

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEISON TEIXEIRA PRÉVE

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

JOINVILLE - SC

2012-06-26

DEISON TEIXEIRA PRÉVE

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador(a): Prof. Ms. Marnei Luis Mandler

JOINVILLE - SC

2012

P944u

Preve, Deison Teixeira

Uma Introdução ao Estudo de Superfícies Mínimas / Deison Teixeira Préve. - 2012.

127 p.: il

Bibliografia: f. 126-127

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática. Joinville, 2012.

Orientador(a): Prof. Ms. Marnei Luis Mandler

Geometria Diferencial. Superfícies Mínimas. Superfície Parametrizada Regular. Películas de Sabão. I. Mandler, Marnei Luis. II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Curso de Licenciatura em Matemática. III. Uma Introdução ao Estudo de Superfícies Mínimas.

CDD: 516.363

DEISON TEIXEIRA PRÉVE

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Banca Examinadora

Orientador(a):

Prof. Ms. Marnei Luis Mandler.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

Prof. Dr. José Rafael Furlanetto.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

Prof. Ms. Rodrigo de Lima.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 26 de junho de 2012.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu pai Vanderlei e minha mãe Nilsa, por darem tudo em minha vida inclusive a possibilidade para que eu possa ter realizado este trabalho. Agradeço também à minha linda irmã Cíntia que entre tantos fatos dentro e fora da faculdade, conseguimos fazer isso tudo acontecer estando juntos.

Agradeço à todos os meus colegas de curso que saem da faculdade comigo, onde estivemos juntos desde o primeiro dia até o presente momento, rindo, xingando, brigando, estudando, se divertindo...

Agradeço também àqueles que de forma indireta estiveram comigo na faculdade, e à outros onde o tempo e à distancia não surtiram efeito.

Em especial, agradeço fortemente ao meu amigo Cleder que sempre se manteve ao meu lado nas horas difíceis, em trabalhos cansativos, dando apoio seja lá no que for, e sem você parceiro, esta faculdade e trabalho teriam sido mais difíceis.

De uma forma nada nova para a maioria, deixo meu muitíssimo obrigado à uma das pessoas mais especiais neste período de faculdade e na minha vida, obrigado Maiara por tudo aquilo que você sabe que lhe cabe e a muito muito mais que não imaginas, obrigado!

Agradeço ao meu grande orientador e cúmplice deste trabalho, Marnei. Que esteve sempre presente nas horas fáceis nas horas difíceis, ou seja, em qualquer momento do curso ou em qualquer momento do trabalho. Quase um ano antes de realizar o trabalho queria o professor como orientador e o professor deve lembrar e, hoje, vemos esse ótimo resultado que conseguimos. Muito obrigado por ter feito parte de uma parte da minha vida, e saiba que as contribuições e aprendizados que obtive com você são não-enumeráveis.

E agradeço também aos professores José Rafael e Rodrigo, que aceitaram fazer parte da avaliação deste trabalho, e podendo dar suas sugestões, correções e contribuições, obrigado.

"Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real."

Nicolai Lobachevsky

RESUMO

PRÉVE, Deison Teixeira. **Uma Introdução ao Estudo de Superfícies Mínimas**. 2012. 124. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

Existem diversas superfícies que são delimitadas por uma mesma curva fechada simples, mas devido a estudos experimentais, sabe-se que existem superfícies que possuem a menor área possível tendo esta curva como fronteira, e essa é a ideia principal do conceito de Superfícies Mínimas. Com este trabalho pretende-se estudar, detalhar e enfatizar tópicos importantes de Geometria Diferencial que darão subsídios a uma abordagem, mesmo que introdutória, à teoria de Superfícies Mínimas, para apresentar à comunidade acadêmica algumas contribuições científicas disponíveis sobre este assunto. Ao longo do trabalho, procura-se caracterizar matematicamente tais superfícies, exibir exemplos clássicos e relatar também alguns aspectos históricos do estudo de Superfícies Mínimas no decorrer da evolução da Matemática.

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Superfícies Mínimas. Superfície Parametrizada Regular. Películas de Sabão.

ABSTRACT

PRÉVE, Deison Teixeira. **An Introduction to the Study of Minimal Surfaces.** 2012. 124. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

There are many surfaces that are bounded by the same simple closed curve, but due to experimental studies, it is known that there are surfaces that have the smallest area possible having this curve as its boundary, and this is the main idea of the concept of Minimal Surfaces. This work aims to study, describe and emphasize important topics in Differential Geometry that will give grants to an approach, even introductory, to the theory of Minimal Surfaces, to present to the academic community some available scientific contributions on this subject. Throughout the work, we attempt to mathematically characterize these surfaces, showing classic examples, and also report some historical aspects of Minimal Surfaces in the elapse of the evolutions in Mathematics.

Key-words: Differential Geometry. Minimal Surfaces. Parametric Regular Surface. Soap Film.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Superfície de Costa	15
3.1	Vetores Tangentes às Curvas Coordenadas	31
3.2	Esfera	34
3.3	Paraboloide Hiperbólico	35
3.4	Paraboloide Elíptico	36
3.5	Catenoide	37
3.6	Toro	38
3.7	Hiperboloide de Duas Folhas	38
3.8	Elipsoide	40
3.9	Paraboloide Circular	41
3.10	Semi Cilindro Elíptico	44
3.11	Cone	46
3.12	Semi Cilindro	47
3.13	Plano $T_q\mathbb{S}$	49
3.14	Superfície Parametrizada que Não é Regular	49
3.15	Imagem da Aplicação Normal de Gauss	50
3.16	Aplicação Normal de Gauss Não Injetiva	53
3.17	Aplicação Normal de Gauss Não Sobrejetiva	53
3.18	Aplicação Normal de Gauss Bijetiva	53
3.19	Cilindro	55
3.20	Diferencial da Aplicação Normal de Gauss	55
3.21	Helicoide	61
3.22	Hiperboloide de Uma Folha	62
3.23	Área	64
3.24	Isometria entre Catenoide e Helicoide	68
3.25	Isometria entre Plano e o Cilindro	69
3.26	Isometria entre Setor Circular e Cone	69
3.27	Sela de Macaco	74
3.28	Chapéu de Sherlock	77
3.29	Curvatura Normal	78
4.1	Superfície Fechada	89
4.2	Parte da Superfície de Scherk	92
4.3	Superfície de Scherk	93
4.4	Variação Normal de $X(\overline{\mathbb{D}})$	94
4.5	Película de sabão à partir de uma arame fino	96
4.6	Superfície de Enneper em duas vistas	100
4.7	Superfície de Henneberg em duas vistas	108
4.8	Superfície Regrada	113

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 História das Superfícies Mínimas	12
1.1 Relatos Históricos	12
2 Conceitos Iniciais	17
2.1 Conceitos de Álgebra Linear	17
2.2 Conceitos de Análise	21
2.3 Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral	24
2.4 Conceitos de Variáveis Complexas	26
3 Tópicos da Teoria Local de Superfícies	30
3.1 Superfície Parametrizada Regular	30
3.2 Mudança de Parâmetros	41
3.3 Plano Tangente e Aplicação Normal de Gauss	47
3.4 Primeira Forma Fundamental	59
3.5 Segunda Forma Fundamental e Curvatura Normal	70
3.6 Curvaturas Principais, Curvatura Média e Curvatura de Gauss	79
4 Introdução às Superfícies Mínimas	87
4.1 Definição, Exemplos e Propriedades	87
4.2 Terminologia e as Películas de Sabão	92
4.3 Representação de Weierstrass	100
4.4 Características de Algumas Superfícies Mínimas	108
4.5 Introdução ao Problema de Plateau	121
CONCLUSÃO	124

INTRODUÇÃO

Fatos e formas intrigantes que a natureza toma, levam com que o homem busque respostas para desvendá-las e descrevê-las de maneira racional, lógica e explícita, afim de que possamos entender um pouco mais a ciência que está por de trás do mundo. E dentre estas ciências que são capazes de desvendar os mistérios naturais, está a Matemática, como uma ferramenta crucial com o poder de explicar, de maneira bela, como realmente funcionam ou ocorrem tais fenômenos. E um fenômeno simples que ocorre com a mistura química água e sabão, pode ser descrito matematicamente, numa tarefa nem um pouco trivial, mas instigante e curiosa, através do estudo das Superfícies Mínimas.

Cada pessoa deve possuir uma noção elementar do que é uma superfície ou volume, mas segundo Araújo (2008), qualquer tentativa que possa descrever essas noções cairá inevitavelmente em redundância sem que se tenha uma definição matemática concreta. Porém, uma proposta mais intuitiva e simples para a compreensão do conceito de volume seria considerá-lo como uma determinada região fechada do espaço tridimensional, recoberta por uma fronteira bidimensional, que por sua vez pode ser chamada de superfície.

Existem vários casos especiais de superfícies, como as superfícies de revolução, as superfícies paralelas e as superfícies regradas, por exemplo. Além disso, pode-se classificar uma determinada superfície como aberta ou fechada, orientável ou não orientável, regular ou não regular. E em uma categoria especial de superfícies identifica-se uma relação intrigante e ótima entre sua área efetiva e a curva que a delimita, que são as Superfícies Mínimas.

De forma intuitiva, Superfícies Mínimas, como já sugere o próprio nome, podem ser vistas como superfícies de área mínima que possuem uma determinada curva fechada como fronteira. Porém uma definição equivalente e mais simples pode ser dada, caracterizando-as como superfícies que possuem curvatura média identicamente nula. Por curvatura média entende-se a média aritmética entre as curvaturas principais da superfície, que por sua vez são definidas como os valores máximo e mínimo da função curvatura normal da superfície, dada pelo quociente entre a Segunda e a Primeira Forma Fundamental, que estão relacionadas respectivamente, com os conceitos de curvaturas e comprimento de curvas contidas na superfície. Tais formas fundamentais determinam localmente uma superfície a menos de sua posição no espaço e suas curvaturas principais podem ser calculadas a partir dos coeficientes algébricos destas Formas.

Tendo posse dessas informações, desejamos ao longo do desenvolvimento deste trabalho, abordar uma revisão teórica desses conceitos, fazendo uso dos conhecimentos adquiridos ao longo de diversas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, para que seja possível exibir um ramo mais avançado da matemática que contempla as Superfícies Mínimas, que é a Geometria Diferencial. Consoante aos estudos revisionais e complementares dessa pesquisa vem-se à tona a necessidade de adentrar nas contribuições de matemáticos que ao longo dos anos construíram os conceitos de Superfícies Mínimas e

assim relatar tais descobertas.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: o Capítulo 1 terá como objetivo principal narrar a parte da história que concerne às Superfícies Mínimas, com a trajetória dos problemas formulados e soluções obtidas, bem como as contribuições de matemáticos ao passar dos tempos. No Capítulo 2 serão apresentados os conceitos básicos iniciais que serão utilizados no decorrer de todo o trabalho, com destaque para definições e resultados que envolvem os assuntos de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Análise Real e Variáveis Complexas. Tendo posse desses conceitos, no Capítulo 3 serão então abordados os tópicos necessários de Geometria Diferencial, com desmembramentos e exemplificações da teoria para a fixação de tais tópicos, com a finalidade de poder introduzir o estudo de Superfície Mínimas, o qual é o foco deste trabalho, que está contemplado no Capítulo 4.

Capítulo 1

História das Superfícies Mínimas

Este capítulo tem como objetivo principal apresentar historicamente as grandes motivações e desafios matemáticos que acarretaram na continuidade do estudo das Superfícies Mínimas. Bem como, as descobertas mais relevantes feitas por importantes matemáticos e ainda, o que há de recente sobre este assunto e explicitar alguns problemas em aberto da atualidade. A maioria dos conteúdos matemáticos descritos intuitivamente e os exemplos citados neste primeiro capítulo, poderão ser lidos e estudados com detalhes no decorrer dos Capítulos 3 e 4.

1.1 Relatos Históricos

Como afirma [4], a teoria das superfícies mínimas é um tópico antigo, iniciado por Lagrange (1736-1813) em 1760, que apresentou um problema, como exemplo de um algoritmo, para achar curvas ou superfícies que minimizassem quantidades como áreas, volumes, comprimentos, energia e outros. Tais algoritmos constituem atualmente o estudo de Cálculo das Variações. Convém mencionar que a definição de curvatura média não era conhecida no tempo de Lagrange, este conceito foi introduzido somente em 1831 pela francesa Sophie Germain (1776-1831), conforme cita [8]. Em verdade, não estavam sequer definidas as curvaturas principais, que foram introduzidas por Euler (1707-1783) no mesmo ano em que o trabalho de Lagrange foi publicado. No tempo de Lagrange, as relações entre superfícies mínimas e películas de sabão não estavam esclarecidas e o próprio Lagrange não deu exemplos de superfícies mínimas, exceto o exemplo trivial do plano.

Só dezesseis anos depois de Lagrange ter obtido algumas condições para que uma superfície seja considerada mínima, Meusnier (1754-1793), matemático francês, mostrou que tal conceito era equivalente ao fato da soma das curvaturas principais ser nula, e obteve duas novas soluções à partir de sua descoberta. Obteve uma superfície de revolução que primeiramente denominou 'alyside' e mais tarde, foi rebatizada por Plateau (1801-1883) de Catenoide, sendo esta a única superfície mínima de revolução existente, a menos de translações, rotações e simetrias, e que não seja um plano. Meusnier obteve uma outra solução, introduzindo a condição adicional que a superfície fosse gerada por retas. A solução, neste caso, é um Helicoide que se enrola em um cilindro circular reto. Assim como o Catenoide possui uma particularidade própria, o helicoide possui a propriedade provada por Catalan (1814-1894), matemático belga, em 1842, que ela é, exceto o plano, a única superfície mínima regrada.

De acordo com [3], durante muito tempo as únicas superfícies mínimas conhecidas, além do plano, eram o Catenoide e o Helicoide. Apenas anos mais tarde, em 1835 e em

1864, foram encontrados novos exemplos de superfícies mínimas, que vieram a ser batizadas pelos nomes dos seus descobridores, ambos alemães, Scherk (1798-1885) e Enneper (1830-1885), com suas superfícies denominadas de Superfície de Scherk e Superfície de Enneper, respectivamente. Scherk obteve outros exemplos à partir da sua superfície, que não descreveremos aqui, e provou que o helicóide e o catenoide, descobertos por Meusnier, são apenas dois elementos de um grupo de superfícies mínimas. Teve também a Superfície de Henneberg (1875), descrita por Henneberg em sua tese de doutorado em Zurique, a única com a propriedade de não ser orientável, até aquele momento, como afirma [6].

Após muitos anos de dedicações de matemáticos, uma solução completamente satisfatória da equação de Lagrange só foi obtida pelo também alemão, Weierstrass (1815-1897) em 1866, pouco mais de cem anos depois da definição de superfície mínima. Essa primeira solução geral consiste na equivalência da caracterização das superfícies mínimas através de equações diferenciais parciais, e entre a construção dessas superfícies a partir de duas funções holomorfas, conforme é descrito em [2]. A representação de Weierstrass, como foi chamado seu resultado à posteriori, permite obter uma infinidade de exemplos de superfícies mínimas, e além disso, esta representação desempenha um papel essencial na investigação teórica de tais superfícies.

As experiências que duraram quase três décadas (entre 1843-1869), com películas de sabão sob a ação da tensão superficial, mostraram fisicamente a existência de superfícies mínimas estáveis para um contorno dado. Este grande resultado obtido por Joseph Plateau, um grande físico de nacionalidade belga que fez com que essa teoria tivesse um grande significado nos dias atuais, tornou-se então um desafio para os matemáticos obter uma prova teórica dos resultados experimentais de Plateau, e a seguinte questão, admitidamente vaga e essencialmente proposta por Lagrange, veio a ser conhecida sob o nome de problema de Plateau: Determinar a superfície mínima passando por uma curva fechada dada.

Este desafio atraiu, entre outros, matemáticos do porte de Riemann (1826-1866), Weierstrass e Schwarz (1843-1921). Alguns casos muito especiais foram resolvidos, porém no início do século passado a dificuldade se estendia tão fortemente que o matemático francês Darboux (1842-1917) escreveu em seus tratados sobre superfícies em seu primeiro volume a seguinte frase: "A análise matemática não pôde até agora imaginar um método geral que permita começar o estudo desta bela questão". Convém mencionar que as tentativas eram no sentido de determinar explicitamente uma superfície mínima limitada pelo contorno dado. Porém, na segunda metade do século passado, houve uma mudança de ponto de vista em relação a problemas deste tipo. Renunciando à determinação de uma solução explícita, tentavam inicialmente provar sua existência e, em seguida, estudar as suas propriedades.

Uma contribuição definitiva para a questão de existência do problema de Plateau foi dada, independentemente, pelo matemático norte-americano Douglas (1897-1965), e pelo húngaro Radó (1895-1965) em 1930, segundo [3]. O método de Douglas se estende para resolver o problema de Plateau para duas ou mais curvas na fronteira da superfície. Ao passar alguns anos, a teoria de Douglas foi modificada por Courant (1888-1972), ficando conhecida como solução de Douglas-Radó-Courant para o problema de Plateau no disco, porém Douglas foi o único a ganhar algum prêmio pelo feito, que é a Medalha Fields em 1936, conforme [8]. Vários outros matemáticos trabalharam em busca propriedades em cima da solução de Douglas-Radó-Courant, como regularidade e unicidade, afim de aperfeiçoar e retirar novas informações que os ajudariam a explicitar novas soluções para o problema de Plateau, dos quais podemos citar o americano Osserman (1926-2011) e

Radó.

Outras versões do problema de Plateau, como por exemplo, para dimensões maiores, tem inspirado a criação de entidades matemáticas que incluem objetos semelhantes às películas de sabão. De uma maneira resumida, o resultado principal destes anos todos de trabalhos feitos por matemáticos em busca de solução para o problema de Plateau é que: "quase todo contorno admite um número finito de soluções para o problema de Plateau, e este número permanece invariante para pequenas perturbações do contorno em questão". Hoje tais desafios e resultados enfrentados constituem a chamada Teoria da Medida Geométrica, que é a parte da matemática onde Geometria e Análise se misturam de forma indistinguível, de acordo com [4].

Em paralelo com o Problema de Plateau muitos matemáticos se dedicavam a procurar superfícies mínimas, pois as fórmulas de Weierstrass permitem tais buscas, e além disso procuraram também especificações e famílias de superfícies mínimas, com isso transformando o pequeno tópico de superfície mínimas de 1760, em uma grande teoria matemática, que já abordava, entre outros, assuntos como Geometria Diferencial, Calculo Variacional, Análise Complexa e Equações Diferenciais Parciais. E assim, o russo Bernstein (1880-1968) iniciou de forma sistemática a procura de exemplos geometricamente simples, para suas novas definições denominadas de Superfícies Mínimas Completas, Superfícies Mínimas com Curvatura Total Finita, e em geral com as duas denominações juntas. Por superfície mínima completa, todos os exemplos já mencionados se encaixam nesta definição, com exceção da superfície de Henneberg.

Intuitivamente, uma superfície completa, como descrito em [4], é aquela na qual se pode percorrer qualquer distância em qualquer direção sem sair da superfície. Exemplos de superfícies completas são esfera, cilindro, catenoide, Helicoide. As superfícies completas se subdividem em limitadas (por exemplo a esfera), e não limitadas (plano, catenoide e helicoide). E de superfície mínima completa com curvatura total finita entende-se por um superfície topologicamente equivalente a uma superfície fechada menos um número finito de pontos contidos na superfície fechada, ou seja, existe um difeomorfismo conforme entre ambas as superfícies. Como exemplos de tal equivalência, tem-se um plano e uma esfera menos um ponto; o catenoide e a esfera menos dois pontos. Se uma superfície topologicamente equivalente a uma superfície fechada menos um número finito de pontos, diz-se que tais superfícies são do tipo topológico finito, denominação adotada pelo polonês Cohn-Vossen (1902-1936) em 1935. Uma superfície mínima que não é do tipo topológico finito é a Superfície de Scherk.

Denomina-se também superfícies mínimas mergulhadas, que nada mais são que superfícies mínimas de curvatura total finita que não possui auto-interseções. O clássico exemplo de uma superfície que não é mergulhada é a Superfície de Enneper, pois ela possui auto-interseções. De acordo com [4], tal superfície é completa, tem curvatura total finita igual a -4π , e é topologicamente equivalente a um plano. Enfim, se tratando de superfícies mínimas temos os seguintes enquadramentos, para os exemplos que demos até então: o plano, helicoide, catenoide e superfície de Scherk, são superfícies mínimas completas e mergulhadas; e os únicos exemplos de superfície mínimas completas com curvatura total finita e mergulhadas são o plano e o catenoide.

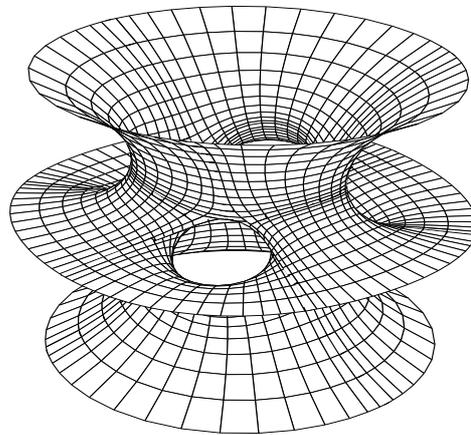
Com isso, surgiu mais um desafio para os matemáticos, que se baseia em apresentar um terceiro exemplo de uma superfície mínima completa com curvatura total finita mergulhada. No início do anos 80, uma grande quantidade de novos exemplos começaram a aparecer graças aos trabalhos do grande matemático chinês Chen (1933-1996) e dos trabalhos de Gackstatter, D. Hoffman, Meeks, Karchero, entre outros. Exemplos os quais

foram construídos tendo suas bases fundamentadas na representação de Weierstrass, mas nenhum tinha sido a resposta para a procura do terceiro exemplo de superfície mínima completa com curvatura total finita mergulhada.

Só em 1982, o brasileiro Celso José Costa (atualmente professor da Universidade Federal Fluminense) durante sua tese de doutorado no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), utilizando a representação de Weierstrass, obteve as equações do terceiro exemplo de superfície mínima completa com curvatura total finita mergulhada, encontrando assim uma superfície topologicamente equivalente ao toro menos três pontos, batizada de Superfície de Costa, conforme [2] e [4]. No entanto, Costa não havia ainda provado que sua superfície obtida era realmente mergulhada.

Em 1983, um dos membros de sua banca examinadora da tese, Jorge, comunicou a Osserman o feito que Costa tinha obtido, e que por sua vez repassou as devidas informações a David Hoffman, da Universidade de Amherst (Massachusetts-EUA). Com a ajuda de um especialista, D. Hoffman conseguiu gerar em computação gráfica as equações de Costa, e dessa forma foi possível constatar que a superfície de Costa era de fato mergulhada. Entretanto, com o auxílio computacional que propiciou a vista espacial da superfície de Costa, constatou-se que ela possuía muitas simetrias, as quais estavam ocultas nas equações de Costa, mas que uma vez observadas, eram de fácil verificação, como afirma [4]. E em 1984, Hoffman chegou finalmente no resultado matemático de que a superfície de Costa é mergulhada, confirmando o que se verificava na sua plotagem gráfica, e assim sendo o terceiro exemplo de superfícies mínimas completas com curvatura total finita mergulhada obtida em pouco mais de duzentos anos de história.

