases? O teorema a seguir expõe este questionamento.

Teorema 2.2.2 *Se $\mathscr{B}$ é uma base para a topologia X e $\mathscr{C}$ é uma base para a topologia Y, logo a coleção*

$$\mathscr{D} = \{B \times C \mid B \in \mathscr{B}, C \in \mathscr{C}\}$$

é uma base para a topologia $X \times Y$.

Demonstração: Como já sabemos qual é a topologia definida sobre $X \times Y$, e queremos mostrar que $\mathscr{D}$ é uma base para esta topologia, então basta aplicar o Lema 1.2.3. Dado um conjunto aberto W de $X \times Y$ e um ponto $x \times y$ de W, por definição de topologia produto existe um elemento da base $U \times V$ tal que $x \times y \in U \times V \subset W$. Como $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ são bases para X e Y, respectivamente, podemos escolher um elemento B de $\mathscr{B}$ tal que $x \in B \subset U$, e um elemento C de $\mathscr{C}$ tal que $y \in C \subset V$. Logo $x \times y \in B \times C \subset W$. Assim a coleção $\mathscr{D}$ satisfaz as condições do Lema 1.2.3, logo $\mathscr{D}$ é uma base para $X \times Y$. ■

Até o momento, definimos uma base para a topologia produto, será que de alguma forma podemos definir uma sub-base para a topologia produto? A resposta para tal pergunta é dada pelo teorema a seguir ,porém antes definiremos uma certa função chamada projeção, que por Munkres (2000) é dada na forma.

Definição 2.2.3 *Seja $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida pela equação*

$$\pi_1(x, y) = x;$$

e seja $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida pela equação

$$\pi_2(x, y) = y.$$

As aplicações π_1 e π_2 são chamadas de projeções de $X \times Y$ em X e Y, respectivamente.

Se U é um subconjunto aberto de X, então

$$\pi_1^{-1}(U) = U \times Y,$$

da mesma forma, se V é um subconjunto aberto de Y, então

$$\pi_2^{-1}(V) = X \times V,$$

note que ambas imagens inversas das projeções são subconjuntos abertos em $X \times Y$. Perceba também que a interseção destes dois conjuntos é o conjunto $U \times V$. Esse fato nos leva a definir uma sub-base para a topologia produto, Munkres (2000) ilustra tal fato através do teorema a seguir.

Teorema 2.2.4 *A coleção*

$$\mathscr{S} = \{\pi_1^{-1}(U) | U \textit{aberto em } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) | V \textit{aberto em } Y\}$$

é uma sub-base para a topologia produto em $X \times Y$.

Demonstração: Seja $\mathscr{T}$ a topologia produto em $X \times Y$ e seja $\mathscr{T}'$ a topologia gerada por $\mathscr{S}$. Obviamente todo elemento de $\mathscr{S}$ é um elemento de $\mathscr{T}$, assim como uniões arbitrárias e interseções finitas de elementos de $\mathscr{S}$. Assim $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. Por outro lado, todo elemento da base $U \times V$ de $\mathscr{T}$ é uma interseção finita de elementos de $\mathscr{S}$, pois como vimos

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

Logo $U \times V$ pertence a $\mathscr{T}'$, assim $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$, portanto $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. ∎

Até então, definimos uma topologia no produto $X \times Y$ de dois espaços topológicos. Neste momento veremos formas de generalizar esta topologia, mais especificamente, duas formas a **topologia das caixas** e a **topologia produto**.

Antes de iniciarmos nosso devido estudo destas topologias, vamos generalizar algumas noções de produtos cartesianos. Munkres (2000) nos dá as seguintes definições.

Definição 2.2.5 *Seja J um conjunto de índices. Dado um conjunto X, definiremos uma **J-upla** de elementos de X como sendo a função $\mathbf{x} : J \to X$. Se α é um elemento de J, denotaremos o valor de $\mathbf{x}$ em α por x_α ao invés de $\mathbf{x}(\alpha)$ e também diremos que esta é a*

*α-ésima **coordenada** de $\mathbf{x}$. Além disso, denotaremos a função $\mathbf{x}$ por*

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}.$$

O conjunto de todas as J-uplas de elementos de X será X^J

Definição 2.2.6 *Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família indexada de conjuntos e seja $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$. O **produto cartesiano** dessa família indexada, denotado por*

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha,$$

é definido como sendo o conjunto de todas as J-tuplas $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de elementos de X tal que $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Ou seja, será o conjunto de todas as funções

$$\mathbf{x} : J \to \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

tal que $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

Comodamente denotaremos o produto apenas por $\prod(A_\alpha)$ e um elemento genérico por (x_α).

Agora vejamos a definição, por Munkres (2000), da topologia das caixas.

Definição 2.2.7 *Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família indexada de espaços topológicos. Tomemos como base para a topologia no produto*

$$\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

a coleção de todos os conjuntos da forma

$$\prod_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

*onde U_α é aberto em X_α, para cada $\alpha \in J$. A topologia gerada por esta base é chamada de **topologia das caixas**.*

Vejamos agora uma sub-base para o mesmo produto citado na definição anterior. Primeiramente, seja a função

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$$

de forma que para cada elemento de $\prod X_\alpha$, esta destaca a β-ésima coordenada,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta.$$

Tal função é chamada de **projeção**, nada mais que uma generalização, da projeção que trabalhamos até então, para um produto arbitrário.

Vamos a definição da topologia pela sub-base.

Definição 2.2.8 *Seja $\mathscr{S}_\beta$ a seguinte coleção:*

$$\mathscr{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) | U_\beta \text{ é aberto em } X_\beta\}$$

e seja $\mathscr{S}$ a união de todas as coleções dessa forma

$$\mathscr{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathscr{S}_\beta.$$

*A topologia gerada pela sub-base $\mathscr{S}$ é chamada **topologia produto**.*

Porém, se considerarmos somente as definições, a primeira mão, não é muito fácil distinguir as duas topologias. Uma forma mais fácil de escrever e diferenciar a topologia das caixas da topologia produto é dada por Munkres (2000) da seguinte maneira:

Teorema 2.2.9 *A topologia das caixas em $\prod X_\alpha$ tem como base todos os conjuntos da forma $\prod U_\alpha$, onde U_α é aberto em X_α para cada α. A topologia produto em $\prod X_\alpha$ tem como base todos os conjuntos da forma $\prod U_\alpha$, onde U_α é aberto em X_α para cada α e U_α é igual a X_α, exceto para uma quantidade finita de α.*

Formalmente não iremos demonstrar este teorema, apenas utilizaremos ele como uma nova forma, mais fácil, de definir as duas topologias.

Apenas observando o Teorema 2.2.9, vemos que a topologia das caixas é mais fina que a topologia produto. Seja $\prod U_\alpha$, com $U_\alpha \neq X_\alpha$ para $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ um elemento da base da topologia produto, logo este também é um elemento da base da topologia das caixas, uma vez que é o produto de conjuntos abertos.

Um teorema muito importante, que relaciona o fecho de um produto com o produto dos fechos que será de grande valia para o estudo dos axiomas de separação, é o seguinte, dado por Munkres (2000).

Teorema 2.2.10 *Seja $\{X_\alpha\}$ uma família indexada de espaços e seja $A_\alpha \subset X_\alpha$ para cada α. Se $\prod X_\alpha$ é dada pela topologia das caixas ou pela topologia produto, então*

$$\prod \bar{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}.$$

Demonstração: Seja $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ um ponto de $\prod \bar{A}_\alpha$, mostraremos que $\mathbf{x} \in \overline{\prod A_\alpha}$. Seja $U = \prod U_\alpha$ um elemento da base de ambas topologia das caixas e topologia produto que contém $\mathbf{x}$. Como $x_\alpha \in \bar{A}_\alpha$, então para cada α podemos escolher $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$. Logo

$\mathbf{y} = (y_\alpha)$ pertence a ambos U e $\prod A_\alpha$. Como U é arbitrário, então segue que $\mathbf{x}$ pertence ao fecho de $\prod A_\alpha$.

Reciprocamente, suponha que $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ pertence ao fecho de $\prod A_\alpha$, em ambas topologias. Mostraremos que dado um índice β, teremos $x_\beta \in \bar{A}_\beta$. Seja V_β um conjunto aberto arbitrário de X_β contendo x_β. Como $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ é aberto em $\prod X_\alpha$, logo contém um ponto $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ de $\prod A_\alpha$. Então y_β pertence a $V_\beta \cap A_\beta$. Portanto $x_\beta \in \bar{A}_\beta$. ■

A partir deste momento sempre que considerarmos o produto $\prod X_\alpha$, assumiremos que a topologia em questão é a topologia produto. No teorema a seguir, encontramos um dos motivos pelo qual escolhemos a topologia produto em detrimento da topologia das caixas, no momento em que tentamos generalizar o Teorema 1.5.7, notamos que para a topologia produto a generalização deste teorema é válida, mas o mesmo não ocorre com a topologia das caixas. Vejamos o teorema enunciado por Munkres (2000).

Teorema 2.2.11 *Seja $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ dada pela equação*

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J},$$

onde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Seja $\prod X_\alpha$ com a topologia do produto. Então, f é contínua se, e somente se cada função f_α é contínua.

Demonstração: Seja π_β a projeção do produto no seu β-ésimo fator. A função π_β é contínua, pois se U_β é um aberto em X_β, o conjunto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ é aberto em $\prod X_\alpha$, uma vez que este é um elemento da base da topologia produto em $\prod X_\alpha$. Suponha que f seja contínua, logo a função $f_\beta = \pi_\beta \circ f$ é uma composição de funções contínuas logo é contínua.

Reciprocamente, suponha que cada função coordenada f_α é contínua. Basta mostrarmos que a imagen inversa de um elemento da sub-base de $\prod X_\alpha$ é aberto. Tome o mais simples elemento da sub-base, $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, onde β é algum índice, e U_β é aberto em X_β. Agora

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta(U_\beta),$$

pois $f_\beta = \pi_\beta \circ f$. Como f_β é contínua, logo $f_\beta(U_\beta)$ é aberto em A, portanto f é contínua. ■

Vejamos agora um contra exemplo, que nos dá perfeitamente a ideia de como tal generalização não é válida para a topologia das caixas.

Exemplo 2.2.12 *Considere $\mathbb{R}^\omega$ como sendo o produto infinito enumerável de $\mathbb{R}$ com este mesmo. Ou seja,*

$$\mathbb{R}^\omega = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} X_n,$$

onde $X_n = \mathbb{R}$ *para cada* n*. Agora considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ *definida por*

$$f(t) = (t, t, t, ...);$$

a n*-ésima coordenada de* f *é a função* $f_n(t) = t$*. Cada função coordenada é contínua, logo* f *será contínua se* $\mathbb{R}^\omega$ *for dado na topologia produto. Mas* f *não será contínua, se considerarmos* $\mathbb{R}^\omega$ *na topologia das caixas. Considere o elemento da base*

$$B = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times ...$$

da topologia das caixas. Mostraremos que $f^{-1}(B)$ *não é aberto em* $\mathbb{R}$*. Se* $f^{-1}(B)$ *fosse aberto em* $\mathbb{R}$*, o primeiro deveria conter algum intervalo da forma* $(-\delta, \delta)$ *envolta de* 0*. Isso significa que* $f((-\delta, \delta)) \subset B$*, assim se aplicarmos* π_n *a ambas partes da inclusão,*

$$f_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

para todo n*, uma contradição, pois para qualquer* $\delta > 0$ *que escolhermos, existirá* n_0 *tal que, se* $n > n_0$ *teremos que* $(-\delta, \delta)$ *não estará contido em* $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$*.*

Neste exemplo fica bem claro, que por mais fácil que seja definir a topologia das caixas, não é tão fácil trabalhar com a mesma. Uma propriedade que, de início, parecia tão trivial a ambas topologias, passou nem ao menos ser válida para uma delas. Este fato poderia ser considerado, além de necessário, quase que suficiente para a escolha da topologia produto, uma vez que funções contínuas na topologia das caixas, não necessariamente possuem componentes contínuas.

2.3 TOPOLOGIA MÉTRICA

Uma das mais importantes topologias a serem tratadas, é a topologia métrica. Desde criança, intuitivamente, trabalhamos com espaços métricos, pois a partir do momento que usamos uma régua para medir o comprimento de uma corda, estamos na verdade medindo a distância entre os pontos extremos da corda. Este fato de medir distância entre pontos é que nos leva a definir a métrica, e a partir desta definir a topologia métrica. Vejamos a definição dada por Munkres (2000).

Definição 2.3.1 *Uma* ***métrica*** *em um conjunto* X *é uma função*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades:

1. *$d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$; a igualdade é válida se $x = y$.*

2. *$d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$.*

3. *(Desigualdade Triangular) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, para todo $x, y, z \in X$.*

Dada uma métrica d em X, o valor $d(x,y)$ será chamado de **distância** entre x e y na métrica d. Dado $\epsilon > 0$, o conjunto

$$B_d(x,\epsilon) = \{y | d(x,y) < \epsilon\}$$

será formado por todos os pontos y que possuem a distância até x menor que ϵ. Este conjunto é chamado de **ϵ-bola centrada em x**. Comumente, apenas escreveremos $B(x,\epsilon)$, a não ser que estejamos trabalhando com mais de uma métrica.

Agora vejamos a definição da topologia métrica, apresentada por Munkres (2000).

Definição 2.3.2 *Se d é uma métrica no conjunto X, então a coleção de todas as ϵ-bolas $B_d(x,\epsilon)$, onde $x \in X$ e $\epsilon > 0$, é uma base para uma topologia em X, chamada de **topologia métrica** induzida por d.*

A primeira condição de base é trivial, uma vez que $x \in B_d(x,\epsilon)$ para qualquer $\epsilon > 0$. Antes de checarmos a segunda condição, mostremos que se y é um ponto de $B(x,\epsilon)$, então existe $B(y,\delta)$ contida em $B(x,\epsilon)$. Defina $\delta = \epsilon - d(x,y)$, como $y \in B(x,\epsilon)$, então δ é um número positivo. Tome $z \in B(y,\delta)$, logo $d(y,z) < \epsilon - d(x,y)$, assim reorganizando a inequação e aplicando a desigualdade triangular temos

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \epsilon,$$

portanto $z \in B(y,\delta) \subset B(x,\epsilon)$.

