UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARÍLIA ZABEL

UMA ABORDAGEM DINÂMICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES:
EXPERIMENTOS E RECURSOS TECNOLÓGICOS

JOINVILLE - SC
2012

MARÍLIA ZABEL

UMA ABORDAGEM DINÂMICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES:
EXPERIMENTOS E RECURSOS TECNOLÓGICOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Dra. Ivanete Zuchi Siple

JOINVILLE-SC

2012

Z113u
Zabel, Marília.
Uma abordagem dinâmica para o ensino de funções: Experimentos e Recursos Tecnológicos / Marília Zabel. - 2012
101 p.: il

Bibliografia: f. 97-100
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciencias Tecnológica, Licenciatura em Matemática. Joinville. 2012.
Orientadora: Ivanete Zuchi Siple

1. Sequência Didática. 2. Atividades Experimentais. 3. Recursos Tecnológicos. 4. Ensino de Funções. I Siple, Ivanete Zuchi. II Universidade do Estado de Santa Catarina – Curso Licenciatura em Matemática. III Uma abordagem dinâmica para o ensino de funções: Experimentos e Recursos Tecnológicos.

CDD - 510.7

MARÍLIA ZABEL

UMA ABORDAGEM DINÂMICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES:
EXPERIMENTOS E RECURSOS TECNOLÓGICOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador (a): Dra. Ivanete Zuchi Siple
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Membro: Ms. Graciela Moro
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Membro: Ms. Learcino dos Santos Luiz
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Joinville, 25 de junho de 2012.

Aos meus pais, Sérgio e Alcíris, que sempre apoiaram minha escolha e não mediram esforços para me dar uma boa educação, este é o resultado de todo esse amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, que esteve comigo em todos os momentos desta longa caminhada.

Ao meu namorado, pelo constante apoio e incentivo. Além das ideias, da dedicação e ajuda na construção dos experimentos. Obrigada pela força!

Agradeço, a minha orientadora Ivanete, pelo tempo e paciência dedicados, pelas críticas, sugestões e principalmente pelo esforço. Muito obrigada.

A professora Graciela, por ter disponibilizado suas aulas para a aplicação da sequência.

Aos alunos da turma de Matemática Básica, pela dedicação em realizar as atividades, sem vocês esse trabalho não seria possível.

Aos alunos da turma de Cálculo Diferencial e Integral I, que foram pilotos do desenvolvimento do trabalho, seus esforços incentivaram este trabalho.

Ao laboratório de física, pela disponibilização dos materiais necessários.

A minha amiga Débora, por disponibilizar de seu tempo para ajudar na aplicação pré-teste, além de toda parceria ao longo desses três anos e meio.

A minha amiga Maiara, que é uma das pessoas mais especiais que conheci durante a faculdade, nossos momentos felizes, nossas tardes de estudos, nossas risadas, todos esses momentos serão por mim eternizados, muito obrigada pela sua amizade.

A minha amiga inseparável, Luíza, que mesmo longe, sempre esteve me apoiando, me incentivando e se preocupando comigo.

Por fim, mas não menos importante, a todos aqueles que de uma forma simples também tiveram importância para o desenvolvimento do trabalho: Professores Fragali, Zanon e Rogério, Kim, Fran.

“Ninguém é tão grande que não possa aprender e
ninguém é tão pequeno que não possa ensinar”
(Augusto Cury).

RESUMO

ZABEL, Marília, **Uma abordagem dinâmica para o ensino de funções:** experimentos e recursos tecnológicos. 2012. 101 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

O estudo de funções é considerado um dos tópicos relevantes no ensino da matemática estando presente nos diversos níveis de formação, desde o fundamental até o ensino superior. Sua relevância pode ser explicada devida a ampla aplicação deste conceito nas diversas áreas do conhecimento, por meio da análise de fenômenos, descrições de regularidades e interpretações de interdependência e generalizações. Desta forma, este trabalho tem como principal objetivo desenvolver uma sequência didática para abordar o conceito de função de forma dinâmica, por meio de atividades experimentais e a utilização de recursos tecnológicos. A sequência proposta visa introduzir o conceito de função por meio da compreensão das grandezas envolvidas e a relação entre elas, em atividades experimentais, articulando os diferentes registros de representação, mediados pelo uso de tecnologias. A metodologia adotada para o desenvolvimento do trabalho fundamenta-se na Engenharia Didática. As atividades propostas neste trabalho podem representar um recurso importante tanto para professores do Ensino Básico quanto do Superior, podendo ser adaptadas de acordo com a realidade de cada turma. Na experimentação realizada observamos que esse tipo de abordagem diferenciada pode proporcionar aos alunos um conhecimento mais efetivo e significativo, pois propiciam momentos de discussões, interpretações e compreensão do objeto matemático, bem como pode se tornar um elemento motivador em relação à disciplina ou a determinados conteúdos.

Palavras Chaves: Sequência Didática. Atividades Experimentais. Recursos Tecnológicos. Ensino de Funções.

ABSTRACT

ZABEL, Marília, **A dynamic approach to teaching of functions:** experiments and technological resources. 2012. 101 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

The study of functions is considered a relevant topic in mathematics, as it is present in different school levels, from primary up to university education. Its relevance can be explained due to the wide application of this concept in several areas of knowledge through the analysis of phenomena, descriptions of regularities, and interpretations of interdependence and generalizations. Thus, this work has as its main objective to develop a sequence of teaching activities to address the concept of functions in a dynamic way, through experimental activities and the use of technological resources. The following proposal introduces the concept of functions through an understanding of the quantities involved and the relationship between them in experiments, articulating the different registers of representation, mediated by the use of technologies. The methodology adopted for the development of this paper is based on Didactic Engineering. The activities proposed in this paper may represent an important resource for teachers of both basic education and higher education, which may be adapted according to the reality of each class. In the experimental work done for this project, it was observed that this kind of differentiated approach can provide students with more effective and meaningful knowledge, since it allows time for discussions, interpretations, and understanding of the mathematical subject, and can become a motivating factor regarding the discipline or certain content.

Key words: Sequence of Teaching Activities. Experimental Activities. Tecnological Resources. Teaching of Functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Muito se ouve falar que a matemática está presente em várias ações e construções que envolvem o nosso dia-a-dia. Porém, como afirma Oliveira *et al* (200?), *"*o que limita a visão dessa imagem são os estigmas e tabus que ela carrega em sua própria existência, é a ideia do pensamento formal, uma disciplina rígida, uma ciência pronta, acabada e obsoleta, distante da prática e indicada para poucos privilegiados".

Mas, não se pode negar a importância da matemática no processo de descrição, transformação e compreensão da natureza. Por isso, é preciso compreender a matemática, os conceitos e conteúdos que a envolve. Um estudo considerado bastante essencial no ensino de matemática são os estudos relacionados às funções.

O conceito de função é importante não somente para a matemática como para as ciências em geral, sendo utilizado, por exemplo, como um instrumento necessário para descrever, interpretar e prever fenômenos. Segundo Silva e Rezende (1996), a interpretação do conceito de função como relação entre quantidades variáveis foi, sem dúvida, a mais utilizada pelos matemáticos dos séculos XVIII e XIX, devido ao surgimento da física quantitativa que, para o estudo dos fenômenos naturais, buscou quantificar e estabelecer relações entre as grandezas envolvidas.

Entretanto, no ensino básico ou superior, a ideia mais utilizada para introduzir o conceito de função é a de relação entre conjuntos. Ou seja, de que cada elemento x de um conjunto A se associa um único elemento $f(x)$ de outro conjunto B, segundo uma relação definida de A em B. Esta interpretação é estática e tem um caráter mais formal que as demais.

> Uma função (de uma variável) é em nossa atual definição formal, um conjunto de pares ordenados que satisfaçam determinadas propriedades algébricas. Note que a definição formal de função não carrega em si a ideia que motivou sua criação, a relação entre quantidades variáveis. Visto que função é definida e trabalhada em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis "x" e "y" (PEREIRA, 2009, p. 20).

Observamos que tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior é dado maior ênfase nas propriedades algébricas da função, bem como na apresentação analítica direta de uma função, geralmente desprovida de uma contextualização, conforme se relata a seguir:

> O que tem prevalecido na formação dos estudantes é exatamente a expressão analítica da função, ou seja, para alguns estudantes uma função é, simplesmente, uma expressão algébrica, tal como $cos(x)$ ou x^2, por exemplo. Isso, a nosso ver, é catastrófico. Como um conceito tão importante, que tem

> uma malha de significações tão rica, pode ser caracterizado somente por meio de uma expressão algébrica? (CABRAL; NETO, 1998 *apud* PEREIRA, 2009, p.21).

O entendimento das funções dentro de uma estrutura axiomática é tão importante quanto a identificação do seu significado em aplicações, visto como um dos objetivos principais do ensino da matemática, como comprova os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), em relação ao estudo de funções:

> O estudo das **funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no **conceito de função** e em suas **propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos** e **nas aplicações dessas funções**. (PCN+, 2002, p.165).

Ainda, de acordo com PCN's, o conceito de função desempenha um papel importante na descrição e no estudo da leitura, interpretação e construção de gráficos referentes à situações do cotidiano ou relacionados com outras áreas, como a física, química, biologia, geografia, dentre outras. Então, o ensino da matemática deve propiciar ao aluno a compreensão do conceito de função, estabelecendo as conexões com diversas situações problemas referentes à sua e outras áreas de conhecimento, sempre que possível.

Diante disso, percebemos a necessidade da utilização de novas metodologias para o ensino da matemática, principalmente no que se refere ao ensino das funções. Uma abordagem diferenciada pode ser vista como uma oportunidade para a formação do aluno, tanto em termos de conteúdo específico, quanto um fator motivador pela disciplina.

Temos como hipótese que é fundamental no contexto do ensino de funções os alunos saberem identificar as grandezas e as relações entre elas, seja numa situação hipotética ou real. É com essa compreensão que os alunos poderão verificar a tendência entre as grandezas, estabelecer a lei de formação matemática que melhor descreve o comportamento dos dados, bem como fazer conjecturas a respeito da situação problema. Outro fator importante para o ensino das funções é a articulação entre os diferentes registros de representação da mesma, fundamentados na teoria de Representação Semiótica (DUVAL, 1993).

Diante disso, o desenvolvimento de atividades experimentais aliada com os recursos tecnológicos torna-se um elemento motivador para o ensino de funções, pois possibilita criar situações nas quais é possível explorar os diferentes registros de representações a partir de dados obtidos experimentalmente.

Desta maneira, esse trabalho tem como principal objetivo construir uma sequência didática aplicável tanto no ensino básico, quanto superior, para abordar o conceito de função de uma maneira diferenciada e dinâmica, utilizando atividades experimentais e os recursos tecnológicos a fim de proporcionar uma aprendizagem mais significativa aos alunos.

Os objetivos específicos para este trabalho são:

- Realizar um estudo teórico que permita corroborar para uma abordagem diferenciada no estudo das funções;
- Desenvolver e aplicar uma sequência didática para a abordagem do conceito de função, que possibilita explorar a compreensão das grandezas envolvidas e suas relações;
- Utilizar recursos tecnológicos para explorar os diferentes registros de representação de funções;
- Realizar um estudo sobre o método dos mínimos quadrados.

Para atingir os objetivos utilizamos a metodologia da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988 *apud* ZUCHI, 2005), que envolve as seguintes fases:

1. *Análise preliminar*: Caracteriza-se pelo levantamento das concepções envolvidas, que buscam referências teóricas que fundamentem a pesquisa. Nesta etapa realizamos uma explanação do referencial teórico sobre a história das funções, registros de representação semiótica, experimentos matemáticos, novas tecnologias no ensino da matemática e a abordagem do método dos mínimos quadrados.
2. *Concepção e Análise a priori*: Essa etapa tem como objetivo elaborar sequências pertinentes de aprendizagem, formulando os experimentos que serão aplicados. Aqui se encontra a concepção e análise de uma sequência didática realizada no ambiente lápis e papel utilizando experimentos práticos e a concepção de uma sequência no ambiente computacional.
3. E*xperimentação:* Fase em que se aplica a sequência didática a uma determinada população de estudantes. A sequência didática proposta foi aplicada em uma turma curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC na disciplina de Matemática Básica, participando da atividade 24 alunos.
4. *Análise a posteriori*: Corresponde à análise do conjunto dos dados obtidos na fase da experimentação e às observações realizadas durante a aplicação da sequência.

Para delimitar nosso estudo, temos como proposta de pesquisa, abordar as seguintes questões:

- A aplicação de uma sequência didática adequada pode contribuir para a aprendizagem da definição do conceito de função a partir da identificação das grandezas, bem como a relação entre elas?
- A utilização de atividades experimentais aliadas ao uso dos recursos tecnológicos poderá contribuir na formação do aluno com o intuito de minimizar as dificuldades de aprendizagem do conceito de funções em um ponto de vista dinâmico?
- Quais as contribuições que uma abordagem diferenciada pode proporcionar para o processo de ensino-aprendizagem do conceito de função?

Buscamos estruturar esse trabalho de forma a explorar tais questões, com as devidas fundamentações teóricas e metodológicas utilizadas, adotando a seguinte sequência para o corpo do trabalho.

Este capítulo introdutório tem o objetivo de apresentar o trabalho, fazendo uma abordagem introdutória, descrevendo os objetivos, a metodologia utilizada e a estrutura do trabalho.

No segundo capítulo, apresentamos uma fundamentação teórica, buscando contextualizar o surgimento do conceito de função através da história com o estudo da representação semiótica e o uso das experimentações e dos recursos tecnológicos.

No terceiro, descrevemos a sequência didática aplicada no desenvolvimento do projeto, bem como a análise a priori dos procedimentos e questionamentos aplicados.

No quarto capítulo, relatamos sobre a experimentação e a análise a posteriori, em relação aos dados coletados.

No quinto capítulo, realizamos um estudo sobre o método de regressão linear dos mínimos quadrados, apresentando as conexões com conceitos estudados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e de Álgebra Linear.

No sexto capítulo apresentamos algumas sugestões de outras atividades relacionadas com o ensino das funções que podem ser aplicadas nas aulas de matemática.

São apresentadas as considerações finais em relação ao trabalho desenvolvido e também algumas perspectivas futuras no sétimo capítulo.

Em seguida, estão as referências bibliográficas utilizadas para a realização deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O estudo de funções é considerado um dos tópicos mais relevantes da Matemática estando presente nos diversos níveis de formação, desde o fundamental até o ensino superior. O estudo de funções possibilita uma ampla aplicação nas diversas áreas do conhecimento, através da análise de fenômenos, descrições de regularidades e interpretações de interdependência e generalizações.

Entretanto, mesmo diante dessa realidade, diversas pesquisas têm evidenciado uma grande dificuldade de aprendizagem no ensino de funções. Segundo Pereira (2009), uma das causas destas dificuldades é que o conceito de função “migrou” do âmbito da relação entre quantidades variáveis para o âmbito da Teoria de Conjuntos.

Uma evidência de que o conceito de função não é adequadamente trabalhado no Ensino de matemática são as dificuldades apresentadas pelos estudantes quando se deparam com a tarefa de obter uma função que modela uma situação, em aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, haja vista que em todos os momentos esta função sempre lhes foi apresentada.

Diante disso, neste capítulo, pretendemos apresentar um embasamento teórico referente as possibilidades de se trabalhar o conceito de função em atividades experimentais que propiciem a identificação das grandezas envolvidas, bem como a relação entre elas, nos apoiando na articulação dos diversos Registros de Representação (DUVAL, 1993) e nas potencialidades das ferramentas tecnológicas.

2.1 UM BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DAS FUNÇÕES

Ao refletirmos sobre o surgimento do conceito de função, podemos perceber que a ideia de associação de variáveis está presente na mente humana há muito tempo. Por exemplo, como cita Sá; Souza; Silva (2003), quando o homem levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional.

Assim considerando, podemos citar também os babilônios (séc. XVI a.C.) que construíram tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas em argila, que podem ser vistas como tabelas de correspondência, apresentando também uma relação funcional.

Constatamos que o conceito de função surgiu da necessidade de esclarecer alguns fenômenos naturais que antes eram explicados e baseados apenas por mitos. De acordo com Caraça (1989 *apud* BOTELHO, 2005, p. 11), “o conceito de função surgiu através da necessidade de estudar as variações quantitativas presentes nos fenômenos naturais e foi construído com duas ferramentas principais: interdependência e variabilidade”.

Segundo Oliveira (1997), Galileu Galilei (1564 – 1642) deu uma grande contribuição em relação à evolução da noção de função, introduzindo o quantitativo nas representações gráficas. Galileu desenvolveu seu trabalho em relação a movimento, velocidade, aceleração, procurando sempre obter seus resultados através da experimentação. Com isso, contribuiu para a evolução do conceito de função: lidou de forma funcional com as causas e efeitos, e esta necessidade é essencial à concepção de variável dependente.

Com o avanço da álgebra simbólica e também uma concretização em relação ao conceito de número, pôde-se introduzir o conceito de função em relação a dois conjuntos de números, no final do século XVI.

Conforme Botelho (2005), Leibniz, em 1673, foi quem utilizou pela primeira vez a palavra função para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente.

Em 1718, Bernoulli definiu função da seguinte maneira: “... função de uma grandeza variável é uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de qualquer constante” (RÜTHING, 1984 *apud* BOTELHO, 2005, p.70).

Vários outros matemáticos da época aprofundaram seus estudos a fim de encontrar uma melhor definição para função, entre eles podemos citar, Euler, Lagrange, Cauchy, Fourier.

Porém, os estudiosos daquela época tiveram grande dificuldade para definir de forma precisa as funções. Em 1972, H. Weyl sustenta que:

> “Ninguém jamais soube explicar o que é uma função. Mas, uma função f é definida se por um meio qualquer podemos associar a um número a, um número b... Dizemos então que b é um valor da função f para o valor a do argumento” (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 64 *apud* OLIVEIRA, 1997, p. 21).

Em meados do século XX, surge a definição de função como um conjunto de pares ordenados, ou seja, como certo subconjunto do produto cartesiano A x B:

> Uma função f de um conjunto A em um conjunto B é um subconjunto do produto cartesiano AxB que a cada a em A associa um único elemento b em B tal que (a,b) ϵ f' (SCHWARZ, 1995, p. 14 *apud* OLIVEIRA, 1997, p. 22).

Essas definições são baseadas na Teoria dos Conjuntos e atualmente são as que mais aparecem em livros didáticos. Um exemplo é o livro Matemática Fundamental escrito pelo autor José Ruy Giovanni (2002), que aborda no primeiro tópico do capítulo sobre função questionamentos sobre relação entre duas grandezas envolvendo tabelas e gráficos retirados de alguma mídia. Porém, o conceito de função não é abordado a partir desses exemplos, porque logo em seguida o autor, apresenta o conceito de função através da teoria de conjuntos.

Pelho (2003) analisou uma série de livros adotados para o ensino de funções e constataram que a maioria eliminou a dependência funcional da definição de funções, sendo estabelecida apenas como relação entre elementos de dois conjuntos. Alguns incluem a menção da lei que estabelece tal relação, porém não a dependência entre variáveis. É preciso deixar claro no estudo de funções seus componentes de variação, dependência e correspondência. Segundo Cotret (1988, *apud* PELHO, 2003) é importante, quando se inicia o ensino de funções, conservar a ideia de dependência e a noção de variação, que são a base deste conceito e possibilitam aos alunos a construção inicial ao conceito de função.

Como verificamos na análise histórica do processo de construção do conceito de função, é evidente que ela surgiu da necessidade de formalizar as diferentes situações estudadas na época que já haviam passado por processo de experimentação e verificação dos dados. Podemos afirmar que ambos os estudos descreviam função, mas em diferentes representações.

Recentemente, esses diferentes tipos de representações geraram muitas pesquisas no ensino de matemática e têm sido estudados por vários pesquisadores. Neste trabalho, abordaremos atividades experimentais que trabalham com a dependência e a relação entre as variáveis, privilegiando a articulação entre os diferentes registros de representação de função, fundamentados na teoria de Representação Semiótica (DUVAL, 1993).

2.2 REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Registros de representação semiótica é uma teoria desenvolvida pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval que, “refere-se à utilização de representações e enfatiza a importância da diversidade de registros e representações semióticas e a articulação entre estes registros na aquisição dos conhecimentos matemáticos" (DUVAL, 1995 *apud* QUEIROZ; RAMOS; SIPLE, 2011, p.17).

Duval (2003, *apud* VIEL; DIAS, 2006), em sua teoria, trata do funcionamento cognitivo, pois as representações fazem um intercâmbio comunicativo entre o sujeito e a atividade cognitiva do pensamento, gerando diferentes formas de registro de representação do objeto.

Podemos pensar em várias representações existentes em nosso meio, como por exemplo, um mapa, um globo terrestre, um esqueleto, um protótipo, entre outros. Essas representações são utilizadas para a compreensão de alguns conteúdos no ambiente escolar. Porém, ao se tratar da disciplina de matemática, como determinar um objeto matemático?

Na matemática toda comunicação se estabelece com base em representações, pois diferentemente de outras áreas do conhecimento, os objetos matemáticos são abstratos, ou seja, não são diretamente perceptíveis ou observáveis com o auxilio de instrumentos (microscópio, telescópio, aparelhos de medida etc.), necessitando do uso de representações semióticas para a sua compreensão (DUVAL, 2003 *apud* MAGGIO; SOARES, 2009).

Quando se fala em função, podemos representá-la através do seu gráfico, descrevê-la pela lei que a define ou mostrá-la através de pontos em uma tabela. Essas representações são importantes, pelo fato de proporcionarem diferentes registros de um mesmo objeto matemático.

Esses registros, de acordo com Machado (2003), servem para designar os diferentes tipos de representação semiótica utilizados na matemática – sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e a linguagem natural – a completa aprendizagem de um determinado conceito matemático supõe a compreensão de, ao menos, dois registros, deste conceito.

Diante disso, Duval (1995 *apud* REIS, 2011), afirma que a compreensão matemática está ligada à capacidade de mudar de registro, assim, com essa articulação o aluno reconhece o mesmo objeto matemático em diferentes representações. Ou seja, o aluno cria condições para modificar formulações ou representações de informação durante a resolução de um problema. Esse processo é considerado muito importante, como afirma Reis (2011, p. 44), "passar de um registro de representação para o outro possibilita explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto na compreensão da matemática".

Segundo Duval (2003 *apud* VIEL; DIAS, 2006), cabe ao professor a função de deixar claro o objeto matemático que será ensinado, quais os registros de representação semiótica inerente à atividade exposta e trabalhar com dois tipos de representação de transformação semiótica, a de tratamento e de conversão.

O tratamento é uma das atividades cognitivas defendidas por Duval que é favorecida pela representação semiótica, ele afirma que:

> Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como um dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema (DUVAL, 2009, p. 56-57 *apud* MORAIS *et al*, 2011, p.3).

Podemos perceber então, que essa atividade consiste na realização de transformações que ocorrem internamente a um registro e obedecem as suas regras. Essas regras possibilitam a expansão da informação, favorecendo outra representação, mas, ainda no mesmo registro que o de partida.

Por exemplo, se quisermos calcular, o valor do perímetro de um retângulo de lados 10 cm e 13 cm:

$$P = 2l_1 + 2l_2$$

$$P = 2.10 + 2.13$$

$$P = 20 + 26$$

$$P = 46\ cm$$

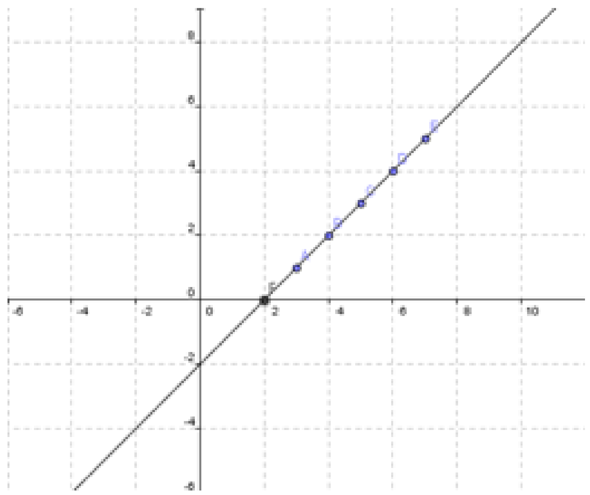
Para resolver esta equação efetuamos duas transformações, mas continuamos dentro de um mesmo registro, o algébrico.