Figura 1.1: Superfície de Costa



Fonte: Produção do próprio autor

A Superfície de Costa pode ser observada na figura 1.1 e de acordo com [9], a Representação de Weierstrass para a Superfície de Costa é dada pelas seguintes igualdades,

$$\begin{aligned}
x(u, v) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\xi(u + iv) + \pi u + \frac{\pi^2}{4e_1} + \frac{\pi}{2e_1} \left[\xi \left(u + iv - \frac{1}{2} \right) - \xi \left(u + iv - \frac{i}{2} \right) \right] \right\}; \\
y(u, v) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -i\xi(u + iv) + \pi v + \frac{\pi^2}{4e_1} - \frac{\pi}{2e_1} \left[i\xi \left(u + iv - \frac{1}{2} \right) - i\xi \left(u + iv - \frac{i}{2} \right) \right] \right\}; \\
z(u, v) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \ln \left| \frac{\psi(u + iv) - e_1}{\psi(u + iv) + e_1} \right|,
\end{aligned}$$

onde $\xi(\zeta)$ é a função zeta de Weierstrass, $\psi(\zeta)$ é a função elíptica de Weierstrass e $e_1 \approx 6.87519$.

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Neste capítulo serão introduzidas notações, conceitos e resultados auxiliares que serão utilizados durante todo o trabalho. A maior parte destes conceitos já foram estudados anteriormente em disciplinas regulares da Graduação em Licenciatura em Matemática, como Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral I e II, Cálculo Vetorial, Variáveis Complexas e Análise Real. As demonstrações aqui omitidas, podem ser obtidas em [5], [10], [11], [12], [14] e [15].

2.1 Conceitos de Álgebra Linear

Um conjunto não vazio \mathbb{V} , munido das operações de soma e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial se, para quaisquer elementos $w_1, w_2 \in \mathbb{V}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ forem válidas as seguintes propriedades:

- i)* $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$;
- ii)* $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3)$;
- iii)* dado $w_1 \in \mathbb{V}$, existe um único elemento neutro aditivo pertencente a \mathbb{V} , denotado por 0 , tal que $w_1 + 0 = w_1$;
- iv)* dado $w_1 \in \mathbb{V}$, existe um único elemento oposto aditivo pertencente a \mathbb{V} , denotado por $-w_1$, tal que $w_1 + (-w_1) = 0$;
- v)* $\lambda_1(\lambda_2 w_1) = \lambda_1 \lambda_2 w_1$;
- vi)* $(\lambda_1 + \lambda_2)w_1 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_1$;
- vii)* $\lambda_1(w_1 + w_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_1 w_2$;
- viii)* $1w_1 = w_1$.

O espaço euclidiano n -dimensional, denotado por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

é um espaço vetorial sobre os números reais.

Denotaremos tanto o vetor nulo quanto o número real zero pelo mesmo símbolo 0 .

O produto interno usual em \mathbb{R}^n é definido por

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n, \end{aligned}$$

para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$, e satisfaz as seguintes propriedades

- i) $\langle w_1, w_1 \rangle \geq 0$ e $\langle w_1, w_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow w_1 = 0$;
- ii) $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_2, w_1 \rangle$;
- iii) $\langle w_1, w_2 + w_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle + \langle w_1, w_3 \rangle$;
- iv) $\langle \lambda w_1, w_2 \rangle = \lambda \langle w_1, w_2 \rangle$.

A norma ou comprimento de um vetor $w = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Dizemos que o ângulo entre dois vetores w_1 e w_2 não nulos é o único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \|w_2\|}.$$

O produto vetorial, especificamente em \mathbb{R}^3 , entre dois vetores w_1 e w_2 , de componentes $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $w_2 = (x_2, y_2, z_2)$, denotado por $w_1 \wedge w_2$, é dado por,

$$w_1 \wedge w_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

e satisfaz as seguintes propriedades, para w_1, w_2 e $w_3 \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

- i) $\|w_1 \wedge w_2\| = \|w_1\| \|w_2\| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre w_1 e w_2 ;
- ii) $\langle w_1 \wedge w_2, w_1 \rangle = \langle w_1 \wedge w_2, w_2 \rangle = 0$;
- iii) $w_1 \wedge w_2 = 0 \Leftrightarrow w_1$ e w_2 são colineares (em particular, quando $w_1 = w_2$);
- iv) $w_1 \wedge w_2 = -w_2 \wedge w_1$;
- v) $(\lambda w_1) \wedge w_2 = \lambda(w_1 \wedge w_2)$;
- vi) $w_1 \wedge (w_2 + w_3) = w_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge w_3$;
- vii) $w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) = w_2 \langle w_1, w_3 \rangle - w_3 \langle w_1, w_2 \rangle$.

Um subconjunto de vetores $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ contido em um espaço vetorial \mathbb{V} é linearmente independente (LI) se, para toda combinação linear nula desses vetores, da forma

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0,$$

tivermos $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Um subconjunto de vetores $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é linearmente dependente (LD) se existe pelo menos um $\lambda_i \neq 0$, com $i = 1, \dots, n$, tal que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

Um conjunto de vetores $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base do espaço vetorial \mathbb{V} se β for LI e se todo $w \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresso como

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n,$$

com $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Uma base $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é dita ortonormal se

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

A dimensão de um espaço vetorial \mathbb{V} é o número de vetores de uma base β de \mathbb{V} . Quando $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, denotamos a dimensão de \mathbb{V} por $\dim(\mathbb{V}) = n$.

Um subconjunto de vetores $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n , quando

$$\begin{cases} u_1 = (1, 0, 0, \dots, 0); \\ u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \\ \vdots \\ u_n = (0, 0, 0, \dots, 1). \end{cases}$$

Uma transformação (ou aplicação) linear entre os espaços vetoriais \mathbb{V} e \mathbb{W} é uma função $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ que associa cada vetor $w_1 \in \mathbb{V}$ a um vetor $T(w_1) \in \mathbb{W}$, de modo que valham as seguintes relações

- i) $T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2)$;
- ii) $T(\lambda w_1) = \lambda T(w_1)$,

para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

O Núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ é o subconjunto

$$\text{Nuc}(T) = \{w_1 \in \mathbb{V} / T(w_1) = 0\}.$$

A Imagem de uma transformação linear $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ é o subconjunto

$$\text{Im}(T) = \{w_2 \in \mathbb{W} / w_2 = T(w_1) \text{ para algum } w_1 \in \mathbb{V}\}.$$

Em particular, o Núcleo e a Imagem de uma transformação linear são espaços vetoriais, e é válido o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam \mathbb{V} e \mathbb{W} espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ tem-se que*

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Um operador linear é uma transformação linear da forma $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$.

O traço de uma matriz quadrada M é a soma dos elementos da sua diagonal principal e denotaremos

$$\text{tr}[M] = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Um vetor não nulo $w_1 \in \mathbb{V}$ é um autovetor do operador $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(w_1) = \lambda w_1$$

onde λ é dito autovalor de T associado a w_1 .

Se w_1 é autovetor de $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ associado ao autovalor λ então temos

$$T(w_1) - \lambda w_1 = 0 \Rightarrow (T - \lambda I)w_1 = 0$$

e como por definição, $w_1 \neq 0$, temos que $\det[T - \lambda I] = 0$.

Dizemos que $p(\lambda) = \det[T - \lambda I]$ é o polinômio característico do operador linear $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$.

Observe que as raízes do polinômio característicos são os autovalores do operador linear T , e os respectivos autovetores são soluções não triviais do sistema homogêneo $(T - \lambda I)w_1 = 0$.

Em particular, o polinômio característico de um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, cuja matriz em relação às bases canônicas é da forma

$$[T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det[T - \lambda I] \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \text{tr}([T])\lambda + \det([T]). \end{aligned}$$

Um operador linear $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ é diagonalizável se existir uma base β de \mathbb{V} composta por autovetores de T .

Quando $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ é diagonalizável e $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ é a base de \mathbb{V} composta por autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente, então a matriz T em relação a base β é

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Se \mathbb{V} é um espaço vetorial munido de produto interno, dizemos que um operador linear $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ é auto-adjunto se

$$\langle T(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, T(w_2) \rangle,$$

para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{V}$.

Teorema 2.1.2 (Teorema Espectral) *Para todo operador auto-adjunto $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$,*

num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de \mathbb{V} formada por autovetores de T .

2.2 Conceitos de Análise

Uma bola aberta em \mathbb{R}^n com centro $c_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\epsilon > 0$, denotada por $B_\epsilon(c_0)$, é o conjunto dos pontos $c \in \mathbb{R}^n$ que distam menos que ϵ de c_0 ou seja,

$$B_\epsilon(c_0) = \{c \in \mathbb{R}^n / \|c - c_0\| < \epsilon\}.$$

Um subconjunto \mathbb{U} de \mathbb{R}^n é aberto se para todo $c_0 \in \mathbb{U}$ existir um $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(c_0) \subset \mathbb{U}$.

Dizemos que um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n que contém um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ é dito uma vizinhança de q em \mathbb{R}^n .

Uma função $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, onde \mathbb{U} é um aberto de \mathbb{R}^n , é contínua em $c_0 \in \mathbb{U}$ se

$$\lim_{c \rightarrow c_0} F(c) = F(c_0).$$

Além disso, F é dita contínua em \mathbb{U} se F for contínua em c_0 , para todo $c_0 \in \mathbb{U}$.

Uma função $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^n se cada uma de suas componentes possuírem todas as derivadas até ordem n e contínuas.

Uma função $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^∞ se cada uma de suas componentes possuírem derivadas de todas as ordens contínuas.

Teorema 2.2.1 *Seja $r : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^n , (em particular possui todas as derivadas até ordem n no ponto $0 \in I$). Então $r^{(i)}(0) = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$, se e somente se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^n} = 0$.*

Demonstração: *Suponha que $r(0) = r'(0) = r''(0) = r'''(0) = \dots = r^n(0) = 0$, assim temos que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^0} = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t) - r(0)}{t - 0} = r'(0) = 0.$$

Suponha por indução que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r'(t)}{t^{n-1}} = 0$, dessa forma dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |t| < \delta$, então

$$\left| \frac{r'(t)}{t^{n-1}} \right| < \epsilon,$$

e também temos que

$$\frac{r(t) - r(0)}{t - 0} = r'(c), \quad \text{onde } c \in (0, t).$$

Então

$$\left| \frac{r(t)}{t^n} \right| = \left| \frac{r'(c)t}{t^n} \right| = \left| \frac{r'(c)}{t^{n-1}} \right| = \left| \frac{r'(c)}{c^{n-1}} \right| \left| \frac{c^{n-1}}{t^{n-1}} \right| < \epsilon,$$

ou seja, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^n} = 0$, pois $0 < |c| < |t|$.

Reciprocamente, suponha agora que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^n} = 0$, logo para $n = 0$ temos que $r(0) = 0$ e para $n = 1$ temos que $r'(0) = 0$. Suponha por indução novamente que $r^i(0) = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$. Definindo uma função

$$g(t) = r(t) - \frac{r^{(n)}(0)t^n}{n!},$$

logo temos que $g^i(0) = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$, assim vale a primeira parte do teorema, portanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{r(t)}{t^n} - \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t^n} = 0,$$

ou seja,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^n} = \frac{r^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow r^{(n)}(0) = 0.$$

Assim obtemos que $r^{(i)}(0) = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. ■

Uma função $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$, onde \mathbb{U}, \mathbb{V} são abertos de \mathbb{R}^n , é um homomorfismo se F for contínua e admitir inversa $F^{-1} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ também contínua. Neste caso, \mathbb{U} e \mathbb{V} são ditos homeomorfos.

Uma função $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ diferenciável de classe C^∞ , onde \mathbb{U}, \mathbb{V} são abertos de \mathbb{R}^n , é um difeomorfismo de classe C^∞ se F possuir uma função inversa F^{-1} também diferenciável de classe C^∞ .

Teorema 2.2.2 (Teorema de Schwarz) *Seja $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $q \in \mathbb{U}$. Para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$, tem-se*

$$F_{x_i x_j}(q) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(q) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(q) = F_{x_j x_i}(q).$$

Em particular, se $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, o Teorema de Schwarz será válido para cada função componente de F .

Se \mathbb{U} é um aberto de \mathbb{R}^n dizemos que uma função $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $q \in \mathbb{U}$, se existir uma aplicação linear, denotada por $dF_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, para todo vetor $w \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$F(q+w) = F(q) + dF_q(w) + R(w),$$

onde $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{R(w)}{\|w\|} = 0$. A aplicação dF_q é denominada diferencial de F em q . A função F é dita diferenciável se F é diferenciável em q , para todo $q \in \mathbb{U}$.

Teorema 2.2.3 Se $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $q \in \mathbb{U}$ então, para todo $w \in \mathbb{R}^n$ tem-se que

$$dF_q(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(q + tw) - F(q)}{t}.$$

Demonstração: Supondo que F é diferenciável, então existe a aplicação linear dF_q tal que

$$F(q + w) = F(q) + dF_q(w) + R(w)$$

com $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{R(w)}{\|w\|} = 0$. Assim, para cada $t \neq 0$ temos que

$$F(q + tw) = F(q) + dF_q(tw) + R(tw)$$

e

$$dF_q(tw) = F(q + tw) - F(q) - R(tw)$$

como dF_q é linear, temos

$$dF_q(w) = \frac{F(q + tw) - F(q) - R(tw)}{t}$$

e fazendo $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} dF_q(w) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(q + tw) - F(q)}{t} \pm \|w\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(tw)}{\|tw\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(q + tw) - F(q)}{t}. \end{aligned}$$

■

Sejam \mathbb{U}, \mathbb{V} abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m e $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções tais que $F(\mathbb{U}) = \mathbb{V}$. Se F é diferenciável em $q \in \mathbb{U}$ e G é diferenciável em $F(q)$ então a composta $G \circ F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável em q e

$$d(G \circ F)_q = dG_{F(q)} \circ dF_q.$$

Seja $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em $q \in \mathbb{U}$. Como $dF_q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, a matriz associada a dF_q , relativamente às bases canônicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , é dada por

$$[dF_q] = J(F_q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(q) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(q) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(q) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(q) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(q) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(q) \end{bmatrix},$$

onde F_1, F_2, \dots, F_m são as funções componentes de F . A matriz acima é denominada matriz Jacobiana da F em q . Em particular, quando $m = n$, o determinante da matriz Jacobiana é dito o Jacobiano de F em q , denotado por $\det(J(F_q))$.

Teorema 2.2.4 (Teorema da Função Inversa) *Sejam $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^∞ e $q \in \mathbb{U}$ tal que dF_q é injetora. Então, existe uma vizinhança \mathbb{U}_q de q , contida em \mathbb{U} , tal que $F(\mathbb{U}_q)$ é aberto em \mathbb{R}^n e a restrição de F a \mathbb{U}_q é um difeomorfismo de classe C^∞ , de \mathbb{U}_q sobre $F(\mathbb{U}_q)$.*

Teorema 2.2.5 (Teorema da Função Implícita) *Seja $F : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe C^∞ . Fixados $q \in \mathbb{U}$, onde $q = (a, b)$ com $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, e $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(q) = c$. Se a matriz Jacobiana de F tem posto n , então existe uma vizinhança \mathbb{U}_b de b em \mathbb{R}^m e uma única função $G : \mathbb{U}_b \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciável de classe C^∞ , tal que $G(b) = a$ e $F(G(b), b) = c$, para todo $b \in \mathbb{U}_b$.*

Teorema 2.2.6 (Mudança de Variáveis para Integrais Duplas) *Sejam \mathbb{U}, \mathbb{V} subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 e $h : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ uma função diferenciável dada por $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ cujo Jacobiano nunca se anula. Se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua sobre o aberto \mathbb{U} então*

$$\iint_{\mathbb{U}} F(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{V}} F(x(u, v), y(u, v)) \| \det(J(h)) \| du dv.$$

2.3 Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral

Denotaremos a derivada ordinária de uma função real f em relação uma variável real t , como sendo

$$\frac{df}{dt} = f'(t).$$

Denotaremos por $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função da forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

onde cada função $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, m$, é dita função coordenada ou função componente de F .

Denotaremos a derivada parcial de F em relação à variável independente x_i por

$$F_{x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \frac{\partial F_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \right).$$

Em particular, se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

denotaremos a derivada parcial de F em relação a u como

$$F_u = \frac{\partial F}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (x_u, y_u, z_u).$$

Denotaremos a derivada de segunda ordem de $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em relação a u como

$$F_{uu} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u} = (x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}),$$

e em relação a v como

$$F_{uv} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}).$$

O gradiente de uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o vetor denotado por

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = (F_{x_1}, F_{x_2}, \dots, F_{x_n}).$$

O Laplaciano de uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é o operador diferenciável de segunda ordem definido como $\Delta F = \langle \nabla, \nabla F \rangle$, ou seja,

$$\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}.$$

Se o Laplaciano de uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for identicamente nulo, então as funções componentes de F são ditas harmônicas.

Dizemos que uma curva parametrizada é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $I \subset \mathbb{R}$, dada por

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Dizemos que o vetor tangente ou vetor velocidade da curva α , dado por $\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$, quando não nulo, aponta para a direção tangente à curva.

É chamada de uma curva parametrizada regular quando seu vetor velocidade nunca se anula e é de classe C^∞ .

O comprimento de uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado por

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

A função comprimento de arco da curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado por

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(r)\| dr.$$

Note que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco, quando seu parâmetro for o comprimento de arco s .

Proposição 2.3.1 *Uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se todos os seus vetores tangentes são unitários.*

A curvatura de uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o número real

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Geometricamente, a curvatura de uma curva regular mede a taxa de variação das direções dos vetores velocidades e intuitivamente, esta taxa indica o quanto a curva se afasta do seu vetor tangente numa vizinhança de um ponto.

O vetor normal principal à uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado por

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}.$$

O vetor binormal à uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco é dado por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é

$$b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s).$$

A torção de uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o número real $\tau(s)$ dado por

$$\tau(s) = -\langle b'(s), n(s) \rangle.$$

Geometricamente, a torção de uma curva regular mede a taxa de variação da direção do vetor binormal à curva e intuitivamente, esta taxa indica o quanto a curva se afasta do plano gerado por $\alpha'(s)$ e $n(s)$, chamado de plano osculador.

Teorema 2.3.2 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de curvatura e torção não-nulas. Então, α é uma hélice se e somente se $\frac{k(s)}{\tau(s)}$ é constante.*

2.4 Conceitos de Variáveis Complexas

Um número complexo z é um par ordenado de números reais denotado por $z = (x, y) = x + iy$ onde $i = \sqrt{-1}$. Denotamos o conjunto de todos os números complexos, ou plano complexo por

$$\mathbb{C} = \{x + iy/x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Dado o número complexo $z = x + iy$, denominamos o número real x como a parte real de z e o número real y como a parte imaginária de z e escrevemos

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Dizemos que o módulo ou valor absoluto de um número complexo $z = x + iy$ é dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Um número complexo dado por $z = x + iy$ pode ser reescrito na forma polar como

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

onde $r = |z|$ é dito raio polar e θ é tal que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

é dito argumento polar de z .

Na forma polar temos que

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

Dado o número complexo $z = x + iy$, dizemos que o conjugado de z é o número complexo $\bar{z} = x - iy$.

Dizemos que $D(z_0, a)$ é um disco aberto de raio $a \in \mathbb{R}$ e centro $z_0 \in \mathbb{C}$ se

$$D(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < a\}.$$

Dizemos que $\bar{D}(z_0, a)$ é um disco fechado de raio $a \in \mathbb{R}$ e centro $z_0 \in \mathbb{C}$ se

$$\bar{D}(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| \leq a\}$$

Em particular, a fronteira de um disco D será denotado por ∂D , e é dada por

$$\partial D(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = a\}.$$

Dizemos que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função complexa da variável complexa z se associar para cada valor de z , um único número complexo w . Chamamos w de imagem de z por f e denotamos

$$w = f(z).$$

Podemos dizer também que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ associa cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao único par $w = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y) = f(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Dizemos que uma função complexa $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathbb{A} é um aberto de \mathbb{C} , é contínua em $z_0 \in \mathbb{A}$ se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Além disso, f é dita contínua em \mathbb{A} se f for contínua em z_0 , para todo $z_0 \in \mathbb{A}$.

Denotaremos a derivada de uma função complexa f em relação a variável complexa z como

$$\frac{df}{dz} = f'(z).$$

Neste caso, dizemos que f é derivável em z .

Se uma função complexa $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ admitir derivada no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ então as seguintes igualdades são válidas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Em particular, tais equações são denominadas de equações ou condições de Cauchy-Riemann.

Uma função $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathbb{A} é um aberto de \mathbb{C} , é analítica ou holomorfa se a derivada $f'(z)$ existir em todos os pontos $z \in \mathbb{A}$.

Uma condição necessária para que a função complexa $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathbb{A} é um aberto de \mathbb{C} , dada por $w = f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$, seja holomorfa em \mathbb{A} é que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfaçam as condições de Cauchy-Riemann.

Quando as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisfizerem as condições de Cauchy-Riemann, então o Laplaciano da função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ será identicamente nulo, ou seja,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Se $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$, as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ comumente são chamadas de funções harmônicas conjugadas.

Se $f(z)$ é holomorfa em um aberto \mathbb{A} do plano \mathbb{C} , sua derivada é dada por $f'(z)$. Se $f'(z)$ também for holomorfa no mesmo aberto, denotaremos sua derivada por

$$f''(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Denotaremos a derivada de ordem n , ou n -ésima derivada de $f(z)$, caso existir, como

$$f^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial z^n}.$$

O ponto $z_0 \in \mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ é dito singular ou uma singularidade da função complexa $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se f não for holomorfa em z_0 .

O ponto $z_0 \in \mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ é dito um polo de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função complexa $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0.$$

O ponto $z_0 \in \mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ é dito um zero de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função complexa $g : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se existir $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = (z - z_0)^n f(z), \quad \text{com } f(z_0) \neq 0.$$

Uma função complexa $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde \mathbb{A} é um aberto de \mathbb{C} , é meromorfa em \mathbb{A} se ela for holomorfa em \mathbb{A} exceto em um número finito de polos da função complexa f .

Um conjunto aberto \mathbb{A} é conexo se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um caminho constituído de segmentos de reta inteiramente contido em \mathbb{A} .

Um conjunto aberto \mathbb{A} é simplesmente conexo se qualquer curva simples e fechada contida em \mathbb{A} pode ser reduzida continuamente a um ponto de \mathbb{A} .

Dizemos que um conjunto aberto \mathbb{A} é multiplamente conexo se não for simplesmente conexo.

A integral de uma função complexa $f : \mathbb{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, de um ponto $\alpha \in \mathbb{A}$ a um ponto $\beta \in \mathbb{A}$, em termos de integrais curvilíneas reais

é dada por

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (udx - vdy) + i \int_{\alpha}^{\beta} (udy + vdx).$$

Capítulo 3

Tópicos da Teoria Local de Superfícies

Neste capítulo serão desenvolvidos conceitos da Geometria Diferencial que abordam os aspectos da teoria local de superfícies, dando ênfase para a definição de superfície parametrizada regular e suas propriedades, para que se tenha os subsídios necessários para, mais adiante, abordar o estudo de Superfícies Mínimas.

3.1 Superfície Parametrizada Regular

Nosso objetivo inicial é definir uma superfície como um subconjunto de \mathbb{R}^3 que seja bidimensional, suave, e que admita, em cada um de seus pontos, um único plano tangente.

Faremos isso com o auxílio de um aplicação X que satisfaz certas condições, de tal forma que o seu conjunto imagem possa ser visto como uma superfície, que será dita Superfície Parametrizada Regular.

Definição 3.1.1 *Seja \mathbb{U} um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que satisfaz as condições:*

- i) X é de classe C^∞ ;*
- ii) em cada ponto $(u_0, v_0) = q \in \mathbb{U}$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

As variáveis independentes u , v são ditas parâmetros da superfície e o conjunto imagem da aplicação X , dado por

$$\mathbb{S} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = X(u_0, v_0) \text{ para algum } q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}\},$$

é denominado traço de X e pode ser visto como uma superfície tradicional do cálculo diferencial e integral.