Agora facilmente mostramos a segunda condição de base. Sejam B_1 e B_2 dois elementos da base, e seja $y \in B_1 \cap B_2$. Acabamos de mostrar que podemos escolher δ_1 e δ_2 tal que $B(y,\delta_1) \subset B_1$ e $B(y,\delta_2) \subset B_2$. Tomando δ como sendo o menor entre δ_1 e δ_2, concluímos que $B(y,\delta) \subset B_1 \cap B_2$.

Exemplo 2.3.3 *A métrica padrão na reta real $\mathbb{R}$ é definida pela equação*

$$d(x,y) = |x - y|.$$

A topologia gerada por d é a mesma que a topologia da ordem. Para tal, tome um elemento da base da topologia da ordem (a,b), o elemento da base da topologia métrica, que é igual a (a,b) é o elemento $B(x,\epsilon)$ onde

$$x = (a+b)/2 \qquad e \qquad \epsilon = (b-a)/2.$$

Agora, o elemento da base da topologia da ordem que é igual a $B(x,\epsilon)$ é o intervalo $(x-\epsilon, x+\epsilon)$. Logo são a mesma topologia.

Vejamos, agora, como Munkres (2000) define a classifica os espaços métricos.

Definição 2.3.4 *Se X é um espaço topológico, X é dito **metrizável** se existir uma métrica d que induz a topologia de X. Um **espaço métrico** é um espaço metrizável X unido de sua métrica d que gera a topologia em X.*

A maioria dos espaços importantes para os matemáticos, são metrizáveis, mas nem todos. Munkres (2000) afirma em seu livro que a metrização é altamente desejada a qualquer espaço, pois sua existência fornece uma importantíssima ferramenta no auxílio de demonstrações de teoremas sobre o espaço.

Como diz Munkres (2000), embora o estudo de espaços métricos pertença mais a área de análise do que própriamente a área de topologia, a metrização depende unica e exclusivamente da topologia em questão, porém as propriedades da métrica do espaço, em geral, não dependem da topologia.

Por agora, definiremos algumas métricas em espaços metrizáveis, e trabalharemos em cima da topologia induzida por tais.

Vejamos a primeira métrica, definida em relação aos conjuntos limitados, que por Munkres (2000) é dada na forma do seguinte teorema.

Teorema 2.3.5 *Seja X um espaço métrico com métrica d. Defina $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ pela equação*

$$\bar{d}(x,y) = min\{d(x,y), 1\}.$$

Então, $\bar{d}$ é uma métrica que induz a mesma topologia que d.

A métrica $\bar{d}$ é chamada **métrica limitada padrão** correspondente a d.

Demonstração: Primeiro, verificamos se $\bar{d}$ atende as condições de métrica. A primeira e segunda são triviais, pois para quaisquer $x, y \in X$ teremos $0 \leq \bar{d}(x,y) \leq 1$, uma vez que $\bar{d}(x,y)$ será o menor valor entre $d(x,y)$ e 1, logo se $x = y$ então $\bar{d}(x,y) = d(x,y) = 0$. E o fato de que $\bar{d}(x,y) = \bar{d}(y,x)$, provém da própria definição de $\bar{d}$, uma vez que

$$\bar{d}(x,y) = min\{d(x,y), 1\} = min\{d(y,x), 1\} = \bar{d}(y,x).$$

Nos falta mostrar que vale a desigualdade triangular

$$\bar{d}(x,z) \leq \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z).$$

Se $d(x,y) \geq 1$ ou $d(y,z) \geq 1$, então o lado direito da equação anterior é no mínimo 1, pela definição da métrica $\bar{d}$, portanto o lado esquerdo da mesma equação será no máximo 1, novamente pela definição da métrica $\bar{d}$, assim a desigualdade é satisfeita. Agora devemos considerar o caso onde $d(x,y) < 1$ e $d(y,z) < 1$. Ora, mas neste caso teremos a própria desigualdade triangular de d:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z).$$

Sabemos que $\bar{d}(x,z) \leq d(x,z)$ pela própria definição de $\bar{d}$, portanto a desigualdade triangular é válida para $\bar{d}$.

Agora note que em qualquer espaço métrico, a coleção de todas as ϵ-bolas com $\epsilon < 1$ forma uma base para a topologia métrica, basta ver que todo elemento da base contendo x contem tal ϵ-bola centrada em x. Assim temos que d e $\bar{d}$ induzem a mesma topologia em x, pois a coleção das ϵ-bolas com $\epsilon < 1$ é a mesma para as duas métricas. ■

Vejamos, na definição a seguir, duas métricas distintas sobre o espaço $\mathbb{R}^n$, definidas por Munkres (2000) da seguinte forma:

Definição 2.3.6 *Dado* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, definiremos a* ***norma*** *de* $\mathbf{x}$ *pela equação*

$$||x|| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2};$$

e definiremos a ***métrica euclidiana*** d *em* $\mathbb{R}^n$ *pela equação*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = [(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2]^{1/2}.$$

Por fim, definiremos como ***métrica quadrada*** ρ *pela equação*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}.$$

Provar que d e ρ são métricas em $\mathbb{R}^n$ requer bastante trabalho, principalmente em provar a desigualdade triangular, mas nosso interesse é na topologia gerada por tais métricas, e não na métrica em si. Portanto omiteremos a prova de que d e ρ são métricas. Apenas utilizaremos este fato.

Agora verifiquemos que d e ρ induzem a topologia usual em $\mathbb{R}^n$. Para tal, primeiramente necessitaremos do lema a seguir, enunciado por Munkres (2000).

Lema 2.3.7 *Sejam* d *e* d' *duas métricas no conjunto* X*, e sejam* $\mathscr{T}$ *e* $\mathscr{T}'$ *suas topologias induzidas, respectivamente. Então,* $\mathscr{T}'$ *é mais fina que* $\mathscr{T}$ *se, e somente se, para cada* $x \in X$ *e cada* $\epsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon).$$

Demonstração: Suponha que $\mathscr{T}'$ é mais fina que $\mathscr{T}$. Dado o elemento da base $B_d(x,\epsilon)$ de $\mathscr{T}$, pelo Lema 1.2.4, existe um elemento da base de $\mathscr{T}'$ tal que $x \in B' \subset$

$B_d(x, \epsilon)$. Contido em B' podemos escolher uma bola $B_{d'}(x, \delta)$ centrada em x, pois B' é aberto.

Reciprocamente, suponha que a condição ϵ-δ é satisfeita. Dado um elemento B da base de $\mathscr{T}$ contendo x, podemos escolher uma bola $B_d(x, \epsilon)$, em B, centrada em x. Pela condição ϵ-δ, existe δ tal que $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. Logo pelo Lema 1.2.4, temos que $\mathscr{T}'$ é mais fina que $\mathscr{T}$. ■

Agora vejamos como Munkres (2000) apresenta as topologias induzidas pelas métricas euclidiana e quadrada em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3.8 *As topologias em $\mathbb{R}^n$ induzidas pela métrica euclidiana d e pela métrica quadrada ρ são a mesma que a topologia produto em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Seja $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ dois pontos de $\mathbb{R}^n$. É fácil ver que

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

pois

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq [(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_i - y_i)^2 + ... + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$$

portanto

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

A segunda desigualdade vem do fato de que $\sqrt{(x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo n, assim

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2]^{1/2} \leq [(x_i - y_i)^2 + ... + (x_i - y_i)^2]^{1/2} = \sqrt{n}\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

.

A primeira desigualdade mostra que

$$B_d(\mathbf{x}, \epsilon) \subset B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$$

para todo $\mathbf{x}$ e ϵ, como $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$, então $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$. De forma similar a segunda desigualdade nos dá

$$B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(\mathbf{x}, \epsilon)$$

para todo $\mathbf{x}$ e ϵ. Portanto pelo lema anterior a topologia induzida por ambas as métricas é a mesma.

Agora mostraremos que a topologia produto é a mesma que a topologia gerada por ρ. Seja

$$B = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$$

um elemento da base da topologia produto e seja $\mathbf{x}$ um elemento de B. Para cada i, existe um ϵ_i tal que

$$(x_i - \epsilon_i, x_i + \epsilon_i) \subset (a_i, b_i);$$

escolha $\epsilon = min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$. Então temos que $B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon) \subset B$. Portanto a topologia induzida por ρ é mais fina que a topologia produto.

Reciprocamente, seja $B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$ um elemento da base da topologia induzida por ρ. É trivial que o próprio conjunto $B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon)$ é um elemento da topologia produto, pois

$$B_\rho(\mathbf{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, y_1 - \epsilon) \times ... \times (x_n - \epsilon, y_n - \epsilon).$$

Assim a topologia produto e a topologia gerada por ρ são as mesmas, e portanto são iguais a topologia gerada por d. ■

Vimos que ρ e d induzem a mesma topologia em $\mathbb{R}^n$, porém o mesmo não acontece se generalizarmos estas mesmas métricas para o produto infinito $\mathbb{R}^\omega$. Basta ver que as generalizações

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} \qquad \text{e} \qquad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = sup\{|x_i - y_i|\}$$

não fazem muito sentido, a primeira porque uma série pode ser divergente e a segunda porque não teremos nada que garanta que $|x_i - y_i|$ será de fato a maior das distâncias. Porém, se substituirmos a métrica usual pela métrica limitada, esta será de fato uma métrica em $\mathbb{R}^\omega$. Munkres (2000), na definição seguinte, impõe uma métrica a $\mathbb{R}^J$, mais genérico que $\mathbb{R}^\omega$, com base na métrica limitada.

Definição 2.3.9 *Dado um conjunto de índices J e dado os pontos $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ de $\mathbb{R}^J$, definiremos a métrica $\bar{\rho}$ em $\mathbb{R}^J$ pela equação*

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) | \alpha \in J\},$$

onde $\bar{d}$ é a métrica padrão limitada em $\mathbb{R}$. De fato, $\bar{\rho}$ é uma métrica, chamada de ***métrica uniforme*** *em $\mathbb{R}^J$, e a topologia induzida por tal é chamada de* ***topologia uniforme****.*

A relação entre a topologia uniforme e a topologia produto é apresentada pelo teorema a seguir, dado por Munkres (2000).

Teorema 2.3.10 *A topologia uniforme em $\mathbb{R}^J$ é mais fina que a topologia produto.*

Demonstração: Seja um ponto $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e um elemento da base da topologia produto $\prod U_\alpha$ contendo $\mathbf{x}$. Seja $\alpha_1, ..., \alpha_n$ os indices onde $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. Então, para cada i, escolha $\epsilon_i > 0$ de forma que a ϵ_i-bola centrada em x_{α_i} na métrica $\bar{d}$ está contida em U_{α_i}.

Podemos fazer isto, pois U_{α_i} é aberto em $\mathbb{R}$. Agora escolha $\epsilon = min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$, então a ϵ-bola centrada em $\mathbf{x}$ na métrica $\bar{\rho}$ está contida em $\prod U_\alpha$. Logo se $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^J$ tal que $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon$, então $\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \epsilon$ para todo α, portanto $\mathbf{y} \in \prod U_\alpha$. Portanto, segue que a topologia uniforme é mais fina que a topologia produto. ■

Com todos estes conhecimentos sobre espaços métricos, temos uma base para dar início ao estudo das relações entre os espaços métricos e os conceitos estudados até o momento.

Começaremos com o estudo de funções contínuas em espaços métricos. Primeiramente, vamos a relação entre uma função contínua e a métrica do espaço, dado por Munkres (2000).

Teorema 2.3.11 *Seja $f : X \to Y$ e sejam X e Y metrizáveis com as respectivas métricas d_X e d_Y. Então, a continuidade de f é equivalente a necessidade de que dado $x \in X$ e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

A relação ϵ-δ já é a muito tempo conhecida, porém aqui apenas fizemos uma adaptação para qualquer espaço métrico. A demonstração será omitida, uma vez que está já foi provada várias vezes durante a vida acadêmica.

Ao estudar topologia, deve-se tomar cuidado ao tentar generalizar fatos de análise para espaços arbitrários, apesar de algumas propriedades serem válidas para alguns casos, nem sempre serão válidas para todos. Um exemplo disto, é a propriedade de que se um ponto x pertence ao fecho de um conjunto, então existe uma sequência de pontos, neste conjunto, convergindo para este ponto. Porém, este fato não é verdadeiro em geral, apesar de ser válido para espaços métricos. Vejamos este fato no lema a seguir, proposto por Munkres (2000).

Lema 2.3.12 *Seja X um espaço topológico e seja $A \subset X$. Se existir uma sequência de pontos de A convergindo para x, então $x \in \bar{A}$. A recíproca é válida se X for metrizável.*

Demonstração: Suponha que $x_n \to x$, onde $x_n \in A$. Então toda vizinhança U de x contém um ponto de A, então $x \in \bar{A}$ pelo Teorema 1.4.12. Reciprocamente, suponha X metrizável e um ponto $x \in \bar{A}$. Seja d a métrica para a topologia de X. Para cada inteiro positivo n, escolha uma vizinhança $B_d(x, 1/n)$ de raio $1/n$ de x, e escolha x_n como sendo um ponto da interseção da vizinhança com A. Logo x_n converge para x, pois qualquer vizinhança contendo x, contém uma ϵ-bola centrada em x, $B_d(x, \epsilon)$. Se escolhermos n_0 grande o suficiente tal que $1/n_0 < \epsilon$, então U contém x_i para todo $i \geq n_0$. ■

Outro teorema onde a recíproca é válida para todo conjunto metrizável, é o seguinte dado por Munkres (2000).