A conversão é outro tipo de representação de transformação e segundo Duval (2009, p. 58 *apud* MORAIS *et al* l, 2011) converter é “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro”. Assim, a conversão diferentemente do tratamento, acontece externamente em relação ao registro de partida.

Neste trabalho, por exemplo, temos que o objeto matemático é a função e as diversas formas de representá-lo são: gráficos, tabelas, expressão algébrica, linguagem natural. Então, quando passamos de uma escrita tabular para a sua representação gráfica estamos fazendo uma conversão. Como exemplo, temos a figura 2.1, que mostra uma tabela com alguns pontos de uma função, ou seja, sua representação tabular e ao lado sua representação gráfica:

Figura 2.1: Representação tabelar e representação gráfica de uma função

x	y
2	0
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5



Fonte: Produção do próprio autor

Os professores podem introduzir a teoria de Duval como um processo didático e metodológico. Para isso eles têm que estar preparados para esse desafio de ensinar não apenas o conhecimento científico, mas também o seu significado através de atividades experimentais, resolução de problemas, modelagem, entre outros, para que ocorra o processo de desenvolvimento das capacidades e habilidades cognitivas dos alunos.

Neste trabalho, aliamos o estudo das diferentes formas de representação com as atividades experimentais que possibilitam momento de discussão, interpretação e limitação de resultados obtidos experimentalmente, possibilitando o confronto das diferentes representações de um mesmo objeto.

2.3 ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Pinho Alves, professor-doutor de física da Universidade Federal de Santa Catarina, contribui para a definição de Atividade Experimental afirmando que:

> Atividades experimentais são experimentos que propiciam ao estudante observar, medir, verificar, comprovar, descobrir, simular, ilustrar através de um conjunto experimental (equipamentos) situações, fatos, leis, princípios, causas e efeitos...em Ciências. (PINHO, 2006 *apud* QUEIROZ; RAMOS, 2007, p. 29)

Assim, podemos ver a atividade experimental como uma atividade desenvolvida num ambiente criado para esse fim, envolvendo os alunos em experiências de aprendizagem planejadas, interagindo com materiais para observar e compreender fenômenos, como propõe Neves (2007).

As experimentações são consideradas importantes ferramentas de ensino para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa em ciências, dando a oportunidade para alunos se expressarem e avaliarem suas ideias e modelos científicos.

Quando falamos em atividades experimentais, nos remetemos às disciplinas de física, química e biologia acreditando que só é possível trabalhar com esse tipo de atividade nessas disciplinas. Vários artigos e teses apresentam a matemática como ferramenta para a interpretação dos experimentos. Como podemos verificar neste trecho:

> "... para resolver estas situações problematizadas conta-se com uma importante ferramenta, ou seja, a Matemática. Desse modo, os modelos matemáticos exercem papel relevante em todo o desenvolvimento da Física, uma vez que compõem uma tríade fundamental para esta área da Ciência (Lozada et al., 2006): a Física, acima de tudo, apoia-se em formulação de teoria, elaboração de um modelo matemático compatível e experimentação, ..." (MORRONE *et al*., 2006, p. 2).

Porém, para ensinarmos matemática podemos também utilizar metodologias que envolvam experimentos e, a partir deles, formalizar os conceitos matemáticos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1999) estabelecem dentre as competências e habilidades que o aluno deve desenvolver na disciplina de matemática: procurar e sistematizar informações relevantes para a compreensão da situação-problema, entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das Ciências Naturais, interpretar e criticar resultados a partir de experimentos e demonstrações. Ou seja, cabe também à disciplina de matemática explorar as atividades experimentais, não só para desenvolver essas habilidades citadas pelo PCN's, mas também, desenvolver um raciocínio lógico, valorizando a construção do conhecimento.

Existem ainda outros motivos e objetivos para envolver os alunos nas atividades experimentais, os quais também podem ser pertinentes ao ensino de Matemática, Neves (2007), aponta:

1. Motivar, estimulando o interesse e o prazer de investigar;
2. Treinar destrezas laboratoriais;
3. Enfatizar a aprendizagem do conhecimento científico;
4. Percepcionar o método científico e adquirir perícia na sua utilização;
5. Desenvolver certas "atitudes científicas" como abertura de espírito e objetividade.

A utilização dos experimentos em sala de aula também permite uma abordagem mais dinâmica e envolvente dos conteúdos. A atividade prática contribui para dar um sentido real do objeto a ser estudado. Dessa forma, os experimentos realizados, podem facilitar o entendimento dos alunos do determinado conteúdo, bem como estimular seu aprendizado. Enfim, a partir de experimentações vamos obter alguns dados e estes podem possibilitar a criação de conjecturas e a descoberta de resultados matemáticos desconhecidos e/ou frágeis.

Os dados obtidos experimentalmente potencializam o processo de conversão abordado na seção anterior, visto que, podemos representá-los por diferentes registros. A partir da realização dos experimentos, a primeira forma de organização dos dados que surge naturalmente é representação utilizando tabelas. Após essa organização ocorre um estudo do comportamento dos dados, construções de gráficos e forma analítica que melhor representa o experimento.

Diante disso, é interessante aliar a utilização dos recursos tecnológicos à experimentação, pois o trabalho experimental é algo dinâmico, onde exploramos os vários tipos de representações simultaneamente. Os softwares que existem atualmente possibilitam essa abordagem e podem facilitar a sua compreensão, ou seja, os softwares podem servir como uma espécie de complemento à abordagem experimental.

2.4 AS NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O avanço das novas tecnologias tem levado educadores matemáticos a tentar utilizá-las no processo de ensino-aprendizagem. A utilização dessas tecnologias em sala de aula pode ser vista como uma tendência em educação matemática.

As tecnologias sempre existiram ao longo da história, e o homem sempre foi adaptando-as para seu próprio benefício. Em relação à sala de aula, pode-se considerar que o quadro-negro já foi visto como uma tecnologia, sendo que ainda é uma tecnologia bastante utilizada.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> O mundo vive um acelerado desenvolvimento, em que a tecnologia está presente direta ou indiretamente em atividades bastante comuns. A escola faz parte do mundo e para cumprir sua função de contribuir para a formação de indivíduos que possam exercer plenamente sua cidadania, participando dos processos de transformação e construção da realidade, deve estar aberta

> e incorporar novos hábitos, comportamentos, percepções e demandas (PCN's, 1998, p.138).

Fica evidente a importância da incorporação das tecnologias no ambiente escolar. Além disso, é necessário que os alunos sejam capacitados a utilizar as novas ferramentas tecnológicas e principalmente saber relacionar o aprendizado obtido com a diversidade de informação que elas oportunizam.

Por outro lado, a informática é uma das tecnologias mais questionadas em relação ao seu uso na sala de aula. Para Flores (1996), a informática deve habilitar e dar oportunidade ao aluno de adquirir novos conhecimentos, facilitando o mesmo no processo ensino-aprendizagem, enfim, ser um complemento de conteúdos curriculares visando o desenvolvimento integral do indivíduo.

A proposição de atividades experimentais mediadas pela tecnologia pode facilitar o entendimento de vários conceitos matemáticos inerentes ao problema proposto. As potencialidades oferecidas pela tecnologia permitem transitar entre os diferentes registros de representação: tabelas, gráficos e analítico. Podemos simular graficamente os dados oriundos da experimentação e obter as equações matemáticas que descrevem o experimento num processo dinâmico.

A utilização dos softwares de geometria dinâmica, por exemplo, possibilita ao aluno criar um ambiente que simule formas geométricas dinâmicas e iterativas, oportunizando ao aluno uma compreensão de diferentes situações problemas e possibilitando um melhor entendimento de conceitos matemáticos. O uso desses softwares pode potencializar o estudo das funções, visto que os mesmos possibilitam uma abordagem dinâmica dos conteúdos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCN's + (2002) sugerem que os alunos devem desenvolver algumas competências durante o processo de aprendizagem do conceito de função, tais como: identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, por exemplo, perceber que todas as funções de segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico; reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema. Essas competências podem ser alcançadas com maior êxito e até mesmo ampliadas a partir da utilização de softwares de matemática dinâmico, que permite algumas simulações, bem como um estudo dinâmico das transformações gráficas.

Segundo Gomez,

> O recurso às tecnologias para o ensino e aprendizagem das funções permite uma melhor e mais fácil consolidação do conceito de função em comparação com a abordagem clássica do estudo formal das funções, em que se partia das representações simbólicas e se traduzia por representações tabulares e finalmente por representações gráficas. (GOMEZ, 1997 *apud* GAFANHOTO e CANAVARRO, 2008, p.5)

Podemos destacar, neste momento, a utilização dos softwares de geometria dinâmica, que em função de suas características podem potenciar o estudo de funções em diferentes representações. Em relação a esses softwares de geometria dinâmica, atualmente existem vários, como por exemplo, Cabri-Géomètre, Cabri 3D, Geometry Sketchpad, Cinderella, GeoGebra, Winplot, entre outros.

O software GeoGebra, por exemplo, é um software gratuito que apresenta várias representações de um objeto matemático, tais como representação gráfica, representação algébrica e representação em tabelas. Deste modo, podemos conectar a utilização deste software com o processo experimental.

Com os dados obtidos experimentalmente e plotados no software, o mesmo permite utilizarmos uma ferramenta para a obtenção de uma curva que descreve o comportamento dos dados do experimento realizado, através da regressão linear. Esta curva será apresentada de duas formas: algébrica e gráfica.

O GeoGebra fornece simultaneamente três diferentes visualizações de um objeto matemático: a janela de visualização gráfica, a janela Algébrica e a planilha de Cálculo, possibilitando assim a verificação das representações geométrica e algébrica. Essas representações são adaptadas automaticamente quando modifica qualquer uma delas.

Entretanto, a utilização das ferramentas tecnológicas no ambiente escolar não garante sozinha a melhora na qualidade do ensino, é importante saber como utilizar esses novos recursos em sala de aula, de maneira que possibilite aos alunos um aprendizado mais significativo.

No próximo capítulo apresentamos uma sequência didática que busca relacionar o estudo das funções e a Teoria de Representação Semiótica através de atividades experimentais e do uso dos recursos tecnológicos.

3. CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

A concepção e análise a priori é uma das principais etapas da Engenharia Didática, na qual são elaboradas sequências didáticas que visam abordar o problema proposto e a aprendizagem do aluno. Também são apresentadas as variáveis envolvidas no problema, as hipóteses de dificuldades e estratégias de resolução do problema.

Neste trabalho, a sequência elaborada e aplicada tem como principal objetivo introduzir o conceito de funções por meio da compreensão das grandezas envolvidas e a relação entre elas, em atividades experimentais.

Durante a análise preliminar verificamos que existem várias situações-problemas propostas em livros e sites, tais como o preço da corrida de táxi, custo de fabricação de um produto, juros e etc., que envolvem o conceito de funções. Porém nosso desejo foi trabalhar com situações práticas nas quais os alunos pudessem manipular o experimento, observar, obter dados e fazer conjecturas sobre os mesmos. Para isto, pesquisamos em livros e internet ideias que pudéssemos implementar, tanto em termos técnicos quanto didáticos, a alunos de Ensino Médio e de Ensino Superior, haja vista que o ensino de funções contempla este público alvo.

Encontramos algumas ideias envolvendo a geometria (Penta - UFRGS) e conceitos da física (Penta – UFRGS e Matemática Multimídia – UNICAMP) e as adaptamos para a nossa realidade. Cada experimento escolhido foi analisado previamente, verificando suas potencialidades, o material necessário para a sua realização, entre outros. Outro fator que influenciou na nossa escolha, foi a possibilidade de utilizar materiais já existentes na universidade, no Laboratório de Ensino de Matemática e também no Laboratório de Física.

Após a concepção, tanto técnica quanto didática, da atividade experimental, resolvemos aplicá-la, numa espécie de pré-teste, na turma de Engenharia de Produção na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, na abordagem inicial do conceito de função.

Nesta aplicação, foram propostos três experimentos, dois envolvendo geometria e um envolvendo conceitos da física. Esta aplicação foi fundamental, pois revelou elementos importantes para a melhoria da sequência proposta, dentre os quais destacaram-se a necessidade da identificação das grandezas envolvidas, a taxa de variação entre as grandezas e a abordagem de um experimento que envolvesse função linear.

Então, a partir dessa análise preliminar, reconstruímos a sequência didática, mantendo dois experimentos da primeira aplicação com reformulações em relação aos questionamentos propostos, visando alcançar o nosso objetivo.

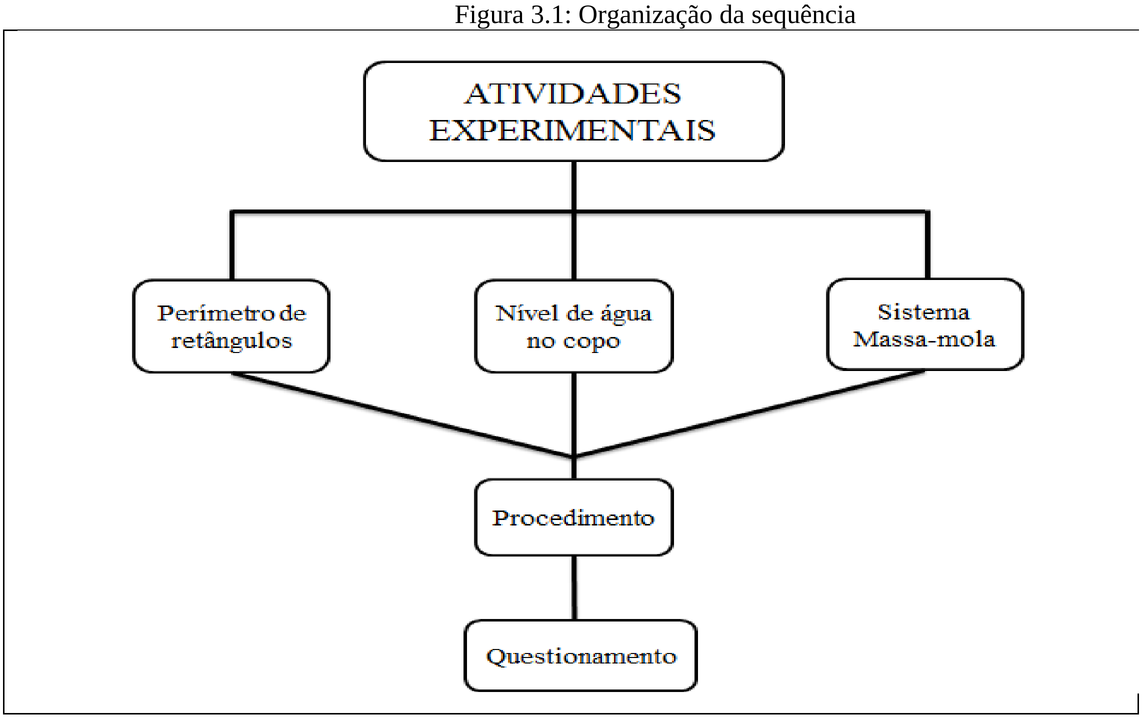
A seguir, apresentaremos a sequência didática e também a análise a priori da aplicação.

3.1 APRESENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA

Os experimentos escolhidos para fazer parte dessa sequência didática foram: um experimento envolvendo a geometria através do cálculo do perímetro de retângulos e dois experimentos envolvendo conceitos da física, tais como volume, densidade e força.

A organização da sequência elaborada leva em consideração dois momentos, o primeiro no ambiente lápis e papel e o segundo no ambiente computacional, conforme ilustra a figura 3.1.

Figura 3.1: Organização da sequência



Fonte: Produção do próprio autor

No primeiro momento, no ambiente lápis e papel, os alunos, em grupo, desenvolverão cada um dos experimentos de acordo com o procedimento fornecido. Após a realização destes, os estudantes responderão algumas questões relacionadas com o experimento.

No ambiente computacional, será utilizado o software GeoGebra para desenvolver as atividades que serão indicadas aos alunos. Os alunos, nos mesmos grupos do primeiro momento, utilizarão para essa atividade os dados obtidos em cada um dos experimentos realizados. Nesta etapa, também serão feitos alguns questionamentos referente à atividade.

Em cada experimento deseja-se que os alunos possam:

- Identificar as grandezas envolvidas em cada experimento;
- Identificar a curva que melhor ajuste os pontos obtidos no experimento;
- Obter a razão entre a variação das grandezas envolvidas no experimento;
- Estabelecer a relação algébrica entre as variáveis.

Em todos os experimentos, também é proposto aos alunos, que após o procedimento realizado e os dados organizados nas tabelas, representar esses dados graficamente no papel milimetrado. Então, a partir dessas informações responderem os questionamentos.

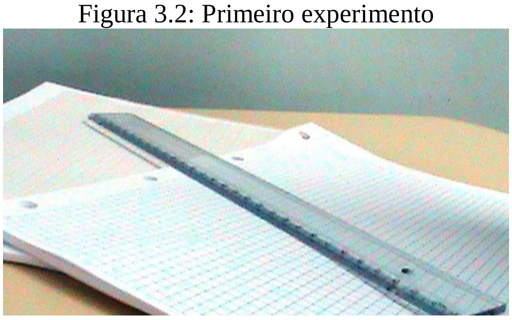
3.1.1 Ambiente Lápis e Papel

Nesta seção, vamos apresentar cada um dos experimentos, seguidos de uma figura ilustrativa, os materiais necessários e procedimentos para a sua realização e os questionamentos propostos.

3.1.1.1 Primeiro Experimento - Perímetro de um Retângulo

O primeiro experimento é relacionado com o perímetro de retângulos. Neste experimento, são considerados diferentes retângulos que possuem o mesmo perímetro. Assim, mantendo o perímetro fixo, um dos lados do retângulo dependerá do outro, ou seja, um dos lados será a variável independente e o outro lado a variável dependente. Os materiais necessários para este experimento são: papel quadriculado, papel milimetrado e régua. A figura 3.2 mostra o material fornecido para a realização deste experimento:

Figura 3.2: Primeiro experimento



Fonte: Produção do próprio autor

<u>Procedimento:</u>

- Construa, com as folhas de papel quadriculado, diferentes retângulos com perímetro de 12 cm;
- Anote na tabela 1.1 os valores dos lados dos retângulos construídos;

Tabela 1.1: Lados de retângulos de perímetro 12 cm

Lado 1	Lado 2

- Agora, repita os procedimentos acima utilizando diferentes retângulos de perímetro 20 cm;

Tabela 1.2: lados de retângulos de perímetro 20 cm

Lado 1	Lado 2

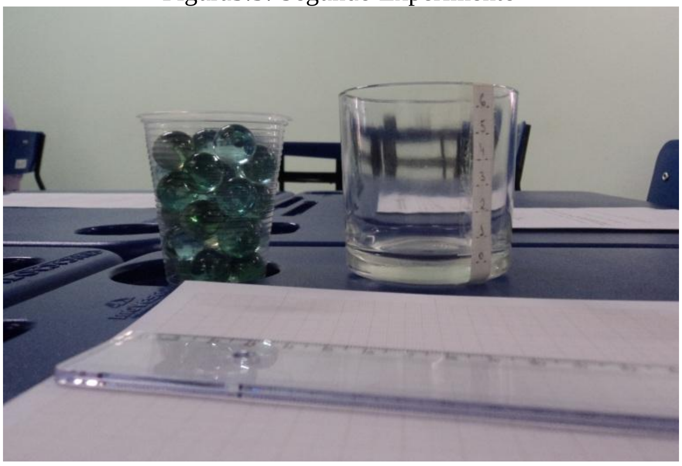
<u>Questionamento:</u>

a) Identifique as grandezas envolvidas no experimento.
b) Os pontos obtidos na tabela 1.1 estão alinhados? Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento?
c) Os pontos obtidos na tabela 1.2 estão alinhados? Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento?
d) É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.
e) Qual a razão entre a variação das grandezas envolvidas no experimento 1.1.?
f) Qual a razão entre a variação das grandezas envolvidas no experimento 1.2. ?
g) O que você observa no comportamento dos dois experimentos (1.1 e 1.2)? Existe uma relação entre eles? Justifique.

3.1.1.2 Segundo Experimento – Nível de água no copo

Neste experimento o nível de água no copo é dado em função do número de bolinhas de gude que se coloca dentro do copo, conforme na Figura 3.3. Assim, considera-se o número de bolinhas como a variável independente e o nível da água como variável dependente. Os materiais necessários para este experimento são: bolinhas de gude, copo com marcação, papel milimetrado e régua.

Figura3.3: Segundo Experimento



Fonte: Produção do próprio autor

Procedimento:

- Coloque água no do copo até atingir uma altura de 3 cm;
- Coloque as bolinhas de gude no copo com água (4 bolinhas de cada vez) e anote na Tabela 2.1 o nível que está a água;

Tabela 2.1: nível da água no copo

Número de bolinhas no copo	Nível da água
0	3 cm
4	
8	
12	
16	

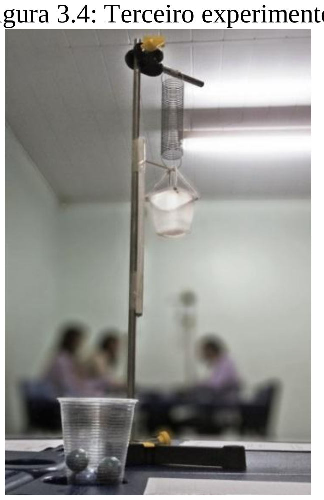
Questionamento

a) Identifique as grandezas envolvidas no experimento.
b) O conjunto de pontos representados graficamente tem um padrão de comportamento conhecido? Qual?
c) À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.
d) Qual o número máximo de "bolinhas" que devem ser colocadas no copo para que a água não transborde?
e) Qual altura mínima que o copo utilizado neste experimento deveria ter para comportar um experimento com 100 "bolinhas"?
f) Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?
g) Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

3.1.1.3 Terceiro Experimento – Sistema massa-mola

Neste experimento a deformação da mola é dada em função do número de bolinhas de gude que está dentro do pote, conforme a Figura 3.4. Assim, considera-se o número de bolinhas como a variável independente e a deformação da mola como variável dependente. Os materiais utilizados para este experimento são: bolinhas de gude, haste e base, mola, pote, papel milimetrado e régua.

Figura 3.4: Terceiro experimento



Fonte: Produção do próprio autor

Procedimento:

- Coloque no pote de iogurte uma bolinha de gude de cada vez;
- Anote na tabela 3.1 o nível da mola em relação ao ponto inicial a cada bolinha colocada no pote;

Tabela 3.1: Nível da mola

Número de bolinhas no potinho	**Deformação da mola**
0	0
1	
2	
3	
4	
5	

Questionamentos:

a) Quais as grandezas envolvidas no experimento?
b) O conjunto de pontos representados graficamente tem um padrão de comportamento conhecido? Qual?
c) À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a deformação da mola? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.
d) Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?
e) O que acontece com a deformação da mola quando duplicamos o número de bolinhas? E quando triplicamos?
f) Existe uma “curva” que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

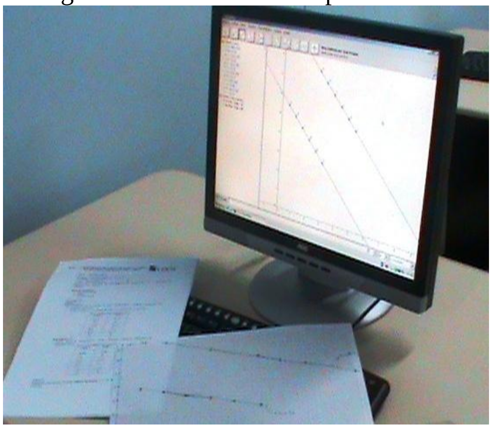
3.1.2 Ambiente Computacional

Para o trabalho no ambiente computacional, primeiramente é fornecido uma lista de comandos básicos do *software* GeoGebra (Apêndice A) que são utilizados nas atividades desenvolvidas. No ambiente computacional cada experimento é trabalhado separadamente. Deste modo, a organização proposta na Figura 3.1 é também considerada neste momento.

O procedimento proposto é simples e igual para todos os experimentos. A ideia é que os dados das tabelas obtidas sejam plotados no *software*. Então a partir dessas informações são realizados os questionamentos.