Os vetores

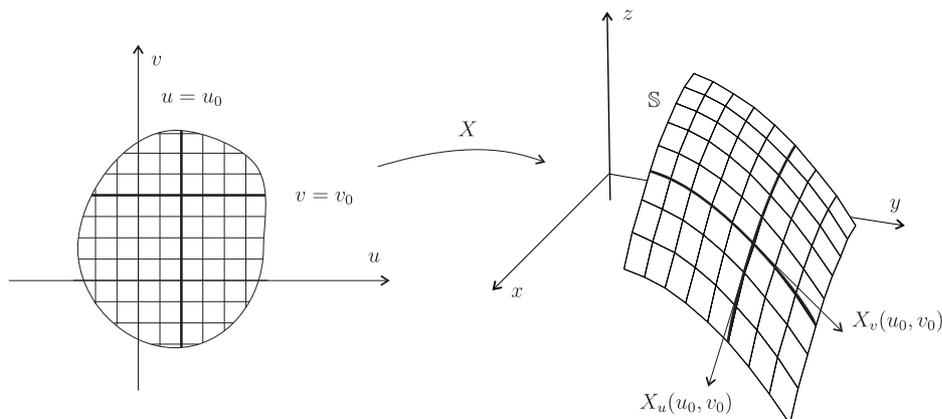
$$X_u(q) = X_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

e

$$X_v(q) = X_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right),$$

são ditos vetores tangentes às curvas coordenadas $X(u, v_0)$ e $X(u_0, v)$, respectivamente, exemplificados na figura 3.1.

Figura 3.1: Vetores Tangentes às Curvas Coordenadas



Fonte: Produção do próprio autor

A condição *i*) da definição 3.1.1 exprime que se $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é de classe C^∞ então as funções x , y e z tem derivadas parciais de todas as ordens contínuas. Enquanto que a condição *ii*) garante a existência de plano tangente para todo $q \in \mathbb{U}$, na superfície, conforme veremos adiante.

A segunda condição da definição de superfície parametrizada regular, pode ser substituída por afirmações equivalentes, enunciadas na proposição 3.1.2. Para podermos enunciá-las e prová-las note que, de acordo com o resultado do Capítulo 2, dX_q é uma aplicação linear, cuja matriz em relação as bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 depende apenas das derivadas parciais das funções coordenadas de X , avaliadas em $q = (u_0, v_0)$ e é dada por

$$[dX_q] = J(X_q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix},$$

e essa matriz é chamada matriz Jacobiana de X .

Proposição 3.1.2 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- 1 – dX_q é injetora.
- 2 – a matriz Jacobiana de X tem posto 2.
- 3 – os vetores $X_u(q)$ e $X_v(q)$ são LI's.
- 4 – o produto vetorial entre $X_u(q)$ e $X_v(q)$ é não nulo.

Demonstração:

$1 \Rightarrow 2$: Suponhamos que dX_q é injetora.

Da álgebra linear temos que $\dim(\text{Nuc}(dX_q)) = 0$ e então pelo teorema do Núcleo e da Imagem tem-se que

$$2 = \dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\text{Im}(dX_q)) + \dim(\text{Nuc}(dX_q)) = \dim(\text{Im}(dX_q)) = \text{posto}(dX_q),$$

logo a matriz Jacobiana dX_q tem posto 2.

$2 \Rightarrow 3$: Suponhamos que a matriz Jacobiana tenha posto 2. Tomando uma combinação linear nula entre $X_u(q)$ e $X_v(q)$ obtemos

$$aX_u(q) + bX_v(q) = 0$$

isto é,

$$a \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right) + b \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right) = 0,$$

que gera o sistema linear

$$\begin{cases} ax_u(q) + bx_v(q) = 0 \\ ay_u(q) + by_v(q) = 0 \\ az_u(q) + bz_v(q) = 0 \end{cases},$$

que em termos matriciais é dado por

$$\begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou simplesmente

$$[dX_q] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz $[dX_q]$ em posto 2, por hipótese, o sistema homogêneo acima admite uma única solução, dada por $a = 0$ e $b = 0$. Portanto $X_u(q)$ e $X_v(q)$ são linearmente independentes.

$3 \Rightarrow 4$: Suponhamos, por absurdo, que $X_u(q) \wedge X_v(q) = 0$. Assim, se θ é o ângulo formado entre $X_u(q)$ e $X_v(q)$, temos que

$$0 = \|0\| = \|X_u(q) \wedge X_v(q)\| = \|u\| \|v\| \sin\theta$$

Portanto $\sin\theta = 0$ ou $\|X_u\| = 0$ ou $\|X_v\| = 0$.

Se $\sin\theta = 0$ temos $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ e nesse caso X_u e X_v teriam mesma direção, com no máximo sentidos contrários, ou seja, X_u e X_v são linearmente dependentes.

Se $\|X_u\| = 0$ ou $\|X_v\| = 0$, teríamos $X_u = 0$ ou $X_v = 0$, e assim, X_u e X_v seriam linearmente dependentes nas duas suposições.

Obtemos então, em todos os casos, uma contradição. Logo $X_u(q) \wedge X_v(q) \neq 0$

$4 \Rightarrow 1$: Suponhamos que

$$\begin{aligned} X_u(q) \wedge X_v(q) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\ &= (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v), \end{aligned}$$

seja não nulo. Logo temos três opções:

$$y_u z_v - z_u y_v \neq 0 \text{ ou } z_u x_v - x_u z_v \neq 0 \text{ ou } x_u y_v - y_u x_v \neq 0.$$

Para provar que dX_q é injetora, devemos mostrar que $\dim(\text{Nuc}(dX_q)) = 0$, ou seja, nulidade(dX_q) = 0. Então, vamos obter o posto da matriz Jacobiana de X escalonando-a.

Como

$$[dX_q] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix},$$

obtemos

$$[dX_q] \sim \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ 0 & y_u x_v - x_u y_v \\ 0 & z_u x_v - z_v x_u \end{bmatrix}.$$

No caso em que $z_u x_v - x_u z_v \neq 0$ temos necessariamente $x_u \neq 0$ e $x_v \neq 0$, logo

$$[dX_q] \sim \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ 0 & y_u x_v - x_u y_v \\ 0 & z_u x_v - z_v x_u \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e assim dX_q tem posto dois.

No caso em que $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ temos obrigatoriamente $x_u \neq 0$ e $x_v \neq 0$, logo

$$[dX_q] \sim \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e dX_q também tem posto 2.

No caso em que $y_u z_v - z_u y_v \neq 0$, temos $y_u \neq 0$ e $y_v \neq 0$, escalonando novamente, obtemos

$$[dX_q] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} y_u & y_v \\ x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} y_u & y_v \\ 0 & y_v x_u - x_v y_u \\ 0 & z_u y_v - z_v y_u \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} y_u & y_v \\ 0 & y_v z_u - z_v y_u \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e mais uma vez dX_q tem posto dois.

Assim, em todos os casos dX_q tem posto dois, onde temos que

$$\text{nullidade}(dX_q) = 2 - \text{posto}(dX_q) = 2 - 2 = 0,$$

então $\dim(\text{Nuc}(dX_q)) = 0$, logo dX_q é injetora.

Portanto todas as afirmações são equivalentes. ■

Para melhor entendermos a definição de superfície parametrizada regular, vamos listar alguns exemplos.

Exemplo 3.1.3 Considere a aplicação $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (\rho \sin v \cos u, \rho \sin v \sin u, \rho \cos v), \quad \rho > 0, u \in \mathbb{R} \quad e \quad 0 < v < \pi.$$

Claramente X é de classe C^∞ , pois suas funções coordenadas são compostas apenas por senos e cossenos, que são infinitamente diferenciáveis. E os vetores

$$X_u = (-\rho \sin v \sin u, \rho \sin v \cos u, 0)$$

e

$$X_v = (\rho \cos v \cos u, \rho \cos v \sin u, -\rho \sin v),$$

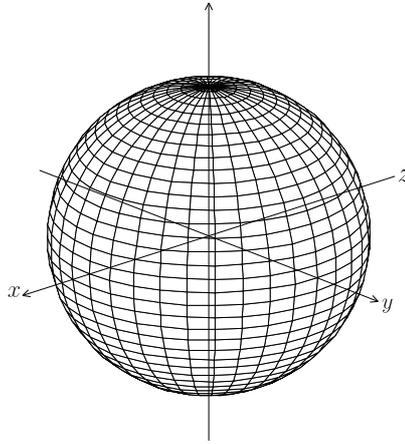
são LI, pois

$$\begin{aligned}\|X_u(q) \wedge X_v(q)\| &= \|(\rho^2 \sen^2 v \cos u, \rho^2 \sen^2 v \sen u, \rho^2 \sen v \cos v)\| \\ &= \sqrt{\rho^4 \sen^4 v \cos^2 u + \rho^4 \sen^4 v \sen^2 u + \rho^4 \cos^2 v \sen^2 u} \\ &= \sqrt{\rho^4 (\sen^4 v + \sen^2 v - \sen^4 v)} = \rho^2 \sen v.\end{aligned}$$

Como $\rho > 0$ e $0 < v < \pi$ então, $\rho \sen v \neq 0$. Portanto, X é uma superfície parametrizada regular e seu traço é obtido elevando-se as funções coordenadas ao quadrado e somando-as, obtendo assim $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$.

Note que X descreve parametricamente uma esfera centrada na origem, vista na figura 3.2, com raio ρ , com exceção de dois pontos, que são os polos norte e sul, devido ao limitante de v ter sido definido em um aberto.

Figura 3.2: Esfera



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.1.4 Considere a aplicação $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

É evidente que suas funções coordenadas são infinitamente diferenciáveis, satisfazendo assim a primeira condição da definição 3.1.1.

Para verificar a segunda condição, fazemos $\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|$, onde $X_u = (1, 0, 2u)$ e $X_v = (0, 1, 2v)$. Então

$$\|X_u(q) \wedge X_v(q)\| = \|(1, 0, 2u) \wedge (0, 1, 2v)\| = \|(-2u, 2v, 1)\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \neq 0$$

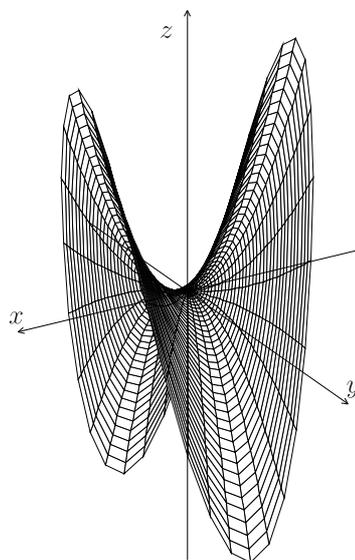
para todo $q = (u, v)$. Assim X satisfaz a segunda condição e então X é uma superfície parametrizada regular.

Seu traço é o conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 - y^2\}$, chamado de parabolóide hiperbólico, exibido na figura 3.3.

Exemplo 3.1.5 Seja a aplicação $X(u, v) = \left(u, 5 - \frac{4u}{3} - 2v, v\right)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

A primeira condição da definição de superfície parametrizada regular é satisfeita, pois suas funções coordenadas dadas por $x(u, v) = u$, $y(u, v) = 5 - \frac{4u}{3} - 2v$ e $z(u, v) = v$, pertencem a C^∞ .

Figura 3.3: Paraboloide Hiperbólico



Fonte: Produção do próprio autor

Já a segunda condição é satisfeita checando que a matriz da aplicação linear dX_q tem posto 2. De fato, temos que

$$J(X_q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que realmente tem posto 2, logo X é uma superfície parametrizada regular.

Seu traço representa um plano dado por $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4x + 3y + 6z = 15\}$.

Os exemplos 3.1.4 e 3.1.5 são casos especiais de uma família de superfícies parametrizadas, onde seus traços são gráficos de funções diferenciáveis, resultado que está explicitado na próxima proposição.

Proposição 3.1.6 *Se $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real infinitamente diferenciável, então a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função f .*

Demonstração: *Como u, v e $f(u, v)$ são funções infinitamente diferenciáveis e correspondem as funções coordenadas de X , temos portanto que X é de classe C^∞ .*

E a matriz da aplicação linear é

$$dX_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix},$$

que obviamente tem posto 2 para todo $q = (u, v) \in U$. ■

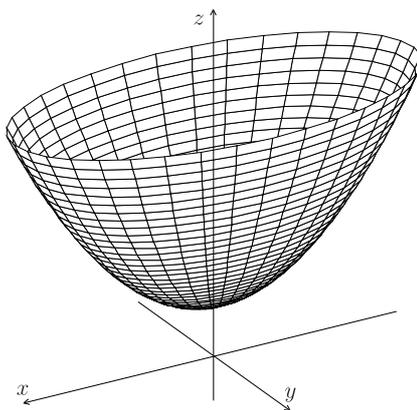
Exemplo 3.1.7 A aplicação dada por $X(u, v) = (u, v, a + b^2u^2 + c^2v^2)$ com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $a, b, c > 0$, representa uma superfície parametrizada regular pois $f(u, v) = a + b^2u^2 + c^2v^2$ é uma função diferenciável.

Note agora que o gráfico de f é o traço da aplicação X , que é

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = b^2x^2 + c^2y^2 + a\},$$

e que descrevem o parabolóide elíptico com vértice em $(0, 0, a)$, de acordo com a figura 3.4.

Figura 3.4: Parabolóide Elíptico



Fonte: Produção do próprio autor

Outro grupo importante de superfície parametrizada regular são as superfícies de revolução, obtidas fazendo a rotação de uma curva regular plana, dita geratriz, em torno de um eixo coordenado, de acordo com a proposição seguinte.

Proposição 3.1.8 Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, com $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular situada no plano xz , tal que $f(u)$ é sempre diferente de zero para qualquer $u \in I$. Então a aplicação $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, com $v \in \mathbb{R}$, é uma superfície parametrizada regular.

Demonstração: Temos que cada componente de $(f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ é infinitamente diferenciável, logo X também é de classe C^∞ .

E os vetores, $X_u(q) = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))$ e $X_v(q) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$ são LI. Com efeito,

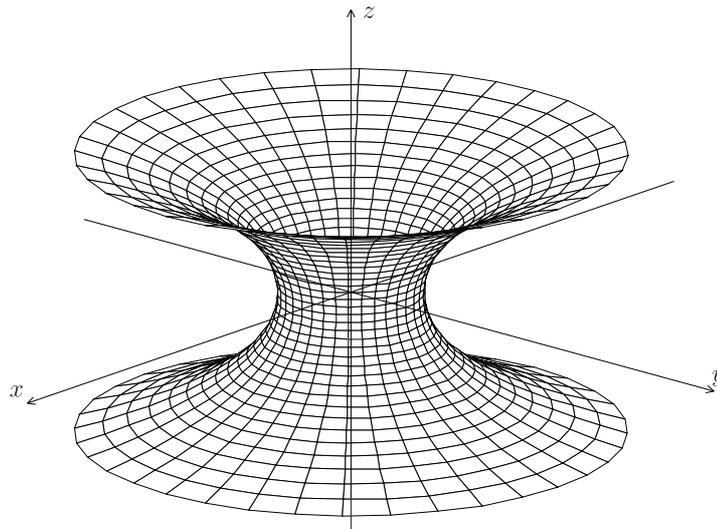
$$\begin{aligned} \|X_u(q) \wedge X_v(q)\|^2 &= \|(-g'(u)f(u) \cos v, -g'(u)f(u) \sin v, f'(u)f(u))\|^2 \\ &= ([g'(u)]^2[f(u)]^2 + [f'(u)]^2[f(u)]^2) = [f(u)]^2([g'(u)]^2 + [f'(u)]^2). \end{aligned}$$

Como $f(u)$ não se anula em nenhum ponto de I , e como $\alpha(u)$ é uma curva regular, temos que $[g'(u)]^2 + [f'(u)]^2 = \|\alpha'(u)\|^2 \neq 0$. Conclui-se assim que X é uma superfície parametrizada regular. ■

Observação 3.1.9 A hipótese de que $f(u) \neq 0$ significa que a curva a ser revolucio-nada não intercepta o eixo Oz , fazendo com que a superfície de revolução não tenha auto-interseções. Resultados análogos à Proposição 3.1.8 podem ser obtidos para curvas contidas nos planos xy e yz , desde que tais curvas não interceptem um dos eixos, que se tornará o eixo de revolução.

Observação 3.1.10 Observe que o traço de uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$ pode admitir auto-interseções. Ou seja, $X(u, v)$ pode não ser injetiva, pois poderão existir dois pontos distintos, $(u_0, v_0) \neq (u_1, v_1)$ pertencentes ao domínio \mathbb{U} , tal que a imagem desses pontos sejam iguais, $X(u_0, v_0) = X(u_1, v_1)$. Se $X(u, v)$ for uma superfície de revolução por exemplo, com $v \in \mathbb{R}$, teríamos que $X(u, 0) = X(u, 2\pi) = \dots = X(u, 2n\pi)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para evitar que isso ocorra, tomaremos somente $v \in (0, 2\pi)$ para efeito de cálculos.

Figura 3.5: Catenoide



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.1.11 Considere a curva denominada catenária dada por $\alpha(u) = (0, \rho \cosh u, \rho u)$, onde $u \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$. A aplicação $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ descreve uma superfície de revolução. Tomando agora $f(u) = \rho \cosh u$ e $g(u) = \rho u$, obtém-se a revolução da catenária em torno do eixo Oz , pois $f(u) = \rho \cosh u$ é sempre diferente de zero para qualquer $u \in \mathbb{R}$. A superfície resultante é chamada de Catenoide e está exibida na figura 3.5.

Logo $X(u, v) = (\rho \cosh u \cos v, \rho \cosh u \sin v, \rho u)$ é uma superfície parametrizada regular.

Exemplo 3.1.12 Seja $\alpha(u) = (\rho \sin u, 0, c + \rho \cos u)$, onde $u \in (0, 2\pi)$ e $0 < \rho < c$, a curva que descreve a circunferência contida no plano xz , com centro em $(0, 0, c)$ e raio ρ . Fazendo a rotação de α em torno do eixo Ox , pela proposição 3.1.8, obtemos a superfície de revolução,

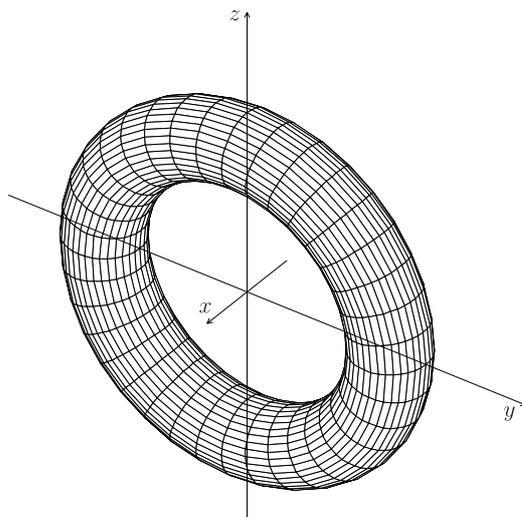
$$X(u, v) = (\rho \sin u, (c + \rho \cos u) \cos v, (c + \rho \cos u) \sin v)$$

denominada Toro, mostrada na figura 3.6.

Exemplo 3.1.13 A aplicação $\alpha(u) = (\rho \sec u, \rho \tan u, 0)$, $u \in (0, \pi)$ e $\rho > 0$, é uma curva regular, cuja imagem descreve a metade de cada um dos ramos de uma hipérbole situada no plano xy , dada por

$$\mathbb{k} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \rho^2 = x^2 - y^2\}.$$

Figura 3.6: Toro

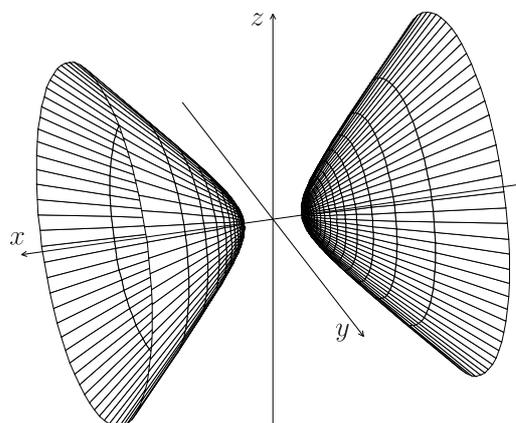


Fonte: Produção do próprio autor

Fazendo $X(u, v) = (\rho \sec u, \rho \operatorname{tg} u \cos v, \rho \operatorname{tg} u \operatorname{sen} v)$ com $v \in (0, 2\pi)$, definimos uma superfície parametrizada regular de revolução em torno do eixo Ox , pois $f(u) = \rho \operatorname{tg} u \neq 0$, para todo $u \in (0, \pi)$.

Tal superfície é denominada de hiperboloide de duas folhas, e seu traço, dado por $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a^2 = x^2 - y^2 - z^2\}$, está ilustrado na figura 3.7.

Figura 3.7: Hiperboloide de Duas Folhas



Fonte: Produção do próprio autor

Observação 3.1.14 Observe na figura 3.7 que a superfície de revolução obtida é composta de duas porções disjuntas (cada porção é dita folha do hiperboloide). Perceba que dois pontos situados em folhas distintas não podem ser unidos por qualquer curva inteiramente contida no hiperboloide. Por isso, dizemos que este é um exemplo de superfície não conexa (ou desconexa). Nos exemplos 3.1.3, 3.1.5, 3.1.4, 3.1.7, 3.1.11 e 3.1.12 temos superfícies conexas, pois sempre podemos unir dois pontos quaisquer por uma curva inteiramente contida na superfície.

Outra família de superfície parametrizada regular é formada pelas superfícies de nível de um função diferenciável. A seguinte proposição ilustra essa afirmação.

Proposição 3.1.15 *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Consideremos o conjunto de pontos $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = c\}$, onde $c \in \mathbb{R}$. Se $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}$ é tal que $[F_x(p_0)]^2 + [F_y(p_0)]^2 + [F_z(p_0)]^2 \neq 0$, então o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{S}$ suficientemente próximos de p_0 é o traço de uma superfície parametrizada regular.*

Demonstração: A hipótese $[F_x(p_0)]^2 + [F_y(p_0)]^2 + [F_z(p_0)]^2 \neq 0$ garante que as derivadas $F_x(p_0)$, $F_y(p_0)$ e $F_z(p_0)$ não se anulam simultaneamente. Suponhamos que $F_x(p_0) \neq 0$. Segue-se do Teorema da Função Implícita (teorema 2.2.5) que existe um aberto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ que contém (y_0, z_0) e uma aplicação diferenciável $G : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $G(y_0, z_0) = x_0$ e, para todo $(y, z) \in \mathbb{U}$, tem-se $F(G(y, z), y, z) = c$.