Teorema 2.3.13 *Seja $f : X \to Y$. Se a função f é contínua, então para toda sequência convergente $x_n \to x$ em X, a sequência $f(x_n)$ converge para $f(x)$. A recíproca é válida se X for metrizável.*

Demonstração: Suponha que f seja contínua. Seja uma sequência convergente $x_n \to x$, e seja V uma vizinhança de $f(x)$. Logo $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x, e portanto existe n_0 tal que $x_n \in f^{-1}(V)$ para todo $n \geq n_0$. Então $f(x_n) \in V$ para todo $n \geq n_0$.

Para provar a recíproca, mostraremos que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, logo f será contínua, pelo Teorema 1.5.2. Para tal, suponha que a condição de convergência de sequência seja satisfeita. Se $x \in \bar{A}$, então existe uma sequência x_n convergindo para x, pelo lema anterior. Por hipótese, temos que $f(x_n) \to f(x)$. Como $f(x) \in f(A)$, o lema anterior implica que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Portanto $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, e assim temos que f é contínua. ∎

Agora vejamos algumas formas de definir funções contínuas em espaços metrizáveis, dado por Munkres (2000) no seguinte teorema.

Teorema 2.3.14 *Se X é um espaço topológico e se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $f + g, f - g, f \cdot g$ são contínuas. Se $g(x) \neq 0$ então f/g é contínua.*

Demonstração: A função $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(x) \times g(x),$$

é contínua pelo Teorema 1.5.7. Portanto $f + g, f - g, f \cdot g$ nada mais são do que composições de h com as operações de soma, subtração e produto, que são contínuas, logo as composições também o são. No caso do quociente, tome $h : X \to \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$, novamente basta ver que f/g nada mais é do que h composta com a operação quociente, que é contínua, portanto a composição também o é. ∎

Chegamos a um ponto importante de nossos estudos sobre espaços métricos, onde temos uma sequência de funções que converge para uma função específica, esta propriedade é conhecida por **convergência uniforme** e é dada por Munkres (2000) da seguinte maneira.

Definição 2.3.15 *Seja $f_n : X \to Y$ uma sequência de funções que levam o conjunto X no espaço métrico Y. Diremos que a sequência (f_n)* ***converge uniformemente*** *para a função $f : X \to Y$ se dado $\epsilon > 0$, existir um inteiro positivo n_0 tal que*

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$.

Note que, convergência uniforme não depende apenas da topologia em Y, mas também da métrica definida em Y. O teorema a seguir, nos fala um pouco sobre continuidade da função f. Este é dado por Munkres (2000) da seguinte forma.

Teorema 2.3.16 *Seja $f_n : X \to Y$ uma sequência de funções contínuas que levam o espaço topológico X ao espaço métrico Y. Se (f_n) converge uniformemente para f, então esta é contínua.*

Este teorema, apesar da importância num âmbito geral, não será demonstrado devido a sua irrelevência ao objetivo do trabalho, mas devemos ressalvar que este teorema assim como o Teorema 2.3.14 e o Lema 2.3.13, servem como ferramenta para analizar se um espaço não é metrizável, pois basta tomar um contra exemplo e mostrar que um dos Teoremas ou o Lema não é válido no espaço. Mostrar que um espaço é metrizável, é uma tarefa mais árdua, requer mais alguns conhecimentos. Porém, estes não serão estudados a fundo neste trabalho, conteplaremos apenas um método no último capítulo deste trabalho, que será uma aplicação do objetivo que buscamos.

2.4 TOPOLOGIA QUOCIENTE

A título de curiosidade, apresentaremos aqui a Topologia Quociente, que apesar de não ter contribuição para o objeto de estudo deste trabalho, os axiomas de separação, é uma topologia muito interessante. Como o seu estudo partiu de uma curiosidade, apenas apresentaremos suas definições e os enunciados de alguns teoremas envolvendo a topologia quociente.

Esta topologia surgiu, a partir de uma motivação geométrica, onde utilizando as técnicas de "recortar e colar" poderíamos construir, a partir de um retângulo, um toro, apenas unindo as arestas deste retângulo. Ou então, poderiamos contruir uma esfera, apenas colapsando, à um ponto, os pontos da fronteira de um disco. Formalizar estas construções envolve conceitos de topologia quociente.

Antes de propriamente definirmos a topologia quociente, definiremos a função quociente. Que por Munkres (2000) é dado da seguinte forma.

Definição 2.4.1 *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $p : X \to Y$ uma função sobrejetiva. A função p é dita ser uma* ***função quociente*** *se dado um subconjunto U de Y, então U é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(U)$ for aberto em X.*

É fácil ver que p é contínua, mas ela é de certa forma mais que contínua, pois além de dado um aberto U de Y termos $p^{-1}(U)$ aberto em X, temos que $p^{-1}(U)$ só será aberto em X se U o for em Y, em outras palavras, de nenhuma forma um conjunto meio-aberto ou fechado será relacionado com um conjunto aberto.

Munkres (2000), ao escrever um pouco sobre funções quocientes, define outra forma de descrever tais funções, que é a seguinte: Diremos que um subconjunto C de X é **saturado** (respeitando a sobrejetividade de $p : x \to Y$) se C contém todos os conjuntos $p^{-1}(\{y\})$ que este intercepta. Ou seja, C é saturado se for igual a toda a imagem inversa de um subconjunto de Y. Assim diremos que p será uma função quociente se p levar espaços abertos saturados de X em espaços abertos Y.

Existem dois tipos especiais de funções quocientes: a **função aberta** e a **função fechada**. A primeira leva abertos de X em abertos de Y e a segunda leva fechados de$X$ em fechados de Y. A seguir temos um exemplo de função quociente fechada.

Exemplo 2.4.2 *Seja X o subespaço $[0,1] \cup [2,3]$ de $\mathbb{R}$ e seja Y o subespaço $[0,2]$ de $\mathbb{R}$. A função $p : X \to Y$ definida por*

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in [0,1], \\ x-1 & \text{para } x \in [2,3] \end{cases}$$

de imediato temos que p é sobrejetiva, contínua e fechada. Portanto é uma função fechada. Mas não é uma função aberta, pois a imagem do conjunto aberto $[0,1]$ não é aberto em Y.

Agora vejamos como construir uma topologia a partir de uma função quociente. Tal fato é apresentado por Munkres (2000) na definição a seguir.

Definição 2.4.3 *Se X é um espaço, A é um conjunto e se $p : X \to A$ é uma função quociente, então existe exatamente uma topologia $\mathscr{T}$ em A relativa ao fato de p ser uma função quociente. Esta topologia é chamada de* ***topologia quociente*** *induzida por p.*

Existe uma situação especial onde a topologia quociente ocorre particularmente com frequência. Que é a seguinte:

Definição 2.4.4 *Seja X um espaço topológico e seja X^* uma partição de X em subconjuntos disjuntos tal que a união é X. Seja $p : X \to X^*$ uma função sobrejetiva que leva cada ponto x de X a um elemento de X^* contendo x. Na topologia quociente induzida por p, o espaço X^* é chamado de* ***espaço quociente*** *de X.*

Dado X^*, existe uma relação de equivalência em X a qual os elementos de X^* são suas classes de equivalência. Por esta razão, o espaço quociente X^* muitas vezes é conhecido como o espaço decomposição do espaço X.

Vejamos agora a relação entre a topologia quociente e o espaço quociente com os conceitos estudados até o momento.

O primeiro item a ser analisado é: em que condições uma função quociente $p : X \to Y$, também será quociente se $q : A \to p(A)$ for uma restrição do domínio de p para um subespaço A de X e do contradomínio para a imagem de $p(A)$?

Vimos no Exemplo 2.4.2 que $p : [0,1] \cup [2,3] \to [0,2]$ era uma função quociente. Porém, tente restringir a função p para o domínio $[0,1) \cup [2,3]$, teremos que a imagem deste conjunto em relação a p será o próprio domínio de p $[0,2]$. Portanto, seria q :

$[0,1) \cup [2,3] \to [0,2]$ uma função quociente? A resposta é não, pois se considerarmos o conjunto $[2,3]$ de X, este é aberto e saturado, logo sua imagem sobre q deveria ser aberta, o que não é verdadeiro, pois a imagem de tal conjunto é $[1,2]$ que é fechado em $[0,2]$.

Vejamos as condições para que tais restrições a subespaços do domínio, sejam também funções quocientes. Munkres (2000) dá tais fatos pelo teorema a seguir.

Teorema 2.4.5 *Seja $p : X \to Y$ uma função quociente, e seja A um subespaço de X que é saturado em relação a p. Por fim, seja $q : A \to p(A)$ obtida pela restrição de p.*

1. *Se A é aberto ou fechado em X, então q é uma função quociente.*

2. *Se p é uma função aberta ou fechada, então q é uma função quociente.*

Apenas analisando o teorema, vemos que não é simples restringir uma função quociente. Pois são poucos os casos em que temos certeza de que a restrição é de fato uma função quociente.

Agora vejamos como se comporta a composição de funções quocientes. Sejam as funções quocientes $p : X \to Y$ e $q : Y \to Z$. Temos que se U é aberto em Z então $q^{-1}(U)$ é aberto em Y, e portanto $p^{-1}(q^{-1}(U))$ é aberto em X, e temos que

$$(q \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(q^{-1}(U)).$$

A topologia quociente, ao contrário das que estudamos até o momento, não se comporta bem para algumas propriedades, como outras topologias. Uma propriedade que não se comporta bem é o produto cartesiano, onde o produto de dois espaços quocientes nem sempre será quociente. Outro grande problema ao trabalharmos com espaços quocientes, é definir funções contínuas nestes. O seguinte teorema, dado por Munkres (2000), mostra uma forma de contruir tais funções.

Teorema 2.4.6 *Seja $p : X \to Y$ uma função quociente. Seja Z um espaço e seja $g : X \to Z$ uma função constante em cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$, com $y \in Y$. Então, g induz uma função $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$. A função induzida f é contínua se, e somente se, g é contínua; f é uma função quociente se, e somente se g é uma função quociente.*

Este teorema nos dá uma grande condição para criar funções contínuas em espaços quocientes. Mas não se limita a isto, pois como consequência deste teorema temos o seguinte corolário, apresentado por Munkres (2000).

Corolário 2.4.7 *Seja $p : X \to Y$ uma função quociente. Seja $g : X \to Z$ uma função contínua e sobrejetiva. Seja X^* a coleção, a seguir,de subconjuntos de X:*

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) | z \in Z\}.$$

Dada a topologia quociente em X^*. A função g induz uma função contínua bijetiva $f : X^* \to Z$, que é um homeomorfismo se, e somente se g é uma função quociente.

Este corolário nos mostra uma forma de criarmos homeomorfismos entre espaços quocientes, o que é muito útil ao trabalharmos com estes espaços.

Capítulo 3

COMPACIDADE

Neste capítulo, estudaremos uma propriedade importantíssima no contexto topológico. A compacidade, é considerada, por muitos, uma ferramenta muito importante, como afirmado por Vilches "A importância principal da compacidade é que ela nos permite obter propriedades globais a partir de propriedades locais" Apesar de sua definição, não ser tão intuitiva, era sabido, nos estudos de topologia, que alguns conjuntos possuiam caracteristicas a mais que outros, e estas eram de extrema importância não só no âmbito local, mas em âmbito geral. A partir do estudos destes conjuntos, chegou-se a uma definição de compacidade em espaços arbitrários, em termos de coberturas abertas. Vejamos as definições de cobertura e subcobertura dadas por Munkres (2000).

Definição 3.0.8 *Uma coleção $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X* ***cobre*** *X, ou é uma* ***cobertura*** *de X, se a união de todos os elementos de $\mathscr{A}$ é igual a X. Tal coleção é chamada de* ***cobertura aberta*** *de X se todos os seus elementos forem subconjuntos abertos de X.*

Definição 3.0.9 *Um espaço X é dito* ***compacto****, se toda cobertura aberta $\mathscr{A}$ de X, conter uma subcoleção finita que também cobre X.*

Vejamos alguns exemplos de espaços compactos e não compactos.

Exemplo 3.0.10 *A reta real $\mathbb{R}$ não é compacta, pois a seguinte cobertura de $\mathbb{R}$ por conjuntos abertos*

$$\mathscr{A} = \{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}\}$$

não possui uma subcoleção finita que cobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.0.11 *Todo espaço, contendo uma quantidade finita de pontos é compacto. Basta ver que todo cobertura $\mathscr{A}$ de $X = \{x_1, ..., x_n\}$ possui uma subcoleção $\mathscr{A}' = \{A_1, ..., A_n\}$ com $x_i \in A_i$, que também cobre X.*

Em geral é muito difícil afirmar que um espaço é compacto, uma vez que devemos verificar se *todas* as coberturas do espaço possuem uma subcobertura finita. Considerando tal fato, estudaremos algumas formas de construir espaços compactos a partir de outros espaços compactos.

Inicialmente vejamos como são dados os subespaços compactos. Primeiro seja Y um subespaço de X, dizemos que uma coleção $\mathscr{A}$ de conjuntos de X **cobre** Y, se a união de seus elementos contém Y. Agora vejamos o Lema, dado por Munkres (2000), que nos mostra uma maneira de construir subespaços compactos.

Lema 3.0.12 *Seja Y um subespaço de X. Então, Y é compacto se, e somente se toda cobertura de Y por conjuntos abertos de X conter uma subcoleção também cobrindo Y.*

Demonstração: Suponha Y compacto e seja $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma cobertura de Y por conjuntos abertos em X. Então, a coleção

$$\{A_\alpha \cap Y | \alpha \in J\}$$

é uma cobertura de Y por conjuntos abertos em Y. Como Y é compacto, existe uma subcoleção

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

que também cobre Y. Portanto se tomarmos apenas os elementos $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ teremos uma subcoleção de $\mathscr{A}$ que cobre Y.