3.1.2.1 Primeiro Experimento

Figura 3.5: Ambiente Computacional I



Fonte: Produção do próprio autor

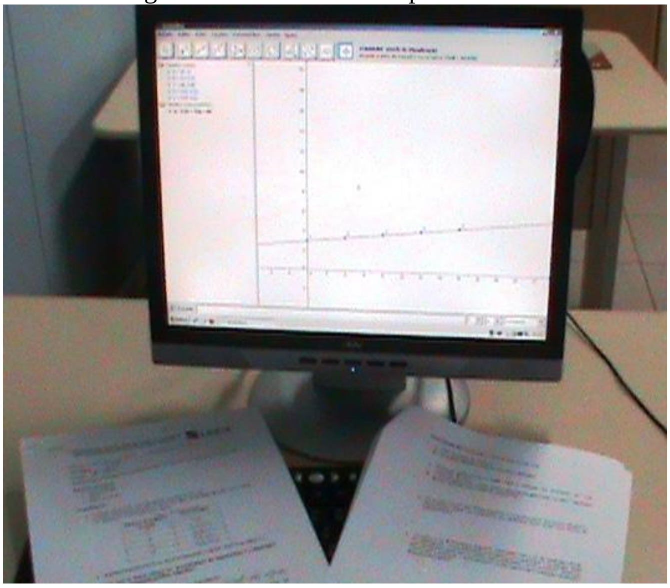
Questionamento

Quadro 3-1: Questionamento 1

a.	Os pontos obtidos no experimento 1.1 e 1.2 estão alinhados?
b.	Una os pontos do experimento 1.1 por segmentos de reta;
c.	Una os pontos do experimento 1.2 por segmentos de reta;
d.	Verifique graficamente a razão entre a variação das grandezas em cada Experimento;
e.	O que acontece com a razão entre a variação das grandezas em cada segmento de reta definida pelos dados dos experimentos 1.1 e 1.2?
f.	Plote uma “curva” que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento 1.1. Quais as conjecturas que podemos fazer sobre esta forma de representação? Repita o procedimento para os dados do experimento 1.2.
g.	Compare as lei de formação dada pelo GeoGebra com a lei da formação obtida no experimento 1.1. O que representa a grandeza x e a grandeza y na função dada pelo GeoGebra? Quais são os valores que a grandeza x pode assumir? Quais os valores que a grandeza y pode assumir? O que representa a constante na função dada pelo GeoGebra? Refaça a análise para os dados do experimento 1.2.
h.	O que é possível inferir sobre os gráficos obtidos nos experimentos 1.1 e 1.2?

3.1.2.2 Segundo Experimento

Figura 3.6: Ambiente Computacional II



Fonte: Produção do próprio autor

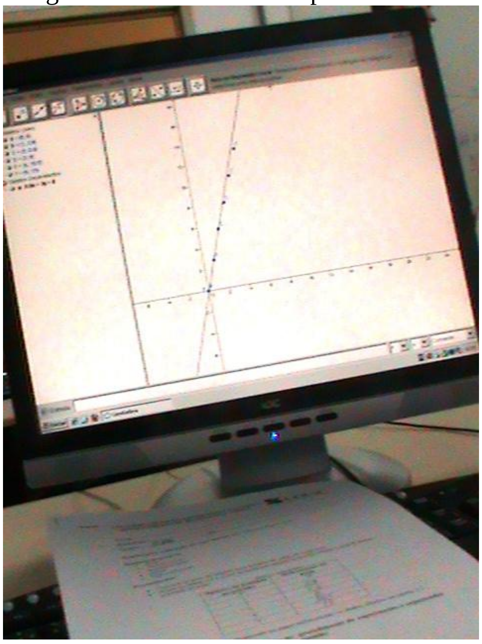
<u>Questionamento</u>

Quadro 3-2: Questionamento 2

a.	Os pontos obtidos no experimento estão alinhados?
b.	Verifique graficamente a razão entre a variação das grandezas em cada "segmento de reta";
c.	O que acontece com a razão entre a variação das grandezas em cada "segmento de reta" definido pelos dados do experimento?
d.	Plote uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento. Quais as conjecturas que podemos fazer sobre esta forma de representação?
e.	Compare a lei de formação dada pelo GeoGebra com a lei da formação obtida no experimento. O que representa a grandeza x e a grandeza y na função dada pelo Geogebra? Quais são os valores que a grandeza x pode assumir? Quais os valores que a grandeza y pode assumir? O que representa a constante na função dada pelo Geogebra?

3.1.2.3 Terceiro Experimento

Figura 3.7: Ambiente Computacional III



Fonte: Produção do próprio autor

Questionamento

Quadro 3-3: Questionamento 3

a.	Os pontos obtidos no experimento estão alinhados?
b.	Verifique graficamente a razão entre a variação das grandezas em cada segmento;
c.	O que acontece com a razão entre a variação das grandezas em cada segmento de reta definido pelo experimento?
d.	Plote uma “curva” que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento.
e.	Compare a lei de formação dada pelo GeoGebra com a lei da formação obtida no experimento. O que representa a grandeza x e a grandeza y na função dada pelo GeoGebra? Quais são os valores que a grandeza x pode assumir? Quais os valores que a grandeza y pode assumir? Qual o valor da constante na função dada pelo GeoGebra? O que isto significa?

3.2 ANÁLISE A PRIORI

A análise a priori da experimentação foi realizada considerando o fato de que os alunos ainda não tinham formalizado, até o momento na graduação, o conceito de função, bem como o fato que esta atividade irá ser aplicada antes de o professor abordar tal conceito.

Apresentaremos na sequência uma análise a priori, tanto dos procedimentos técnicos quanto didáticos da atividade proposta. Focaremos a nossa análise a priori, no ambiente lápis e papel. A etapa no ambiente computacional será descrita apenas na institucionalização da atividade.

3.2.1 Análise a Priori dos Procedimentos Técnicos para a Realização dos Experimentos

Na primeira etapa da realização dos experimentos, em termos técnicos, possivelmente os alunos não devem apresentar muitas dúvidas, visto que os procedimentos trazem as informações necessárias para a realização de cada experimento.

No experimento 1, perímetro dos retângulos, é provável que os alunos somente utilizem os números naturais para representar a medida dos lados dos retângulos. Nos experimentos 2 e 3, nível de água e sistema massa-mola, respectivamente, podem ocorrer erros de medidas no momento de realizar os experimentos, esses erros podem estar associados tanto no que diz respeito ao material utilizado para a medição quanto um erro do observador. Fatores como a inexperiência dos alunos com atividades práticas, bem como as mesas e cadeiras não serem adequadas para atividades experimentais, podem influenciar para os erros na medição, mesmo sendo previstas explicações, no início da atividade, de alguns procedimentos técnicos de realização do experimento que possam minimizar o erro na coleta dos dados obtidos em cada etapa do experimento.

Na segunda etapa, quando os alunos tiverem que representar graficamente os dados obtidos nas tabelas, a dificuldade que os alunos podem apresentar possivelmente estará relacionada a utilização do papel milimetrado para construir os gráficos, supondo que os alunos não utilizam frequentemente este em atividades didáticas.

Quanto a parte desenvolvida no ambiente computacional alguns alunos poderão ter algumas dificuldades relativas a alguns comandos específicos, como por exemplo, encontrar por meio da regressão linear a curva que melhor ajusta os pontos, haja vista que para muitos talvez seja o primeiro contato com o software GeoGebra.

3.2.2 Análise a Priori do Primeiro Experimento - Perímetro do Retângulo

Após a realização do procedimento e considerando cada item do questionamento proposto (Quadro 3.4), acreditamos que os alunos utilizem as seguintes estratégias de resolução:

Quadro 3-4: Questionamento do primeiro experimento

a) Identifique as grandezas envolvidas no experimento. b) Os pontos obtidos na tabela 1.1 estão alinhados? Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento? c) Os pontos obtidos na tabela 1.2 estão alinhados? Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento? d) É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique. e) Qual a razão entre a variação das grandezas envolvidas no experimento 1.1.? f) Qual a razão entre a variação das grandezas envolvidas no experimento 1.2. ? g) O que você observa no comportamento dos dois experimentos (1.1 e 1.2)? Existe uma relação entre eles? Justifique.

a) Grandezas envolvidas:

Acreditamos que os alunos não terão dúvidas em expressar as grandezas envolvidas neste experimento, visto que na tabela fornecida já foram colocados Lado 1 e Lado 2 e isso influenciará os alunos na resposta.

b) e c) Pontos alinhados:

Os alunos poderão verificar se os pontos estão alinhados intuitivamente, ou melhor, analisando apenas no gráfico. Como os gráficos serão construídos no papel milimetrado essa percepção ficará mais fácil.

Ao notarem que os pontos estão alinhados, ficará claro que a melhor curva que descreve o comportamento dos dados é a reta, acreditando que, os alunos consideram uma reta sendo uma curva.

Se eles não conseguirem ter essa percepção, os alunos podem demonstrar, matematicamente, que os pontos estão alinhados, utilizando a teoria de que três pontos estão alinhados se o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos é nulo. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d) Relação entre as grandezas:

i. Raciocínio lógico:

Os alunos podem pensar que à medida que aumentamos o comprimento de um lado o outro diminui proporcionalmente. Assim, existe uma relação de proporção entre as grandezas.

ii. Relação com a fórmula do cálculo do perímetro:

Os alunos podem encontrar uma relação para as grandezas utilizando a fórmula do cálculo do perímetro, da seguinte maneira:

$P = 2l_1 + 2l_2$; sendo l_1 e l_2, lado 1 e lado 2, respectivamente.

Como temos o perímetro fixo e igual 20, podemos substituí-lo na fórmula, então teremos, $20 = 2l_1 + 2l_2$, dividindo por 2 e isolando l_1 obtemos, $l_1 = 10 - l_2$.

e) e f) Razão entre a variação das grandezas:

Os alunos provavelmente terão dificuldade em identificar a razão entre a variação das grandezas, visto que, é possível que eles não tenham o conceito de razão formalizado.

Para os alunos que não conseguirem identificar as grandezas envolvidas no experimento (item a), é provável que não respondam este item.

g) Relação entre os experimentos

Os alunos podem observar no plano cartesiano essa relação, verificando que as retas possuem a mesma inclinação e então, tirarem as suas conclusões. Esta observação pode ser vista pelo ponto de vista geométrico ou pelo ponto de vista analítico (razão entre as variações das grandezas).

3.2.3 Análise a Priori do Segundo Experimento – Nível de água no copo

Após o procedimento referente a este experimento realizado, as possíveis estratégias de resolução dos alunos, considerando cada item do Quadro 3.5, são:

Quadro 3-5: Questionamento do segundo experimento

a) Identifique as grandezas envolvidas no experimento. b) O conjunto de pontos representados graficamente tem um padrão de comportamento conhecido? Qual? c) À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique. d) Qual o número máximo de “bolinhas” que devem ser colocadas no copo para que a água não transborde? e) Qual altura mínima que o copo utilizado neste experimento deveria ter para comportar um experimento com 100 “bolinhas”? f) Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento? g) Existe uma “curva” que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

a) Grandezas envolvidas:

Os alunos possivelmente, do mesmo modo que no primeiro experimento, não apresentarão dúvidas neste item, visto que na tabela fornecida para ser preenchida, está explicitado “números de bolinhas” e “nível de água”.

b) Padrão de comportamento:

A resposta desse item vai variar de grupo para grupo, isto porque cada grupo irá encontrar valores diferentes para o nível de água no copo, visto que, receberão bolinhas diferentes e também deve ser considerado o erro na hora de verificar o nível de água no copo.

Então, alguns grupos podem apresentar na representação gráfica todos os pontos alinhados e para afirmar isso, utilizarão os mesmos métodos do primeiro experimento. Outros grupos podem apresentar um, dois, ou mais pontos fora do alinhamento, assim, eles podem alegar que aqueles pontos não seguem nenhum comportamento.

c) Relação entre as grandezas:

É evidente que os alunos responderão que à medida que colocamos as bolinhas no copo o nível de água aumenta.

Quanto a relação entre as grandezas eles podem estabelecer por duas maneiras:

i. Raciocínio lógico:

Os alunos podem escrever que a cada vez que acrescentamos as bolinhas no copo, o nível de água sobe 0,4cm.

ii. Lei de formação da função:

Os alunos podem apresentar a relação entre as grandezas através da função que descreve o experimento, como eles têm os pontos na tabela, podem encontrar a forma algébrica da função. Se a função é da forma $y = ax + b$, substituindo os valores da tabela, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4a + b = 3{,}4 \\ 8a + b = 3{,}8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontraremos, $a = 0{,}1$ e $b = 3,$ logo a relação entre as grandezas é dada por $y = 0{,}1x + 3$.

d) Número de bolinhas máximo

Vamos analisar este item, levando em consideração que a altura do copo é de 7 cm.

i. Raciocínio lógico:

Para os alunos que responderam o item anterior utilizando somente o raciocínio, eles podem usar a lógica para resolver esse item também. Se eles pensaram que com 4 bolinhas no copo, o nível de água sobe 0,4cm, e eles querem encontrar qual o número de bolinhas para o nível de água estar em 7cm, lembrando que o nível de água inicial é de 3,0cm, então:

$$4 \rightarrow 0{,}4$$

$$x \rightarrow 4{,}0$$

$$0{,}4\,x = 16 \rightarrow x = 40$$

ii. Lei de formação da função:

Para os alunos que encontrar a equação no item anterior, eles somente precisam substituir o valor do nível de água e encontrar o número de bolinhas, ou seja,

$$y = 0{,}1x + 3$$

$$7 = 0{,}1x + 3 \ \rightarrow x = 40$$

e) Altura mínima:

Da mesma forma que o item anterior os alunos podem resolver, utilizando as duas maneiras:

i. Raciocínio lógico:

Analogamente ao item anterior, os alunos podem pensar:

$$4 \ \rightarrow 0{,}4$$

$$100 \ \rightarrow x$$

$$4x = 40 \ \rightarrow x = 10$$

Mas, aqui, eles ainda devem lembrar-se de considerar o nível de água inicial que é 3 cm, logo, o copo deverá ter altura de 13cm.

ii. Lei de formação da função:

Analogamente,

$$y = 0{,}1x + 3$$

$$y = 0{,}1 * 100 + 3 \ \rightarrow 13cm$$

f) Razão entre as grandezas

Do mesmo modo que no primeiro experimento, os alunos provavelmente terão dificuldade em identificar a razão entre a variação das grandezas, pelos mesmos motivos já apresentados.

g) Curva que melhor descreve o experimento:

Esta questão esta diretamente ligada ao item b deste experimento. Se os alunos encontraram que os pontos estão alinhados, certamente, descreverão que a reta é a curva que melhor descreve este experimento.

Já os grupos que apresentarem pontos fora do comportamento, poderão apresentar dúvidas para responder essa pergunta, visto que, eles não conhecem ainda o ajuste de curva.

3.2.4 Análise a Priori do Terceiro Experimento – Sistema massa-mola

Após o procedimento referente a este experimento realizado, as possíveis estratégias de resolução dos alunos, considerando cada item do Quadro 3.6, são:

Quadro 3-6: Questionamento do terceiro experimento

a) Quais as grandezas envolvidas no experimento?
b) O conjunto de pontos representados graficamente tem um padrão de comportamento conhecido? Qual?
c) À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a deformação da mola?
d) É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.
e) Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?
f) O que acontece com a deformação da mola quando duplicamos o número de bolinhas? E quando triplicamos?
g) Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

a) Grandezas envolvidas:

Para este item, valem as mesmas considerações já descritas anteriormente.

b) Padrão de comportamento:

Para este item novamente temos as mesmas considerações feitas para o experimento anterior, o que difere aqui é que os alunos vão encontrar a medida da deformação da mola.

c) Relação entre as grandezas:

É evidente que os alunos responderão que à medida que colocamos as bolinhas no pote a deformação da mola aumenta.

Quanto, a relação entre as grandezas eles podem estabelecer por duas maneiras:

i. Raciocínio lógico:

Os alunos podem escrever que a cada vez que acrescentamos as bolinhas no copo, a deformação da mola aumenta 0,5. Assim, podem concluir:

$$\begin{gathered} 1 \rightarrow 0{,}5 \\ 2 \rightarrow 1{,}0 \\ 3 \rightarrow 1{,}5 \\ \vdots \\ x \rightarrow 0{,}5x \end{gathered}$$

ii. Lei de formação da função:

Os alunos podem apresentar a relação entre as grandezas através da função que descreve o experimento, como eles têm os pontos na tabela, podem encontrar a forma algébrica da função. Se a função é da forma $y = ax + b$, substituindo os valores da tabela, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 2{,}5 \\ 2a + b = 5{,}0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontraremos, $a = 2{,}5$ e $b = 0,$ logo a relação entre as grandezas é dada por $y = 0{,}5$.

d) Razão entre as grandezas:

Para este item, vale as mesmas considerações já descritas anteriormente.

e) Aumentando as bolinhas:

Para responder este item, os alunos devem utilizar os resultados encontrados no item c, então concluirão facilmente, que se duplicarmos os números de bolinhas irão duplicar o valor da deformação da mola. Se triplicarmos o número de bolinhas irão triplicar o valor da deformação da mola.

f) Curva que melhor descreve:

Esta questão esta diretamente ligada ao item b deste experimento. Se os alunos encontraram que os pontos estão alinhados, certamente, descreverão que a reta é a curva que melhor descreve este experimento.

Já os grupos que apresentarem pontos fora do comportamento, poderão apresentar dúvidas para responder essa pergunta, visto que, eles não conhecem ainda o ajuste de curva.

Na sequência apresentamos o contexto da experimentação realizada, bem como a análise dos dados obtidos desta aplicação.

4. ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo, apresentaremos o contexto da aplicação da sequência e a análise a posteriori dos experimentos realizados em sala de aula. Essa análise é baseada nas resoluções das questões propostas aos alunos em cada experimento.

A sequência proposta foi aplicada numa turma de primeira fase do curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina-UDESC-CCT. Neste curso está presente a disciplina de Matemática Básica que aborda o nosso objeto de estudo: funções. A escolha também foi motivada pelo fato de ser um curso de Licenciatura, fomentando a formação inicial podemos incentivar a aplicação de metodologias no ensino básico, haja vista que estes alunos serão futuros professores. Antes do início da atividade, os alunos foram esclarecidos da atividade a ser realizada e da importância da mesma. Também foram esclarecidos sobre a utilização das atividades realizadas por eles para a produção deste trabalho.[1]

Acordamos com a professora da turma que aplicaríamos a sequência, com a presença da mesma, antes da professora abordar o conteúdo relativo às funções, ou seja, utilizaríamos a sequência para introduzir o assunto. A experimentação foi acompanhada pela professora da classe, professora participante e a autora deste trabalho e envolveu um tempo de 05 horas aula.

Algumas condições foram criadas para a realização desta sequência:

i) Organização da classe:

- Os estudantes deveriam trabalhar em grupos de quatro alunos no ambiente lápis e papel;
- Cada grupo recebeu os instrumentos e o procedimento relativo ao experimento, deixando um tempo livre para a realização de cada tarefa;
- Juntamente com os procedimentos necessários para a execução do experimento, foram propostos os questionamentos relativos a cada experimento, sendo que uma ficha por grupo deveria ser entregue ao final da atividade. Estes protocolos foram muito importantes para a análise a posteriori.

ii) Institucionalização do objeto de estudo:

- Inicialmente os alunos desenvolveram, em grupo, a tarefa.

[1] Os alunos assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido, bem como uma autorização de uso de imagem.

- Após, ocorreu uma discussão da atividade no laboratório de informática, mediada pela professora participante do projeto.
- A professora da turma institucionalizou o objeto de estudo com os alunos na aula seguinte.

Participaram da aplicação da sequência sete grupos de quatro alunos cada, sendo aqui denominados por grupo A, grupo B, grupo C, grupo D, grupo E, grupo F e grupo G. Infelizmente, no momento da aplicação da sequência não foi possível acompanhar as discussões de todos os grupos em todos os momentos.

Por isso, para esta análise vamos nos deter principalmente nas resoluções registradas no papel, considerando as tentativas e estratégias de resolução. Porém, nos aspectos que forem mais relevantes, vamos considerar o que foi observado durante a aplicação.

É importante destacar que, durante a aplicação, nem todos os grupos estavam simultaneamente realizando o mesmo experimento, em função da limitação da quantidade de instrumentação técnica para a realização simultânea dos experimentos.

A seguir apresentamos a análise relativa à aplicação desta sequência, tanto em termos técnicos quanto didáticos.

4.1 ANÁLISE A POSTERIORI DOS PROCEDIMENTOS TÉCNICOS PARA A REALIZAÇÃO DOS EXPERIMENTOS

Durante a realização dos experimentos, os grupos, em geral, não apresentaram questionamentos referentes aos procedimentos propostos para a execução da atividade.

No experimento 1, perímetro dos retângulos, alguns grupos se questionaram sobre a possibilidade de se encontrar vários retângulos com o mesmo perímetro. Nos experimentos 2 e 3, nível de água e sistema massa-mola, respectivamente, os grupos não apresentaram problemas com a utilização e manuseio dos materiais fornecidos.

Na segunda etapa, quando os alunos representaram graficamente os dados obtidos nas tabelas, verificamos que apenas 3 grupos utilizaram o papel milimetrado corretamente, conforme foi explicado no início da atividade. Nesta etapa, também verificamos que o processo de conversão, da representação dos pontos nos diferentes registros, tabular e gráfico, foi realizado naturalmente pelos grupos.

4.2 ANÁLISE A POSTERIORI DO PRIMEIRO EXPERIMENTO – PERÍMETRO DO RETÂNGULO

A dúvida apresentada pelos grupos durante a realização deste experimento estava ligada a utilização dos números decimais. Os grupos se questionavam sobre a possibilidade das medidas dos lados serem "números quebrados", assim por eles designados.

Apenas o grupo G considerou a possibilidade da permutação dos valores dos lados. O grupo completou a tabela que apresentava os valores dos lados dos retângulos de 20 cm de perímetro, conforme a figura 4.1:

Figura 4.1: Tabela do grupo G

Lado 1	Lado 2
6cm	4cm
7cm	3cm
5cm	5cm
8cm	2cm
1 cm	9cm
2cm	8cm

Fonte: Protocolo grupo G

Todos os outros seis grupos consideraram os números decimais e não fizeram permutação entre os valores dos lados, talvez pelo fato de os alunos pensarem que os pares (2,3) e (3,2) são equivalentes, a figura 4.2 mostra a tabela preenchida pelo grupo A:

Figura 4.2: Tabela do grupo A

Lado 1	Lado 2
4	2
3,5	2,5
1,5	4,5
3,0	3,0
1,0	5,0
0,5	5,5

Fonte: Protocolo grupo A

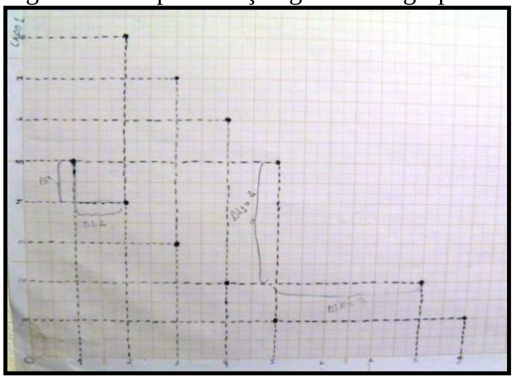
Na segunda etapa da realização do experimento, a discussão, entre os membros de cada grupo, estava relacionada se eles deviam ou não unir estes pontos, a figura 4.3 mostra um momento de discussão de um grupo.