Da proposição 3.1.6, podemos concluir que a aplicação

$$X(y, z) = (G(y, z), y, z), (y, z) \in \mathbb{U}$$

é uma superfície parametrizada regular, cujo traço é o gráfico de G , que passa pelo ponto $(G(y_0, z_0), y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) = p_0$, ou seja é formado pelos pontos de \mathbb{S} suficientemente próximos de p_0 . Analogamente provam-se os casos em que $F_y(p_0) \neq 0$ ou $F_z(p_0) \neq 0$. ■

Exemplo 3.1.16 *Considere o conjunto dado por*

$$\mathbb{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Note que \mathbb{S} pode ser visto como a superfície de nível 1 da função

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

que é diferenciável. Tomando as derivadas parciais de F no ponto $p_0 = (0, 0, c)$, temos que

$$F_x(p_0) = \frac{2x}{a^2} \Big|_{p=p_0} = 0, \quad F_y(p_0) = \frac{2y}{b^2} \Big|_{p=p_0} = 0 \quad e \quad F_z(p_0) = \frac{2z}{c^2} \Big|_{p=p_0} = \frac{2}{c}.$$

Elevando-as ao quadrado e somando-as obtemos

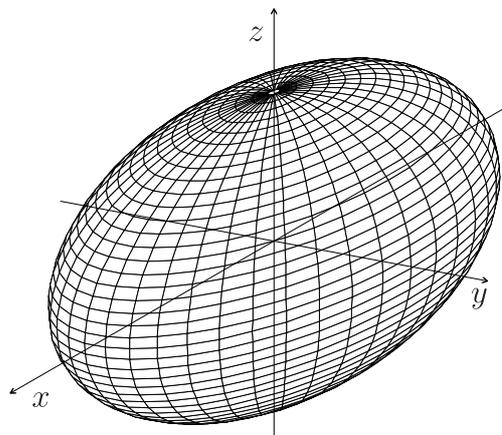
$$[F_x(p_0)]^2 + [F_y(p_0)]^2 + [F_z(p_0)]^2 = \frac{4}{c^2} \neq 0.$$

Portanto, pela proposição 3.1.15 obtemos que os pontos de \mathbb{S} suficientemente próximos de $p_0 = (0, 0, c)$ formam o traço de uma superfície parametrizada regular.

O conjunto \mathbb{S} do exemplo 3.1.16 está representado geometricamente na figura 3.8 e é denominado de elipsoide. Embora o resultado da proposição 3.1.15 seja válido apenas para pontos de \mathbb{S} suficientemente próximos de p_0 , pode-se verificar, com o auxílio de conceitos globais (conforme [1] e [3]) que \mathbb{S} , como um todo, é uma superfície, devido ao fato de que as derivadas parciais de $F(x, y, z)$ se anularem simultaneamente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a $F^{-1}(1)$.

Na observação 3.1.10 vimos que o traço de uma superfície parametrizada regular X pode, a princípio, admitir auto-interseções e fazendo um ajuste no domínio obtemos o

Figura 3.8: Elipsoide



Fonte: Produção do próprio autor

traço de uma superfície sem auto-interseções. No entanto, o que é feito, a rigor, é uma consequência da próxima proposição, que afirma sempre existir subconjunto $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ tal que X restrita a \mathbb{V} é injetora.

Proposição 3.1.17 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Para todo $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$ existe um aberto $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ tal que $q \in \mathbb{V}$ e X restrita a \mathbb{V} é injetora.*

Demonstração: *Como $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é uma superfície parametrizada regular, então a matriz Jacobiana de X em q tem posto 2. Suponhamos assim, sem perda de generalidade, que*

$$\det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \neq 0.$$

Consideremos a função $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que, para cada $(u, v) \in \mathbb{U}$, associa $F(u, v) = (y(u, v), z(u, v))$. Segue do Teorema da Função Inversa (teorema 2.2.4) que existe um aberto \mathbb{V} com $q \in \mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ tal que F restrita a \mathbb{V} é inversível, e em particular, injetora.

Logo, como $X(u, v) = (x(u, v), F(u, v))$, podemos concluir que X restrita a \mathbb{V} é também injetiva. ■

Exemplo 3.1.18 *Considere as superfícies de revolução descritas pela proposição 3.1.8 por*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

Se fosse tomado o aberto \mathbb{U} como sendo $\mathbb{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a aplicação X não seria injetora, fato já dito na observação 3.1.10. Mas X passa a ser injetora quando restrita a um domínio $\mathbb{V} = \mathbb{R} \times I$, onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} de comprimento menor que 2π .

Na definição de superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ exigimos que a matriz Jacobiana de X tenha sempre posto 2, para todos os pontos de \mathbb{U} . Se $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ for uma aplicação diferenciável tal que, para $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$ a matriz dX_q não tiver posto 2, então q é dito um ponto singular de X . Pontos singulares podem surgir pela escolha da parametrização ou pela natureza da própria superfície.

No primeiro caso está a esfera do exemplo 3.1.3, na qual foram excluídos os dois polos, pois para a parametrização

$$X(u, v) = (\rho \operatorname{sen} v \cos u, \rho \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \rho \cos v),$$

tomamos $u \in \mathbb{R}$ e $v \in (0, \pi)$ já que $q_1 = (u, 0)$ e $q_2 = (u, \pi)$ são pontos singulares de X . Porém, geometricamente não existe diferença entre o polo norte $(0, 0, \rho) = X(q_1)$, o polo sul $(0, 0, -\rho) = X(q_2)$ e qualquer outro ponto da esfera.

Já o traço da aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (u, v, \sqrt{\rho^2 - u^2 - v^2}),$$

com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < \rho^2\}$, contém o polo norte, mas deixa de fora todo o hemisfério sul da esfera.

Com isso, vemos que é necessário escolher convenientemente as aplicações X para descrever uma determinada superfície. Ainda mais, no caso de superfícies como a esfera ou elipsoide, devemos considera-las como a união de traços de superfícies parametrizadas regulares.

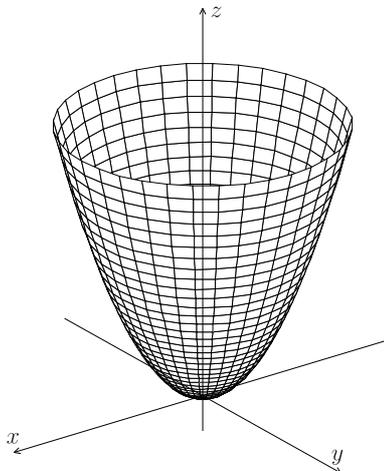
Esta abordagem para o estudo de superfícies é mais avançada e é vista, em geral, em cursos de pós-graduação, principalmente quando são estudadas propriedades geométricas globais das superfícies. Tal abordagem pode ser encontrada em [1] e [3].

Todavia, para o estudo das propriedades locais, para os quais basicamente nos propomos, é suficiente considerar as superfícies parametrizadas regulares, de acordo com [15].

3.2 Mudança de Parâmetros

Dada uma superfície parametrizada regular X pode-se obter várias outras representações paramétricas, de tal forma que seus traços coincidam.

Figura 3.9: Paraboloide Circular



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.2.1 O traço de $X(u, v) = (u + v, u - v, 2u^2 + 2v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, é obtido fazendo:

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = 2u^2 + 2v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u = x + y \\ 2v = x - y \end{cases}$$

e então

$$z = 2 \left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \right) + 2 \left(\frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} \right) = x^2 + y^2$$

Assim, $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\}$.

E o traço de $Y(w, t) = (w, t, w^2 + t^2)$ com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, claramente é também

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\},$$

pois basta tomarmos $x = w$, $y = t$ e $z = w^2 + t^2$. Portanto as aplicações X e Y possuem o mesmo traço, que é um parabolóide circular com vértice na origem, conforme figura 3.9.

Uma forma simples de obter várias superfícies parametrizadas que possuem o mesmo traço que uma determinada superfície é descrita pela próxima proposição.

Proposição 3.2.2 Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Se $h : \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ é uma aplicação diferenciável cujo determinante da matriz Jacobiana não se anula e com $h(\mathbb{V}) = \mathbb{U}$, então $Y = X \circ h$ é uma superfície parametrizada regular, que possui o mesmo traço de X .

Demonstração: A aplicação $Y = X \circ h$ é diferenciável pois é definida por uma composição de funções diferenciáveis.

Sejam $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ e $h(w, t) = (u(w, t), v(w, t))$. Vamos mostrar que $Y(w, t) = X \circ h(w, t) = (x(u(w, t), v(w, t)), y(u(w, t), v(w, t)), z(u(w, t), v(w, t)))$ deve satisfazer $Y_w(q) \wedge Y_t(q) \neq 0$. De fato, temos que

$$Y_w = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial w} \right)$$

e

$$Y_t = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right).$$

Logo, podemos reescrever ambas as igualdades como uma combinação linear de X_u e X_v , obtendo

$$Y_w = X_u \frac{\partial u}{\partial w} + X_v \frac{\partial v}{\partial w} \quad e \quad Y_t = X_u \frac{\partial u}{\partial t} + X_v \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
Y_w \wedge Y_t &= \left(X_u \frac{\partial u}{\partial w} \wedge X_u \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(X_u \frac{\partial u}{\partial w} \wedge X_v \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
&+ \left(X_v \frac{\partial v}{\partial w} \wedge X_u \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(X_v \frac{\partial v}{\partial w} \wedge X_v \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
&= (X_u \wedge X_u) \left(\frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (X_v \wedge X_v) \left(\frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
&+ (X_u \wedge X_v) \left(\frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\
&= (X_u \wedge X_v) \left(\frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \neq 0,
\end{aligned}$$

pois $X_u \wedge X_v \neq 0$ já que X é uma superfície parametrizada regular por hipótese e $\left(\frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ é o determinante da matriz Jacobiana de h que também não se anula por hipótese.

Assim $Y(w, t) = X \circ h(w, t)$ é superfície parametrizada regular. ■

A função Y definida na proposição anterior é chamada de reparametrização de X pela mudança de parâmetros h .

Exemplo 3.2.3 O parabolóide circular visto no exemplo 3.2.1, descrito por

$$Y(w, t) = (w, t, w^2 + t^2) \text{ com } (w, t) \in \mathbb{R}^2$$

é uma reparametrização de

$$X(u, v) = (u + v, u - v, 2u^2 + 2v^2), \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

pela mudança de parâmetros $h(w, t) = \left(\frac{w+t}{2}, \frac{w-t}{2} \right)$. De fato, temos que

$$\det(J(h)) = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

e

$$\begin{aligned}
X \circ h(w, t) &= \left(\frac{w+t+w-t}{2}, \frac{w+t-w+t}{2}, 2 \left(\frac{w+t}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{w-t}{2} \right)^2 \right) \\
&= \left(w, t, 2 \left(\frac{w^2 + 2wt + t^2}{4} \right) + 2 \left(\frac{w^2 - 2wt + t^2}{4} \right) \right) \\
&= \left(w, t, \frac{w^2 + t^2 + w^2 + t^2}{2} \right) = (w, t, w^2 + t^2) = Y(w, t).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.4 Considere a superfície parametrizada regular dada por

$$X(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} \right), \quad a > 0, \quad u \in (-a, a) \quad e \quad v \in \mathbb{R}.$$

Tomando a mudança de parâmetros $h(w, t) = (a \cos w, t)$, com $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$ e $w \in (0, \pi)$ e compondo-a com X , obtemos,

$$Y(w, t) = X \circ h(w, t) = (a \cos w, t, \sin w), a > 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad e \quad w \in (0, \pi),$$

que é uma reparametrização de $X(u, v)$ por $h(w, t)$. De fato, claramente h é diferenciável e o determinante da sua matriz Jacobiana, dada por,

$$J(h) = \begin{bmatrix} -a \operatorname{sen} w & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

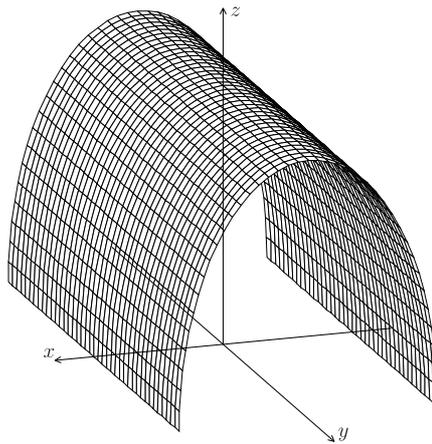
nunca se anula, pois $\det(J(h)) = -a \operatorname{sen} w \neq 0$ para $w \in (0, \pi)$.

Note que o traço de X descreve um semi cilindro elíptico dado por,

$$\mathbb{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\},$$

exibido na 3.10, que é o mesmo traço de Y , de acordo com a proposição 3.2.2.

Figura 3.10: Semi Cilindro Elíptico



Fonte: Produção do próprio autor

O próximo resultado diz que, uma vizinhança de um ponto de uma superfície parametrizada regular pode ser vista como o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 3.2.5 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Para cada $(u_0, v_0) = q \in \mathbb{U}$ existem um aberto \mathbb{W} com $q \in \mathbb{W} \subset \mathbb{U}$ e uma $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ tal que o traço de $Y = X \circ h$ é o gráfico de uma função diferenciável.*

Demonstração: *Considere $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ uma superfície parametrizada regular. Como a matriz Jacobiana de X tem posto dois, então podemos supor, sem perda de generalidade, que*

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right) \neq 0.$$

Definindo uma função $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, do teorema da função inversa existe um aberto \mathbb{W} com $q \in \mathbb{W} \subset U$, tal que F restrita a \mathbb{W} admite inversa diferenciável. Seja $\mathbb{V} = F(\mathbb{W})$, denotamos por $h : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ a função inversa de F , ou seja, $h = F^{-1}$. Assim, se $(w, t) \in \mathbb{V}$ então

$$\begin{aligned} Y(w, t) &= (x \circ h(w, t), y \circ h(w, t), z \circ h(w, t)) \\ &= (F \circ h(w, t), z \circ h(w, t)). \end{aligned}$$

Logo, $Y(w, t) = (w, t, z \circ h(w, t))$, ou seja, o traço de Y descreve o gráfico da função diferenciável $z \circ h(w, t)$.

De forma análoga, tomando os outros determinantes não nulos, pode-se mostrar que

$$Y(w, t) = (w, y \circ h(w, t), t)$$

e

$$Y(w, t) = (x \circ h(w, t), w, t),$$

descrevem os gráficos das funções diferenciáveis $y \circ h$ e $x \circ h$ respectivamente. \blacksquare

A proposição 3.2.5 também pode ser utilizada para provar que uma determinada representação, não é uma superfície parametrizada regular, conforme veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 3.2.6 Seja $X(u, v) = (u, -\sqrt{u^2 + v^2}, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, uma representação do cone. Note que $X(0, 0) = (0, 0, 0)$ descreve o vértice desse cone.

Caso X seja uma superfície parametrizada regular, pela proposição 3.2.5 existe um aberto \mathbb{W} , com $(0, 0) \in \mathbb{W}$ e uma mudança de parâmetros h , dada por

$$h(w, t) = (u(w, t), v(w, t))$$

tal que

$$Y(w, t) = X \circ h(w, t) = X(u(w, t), v(w, t)) = (u(w, t), -\sqrt{[u(w, t)]^2 + [v(w, t)]^2}, v(w, t))$$

é o gráfico de uma função diferenciável, que seria dada por

$$y \circ h(w, t) = -\sqrt{[u(w, t)]^2 + [v(w, t)]^2}$$

ou simplesmente

$$y(u, v) = -\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Porém esta função não é diferenciável em $(0, 0)$, pois calculando a derivada parcial de y em relação a u e aplicando em $(0, 0)$ obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u}(0, 0) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{y(u + \Delta u, v) - y(u, v)}{\Delta u} \Big|_{u=v=0} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{(0 + \Delta u)^2 + 0^2} - (-\sqrt{0^2 + 0^2})}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{-|\Delta u|}{\Delta u}. \end{aligned}$$

Para existir a derivada parcial em relação a u , os limites laterais devem ser iguais. Mas

como

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0^+} \frac{-\Delta u}{\Delta u} = -1$$

e

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0^-} \frac{\Delta u}{\Delta u} = 1,$$

os limites laterais são distintos, o que significa que $\frac{\partial y}{\partial u}(0,0)$ não existe. Analogamente, a derivada parcial de $y(u,v) = -\sqrt{u^2 + v^2}$ em relação a v em $(0,0)$ também não existe.

Portanto, y não pode ser diferenciável em $(0,0)$, contradizendo a proposição 3.2.5. Dessa forma X não é uma superfície parametrizada regular, devido à não diferenciabilidade no vértice do cone.

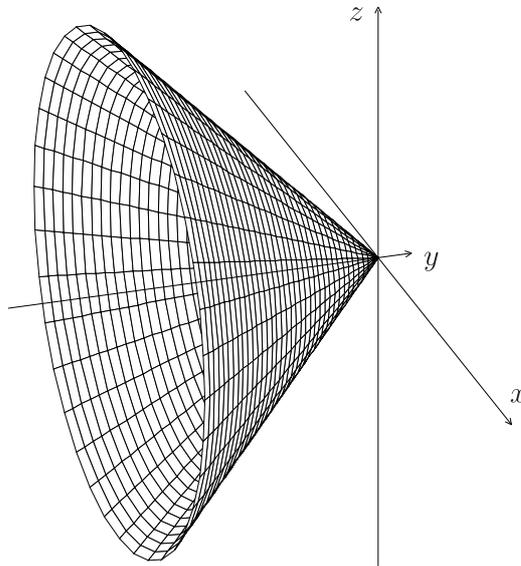
Porém como o traço de X é o conjunto

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = -\sqrt{x^2 + z^2}\},$$

se considerarmos o conjunto $\mathbb{S}' = \mathbb{S} - \{0\}$, ou seja, o cone sem o seu vértice, eliminaríamos o problema e teríamos uma superfície parametrizada regular dada por

$$X'(u, v) = (u, -\sqrt{u^2 + v^2}, v), \text{ com } u, v \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Figura 3.11: Cone



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.2.7 Considere a superfície dada por

$$X(u, v) = (v, \cos u, \sin u), \quad u \in (0, 2\pi) \quad e \quad v \in \mathbb{R},$$

que representa um cilindro circular, visto na figura 3.12.

De acordo com a proposição 3.2.5, fixemos um ponto qualquer do cilindro, podendo ser $(\frac{\pi}{2}, 3) \in \mathbb{R}^2$, assim, deve existir um aberto em torno desse ponto e uma mudança de parâmetros h tal que o traço de $Y = X \circ h$ é o gráfico de uma função diferenciável.

Fixado o ponto, consideremos então o aberto $\mathbb{W} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 < u < \pi, v \in \mathbb{R}\}$, então a restrição de X ao aberto \mathbb{W} admite uma reparametrização, dada por

$$Y(w, t) = X \circ h(w, t) = \left(t, \cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \right) \right), \sqrt{1 - \cos^2 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \right) \right)} \right),$$

obtida com a mudança de parâmetros $h(w, t) = \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \right), t \right)$.

Chamando $\sqrt{1 - \cos^2 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \right) \right)}$ de w' , então

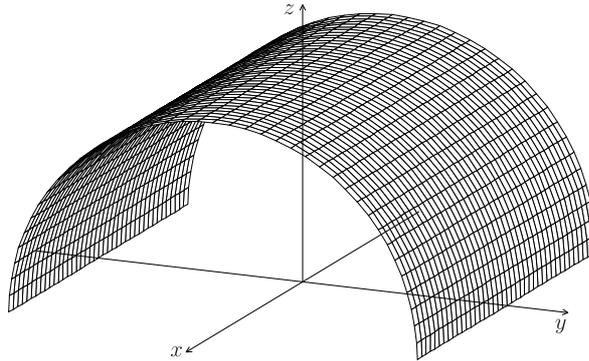
$$\cos \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-w^2}}{w} \right) \right) = \sqrt{1-w'^2}.$$

Obtendo assim

$$Y(w', t) = (t, w', \sqrt{1-w'^2}),$$

onde $z \circ h(w', t) = \sqrt{1-w'^2}$ é uma função diferenciável cujo gráfico coincide com X quando restrita a \mathbb{W} .

Figura 3.12: Semi Cilindro



Fonte: Produção do próprio autor

3.3 Plano Tangente e Aplicação Normal de Gauss

Nesta seção vamos obter, em cada $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$, um plano que é tangente à superfície parametrizada regular e cujo vetor normal será dito vetor normal à própria superfície.

Vamos considerar, em toda a seção, uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujos parâmetros serão vistos como funções diferenciáveis de uma variável real t .

Assim, $X(u, v) = X(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ representa uma curva diferenciável, tal que seu traço está contido na superfície X .

O plano tangente a X num ponto q será o plano composto por todos os vetores tangentes a estas curvas, conforme veremos abaixo.

Definição 3.3.1 *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$*

uma curva contida na superfície X . Dizemos que $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em q se $w = \alpha'(t_0) \in \mathbb{R}^3$, onde $\alpha(t_0) = X(u(t_0), v(t_0)) = X(q)$.

Note que, os vetores tangentes às curvas coordenadas dados por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$, são vetores tangentes a X em (u_0, v_0) .

Definição 3.3.2 O plano tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ é o conjunto formado por todos os vetores tangentes a X em q . Esse conjunto é denotado por $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, onde \mathbb{S} é o traço de X .

Observe que os conceitos de vetor e plano tangentes foram definidos em um ponto q do domínio de X , e não na sua imagem $X(q)$, com seria de se esperar. Isto foi feito desta forma para contemplar os casos em que a superfície parametrizada X admite auto-interseções.

A proposição seguinte mostra que o plano tangente de uma superfície é gerado pelos vetores tangentes às suas curvas coordenadas.

Proposição 3.3.3 Se X é uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$, então o conjunto $\{X_u(q), X_v(q)\}$ é uma base para $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$.

Demonstração: Suponha que $w \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$, então $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $q = (u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Logo podemos obter

$$w = \alpha'(t_0) = \left. \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \right|_{t=t_0} = X_u(u(t), v(t))u'(t) + X_v(u(t), v(t))v'(t) \Big|_{t=t_0},$$

e aplicando em $t = t_0$ temos

$$w = X_u(u_0, v_0)u'(t_0) + X_v(u_0, v_0)v'(t_0) = X_u(q)u'(t_0) + X_v(q)v'(t_0).$$

Portanto, w pode ser escrito como combinação linear de $\{X_u(q), X_v(q)\}$, que mostra que este conjunto gera $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$. E como por definição $X_u(q)$ e $X_v(q)$ são LI's, segue o resultado. ■

Observe, com o auxílio da figura 3.13, que $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é um plano de \mathbb{R}^3 gerado por $\{X_u(q), X_v(q)\}$ que não é, necessariamente, um conjunto ortonormal.

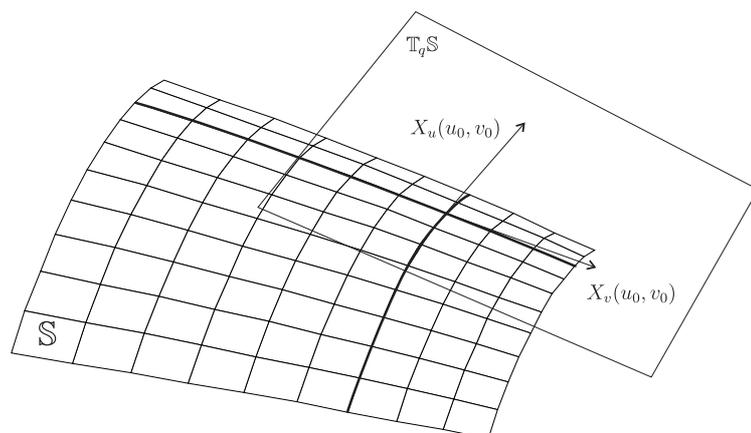
Definição 3.3.4 Dizemos que um vetor do \mathbb{R}^3 é normal à superfície parametrizada X em $q \in \mathbb{U}$ se o mesmo for ortogonal a $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, ou seja, se for ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Como $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é gerado por $X_u(q)$ e $X_v(q)$, todo vetor normal a X em q deve ser ortogonal a esses vetores, assim existe uma única direção normal a cada plano tangente e portanto, exatamente dois vetores unitários normais a X em q .

Observação 3.3.5 A definição dada para superfície parametrizada regular exige que a aplicação X seja de classe C^∞ , isto é, que possua derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Para questões em geometria diferencial, em geral, precisamos da existência e continuidade de derivadas parciais até uma certa ordem, dependendo da natureza do problema.