Reciprocamente, seja $\mathscr{A}' = \{A'\}$ uma cobertura de Y por conjuntos abertos em Y. Como Y é um subespaço de X, podemos escrever cada elemento de $\mathscr{A}'$ como a intersecção de Y com um conjunto aberto de X,

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y.$$

Como A_α são abertos em X, logo $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}$ é uma cobertura de Y por conjuntos abertos em X. Mas por hipótese, temos que toda cobertura de Y por conjuntos abertos de X, possui uma subcoleção finita que também cobre Y. Portanto sendo $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ a subcoleção de $\mathscr{A}$ que cobre Y, logo a coleção $\{A'_{\alpha_1}, ..., A'_{\alpha_n}\}$, obtida pela intersecção $A_{\alpha_i} \cap Y$, cobre Y com conjuntos abertos em Y, e é uma subcoleção de $\mathscr{A}'$. Assim temos que Y é compacto. ∎

Mesmo tendo em mãos este Lema, ainda não está fácil definir se um espaço, ou neste caso, subespaço é compacto. Assim, o teorema a seguir, enunciado por Munkres (2000), nos mostra que alguns subespaços de espaços compactos sempre serão compactos, vejamos.

Teorema 3.0.13 *Todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração: Seja Y um subespaço fechado do espaço compacto X. Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura de Y por conjuntos abertos em X. Logo se definirmos $\mathscr{B}$ como sendo a coleção

$$\mathscr{A} \cup (X - Y),$$

temos que $\mathscr{B}$ cobre X, como este é compacto, existe uma subcoleção de $\mathscr{B}$ que também cobre X. Se esta subcoleção, conter o conjunto $X - Y$, basta tirarmos este conjunto, e assim teremos uma subcoleção finita de $\mathscr{A}$ que também cobre Y. Agora se a subcoleçao finita de $\mathscr{B}$ não conter o conjunto $X - Y$, então esta mesma subcoleção, será uma subcoleção de $\mathscr{A}$ e, portanto, cobrirá Y. Logo Y é compacto. ■

Agora vejamos como um espaço compacto se comporta ao aplicarmos uma função contínua a este. Munkres (2000) traz isto no teorema seguinte.

Teorema 3.0.14 *A imagem de um espaço compacto, sobre uma função contínua é compata.*

Demonstração: Sejam $f : X \to Y$ contínua e X compacto. Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura de $f(X)$ por conjuntos abertos em Y. Logo a coleção

$$\{f^{-1}(A) | A \in \mathscr{A}\}$$

forma uma cobertura de X e estes conjuntos serão abertos em X, pois f é contínua. Como X é compacto logo a subcoleção

$$\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n)\}$$

também forma uma cobertura de X. Portanto a coleção $\{A_1, ..., A_n\}$ forma uma subcobertura de $f(X)$ e então teremos que $f(X)$ é compacto. ■

Compacidade é uma propriedade tão forte, de um espaço, que esta é preservada sobre uma função contínua, mesmo esta não sendo um homeomorfismo. Outra fato importante da compacidade, é a sua preservação no produto cartesiano. Provaremos este fato no teorema seguinte porém, antes enunciaremos e provaremos um lema que nos auxiliará na prova do teorema, conhecido como **Lema do Tubo** e dado, por Munkres (2000), na forma subsequente.

Lema 3.0.15 *Considere o espaço produto $X \times Y$, onde Y é compacto. Se N é um conjunto aberto de $X \times Y$ contendo a fatia $x_0 \times Y$ de $X \times Y$, então N contém algum tubo $W \times Y$ ao redor de $x_0 \times Y$, onde W é uma vizinhança de x_0 em X.*

Demonstração: Sejam os espaços X e Y, sendo Y compacto. Suponha que x_0 é um ponto de X e seja N um subcontunto de $X \times Y$ contendo a fatia $x_0 \times Y$ de $X \times Y$. Definiremos uma cobertura de $x_0 \times Y$ tomando para cada ponto $x_0 \times y$ um elemento da base $U \times Y$, da topologia produto, contendo o ponto $x_0 \times y$ e contido em N. Logo a coleção destes elementos forma uma cobertura de $x_0 \times Y$, mas este é homeomorfo a Y, logo $x_0 \times Y$ é compacto, e portanto a coleção que contruímos possui uma subcoleção finita

$$\{U_1 \times V_1, ..., U_n \times V_n\}$$

que também cobre $x_0 \times Y$.

Agora defina W da seguinte forma:

$$W = U_1 \cap ... \cap U_n.$$

W será aberto, pois é igual e interseção finita de conjuntos abertos, e $x_0 \in W$, pois este está contido em todos os conjuntos U_i.

Por fim, seja $x \times y$ um ponto de $W \times Y$. Tome o ponto $x_0 \times y$ da fatia $x_0 \times Y$ com a mesma coordenada y. Sabemos que $x_0 \times y$ pertence a $U_i \times V_i$ para algum i, assim $y \in V_i$. E também temos que $x \in W$, portanto $x \in U_j$ para todo j. Logo $x \times y \in U_i \times V_i$. Assim temos que $W \times Y$ está contido em N, uma vez que todos os elementos $U_i \times V_i$ também estão. ■

Com o lema do tubo podemos, então, mostrar que o pruduto finito de espaços compactos é compacto. Este propriedade é dada por Munkres (2000) no teorema a seguir.

Teorema 3.0.16 *O produto finito de espaços compactos é compacto.*

Demonstração: Sejam X e Y espaços compactos. Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura de $X \times Y$. Dado x_0, a fatia $x_0 \times Y$ é compacta e portanto pode ser coberta por finitos elementos

$$A_1, ..., A_n$$

de $\mathscr{A}$. Aplicamos então o lema do tubo para o conjunto $N = A_1 \cup ... \cup A_n$ que será aberto, pois todos A_i são abertos, e teremos que N contém $x_0 \times Y$, pois a coleção dos A_i cobre $x_0 \times Y$. Assim N contém algum tubo $W \times Y$ em volta de $x_0 \times Y$, onde W é aberto em X. E teremos que $W \times Y$ também será coberto pelos elementos

$$A_1, ..., A_n.$$

Repetindo o mesmo procedimento para cada ponto $x \in X$, poderemos escolher uma vizinhança W_x de x, tal que o tubo $W_x \times Y$ pode ser coberto por finitos elementos de $\mathscr{A}$. A coleção de todos os conjuntos W_x, formará uma cobertura de X, portanto como este é compacto, teremos que a subcoleção

$$W_1, ..., W_n$$

também cobrirá X. Se tomarmos a união dos tubos $W_1 \times Y \cup ... \cup W_n \times Y$, este formará uma cobertura de $X \times Y$, e cada um é coberto por finitos elementos de $\mathscr{A}$, portanto $X \times Y$ também será coberto por finitos elementos de $\mathscr{A}$. Portanto $X \times Y$ é compacto.

Agora mostremos por indução, que a propriedade é válida para o produto de finitos espaços compactos. Seja o produto de espaços compactos

$$X_1 \times ... \times X_n.$$

Trivialmente a propriedade é válida para $n = 1$, e para $n = 2$ acabamos de provar. Suponha que esta é valida para o produto de n espaços compactos

$$Y = X_1 \times ... \times X_n,$$

então o produto

$$X_1 \times ... \times X_{n+1} = (X_1 \times ... \times X_n) \times X_{n_1}$$

também será compacto uma vez que

$$X_1 \times ... \times X_{n+1} = Y \times X_{n+1}$$

será compacto pelo o que provamos anteriormente. ■

Como a reta $\mathbb{R}$ é o espaço que nos é mais familiar, já que trabalhamos com esta a muito tempo, vejamos como a compacidade se comporta neste espaço. Primeiramente enunciaremos um teorema, que terá como uma de suas consequências, que todo intervalo fechado de $\mathbb{R}$ será compacto. Tal teorema é dado por Munkres (2000) da forma.

Teorema 3.0.17 *Seja X um conjunto ordenado, com a propriedade de que todo subconjunto limitado de X possui supremo. Na topologia da ordem, todo intervalo fechado de X é compacto.*

A prova deste teorema não será apresentada, uma vez que sua prova, assim como o Teorema 1.6.12, baseia-se na sua maioria em conceitos conjuntistas. E não trará grandes contribuições para o trabalho, a não ser pela consequência deste teorema, que por Munkres (2000) é dado no seguinte corolário.

Corolário 3.0.18 *Todo intervalo fechado de $\mathbb{R}$ é compacto.*

Mas esta não é a única maneira de determinarmos os subespaços compactos de $\mathbb{R}$. O teorema a seguir, dado por Munkres (2000), mostra como definirmos compactos em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.0.19 *Um subespaço A de $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, A for fechado e limitado na métrica euclidiana d ou na métrica quadrada ρ.*

Novamente omitiremos a demonstração. Note que o Corolário 3.0.18 também pode ser visto como consequência deste teorema, basta tomar $n = 1$ e notar que todo intervalo fechado de $\mathbb{R}$ é também um subespaço fechado de $\mathbb{R}$. Na verdade, a consequência deste teorema engloba o Corolário 3.0.18 e outros subespaços compactos de $\mathbb{R}$.

As maiores consequências de subespaços compactos no estudo da reta $\mathbb{R}$, e não apenas da reta $\mathbb{R}$. São os dois teoremas e o lema subsequentes, dados por Munkres (2000).

Teorema 3.0.20 (Teorema do Valor Máximo) *Seja $f : X \to Y$ contínua, onde Y é um conjunto ordenado na topologia da ordem. Se X é compacto, então existem pontos c e d em X tais que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in X$.*

Lema 3.0.21 (Lema do Número de Lebesgue) *Seja $\mathscr{A}$ uma cobertura aberta do espaço métrico (X, d). Se X é compacto, então existe um $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X tendo diâmetro menor que δ, existe um elemento de $\mathscr{A}$ contendo-o.*

Teorema 3.0.22 (Teorema da Continuidade Uniforme) *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua que leva o espaço métrico (X, d_X) no espaço métrico (Y, d_Y). Então, f é uniformemente contínua.*

Já é sabido por muitos acadêmicos a existência do Teorema do Valor Máximo, do Lema do número de Lebesgue e do Teorema da Continuidade Uniforme, que por sinal são muito importantes nos estudos de cálculo e análise. Porém, poucos sabem que estes teoremas são aplicáveis a outros espaços além da reta $\mathbb{R}$, e que estes são consequência do estudo de espaços compactos.

Trabalhamos até então com compacidade global, ou seja, espaços compactos. Porém, existêm alguns espaços que podem não ser compactos, porém são compactos por partes, veja a definição dada por Munkres (2000).

Definição 3.0.23 *Um espaço X é dito* ***localmente compacto em x*** *se existir algum subespaço compacto de X que contém uma vizinhança de x. Se X é localmente compacto em todos os seus pontos, diremos que X é* ***localmente compacto****.*

O exemplo mais claro desta definição, é a própria reta $\mathbb{R}$, pois como sabemos esta não é compacta, mas todo ponto $x \in \mathbb{R}$ possui uma vizinhança (a, b), que está contida no conjunto compacto $[a, b]$. Portanto $\mathbb{R}$ é localmente compacto.

Esta definição de localmente compacto, será muito útil para nossos estudos, este juntamente com um dos axiomas de separação, os espaços de Hausdorff, nos permitirá enunciar novos teoremas e novas definições, como a própria **compactificação**. Então comecemos o novo capítulo com um estudo sobre os axiomas de separação.

Capítulo 4

AXIOMAS DE SEPARAÇÃO

Durante os anos de estudo da topologia, percebeu-se que alguns espaços que possuiam algumas determinadas características, tinham também, devido a estas características, varias propriedades úteis na demonstração de teoremas sobre estes espaços. Estas propriedades ao serem estudadas, foram denominadas Axiomas de Separação, ou como comumente são chamadas os Axiomas T_i. Esta segunda notação dos axiomas de separação, provém, segundo Munkres (2000), da palavra alemã "*Trennungsaxiom*," que significa "Axiomas de Separação."

Inicialmente 5 axiomas eram conhecidos: T_0 ou Espaços de Kolmogorov; T_1 ou Espaços de Frechét; T_2 ou Espaços de Hausdorff; T_3 ou Espaços Regulares; e T_4 ou Espaços Normais. Porém, conforme os estudos em topologia se intensificaram, novos espaços foram encontrados, espaços que se encontravam entre dois axiomas de separação, um exemplo são os Espaços Completamente Regulares ou Espaços "$T_{3\frac{1}{2}}$", ao prosseguirmos com nossos estudos veremos que este axioma se encontra entre os axiomas T_3 e T_4, pois estes espaços possuem algumas propriedades a mais que espaços regulares, porém nem todas para ser um espaço normal.

Veremos também que os axiomas de separação seguem uma "hierarquia" matematicamente falando, temos que $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

4.1 ESPAÇOS T_0, E T_1

Nesta sessão, veremos os dois primeiros axiomas de separação, alguns autores não se importam muito com estes axiomas, pois espaços que atendem somente a estes axiomas, não são muito interessantes aos estudos de topologia, pois possuem poucas propriedades a serem exploradas.

Vejamos a definição de espaços de Kolmogorov, dado por Steen e Seebach Jr. (1968).

Definição 4.1.1 *X é um **espaço de Kolmogorov** ou $\boldsymbol{T}_0$ se para todo $x, y \in X$, existir* *um subconjunto U de X tal que ou $a \in U$ e $b \notin U$ ou $b \in U$ e $a \notin U$.*

Espaços que são apenas T_0, são de certa forma tão básicos que não possuem propriedades tão representativas quanto os outros axiomas.

Agora vejamos como Vilches (2005) define os espaços de Frechét.

Definição 4.1.2 *X é um **espaço de Fréchet** ou $\boldsymbol{T}_1$ se para todo par de pontos $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe uma vizinhança U de x tal que $y \notin U$.*

Trivialmente, todo espaço de Fréchet será um espaço de Kolmogorov, uma vez que, segundo a definição, para todo par de pontos existe uma vizinhança contendo um e não contendo outro, isto nada mais é do que a própria definição de espaços de Kolmogorov, onde bastava um ponto pertencer a vizinhança e o outro não.