Figura 4.3: Realização do primeiro experimento

Fonte: Produção do próprio autor

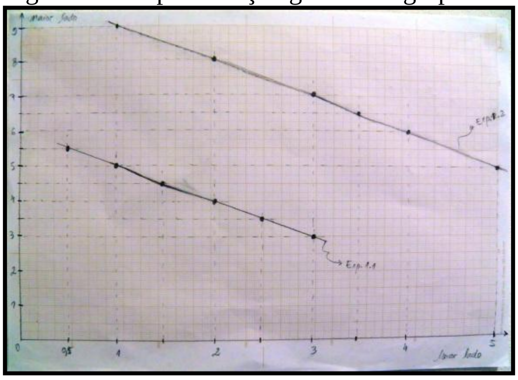
Apenas o grupo G, não uniu os pontos. Todos os outros grupos uniram os pontos por uma reta. A figura 4.4 mostra a representação do grupo G e a figura 4.5 mostra a representação de um grupo que uniu os pontos:

Figura 4.4: Representação gráfica do grupo G



Fonte: Protocolo grupo G

Figura 4.5: Representação gráfica do grupo F



Fonte: Protocolo grupo F

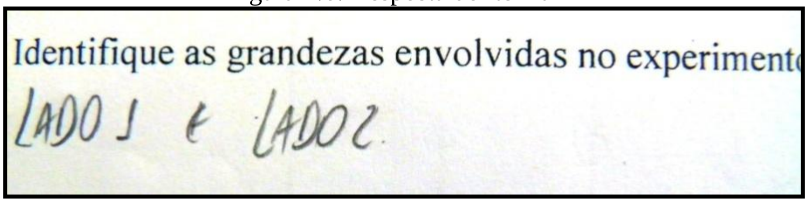
Agora, da mesma maneira que apresentamos a análise a priori, vamos fazer a análise a posteriori de cada item do quadro 3.4 (p. 40).

a) Grandezas envolvidas:

Percebemos durante as discussões dos grupos que a maioria dos alunos não tinha um entendimento sobre o que são grandezas, foi algo novo para os alunos, haja vista que geralmente os professores utilizam os termos variáveis independentes e dependentes para apresentar uma função matemática. Analisando as resoluções apresentadas pelos grupos, observamos que:

- Dos 7 (sete) grupos, 4 (quatro) apresentaram como resposta, que as grandezas envolvidas são os lados e registraram no papel exatamente, lado 1 e lado 2, conforme confirma a figura 4.6:

Figura 4.6: Resposta do item a - I


Identifique as grandezas envolvidas no experiment

LADO 1 E LADO 2

Fonte: Protocolo grupo F

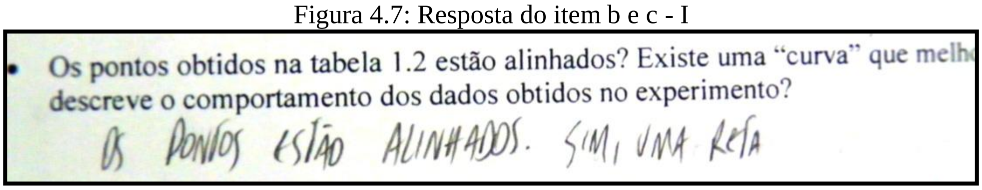
- O grupo F denominou, para lado 1 e lado 2, como sendo "maior e menor lado";
- O grupo C apresentou como resposta que as grandezas envolvidas são "as medidas dos lados do retângulo";
- O grupo E, "comprimento e largura";
- O grupo D, colocou os valores das tabelas apresentados somente na primeira coluna, como sendo as grandezas envolvidas.

b) e c) Pontos alinhados:

Nestes itens podemos constatar, a partir das respostas dadas pelos grupos:

- Seis grupos foram bem objetivos nas suas respostas, afirmando que os pontos estavam alinhados e que a curva que melhor descrevia o comportamento dos dados era a reta, conforme a figura 4.7:

Figura 4.7: Resposta do item b e c - I


- Os pontos obtidos na tabela 1.2 estão alinhados? Existe uma "curva" que melh descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento?

OS PONTOS ESTÃO ALINHADOS. SIM, UMA RETA

Fonte: Protocolo grupo F

- O grupo E afirmou que os pontos estavam alinhados, mas não definiu uma curva para descrever o comportamento dos dados. Pela resposta dada, percebemos que o grupo identificou uma relação entre as grandezas, podemos verificar o registro do grupo E, na figura 4.8:

Figura 4.8: Resposta do grupo E em relação aos itens b e c

Os pontos obtidos na tabela 1.1 estão alinhados? Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos dados obtidos no experimento?

Sim, estão alinhados. Sim, existe uma proporcionalidade em relação ao comprimento e largura dos retângulos: Enquanto um aumenta o outro diminui.

Fonte: Protocolo grupo E

d) Relação entre as grandezas:

Verificamos neste item que:

- Dos 7 (sete) grupos, 3 (três) grupos utilizaram a fórmula do cálculo do perímetro para encontrar a relação, na figura 4.9 apresentamos o registro do grupo F para este item:

Figura 4.9: Resposta do grupo F apresentada para o item d

- É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

Sim, no caso da tabela 1.1, devemos ter $2x+2y=12 \Rightarrow x+y=6 \Rightarrow x=6-y$.

No caso da tabela 2.2, devemos ter $2x+2y=20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$.

Fonte: Protocolo grupo F

- 2 (dois) grupos apresentaram suas resoluções utilizando o raciocínio lógico, conforme podemos constatar na figura 4.10:

Figura 4.10: Resposta apresentada para o item d - I

- É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

Sim. À medida que o lado menor aumenta, o lado maior diminui, ou seja, estes lados são inversamente proporcionais.

Fonte: Protocolo grupo E

- Embora alguns grupos não tenham expressado a relação entre as grandezas algebricamente ou mesmo por raciocínio lógico, todos os grupos afirmaram que existe uma relação entre as grandezas envolvidas;

- Dos grupos que encontraram uma representação algébrica para relacionar as grandezas, apenas um grupo utilizou a notação l_1 e l_2 para representar os lados do retângulo, os outros dois grupos utilizaram x e y, evidenciando a questão da notação clássica geralmente utilizada pelos professores;

- Um grupo afirmou que existe uma relação com o perímetro, mas não descreveu qual seria a relação nem em termos matemáticos, nem utilizando o raciocínio lógico.

e) e f) Razão entre as grandezas envolvidas no experimento:

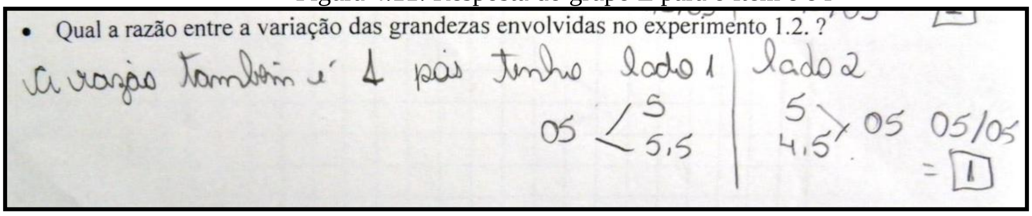
Analisando os resultados, observamos que:

- Dos 7 (sete) grupos, 4 (quatro) afirmaram que a razão é 1;

- 2 (dois) grupos escreveram que a razão vale 1, mas não justificaram e nem apresentaram algum cálculo;

- O grupo E, apresentou um cálculo para justificar sua resposta, para encontrar a razão, o grupo, dividiu a variação da medida de um lado pela variação da medida do outro lado, encontrando 1 como resposta, conforme pode ser visto na figura 4.11:

Figura 4.11: Resposta do grupo E para o item e e f



- Qual a razão entre a variação das grandezas envolvidas no experimento 1.2. ?

a razão também é 1 pois tenho lado 1 | lado 2

05 < 5 5,5 | 5 4,5 > 05 05/05 = $\boxed{1}$

Fonte: Protocolo grupo E

- O grupo A afirmou que a razão é 0,5, justificando que, "conforme um lado aumenta o outro diminui".

g) Relação entre os experimentos:

Observamos que:

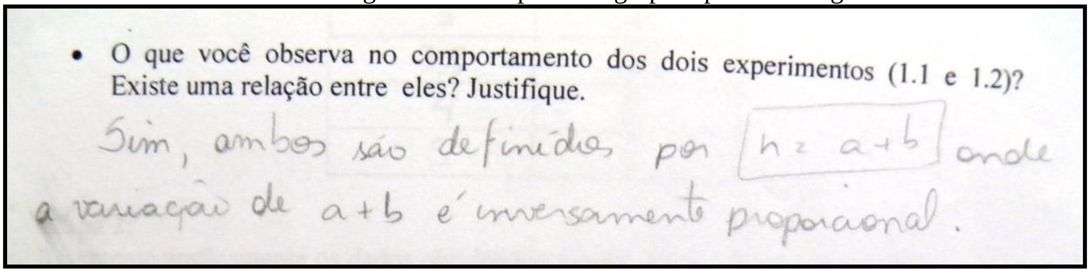
- 3 (três) grupos afirmaram que ambas as retas são paralelas;

- O grupo B percebeu que a razão entre as grandezas envolvidas em ambos os experimentos é a mesma.

- O grupo E apontou que existia uma relação devido ao fato das medidas do comprimento ser proporcionais a largura;

- O grupo F verificou que ambos os experimentos são descritos por $h = a + b$, conforme podemos ver na figura 4.12:

Figura 4.12: Resposta do grupo F para o item g



- O que você observa no comportamento dos dois experimentos (1.1 e 1.2)? Existe uma relação entre eles? Justifique.

Sim, ambos são definidos por $\boxed{h = a+b}$ onde a variação de a+b é inversamente proporcional.

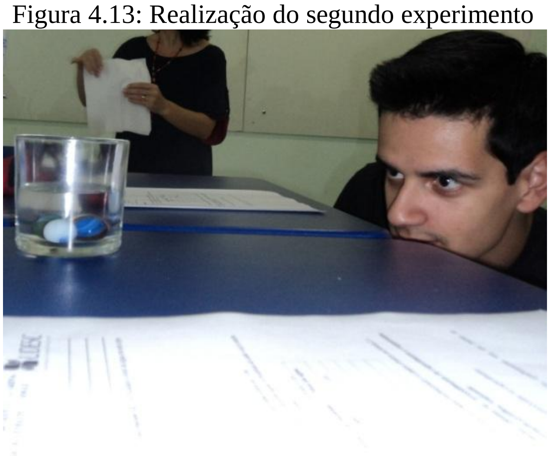
Fonte: Protocolo grupo F

- O grupo D afirmou que existia uma relação, pois os dois lados aumentam 0,5 em relação ao outro lado.

4.3 ANÁLISE A POSTERIORI DO SEGUNDO EXPERIMENTO – NÍVEL DE ÁGUA NO COPO

Em relação ao segundo experimento, não verificamos nenhuma discussão quanto a dificuldade técnica para a sua realização. A figura 4.13 mostra um grupo realizando o experimento:

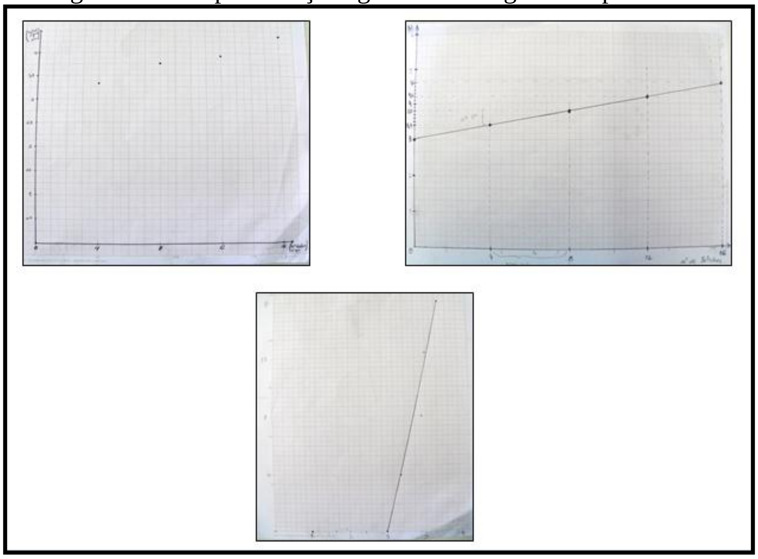
Figura 4.13: Realização do segundo experimento



Fonte: Produção do próprio autor

Quanto à representação gráfica dos dados obtidos na tabela, para este experimento, 4 (quatro) dos 7 (sete) grupos não uniram os pontos colocados no papel milimetrado. Destes, apenas um estava com todos os pontos alinhados. Na figura 4.14, apresentamos três representações gráficas que foram construídas de forma diferente.

Figura 4.14: Representações gráficas do segundo experimento



Fonte: Protocolos grupos F, C e D

Dos grupos que uniram os pontos através de uma reta, dois deles tinham os pontos alinhados.

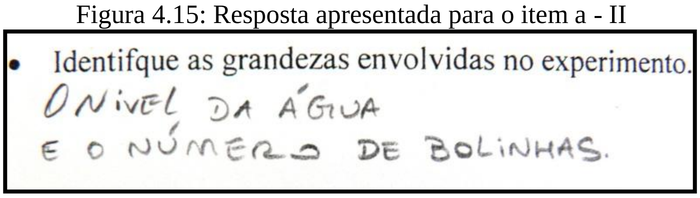
Agora, da mesma maneira que apresentamos a análise a priori, vamos fazer a análise a posteriori de cada item do quadro 3.4 (p. 42).

a) Grandezas envolvidas:

Analisando as resoluções apresentadas pelos grupos, observamos que:

- Dos 7 (sete) grupos, 4 (quatro) apresentaram como resposta, que as grandezas envolvidas, são o número de bolinhas e o nível de água, conforme registro mostrado da figura 4.15:

Figura 4.15: Resposta apresentada para o item a - II



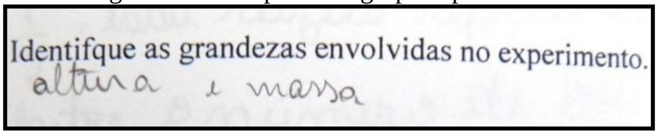
- Identifque as grandezas envolvidas no experimento.

O NIVEL DA ÁGUA
E O NÚMERO DE BOLINHAS.

Fonte: Protocolo grupo C

- O grupo A afirmou que as grandezas envolvidas são o peso e medidas;
- O grupo E, “altura e massa”, de acordo com a figura 4.16:

Figura 4.16: Resposta do grupo E para o item


Identifque as grandezas envolvidas no experimento.
altura e massa

Fonte: Protocolo grupo E

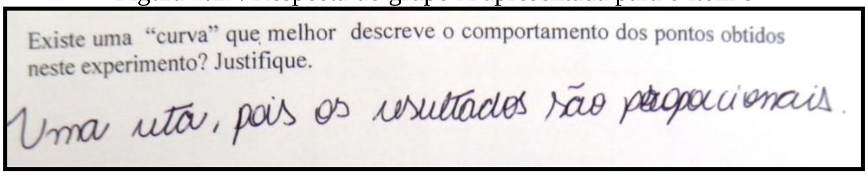
- O grupo D, colocou os valores da segunda coluna da tabela como sendo as grandezas envolvidas.

b) Padrão de comportamento

Neste item podemos constatar, a partir das respostas:

- Dos 7 (sete) grupos, 5 (cinco) concluíram que existe um padrão de comportamento conhecido;
- 3 (três) grupos afirmaram que a reta é a curva que descreve o comportamento dos dados, como o grupo A, conforme a figura 4.17:

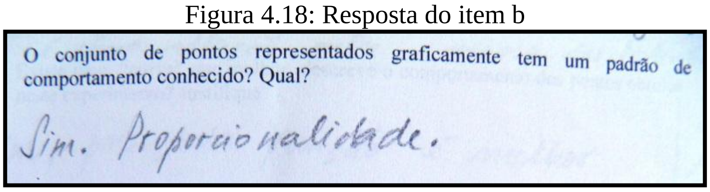
Figura 4.17: Resposta do grupo A apresentada para o item b


Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.
Uma reta, pois os resultados são proporcionais.

Fonte: Protocolo grupo A

- 2 (dois) grupos afirmaram que é a proporcionalidade que descreve o comportamento dos dados, como mostra a figura 4.18

Figura 4.18: Resposta do item b


O conjunto de pontos representados graficamente tem um padrão de comportamento conhecido? Qual?
Sim. Proporcionalidade.

Fonte: Protocolo grupo F

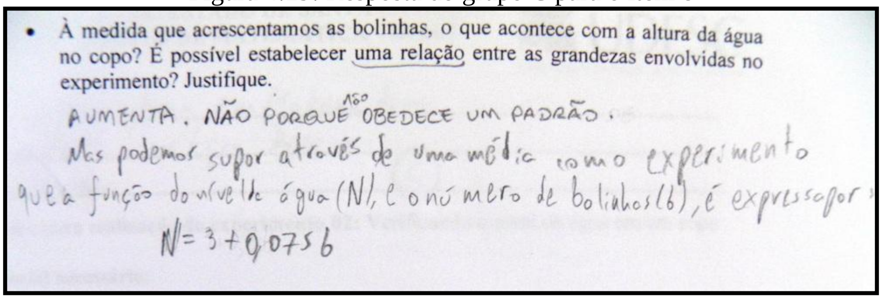
- O grupo C deixou a questão em branco;
- O grupo G respondeu que não existe um padrão de comportamento, mas não justificou sua resposta.

c) Relação entre as grandezas:

Verificamos neste item que:

- Todos os grupos reconheceram que à medida que se aumenta o número de bolinhas o nível de água aumenta no copo;
- 3 (três) grupos afirmaram que não é possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento;
- O grupo G, não justificou sua resposta a respeito da sua posição;
- O grupo C, afirmou que os dados não obedecem a um padrão, mas que se supusermos através de uma média, obteríamos $N = 3 + 0.075b$, sendo b o número de bolinhas e N o nível de água no copo, como podemos observar na figura 4.19:

Figura 4.19: Resposta do grupo C para o item c



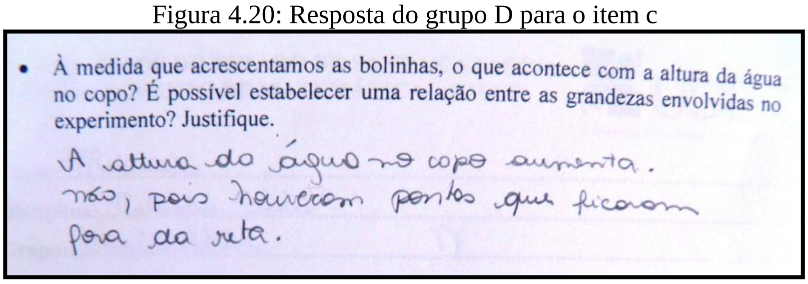
- À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

AUMENTA. NÃO PORQUE NÃO OBEDECE UM PADRÃO.
Mas podemos supor através de uma média como experimento que a função do nível de água (N), e o número de bolinhas (b), é expressa por:
N = 3 + 0,075 b

Fonte: Protocolo grupo C

- O grupo D, para justificar que não existe relação entre as grandezas, constatou que houve pontos que ficaram fora da reta, conforme mostra a figura 4.20:

Figura 4.20: Resposta do grupo D para o item c



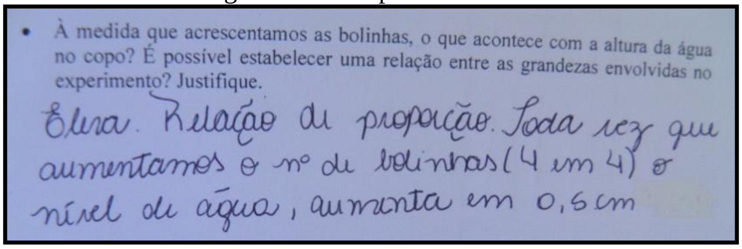
- À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

A altura do água no copo aumenta.
não, pois houveram pontos que ficaram fora da reta.

Fonte: Protocolo grupo D

- 3 (três) grupos concluíram que a relação existente é uma relação de proporcionalidade e justificaram suas respostas através do raciocínio lógico, podemos verificar uma das respostas na figura 4.21:

Figura 4.21: Resposta do item c



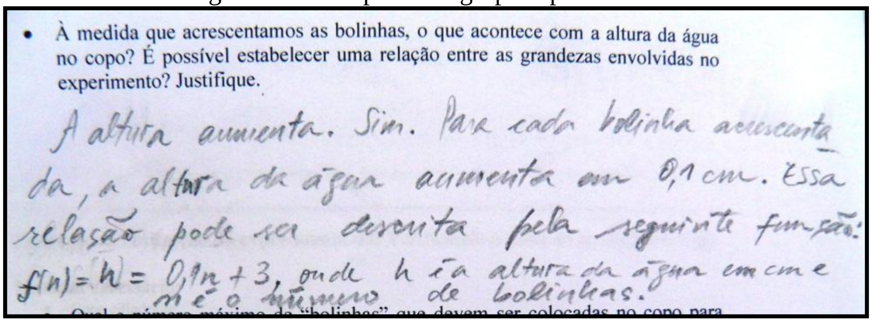
- À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

Eleva. Relação de proporção. Toda vez que aumentamos o nº de bolinhas (4 em 4) o nível de água, aumenta em 0,5 cm

Fonte: Protocolo grupo A

- O grupo F encontrou uma representação algébrica para descrever o experimento: $h = 0{,}1n + 3$, sendo h o nível de água no copo e n o número de bolinhas, podemos observar a resposta apresentada pelo grupo F na figura 4.22:

Figura 4.22: Resposta do grupo F para o item c



- À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a altura da água no copo? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

A altura aumenta. Sim. Para cada bolinha acrescentada, a altura da água aumenta em 0,1 cm. Essa relação pode ser descrita pela seguinte função: $f(n) = h = 0{,}1n + 3$, onde h é a altura da água em cm e n é o número de bolinhas.

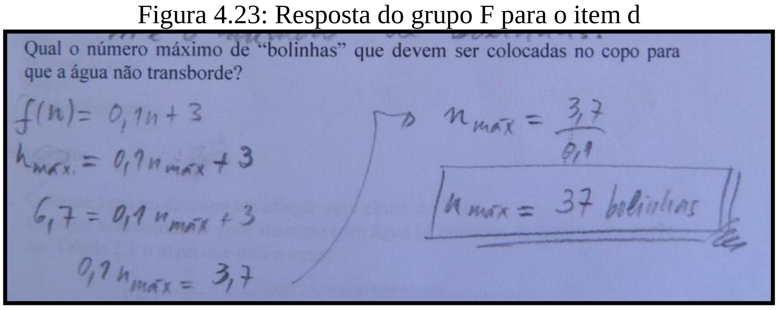
Fonte: Protocolo grupo F

d) Número de bolinhas máximo

Analisando as resoluções deste item, verificamos que:

- 4 (quatro) grupos, apenas apresentaram alguns valores aleatórios, mas não apresentaram nem cálculos nem o raciocínio para chegarem nestes valores;
- Os dois grupos que haviam encontrado uma representação matemática no item anterior, a utilizaram para resolver o problema, obtendo assim um valor para o número máximo de bolinhas, conforme a figura 4.23:

Figura 4.23: Resposta do grupo F para o item d



Qual o número máximo de "bolinhas" que devem ser colocadas no copo para que a água não transborde?

$f(n) = 0{,}1n + 3$

$h_{máx.} = 0{,}1 n_{máx} + 3$

$6{,}7 = 0{,}1 n_{máx} + 3$

$0{,}1 n_{máx} = 3{,}7$

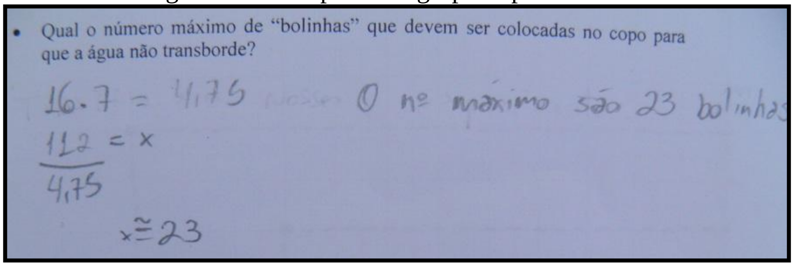
$n_{máx} = \frac{3{,}7}{0{,}1}$

$\boxed{n_{máx} = 37 \text{ bolinhas}}$

Fonte: Protocolo grupo F

- O grupo G utilizou o método da regra de três simples para obter o resultado, conforme a figura 4.24:

Figura 4.24: Resposta do grupo G para o item d



- Qual o número máximo de "bolinhas" que devem ser colocadas no copo para que a água não transborde?