Sabemos que a existência e continuidade do plano tangente depende apenas da existência e continuidade das derivadas parciais de primeira ordem. Pode acontecer o caso em que o gráfico de uma função $z = f(u, v)$ admita um plano tangente em todos os pontos, mas que não seja suficientemente diferenciável para satisfazer a definição de superfície parametrizada regular. Este caso é evidenciado no próximo exemplo.

Figura 3.13: Plano $T_q\mathbb{S}$



Fonte: Produção do próprio autor

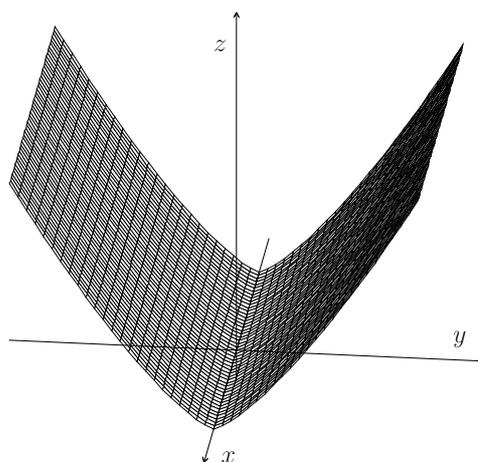
Exemplo 3.3.6 Considere a aplicação dada por $X(u, v) = (u, v, u^{\frac{4}{3}})$ com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Note que a derivada parcial da função componente z em relação a u é

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{4}{3}u^{\frac{1}{3}},$$

que é contínua para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, admitindo assim, plano tangente em todos os pontos de \mathbb{U} . Ainda, ambas as derivadas da função componente z em relação a u e a v se anulam na origem e assim o plano xy é o seu plano tangente.

Porém, procedendo como no exemplo 3.2.6 chegaremos que $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ não está definida na origem. Logo $X(u, v)$ definida assim, não é uma superfície parametrizada regular. O conjunto imagem desta aplicação pode ser visto na figura 3.14.

Figura 3.14: Superfície Parametrizada que Não é Regular



Fonte: Produção do próprio autor

Vamos agora fixar um vetor normal unitário a $X(q)$ como sendo o vetor

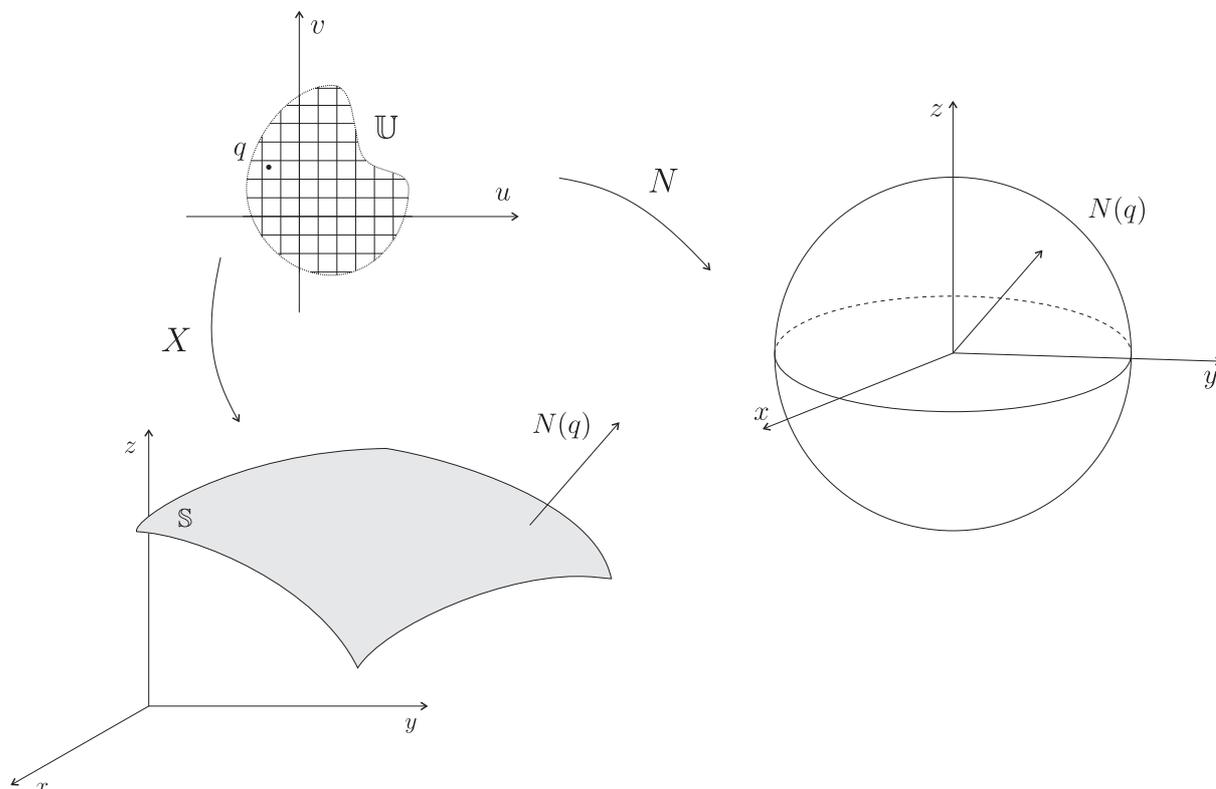
$$N(q) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|}.$$

Definição 3.3.7 Se \mathbb{U} é o domínio de uma superfície parametrizada regular, a aplicação diferenciável $N : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, que a cada ponto $q = (u, v) \in \mathbb{U}$ associa o vetor normal unitário a X em q , é chamada de Aplicação Normal de Gauss e é definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)\|}.$$

Note que a imagem da Aplicação Normal de Gauss está contida na esfera unitária com centro na origem, conforme pode ser observado na figura 3.15.

Figura 3.15: Imagem da Aplicação Normal de Gauss



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.3.8 Considere o cilindro circular descrito por $X(u, v) = (\rho \cos u, \rho \sin u, v)$, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Assim os seus vetores tangentes, que são

$$X_u = (-\rho \sin u, \rho \cos u, 0) \text{ e } X_v = (0, 0, 1).$$

Então a Aplicação Normal de Gauss de X é

$$N(u, v) = \frac{(-\rho \sin u, \rho \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1)}{\|(-\rho \sin u, \rho \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1)\|} = \frac{(\rho \cos u, \rho \sin u, 0)}{\rho} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Assim concluímos que a imagem da Aplicação Normal de Gauss de um cilindro de raio qualquer, é somente a circunferência de raio unitário situada no plano xy . Ou seja, a imagem da Aplicação Normal de Gauss é somente um paralelo da esfera unitária.

Exemplo 3.3.9 Considere o cone circular sem o vértice $(0, 0, 0)$, parametrizado por

$$X(u, v) = \left(u \operatorname{sen} \alpha \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), u \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), u \cos \alpha \right),$$

com $u > 0$, $v \in (0, 2\pi \operatorname{sen} \alpha)$ e onde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fixado é o ângulo formado entre o cone e o eixo Oz . Então,

$$X_u = \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \cos \alpha \right)$$

e

$$X_v = \left(-u \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), u \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), 0 \right).$$

Logo a Aplicação Normal de Gauss é

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{\left(\operatorname{sen} \alpha \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \cos \alpha \right) \wedge \left(-u \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), u \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), 0 \right)}{\left\| \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \cos \alpha \right) \wedge \left(-u \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), u \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), 0 \right) \right\|} \\ &= \frac{\left(-u \cos \alpha \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), -u \cos \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), u \operatorname{sen} \alpha \right)}{\sqrt{u^2 \cos^2 \alpha + u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} \\ &= \left(-\cos \alpha \cos \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), -\cos \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{v}{\operatorname{sen} \alpha} \right), \operatorname{sen} \alpha \right). \end{aligned}$$

Assim, a imagem da Aplicação Normal de Gauss de um cone circular, é somente o hemisfério norte da esfera unitária, pois $z = \operatorname{sen} \alpha > 0$ para $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

A proposição 3.3.10 mostrará a forma da Aplicação Normal de Gauss para as superfícies dadas pela proposição 3.1.6.

Proposição 3.3.10 Considere a superfície $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, onde $f : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função infinitamente diferenciável. Então a sua Aplicação Normal de Gauss é dada por

$$N(u, v) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Demonstração: Temos que $X_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v))$ e $X_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v))$. Ocultando as variáveis, obtemos

$$X_u \wedge X_v = (-f_u, -f_v, 1) \quad e \quad \|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

Logo,

$$N(u, v) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.3.11 Seja $X(u, v) = (4u^2 + 16v^2, u, v)$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Temos que os vetores tangentes às curvas coordenadas são $X_u(u, v) = (8u, 1, 0)$ e $X_v(u, v) = (32v, 0, 1)$, assim $\{(8u, 1, 0), (32v, 0, 1)\}$ é base para $\mathbb{T}_q S$.

E segundo a proposição 3.3.10 a Aplicação Normal de Gauss de X é

$$N(u, v) = \frac{(1, -8u, -32v)}{\sqrt{1 + 64u^2 + 1024v^2}}.$$

Em particular, tomando $q = (1, 2)$ temos a base $\{(8, 1, 0), (64, 0, 1)\}$ e a equação do plano $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é $x - 8y - 64z + 4 = 0$.

A próxima proposição mostrará como pode ser obtida a Aplicação Normal de Gauss no caso de uma superfície de nível, caracterizada na proposição 3.1.15.

Proposição 3.3.12 *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Considere o conjunto*

$$\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = c\}, \text{ onde } c \in \mathbb{R}.$$

Suponha que $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}$ seja tal que o conjunto de pontos de \mathbb{S} suficientemente próximos de p_0 seja o traço de uma superfície parametrizada regular. Se $\nabla F(p_0) \neq 0$ então $\nabla F(p_0)$ é o vetor normal a esta superfície e sua Aplicação Normal de Gauss é

$$N(p_0) = \frac{\nabla F(p_0)}{\|\nabla F(p_0)\|}.$$

Demonstração: *Suponhamos que $\nabla F(p_0) \neq 0$. Mostraremos que todo vetor tangente a superfície, ou seja, todo vetor contido em $\mathbb{T}_{p_0}\mathbb{S}$, é ortogonal à $\nabla F(p_0)$.*

Seja $w \in \mathbb{T}_{p_0}\mathbb{S}$, dado por $w = \alpha'(t_0)$ onde α é alguma curva regular contida na superfície \mathbb{S} e composta por pontos suficientemente próximos de p_0 .

Podemos supor que a curva regular seja da forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

com $p_0 = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Como a curva α está contida na superfície, temos que

$$F(x(t), y(t), z(t)) = c.$$

Então, derivando em ambos os lados dessa igualdade em relação a t , e aplicando em t_0 , obtemos

$$F_x(p_0)x'(t_0) + F_y(p_0)y'(t_0) + F_z(p_0)z'(t_0) = 0,$$

igualdade que pode ser reescrita como

$$\langle (F_x(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0)), (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle \nabla F(p_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0,$$

isto é

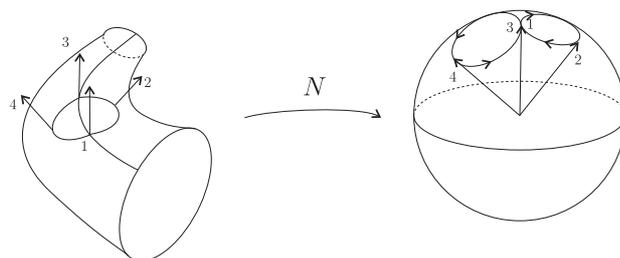
$$\langle \nabla F(p_0), w \rangle = 0.$$

Como $w \in \mathbb{T}_{p_0}\mathbb{S}$, e $\nabla F(p_0) \neq 0$, então $\nabla F(p_0)$ é o vetor normal a $\mathbb{T}_{p_0}\mathbb{S}$, donde segue o resultado. A segunda parte é consequência imediata do primeiro fato. ■

Observação 3.3.13 *Se a Aplicação Normal de Gauss deixar de ser bijetora em uma vizinhança de um ponto $X(q)$, então seu comportamento poderá ser complicado de se interpretar.*

Exemplo 3.3.14 *Na figura 3.16, pode-se notar que $N(u, v)$ aplica um domínio regular em um domínio limitado por uma fronteira em forma de 8, portanto $N(u, v)$ não é injetiva.*

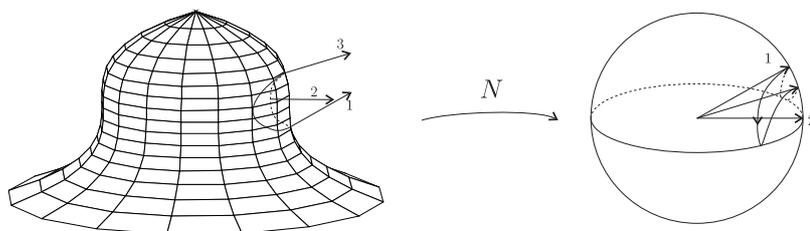
Figura 3.16: Aplicação Normal de Gauss Não Injetiva



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.3.15 Na superfície da figura 3.17, chamada de Chapéu de Sherlock, pode-se notar que $N(u, v)$ recobre parte já coberta do domínio. Ou seja, $N(u, v)$ não é sobrejetiva.

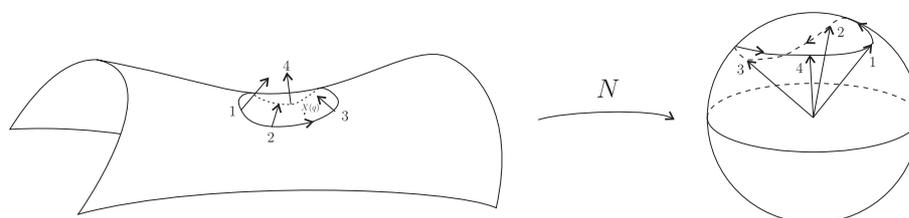
Figura 3.17: Aplicação Normal de Gauss Não Sobrejetiva



Fonte: Produção do próprio autor

Observação 3.3.16 Entretanto, quando $N(u, v)$ for bijetiva em uma vizinhança de $X(q)$, pode-se tomar um domínio limitado $U \subset \mathbb{R}^2$ de X em torno de $X(q)$, de maneira a medir a área de sua imagem $N(U)$, contida na esfera unitária centrada na origem, como na figura 3.18.

Figura 3.18: Aplicação Normal de Gauss Bijetiva



Fonte: Produção do próprio autor

Observação 3.3.17 Se $Y = X \circ h$ é uma reparametrização de X , pela mudança de parâmetros h , então o plano tangente a Y em p é igual ao plano tangente de X em $h(p) = q$. Todavia, se N_Y e N_X denotarem os vetores normais a $Y(p)$ e $X(q)$, respectivamente, então $N_Y(p) = \pm N_X(h(p)) = \pm N_X(q)$, e o sinal será determinado pelo determinante

Jacobiano da mudança de parâmetros h . Com efeito, na demonstração da proposição 3.2.2, vimos que

$$Y_w \wedge Y_t = \det(J(h))(X_u \wedge X_v),$$

e então temos que

$$N_Y(p) = \frac{Y_w(p) \wedge Y_t(p)}{\|Y_w(p) \wedge Y_t(p)\|} = \frac{\det(J(h))X_u(q) \wedge X_v(q)}{|\det(J(h))|\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|} = \frac{\det(J(h))N_X(q)}{|\det(J(h))|},$$

logo

$$\det(J(h)) < 0 \iff N_Y(p) = -N_X(q) \quad e \quad \det(J(h)) > 0 \iff N_Y(p) = +N_X(q).$$

Exemplo 3.3.18 Considere um cilindro circular dado por $X(u, v) = (\cos u, \text{senu}, v)$, $u, v \in (0, 2\pi)$, exibida na figura 3.19. Então

$$X_u = (-\text{senu}, \cos u, 0) \quad e \quad X_v = (0, 0, 1),$$

e assim

$$N_X(u, v) = (\cos u, \text{senu}, 0).$$

Tomando agora a mudança de parâmetros $h(w, t) = (t, w)$, temos

$$Y(w, t) = X \circ h(w, t) = (\cos t, \text{senu}, w), \quad \text{com } w, t \in (0, 2\pi).$$

Então

$$Y_w = (0, 0, 1) \quad e \quad Y_t = (-\text{senu}, \cos t, 0),$$

e assim

$$N_Y(w, t) = (-\cos t, -\text{senu}, 0).$$

Como $N_X(h(w, t)) = N_X(t, w) = (\cos t, \text{senu}, 0)$, vemos que

$$N_Y(w, t) = (-\cos t, -\text{senu}, 0) = -N_X(t, w).$$

Note que $\det(J(h)) = -1$, estando de acordo com a observação 3.3.17.

Como vimos, a Aplicação Normal de Gauss definida em 3.3.7, é uma aplicação diferenciável, cuja diferencial será uma aplicação linear, de acordo com o Capítulo 2. Assim, podemos definir a diferencial da Aplicação Normal de Gauss, como se segue.

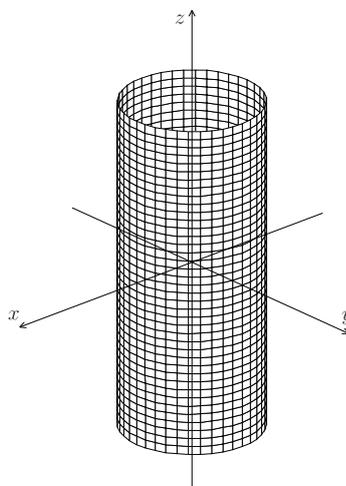
Definição 3.3.19 A diferencial da Aplicação Normal de Gauss em um ponto $q \in \mathbb{U}$, é uma aplicação linear denotada por

$$dN_q : T_q\mathbb{S} \longrightarrow T_q\mathbb{S}.$$

A diferencial da Aplicação Normal de Gauss opera da seguinte forma: para cada curva contida em \mathbb{S} , dada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $\alpha(t_0) = q$, consideramos a restrição da Aplicação Normal de Gauss à esta curva, dada por

$$N(t) = N \circ \alpha(t) = N(u(t), v(t)) = \frac{X_u(u(t), v(t)) \wedge X_v(u(t), v(t))}{\|X_u(u(t), v(t)) \wedge X_v(u(t), v(t))\|},$$

Figura 3.19: Cilindro



Fonte: Produção do próprio autor

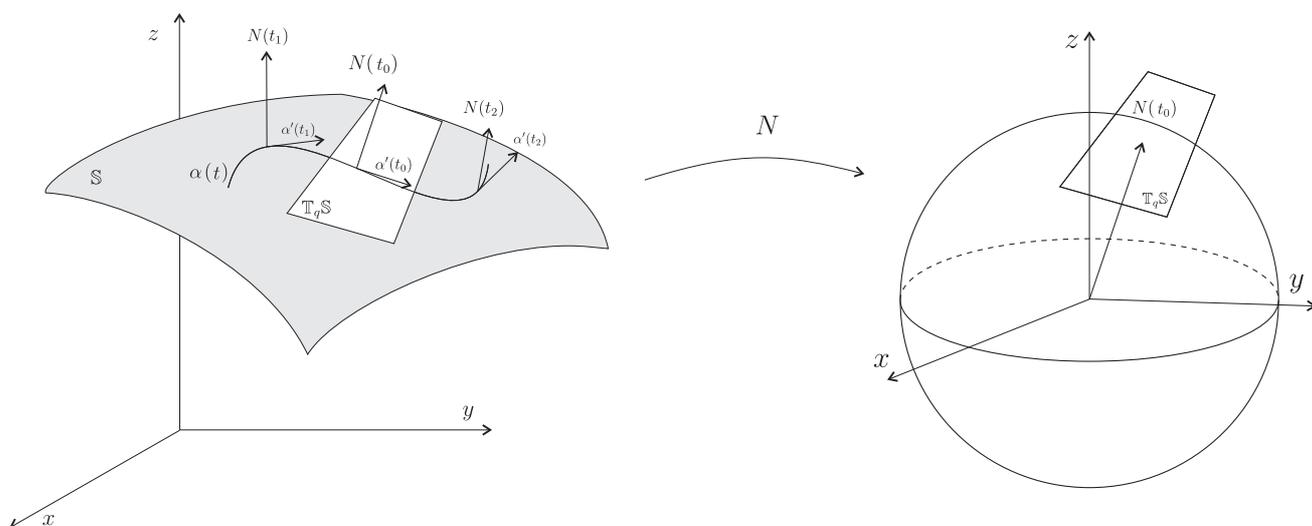
e então definimos

$$dN_q(\alpha'(t_0)) = N'(t_0).$$

Geometricamente, como a imagem da Aplicação Normal de Gauss N está contida na esfera unitária e $N \circ \alpha$ é uma curva nesta esfera temos que $N'(t_0) = dN(\alpha'(t_0))$ é um vetor pertencente ao plano tangente à esfera unitária, que pode ser visto como o próprio $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, conforme ilustra a figura 3.20.

Assim, dN_q mede o quanto a Aplicação Normal de Gauss se afasta de $N(q)$ em uma vizinhança de q ao longo da curva $\alpha(t)$. No caso das curvas, esta medida é dada por um número, dito curvatura, e no caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Figura 3.20: Diferencial da Aplicação Normal de Gauss



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.3.20 Considere o parabolóide hiperbólico, dado no exemplo 3.1.4, por $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Pela proposição 3.3.10, temos que a Aplicação Normal de Gauss é

$$N(u, v) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Considere o ponto $q = (u(t_0), v(t_0)) = (0, 0)$ tal que $X(q) = (0, 0, 0)$, e assim

$$X_u(q) = (1, 0, 2u)|_q = (1, 0, 0)$$

e

$$X_v(q) = (0, 1, -2v)|_q = (0, 1, 0).$$

Seja agora $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva contida no parabolóide hiperbólico, então

$$\alpha'(t_0) = X_u(q)u'(t_0) + X_v(q)v'(t_0) = (1, 0, 0)u'(t_0) + (0, 1, 0)v'(t_0),$$

é o vetor tangente à α , que possui coordenadas $(u'(t_0), v'(t_0), 0)$ em relação à base $\{X_u(q), X_v(q)\}$.

Restringindo a aplicação N à curva $\alpha(t)$, temos

$$N(t) = N \circ \alpha(t) = \frac{(-2u(t), 2v(t), 1)}{\sqrt{1 + 4[u(t)]^2 + 4[v(t)]^2}}$$

e derivando obtemos

$$\begin{aligned} N'(t_0) &= \frac{(-2u'(t), 2v'(t), 0)}{\sqrt{1 + 4[u(t)]^2 + 4[v(t)]^2}} - \frac{(-u(t), v(t), \frac{1}{2})(8u(t)u'(t) + 8v(t)v'(t))}{(1 + 4[u(t)]^2 + 4[v(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} \Bigg|_{t=t_0} \\ &= (-2u'(t_0), 2v'(t_0), 0), \end{aligned}$$

e assim

$$dN_q(\alpha'(t_0)) = N'(t_0) = (-2u'(t_0), 2v'(t_0), 0).$$

Note que $dN_q(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$ e $dN_q(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$, logo $X_u(q) = (1, 0, 0)$ e $X_v(q) = (0, 1, 0)$ são os autovetores de dN_q associados aos autovalores -2 e 2 respectivamente.