Uma forma mais fácil de enxergar os espaços de Fréchet, é segundo a proposição abaixo, por Vilches (2005):

Proposição 4.1.3 *X é T_1 se, e somente se, $\{x\}$ é fechado em X, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Seja o conjunto $\{x_0\}$ e um elemento x de X distinto de x_0. Logo existe uma vizinhança U de x tal que $x_0 \notin U$. Assim U não intercepta $\{x_0\}$, portanto $x \notin \overline{\{x_0\}}$, assim conclui-se que $\{x_0\}$ é fechado.

Reciprocamente, seja $\{x_0\}$ fechado e um elemento x de X distinto de x_0. Logo $\overline{\{x_0\}} = \{x_0\}$ portanto x não pertence ao fecho. Como $\{x_0\}$ é fechado, $X - \{x_0\}$ é aberto e contém x. Logo a vizinhança $U = X - \{x_0\}$ de x, contém x e não contém x_0. ■

Com este teorema também é possível provar que todo conjunto finito de um espaço de Fréchet é fechado, basta vê-lo como a união finita de conjuntos unitários, que são fechados, logo a união é fechada.

Tendo esta noção sobre espaços de Fréchet, podemos enunciar um teorema mais forte sobre estes espaços, por Munkres (2000):

Teorema 4.1.4 *Seja X um espaço T_1 e A é um subconjunto de X. Então x é um ponto limite de A se, e somente se, toda vizinhança de x intercepta A em infinitos pontos.*

Demonstração: Primeiros provemos a recíproca. Se toda vizinhança U de x intercepta A em infinitos pontos, então U intercepta A em algum ponto diferente de x, logo x é ponto limite de A.

Suponha agora que x seja ponto limite de A, e suponha que alguma vizinhança U de x intercepte A em finitos pontos. Logo U também intercepta $A - \{x\}$ em finitos pontos; seja $\{x_1, ..., x_n\}$ os pontos de $U \cap (A - \{x\})$. O conjunto $X - \{x_1, ..., x_n\}$ é aberto em X, pois o conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$ é fechado. Logo

$$U \cap (X - \{x_1, ..., x_n\})$$

é uma vizinhança de x que não intercepta A. Absurdo, pois contradiz a suposição de que x é ponto limite. ■

Apesar de espaços de Frechét possuírem algumas propriedades a mais que os espaços de Kolmogorov, ambos não tem tanta força quanto o próximo axioma que veremos. Este terceiro axioma, a despeito dos primeiros, possui uma vasta gama de propriedades, vejamos este na sessão a seguir.

4.2 ESPAÇOS T_2

Os espaços de T_2 são a chave para alguns fatos que são conhecidos por muitos acadêmicos, tal como a garantia de que uma sequência convergente em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, converge para apenas um ponto. Porém, nem todos os espaços topológicos possuem tal propriedade. Em uma topologia arbitrária, uma sequência $x_1, x_2, ...$ de pontos de X converge para o ponto x de X, se para cada vizinhança U de x, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Logo se tomarmos o conjunto $\mathbb{N}$ com a topologia indiscreta, então toda sequência de pontos de $\mathbb{N}$ converge para todos os seus pontos, basta notar que o única vizinhança U de todos os pontos de $\mathbb{N}$ é o próprio $U = \mathbb{N}$, assim qualquer ponto de $\mathbb{N}$ será limite de qualquer sequência de pontos de $\mathbb{N}$. Isto se dá pelo fato de que $\mathbb{N}$ com a topologia indiscreta não é um espaço de Hausdorff. Vejamos agora a definição de espaços de Hausdorff, dada por Munkres (2000).

Definição 4.2.1 *Um espaço topológico X é dito **espaço de Hausdorff** ou $\boldsymbol{T}_2$ se para cada par de pontos distintos x_1, x_2 de X, existirem vizinhanças disjuntas U_1 e U_2 de x_1 e x_2, respectivamente.*

Novamente, é trivial que um espaço de Hausdorff é também um espaço de Frechét, e consequentemente um espaço de Kolmogorov. A própria definição nos diz que sendo um par de pontos distintos, existem duas vizinhanças de cada ponto disjuntas, logo se um ponto pertence a uma das vizinhanças o outro não pertencerá.

Exemplo 4.2.2 *A reta real $\mathbb{R}$ com a topologia usual é um espaço de Hausdorff. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ distintos, tome $\epsilon = \dfrac{|x-y|}{2}$, logo as vizinhanças $U = (x-\epsilon, x+\epsilon)$ e $V = (y-\epsilon, y+\epsilon)$ são disjuntas e contém os pontos x e y, respectivamente.*

Como dito na sessão anterior, a maioria dos autores não leva muito em consideração os espaços T_0 e T_1, o fato deste deleixo para com estes espaços, é que os espaços que atendem as premissas destes axiomas e que valem a pena serem estudados, na sua maioria são também espaços de Hausdorff, o que mostra a força do axioma T_2. Uma propriedade muito importante dos espaços de Hausdorff é a seguinte, por Munkres (2000)

Teorema 4.2.3 *Se X é um espaço de Hausdorff, então uma sequência de pontos de X converge para, no máximo, um ponto.*

Demonstração: Seja x_n uma sequência convergente de pontos de X. Suponha que $x_n \longrightarrow a$ e $x_n \longrightarrow b$, com $a \neq b$. Portanto temos que

$$\forall U \text{ vizinhança de } a, \exists n_1 \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } x_n \in U, \forall n \geq n_1;$$

$$\forall V \text{ vizinhança de } b, \exists n_2 \in \mathbb{Z}_+ \text{ tal que } x_n \in V, \forall n \geq n_2.$$

Por definição de espaço de Hausdorff, existem U e V vizinhanças de a e b, respectivamente, disjuntas. Por definição de convergência existe n_1 tal que $x_n \in U, \forall n \geq n_1$, e existe n_2 tal que $x_n \in V, \forall n \geq n_2$. Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ então $x_n \in U$ e $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Isto é um absurdo, pois U e V são disjuntos. Logo x_n converge para apenas um ponto. ∎

Este teorema, por si só, poderia ser considerado como o divisor das águas, pois muitos teoremas que conhecemos na reta real $\mathbb{R}$, provém diretamente do fato de sequências convergirem para apenas um ponto.

Vamos agora relacionar vários conhecimentos trabalhados nos capítulos anteriores acrescentando a fato de alguns espaços serem Hausdorff. Comecemos pelos subespaços de espaços de Hausdorff e produtos de espaços de Hausdorff, dados por Munkres (2000) no teorema seguinte.

Teorema 4.2.4 *Um subespaço de um espaço de Haussdorff é Hausdorff; um produto de espaços de Hausdorff é Hausdorff.*

Demonstração: Seja X um espaço de Hausdorff. Sejam x e y pontos do subespaço Y de X. Se U e V são vizinhanças disjuntas de x e y em X, então $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são vizinhanças disjuntas de x e y em Y. Portanto, Y é Hausdorff.

Seja $\{X_\alpha\}$ uma coleção de espaços de Hausdorff. Seja $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)$ pontos distintos pertencentes ao espaço produto $\prod X_\alpha$. Como $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ então para algum β temos que $x_\beta \neq y_\beta$. Escolha U e V disjuntos em X_β, contendo x e y, isso é possível, pois X_β é um espaço de Hausdorff. Logo os conjuntos $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ são vizinhanças disjuntas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente e consequentemente $\prod X_\alpha$ é Hausdorff. ∎

Alguns dos espaços mais importantes, hoje, nos estudos de matemáticos, são espaços metrizáveis, porém quando enunciamos estes, não citamos uma propriedade importantíssima de todos os espaços metrizáveis, o fato de todo espaço metrizável ser também um espaço de Hausdorff. Para vermos tal fato, sejam x e y pontos distintos do espaço métrico (X, d). Se tomarmos $\epsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$, então $B(x, \epsilon)$ será disjunta de $B(y, \epsilon)$, pois se $z \in B(x, \epsilon)$ então pela desigualdade triangular teremos

$$d(x, z) < \epsilon \qquad \text{e} \qquad d(x, y) = 2\epsilon$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

$$2\epsilon < \epsilon + d(y,z)$$

$$\epsilon < d(y,z)$$

e, portanto, $z \notin B(y,\epsilon)$

Uma propriedade que relacionada aos espaços de Hausdorff, nos dá uma vasta gama de teoremas importantes, é a compacidade, ou mais precisamente a compacidade local. Veremos que espaços de Hausdorff se comportam muito bem em relação a compacidade. O primeiro teorema, relaciona os subespaços compactos em espaços de Hausdorff, este nos diz o seguinte, por Munkres (2000).

Teorema 4.2.5 *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Demonstração: Seja Y um subespaço compacto de um espaço de Hausdorff X. Seja x_0 um ponto de $X - Y$. Se mostrarmos que para todo x_0 existe uma vizinhança U de x_0 disjunta de Y, então teremos provado o teorema, uma vez que o conjunto formado pela união de todas estas vizinhanças formará um conjunto aberto que será complementar de Y.

Para cada $y \in Y$, pela condição de Hausdorff, escolha U_y e V_y vizinhanças disjuntas de x_0 e y, respectivamente. A coleção $\{V_y | y \in Y\}$ é uma cobertura de Y, como este é compacto, logo existe uma quantidade finita destas vizinhanças que também cobre Y, sejam eles $V_{y_1}, ..., V_{y_n}$. Tomemos agora os seguintes conjuntos:

$$V = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$$

$$U = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}.$$

O conjunto V será aberto e conterá Y, e o conjunto U será aberto e conterá x_0, e os dois são disjuntos, pois se z for um ponto de V, logo este pertence pelo menos uma vizinhança V_{y_i}, como esta vizinhança é disjunta de U_{y_i} logo z não pertence a U_{y_i}, e portanto não pertence a U. Assim U é uma vizinhança aberta de x_0 disjunta de Y, e portanto este será fechado. ∎

Apesar de ser um teorema muito importante no contexto de compacidade, as maiores contribuições dos espaços de Hausdorff para compacidade, aparecem ao associarmos estes espaços com a definição de compacidade local. Vejamos como Munkres (2000) apresenta estes fatos.

Teorema 4.2.6 *Seja X um espaço. Então, X é um espaço de Hausdorff localmente compacto se, e somente se, existir um espaço Y satisfazendo as seguintes condições:*

1. *X é um subespaço de Y.*

2. O conjunto $Y - X$ consiste em um único ponto.

3. Y é um espaço de Hausdorff compacto.

Se Y e Y' são dois espaços que satisfazem estas condições, então existe um homeomorfismo de Y com Y' que é igual a função identidade em X.

Demonstração: Primeiramente suponha X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Suponha que ξ não seja um ponto de X, e suponha que $Y = X \cup \{\xi\}$. Criaremos agora uma topologia em Y. Definimos uma coleção de conjuntos abertos em Y da seguinte forma:

1. Todos os conjuntos U que são abertos em X;

2. Todos os conjuntos da forma $Y - C$, com C compacto em X.

Verifiquemos então se esta coleção é uma topologia em Y. Primeira condição, o conjunto $\emptyset$ é da forma (1) e o espaço Y é um conjunto da forma (2). Segunda condição, união:

$$\bigcup U_\alpha = U \qquad \text{será do tipo (1)}$$

$$\bigcup (Y - C_\beta) = Y - \bigcap C_\beta = Y - C \qquad \text{será do tipo (2)}$$

falta considerar a união de conjuntos dos dois tipo:

$$(\bigcup U_\alpha) \cup (\bigcup (Y - C_\beta)) = U \cup (Y - C) = Y - (C - U)$$

como C é compacto e U é aberto, logo $C - U$ será um subespaço fechado de C e portanto compacto, teremos que o conjunto acima será do tipo (2). Terceira condição, intersecção:

$$\bigcap U_n = U \qquad \text{será do tipo (1)}$$

$$\bigcap (Y - C_m) = Y - \bigcup C_n = Y - C \qquad \text{será do tipo (2)}$$

novamente devemos considerar a interseção entre conjuntos de tipos diferentes, como sabemos que a intersecção de conjuntos do tipo (1) é também do tipo (1) e do tipo (2) também é do tipo (2), logo basta analisarmos dois conjuntos, um de cada tipo:

$$U \cap (Y - C) = U \cap (X - C) - (U \cap \{\xi\}) = U \cap (X - C)$$

que será da forma (1), uma vez que C é fechado em X.

Mostremos agora que X é um subespaço de Y. Para tal, vejamos primeiro que a interseção todo conjunto aberto de Y com X é aberto. Dado um conjunto aberto U de Y, do tipo (1), logo $U \cap X = U$ será um conjunto aberto em X. Seja agora o conjunto aberto $(Y - C)$ de Y, do tipo (2), logo $(Y - C) \cap X = X - C$, que será aberto em X, pois C é fechado em X. Por fim, vejamos que todo conjunto aberto de X é da forma (1) portanto aberto em Y. Assim temos que X é um subespaço de Y.

Para mostrar que Y é compacto, seja $\mathscr{A}$ uma cobertura aberta de Y. Como nenhum conjunto da forma (1) possui o ponto ξ, logo $\mathscr{A}$ deve conter algum conjunto da forma (2), seja ele $Y - C$. Tome a coleção de todos os conjuntos abertos de $\mathscr{A}$ diferentes de $Y - C$ e tome suas interseções com X. Logo esta coleção formará uma cobertura aberta de C, como este é compacto, haverá uma subcoleção finita que também cobrirá C. Esta coleção finita de elementos de $\mathscr{A}$ juntamente com o conjunto $Y - C$, formarão uma subcoleção finita $\mathscr{A}'$ que cobrirá Y.