$16.7 = 4{,}75$ O nº máximo são 23 bolinhas

$\frac{112}{4{,}75} = x$

$x \cong 23$

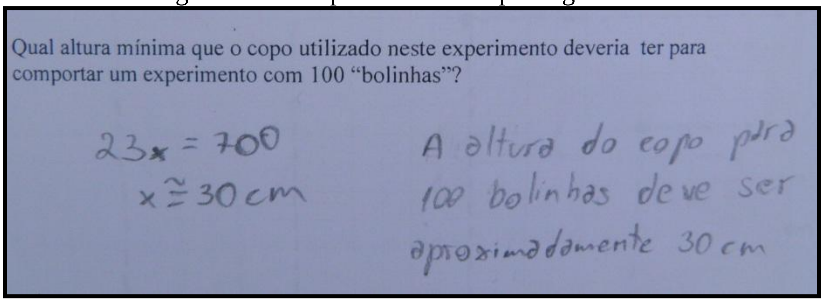
Fonte: Protocolo grupo G

e) Altura mínima:

Neste item, constatamos que:

- 3 (três) grupos apenas apresentaram alguns valores aleatórios, mas não desenvolveram um raciocínio ou cálculo para demostrar como chegaram nestes valores;
- 2 (dois) grupos resolveram o problema utilizando regra de três simples, conforme a figura 4.25:

Figura 4.25: Resposta do item e por regra de três



Qual altura mínima que o copo utilizado neste experimento deveria ter para comportar um experimento com 100 "bolinhas"?

$23x = 700$

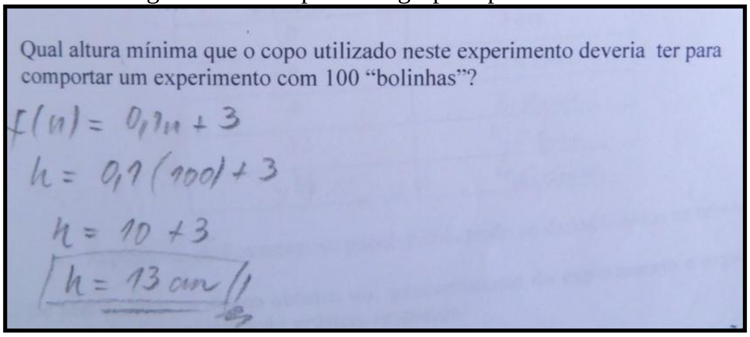
$x \cong 30$ cm

A altura do copo para 100 bolinhas deve ser aproximadamente 30 cm

Fonte: Protocolo grupo G

- Os dois grupos que haviam encontrado uma relação matemática no item c, a utilizaram para resolver o problema, obtendo um valor para a altura mínima do copo, de acordo com a figura 4.26:

Figura 4.26: Resposta do grupo F para o item e



Qual altura mínima que o copo utilizado neste experimento deveria ter para comportar um experimento com 100 "bolinhas"?

$f(n) = 0{,}1n + 3$

$h = 0{,}1(100) + 3$

$h = 10 + 3$

$\boxed{h = 13\ cm}$

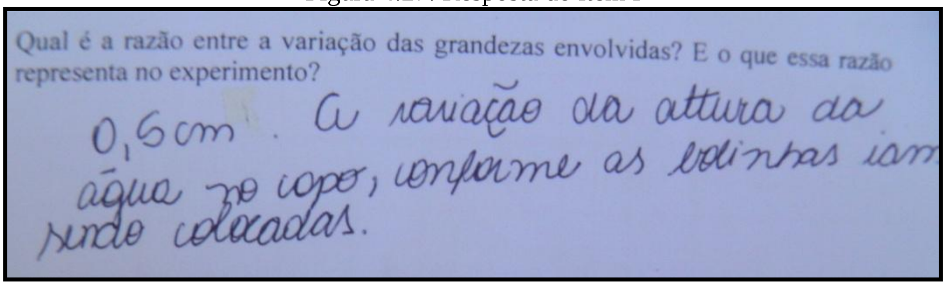
Fonte: Protocolo grupo F

f) Razão entre as grandezas

Para este item, observamos que:

- 3 (três) grupos afirmaram que a razão é o valor da variação do nível de água no copo, como podemos verificar na figura 4.27:

Figura 4.27: Resposta do item f



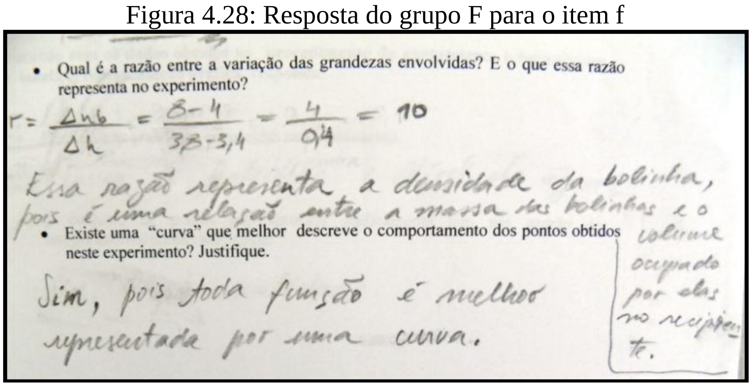
Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?

0,6cm. A variação da altura da água no copo, conforme as bolinhas iam sendo colocadas.

Fonte: Protocolo grupo A

- O grupo F, conclui que a razão representa a densidade da bolinha, justificando: "pois é uma relação entre a massa das bolinhas e o volume ocupado por elas no recipiente", no cálculo desenvolvido para encontrar a razão, o grupo, dividiu a variação do número de bolinhas pela variação do nível de água no copo, como mostra a figura 4.28:

Figura 4.28: Resposta do grupo F para o item f



- Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?

$r = \frac{\Delta nb}{\Delta h} = \frac{8-4}{3{,}8-3{,}4} = \frac{4}{0{,}4} = 10$

Essa razão representa a densidade da bolinha, pois é uma relação entre a massa das bolinhas e o volume ocupado por elas no recipiente.

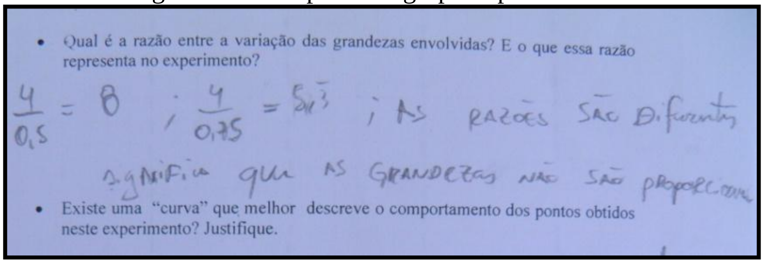
- Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

Sim, pois toda função é melhor representada por uma curva.

Fonte: Protocolo grupo F

- O grupo G, fez o seguinte cálculo: $\frac{4}{0,5}$ e $\frac{4}{0,75}$ para descobrir a razão e afirmou que as razões não eram iguais, por isso as grandezas não eram proporcionais, como mostra a figura 4.29:

Figura 4.29: Resposta do grupo G para o item f


• Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?

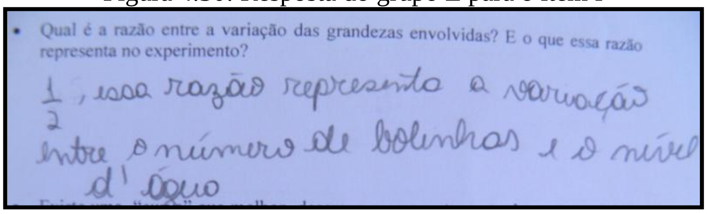
$\frac{4}{0,5} = 8$; $\frac{4}{0,75} = 5,\bar{3}$; As razões são diferentes significa que as grandezas não são proporcionais

• Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

Fonte: Protocolo grupo G

- O grupo E afirmou que a razão é ½ e que ela representa a variação entre o número de bolinhas e o nível de água, de acordo com a figura 4.30:

Figura 4.30: Resposta do grupo E para o item f


• Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?

$\frac{1}{2}$, essa razão representa a variação entre o número de bolinhas e o nível d'água

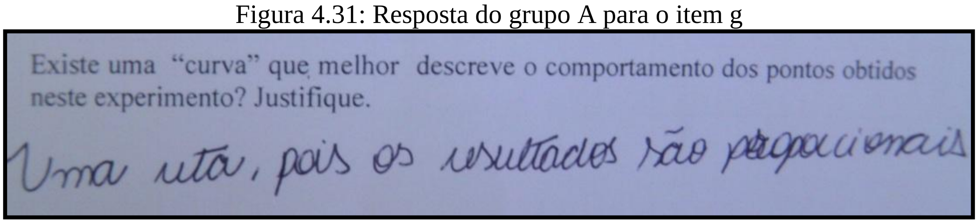
Fonte: Protocolo grupo E

g) Curva que melhor descreve o experimento

Analisamos nas respostas dadas pelos grupos que:

- 5 (cinco) grupos concluíram que a curva que melhor descreve o experimento é uma reta, conforme vemos na figura 4.31 a resposta apresentada pelo grupo A:

Figura 4.31: Resposta do grupo A para o item g

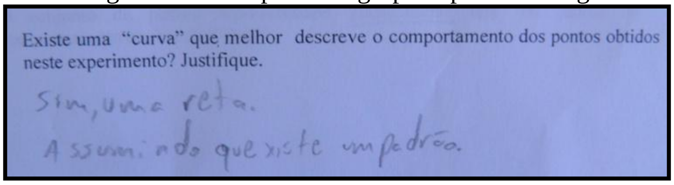

Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

Uma reta, pois os resultados são proporcionais

Fonte: Protocolo grupo A

- O grupo C afirmou que pode ser uma reta, desde que exista um padrão, conforme a figura 4.32:

Figura 4.32: Resposta do grupo C para o item g

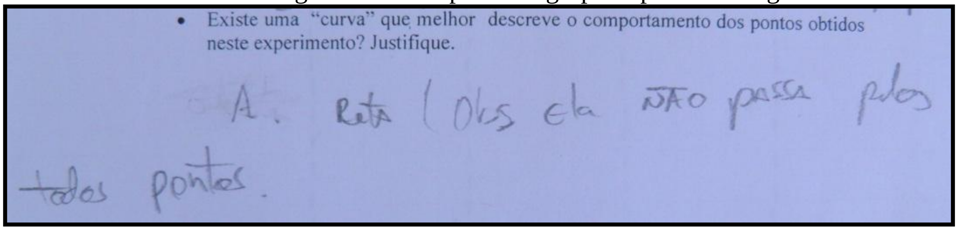

Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

Sim, uma reta.
Assumindo que xiste um padrão.

Fonte: Protocolo grupo C

- O grupo G afirmou que é a reta, mas verificou que ela não passa por todos os pontos, conforme figura 4.33:

Figura 4.33: Resposta do grupo G para o item g


- Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

A. Reta (Obs ela NÃO passa pelos todos pontos.

Fonte: Protocolo grupo G

- O grupo F, afirmou que existe uma curva que descreve o experimento, mas não disse qual é, justificou que "toda função é mais bem representada por uma curva";
- O grupo E disse que existe uma curva, porque se tem precisão.

4.4 ANÁLISE A POSTERIORI DO TERCEIRO EXPERIMENTO – SISTEMA MASSA-MOLA

No terceiro experimento também não verificamos discussão entre os membros dos grupos em relação ao procedimento do experimento. A figura 4.34 mostra um grupo realizando o experimento:

Figura 4.34: Realização do terceiro experimento

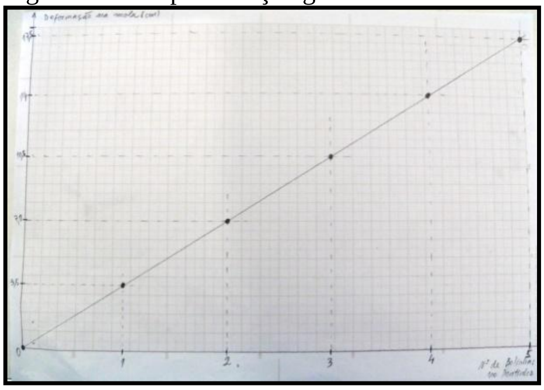
Fonte: Produção do próprio autor

Em relação à representação gráfica dos dados obtidos na tabela, para este experimento 5 (cinco) dos 7 (sete) grupos não uniram os pontos colocados no papel milimetrado. Destes, nenhum estava com todos os pontos alinhados.

Dos grupos que uniram os pontos através de uma reta, apenas um deles tinha os pontos alinhados.

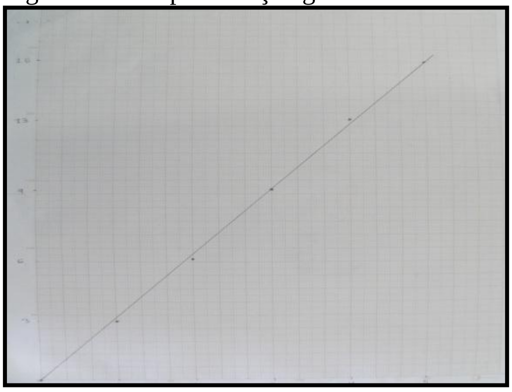
Nas figuras 4.35 e 4.36 podemos observar duas representações gráficas para o experimento, uma com o pontos todos alinhadas e outro não.

Figura 4.35: Representação gráfica I



Fonte: Protocolo grupo B

Figura 4.35: Representação gráfica II



Fonte: Protocolo grupo D

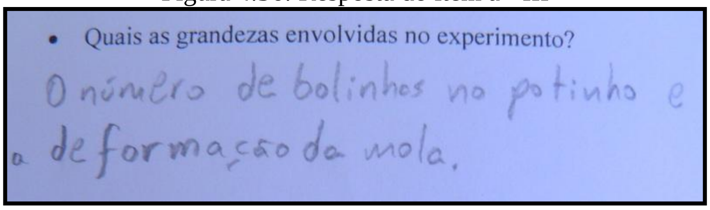
Agora, da mesma maneira que apresentamos a análise a priori, vamos fazer a análise a posteriori de cada item do quadro 3.6 (p.45).

a) Grandezas envolvidas:

Analisando as resoluções apresentadas pelos grupos, observamos que:

- Dos 7 (sete) grupos, 4 (quatro) apresentaram como resposta, que as grandezas envolvidas, são o número de bolinhas e a deformação da mola, conforme podemos ver na figura 4.37:

Figura 4.36: Resposta do item a - III



- Quais as grandezas envolvidas no experimento?

O número de bolinhas no potinho e a deformação da mola.

Fonte: Protocolo grupo C

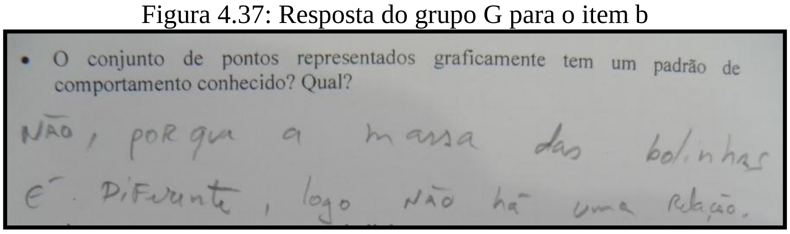
- O grupo A apresentou como resposta que as grandezas envolvidas são o peso e medidas;
- O grupo E, "massa e deformação da mola";
- O grupo D, colocou os valores da segunda coluna da tabela, como sendo as grandezas envolvidas.

b) Padrão de comportamento:

Neste item podemos constatar, a partir das respostas:

- O grupo G afirmou que não existe um comportamento conhecido, porque a massa das bolinhas é diferente, logo não se tem como encontrar uma relação, conforme comprova a figura 4.38:

Figura 4.37: Resposta do grupo G para o item b



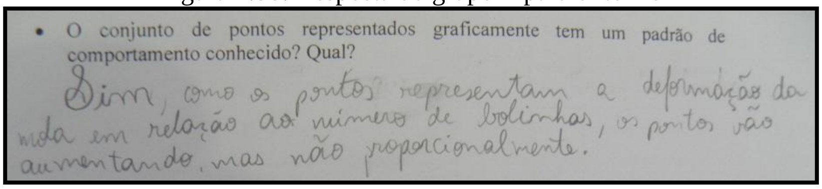
- O conjunto de pontos representados graficamente tem um padrão de comportamento conhecido? Qual?

NÃO, PORQUE a massa das bolinhas É DIFERENTE, logo NÃO há uma relação.

Fonte: Protocolo grupo G

- O grupo C comentou que "só é possível afirmar que cada vez que o número de bolinhas aumenta a deformação da mola também aumenta, mas não há um padrão, porque o peso das bolinhas é diferente", ainda acrescentou que os pontos no gráfico não são colineares;
- 5 (cinco) grupos concluíram que existe um padrão conhecido e este padrão é descrito por uma reta;
- O grupo E afirmou que não existe uma proporção para a deformação da mola, a figura 4.39 mostra a resposta dada pelo grupo na íntegra:

Figura 4.38: Resposta do grupo E para o item b


• O conjunto de pontos representados graficamente tem um padrão de comportamento conhecido? Qual?

Sim, como os pontos representam a deformação da mola em relação ao número de bolinhas, os pontos vão aumentando, mas não proporcionalmente.

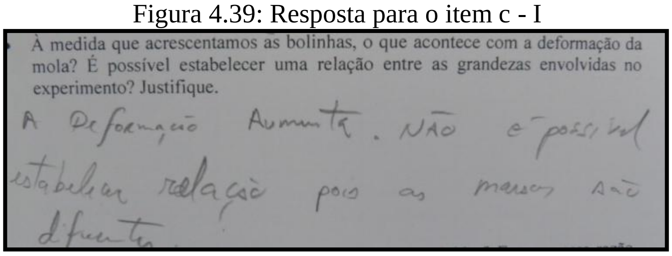
Fonte: Protocolo grupo E

c) Relação entre as grandezas:

Verificamos neste item que:

- 3 (três) grupos afirmaram que não é possível estabelecer uma relação entre as grandezas, porque o peso das bolinhas não é mesmo, conforme mostra a figura 4.40:

Figura 4.39: Resposta para o item c - I

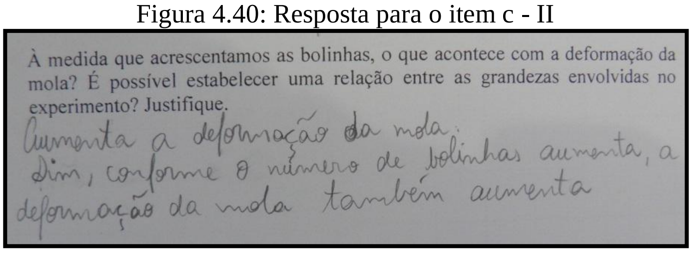

À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a deformação da mola? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

A Deformação Aumenta. Não é possível estabelecer relação pois as massas são diferentes

Fonte: Protocolo grupo G

- 3 (três) grupos concluíram que é possível encontrar uma relação entre as grandezas e descreveram essa relação somente em palavras, conforme a figura 4.41:

Figura 4.40: Resposta para o item c - II

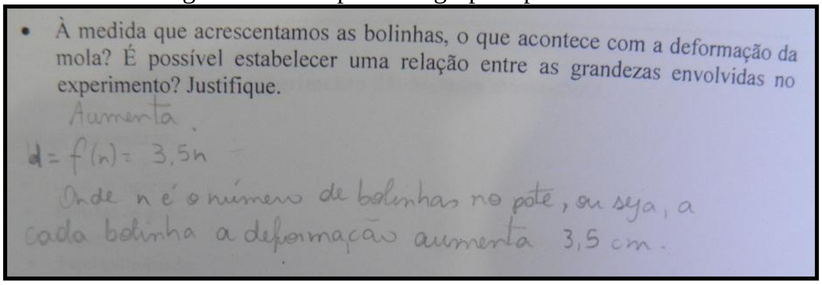

À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a deformação da mola? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

Aumenta a deformação da mola.
Sim, conforme o número de bolinhas aumenta, a deformação da mola também aumenta

Fonte: Protocolo grupo D

- O grupo F encontrou a representação algébrica que descreve o experimento, usando a seguinte notação: $f(n) = 3{,}5n$, conforme a figura 4.42:

Figura 4.41: Resposta do grupo F para o item c



- À medida que acrescentamos as bolinhas, o que acontece com a deformação da mola? É possível estabelecer uma relação entre as grandezas envolvidas no experimento? Justifique.

Aumenta.

$d = f(n) = 3{,}5n$

Onde n é o número de bolinhas no pote, ou seja, a cada bolinha a deformação aumenta 3,5 cm.

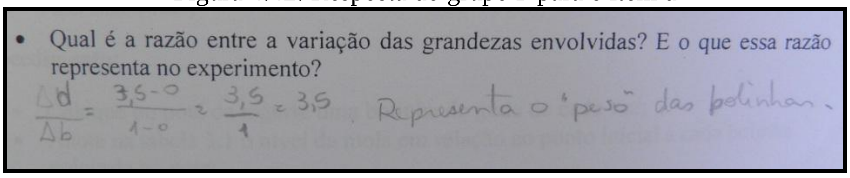
Fonte: Protocolo grupo F

d) Razão entre as grandezas:

Analisando as resoluções deste item, verificamos que:

- 4 (quatro) grupos, afirmaram como nos experimentos anteriores que a razão é a variação das grandezas,
- O grupo F, encontrou a razão entre as grandezas e afirmou que ela representa o peso das bolinhas, conforme figura 4.43:

Figura 4.42: Resposta do grupo F para o item d



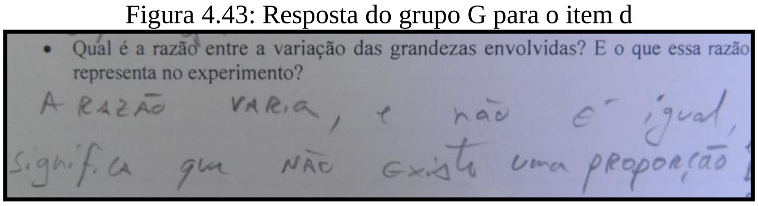
- Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?

$\frac{\Delta d}{\Delta b} = \frac{3{,}5-0}{1-0} = \frac{3{,}5}{1} = 3{,}5$ Representa o "peso" das bolinhas.

Fonte: Protocolo grupo F

- O grupo G afirmou que a razão varia, ou seja, não é igual em todos os intervalos, e concluiu que não existe proporção entre as grandezas, conforme podemos verificar na figura 4.44:

Figura 4.43: Resposta do grupo G para o item d



- Qual é a razão entre a variação das grandezas envolvidas? E o que essa razão representa no experimento?

A RAZÃO VARIA, e não é igual, significa que NÃO existe uma proporção

Fonte: Protocolo grupo G

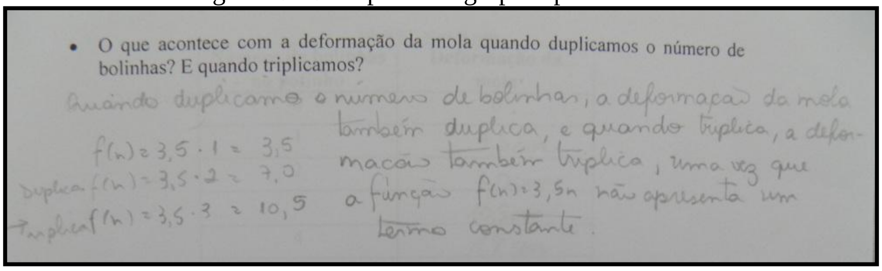
e) Aumentando as bolinhas:

Neste item, constatamos que:

- 4 (quatro) grupos concluíram que quando duplicamos ou triplicamos o números de bolinhas o mesmo acontece com a deformação da mola;
- O grupo F além de descrever o que acontecia com o nível da mola quando duplicávamos ou triplicávamos as bolinhas, apresentou o seguinte cálculo:

$f(n) = 3{,}5 \times 1 = 3{,}5$
Quando duplicamos: $f(n) = 3{,}5 \times 2 = 7{,}0$
Quando triplicamos: $f(n) = 3{,}5 \times 3 = 10{,}5$, conforme podemos verificar na figura 4.45:

Figura 4.44: Resposta do grupo F para o item e



- O que acontece com a deformação da mola quando duplicamos o número de bolinhas? E quando triplicamos?