Exemplo 3.3.21 Considere a esfera do exemplo 3.1.3 dada por

$$X(u, v) = (\rho \operatorname{sen} v \cos u, \rho \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \rho \cos v),$$

onde

$$X_u(u, v) = (-\rho \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \rho \operatorname{sen} v \cos u, 0)$$

e

$$X_v(u, v) = (\rho \cos v \cos u, \rho \cos v \operatorname{sen} u, -\rho \operatorname{sen} v).$$

Ainda, temos que

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = (-\operatorname{sen} v \cos u, -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -\cos v).$$

Considere o ponto $q = (u(t_0), v(t_0)) = (\pi, \frac{\pi}{2})$ tal que $X(q) = (-\rho, 0, 0)$ e onde

$$X_u(q) = (0, -\rho, 0) \text{ e } X_v(q) = (0, 0, -\rho).$$

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva contida na esfera, então

$$\alpha'(t_0) = X_u(q)u'(t_0) + X_v(q)v'(t_0) = (0, -\rho u'(t_0), -\rho v'(t_0)),$$

é o vetor tangente à α .

Restringindo N à curva α obtemos $N(t) = -(\text{sen}v(t) \cos u(t), \text{sen}v(t)\text{sen}u(t), \cos v(t))$ e derivando, encontramos

$$\begin{aligned} N'(t_0) &= -(v'(t) \cos v(t) \cos u(t) - u'(t)\text{sen}v(t)\text{sen}u(t), v'(t) \cos v(t)\text{sen}u(t) \\ &\quad + u'(t)\text{sen}v(t) \cos u(t), -v'(t)\text{sen}v(t))|_{t=t_0} \\ &= (0, u'(t_0), v'(t_0)). \end{aligned}$$

Assim

$$dN_q(\alpha'(t_0)) = dN_q(0, \rho u'(t_0), \rho v'(t_0)) = (0, u'(t_0), v'(t_0)).$$

Note que $X_u(q) = (0, -\rho, 0)$ e $X_v(q) = (0, 0, -\rho)$ são autovetores de dN_q associados ao autovalor $-\frac{1}{\rho}$, pois

$$dN_q(X_u) = dN_q(0, -\rho, 0) = dN_q(0, -\rho 1, -\rho 0) = (0, 1, 0) = -\frac{1}{\rho}(0, -\rho, 0) = -\frac{1}{\rho}X_u(q)$$

e

$$dN_q(X_v) = dN_q(0, 0, -\rho) = dN_q(0, -\rho 0, -\rho 1) = (0, 0, 1) = -\frac{1}{\rho}(0, 0, -\rho) = -\frac{1}{\rho}X_v(q).$$

Observação 3.3.22 Note que nos exemplos 3.3.20 e 3.3.21, $X_u(q)$ e $X_v(q)$ são autovetores de dN_q e sabemos que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ forma uma base para $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$. Assim $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ possui uma base de autovetores de dN_q e podemos concluir de dN_q é uma aplicação linear diagonalizável para estes dois exemplos.

Para podermos garantir que toda dN_q é diagonalizável, precisamos de um fato importante sobre a diferencial da Aplicação Normal de Gauss, que está contido na proposição seguinte.

Proposição 3.3.23 A diferencial $dN_q : \mathbb{T}_q\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração: Como todo vetor de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de uma base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, basta provarmos que

$$\langle dN_q(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, dN_q(v_2) \rangle.$$

Dado $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, sabemos que $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva regular contida na superfície, com $\alpha(t_0) = q$, então

$$dN_q(\alpha'(t_0)) = dN_q(u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v),$$

e por outro lado

$$N'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} (N(u(t), v(t))) \right|_{t=t_0} = u'(t_0)N_u + v'(t_0)N_v.$$

Logo $dN_q(u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v) = u'(t_0)N_u + v'(t_0)N_v$, e em particular, como dN_q é linear, obtemos

$$u'(t_0)dN_q(X_u) + v'(t_0)dN_q(X_v) = u'(t_0)N_u + v'(t_0)N_v,$$

e assim vemos que

$$dN_q(X_u) = N_u \text{ e } dN_q(X_v) = N_v.$$

Agora, sabemos que $N(u, v)$ é ortogonal a $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$, logo

$$\langle N, X_u \rangle = 0 \text{ e } \langle N, X_v \rangle = 0.$$

Derivando a primeira igualdade em relação a v e a segunda em relação a u , obtemos

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

e

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 \quad .$$

Como $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, então X satisfaz o Teorema de Schwarz, logo $X_{uv} = X_{vu}$, e assim obtemos

$$\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle = \langle N_u, X_v \rangle,$$

ou seja,

$$\langle dN_q(X_v), X_u \rangle = \langle X_v, dN_q(X_u) \rangle,$$

e dN_q é auto-adjunta. ■

Como desejado, mostraremos agora que a diferencial da Aplicação Normal de Gauss de uma superfície parametrizada regular é diagonalizável.

Proposição 3.3.24 Para todo q , a diferencial $dN_q : \mathbb{T}_q\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é uma aplicação linear diagonalizável.

Demonstração: Como $dN_q : \mathbb{T}_q\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é um operador auto-adjunto, $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é um espaço vetorial finito ($\dim(\mathbb{T}_q\mathbb{S}) = 2$) munido de produto interno usual. O Teorema Espectral (teorema 2.1.2) garante que existe uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ formada por autovetores de dN_q .

Portanto, dN_q é diagonalizável. Assim, em relação à base β , a matriz de dN_q é diagonal e podemos escrever

$$[dN_q]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix},$$

onde $-k_1$ e $-k_2$ (com digamos $-k_1 \geq -k_2$) são os autovalores de dN_q associados aos autovetores ortonormais v_1 e v_2 , respectivamente. ■

Exemplo 3.3.25 Para o exemplo 3.3.20 vemos que $\beta = \{X_u(q), X_v(q)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ é uma base ortonormal de autovetores de dN_q associados aos autovalores $-k_1 = 2$ e $-k_2 = -2$. Logo

$$[dN_q]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.3.26 Para o exemplo 3.3.21 vemos que $\beta = \{\frac{1}{\rho}X_u(q), \frac{1}{\rho}X_v(q)\} = \{(0, -1, 0), (0, 0, -1)\}$ é uma base ortonormal composta por autovetores de dN_q associados aos autovalores $-k_1 =$

$-k_2 = -\frac{1}{\rho}$. Logo

$$[dN_q]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho} \end{bmatrix}.$$

3.4 Primeira Forma Fundamental

No estudo da teoria local de superfícies é importante que se saiba mensurar propriedades geométricas, como comprimento de arco de curvas, ângulo entre dois vetores tangentes e áreas de regiões da superfície. Para fazermos isso, necessitamos definir aplicações que serão ditas Formas Fundamentais da Superfície.

Definição 3.4.1 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Para cada $q \in \mathbb{U}$, a aplicação $I_q : \mathbb{T}_q\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$I_q(w) = \|w\|^2,$$

é dita a Primeira Forma Fundamental de X em q .

Como o produto interno utilizado para definir a Primeira Forma Fundamental é um funcional bilinear e simétrico, ela também é chamada, por alguns autores, de primeira forma quadrática.

Vamos agora, obter uma expressão para $I_q(w)$ em relação à base $\{X_u(q), X_v(q)\}$. Sabe-se da proposição 3.3.3 que dado um vetor $w \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$, ele pode ser escrito como

$$w = aX_u(q) + bX_v(q), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a Primeira Forma Fundamental temos que

$$\begin{aligned} I_q(w) &= \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \langle aX_u(q) + bX_v(q), aX_u(q) + bX_v(q) \rangle \\ &= a^2 \langle X_u(q), X_u(q) \rangle + 2ab \langle X_u(q), X_v(q) \rangle + b^2 \langle X_v(q), X_v(q) \rangle, \end{aligned}$$

e denotando

$$\begin{aligned} \langle X_u(q), X_u(q) \rangle &= E(u_0, v_0) = E(q); \\ \langle X_u(q), X_v(q) \rangle &= F(u_0, v_0) = F(q); \\ \langle X_v(q), X_v(q) \rangle &= G(u_0, v_0) = G(q). \end{aligned}$$

Obtemos,

$$I_q(w) = a^2 E(q) + 2ab F(q) + b^2 G(q).$$

Fazendo $q = (u_0, v_0)$ variar ao longo de todo \mathbb{R}^2 , obtemos as formas bilineares diferenciáveis $E(u, v)$, $F(u, v)$, e $G(u, v)$, que são chamadas de coeficientes da Primeira Forma Fundamental.

Exemplo 3.4.2 *Seja $X(u, v) = (a_1 + \alpha_1 u + \beta_1 v, b_1 + \alpha_2 u + \beta_2 v, c_1 + \alpha_3 u + \beta_3 v)$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, uma parametrização para um plano qualquer, que passa pelo ponto $p = (a_1, b_1, c_1)$ e que contém os vetores ortonormais $w_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $w_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Assim podemos reescrever X como $X(u, v) = p + w_1 u + w_2 v$.*

Note que seus vetores tangentes são da forma $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$. E como w_1 e w_2 são unitários e ortogonais entre si, temos que os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são

$$E(u, v) = \langle w_1, w_1 \rangle = 1, \quad F(u, v) = \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \quad e \quad G(u, v) = \langle w_2, w_2 \rangle = 1.$$

Assim $I_q(w) = a^2 + b^2$, é a Primeira Forma Fundamental para qualquer $w = aw_1 + bw_2$ contido neste plano.

Exemplo 3.4.3 Considere a aplicação $X(u, v) = (\rho \operatorname{senhu} \cos v, \rho \operatorname{senhusenv}, \rho v)$, com $\rho > 0$, $v \in (0, 2\pi)$ e $u \in \mathbb{R}$, cujo traço descreve um Helicoide, visto na figura 3.21. Tal superfície é obtida traçando-se segmentos de retas paralelos ao plano xy que interceptam o eixo Oz , com comprimento 2ρ .

O Helicoide é uma superfície parametrizada regular, pois suas funções coordenadas são infinitamente diferenciáveis e seus vetores tangentes às curvas coordenadas, dados por

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (\rho \cosh u \cos v, \rho \cosh usenv, 0); \\ X_v(u, v) &= (-\rho \operatorname{senhusenv}, \rho \operatorname{senhu} \cos v, \rho), \end{aligned}$$

são LI's. De fato,

$$\|X_u \wedge X_v\| = \|(\rho^2 \cosh usenv, -\rho^2 \cosh u \cos v, \rho^2 \cosh usenu)\| = \rho^2 \cosh^2 u,$$

que será sempre diferente de zero pois, $\rho > 0$ e $\cosh u \neq 0$.

Calculando os coeficientes da Primeira Forma Fundamental, temos que

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = \rho^2 \cosh^2 u; \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = \rho^2 (\operatorname{senhu} \cosh usenv \cos v - \cosh usenu \cos vsenv) = 0; \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \rho^2 \operatorname{senh}^2 u + \rho^2 = \rho^2 \cosh^2 u. \end{aligned}$$

Assim, para qualquer $w \in \mathbb{T}_q \mathbb{S}$, dado por $w = aX_u(q) + bX_v(q)$, temos que

$$I_q(w) = \rho^2 \cosh^2 u (a^2 + b^2).$$

A proposição a seguir indica quais são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de uma superfície de revolução.

Proposição 3.4.4 Seja $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$, uma superfície parametrizada regular de revolução, sob as mesmas hipóteses da proposição 3.1.8. Então os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de X são dadas por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= [f'(u)]^2 + [g'(u)]^2; \\ F(u, v) &= 0; \\ G(u, v) &= [f(u)]^2. \end{aligned}$$

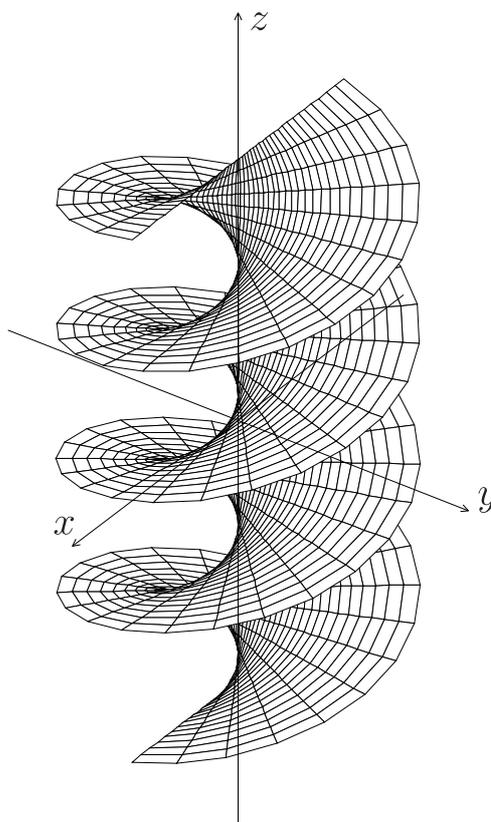
Demonstração: Os vetores tangentes são $X_u(u, v) = (f'(u) \cos v, f'(u) \operatorname{sen} v, g'(u))$ e $X_v(u, v) = (-f(u) \operatorname{sen} v, f(u) \cos v, 0)$. Assim, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = [f'(u)]^2 + [g'(u)]^2; \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = (-f'(u) f(u) \operatorname{sen} v \cos v + f(u) f'(u) \cos v \operatorname{sen} v) = 0; \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = [f(u)]^2. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.4.5 Para o Catenoide abordado no exemplo 3.1.11, temos que os coeficientes

Figura 3.21: Helicoide



Fonte: Produção do próprio autor

da Primeira Forma Fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= [(\rho \cosh u)']^2 + [(\rho u)']^2 = \rho^2 \sinh^2 u + \rho^2 = \rho^2 \cosh^2 u; \\ F(u, v) &= 0; \\ G(u, v) &= [\rho \cosh u]^2 = \rho^2 \cosh^2 u. \end{aligned}$$

E assim

$$I_q(w) = \rho^2 \cosh^2 u (a^2 + b^2)$$

para todo $w = aX_u(q) + bX_v(q) \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$.

Exemplo 3.4.6 Considere novamente a superfície de revolução descrita no exemplo 3.7, denominada *Hiperboloide de duas Folhas*. Os seus coeficientes da Primeira Forma Fundamental são dados por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= [(\rho \operatorname{tg} u)']^2 + [(\rho \sec u)']^2 = \rho^2 \sec^4 u + \rho^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^2 u; \\ F(u, v) &= 0; \\ G(u, v) &= [\rho \operatorname{tg} u]^2 = \rho^2 \operatorname{tg}^2 u. \end{aligned}$$

Logo, a Primeira Forma Fundamental é

$$I_q(w) = a^2(\rho^2 \sec^4 u + \rho^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^2 u) + b^2 \rho^2 \operatorname{tg}^2 u,$$

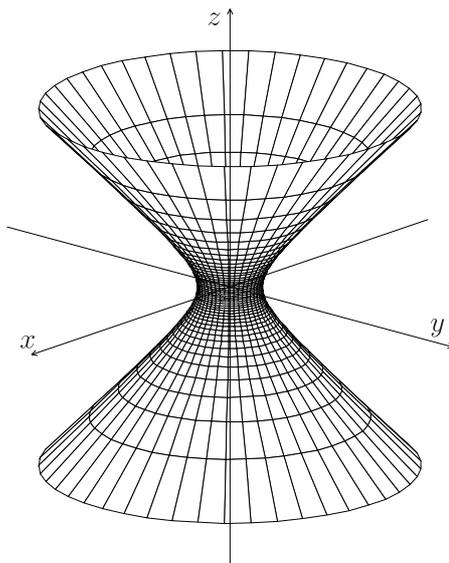
para todo $w = aX_u(q) + bX_v(q) \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$.

Exemplo 3.4.7 Revolucionando em torno do eixo Oz a curva $\alpha(u) = (\rho \sec u, 0, \rho \operatorname{tg} u)$, com $\rho > 0$, $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, que descreve um dos ramos de uma hipérbole situada no plano xz , obtemos a superfície parametrizada regular

$$X(u, v) = (\rho \sec u \cos v, \rho \sec u \operatorname{sen} v, \rho \operatorname{tg} u), \quad v \in (0, 2\pi),$$

cujos traços são denominados *Hiperboloide de uma Folha*, mostrado na figura 3.22. Analogamente

Figura 3.22: Hiperboloide de Uma Folha



Fonte: Produção do próprio autor

ao exemplo anterior, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= [(\rho \sec u)']^2 + [(\rho \operatorname{tg} u)']^2 = \rho^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^2 u + \rho^2 \sec^4 u; \\ F(u, v) &= 0; \\ G(u, v) &= [\rho \sec u]^2 = \rho^2 \sec^2 u. \end{aligned}$$

E assim, a Primeira Forma Fundamental do Hiperboloide de uma Folha é dada por

$$I_q(w) = a^2(\rho^2 \sec^4 u + \rho^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^2 u) + b^2 \rho^2 \sec^2 u,$$

com $w = aX_u(q) + bX_v(q) \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$.

Observação 3.4.8 Observe que os exemplos 3.4.6 e 3.4.7 possuem a mesma curva geratriz, e o coeficiente $E(u, v) = a^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^2 u + a^2 \sec^4 u$ é igual em ambos, porém seus eixos de revolução são diferentes, acarretando que o coeficiente $G(u, v) = a^2 \operatorname{tg}^2 u$ do hiperboloide de duas folhas se torna diferente do coeficiente $G(u, v) = a^2 \sec^2 u$ do hiperboloide de uma folha.

Observação 3.4.9 Se $Y(w, t) = X \circ h(w, t)$ é uma reparametrização de X pela mudança de parâmetros h , então já vimos na observação 3.3.17 que, para todo $p = (w, t)$, com $h(p) = q$, os planos tangentes $\mathbb{T}_p\mathbb{S}_Y$ e $\mathbb{T}_{h(p)}\mathbb{S}_X$ de Y e X respectivamente, coincidem. Portanto, se w pertence a este plano, então a Primeira Forma Fundamental de Y e de X serão iguais, ou seja, $I_p(w) = I_q(w) = \|w\|^2$. Assim podemos concluir que uma

mudança de parâmetros pode modificar os coeficientes da Primeira Forma Fundamental, mas mantém invariante a Primeira Forma Fundamental.

Em resumo, a Primeira Forma Fundamental, definida acima, é simplesmente a expressão de como a superfície em questão herda o produto interno usual do \mathbb{R}^3 . A Primeira Forma Fundamental, juntamente com seus coeficientes, proporcionam estudar estruturas e propriedades geométricas sobre a superfície, sem que seja necessário mencionar o espaço \mathbb{R}^3 , no qual a superfície está contida, como se segue.

Definição 3.4.10 *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $\alpha(t)$ uma curva regular contida na superfície dada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $t \in (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$. O comprimento da curva é dado por*

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 E(q) + 2abF(q) + b^2 G(q)} dt,$$

$$\text{com } \alpha'(t) = a(t)X_u(q(t)) + b(t)X_v(q(t)) \in \mathbb{T}_q\mathbb{S} \quad \text{e} \quad q(t) = (u(t), v(t)).$$

Com a Primeira Forma Fundamental é possível também calcular o ângulo $\theta \in [0, \pi]$ formado entre dois vetores não nulos w_1 e $w_2 \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$. De acordo com o Capítulo 2, este θ é tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle_q}{\|w_1\|_q \|w_2\|_q} = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle_q}{\sqrt{I_q(w_1)I_q(w_2)}},$$

e como $w_1, w_2 \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$ então podemos escrever

$$\begin{aligned} w_1 &= aX_u(q) + bX_v(q); \\ w_2 &= cX_u(q) + dX_v(q). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_q &= ac\langle X_u, X_u \rangle + (ad + bc)\langle X_u, X_v \rangle + bd\langle X_v, X_v \rangle \\ &= acE(q) + (ad + bc)F(q) + bdG(q). \end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned} \|w_1\| &= \sqrt{a^2\langle X_u, X_u \rangle + 2ab\langle X_u, X_v \rangle + b^2\langle X_v, X_v \rangle} \\ &= \sqrt{a^2E(q) + 2abF(q) + b^2G(q)}; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|w_2\| &= \sqrt{c^2\langle X_u, X_u \rangle + 2cd\langle X_u, X_v \rangle + d^2\langle X_v, X_v \rangle} \\ &= \sqrt{c^2E(q) + 2cdF(q) + d^2G(q)}. \end{aligned}$$

Ocultando as variáveis obtemos que

$$\cos \theta = \frac{acE + (ad + bc)F + bdG}{\sqrt{(a^2E + 2abF + b^2G)(c^2E + 2cdF + d^2G)}}.$$

Observe que em particular, o ângulo formado entre as curvas coordenadas de $X(u, v)$ em um ponto qualquer $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F(u, v)}{\sqrt{E(u, v)G(u, v)}}.$$

Assim as curvas coordenadas serão ortogonais se e somente se $F(u, v) = 0$. Se em uma dada parametrização isso ocorrer, a parametrização é dita ortogonal.

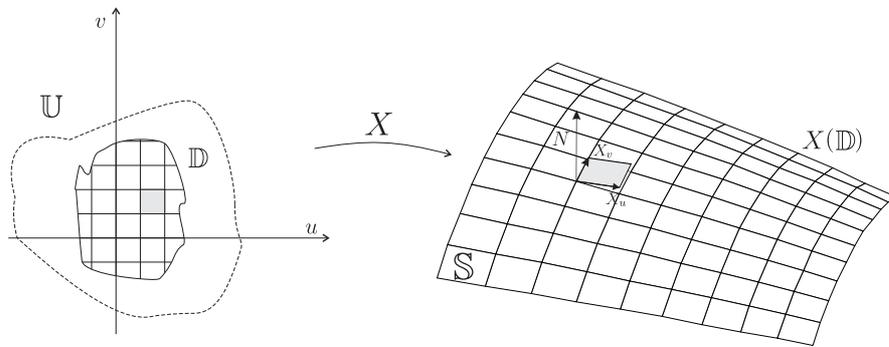
Por fim trataremos da medição de áreas, utilizando a Primeira Forma Fundamental.

Seja $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ uma região fechada e limitada, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de \mathbb{R}^2 e sua fronteira é homeomorfa a uma circunferência.

Se $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular, com \mathbb{S} sendo o seu traço e $\mathbb{D} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, então $X(\mathbb{D}) \subset \mathbb{S}$ é uma região fechada da superfície X .

A expressão $\|X_u(q) \wedge X_v(q)\|$, definida em \mathbb{U} , representa geometricamente a área do paralelogramo formado pelos vetores tangentes às curvas coordenadas em q . Este valor é aproximadamente igual à área de uma região em \mathbb{S} obtida como a imagem de um retângulo contido em \mathbb{D} com vértice nas coordenadas do ponto q , e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados u e v , ilustrado na figura 3.23.

Figura 3.23: Área



Fonte: Produção do próprio autor

Definição 3.4.11 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto fechado e limitado, onde X restrita a \mathbb{D} é injetiva. Então a área da região $X(\mathbb{D}) \subset \mathbb{S}$ é dada por*

$$A(X(\mathbb{D})) = \iint_{\mathbb{D}} \|X_u \wedge X_v\| dudv.$$

Vamos mostrar que essa expressão não depende da parametrização X . De fato, sejam $Y(w, t) = X \circ h(w, t)$ e $h : \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{U}$ uma mudança de parâmetros e $\mathbb{B} \subset \mathbb{V}$ é tal que $\mathbb{D} = h(\mathbb{B})$. Se $h(w, t) = (u, v)$, então da proposição 3.2.2, temos que

$$Y_w(q) \wedge Y_t(q) = \det(J(h))(X_u \wedge X_v)$$

e

$$\|Y_w(q) \wedge Y_t(q)\| = |\det(J(h))| \|X_u \wedge X_v\|,$$

então

$$\begin{aligned} A(Y(\mathbb{B})) &= \iint_{\mathbb{B}} \|Y_w \wedge Y_t\| dw dt = \iint_{\mathbb{B}} \|X_u \wedge X_v\| |\det(J(h))| dw dt \\ &= \iint_{\mathbb{D}} \|X_u \wedge X_v\| dudv = A(X(\mathbb{D})). \end{aligned}$$

Onde a penúltima igualdade vem do Teorema de Mudança de Coordenadas para Integrais Duplas (teorema 2.2.6). E isso mostra que o cálculo da área é invariante à uma mudança de parâmetros h qualquer de X .