Afim de mostrar que Y é um espaço de Hausdorff, tome os pontos $x, y \in Y$. Se ambos pertencerem a X, como este é um espaço de Hausdorff, as mesmas vizinhanças U e V serão as vizinhanças disjuntas de x e y em Y. Agora suponha que $x \in X$ e $y = \xi$, tome um conjunto compacto C de X tal que $x \in U \subset C$, para alguma vizinhança U de x. Logo U e $Y - C$ serão disjuntos contendo os pontos x e y, respectivamente.

Reciprocamente, suponha que Y satisfaz as três condições do teorema. Então X será um espaço de Hausdorff pois é um subespaço de Y, que por sua vez é um espaço de Hausdorff. Para mostrar que X é localmente compacto, escolha duas vizinhanças disjuntas U e V, contendo o ponto x e $Y - X$, respectivamente. Logo o conjunto $C = Y - V$ é fechado em Y, e portanto compacto, pois Y é Hausdorff. Temos que C pertence a X, pois não contém o ponto $Y - X = \xi$, e como U e V são disjuntos, logo $U \subset C$, portanto X é localmente compacto.

Por fim, mostremos a unicidade de Y. Seja Y e Y' dois espaços que satisfazem as condições do teorema. Definimos $h : Y \to Y'$ de forma que associe o ponto $p \in (Y - X)$ ao ponto $q \in (Y' - X)$, e que seja a função identidade em X. Se mostrarmos que o conjunto aberto U de Y tem imagem $h(U)$ aberta em Y', então h será contínua e por simetria teremos que h é um homeomorfismo.

Seja U um aberto de Y, se U pertencer a X, logo $h(U) = U$ será aberto em Y'. Suponha então que U não está totalmente contido em X, logo $C = Y - U$ é fechado em Y, e é um subespaço compacto de Y. Como X é subespaço de Y, logo C é subespaço compacto de X. Por sua vez, X é um subespaço de Y', assim temos que C é subespaço compacto de Y', portanto $h(U) = Y' - C$, que será aberto, portanto h é contínua, e como dito anteriormente, será um homeomorfismo. ■

O termo *unicidade*, na demonstração, foi utilizado pelo fato de que apesar de usarmos notações diferentes para os pontos p e q, estes representam o mesmo ponto que será acrescentado ao espaço X.

Chegamos a uma das definições mais importantes sobre compacidade, a compactificação. Que consiste em , basicamente, fazer o caminho oposto do teorema anterior, com algumas diferenças. Vejamos como Munkres (2000) define tal propriedade.

Definição 4.2.7 *Se Y é um espaço de Hausdorff compacto e X é um subespaço próprio de Y, onde $\overline{X} = Y$, então Y é dito ser uma* ***compactificação*** *de X. Se $Y - X$ consistir em apenas um ponto, então Y é chamado de* ***compactificação de X por um ponto****.*

No teorema anterior, mostramos que se X for um espaço de Haussdorf localmente compacto, então existia uma compactificação de X por um ponto. Vejamos exemplos de algumas compatificações importantes.

Exemplo 4.2.8 *Seja a reta real $\mathbb{R}$, sabemos que esta é um espaço de Hausdorff e localmente compacto. Portanto existe uma compactificação de $\mathbb{R}$ por um ponto, que é comumente denotada por $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. A compactificação por um ponto de $\mathbb{R}$ é homeomorfa ao circulo unitário, definido por $f : (0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ com $f(t) = (sen(t), cos(t))$. Basta lembrar que $\mathbb{R}$ é homeomorfa a qualquer um de seus intervalos abertos, portanto é homeomorfa a $(0, 2\pi)$. Em cima deste homeomorfismo, se extendermos o seu domínio para $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, basta definirmos que este associa os pontos ∞ e 2π, logo teremos um homeomorfismo entre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $(0, 2\pi]$.*

Exemplo 4.2.9 *Similarmente ao exemplo anterior, temos que a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^2$ é homeomorfa a esfera unitária. Se $\mathbb{R}^2$ for visto como o espaço dos números complexos $\mathbb{C}$, teremos que a sua compactificação por um ponto, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é chamada de Esfera de Riemann, ou plano complexo extendido.*

Encerraremos aqui nossos estudos de espaços de Hausdorff, porém continuaremos a trabalhar com estes, pois, como dito no início do capítulo há uma hierarquia entre os axiomas de separação e assim os espaços normais e regulares também são espaços de Hausdorff.

4.3 ESPAÇOS T$_3$

Nesta sessão trabalharemos com os espaços T_3 ou, como também são conhecidos, espaços normais. A maioria dos teoremas importantes destes espaços são os mesmos dos espaços de Hausdorff, uma vez que todo espaço regular será também um espaço de Hausdorff. Vejamos então a sua definição, dada por Munkres (2000).

Definição 4.3.1 *Um espaço X é dito* ***espaço T_3*** *ou* ***espaço regular****, se para cada par consistindo em um ponto $x \in X$ e um conjunto fechado $A \subset X$, existirem conjuntos abertos disjuntos U e V contendo x e A, respectivamente.*

Obviamente regularidade implica em Hausdorff, uma vez que dado dois pontos x e y do espaço regular X, tome um conjunto fechado A contendo y, logo podemos escolher conjuntos abertos U e V disjuntos contendo x e A, respectivamente. Logo esses dois conjuntos, serão vizinhanças disjuntas dos pontos x e y, assim temos que X será um espaço de Hausdorff.

Uma forma similar de definir regularidade, ou de testar regularidade, é dada pelo lema seguinte, enunciado por Munkres (2000).

Lema 4.3.2 *X é um espaço regular se, e somente se, dado um ponto x de X e uma vizinhança U de x, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$.*

Demonstração: Seja X um espaço regular. Dado x e uma vizinhança U de x, defina $A = X - U$, logo A é fechado. Então existem vizinhanças V e W disjuntas, com $x \in V$ e $A \subset W$. Logo $\overline{V}$ é disjunto de A, pois dado $y \in A$, temos que $y \in W$ e este é disjunto de V, logo $y \notin \overline{V}$.

Reciprocamente, dados x e o conjunto fechado A não contendo x. Defina $U = X - A$, logo U é aberto e por hipótese, existe V vizinhança de x tal que $\overline{V} \subset U$. Portanto os conjuntos V e $X - \overline{V}$ são abertos disjuntos contendo x e A. Portanto X é regular. ∎

Com este lema em mãos, podemos provar, de modo mais fácil, que subespaços de espaços regulares e produto de espaços regulares são regulares. Dado por Munkres(2000) no teorema seguinte.

Teorema 4.3.3 *Um subespaço de um espaço regular é regular; um produto de espaços de regulares é regular.*

Demonstração: Seja X um espaço regular e Y um subespaço de X. Dados $x \in Y$ e A fechado em Y não contendo x. Seja $B = \bar{B} \cap Y$ com $\bar{B}$ sendo o fecho de B em X, logo $x \notin \bar{B}$. Como $\bar{B}$ é fechado em X, aplicando a regularidade a x e $\bar{B}$ podemos escolher U e V conjuntos abertos em X disjuntos contendo x e $\bar{B}$, respectivamente. Logo $U \cap Y$ e $V \cap Y$ são conjuntos abertos em Y disjuntos que contém o ponto x e o conjunto fechado B. Portanto Y é regular.

Seja $\{X_\alpha\}$ uma família indexada de espaços regulares e seja $X = \prod X_\alpha$. Seja $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ um ponto de X e seja U uma vizinhança de $\mathbf{x}$ em X. Escolha um elemento da base da topologia produto $X = \prod X_\alpha$, que contenha x e esteja contido em U. Para cada α, escolha uma vizinhança V_α de x_α tal que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, quando $U_\alpha = X_\alpha$ definia $V_\alpha = X_\alpha$. Assim, $V = \prod V_\alpha$ é uma vizinhança de $\mathbf{x}$. Como, pelo Teorema 2.2.10 $\bar{V} = \prod \overline{V_\alpha}$, então temos que $\bar{V} \subset \prod U_\alpha \subset U$, e portanto X é regular. ∎

Vejamos um exemplo de espaço regular.

Exemplo 4.3.4 *O espaço $\mathbb{R}_l$ é regular, este espaço é mais que regular é também normal, porém mostraremos agora que este é regular. Dados o ponto x e o conjunto $A = [a, b]$ fechado em $\mathbb{R}_l$ não contendo x. Escolha um elemento da base contendo x da forma $[x, y)$ que não intercepte B, agora para cada elemento a de A, escolha um elemento da base da forma $[a, y_a)$ de forma que este não contenha o ponto x. Portando os conjuntos $U =$*

$[x,y)$ e $V = \bigcup [a, y_a)$ são conjuntos abertos contendo o ponto x e o conjunto fechado A, respectivamente.

Espaços regulares, em geral, não possuem características muito mais relevantes do que as próprias derivadas de espaços de Hausdorff. Uma das poucas propriedades que está relacionada com alguns espaços regulares e nos dá um grande consequência, será apresentada na próxima sessão, pois serão necessários o conhecimento de espaços normais. Portanto daremos continuação ao trabalho com os axiomas de separação.

4.4 ESPAÇOS T_4

A atual sessão tratará dos espaços T_4, ou como são comumente classificados espaços normais. Apesar de serem espaços com uma propriedade mais forte que espaços regulares ou espaços de Hausdorff, os espaços normais não se comportam bem ao associarmos a eles algumas propriedades elementares como o subespaço e o produto. Vejamos primeiramente a definição, dada por Munkres (2000).

Definição 4.4.1 *Um espaço X é dito **espaço T_4** ou **espaço normal**, se para cada par de conjuntos fechados disjuntos A e B de X, existirem conjuntos abertos disjuntos U e V contendo A e B, respectivamente.*

Trivialmente temos que um espaço normal é regular, uma vez que dados um ponto x e um conjunto fechado A de X, basta tomar um conjunto fechado B contendo x e disjunto de A, logo por normalidade temos U e V conjuntos abertos disjuntos tal que $x \in B \subset U$ e $A \subset V$.

Vejamos, assim como nos espaços regulares, uma forma diferente de enxergarmos a normalidade, dado por Munkres (2000) no lema a seguir.

Lema 4.4.2 *X é um espaço normal se, e somente se, dados um conjunto fechado A de X e um conjunto aberto U de X contendo A, existir um conjunto aberto V de X contendo A, tal que $\overline{V} \subset U$.*

Demonstração: Seja X um espaço normal. Dado um conjunto fechado A e um conjunto aberto U contendo A, defina $B = X - U$, logo B é fechado. Então existem conjuntos abertos V e W disjuntos, com $A \subset V$ e $B \subset W$. Logo $\overline{V}$ é disjunto de B, pois dado $y \in B$, temos que $y \in W$ e este é disjunto de V, logo $y \notin \overline{V}$.

Reciprocamente, dados os conjuntos fechados A e B disjuntos. Defina $U = X - B$, logo U é aberto e por hipótese, existe V aberto contendo A tal que $\overline{V} \subset U$. Portanto os conjuntos abertos V e $X - \overline{V}$ são abertos disjuntos contendo A e B. Portanto X é normal. ■

Como dito no final da sessão anterior, existem alguns espaços regulares muito interessantes. Estes são apresentados no teorema a seguir, dado por Munkres (2000).

Teorema 4.4.3 *Todo espaço regular com uma base enumerável é normal.*

Demonstração: Seja X um espaço regular com uma base enumerável $\mathscr{B}$. Sejam A e B conjuntos fechados disjuntos de X. Cada ponto x de A possui uma vizinhança U disjunta de B. Usando regularidade, escolha uma vizinhança W de x tal que $\bar{W} \subset U$. Escolha também um elemento de $\mathscr{B}$ que contenha x e esteja contido em W. Assim construímos uma cobertura enumerável de A por conjuntos abertos dos quais os fechos não interceptam B. Como essa cobertura é enumerável podemos indexa-la com inteiros positivos, denotaremos tal coleção por $\{U_n\}$.

Aplicando o mesmo procedimento para o conjunto B, teremos a coleção enumerável $\{V_n\}$ de conjuntos abertos cobrindo B, com $\bar{V}_n$ disjunto de A para cada n. Os conjuntos $U = \bigcup U_n$ e $V = \bigcup V_n$ são conjuntos abertos que contem A e B, respectivamente. Porém, nada garante que estes são disjuntos. Defina então os U' e V' da seguinte forma:

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \qquad e \qquad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i.$$

Note que cada U'_n e cada V'_n é aberto, pois é a diferença entre um aberto e um fechado. A coleção $\{U'\}$ cobre A, pois cada ponto x de A está contido em U_n para algum n, e não pertence a nenhum $\bar{V}_i$. Da mesma forma a coleçao $\{V'\}$ cobrirá B.

Agora verifiquemos se tais coberturas são disjuntas. Tome

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} U'_n \qquad e \qquad V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V'_n,$$

se x pertence a $U' \cap V'$, então $x \in U_j \cap V_k$ para algum j e k. Suponha que $j \leq k$, segue da definição de U'_j que $x \in U_j$, e segue da definição de V'_k que $x \notin \bar{U}_j$. Um absurdo. De forma similar acontecerá uma contradição para $j \geq k$. Portanto X é normal. ■

Este teorema nos dá uma grande ferramenta para determinar se um espaço regular é normal, uma vez que nem todo espaço regular é normal.

Existem também alguns espaços de Hausdorff que possuem uma característica que os torna espaços normais. Tal fato é dado por Munkres (2000) no seguinte teorema.

Teorema 4.4.4 *Todo espaço de Hausdorff compacto é um espaço normal.*

Demonstração: Seja X um espaço de Hausdorff compacto. No Teorema 4.2.5 provamos que todo subespaço de um espaço de Hausdorff é fechado, apenas mostrando que todo ponto x fora do subespaço possui uma vizinhança que não intercepta um conjunto aberto contendo o subespaço. Assim utilizando isto, provamos facilmente este teorema.