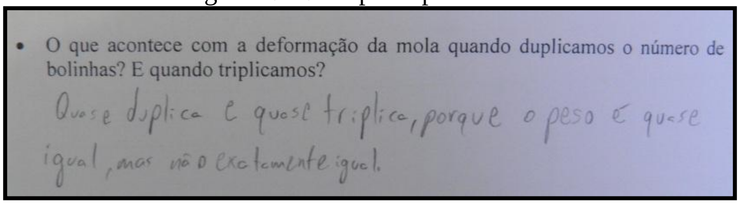
Quando duplicamos o número de bolinhas, a deformação da mola também duplica, e quando triplica, a deformação também triplica, uma vez que a função f(n)=3,5n não apresenta um termo constante.

f(n) = 3,5 · 1 = 3,5
Duplica f(n) = 3,5 · 2 = 7,0
Triplica f(n) = 3,5 · 3 = 10,5

Fonte: Protocolo grupo F

- 2 (dois) grupos descreveram que "quase" duplica ou triplica, porque deve-se levar em consideração o peso das bolinhas, conforme a figura 4.46:

Figura 4.45: Resposta para o item e



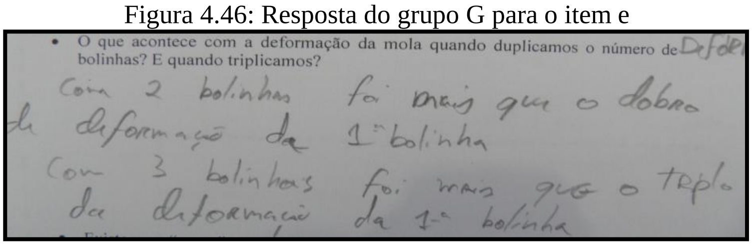
- O que acontece com a deformação da mola quando duplicamos o número de bolinhas? E quando triplicamos?

Quase duplica e quase triplica, porque o peso é quase igual, mas não exatamente igual.

Fonte: Protocolo grupo C

- O grupo G disse que não duplica ou triplica, mas sim que a deformação é maior que o dobro ou o triplo, de acordo com a figura 4.47:

Figura 4.46: Resposta do grupo G para o item e



- O que acontece com a deformação da mola quando duplicamos o número de bolinhas? E quando triplicamos?

Com 2 bolinhas foi mais que o dobro da deformação da 1ª bolinha
Com 3 bolinhas foi mais que o triplo da deformação da 1ª bolinha

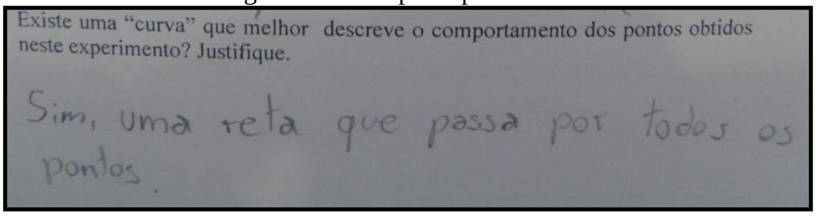
Fonte: Protocolo grupo G

f) Curva que melhor descreve:

Para este item, observamos que:

- 3 (três) grupos concluíram que uma reta é a curva que melhor descreve o experimento, conforme a figura 4.48:

Figura 4.47: Resposta para o item f

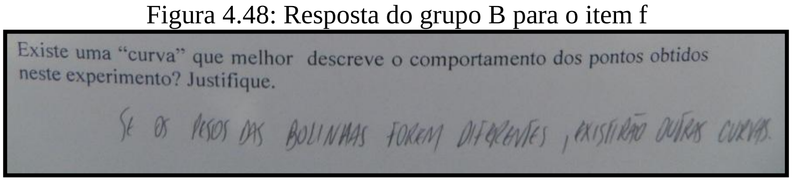

Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

Sim, uma reta que passa por todos os pontos.

Fonte: Protocolo grupo F

- O grupo C afirmou que a curva é semelhante a uma reta;
- O grupo B, alegou que "Se o peso das bolinhas for diferente, existirão outras curvas para descrever o experimento.", conforme o extrato da figura 4.49:

Figura 4.48: Resposta do grupo B para o item f


Existe uma "curva" que melhor descreve o comportamento dos pontos obtidos neste experimento? Justifique.

SE OS PESOS DAS BOLINHAS FOREM DIFERENTES, EXISTIRÃO OUTRAS CURVAS.

Fonte: Protocolo grupo B

- O grupo F, como no segundo experimento afirmou que "toda função é mais bem representada por uma curva".

4.5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA

Através da análise dos resultados da aplicação da sequência didática podemos confrontar o que esperávamos, descrito na análise a priori e o que realmente aconteceu no momento da experimentação.

Com os resultados, podemos perceber a facilidade que os grupos apresentaram no processo de conversão do registro de representação em tabelas para gráfica. A representação gráfica pode ser considerada a melhor forma de representação no sentido de analisar o comportamento dos dados, haja vista que o gráfico fornece uma representação visual muito forte. Já na representação em tabelas o comportamento dos dados fica menos evidente e muitas vezes confuso, desta forma percebemos a importância do processo de conversão feito pelos alunos na primeira etapa.

O processo de conversão para a representação algébrica não se deu facilmente, visto que apenas alguns grupos descreveram a relação entre as grandezas utilizando esta representação. O que é um ponto bastante frágil, tendo em vista a importância da representação algébrica. É ela quem modela matematicamente o experimento, fornecendo uma função que descreve e generaliza determinado experimento. A partir desta função podemos fazer algumas suposições para descobrir outros pontos do experimento, tais como foi sugerido, encontrar a altura mínima do copo para comportar um determinado número de bolinhas e o número máximo de bolinhas para que a água não transborde.

Muitos grupos apresentaram a representação gráfica cujos pontos não estavam alinhados, assim apresentando maior dificuldade para tentar estabelecer a representação algébrica, haja vista que uma função afim não "passaria" por todos os pontos obtidos no experimento. O fato dos pontos não estarem alinhados é devido aos erros cometidos no momento da realização do experimento, que já eram previstos. Estes erros que estão relacionados tanto ao material utilizado quanto pela pouca habilidade do observador.

Nenhum grupo, quando questionado sobre se os pontos estavam ou não alinhandos, no primeiro experimento apresentou essa resposta verificando se os pontos estavam alinhados através do cálculo do determinante dos pontos, que é uma maneira abordada no Ensino Médio.

Em relação à utilização do papel milimetrado notamos que poucos grupos souberam utilizá-lo de maneira correta, o que já era esperado, mesmo tendo explicado no início da atividade a melhor maneira para utilizá-lo. Os alunos, em geral, não utilizam este material em suas atividades. Geralmente, nas aulas de matemática os gráficos construídos são apenas esboços, assim a escala não é levada em consideração rigidamente.

Neste sentido, também verificamos a tendência que os alunos têm em representar as equações utilizando as variáveis x e y. Visto que, é uma notação muito familiar no contexto acadêmico, sendo utilizada pela maioria dos professores.

Percebemos uma grande dificuldade para os alunos descreverem as grandezas envolvidas nos experimentos. Durante a experimentação este item gerou bastante discussão entre os membros dos grupos, que se questionavam sobre a definição de grandeza. Na análise a priori, supomos que os alunos não iriam apresentar dificuldade em responder este item. Esta é uma observação bastante interessante, haja vista que para entender o conceito de função é de suma importância que o aluno identifique as grandezas envolvidas. Provavelmente, a ideia de grandeza não é abordada por muitos professores no momento de introduzir o conceito de função e este pode ser um dos fatores que contribuem para que o aluno não consiga resolver um determinado problema.

Neste sentido, os alunos também tiveram muita dificuldade de estabelecer a razão entre a variação das grandezas, confere havíamos suposto na análise a priori. Os alunos não tinham formalizado os conceitos de razão e de variação. Esses conceitos, muitas vezes, passam despercebidos pelos professores ao trabalharem com as funções, porém são de fundamental importância para construir o conceito da mesma.

Na realização do experimento dos perímetros, os grupos não utilizaram somente os números naturais para representar os lados dos retângulos, mesmo sendo induzidos, levando em consideração que fornecemos para eles o papel quadriculado para construírem os diferentes retângulos, evidenciando uma naturalidade em se trabalhar com medidas decimais.

Durante a aplicação da sequência, percebemos que os alunos apresentaram empolgação para realização dos experimentos, mostrando-se interessados, também nas discussões. Esse fato nos evidencia o quanto é importante o desenvolvimento dessas atividades, também no sentido de motivar os alunos para aprendizagem.

4.6 INSTITUCIONALIZAÇÃO MEDIADA PELA TECNOLOGIA

No segundo momento, o objetivo da nossa atividade era utilizarmos o ambiente computacional para os grupos identificarem de maneira dinâmica o comportamento dos dados obtidos nos experimentos.

Por falta de tempo, todo o nosso objetivo não pode ser alcançado, haja vista que a duração da sequência do ambiente lápis e papel envolveu um tempo maior que o previsto. Os alunos não tiveram tempo hábil para responder a todos os questionamentos propostos. Porém, utilizamos este momento para fazermos algumas discussões relacionadas com os experimentos.

Utilizando o software GeoGebra, primeiramente foi solicitado aos alunos que eles plotassem os pontos obtidos no primeiro experimento. Então, alguns questionamentos e esclarecimentos foram feitos, em relação às grandezas envolvidas, pontos alinhados, domínio, proporcionalidade, entre outros.

Em relação ao domínio, os alunos foram questionados sobre quais valores os lados dos retângulos podiam assumir, facilmente, concluíram que nos retângulos com perímetro 12 cm, os lados assumiram valores entre zero e seis.

O terceiro experimento também foi discutido com os alunos neste momento, em relação ao domínio, grandezas envolvidas, entre outros.

Primeiramente, solicitamos a alguns grupos que fornecessem os dados obtidos durante a atividade experimental e então, confrontamos os dados verificando que nem todos os grupos tinham chego aos mesmos valores, isso devido aos erros que já haviam sido previstos.

No ambiente computacional, plotamos os dados de apenas um grupo e questionamos os alunos em relação ao modelo matemático que descrevia o fenômeno, mas nenhum aluno soube responder. Verificando os pontos obtidos experimentalmente e representados no gráfico, foram feitos questionamentos aos alunos sobre estes valores obtidos e o porquê destes não estarem alinhados. Discutimos também sobre as condições ideais para a realização do experimento, chegando à conclusão de que os pontos não estavam alinhados devido aos erros da massa das bolinhas e algum erro na medição. Entretanto, foi possível observar uma tendência no comportamento dos dados obtidos experimentalmente, concluindo que a curva que melhor descrevia o experimento era uma reta e, portanto era possível obter uma expressão matemática que estabelecesse a relação entre as grandezas envolvidas.

Então, realizamos dois procedimentos diferentes para encontrar o modelo matemático: primeiro utilizando o comando de reta definida por dois pontos, selecionando dois pontos quaisquer do experimento, o que nos gerou um reta de equação $y = 3{,}2x + 0{,}6$, onde y representava o valor da deformação da mola em centímetros e x o número de bolinhas. Aproveitamos o momento para discutir sobre o que representava o x e o y no experimento e identificá-los como as grandezas envolvidas. Porém, verificamos junto com os alunos que a reta fornecida não estava de acordo com o processo experimental, visto que, quando não tínhamos bolinhas no copo, a deformação da mola era zero, mas de acordo com a equação fornecida iriamos ter 0,6 cm de deformação, o que não está de acordo com o processo experimental.

Desta maneira, concluímos junto com os alunos que era preciso utilizar outro método para encontrar a equação que descreve aquele experimento. O segundo procedimento proposto aos alunos, foi encontrar a reta através do comando da regressão linear, selecionando alguns dos pontos plotados. Então, o software nos forneceu a equação na forma reduzida dada por, $y = 3{,}5026x$, onde y é a o valor da deformação da mola dado em centímetros e x o número de bolinhas. A partir da equação dada na forma reduzida, observamos junto com os alunos que esta função descrevia, em termos matemáticos, o fenômeno representado no experimento.

Porém, solicitamos aos alunos que utilizassem um comando para verificar qual era a forma geral daquela equação, que foi dada pelo software, como, $525{,}7x + 150{,}1y = 0{,}01$, e isolando o valor de y nesta equação, obtemos, $y = \frac{525{,}7x - 0{,}01}{150{,}1}$. Assim, verificamos com os alunos que quando iriamos dividir 0,01 por 150,1 o valor iria ser muito pequeno, podendo ser desprezível, então podíamos considerar aquela equação para descrever o experimento.

A questão da regressão linear é muito importante quando trabalhamos com os dados experimentais. Infelizmente, não foi abordado com os alunos o modelo matemático da regressão linear, em virtude do tempo e também dos conteúdos mínimos necessários de Cálculo Diferencial e Álgebra Linear. Entretanto, no próximo capítulo iremos explorar essa questão relacionando-a com conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral II e a Álgebra Linear.

5. REGRESSÃO LINEAR

Quando trabalhamos com atividades experimentais é comum extrairmos alguns dados e organizarmos em tabelas, na forma de pares ordenados. A partir dessa organização, podemos converter esses dados para outra forma de representação que irá descrever uma relação entre as variáveis envolvidas no processo experimental. Para isso, devemos primeiramente escolher uma função que melhor relaciona as variáveis em questão. Em seguida, devemos encontrar uma maneira para determinar os parâmetros na função escolhida. Este procedimento é conhecido como método de regressão.

Existem muitos métodos que visam ajustar a curva através da determinação dos parâmetros da curva em questão. Abordaremos o Método dos Mínimos Quadrados, que segundo Cunha (2003) é provavelmente a técnica de aproximação mais utilizada na análise numérica e em problemas práticos, devido tanto à sua simplicidade quanto ao fato de buscar aproximações para dados que são medidas obtidas experimentalmente.

> Este método foi publicado, pela primeira vez, por Adrien-Marie Legendre (1752-1833) em 1805, mas ele já era usado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em seus cálculos na Astronomia, desde 1795 (CUNHA, 2003, p. 103).

Abordaremos o Método dos Mínimos Quadrados evidenciando as relações entre os conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral II e Álgebra Linear. Além disso, apresentaremos uma forma geométrica dinâmica com os recursos do software GeoGebra que possibilita a visualização deste método.

Neste trabalho, iremos trabalhar o Método dos Mínimos Quadrados em relação a regressão linear, a fim de linearizar os experimentos realizados anteriormente.

5.1 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O Método dos Mínimos Quadrados é um método de otimização matemática que permite encontrar os parâmetros que se ajustam a uma curva que melhor descreve os resultados experimentais, minimizando o somatório dos quadrados dos resíduos. Resíduo é a diferença entre o valor obtido experimentalmente e o valor estimado pela equação de ajustamento ou de regressão, ou seja, é considerado o erro deste processo.

5.1.1 Motivação

Vamos apresentar uma motivação para obtenção deste método, através de uma exemplificação. Para isso, estudaremos o experimento realizado e descrito anteriormente do sistema massa-mola, utilizando os dados coletados pelo Grupo D. Escolhemos os dados obtidos pelo grupo D, ao verificarmos que os valores coletados estavam bem dispersos, esse fato possibilita uma melhor visualização geométrica dos ajustes dos parâmetros e uma discussão importante entre o modelo matemático encontrado e o modelo real.

Iniciamos nosso estudo, verificando a tabela com dados obtidos no experimento e estes representados num plano cartesiano. A Tabela 5.1 apresenta os dados coletados.

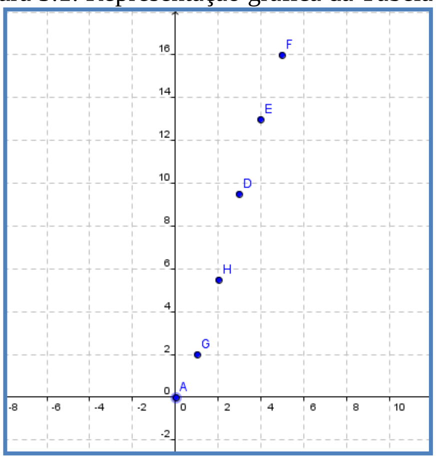
Tabela 5-1: Nível da mola

Número de bolinhas no copo	Deformação da mola (cm)
0	0
1	2
2	5,5
3	9
4	12,5
5	15,5

Fonte: Protocolo grupo D

Representamos graficamente os pontos da tabela 5.1, sendo considerada, a deformação da mola em função do número de bolinhas no copo, conforme podemos ver na figura 5.1:

Figura 5.1: Representação gráfica da Tabela 5.1

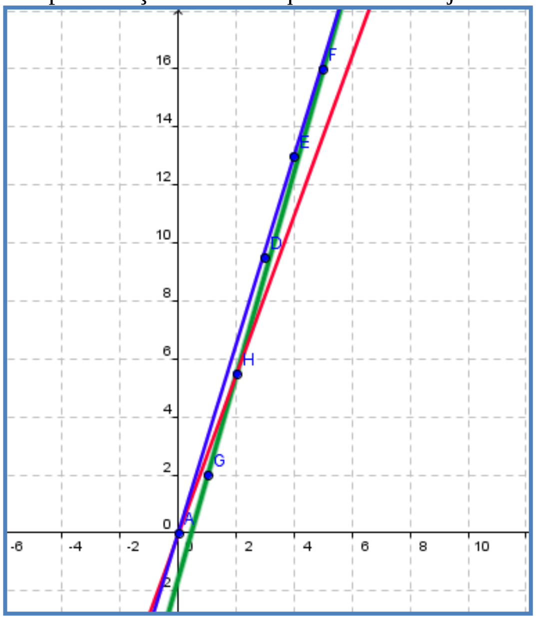


Fonte: Produção do próprio autor

A partir desses pontos, iremos encontrar uma curva que melhor se ajusta a esses dados. No nosso experimento, linearizaremos os pontos, ou seja, devemos encontrar uma reta que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos.

Desta forma, no ambiente lápis e papel, a escolha da reta é realizada inicialmente traçando-a a “olho”, ou seja, utilizando uma régua vamos encontrar uma reta que passe “o mais próximo possível” dos pontos obtidos experimentalmente para depois determinarmos os parâmetros. Para esse exemplo, traçando com o auxílio da régua, obtemos três retas que podem ser ajustadas aos pontos, procurando encontrar uma melhor aproximação para os pontos indicados no gráfico. Podemos verificar essas retas na figura 5.2.

Figura 5.2: Representação das retas que melhor se ajustam aos pontos



Fonte: Produção do próprio autor

O objetivo é encontrar uma reta que melhor se ajuste aos dados obtidos experimentalmente. Quando traçamos uma reta a “olho”, procuramos traçar uma reta que mais se aproximava de todos os pontos dados, minimizando a distância entre estes pontos e a reta. Obteremos uma “melhor reta”, quando a soma dessas distâncias for a menor. Essa é a ideia fundamental para o método dos mínimos quadrados, que a seguir iremos apresentar matematicamente.

5.1.2 Formalização Matemática do Método dos Mínimos Quadrados

O método de mínimos quadrados consiste em resolver o problema de aproximar uma função $y = f(x)$, real e de variável real, por uma função $g(x)$ que seja combinação linear de funções conhecidas, isto é:

$$f(x) \cong g(x) = b_1 h_1(x) + b_2 h_2(x) + b_3 h_3(x) + \cdots . + b_n h_n(x)$$

onde as funções $h_1, h_2 \ldots . h_n$ são funções contínuas preestabelecidas, de tal modo que a distância de $f(x)$ a $g(x)$ seja a menor possível.

De acordo com Franco (2006), este método é indicado quando a função $f(x)$ é definida através de processos não finitos como integrais, somas de séries, etc., ou quando $f(x)$ é conhecida através de pares de pontos obtidos por meio de medidas experimentais, desejando substituí-la por uma função cujo gráfico se ajusta aos pontos observados, que é caso do nosso trabalho, ou seja, abordaremos neste trabalho o método dos mínimos quadrados para o caso discreto. Ressaltando que é necessário, em procedimentos experimentais, que o número de dados obtidos (os pontos) seja maior que o grau da função que se ajusta ao experimento.

Então, sendo obtidos ou fornecidos os pares de pontos (x_i, y_i), $i = 1 \ldots n$, queremos encontrar a função que melhor ajusta os dados, utilizando mínimos quadrados. Chamaremos de $f(x)$ a função que será convenientemente aproximada por outra função $g(x)$.

Genericamente, no caso linear, estamos supondo que os dados serão aproximados por uma função do tipo:

$$f(x) \cong g(x) = b_1 h_1(x) + b_2 h_2(x) + b_3 h_3(x) + \cdots . + b_n h_n(x)$$

Para cada conjunto de coeficientes $b_i, i = 1 \ldots n$, o desvio ou resíduo da aproximação em $f(x)$ no ponto x_k, será dado por:

$$r_k = f(x_k) - g(x_k) = f(x_k) - [b_1 h_1(x) + b_2 h_2(x) + b_3 h_3(x) + \cdots . + b_n h_n(x)]$$

De acordo com Cunha (2003) é necessário estabelecer critérios de aproximação para determinar os coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que nos levarão à "melhor aproximação". No método dos mínimos quadrados, o critério é a minimização da soma dos resíduos, isto é, minimizar:

$$\sum_{i=1}^{n} r^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]^2$$

onde $f(x_i)$ são os dados que serão aproximados. Com este critério, procuramos tornar os resíduos pontuais tão pequenos quanto possível.

Nos experimentos realizados neste trabalho, temos como hipótese que a curva que melhor ajusta estes dados discretos é uma reta e, portanto temos que a nossa função $f(x)$ será aproximada por uma função afim, isto é $f(x) \cong g(x) = b_1 + b_2x$, então como o ajuste será feito por uma reta, tomaremos a função:

$$f(x) \cong g(x) = b_1h_1(x) + b_2h_2(x) + b_3h_3(x) + \cdots . + b_nh_n(x) \text{ , tal que,}$$

$$h_1\,(x) = 1\,, h_2(x) = x \; e \; h_3(x) = \cdots \; h_n(x) = 0$$

logo teremos:

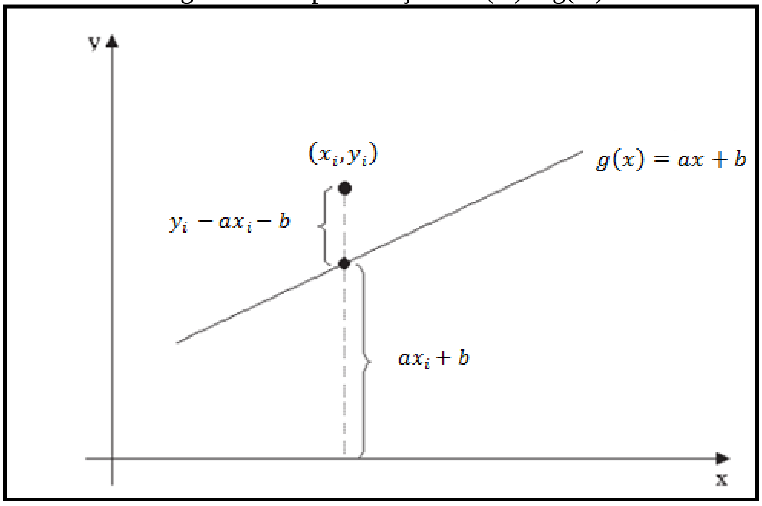
$f(x) \cong g(x) = b_1 + b_2x$, que por simplicidade na notação, utilizaremos $b_1 = b \; e \; b_2 = a$, portanto, teremos:

$$f(x) \cong g(x) = ax + b$$

Portanto, o problema consiste em encontrar qual é a representação algébrica desta função, isto é, quais são os valores de a e b que ajustam os pontos dados no problema.