Exemplo 3.4.12 *Seja a superfície de revolução denominada Toro, vista no exemplo 3.1.12, dada por*

$$X(u, v) = (\rho \operatorname{sen} u, (c + \rho \cos u) \cos v, (c + \rho \cos u) \operatorname{sen} v),$$

onde $u, v \in (0, 2\pi)$ e $0 < \rho < c$. Considerando um conjunto fechado para que seja possível o cálculo da área, dada por $\mathbb{D}_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \epsilon \leq u \leq 2\pi - \epsilon, \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}$ com ϵ suficientemente pequeno, temos que

$$X_u = (\rho \cos u, -\rho \operatorname{sen} u \cos v, -\rho \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)$$

e

$$X_v = (0, -(c + \rho \cos u) \operatorname{sen} v, (c + \rho \cos u) \cos v).$$

Logo

$$\begin{aligned} X_u(q) \wedge X_v(q) &= \| -(c\rho + \rho^2 \cos u) \operatorname{sen} u, -(c\rho + \rho^2 \cos u) \cos v \cos u, \\ &\quad - (c\rho + \rho^2 \cos u) \operatorname{sen} v \cos u \| \\ &= c\rho + \rho^2 \cos u. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} A(X(\mathbb{D}_\epsilon)) &= \iint_{\mathbb{D}_\epsilon} \|X_u \wedge X_v\| dudv = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} (c\rho + \rho^2 \cos u) dudv \\ &= \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} (c\rho u + \rho^2 \operatorname{sen} u) \Big|_\epsilon^{2\pi-\epsilon} dv = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} (2\pi - 2\epsilon)c\rho - \rho^2 \operatorname{sen} \epsilon dv \\ &= ((2\pi - 2\epsilon)^2 c\rho - \rho^2 \operatorname{sen} \epsilon). \end{aligned}$$

Logo, a área total do Toro é dada por

$$A(X(\mathbb{D})) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} ((2\pi - 2\epsilon)^2 c\rho - \rho^2 \operatorname{sen} \epsilon) = 4\pi^2 c\rho.$$

Com o auxílio da Primeira Forma Fundamental a expressão para $A(X(\mathbb{D}))$ na definição 3.4.11, pode ser reescrita como

$$A(X(\mathbb{D})) = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Com efeito, sabemos da Identidade de Lagrange que

$$\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 = (\langle X_u, X_v \rangle)^2 + \|X_u \wedge X_v\|^2$$

logo

$$\begin{aligned} \|X_u \wedge X_v\|^2 &= \sqrt{\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - (\langle X_u, X_v \rangle)^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4.13 Considere o Catenóide dado por $X(u, v) = (\rho \cosh u \cos v, \rho \cosh u \sin v, \rho u)$, com $\rho > 0$, $u \in \mathbb{R}$ e $v \in (0, 2\pi)$. Do exemplo 3.4.5, seus coeficientes da Primeira Forma Fundamental são

$$E(u, v) = G(u, v) = \rho^2 \cosh^2 u \text{ e } F(u, v) = 0.$$

Admitindo $\mathbb{D}_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -t \leq u \leq t, \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}$. Então, vemos que X restrita a \mathbb{D}_ϵ é injetiva, assim

$$\begin{aligned} A(X(\mathbb{D}_\epsilon)) &= \iint_{\mathbb{D}_\epsilon} \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \int_{-t}^t \sqrt{(\rho^2 \cosh^2 u)^2} dudv \\ &= \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \int_{-t}^t (\rho^2 \cosh^2 u) dudv = \rho^2 (2\pi - 2\epsilon) \int_{-t}^t \cosh^2 u du \\ &= \rho^2 (2\pi - 2\epsilon) \int_{-t}^t \frac{\cosh 2u}{2} du = \frac{\rho^2 (\pi - \epsilon)}{2} (\sinh(2t) - \sinh(-2t)) \\ &= \rho^2 (\pi - \epsilon) \sinh 2t. \end{aligned}$$

Logo, a área total do Catenóide é dada por

$$A(X(\mathbb{D})) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\rho^2 (\pi - \epsilon) \sinh 2t) = \pi \rho^2 \sinh 2t.$$

Exemplo 3.4.14 Considere o Helicóide dado no exemplo 3.4.3 e $\mathbb{D}_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -t \leq u \leq t, \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}$ e $\rho > 0$. Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental do Helicóide são dados por

$$E(u, v) = G(u, v) = \rho^2 \cosh^2 u \text{ e } F(u, v) = 0,$$

logo

$$A(X(\mathbb{D})) = \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \int_{-t}^t (\rho^2 \cosh^2 u) dudv = \pi \rho^2 \sinh 2t.$$

Perceba que os coeficientes da Primeira Forma Fundamental do Helicóide e do Catenóide coincidem, por consequência suas áreas coincidem para o mesmo $\mathbb{D} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, bem como as demais propriedades métricas oriundas da Primeira Forma Fundamental também coincidirão. Isso induz que deve existir uma característica particular entre eles. Tal característica veremos mais adiante, mas antes definiremos alguns conceitos para que possa ser abordada.

Uma importante classe de superfícies parametrizadas regulares é formada por aquelas que não possuem auto-interseções, ou seja, são dadas por aplicações que, a pontos distintos do domínio associam imagens sempre diferentes, como visto, por exemplo, na observação 3.1.10. Esse conceito é definido da seguinte forma:

Definição 3.4.15 *Uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície simples se X for injetiva.*

Definição 3.4.16 *Sejam $X(u, v)$ e $Y(u, v)$ com $(u, v) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ duas superfícies simples. Dizemos que X e Y são superfícies isométricas se seus respectivos coeficientes da Primeira Forma Fundamental de X e Y coincidem, em cada ponto $q \in \mathbb{U}$.*

Observação 3.4.17 *Se X e Y são duas superfícies simples, definidas no mesmo domínio \mathbb{U} , então pode-se definir um isomorfismo entre os traços de X e Y , denotados por \mathbb{S}_X e \mathbb{S}_Y respectivamente.*

De fato, se $X(\mathbb{U}) = \mathbb{S}_X$ e $Y(\mathbb{U}) = \mathbb{S}_Y$, como X e Y são injetivas, então $X : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{S}_X$ e $Y : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{S}_Y$, passam a ser sobrejetivas também, o que as tornam bijetivas admitindo assim inversas, denotadas por

$$X^{-1} : \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{U} \quad e \quad Y^{-1} : \mathbb{S}_Y \rightarrow \mathbb{U}.$$

Logo podemos definir $\phi : \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{S}_Y$ como $\phi = Y \circ X^{-1} : \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{S}_Y$, que também é uma bijeção, e sua inversa é $\phi^{-1} = X \circ Y^{-1} : \mathbb{S}_Y \rightarrow \mathbb{S}_X$.

Então a aplicação ϕ (ou ϕ^{-1}) é um isomorfismo entre \mathbb{S}_X e \mathbb{S}_Y (ou \mathbb{S}_Y e \mathbb{S}_X , respectivamente), e este isomorfismo é denominado uma isometria.

Essa denominação é justificada pela propriedade que uma isometria preserva todas as grandezas métricas que dependam da Primeira Forma Fundamental, já vistas, entre pontos correspondentes nos respectivos traços das superfícies.

Exemplo 3.4.18 *Retomando o Catenóide, sem um dos seus meridianos, dado por*

$$X(u, v) = (\rho \cosh u \cos v, \rho \cosh u \sin v, \rho u), \quad \text{com } \rho > 0, u \in \mathbb{R} \text{ e } v \in (0, 2\pi),$$

onde seus coeficientes da Primeira Forma Fundamental, de acordo com o exemplo 3.4.5, são

$$E_X(u, v) = G_X(u, v) = \rho^2 \cosh^2 u \text{ e } F_X(u, v) = 0.$$

Já o Helicóide dado por

$$Y(u, v) = (\rho \sinh u \cos v, \rho \sinh u \sin v, \rho v), \quad \text{com } \rho > 0, \quad v \in (0, 2\pi) \quad e \quad u \in \mathbb{R},$$

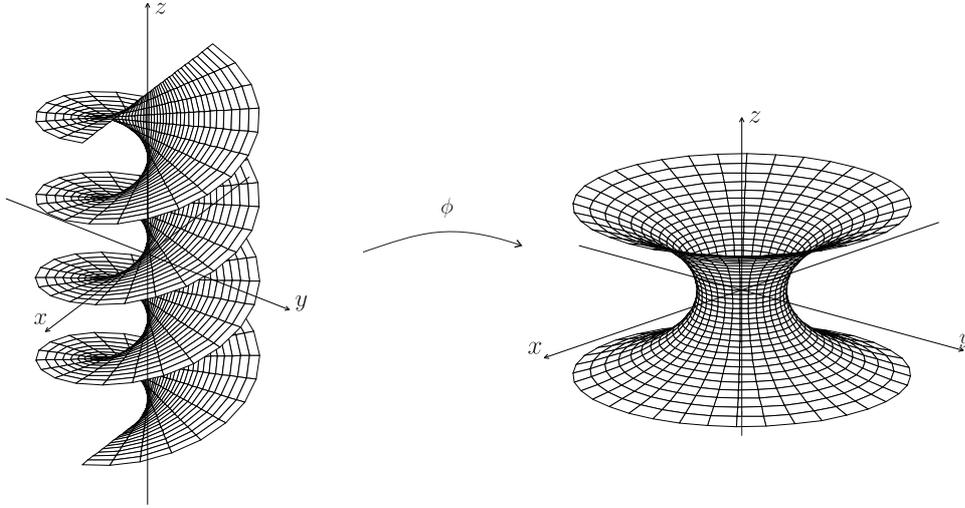
admite os coeficientes da Primeira Forma Fundamental da forma

$$E_Y(u, v) = G_Y(u, v) = \rho^2 \cosh^2 u \text{ e } F_Y(u, v) = 0,$$

de acordo com o exemplo 3.4.3.

Como cada respectivo coeficiente é igual em ambas as superfícies, conclui-se que o Helicóide e o Catenóide são superfícies isométricas. Pode-se mostrar que cada isometria da forma $\phi = X \circ Y^{-1}$ transforma os arcos de hélice e retas do helicóide nas circunferências e catenárias do catenóide, respectivamente (ver figura 3.24).

Figura 3.24: Isometria entre Catenoide e Helicoide



Fonte: Produção do próprio autor

Exemplo 3.4.19 Seja $X(u, v) = (u, v, 0)$, com $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$, uma parametrização de uma faixa de largura 2π situada no plano xy , e considere o cilindro de raio unitário sem um meridiano, descrito por $Y(u, v) = (\cos u, \text{senu}, v)$, com $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in \mathbb{R}$.

Note que X e Y descrevem superfícies simples, pois são injetivas, e também são isométricas pois, como $X_u = (1, 0, 0)$, $X_v = (0, 1, 0)$, $Y_u = (-\text{senu}, \cos u, 0)$ e $Y_v = (0, 0, 1)$, temos que

$$E_X = \langle X_u, X_u \rangle = 1, \quad F_X = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G_X = \langle X_v, X_v \rangle = 1;$$

e

$$E_Y = \langle Y_u, Y_u \rangle = 1, \quad F_Y = \langle Y_u, Y_v \rangle = 0, \quad G_Y = \langle Y_v, Y_v \rangle = 1.$$

Assim obtemos que seus respectivos coeficientes da Primeira Forma Fundamental coincidem. Uma isometria $\phi : Y \circ X^{-1}$, consiste em enrolar a faixa em torno do cilindro, de modo que os segmentos horizontais da faixa são levados nas circunferências do cilindro, ou seja, os paralelos, e as retas verticais da faixa são transformadas nas diretrizes do cilindro (ver figura 3.25).

Observação 3.4.20 Em geral, a expressão analítica do isomorfismo ϕ pode ser complicada de ser obtida. Porém na isometria do exemplo 3.4.19, entre a faixa plana e o cilindro unitário, tal ϕ pode ser obtida facilmente, procurando um isomorfismo tal que $\phi = Y \circ X^{-1} : \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{S}_Y$, ou seja, que transforma o traço do plano no traço do cilindro.

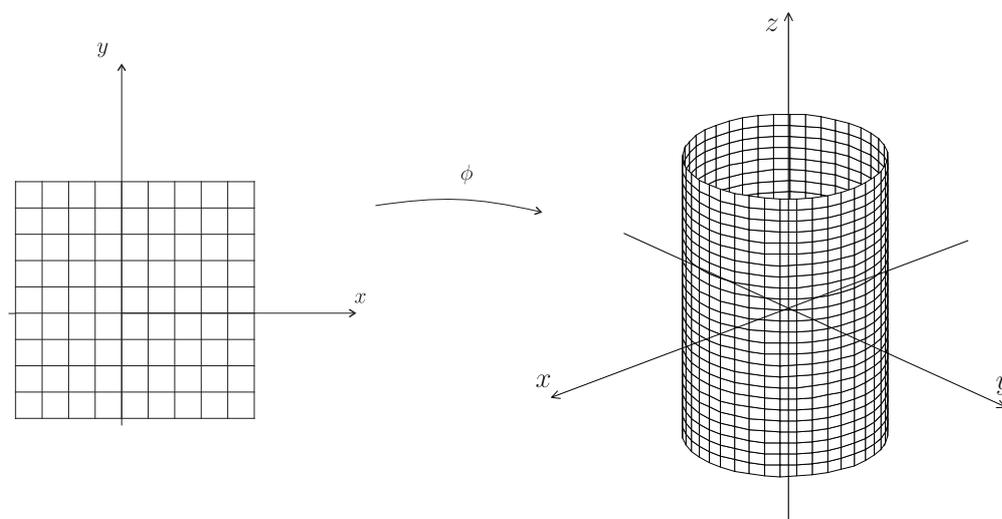
De acordo com o exemplo anterior, temos que $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}_X$ é bijetiva, onde $\mathbb{S}_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$. Logo $X^{-1} : \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{U}$ é dada simplesmente por $X^{-1}(u, v, 0) = (u, v)$. Portanto a isometria $\phi = Y \circ X^{-1} : \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{S}_Y$ é dada por

$$\phi(u, v, 0) = Y \circ X^{-1}(u, v, 0) = Y(u, v) = (\cos u, \text{senu}, v).$$

Exemplo 3.4.21 Considere o cone circular sem o vértice, dado no exemplo 3.3.9 por

$$X(u, v) = \left(u \text{sen} \alpha \cos \left(\frac{v}{\text{sen} \alpha} \right), u \text{sen} \alpha \text{sen} \left(\frac{v}{\text{sen} \alpha} \right), u \cos \alpha \right),$$

Figura 3.25: Isometria entre Plano e o Cilindro



Fonte: Produção do próprio autor

com $u > 0$, $v \in (0, 2\pi \text{sen}\alpha)$ e onde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ com 2α sendo o ângulo de abertura do cone.

Segue que

$$X_u = \left(\text{sen}\alpha \cos\left(\frac{v}{\text{sen}\alpha}\right), \text{sen}\alpha \text{sen}\left(\frac{v}{\text{sen}\alpha}\right), \cos\alpha \right)$$

e

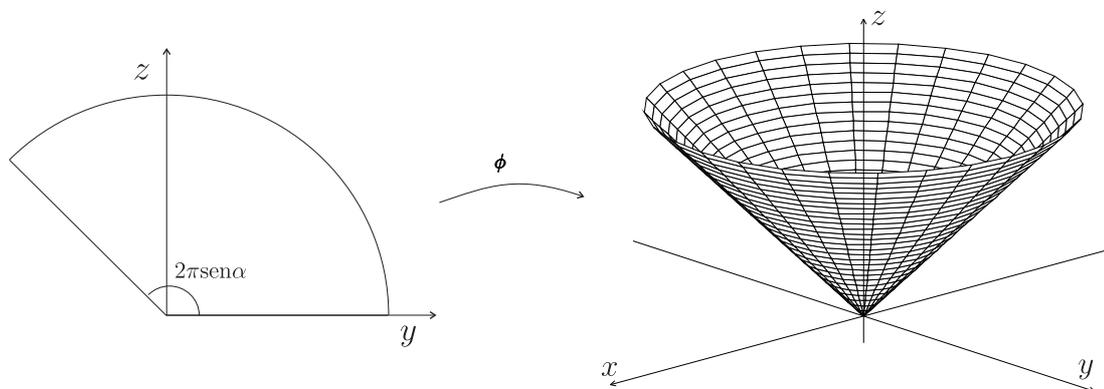
$$X_v = \left(-u \text{sen}\left(\frac{v}{\text{sen}\alpha}\right), u \cos\left(\frac{v}{\text{sen}\alpha}\right), 0 \right),$$

então os coeficientes da Primeira Forma Fundamental do cone são

$$E_X = 1, F_X = 0 \text{ e } G_X = u^2.$$

Seja agora $Y(u, v) = (0, u \cos v, u \text{sen}v)$, com $u > 0$ e $v \in (0, 2\pi \text{sen}\alpha)$, uma parametrização

Figura 3.26: Isometria entre Setor Circular e Cone



Fonte: Produção do próprio autor

que descreve um setor circular situado no plano yz , com um ângulo de abertura de $2\pi \text{sen}\alpha$. Então

$$Y_u = (0, \cos v, \text{sen}v)$$

e

$$Y_v = (0, -u \operatorname{sen} v, u \operatorname{cos} v).$$

Logo os coeficientes da Primeira Forma Fundamental do setor circular são

$$E_Y = 1, F_Y = 0 \text{ e } G_Y = u^2.$$

Conclui-se assim, que o cone com abertura 2α e um setor circular com ângulo de abertura $2\pi \operatorname{sen} \alpha$, são isométricos. Pode-se mostrar que toda isometria $\phi = X \circ Y^{-1}$ leva cada arco do setor circular, de comprimento $2\pi u \operatorname{sen} \alpha$, em circunferências do cone de raio $2\pi u \operatorname{sen} \alpha$ (ver figura 3.4.21).

Com este estudo, podemos perceber que as medições feitas nas superfícies dependem exclusivamente da Primeira Forma Fundamental, sem relação de como ela está mergulhada no espaço. Assim, tais propriedades da superfície como, comprimento de curva, ângulos e área são ditas propriedades intrínsecas, formando assim a Geometria Intrínseca das superfícies, que nada mais é, que a Geometria da Primeira Forma Fundamental.

Para entendermos melhor a palavra intrínseca, considere o comprimento de uma curva em uma folha de papel. Se dobrarmos a folha, essa distância que liga o ponto inicial ao ponto final na folha não se alterará, mas a distância entre esses dois pontos da folha no espaço sofrerá alterações, não sendo assim, uma propriedade intrínseca. Em particular, a isometria pode ser descrita intuitivamente como uma deformação de \mathbb{S}_X , supostamente constituída de um material flexível porém inextensível, resultando em \mathbb{S}_Y .

3.5 Segunda Forma Fundamental e Curvatura Normal

Como vimos na seção 2.3, tanto a Aplicação Normal de Gauss como sua diferencial nos dão ferramentas suficientes para podermos continuar investigando as propriedades geométricas locais de uma superfície regular.

Tais ferramentas nos permitem agora definir a Segunda Forma Fundamental, que nos auxiliará na definição das Curvaturas de Euler, Curvatura Normal, Curvatura de Gauss e Curvatura Média.

Definição 3.5.1 *Sejam $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0)) \in \mathbb{U}$. A Segunda Forma Fundamental de X em q é a aplicação $II_q : \mathbb{T}_q \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(q) \rangle,$$

onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva regular contida na superfície, tal que $\alpha'(t_0) = w$ e N é a Aplicação Normal de Gauss da superfície X .

Tal definição é extremamente útil para determinarmos os coeficientes da Segunda Forma Fundamental, que estarão alinhados com a curvatura normal, curvaturas principais, curvatura de Gauss e curvatura média. Porém para a abordagem teórica da Segunda Forma Fundamental, essa definição se mostra inadequada, necessitando assim de uma definição equivalente, que se mostre sistematicamente viável para as abordagens teóricas, podendo desta forma obter a continuidade que se deseja.

A próxima proposição nos mostra uma forma equivalente para a definição da Segunda Forma Fundamental, a qual será utilizada exclusivamente para obtenção de novos resultados.

Proposição 3.5.2 *A Segunda Forma Fundamental pode ser redefinida como*

$$II_q : \mathbb{T}_q\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$II_q(w) = \langle w, -dN_q(w) \rangle.$$

Demonstração: *Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva contida na superfície, com $q = (u_0, v_0)$ tal que $\alpha(t_0) = X(q)$ e $w = \alpha'(t_0) = u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$. Então*

$$\alpha''(t) = u''(t)X_u + [u'(t)]^2X_{uu} + 2u'(t)v'(t)X_{uv} + [v'(t)]^2X_{vv} + v''(t)X_v,$$

e aplicando em t_0 e fazendo o produto interno com $N(q)$, obtemos que

$$\begin{aligned} II_q(\alpha'(t_0)) &= \langle \alpha''(t_0), N(q) \rangle \\ &= u''(t_0)\langle X_u, N \rangle + [u'(t_0)]^2\langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0)\langle X_{uv}, N \rangle \\ &\quad + [v'(t_0)]^2\langle X_{vv}, N \rangle + v''(t_0)\langle X_v, N \rangle, \end{aligned}$$

como $\langle X_u, N \rangle = \langle X_v, N \rangle = 0$ então

$$II_q(\alpha'(t_0)) = [u'(t_0)]^2\langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0)\langle X_{uv}, N \rangle + [v'(t_0)]^2\langle X_{vv}, N \rangle.$$

Derivando $\langle X_u, N \rangle = 0$ e $\langle X_v, N \rangle = 0$, em relação a u e v , respectivamente, temos

$$\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, N_u \rangle = 0 \text{ e } \langle X_{vv}, N \rangle + \langle X_v, N_v \rangle = 0.$$

E derivando $\langle X_u, N \rangle = 0$ em relação a v obtemos

$$\langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle = 0,$$

logo

$$\begin{aligned} 0 = \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, N_v \rangle &= \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_u, dN_q(X_v) \rangle \\ &= \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_v, dN_q(X_u) \rangle \\ &= \langle X_{uv}, N \rangle + \langle X_v, N_u \rangle, \end{aligned}$$

pois dN_q é auto-adjunta. Assim, chegamos que

$$\begin{aligned} II_q(w) &= II_q(\alpha'(t_0)) \\ &= -[u'(t_0)]^2\langle X_u, N_u \rangle - 2u'(t_0)v'(t_0)\langle X_v, N_u \rangle - [v'(t_0)]^2\langle X_v, N_v \rangle \\ &= -[u'(t_0)]^2\langle X_u, N_u \rangle - u'(t_0)v'(t_0)\langle X_v, N_u \rangle - u'(t_0)v'(t_0)\langle X_u, N_v \rangle - [v'(t_0)]^2\langle X_v, N_v \rangle, \end{aligned}$$

reagrupando os termos, temos que

$$\begin{aligned} II_q(\alpha'(t_0)) &= -\langle u'(t_0)X_u, u'(t_0)N_u \rangle - \langle u'(t_0)X_u, v'(t_0)N_v \rangle - \langle v'(t_0)X_v, u'(t_0)N_u \rangle \\ &\quad - \langle v'(t_0)X_v, v'(t_0)N_v \rangle \\ &= -\langle u'(t_0)X_u, u'(t_0)N_u + v'(t_0)N_v \rangle - \langle v'(t_0)X_v, u'(t_0)N_u + v'(t_0)N_v \rangle \\ &= -\langle u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v, u'(t_0)N_u + v'(t_0)N_v \rangle \\ &= -\langle u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v, dN_q(u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v) \rangle \\ &= -\langle u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v, dN_q(u'(t_0)X_u + v'(t_0)X_v) \rangle \\ &= \langle \alpha'(t_0), -dN_q(\alpha'(t_0)) \rangle. \end{aligned}$$

■

Na demonstração da proposição anterior, vimos que a Segunda Forma Fundamental é dada por

$$II_q(\alpha'(t_0)) = [u'(t_0)]^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0) \langle X_{vu}, N \rangle + [v'(t_0)]^2 \langle X_{vv}, N \rangle$$

chamando $(u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b)$ e denotando

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= -\langle X_u, N_u \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle; \\ f(u_0, v_0) &= -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle = \langle X_{uv}, N \rangle; \\ g(u_0, v_0) &= -\langle X_v, N_v \rangle = \langle X_{vv}, N \rangle, \end{aligned}$$

obtemos uma expressão geral da Segunda Forma Fundamental, dada por

$$II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Fazendo $q = (u_0, v_0)$ variar por todo \mathbb{R}^2 , obtemos funções diferenciáveis que dependem de (u, v) , que são $e(u, v)$, $f(u, v)$ e $g(u, v)$, ditas coeficientes da Segunda Forma Fundamental da superfície Parametrizada X .