Sejam A e B conjuntos fechados disjuntos de X. Tome para cada $b \in B$ dois conjuntos abertos U_b e V_b disjuntos contendo A e b respectivamente. Logo a coleção $\{U_b\}$

cobre B, como B é compacto, pode ser coberto por finitos $U_{b_1}, ..., U_{b_n}$. Logo os conjuntos abertos

$$U = U_{b_1} \cap ... \cap U_{b_1} \qquad e \qquad V = V_{b_1} \cup ... \cup V_{b_1},$$

são disjuntos e contém A e B respectivamente. ■

Este teorema nos será muito útil ao trabalharmos com imersões de variedades.

Espaços métricos, como visto nas sessões e capítulos anteriores, são de extrema importância para o universo matemático. Assim como todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff, teremos que todo espaço métrico também será um espaço normal. Vejamos o teorema seguinte, dado por Munkres (2000).

Teorema 4.4.5 *Todo espaço metrizável é um espaço normal.*

Demonstração: Seja X um espaço metrizável com a métrica d. Sejam A e B subconjuntos fechados disjuntos de X. Para cada $a \in A$ escolha ϵ_a tal que a bola $B(a, \epsilon_a)$ não intercepte B. Da mesma forma, escolha para cada $b \in B$ um ϵ_b tal que $B(b, \epsilon_b)$ não intercepte A. Defina

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon_a/2) \qquad e \qquad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \epsilon_b/2).$$

Logo U e V são conjuntos abertos contendo A e B, respectivamente. Seja $z \in U \cap V$, logo

$$z \in B(a, \epsilon_a/2) \cap B(b, \epsilon_b/2)$$

para algum $a \in A$ e algum $b \in B$. A desigualdade triangular nos dá que $d(a, b) < d(a, z) + d(z, b) < (\epsilon_a + \epsilon_b)/2$. Portanto se $\epsilon_a \leq \epsilon_b$, então $d(a, b) < \epsilon_b$, e assim a bola $B(b, \epsilon_b/2)$ contém o ponto a, absurdo pois esta bola é disjunta de A. Para $\epsilon_a \geq \epsilon_b$, teremos que $d(a, b) < \epsilon_a$, e assim a bola $B(a, \epsilon_a/2)$ contém o ponto b, novamente um absurdo. Portanto U e V são disjuntos contendo os conjuntos fechados A e B respectivamente. ■

Uma grande consequência deste teorema é o fato de todo espaço metrizável ser regular. Pois como todo espaço normal é regular e todo espaço metrizável é normal, então a afirmação anterior é verdadeira.

4.5 ESPAÇOS $T_{\frac{1}{2}}$, $T_{2\frac{1}{2}}$, E $T_{3\frac{1}{2}}$

Veremos agora, alguns axiomas de separação que foram surgindo conforme se intensificaram os estudos de topologia. O primeiro a ser citado são os espaços $T_{\frac{1}{2}}$. Este axioma foi proposto por Levine, no seu artigo "Generalized closed sets in topology" publicado em 1970. Primeiramente vejamos a definição de espaços *g-fechados*, por Levine (1970).

Definição 4.5.1 *Seja $(X, \mathscr{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto A de X é **g-fechado** se, e somente se, $\bar{A} \subseteq U$ quando $A \subseteq U$ e U é aberto.*

Ou seja, um conjunto A é g-fechado se, e somente se, para todo $U \in \mathscr{T}$, se $A \subseteq U$, então $\bar{A} \subseteq U$.

Assim Levine (1970) define o axioma $T_{\frac{1}{2}}$ da seguinte maneira.

Definição 4.5.2 *Diremos que um espaço topológico $(X, \mathscr{T})$ é $T\frac{1}{2}$ se, e somente se, todo conjunto g-fechado é fechado.*

O teorema a seguir, dado por Levine (1970), nos auxiliará a demonstrar um dos teoremas seguintes a esse onde este compara o novo axioma com os axiomas T_0 e T_1. Não iremos demonstrá-lo, pois sua abordagem vai além dos objetivos deste trabalho.

Teorema 4.5.3 *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto A de X é g-fechado se, e somente se, $\bar{A} - A$ não contém nenhum conjunto fechado diferente do conjunto vazio.*

Teorema 4.5.4 *Todo espaço $T_{\frac{1}{2}}$ é um espaço T_0.*

Demonstração: Seja X um espaço $T_{\frac{1}{2}}$. Dados dois pontos distintos x e y de X. Se $\{x\}$ é fechado, então $\{x\} = \overline{\{x\}}$ e $y \notin \overline{\{x\}}$. Caso $\{x\}$ não seja fechado, então $X - \{x\}$ será g-fechado, pois $X - \{x\}$ não é aberto e o único aberto que o contém é X, assim, como $(X - \{x\}) \subseteq X$, temos que $X - \{x\}$ é g-fechado. Como X é $T_{\frac{1}{2}}$ e como $X - \{x\}$ é g-fechado temos que $X - \{x\}$ é fechado e assim $\{x\}$ é aberto. Sendo $U = \{x\}$, temos que $y \notin U$. Portanto X é T_0. ■

Teorema 4.5.5 *Todo espaço T_1 é um espaço $T_{\frac{1}{2}}$.*

Demonstração: Seja X um espaço T_1. Dado um conjunto A g-fechado. Suponha que exista $x \in (\bar{A} - A)$. Assim temos que $\{x\} \subset (\bar{A} - A)$. Porém, pela Proposição 4.1.3 temos que $\{x\}$ é fechado, e pelo Teorema 4.5.3 temos que o único conjunto fechado contido em $\bar{A} - A$ é o conjunto vazio. Logo temos um absurdo. Portanto $\bar{A} - A = \emptyset$, isto é, $\bar{A} = A$, e assim X é $T_{\frac{1}{2}}$ ■

Outro axioma que surgiu com os estudos de topologia é o seguinte, dado por Steen e Seebach (1968).

Definição 4.5.6 *X é dito **espaço completamente Hausdorff** ou **espaço** $T_{2\frac{1}{2}}$ se para todo par de pontos a e b existirem vizinhanças disjuntas U e V de a e b, respectivamente. Tal que $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.*

Triviamente temos que todo espaço $T_{2\frac{1}{2}}$ é também T_2 e pelo Lema 4.3.2 temos que se X é regular, dado o ponto x e uma vizinhança de x existe V vizinhança de x, tal que $\bar{V} \in U$. Logo seja y um ponto distinto de x, pela condição de Hausdorff, existem U e V disjuntos contendo x e y, respectivamente. Tome W vizinhança de x tal que $\bar{W_1} \subset U$ e tome W_2 vizinhança de y tal que $\bar{W_2} \subset V$, portanto os conjuntos W_1 e W_2 são vizinhanças de x e y tal que a interseção de seus fechos é vazia.

O último axioma a citarmos nesta sessão é o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$. Dado por Munkres (2000) da seguinte forma.

Definição 4.5.7 *Um espaço X é dito* ***espaço completamente regular*** *ou* ***espaço*** $T_{3\frac{1}{2}}$ *se para cada ponto x_0 e um conjunto fechado A não contendo x_0, existe uma função contínua $f : [0,1]$ tal que $f(x_0) = 1$ e $f(A) = \{0\}$.*

Novamente teremos a implicação $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$. A segunda implicação provém diretamente da definição, pois os conjuntos $f^{-1}([0, 1/2))$ e $f^{-1}((1/2, 1])$ são conjuntos abertos disjuntos contendo A e x_0. Porém, para mostrar a primeira implicação precisaremos primeiro estudar o objetivo maior deste trabalho, o lema de Uryshon.

Uma característica muito interessante dos espaços completamente regulares é o fato que este ainda preserva o produto, ou seja produto de espaços completamente regulares é completamente regular, o contrário de espaços normais, ou seja, perde-se uma grande propriedade na passagem dos espaços completamente regulares para os espaços normais.

Como os espaços completamente regulares se encontram entre os normais e regulares, seria útil mostrar que existem espaços regulares que não são completamente regulares. Não apresentaremos tais espaços neste trabalho, devido a complexidade na sua construção e na demonstração. Porém, para mais informações estes se encontram nos artigos “An example of a regular space that is not completely regular"(ABRAHA, 1990) e “A regular space which is not completly regular"(Mysior, 1981).

Capítulo 5

LEMA DE URYSHON

Tendo como base todo o conhecimento construido até o momento neste trabalho, iniciaremos agora o estudo do maior objetivo deste trabalho, que relaciona várias ferramentas enunciadas até o momento, e que possui varias consequências positivas para o mundo matemático.

Durante este capítulo veremos o lema de Uryshon bem como sua demonstração, além de algumas aplicações do lema.

5.1 LEMA DE URYSOHN

Iniciamos a sessão apresentando o lema de Uryshon, dado por Munkres (2000) pelo teorema a seguir.

Teorema 5.1.1 (Lema de Uryshon) *Seja X um espaço normal e sejam A e B subconjuntos fechados disjuntos de X. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado da reta real $\mathbb{R}$. Então, existe uma função contínua*

$$f : X \to [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ para todo $x \in A$ e $f(x) = b$ para todo $x \in B$.

Demonstração: Precisamos apenas considerar o intervalo $[0, 1]$, uma vez que este é homeomorfo a todos os intervalos fechados de $\mathbb{R}$.

O primeiro passo da demonstração consistirá em construir uma família de conjuntos que nos será útil na demonstração dos passos seguintes.

Seja P o conjunto de todos os números racionais contidos no intervalo $[0, 1]$. Definiremos, para cada $p \in P$, um conjunto aberto U_p de X, de forma que sempre que $p < q$, teremos

$$\bar{U}_p \subset U_q.$$

Desta forma, os conjuntos U_p serão ordenados em relação a inclusão da mesma forma que seus índices são ordenados conforme a relação de ordem usual.

Como o conjunto P é enumerável, pois é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ que é enumerável, poderemos usar indução para definir todos os conjuntos U_p. Para tal escolha 0 e 1 como os primeiros termos de uma sequência, conveniente, de termos de P.

Primeiro, defina $U_1 = X - B$, como B é fechado, logo U_1 é aberto. Como A e B são disjuntos, logo $A \subset U_1$, usando o Lema 4.4.2, podemos escolher um aberto U_0 tal que

$$A \subset U_0 \qquad e \qquad \bar{U}_0 \subset U_1.$$

Seja P_n o conjunto de todos os primeiros n números racionais da sequência escolhida anteriormente. Suponha que U_p está definido para todos $p \in P_n$, satisfazendo a condição

$$(*) \qquad p < q \Rightarrow \bar{U}_p \subset U_q.$$

Seja r o próximo número racional na sequência, logo defina $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Como P_{n+1} é um subconjunto finito do intervalo $[0,1]$, então a mesma relação de ordem é aplicável a esse subconjunto. Assim todo elemento de P_{n+1}, exceto o maior e o menor, possuem um antecessor e um sucessor imediatos. Como 0 e 1 são respectivamente o menor e maior número de P_{n+1} então r é diferente destes. Portanto este possui antecessor imediato e sucessor imediato, em P_{n+1}. Sejam eles p antecessor e q sucessor de r. Como dito anteriormente, os conjuntos U_p e U_q já estão definidos de forma que $\bar{U}_p \subset U_q$. Assim usando a hipótese de indução, juntamente com a normalidade de X, sabendo que $p < r < q$ podemos escolher um conjunto U_r de forma que como

$$\bar{U}_p \subset U_r \qquad e \qquad \bar{U}_r \subset U_q.$$

Para finalizar a indução, tome dois pontos de P_{n+1}, se ambos pertencerem a P_n a condição $(*)$ está satisfeita pela hipótese de indução. Some então o par consistindo em r e um ponto s de P_n. Portanto se $s \leq p$ então

$$\bar{U}_s \subset \bar{U}_p \subset U_r,$$

ou se $q \leq s$ logo

$$\bar{U}_r \subset U_q \subset U_s,$$

e portanto a condição $(*)$ é válida para o conjunto P_{n+1}.

No segundo passo, generalizaremos o passo 1, para todos os números racionais em $\mathbb{R}$ definindo

$$U_p = \emptyset \qquad \text{se } p < 0,$$

$$U_p = X \qquad \text{se } p > 1.$$

Como $\bar{\emptyset} = \emptyset$ e $\bar{X} = X$, logo a relação $(*)$ ainda é válida.

O terceiro passo, consistirá na criação de f. Primeiramente, dado $x \in X$, defina $\mathbb{Q}(x)$ como o conjunto de todos os racionais p tal que o conjunto aberto U_p contém x:

$$\mathbb{Q}(x) = \{p | x \in U_p\}.$$

Este conjunto não contém nenhum número menor que 0, uma vez que $U_p = \emptyset$ se $p < 0$ e contém todos os números maiores que 1, pois $U_p = X$ para todo $p > 1$. Assim $\mathbb{Q}$ é limitado por baixo e a maior de suas cotas inferiores é um ponto de $[0, 1]$. Agora defina

$$f(x) = inf \mathbb{Q}(x) = inf \{p | x \in U_p\}.$$

Iniciamos agora o quarto e último passo. Primeiro vejamos que f é a função desejada. Se $x \in A$ então $x \in U_p$ para todo $p \leq 0$, então $\mathbb{Q}(x)$ é o conjunto de todos os números racionais não negativos, e $f(x) = inf \mathbb{Q}(x) = 0$. De forma parecida, se $x \in B$, então $x \in U_p$ para todo $p > 1$, logo $\mathbb{Q}(x)$ consiste de todos os números racionais maiores que 1, e portanto $f(x) = 1$.