Custodio *et al* (1996), afirma que, o método dos mínimos quadrados sugere que a função $g(x) = ax + b$ deverá ser determinada de tal maneira que a diferença em relação ao conjunto de dados experimentais, seja mínima. Assim, queremos minimizar a distância de cada ponto (x_i, y_i) da tabela a cada ponto $(x_i,\; ax_i + b)$, conforme a figura 5.3:

Figura 5.3: Representação de f(xi) - g(xi)



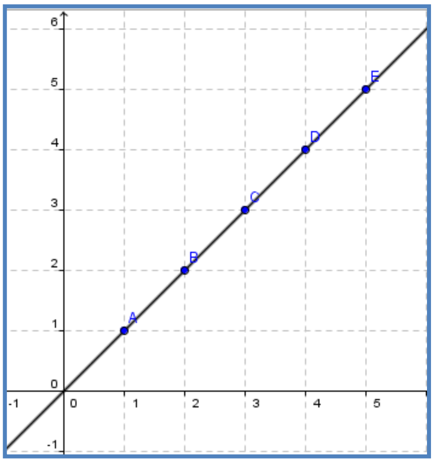
Fonte: Produção do próprio autor

Assim, desejamos que,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \; [f(x_i) - g(x_i)]$$

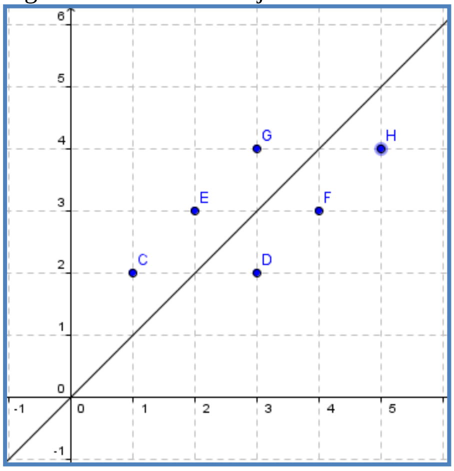
seja mínimo. Porém, quando Q=0, não significa que todas as diferenças calculadas sejam zero e temos uma função que melhor ajusta os dados. Observe os dois gráficos a seguir que contêm dados experimentais e uma função matemática:

Figura 5.4: Gráfico de ajuste I



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 5.5: Gráfico de ajuste II



Produção do próprio autor

Notamos que na figura 5.4, a reta está totalmente de acordo com os dados experimentais, ou seja, temos que a distância entre cada ponto e a reta obtida é zero. Já na figura 5.5, podemos perceber que existe um desvio significativo entre os valores experimentais e a reta encontrada, mas mesmo assim, o valor de Q é zero, visto que ocorre um cancelamento entre as grandezas dos desvios.

Então para evitar esse tipo de situação, utiliza-se o quadrado da distância. Assim, como afirma Custodio *et al* (1996), "não haverá o cancelamento dos desvios positivos e negativos e quando a função apresentar Q=0, isto indicará que a função estará passando exatamente sobre todos os pontos experimentais".

Desta forma, agora, o objetivo é minimizar a seguinte função:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Para encontrar os valores de a e b que minimizam esta função, vamos utilizar conceitos de Cálculo Diferencial e de Álgebra Linear.

Reforçando, que o objetivo é ajustar os parâmetros a e b, de maneira que a diferença entre o comportamento dos pontos obtidos experimentalmente e a função de ajuste seja mínima, ou seja, queremos minimizar a função:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Quando buscamos encontrar o mínimo, estamos trabalhando com um problema que envolve o estudo de extremos de uma função real de várias variáveis reais. Sabemos do Cálculo Diferencial que se uma função f tem um máximo ou mínimo local em $(a_{0,}b_0)$ e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então a $\frac{\partial Q(a_{0,}b_0)}{\partial a} = 0$ e $\frac{\partial Q(a_{0,}b_0)}{\partial b} = 0$ (ou $Q_a\left(a_{0,}b_0\right) = 0\ e\ Q_b\left(a_{0,}b_0\right) = 0$). Desta forma, devemos obter as derivadas parciais da função Q em relação a cada um dos parâmetros a e b e igualar estas derivadas à zero, visto que é uma condição necessária para que tenhamos o mínimo. Assim sendo Q a função definida por:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Determinaremos o(s) ponto(s) crítico(s) de Q, derivando a função Q em relação as variáveis a e b, obteremos:

$$Q_b\left(a_{0,}b_0\right) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$Q_a(a_{0,}b_0) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(\,y_i - ax_i - b) = 0$$

Podemos reescrever os somatórios obtidos nas derivadas parciais de Q da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = \sum_{i=1}^{n} y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a - nb = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,(y_i - ax_i - b) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)a - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = 0$$

Estas duas equações formam um sistema de equações lineares, cujas incógnitas são os parâmetros a e b da função $g(x) = ax + b$, que podem ser reescrito na forma:

$$\begin{cases} nb + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (1)$$

onde, n é o número de pontos (dados) do oriundos do experimento e organizados em forma de tabela, x_i são todos os valores de x assumidos no experimento (domínio) e y_i são todos os valores de y assumidos no experimento, ou seja $y_i = f(x_i)$, conjunto imagem.

A solução deste sistema linear denotada pelo ponto P(a_0, b_0) é um ponto crítico de Q e, portanto um "candidato potencial" a minimizar o erro.

Para concluirmos que o ponto P (a_0, b_0) é um mínimo da função Q devemos analisar a segunda derivada de Q. Do Cálculo Diferencial sabemos que se f é uma função de duas variáveis, tal que f e suas primeiras e segundas derivadas parciais sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a, b) e supondo que $f_x\,(a, b) = 0$ e $f_y\,(a, b) = 0$. Então, considerando o determinante Hessiano (ANTON, 2000):

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}\;(a,b) \\ f_{yx}\;(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = \Delta(a,b)$$

Assim, f tem um valor mínimo relativo em (a, b) se:

$\Delta(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - {f_{xy}}^2(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$ (ou $f_{yy}(a,b) > 0$)   (2)

Portanto, devemos analisar a derivada segunda de Q. Temos que as primeiras derivadas parciais de Q são dadas por:

$$Q_b(a_{0,} b_0) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$Q_a(a_{0,} b_0) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(\,y_i - ax_i - b) = 0$$

Então, teremos as segundas derivadas dadas por:

$$Q_{bb}(a_o, b_0) = 2\sum_{i=1}^{n}(\,1) = 2n$$

$$Q_{aa}(a_o, b_0) = 2\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2$$

$$Q_{ab}(a_o, b_0) = Q_{ba}(a_o, b_0) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

logo, analisaremos se as segundas derivadas satisfazem as condições da equação (2), ou seja, considerando o Hesseano da Q,

$$\begin{vmatrix} Q_{aa}(a_o, b_0) & Q_{ab}(a_o, b_0) \\ Q_{ba}(a_o, b_0) & Q_{bb}(a_o, b_0) \end{vmatrix} = \Delta(a_o, b_0)$$

Assim teremos:

$$\Delta(a_o, b_0) = Q_{aa}(a_o, b_0)Q_{bb}(a_o, b_0) - {Q_{ab}}^2(a_o, b_0)$$

$$\Delta(a_o, b_0) = 2n\,.\,2\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left[2\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2$$

$$\Delta(a_o, b_0) = 4\left(n\,.\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2\right)$$

podemos afirmar que $\Delta(a_o, b_0) > 0$ utilizando os conhecimentos referentes a disciplina de Álgebra Linear, tais como matrizes, determinante e vetores.

Observe que a matriz hessiana é definida por uma função afim, portanto as funções base são:

$$v_1 = (1,1, \dots, 1)$$

$$v_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Como os pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ são distintos, v_0 não é múltiplo de v_1, logo v_0 e v_1 são LI's, então considere o teorema:

Teorema 1: A matriz do sistema normal é definida positiva se as funções base $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ forem linearmente independentes.

Assim, pelo teorema, a matriz do sistema normal é positiva definida e assim inversível, ou seja, $\Delta(a_o, b_0) > 0$.

Como temos $\Delta(a_o, b_0) > 0$ e facilmente podemos verificar que $Q_{bb}(a_o, b_0) = 2n > 0$, pois n corresponde ao número de dados e, portanto $n \in \mathrm{N}^*$. Logo, o ponto $\mathrm{P}(a_o, b_0)$ satisfaz as condições do teste da segunda derivada de Q [ver 2], desta forma, P é um ponto de mínimo.

A representação algébrica da reta obtida com os parâmetros a e b dados pela solução do sistema (1) representam a reta que mais se aproxima de todos os pontos experimentais disponíveis.

Utilizando este sistema, vamos encontrar a equação da reta que mais se aproxima dos pontos obtidos no experimento do sistema massa-mola da tabela 5.2:

Tabela 5-2: Sistema massa-mola – Grupo D

Número de bolinhas no copo	**Deformação da mola (cm)**
0	0
1	2
2	5,5
3	9
4	12,5
5	15,5

Fonte: Protocolo grupo D

Usando os valores da tabela obtidos no experimento obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6b + \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right) a = \sum_{i=1}^{6} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{6} x_i{}^2\right) a = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i \end{cases}$$

onde, cada somatório será dado por:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i{}^2 = 0 + 2 + 5{,}5 + 9 + 12{,}5 + 15{,}5 = 44{,}5$$

$$\left(\sum_{i=1}^{6} x_i{}^2\right) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 0 \times 0 + 1 \times 2 + 2 \times 5{,}5 + 3 \times 9 + 4 \times 12{,}5 + 5 \times 15{,}5 = 167{,}5$$

Desta maneira, substituindo os valores obtemos:

$$\begin{cases} 6b + 15a = 44{,}5 \\ 15b + 55a = 167{,}5 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema teremos *b=0,619* e *a=3,214.*

Ou seja, temos que a reta dada pela equação $y = 0{,}619 + 3{,}214x$ é a reta que melhor descreve o comportamento dos dados.

Agora, utilizaremos a tabela dos pontos obtidos pelo grupo E, representados na tabela 5.3, em que não ocorre tanta discrepância dos dados, quanto na tabela do grupo D.

Tabela 5-3: Sistema massa-mola – Grupo E

Número de bolinhas no copo	**Deformação da mola (cm)**
0	0
1	2,4
2	5
3	7,6
4	10,1
5	12,9

Fonte: Grupo E

Para estes dados, os somatórios serão dados por:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i{}^2 = 0 + 2{,}4 + 5 + 7{,}6 + 10{,}1 + 12{,}9 = 38$$

$$\left(\sum_{i=1}^{6} x_i{}^2\right) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 0 \times 0 + 1 \times 2{,}4 + 2 \times 5 + 3 \times 7{,}6 + 4 \times 10{,}1 + 5 \times 12{,}9 = 140{,}1$$

Desta forma, o sistema de equação gerado é dado por:

$$\begin{cases} 6b + 15a = 38 \\ 15b + 55a = 140{,}1 \end{cases}$$

Onde, resolvendo-o obtemos *a=2,571* e *b=0,095*

Agora, vamos estudar outra forma de se obter os parâmetros a e b, utilizando conceitos da Álgebra Linear.

Queremos ajustar uma reta $y = ax + b$ aos pontos (x_i, y_i), com $i = 1, 2, \dots, n$, determinados experimentalmente. Se tais pontos fossem colineares a reta passaria por todos os n pontos e então os parâmetros a e b satisfazeriam as equações lineares:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \quad\vdots \\ ax_n + b = y_n \end{cases} \qquad (3)$$

Podemos reescrever o sistema (3) em forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ou seja, $AX = Y$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Nosso interesse reside no caso onde os pontos não são colineares, no qual o sistema (3) é inconsistente (impossível). Neste caso devemos encontrar uma solução usando o método de mínimos quadrados. Suponha que queremos resolver um sistema de equações dado por, $AX = Y$ constituído por n incógnitas e m equações. Para este caso, as soluções podem ser encontradas minimizando a função: $p(x) = \|AX - Y\|^2$.

Converter o problema $AX = Y$ para um processo de minimização parece não apresentar vantagens, porém, é algo simples que ajuda a resolver vários problemas.

Por exemplo, no nosso caso, com os dados experimentais que estão sujeitos aos erros de medidas, assim não assumem valores exatos esperados pelo modelo matemático que descreve o problema. Desta forma, podemos encontrar um vetor que melhor de aproxima da solução e para isso, devemos minimizar o vetor erro.

Então, como anteriormente, temos a função:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)^2$$

Temos que os resíduos são definidos por: $r_i = y_i - (ax_i + b)$ e definindo as matrizes de tal forma:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

segue que $y_i = ax_i + b \ \forall i = 1, \dots, n$ é o mesmo que $AX = Y$.

O objetivo agora é minimizar,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} {r_i}^2$$

que em notação matricial equivale minimizar o quadrado de $R = Y - AX$.

Assim, temos:

$$\|Y - AX\|^2 = (y_1 - (ax_1 + b))^2 + (y_2 - (ax_2 + b))^2 + \cdots + (y_n - (ax_n + b))^2$$

Chamando $r_1 = (y_1 - (ax_1 + b))$, $r_2 = (y_2 - (ax_2 + b))$ ......$r_n = (y_n - (ax_n + b))$

Temos que:

$$\|Y - AX\|^2 = r_1^2 + r_2^2 + \cdots . + r_n^2$$

Considere o teorema:

Teorema 2: Para qualquer sistema linear $AX = Y$, o sistema normal associado $A^T AX = A^T Y$ é consistente e todas soluções do sistema normal são soluções de mínimos quadrados de $AX = Y$. Além disso, se W é o espaço coluna de A e X é qualquer solução de mínimos quadrados de $AX = Y$, então a projeção ortogonal de Y em W é $proj_w Y = AX$ (ANTON, 2001).

Então, pelo teorema, a solução de mínimos quadrados do sistema $AX = Y$ pode ser obtida resolvendo o sistema normal associado $A^T AX = A^T Y$ cujas equações são chamadas de equações normais.

No caso da regressão linear, os vetores colunas de A, são vetores linearmente independentes, pois, $v_1 = (1,1,1, \ldots ,1)$ e $v_0 = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, portanto $A^T A$ é invertível, sendo portanto que a solução dos mínimos quadrados é única e é dada pelo vetor $X = (A^T A)^{-1} A^T Y$

Então para encontrar os parâmetros a e b tal que a soma dos quadrados das diferenças entre y_i e a$x_i + b$ seja mínima, devemos encontrar a solução do sistema:

$$A^T AX = A^T Y$$

Fazendo os cálculos, obtemos que:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \end{pmatrix}, A^T Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

Utilizando este método, vamos encontrar uma reta que melhor se aproxima dos dados experimentais obtidos pelo grupo D, que estão representados na tabela 5.2.

Desta forma, devemos encontrar as matrizes $A^T A$ e $A^T Y$, que serão dadas a partir dos somatórios:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^{6} {y_i}^2 = 0 + 2 + 5{,}5 + 9 + 12{,}5 + 15{,}5 = 44{,}5$$

$$\left(\sum_{i=1}^{6} x_i{}^2\right) \quad = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 0 \times 0 + 1 \times 2 + 2 \times 5{,}5 + 3 \times 9 + 4 \times 12{,}5 + 5 \times 15{,}5 = 167{,}5$$

Assim, substituindo pelos valores, obtemos:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}, A^T Y = \begin{pmatrix} 167{,}5 \\ 44{,}5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Desta forma, teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 167{,}5 \\ 44{,}5 \end{pmatrix}$$

Sendo o mesmo sistema linear resolvido anteriormente, onde a solução é dada por *a=0,619* e *b=3,2142.*

Assim, se utilizarmos os dados obtidos pelo grupo E, representados na tabela 5.3 obteremos os mesmos valores para os coeficientes obtidos anteriormente.

Podemos perceber que a representação algébrica encontrada para descrever o experimento do sistema massa-mola não está totalmente de acordo com o experimento. A equação $y = 0{,}619 + 3{,}214x$, descreve o experimento do sistema massa-mola de acordo com os dados obtidos pelo grupo D. Observamos que quando o número de bolinhas no copo for igual à zero, segundo a equação, teremos que a deformação da mola é igual a 0,619cm, porém no experimento, sabemos que quando não temos bolinha do copo, a mola esta em posição de repouso, ou seja, sua deformação é igual a zero.

O valor encontrado 0,619 é devido aos erros dos experimentos, tanto de procedimento, quanto de material, que já foram comentados anteriormente. Na equação encontrada para o grupo E, $y = 0{,}095 + 2{,}571x$ percebemos que quando o número de bolinhas no copo for zero, a deformação da mola será 0,095. Assim, podemos concluir que os valores obtidos pelo grupo E estão melhor ajustados ao experimento do que os do grupo G, ou seja, houve menos erros na realização do experimento.

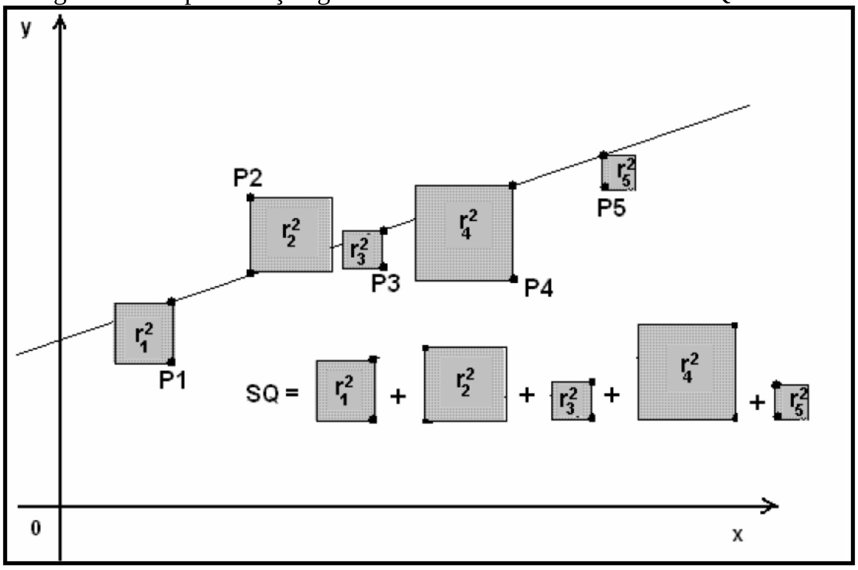
5.1.3 Representação Geométrica para o Método dos Mínimos Quadrados

Após encontrar a representação algébrica da função que descreve o comportamento dos dados obtidos experimentalmente através da regressão linear podemos calcular o resíduo

(r) que representa, segundo Steffens *et al* (2008), a diferença entre o valor obtido experimentalmente e o valor determinado pela equação de regressão.

Em ambos os processos desenvolvidos, elevamos este resíduo ao quadrado, assim, geometricamente calculamos a área do quadrado de lado *r*, sobre o plano cartesiano, para cada um dos pontos. Quanto maior a área do quadrado, pior é o ajuste da reta naquele ponto e quanto maior a soma das áreas menor ajustada está aquela função. A figura 5.6 ilustra geometricamente este procedimento:

Figura 5.4: Representação geométrica do Método dos Mínimos Quadrados

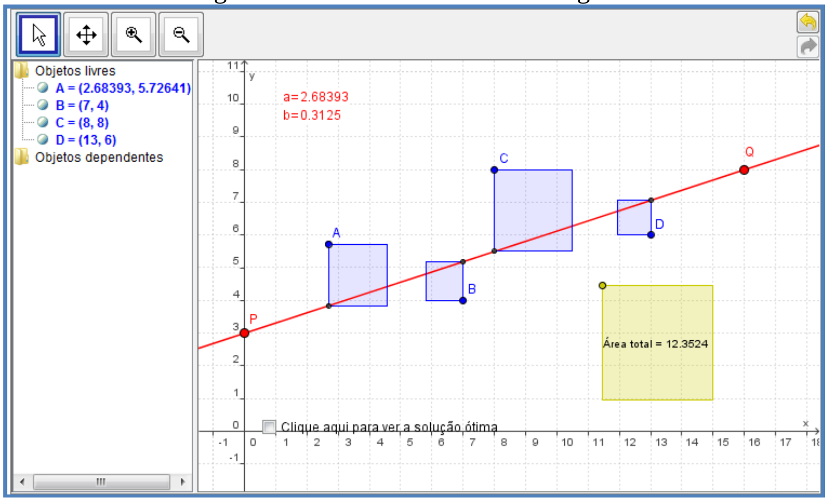


Fonte: Steffens *et al* (2008)

Podemos verificar na figura que o ponto P5 está mais bem ajustado do que o ponto P4, visto que sua área associada é menor.

Existe uma simulação do método dos mínimos quadrados que pode ser desenvolvida no software GeoGebra envolvendo áreas, onde se pode modificar as posições dos pontos obtidos e verificar o efeito destas modificações. A simulação foi produzida pelo professor Bortolossi (2010) e seu gráfico interativo construído no GeoGebra pode ser visualizado na figura 5.5:

Figura 5.5: Gráfico iterativo do Geogebra



Fonte: Bortolossi (2010)

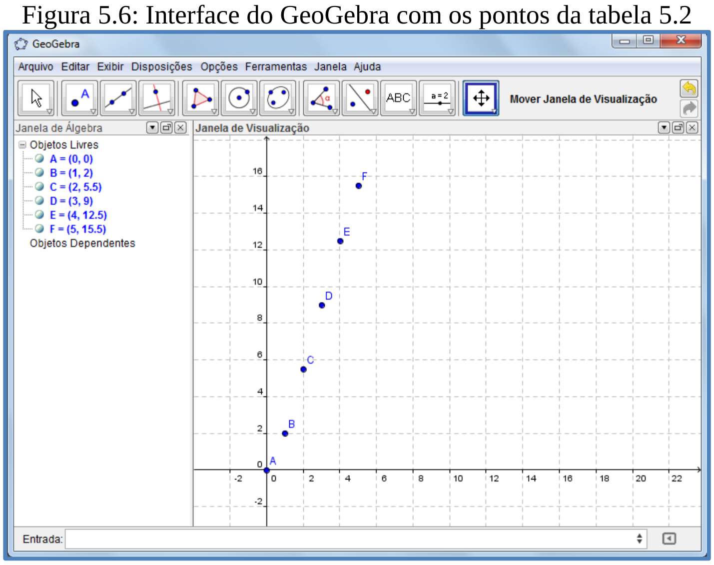
Esta é uma maneira dinâmica de apresentarmos o método dos mínimos quadrados no GeoGebra. Mas também, podemos encontrar diretamente a curva da regressão linear neste software de maneira simples e rápida.

5.1.4 Procedimentos para Obter a Curva de Regressão Linear no GeoGebra

Iremos apresentar os procedimentos necessários para encontrar a reta de regressão linear no software GeoGebra, ilustrando com os dados obtidos pelo grupo D.

1º Passo: Plotar os pontos da tabela, digitando as coordenadas na caixa de entrada. Na figura 5.6 podemos observar os pontos da tabela 5.2 plotados.

Figura 5.6: Interface do GeoGebra com os pontos da tabela 5.2

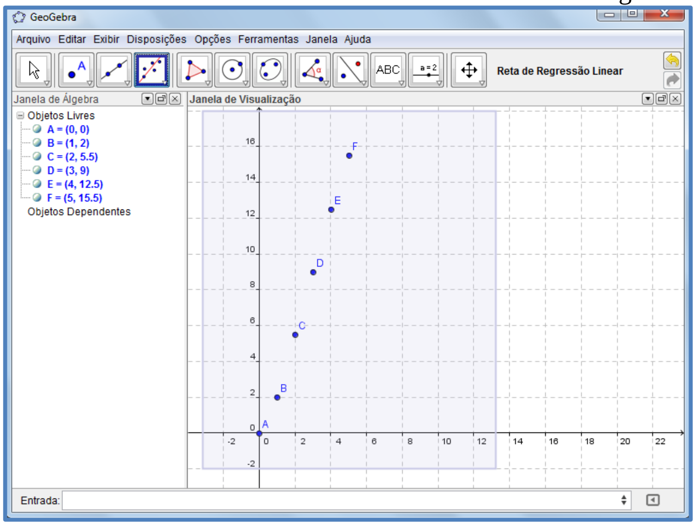


Fonte: Produção do próprio autor

2º Passo: Selecionar o comando Reta de Regressão Linear que está na barra de ferramentas.

3º Passo: Selecionar todos os pontos, conforme mostra a figura 5.7:

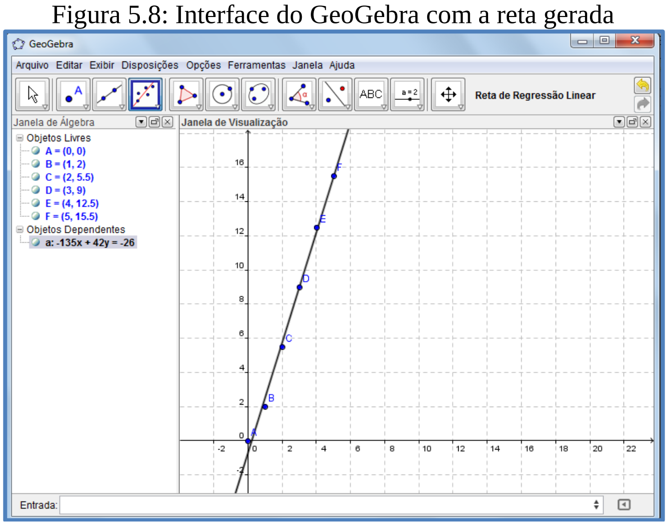
Figura 5.7: Interface do GeoGebra com o comando da Reta de Regressão Linear



Fonte: Produção do próprio autor

Assim, é gerada a reta de regressão linear. Na janela algébrica, podemos verificar a representação algébrica da reta e na janela de visualização verificamos a representação gráfica, conforme a figura 5.8:

Figura 5.8: Interface do GeoGebra com a reta gerada



Fonte: Produção do próprio autor

Neste trabalho, apenas explanamos matematicamente um dos experimentos realizados. Mas a partir dos resultados encontrados neste capítulo e com os dados experimentais, podemos encontrar a equação que descreve outros experimentos. É importante ressaltar que generalizamos para o caso do ajuste linear. Porém, podemos encontrar outras relações para descrever o ajuste quadrático, exponencial, logarítmico, entre outros.

Utilizamos conceitos do Cálculo Diferencial e da Álgebra Linear ao longo deste capítulo que não são estudados no Ensino Médio. Porém ao final encontramos um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros da função linear que modela uma aproximação do experimento. Esse sistema pode ser abordado com os alunos do ensino médio, sabendo que os alunos sabem intuitivamente o que são somatórios finitos.

Desta forma, além dos experimentos introduzirem o conceito de função outros conteúdos abordados no ensino médio podem ser trabalhados a partir da sua realização, tais como multiplicação de matrizes, resolução de sistemas lineares, determinantes. Não há necessidade de que sejam trabalhados no mesmo momento, mas ao introduzir esses conteúdos é interessante esse retorno aos alunos, possibilitando uma contextualização de outros conteúdos matemáticos.

No próximo capítulo, sugerimos outras atividades experimentais que podem ser desenvolvidas para abordar o conteúdo das funções.

6. SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Existem várias possibilidades de se abordar o estudo das funções, tanto no ensino básico, quanto no superior, isso se deve ao fato das funções estarem presentes em situações do cotidiano, descreverem o comportamento de fenômenos, possuindo assim um caráter dinâmico.

Neste trabalho apresentamos e desenvolvemos uma abordagem diferenciada para explorar o conceito das funções de forma dinâmica, apresentando três experimentos práticos e utilizando os recursos tecnológicos. Porém gostaríamos de contribuir com outras ideias de atividades que podem ser desenvolvidas para abordagem do estudo das funções.

Desta forma, vamos apresentar de maneira sucinta as atividades, sua descrição, os conteúdos envolvidos, os objetivos e os materiais necessários.

As atividades propostas neste capítulo podem ser organizadas da mesma maneira que os experimentos desenvolvidos na sequência didática aplicada neste trabalho, ou seja, elaborando os procedimentos e questionamentos em relação a cada atividade, ou adaptando para o contexto da turma e do conteúdo. Estas atividades podem ser potencializadas com o uso dos recursos tecnológicos, pois conforme Queiroz, Ramos e Siple (2011), a articulação entre os diferentes registros, mediada pelo uso de tecnologias, pode potencializar elementos importantes na aprendizagem matemática, visto que a utilização das tecnologias torna-se útil como instrumento de organização de dados gerados por atividades experimentais. Assim é uma importante ferramenta para gerar a representação algébrica que expressa a maneira como os dados obtidos experimentalmente estão relacionados, possibilitando ao aluno fazer conjecturas sobre os mesmos.

6.1 CÁLCULO DA VAZÃO DE ÁGUA

O cálculo da vazão de água é uma atividade experimental que consiste em medir o volume de água captado de uma torneira por um recipiente de vidro (béquer) durante certo intervalo de tempo. (QUEIROZ, RAMOS, 2007, *apud* QUEIROZ, RAMOS E SIPLE, 2011).

Então, utilizando um cronômetro deve-se marcar um intervalo de tempo e durante este intervalo deixar a água escorrer no recipiente, após mede-se o volume de água coletado. Esse procedimento deve ser repetido em média cinco vezes (em intervalos de tempo iguais) e os dados anotados numa tabela. O volume captado de água vai ser dado em função do intervalo do tempo.

Essa atividade experimental já foi realizada com alunos do EJA (Educação de Jovens e Adultos) do Instituto Federal Catarinense – IF-SC de maneira similar a sequência didática desenvolvida neste trabalho. Após o processo experimental os alunos foram levados ao Laboratório de Informática e utilizando o software GeoGebra ajustaram o conjunto de pontos obtidos experimentalmente a uma reta, com o auxílio dos professores.

Conteúdos envolvidos: Medidas, funções.

Objetivos: Proporcionar discussões sobre os conteúdos envolvidos, formalizar o conceito de vazão, construir gráficos a partir de dados experimentais, encontrar uma representação algébrica que descreve o experimento.

Materiais necessários: Recipiente com marcação de volume, cronômetro, papel milimetrado.

6.2 RESFRIAMENTO DA ÁGUA

O resfriamento da água é uma atividade experimental que consiste em medir o decaimento do valor da temperatura da água após ela ter atingido 100º C, até ela voltar a temperatura inicial (temperatura ambiente), em certos intervalos de tempo iguais.

Inicialmente, deve-se aquecer a água até 100ºC, utilizando, por exemplo, uma resistência. Então se define um intervalo de tempo fixo e para cada intervalo de tempo mede-se a temperatura da água até ela voltar a temperatura inicial.

Neste caso, teremos que a temperatura da água será dada pelo tempo, porém a relação não será proporcional.

Conteúdos envolvidos: Medidas de temperatura, função exponencial.

Objetivos: Modelar o fenômeno do resfriamento da água, conhecer uma aplicação da função exponencial, construir gráficos a partir de dados experimentais.

Materiais necessários: Termômetro, recipiente, resistência, papel milimetrado.

6.3 TRAJETO DA ÁGUA NO AR

O trajeto de água no ar é um experimento um pouco diferente do que os abordados anteriormente. Ele consiste em encontrar a curva que melhor descreve o trajeto da água ao sair de uma mangueira. (CONTEZINI *et al*, 2006)

Para isso, utilizando uma tábua, fixa-se a mangueira, liga-se o registro de água e marca-se o trajeto descrito, conforme podemos observar na figura 6.1.

Figura 6.1: Trajetória da água

Fonte: Produção do próprio autor

Então, para este experimento, os dados coletados já estão na representação gráfica de uma parábola e então o processo de conversão se dará da representação gráfica para tabular e depois para a algébrica.

Conteúdos envolvidos: Função quadrática.

Objetivo: Encontrar a curva que melhor descreve o trajeto da água no ar, apresentar uma aplicação das funções quadráticas.

Materiais necessários: Régua, tábua, mangueira, papel milimetrado.

6.4 RELAÇÃO PARA O CRESCIMENTO HUMANO

Essa atividade possui um caráter diferente das outras atividades propostas. Ela não consiste especificamente em um experimento. É uma atividade com aspectos da resolução de problema.

O problema proposto é encontrar uma relação matemática para o nosso crescimento. Para isso, devem-se buscar dados em várias fontes, como internet, livros, ou até no seu próprio histórico, caso tenham anotados seu tamanho em diferentes idades, por exemplo, em álbuns de fotografia ou na carteira de vacinação. Assim, primeiro deve-se recolher os dados e em seguida fazer uma análise para encontrar uma relação.

Conteúdos envolvidos: Aplicação de Funções.

Objetivos: Encontrar uma relação matemática para a altura e a idade das pessoas, construir gráficos.

A partir dessa temática, outras sugestões podem ser propostas, como por exemplo, descrever uma relação para peso e altura, relação entre índice de massa corporal (IMC) e circunferência abdominal (CA), fatores de risco para doenças cardiovasculares (Damascena, Pereira Neto, Pereira, 2008). A matemática pode ser relacionada com a biologia trabalhando assuntos como, doenças, genética, tempo de vida da bactéria, meio ambiente, dentre outras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo apresentamos uma síntese das contribuições oriundas do presente trabalho, baseada na metodologia proposta para o ensino de funções. O principal objetivo deste trabalho foi desenvolver uma abordagem dinâmica para o estudo de funções, através da realização de experimentos práticos e utilização recursos tecnológicos.

Primeiramente buscamos referenciais teóricos a fim de fomentar nossa pesquisa. Analisamos o desenvolvimento histórico do conceito de função, percebendo que o conceito de função surgiu da necessidade de descrever matematicamente alguns fenômenos naturais. Porém, atualmente, o conceito de função abordado nas aulas de matemática do Ensino Médio, bem como em disciplinas de Matemática Básica e Cálculo Diferencial e Integral do Ensino Superior geralmente valoriza apenas a definição de função através da Teoria de conjuntos. Ocorre que, muitas vezes, os alunos não conseguem compreender o conceito da função, o que reflete nas dificuldades em outras disciplinas, como por exemplo, do Cálculo Diferencial e Integral.

A partir da reflexão sobre o histórico das funções, estudamos a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. Percebemos que as diferentes representações de um mesmo objeto matemático, bem como o processo de conversão entre elas, podem ser articuladas com o desenvolvimento de atividades experimentais. Além disso, procuramos relacionar o uso das tecnologias no ensino da matemática. Esses referenciais forneceram fundamentos para a elaboração da sequência didática proposta.

Conforme descrito no capítulo 3, a sequência didática apresentada teve como objetivo principal introduzir o conceito de funções por meio da compreensão das grandezas envolvidas e a relação entre elas, em atividades experimentais. Um diferencial importante desta sequência proposta foi à construção do conhecimento dos alunos através dessas atividades experimentais. Desta maneira, a definição de função não foi imposta aos alunos, sem nenhuma discussão ou contextualização, mas sim, construída por meio de discussão e análise dos dados obtidos, após a realização dos experimentos.

Analisando os resultados da aplicação da sequência didática, percebemos que os alunos foram responsáveis durante a execução da mesma, realizando-a em todos os sentidos, tanto a parte prática (realização dos procedimentos) quanto a parte dos questionamentos que envolviam o experimento. Essa responsabilidade foi de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho, visto que consideramos os registros dos alunos em nossa análise a posteriori. A sequência proposta proporcionou um ambiente de discussão entre os grupos e até mesmo entre a classe no momento da institucionalização do conteúdo em questão.

Salientamos a importância da participação do professor durante esse tipo de atividade, na qual seu papel é de mediador, questionando e instigando o aluno para o mesmo construir conceitos através das discussões.

Outro fator a ser observado foi o tempo utilizado para a aplicação dessa sequência. Para definir o conceito de função em aulas tradicionais o tempo utilizado é geralmente uma aula de 50 minutos aproximadamente, quando falamos em Ensino Superior, onde a nossa sequência foi aplicada. A sequência proposta utilizou aproximadamente quatro aulas de 50 minutos cada, apenas para a realização dos experimentos e resolução dos questionamentos. Porém, o tempo envolvido na aplicação de uma sequência didática diferenciada, como essa, é compensado pela forma com que o conhecimento é adquirido pelos estudantes.

É importante ressaltar que essa sequência didática pode representar um recurso importante tanto para os professores do Ensino Básico quanto do Ensino Superior. A sequência apresentada foi apenas um modelo, sendo que várias adaptações podem ser feitas de acordo com o contexto de cada turma. No capítulo 6, apresentamos algumas sugestões de experimentos e atividades que podem ser trabalhadas utilizando sequência didática semelhante a desenvolvida neste trabalho.

Além da sequência didática no ambiente lápis e papel desenvolvemos também uma sequência didática no ambiente computacional, conforme foi apresentado no capítulo 4. Porém como a etapa da experimentação utilizou mais tempo do que estava programado, não conseguimos analisar resultados desta sequência, visto que, não houve tempo hábil para ela ser realizada na íntegra. Utilizamos o tempo que seria destinado a aplicação da sequência no ambiente computacional, para realizar uma institucionalização do conteúdo, utilizando o software GeoGebra que facilitou este processo.

Observamos que a articulação entre os diferentes registros, mediada pelo uso de tecnologias, pode potencializar elementos importantes na aprendizagem de função. Os recursos tecnológicos podem ser muito úteis como instrumento de organização de dados gerados por atividades experimentais e também gerar funções matemáticas que expressam a maneira como os dados obtidos experimentalmente estão relacionados.

Percebemos que uma solução para a falta de tempo, seria separar em dois dias a aplicação da sequência, no primeiro dia, para o ambiente lápis e papel e no segundo dia para o ambiente computacional. Desta forma, nenhum momento seria prejudicado.

Geralmente ao trabalhar com atividades experimentais, obtemos dados e é comum querermos encontrar uma representação algébrica para descrever o comportamento destes dados. Por isso, neste trabalho, procuramos explorar métodos matemáticos que auxiliem nesse processo. Como exploramos experimentos que envolviam funções, o modelo matemático estudado foi a regressão linear.

Sugerimos que outro aspecto interessante seria dar um retorno aos alunos que participaram da sequência didática, apresentando-lhes o método dos mínimos quadrados, de maneira simples, a fim de mostrar-lhe que os procedimentos experimentais realizados possuem uma representação algébrica definida por uma teoria.

Infelizmente, esse retorno não foi dado aos alunos por questão de falta de tempo, mas a partir dos dados obtidos por alguns grupos e das técnicas mostradas no capítulo 5, encontramos a representação algébrica do experimento do sistema massa-mola. Também apresentamos uma abordagem dinâmica da ideia do Método dos Mínimos Quadrados que é bastante interessante para a compreensão do método possibilitando o entendimento a partir de uma simulação que pode ser construída no software GeoGebra.

Percebemos durante o desenvolvimento do trabalho, o quanto esse tipo de abordagem diferenciada pode proporcionar aos alunos um conhecimento mais efetivo e concreto. Por meio desse tipo de atividade, é possível motivar os alunos em relação à disciplina e também a determinados conteúdos.

Entretanto, é importante ressaltar que nem sempre é possível ou fácil obter uma lei de formação matemática entre duas grandezas, também, que nem todos os conteúdos podem ser potencializados utilizando as atividades experimentais ou recursos tecnológicos. Mas entendemos que ao refletirmos sobre nossa prática, buscando fundamentação tanto teórica quanto prática fica mais simples reconhecer no quotidiano situações que podem ser exploradas no ensino da matemática.

Entendemos que é relevante a realização de uma reflexão sobre a utilização de metodologias diferenciadas para o ensino da matemática, mudando a postura dos professores para que os alunos possam discutir e construir o próprio conhecimento. É importante construir com os alunos uma ideia dinâmica da matemática que está além dos livros didáticos, deixando de lado a ideia da matemática estática, pronta e acabada.

Enfim, este trabalho pode oferecer um conhecimento que está além dos livros didáticos e das disciplinas cursadas ao longo da graduação, proporcionando uma formação mais ampla, além de possibilitar um crescimento relacionado a discussão, argumentação e reflexão não só dos conteúdos envolvidos, mas também das situações problemas e do processo de ensino-aprendizagem.

Ao longo do desenvolvimento deste, ficou evidente o quanto é grandioso a concepção de projetos na área de interesse, tornando o processo de construção algo prazeroso. Diante disso, fica a certeza do desejo de continuar os estudos na área da Educação Matemática, desenvolvendo projetos que possam contribuir para o ensino da mesma.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ANTON, Howard. **Álgebra linear com aplicações**. 8 edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOTELHO, Leila e REZENDE Wanderley. **Um breve histórico do conceito de função.** Caderno dá licença. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense v.6. Niterói, 200?. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/ stories/caderno/volume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf> Acesso em: 02/02/2012.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio – Brasília, 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio, parte III): Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica: MEC/SEMT, 1999.

BORTOLOSSI, Humberto José. **O método dos mínimos Quadrados.** Disponivel em: <http://www.mat.puc-rio.br/~hjbortol/cdfvv/livro/geogebra/o-metodo-dos-minimos-quadrados-04.html.> Acesso em: 14/05/2012.

CONTEZINI, Jacy Luiz; FONTANA, Maicon Bez; ZABEL, Paulo Alberto; OLIVEIRA, Fátima Peres Zago e CIVIERO, Paula Andréa Grawieski. **Estudo e Aplicações da Parábola.** XXII Feira Catarinense de Matemática, Curitibanos, SC, 2006.

CUNHA, M.C.C. **Métodos Numéricos.** 2 edição, Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2003.

CUSTODIO, Rogério; ANDRADE, João Carlos de e AUGUSTO Fábio. **O ajuste das funções matemáticas a dados experimentais.** Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. Disponível em: <http://quimicanova.sbq.org.br/qn/qnol/1997/vol20n2/v20_n2_15.pdf> Acesso em: 14/05/2012.

DAMASCENA, Lizianny Leite; PEREIRA NETO, Nelson; PEREIRA, Valter Azevedo**. Correlação entre Obesidade Abdominal IMC e Risco Cardiovascular.** XI Encontro de Iniciação a Docência, 2008, UFPB, João Pessoa, PB. Disponível em: <http://www.prac.ufpb.br/anais/xenex_xienid/xi_enid/prolicen/ANAIS/Area6/6CCSDEFPLIC02.pdf> Acesso em: 29/05/2012.

DUVAL, Raymond. **Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, IREM de Strarsbourg v.5, p.37-65, 1993.

FLORES, Angelita Marçal - **A Informática na Educação**: Uma Perspectiva Pedagógica – Monografia- Universidade do Sul de Santa Catarina, 1996.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GAFANHOTO, Ana Patrícia e CANAVARRO, Ana Paula. **Representações Múltiplas de Funções em Ambiente com Geogebra**: um estudo sobre o seu uso por alunos de 9º ano. Projecto Práticas Professional dos Professores de Matemática, 2008. Disponível em: <http://www.ie.ul.pt/pls/portal/docs/1/334274.PDF> Acesso em: 16/04/2012.

GIOVANNI, José Ruy; JR. José Ruy Giovanni; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Fundamental.** São Paulo, SP:FTD, 2002.

GRAVINA, Maria Alice; PEIXOTO, Luciana e NOTARE, Márica Rodrigues. **Funções e gráficos:** um curso introdutório. Penta – UFRGS. Porto Alegre, RS. Disponível em: <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/cfuncao/fun_graf.htm> Acesso em: 10/03/2012.

GUIMARÃES, Rita dos Santos. **Matemática Multímidia** – Dinamômetro com elástico. UNICAMP, Campinas, SP, 2010. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1006> Acesso em: 10/03/2012.

LIMA, Roberta de Queiroz e SAMPAIO, Rubens**. Identificação de Parâmetros pelo Método dos Mínimos Quadrados Não Linear.** Relatório final da Iniciação Científica. Rio de Janeiro, agosto de 2009. Disponível em: <http://www.puc-rio.br/pibic/relatorio_resumo2009/relatorio/mec/roberta.pdf> Acesso em: 15/05/2012.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. 1. Ed.

MAGGIO, Deise Pedroso e SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Registros de Representação Semiótica e Função Afim: Análise de livros didáticos de matemática do ensino médio**. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009 – Ijuí, RS. Disponível em: < http://www.projetos. unijui.edu.br /matematica/ cd_ ege m/fscommand/CC/CC_11.pdf> Acesso em: 02/04/2012.

MORAIS, Márcia de Oliveira; SILVA, Silvana Holanda da; SILVA, Maria Auricélia da; MAIA, Dennys Leite. **Tratamento e Conversão de Problemas Aritméticos:** Experiência com um Objeto de Aprendizagem. 2011. Disponível em: < HTTP://PT.SCRIBD.COM/DENNYSLEITE/D/65711287- TRATAMENTO-E CONVERSÃO-DE-PROBLEMAS-ARITMÉTICOS-EXPERIÊNCIA-COM-UM-OBJETO-DE-APRENDIZAGEM> Acesso em: 15/04/2012

MORRONE, Wagner; LOZADA, Cláudia de Oliveira, AMARAL, Luiz Henrique e ARAÚJO, Mauro Sérgio Teixeira. **Modelagem Matemática e Atividade Experimental como um modelo de integração no ensino de física.** Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvii/sys/resumos/T0438-2.pdf> Acesso em: 03/04/2012.

NEVES, Margarida Saraiva. **Repensando o papel do trabalho experimental, na aprendizagem da física, em sala de aula** – um estudo exploratório. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol11/n3/v11_n3_a6.htm> Acesso em: 03/04/2012.

OLIVEIRA, Cristiane Coppe de; ROSA, Milton, HEIN, Nelson**. Taxas, variações e funções**. / Cristiane Coppe de Oliveira, Milton Rosa, Nelson Hein. São Paulo, 200?, Escolas Associadas.

OLIVEIRA, Naci de. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontífice Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. 1997. Disponível em: http://200. 189.113.123/ diaadia/diadia/ arqui vos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Oliveira.pdf> Acesso em: 25/03/2012.

PELHO, Edelweiss Benez Brandão. **Introdução ao Conceito de Função:** a importância da compreensão das variáveis. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontífice Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. 2003. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/edelweiss_pelho.pdf> Acesso em: 15/03/2012.

PEREIRA, Vinicius Mendes Couto. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/13%20Vinicius%20Pereira.pdf> . Acesso em: 02/02/2012.

QUEIROZ, Carlos Antônio; RAMOS, Elenita Eliete de Lima. **Possibilidades interdisciplinares de Física e Matemática com o uso da prática experimental em Turmas do proeja/cefet-sc.** Programa de Especialização em Educação Profissional Técnica Integrada ao Ensino Médio na Modalidade de Jovens e Adultos, do Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2007. Disponível em: <http://www.ifsc.edu.br/images/stories/file/ PRPPG/monografias /esp_proeja /2007/ possibilidades_interdiciplinares_ de_fisica_e_matematica_com_o_uso_ da_pratica_experimental_em_turmas_do_proeja_cefet-sc_pdf.pdf> Acesso em: 03/04/2012.

QUEIROZ, Carlos Antônio; RAMOS, Elenita Eliete de Lima e SIPLE, Ivanete Zuchi. **Tópicos especiais em ciências I: Representação semióticam tecnologias educacionais e atividades experimentais.** Florianópolis: Publicações do IF-SC, 2011.

REIS, Adinilson Marques**. Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos do primeiro ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, São Paulo, 2011. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/ dissertacao/ adinilson_ marques _ reis.pdf> Acesso em: 02/02/2012.

SÁ, Pedro Franca de; SOUZA, Glageane da Silva e SILVA, Isaac Dayan Bastos da. **A construção do conceito de função: alguns dados históricos.** Traços, Belém, v. 6, n. 11, p. 81-94, ago, 2003. Disponível em: <http://www.nead.unama.br/bibliotecavirtual/revista/tracos/pdf/rtracos611a10.pdf> Acesso em: 25/03/2012.

SILVA, Maria Helena Morais e REZENDE, Wanderlei Moura. **Análise Histórica do Conceito de Função.** / Maria Helena Morais Silva; Wanderlei Moura Rezende. Rio de Janeiro, 1999.

STEFFENS, César Augusto. **Uma introdução ao processo da medição no ensino médio** /César Augusto Steffens, Eliane Angela Veit, Fernando Lang da Silveira. – Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2008. 86 p. : il. (Textos de apoio ao professor de física / Marco Antonio Moreira, Eliane Angela Veit, ISSN 1807-2763; v. 19 , n.2)

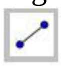
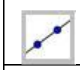
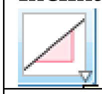
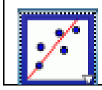
VIEL, Maria Jesus Martinez. **SEMIÓTICA: A noção do termo semiótica e o registro de representação semiótica na percepção de professores da Rede Pública de Ensino.** / Maria Jesus Martinez Viel. Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática - Universidade Cruzeiro do Sul (Unicsul), 2006, São Paulo, SP. Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/02-04.pdf> Acesso em: 02/04/2012.

ZUCHI, Ivanete. **A ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE VIA SEQUÊNCIA DIDÁTICA:** do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. Tese de Doutorado (Doutorado em Engenharia de Produção) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Procedimentos Básico para o GeoGebra

Comandos Básicos

Objeto	**Roteiro**	**Exemplo**
Ponto dado as coordenadas	Digite no campo Entrada o Ponto utilizando o formato (x,y)	(3,4)
Segmento de Reta [AB] 	Selecione no menu ferramentas "segmento definido por dois pontos"	Selecione os pontos A e B
Reta definada por dois pontos AB 	Selecione no menu ferramentas "Reta definida por dois pontos"	Selecione os pontos A e B
Inclinação 	Selecione no menu ferramentas "inclinação"	Selecione um segmento de reta ou reta
Regressão Linear 	Selecione no menu ferramentas "reta de regressão linear"	Selecione o conjunto de pontos