Antes de provarmos continuidade de f, mostremos que as afirmações abaixo são verdadeiras:

$$(1) \qquad x \in \bar{U}_r \Rightarrow f(x) \leq r.$$

$$(2) \qquad x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r.$$

Para provar (1) note que se $x \in \bar{U}_r$, então $x \in \bar{U}_r \subset U_s$ para todo $s > r$, portanto $\mathbb{Q}(x)$ consiste em todos os racionais maiores que r, e portanto

$$f(x) = inf \mathbb{Q}(x) \leq r$$

. Para provar (2), note que se $x \notin U_r$ então x não pertence a nenhum U_s com $s < r$, portanto $\mathbb{Q}(x)$ é formado por todos os pontos estritamente maiores que r. Logo

$$f(x) = inf \mathbb{Q}(x) \geq r.$$

Agora provaremos continuidade de f. Dado um ponto x_0 de X e um intervalo aberto (c, d) contendo $f(x_0)$. Escolha dois números racionais p e q, tal que

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

Isto é possível, pois $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ [1]. Defina então $U = U_q - \bar{U}_p$, este será uma vizinhança de x_0, pois pela contra-positiva da afirmação (2) como $f(x_0) < q$ então $x_0 \in U_q$, e pela contra-positiva da afirmação (1) como $p < f(x_0)$ então $x_0 \notin \bar{U}_p$.

[1] Munkres (2000) define densidade como: Todo subconjunto A de X é denso em X se $\bar{A} = X$. O autor também traz como exemplo de conjunto denso, o $\mathbb{Q}$, que é denso em $\mathbb{R}$ e em todo intervalo de $\mathbb{R}$.

Agora verifiquemos se $f(U) \subset (c,d)$. Seja x um ponto de U, então $x \in U_q \subset \bar{U}_q$, assim temos que por (1), $f(x) \leq q$. Como x não pertence a $\bar{U}_p$, então $x \notin U_p$ e por (2) temos que $f(x) \geq p$. Assim $f(x) \in [p,q] \subset (c,d)$.

■

Note que esta demonstração não pode ser generalizada para espaços regulares, uma vez que no primeiro passo, quando definimos os conjuntos U_p, necessitamos da normalidade, pois essa permitia encontrar um aberto U_p tal que $\bar{U}_0 \subset U_p$ e $\bar{U}_p \subset U_1$, e a regularidade de um conjunto não nos permite fazer o mesmo.

Como dito no capítulo anterior, na sessão sobre espaços regulares, para provar que todo espaço normal é completamente regular necessitaríamos do lema de Uryshon. Para tal, tome x e A, defina um fechado B contendo x e disjunto de A, logo pelo lema de Uryshon, teremos a desejada função tal que $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$, assim X é completamente regular.

5.2 APLICAÇÕES DO LEMA DE URYSOHN

Nesta sessão veremos três aplicações do lema de Urysohn, sendo elas o Teorema da Metrização de Urysohn, o Teorema da Extensão de Tietze, e Mergulho em Variedades

Na sessão onde comentamos sobre os espaços métricos, foi dito que a metrização é algo extremamente desejável em um espaço. Urysohn ao provar o lema com o seu nome, provou também, parte de um importantíssimo teorema para definir se um espaço é metrizável, tal teorema é dado por Munkres (2000) da seguinte forma:

Teorema 5.2.1 (Teorema da Metrização de Urysohn) *Todo espaço regular X com uma base enumerável é metrizável.*

Como dito, parte da prova deste teorema provém diretamente do lema de Urysohn. Não iremos apresentar tal demonstração, uma vez que a aplicação que temos em vista é outra.

Vejamos agora o teorema da extensão de Tietze, que consiste em extender uma função de valor real que é definida sobre um subespaço de um espaço X, para uma função contínua definida em todo X. Vejamos como Munkres (2000) o define.

Teorema 5.2.2 (Teorema da Extensão de Tietze) *Seja X um espaço normal, e seja A um subespaço fechado de X.*

1. *Qualquer função contínua de A em um intervalo fechado em $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ pode ser extendida para uma função contínua de todo X em $[a,b]$.*

2. *Qualquer função contínua de A em $\mathbb{R}$ pode ser extendida para uma função contínua de todo X em $\mathbb{R}$.*

A grande importância deste teorema é a possível obtenção de funções contínuas a partir de uma outra também contínua. A demonstração deste teorema é extremamente trabalhosa, pois consiste em contruir uma sequência de funções contínuas onde esta converge uniformemente, e tal que esta sequência restrita a A converge para a função definida de A em $\mathbb{R}$.

Estudemos agora um pouco de variedades para que possamos estudar esta associada ao lema de Urysohn. Primeiro vejamos o que é uma variedade, por Munkres (2000)

Definição 5.2.3 *Uma **m-variedade** é um espaço de Hausdorff X com uma base enumerável tal que cada ponto x de X possui uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto de $\mathbb{R}^m$.*

Uma curva é uma 1-variedade e uma superfície é uma 2-variedade. Variedades, são muito estudadas em geometria diferencial e topologia algébrica.

Iremos mostrar que se X é uma variedade compacta, então X pode ser imergido em um espaço euclidiano de dimensão finita. Na verdade, este teorema é válido inclusive sem considerarmos compacidade, mas a sua prova é muito mais difícil.

Antes de iniciarmos o teorema, enunciado por Munkres (2000), vejamos as seguintes definições, também dadas por Munkres (2000).

Definição 5.2.4 *Se $\phi : X \to \mathbb{R}$, então o **suporte** de ϕ é definido como o fecho do conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$.*

Definição 5.2.5 *Seja $\{U_1, ..., U_n\}$ uma cobertura finita indexada do espaço X. Um família indexada de funções contínuas*

$$\phi_i : X \to [0, 1] \qquad \textit{para } i = 1, ..., n,$$

*é dita ser uma **partição da unidade** determinada por $\{U_i\}$ se:*

1. *(suporte ϕ_i)$\subset U_i$ para cada i.*
2. *$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para cada x.*

Teorema 5.2.6 (Existência de partições finitas da unidade) *Seja $\{U_1, ..., U_n\}$ uma cobertura aberta finita de um espaço normal X. Então existe uma partição da unidade determinada por $\{U_i\}$.*

Demonstração: Primeiro verifiquemos que podemos refinar a cobertura $\{U_i\}$ a uma cobertura também finita $\{V_i\}$, tal que $\bar{V_i} \subset U_i$ para cada i. Usaremos indução na seguinte relação

$$A = X - (U_2 \cup ... \cup U_n),$$

e note que A é um conjunto fechado contido em U_1. Utilizando normalidade escolhemos V_1 tal que $A \subset V_1$ e $\bar{V_1} \subset U_i$. Logo a coleção $\{V_1, U_2, ..., U_n\}$ também cobre X. Em geral dado os conjuntos abertos $V_1, ..., V_k$ tal que a coleção

$$\{V_1, ..., V_k, U_{k+1}, U_{k+2}, ..., U_n\}$$

cobre X, seja

$$A = X - (V_1 \cup ... \cup V_k) - (U_{k+2} \cup ... \cup U_n),$$

logo U_{k+1} contém A, e por normalidade escolhemos V_{k+1} contendo A e com $\bar{V}_{k+1} \subset U_{k+1}$. Portanto para a coleção $\{V_1, ..., V_k, V_{k+1}, U_{k+2}, ..., U_n\}$ cobre X, e se repitirmos o processo até o n-ésimo termo a indução estará provada.

Agora provemos o teorema. Dado uma cobertura aberta $\{U_1, ..., U_n\}$ de X, tome, pelo o que acabamos de provar, uma cobertura aberta $\{V_1, ..., V_n\}$ que também cobre X, onde $\bar{V_i} \subset U_i$ para cada i. Da mesma forma escolha uma cobertura aberta de X $\{W_1, ..., W_n\}$, com $\bar{W_i} \subset V_i$ para cada i. Agora aplicamos o lema de Urysohn, para cada i escolha uma função contínua

$$\psi_i : X \to [0, 1]$$

tal que $\psi_i(\bar{W_i}) = \{1\}$ e $\psi_i(X - V_i) = \{0\}$. Como $\psi_i^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ está contida em V_i, temos que

$$(\text{suporte } \psi_i) \subset \bar{V_i} \subset U_i.$$

Como a coleção $\{W_i\}$ cobre X, então a soma $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ é positiva para cada x. Portanto, podemos definir, para cada j,

$$\phi_i(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

E estas funções ϕ_i formarão uma partição da unidade, uma vez que

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_j = \frac{\Psi(x)}{\Psi(x)} = 1.$$

■

Nesta demonstração, ficou bem claro a importância do lema de Urysohn para mostrar que tais partições da unidade existem, uma vez que estas são criadas a partir das funções determinadas no lema de Urysohn. Vejamos agora como é determinada a mergulho de uma m-variedade no $\mathbb{R}^n$. Dado no seguinte teorema enunciado por Munkres (2000).

Teorema 5.2.7 *Se X é uma m-variedade compacta, então X pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^n$ para algum n inteiro positivo.*

Demonstração: Como X é compacto e Hausdorff, então é normal pelo Teorema 4.4.4. Assim tome uma cobertura aberta finita $\{U_1, ..., U_n\}$, tal que cada U_i pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^m$. Escolha imersões $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ para cada i. Seja $\phi_1, ..., \phi_n$ uma partição da unidade determinada por $\{U_i\}$. Seja $A_i = suporte\phi_i$. Para cada $i = 1, ..., n$, defina uma função $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ pela regra:

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x) & \text{para } x \in U_i, \\ \mathbf{0} = (0, ..., 0) & \text{para } x \in X - A_i \end{cases}$$

A função h_i é bem definida, pois elas coincidem na interseção de seus domínios, e h_i é contínua, pois as restrições aos abertos U_i e $X - A_i$ o são.

Agora definimos

$$F : X \to (\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times ... \times \mathbb{R}^m)$$

como sendo n-vezes o produto de $\mathbb{R}$ juntamente com n-vezes o produto de $\mathbb{R}^m$, e definida pela regra

$$F(x) = (\phi_1(x), ..., \phi_n(x), h_1(x), ..., h_n(x)).$$

F será contínua, pois suas componentes o são. Para mostrar que F é uma mergulho, basta provar que F é injetiva. Suponha que $F(x) = F(y)$, então $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ e $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Como $\phi_i(x) > 0$ para algum i, logo $\phi_i(y) > 0$, e portanto $x, y \in U_i$. Então

$$\phi_i(x) \cdot g_i(x) = h_i(x) = h_i(y) = \phi_i(y) \cdot g_i(y).$$

Pois $\phi_i(x) = \phi_i(y) > 0$, então concluímos que $g_i(x) = g_i(y)$, mas g_i é uma mergulho, logo é injetiva, portanto $x = y$. Portanto F é a desejada mergulho. ∎

Este teorema nos mostra que toda m-variedade compacta pode ser imersa em um espaço $\mathbb{R}^m$, e este fato se dá graças ao lema de Urysohn, que foi de extrema importância na construção das partições da unidade.

CONCLUSÃO

Ficou claro, que os axiomas de separação são, de fato, muito importantes no estudo de topologia, pois quando temos alguns espaços topológicos que atendem a estes axiomas, podemos aplicar nestes, várias propriedades que não seriam garantidas, caso esses espaços não satisfizessem algum dos axiomas. Porém, a mais importante dessas propriedades, apresentada anteriormente, foi o lema de Urysohn, pois este decorre da ideia de associar um espaço normal a um intervalo da reta real, seguindo um certo critério, mas isto só se dá pelo fato de estarmos trabalhando com um espaço que atende as premissas de um espaço T_4 ou normal. E ainda como consequência deste lema, vimos que a sua necessidade na demonstração da existência das finitas partições da unidade é extrema, uma vez que sem este lema, não se sabe o quão trabalhoso seria esta demonstração, ou se ela ao menos existiria.

Outro fato notório deste trabalho, é que todas as propriedades dependem da topologia definida no espaço, uma vez que uma simples alteração nela nos dá várias novas propriedades, bem como são perdidas muitas outras. Basta lembrar do Teorema 4.2.3, onde este era garantido apenas para espaços de Hausdorff, isto ficou mais visível quando construímos uma topologia em $\mathbb{N}$ diferente da usual, pois nesta nova topologia teríamos que toda sequência seria convergente, além disso convergiria para todos os seus pontos.

O estudo feito, com base no livro de Munkres (2000), foi, de fato, de extrema necessidade para que pudéssemos ler e compreender os axiomas de separação, bem como o lema de Urysohn. Porém, o tempo disponível para tal, não foi suficiente para um estudo mais profundo sobre variedades, que no decorrer da elaboração deste trabalho, acabou se tornando um objetivo paralelo ao lema de Urysohn.

Apesar do estudo de Topologia em todo o curso de graduação, resumir-se a um único capítulo do livro texto da disciplina de análise real, não houveram grandes dificuldades no decorrer dos estudos sobre topologia, e em vista que esta é uma disciplina de grande parte dos cursos de pós-graduação em Matemática, o seu conhecimento nos dá uma base mais sólida para iniciar os estudos mais formais sobre tais conteúdos e também uma base para possíveis pesquisas nesta área.

REFERÊNCIAS

ABRAHA. An example of a regular space that is not completely regular. **Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences**, India ,Vol. 102, No. 1, p. 49-51, Abril 1992.

DUGUNDJI, James. **Topology**. Michigan: Allyn and Bacon, 1966. 447 p. (Allyn and Bacon series in advanced mathematics)

LEVINE, Norman. **Generalized closed sets in topology**, Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo 19(2) (1970), 89-96.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009a. (Projeto Euclides)

LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral**. Rio de janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009b. 299 p.

LIMA, Rodrigo de. **Conjuntos g-fechados em espaços L-topológicos e conjuntos g*-fechados em espaços L-Alexandroff**. Curitiba, 2006. 97 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

MUNKRES, James. **Topology**. 2 ed. Massachusets: Prentice Hall, 2000. 537 p.

MYSIOR, A. A Regular Space Which is not Completely Regular. **Proceedings of the American Mathematical Society**, Volume 81, Number 4, p. 651-653, April 1981.

STEEN, Lynn Arthur; SEEBACH JR, J. Arthur. **Counterexamples in Topology**. 2 ed. Holt, Rinehart and Winston, 1970. 210 p.

VILCHES, Mauricio Alejandro Antonucci. **Topologia Geral**. Edição Online: http://www.ime.uerj.b
culo/LivroVI/topologia.pdf. 117 p.