Como já mencionado, para efeito de cálculos, as fórmulas dos coeficientes da Segunda Forma Fundamental que não envolvem as derivadas de N são, em geral, mais fáceis de se manejar, como se pode constatar nos exemplos 3.3.20 e 3.3.21.

Exemplo 3.5.3 *Considere o Helicoide dado no exemplo 3.4.3, por*

$$X(u, v) = (\rho \operatorname{senhu} \cos v, \rho \operatorname{senhusenv}, \rho v), \quad \text{onde } \rho > 0, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Vamos obter os coeficientes da Segunda Forma Fundamental do Helicoide. As derivadas parciais de primeira e segunda ordens são

$$\begin{aligned} X_u &= (\rho \cosh u \cos v, \rho \cosh u \operatorname{sen} v, 0); \\ X_v &= (-\rho \operatorname{senhusenv}, \rho \operatorname{senhu} \cos v, \rho); \\ X_{uu} &= (\rho \operatorname{senhu} \cos v, \rho \operatorname{senhusenv}, 0); \\ X_{vv} &= (-\rho \operatorname{senhu} \cos v, -\rho \operatorname{senhusenv}, 0) \end{aligned}$$

e

$$X_{vu} = (-\rho \cosh u \operatorname{sen} v, \rho \cosh u \cos v, 0) = X_{uv},$$

e a Aplicação Normal de Gauss de X é escrita como

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{(\rho^2 \cosh u \operatorname{sen} v, -\rho^2 \cosh u \cos v, \rho^2 \operatorname{senhu} \cosh u)}{\sqrt{\rho^4 \cosh^2 u (1 + \operatorname{senh}^2 u)}} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} v, -\cos v, \operatorname{senhu})}{\cosh u}. \end{aligned}$$

Logo os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = 0, \quad f = \langle N, X_{vu} \rangle = -\rho \quad e \quad g = \langle N, X_{vv} \rangle = 0.$$

Então obtemos que a Segunda Forma Fundamental do Helicoide, aplicada em $w = aX_u + bX_v$ é simplesmente

$$II_q(w) = -2ab\rho.$$

A proposição a seguir explicita a expressão para a Segunda Forma Fundamental de uma superfície que descreve o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 3.5.4 *Se uma superfície parametrizada regular é dada por*

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)) \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

então a sua Segunda Forma Fundamental em $w = aX_u + bX_v \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$, é dada por

$$II_q(w) = \frac{a^2 f_{uu}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}} + \frac{2abf_{uv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}} + \frac{b^2 f_{vv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}}.$$

Demonstração: *Obtendo todas as derivadas de primeira e segunda ordem de X , temos que*

$$X_u = (1, 0, f_u), X_v = (0, 1, f_v), X_{uu} = (0, 0, f_{uu}),$$

$$X_{uv} = (0, 0, f_{uv}) \text{ e } X_{vv} = (0, 0, f_{vv}).$$

E da proposição 3.3.10, temos que a Aplicação Normal de Gauss é

$$N(u, v) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}}.$$

Assim

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}};$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}};$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}}.$$

Logo, para $w = aX_u + bX_v \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$, temos que

$$II_q(w) = \frac{a^2 f_{uu}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}} + \frac{2abf_{uv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}} + \frac{b^2 f_{vv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}}.$$

■

Exemplo 3.5.5 *Seja X a superfície parametrizada regular denominada Sela de Macaco, exibida na figura 3.27, e dada por*

$$X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u), \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Da proposição 3.5.4, tomando $f(u, v) = u^3 - 3v^2u$ temos que

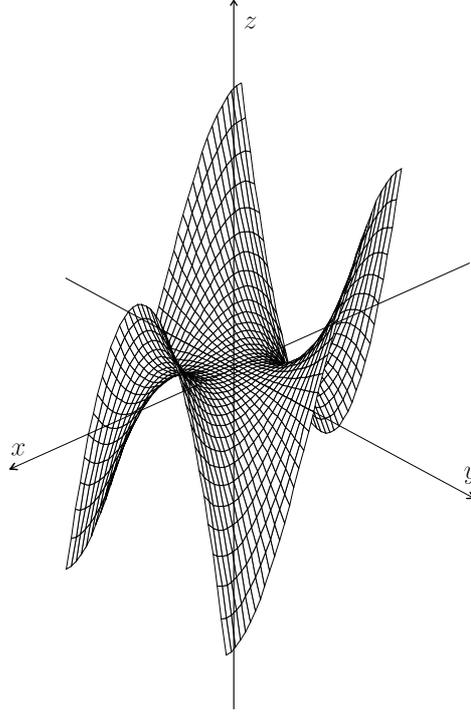
$$f_u = 3u^2 - 3v^2, \quad f_v = -6vu$$

e também

$$f_{uu} = 6u, \quad f_{uv} = -6v \text{ e } f_{vv} = -6u.$$

Ainda

Figura 3.27: Sela de Macaco



Fonte: Produção do próprio autor

$$\begin{aligned}
 1 + [f_u]^2 + [f_v]^2 &= 1 + (3u^2 - 3v^2)^2 + (-6vu)^2 \\
 &= 1 + 9u^4 - 18u^2v^2 + 9v^4 + 36v^2u^2 \\
 &= 1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4 \\
 &= 1 + 9(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) = 1 + 9(u^2 + v^2).
 \end{aligned}$$

Logo, pela proposição 3.5.4 temos que os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são

$$e = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)}}, \quad f = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)}} \quad e \quad g = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)}}.$$

Então, a Segunda Forma Fundamental em $w = aX_u + bX_v \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$ é

$$II_q(w) = \frac{6}{\sqrt{1 + 9(u^2 + v^2)}}(a^2u - 2abv - b^2u).$$

Exemplo 3.5.6 Considere o parabolóide hiperbólico trabalhado nos exemplos 3.1.4 e 3.3.20, dado por

$$X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

De acordo com a proposição 3.5.4, a Segunda Forma Fundamental de X é da forma

$$II_q(w) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(2a^2 - 2b^2),$$

onde $w = aX_u + bX_v \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$.

O próximo resultado mostra a expressão para a Segunda Forma Fundamental de uma superfície de revolução, que foi estudada na proposição 3.1.8.

Proposição 3.5.7 Se X é uma superfície parametrizada regular de revolução da forma

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{senv}, g(u)) \text{ com } v \in (0, 2\pi), u \in \mathbb{R} \text{ e } f(u) \neq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Então sua Segunda Forma Fundamental, aplicada em $w = aX_u + bX_v \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$, é dada por

$$II_q(w) = \frac{a^2(g''f' - f''g')}{\sqrt{[f']^2 + [g']^2}} + \frac{b^2(g'f)}{\sqrt{[f']^2 + [g']^2}}.$$

Demonstração: Obtendo as derivadas parciais da parametrização da superfície de revolução, temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \operatorname{senv}, g'(u)), & X_v &= (-f(u) \operatorname{senv}, f(u) \cos v, 0), \\ X_{uu} &= (f''(u) \cos v, f''(u) \operatorname{senv}, g''(u)), & X_{vv} &= (-f(u) \cos v, -f(u) \operatorname{senv}, 0) \end{aligned}$$

e

$$X_{uv} = (-f'(u) \operatorname{senv}, f'(u) \cos v, 0) = X_{vu}.$$

Assim a Aplicação Normal de Gauss fica da forma

$$N(u, v) = \frac{(-g'(u)f(u) \cos v, -g'(u)f(u) \operatorname{senv}, f'(u)f(u))}{\sqrt{[f(u)]^2([f'(u)]^2 + [g'(u)]^2)}} = \frac{(-g' \cos v, -g' \operatorname{senv}, f')}{\sqrt{[f']^2 + [g']^2}}.$$

E então os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{(g''f' - f''g')}{\sqrt{[f']^2 + [g']^2}}, \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0; \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{g'f}{\sqrt{[f']^2 + [g']^2}}. \end{aligned}$$

Assim, para $w = aX_u + bX_v \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$ temos

$$II_q(w) = \frac{a^2(g''(u)f'(u) - f''(u)g'(u))}{\sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}} + \frac{b^2(g'(u)f(u))}{\sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}}.$$

■

Exemplo 3.5.8 Vejamos qual é a expressão da Segunda Forma Fundamental para o Catenóide dos exemplos 3.1.11 e 3.4.5. Sabemos que $f(u) = \rho \cosh u$ e $g(u) = \rho u$, então pela proposição anterior obtemos que

$$II_q(w) = \frac{a^2(-\rho^2 \cosh u) + b^2(\rho^2 \cosh u)}{\rho \cosh u} = \rho(b^2 - a^2).$$

Exemplo 3.5.9 Considere o Toro do exemplo 3.1.12 parametrizado por

$$X(u, v) = (\rho \operatorname{senu}, (c + \rho \cos u) \cos v, (c + \rho \cos u) \operatorname{senv}), \text{ onde } u \in (0, 2\pi) \text{ e } 0 < \rho < c.$$

Neste exemplo, temos $f(u) = c + \rho \cos u$ e $g(u) = \rho \operatorname{senu}$, logo a Segunda Forma Funda-

mental do Toro é

$$II_q(w) = \frac{a^2(\rho^2 \operatorname{sen}^2 u + \rho^2 \cos^2 u) + b^2(c\rho \cos u + \rho^2 \cos^2 u)}{\rho} = a^2 \rho + b^2 \cos u(c + \rho \cos u).$$

Exemplo 3.5.10 Seja $X(u, v) = (\rho \sec u \cos v, \rho \sec u \operatorname{sen} v, \rho \operatorname{tg} u)$ com $\rho > 0$, $u \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $v \in (0, 2\pi)$ o hiperboloide de uma folha estudado no exemplo 3.4.7. Neste exemplo temos $f(u) = \rho \sec u$ e $g(u) = \rho \operatorname{tg} u$, então as derivadas de primeira e segunda ordem de $g(u)$ e $f(u)$ são

$$f'(u) = \rho \sec u \operatorname{tg} u \quad e \quad f''(u) = \rho \sec u (\operatorname{tg}^2 u + \sec^2 u),$$

e também

$$g'(u) = \rho \sec^2 u \quad e \quad g''(u) = 2\rho \operatorname{tg} u \sec^2 u.$$

Assim obtemos que $g'(u)f(u) = \rho^2 \sec^3 u$ e

$$\begin{aligned} g''(u)f'(u) - f''(u)g'(u) &= 2\rho^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^3 u - \rho^2 \sec^3 u (\operatorname{tg}^2 u + \sec^2 u) \\ &= 2\rho^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^3 u - \rho^2 \sec^3 u \operatorname{tg}^2 u + \sec^5 u \\ &= \rho^2 \operatorname{tg}^2 u \sec^3 u + \sec^5 u \\ &= \rho^2 \sec^3 u (\operatorname{tg}^2 u - \sec^2 u) \\ &= -\rho^2 \sec^3 u, \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} [g'(u)]^2 + [f'(u)]^2 &= [\rho \sec u \operatorname{tg} u]^2 + [\rho \sec^2 u]^2 \\ &= \rho^2 \sec^2 u \operatorname{tg}^2 u + \rho^2 \sec^4 u \\ &= \rho^2 \sec^2 u (\operatorname{tg}^2 u + \sec^2 u). \end{aligned}$$

Assim temos que a Segunda Forma Fundamental do Hiperboloide de Uma folha é expressa por

$$II_q(w) = \frac{-a^2 \rho^2 \sec^3 u + b^2 \rho^2 \sec^3 u}{\rho \sec u \sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \sec^2 u}} = \frac{\rho \sec^2 u (b^2 - a^2)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 u + \sec^2 u}}.$$

Exemplo 3.5.11 Considere o conjunto de pontos do \mathbb{R}^3 obtido pela rotação da curva $\alpha(u) = (1 - u^3, 0, u)$, onde $u \in (-1, 1)$, em torno do eixo Oz . Esta superfície, comentada na observação 3.3.13, chamada de Chapéu de Sherlock e vista na figura 3.28, é dada por

$$X(u, v) = ((1 - u^3) \cos v, (1 - u^3) \operatorname{sen} v, u), \quad v \in (0, 2\pi), \quad u \in (-1, 1).$$

Pela proposição 3.5.7 seus coeficientes da Segunda Forma Fundamental são

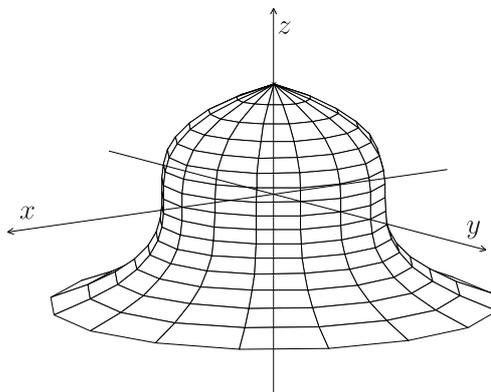
$$e = \frac{-6u}{\sqrt{9u^4 + 1}}, \quad f = 0 \quad e \quad g = \frac{1 - u^3}{\sqrt{9u^4 + 1}}.$$

Então,

$$II_q(w) = \frac{b^2(1 - u^3) - 6a^2u}{\sqrt{9u^4 + 1}}.$$

Com base na Primeira e Segunda Formas Fundamentais já estudadas, daremos início a um dos principais conceitos deste trabalho com o objetivo de abordarmos as Superfícies Míminas.

Figura 3.28: Chapéu de Sherlock



Fonte: Produção do próprio autor

Definição 3.5.12 Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em q é definida como

$$k_n : \mathbb{T}_q\mathbb{S} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

Com essa definição obtemos que a curvatura normal de uma superfície X é uma função dada pelo quociente entre a Segunda e a Primeira Forma Fundamental, e em termos dos seus coeficientes, para $w = aX_u + bX_v$, obtemos

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{a^2e + 2abf + b^2g}{a^2E + 2abF + b^2G}.$$

Perceba que $k_n(\lambda w) = k_n(w)$, para todo $\lambda \neq 0$, pois os coeficientes de ambas formas fundamentais são bilineares. Portanto, podemos falar na curvatura normal em uma direção tangente.

Para a interpretação geométrica da curvatura normal e da Segunda Forma Fundamental, considere $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva regular contida em \mathbb{S} , e $w = \alpha'(s_0)$ com $q = (u(s_0), v(s_0))$, então

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \frac{\langle \alpha''(s_0), N(s_0) \rangle}{\|w\|^2} = \frac{\langle \alpha'(s_0), -dN_q(\alpha'(s_0)) \rangle}{\|w\|^2}.$$

Sabemos do Capítulo 2 que, estando $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, o vetor normal principal a $\alpha(s)$ em s_0 é

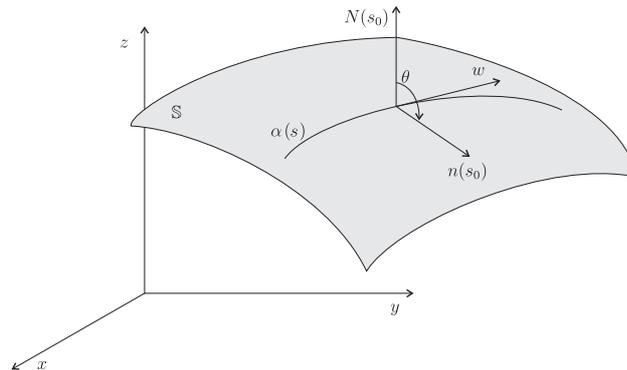
$$n(s_0) = \frac{\alpha''(s_0)}{\|\alpha''(s_0)\|} = \frac{\alpha''(s_0)}{k(s_0)} \Rightarrow \alpha''(s_0) = n(s_0)k(s_0)$$

onde $k(s_0)$ é a curvatura de α em q . Além disso $\|w\| = \|\alpha'(s_0)\| = 1$ e assim temos

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \langle \alpha''(s_0), N(s_0) \rangle \\ &= \langle n(s_0)k(s_0), N(s_0) \rangle \\ &= k(s_0)\|n(s_0)\|\|N(s_0)\| \cos \theta \\ &= k(s_0) \cos \theta, \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo formado entre os vetores unitários $n(s_0)$ e $N(s_0) = N(u(s_0), v(s_0))$, como pode ser observado na figura 3.29.

Figura 3.29: Curvatura Normal



Fonte: Produção do próprio autor

Como a curvatura normal não depende da curva α escolhida, vamos aplicar a relação anterior na curva obtida pela interseção do traço de $X(u, v)$, para (u, v) suficientemente próximos de (u_0, v_0) , com o plano que passa por $X(q)$ e contém os vetores w e $N(s_0)$. Esta curva é dita seção normal da superfície em questão, determinada por w e é uma curva plana dada por $\beta(s)$, com $\beta(s_0) = q$ e $\beta'(s_0) = w$. Se a curvatura k desta seção normal for diferente de zero teremos que seu vetor normal principal $n(s_0)$ terá a mesma direção que a normal à superfície, ou seja, $n(s_0) = \pm N(q)$. Portanto $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ e assim

$$k_n(w) = k(s_0) \cos \theta = \pm k(s_0).$$

Concluimos que se w for um vetor unitário tangente à superfície em q , então $\|k_n(s_0)\|$ é igual à curvatura da seção normal em q determinada por w .

Ainda, se $w \in \mathbb{T}_q \mathbb{S}$ for unitário, então

$$II_q(w) = k_n(w)I_q(w) = k_n(w)\|w\|^2 = k_n(w).$$

Observação 3.5.13 *Segue da observação 3.3.17 que, se $Y(w, t) = X \circ h(w, t)$ é uma reparametrização de X , pela mudança de parâmetros h , então a Segunda Forma Fundamental e a curvatura normal de Y em p , e de X em $q = h(p)$, permanecem invariantes ou mudam de sinal se $N_Y(p) = N_X(h(p))$ ou $N_Y(p) = -N_X(h(p))$, respectivamente.*

Exemplo 3.5.14 *Seja o plano do \mathbb{R}^3 dado pelo exemplo 3.4.2. Sabemos que os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são $E = G = 1$ e $F = 0$. Como $X_u = w_1$ e $X_v = w_2$, então $X_{uu} = X_{vv} = X_{uv} = 0$. Logo a Segunda Forma Fundamental é identicamente nula, e conseqüentemente a curvatura normal também o é.*

Exemplo 3.5.15 *Considere a esfera dos exemplos 3.1.3 e 3.3.21. Então temos que*

$$\begin{aligned} X_u &= (-\rho \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \rho \operatorname{sen} v \cos u, 0); \\ X_v &= (\rho \cos v \cos u, \rho \cos v \operatorname{sen} u, -\rho \operatorname{sen} v), \end{aligned}$$

e assim

$$E(u, v) = \rho^2 \operatorname{sen}^2 v, F(u, v) = 0 \quad e \quad G(u, v) = \rho^2.$$

Para obter os coeficientes da Segunda Forma Fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-\rho \operatorname{sen} v \cos u, -\rho \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, 0); \\ X_{vu} &= (-\rho \cos v \operatorname{sen} u, \rho \cos v \cos u, 0); \\ X_{vv} &= (-\rho \operatorname{sen} v \cos u, -\rho \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, -\rho \cos v); \\ N(u, v) &= -(\operatorname{sen} v \cos u, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos v), \end{aligned}$$

e assim os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são

$$e(u, v) = \rho \operatorname{sen}^2 v, \quad f(u, v) = 0 \quad e \quad g(u, v) = \rho.$$

Logo a função curvatura normal é

$$k_n(w) = \frac{a^2 \rho \operatorname{sen}^2 v + b^2 \rho}{a^2 \rho^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2 \rho^2} = \frac{\rho(a^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2)}{\rho^2(a^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2)} = \frac{1}{\rho}.$$

Portanto podemos ver que a curvatura da seção normal à esfera é igual ao inverso do raio, ou seja, toda seção normal à esfera é uma circunferência máxima da esfera (também chamada de meridiano).

3.6 Curvaturas Principais, Curvatura Média e Curvatura de Gauss

Na seção anterior explicitamos e exemplificamos a função Curvatura Normal a partir da Segunda Forma Fundamental. Agora mostraremos que a função Curvatura Normal possui um valor máximo e um valor mínimo, que serão ditos Curvatura Principais ou Curvaturas de Euler, e a partir destas definiremos a Curvatura de Gauss e a Curvatura Média.

Para iniciarmos, vamos explorar e analisar o que ocorre com a função Curvatura Normal, a princípio em um cilindro, quando ela toma valores diversificados, diferentemente do plano e da esfera.

Exemplo 3.6.1 *Considere o cilindro circular dado no exemplo 3.3.8 por*

$$X(u, v) = (\rho \cos u, \rho \operatorname{sen} u, v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0.$$

Seus vetores tangentes são

$$X_u = (-\rho \operatorname{sen} u, \rho \cos u, 0) \quad e \quad X_v = (0, 0, 1),$$

e a Aplicação Normal de Gauss é

$$N = (\cos u, \operatorname{senu}, 0).$$

As derivadas parciais de segunda ordem de X ficam

$$X_{uu} = (-\rho \cos u, -\rho \operatorname{senu}, 0), \quad X_{uv} = (0, 0, 0) \text{ e } X_{vv} = (0, 0, 0).$$

Vamos agora calcular os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais do cilindro. Assim

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= \rho^2, & F = \langle X_u, X_v \rangle &= 0, & G = \langle X_v, X_v \rangle &= 1, \\ e = \langle X_{uu}, N \rangle &= -\rho, & f = \langle X_{uv}, N \rangle &= 0, & g = \langle X_{vv}, N \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, se $w = aX_u + bX_v$, então a Primeira Forma Fundamental e a Segunda Forma Fundamental são, respectivamente,

$$I_q(w) = a^2\rho^2 + b^2 \text{ e } II_q(w) = -a^2\rho.$$

Logo, para um vetor w não nulo, temos que a função curvatura normal é

$$k_n(w) = \frac{-a^2\rho}{a^2\rho^2 + b^2}.$$

Observe que $k_n(w) \leq 0$ e que a igualdade $k_n(w) = 0$ ocorre somente quando $a = 0$ e $b \neq 0$. Observe também que se $a \neq 0$, então $a^2\rho^2 \leq a^2\rho^2 + b^2$, desta forma obtemos a seguinte desigualdade

$$-k_n(w) = \frac{a^2\rho}{a^2\rho^2 + b^2} \leq \frac{a^2\rho}{a^2\rho^2} = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \quad k_n(w) \geq -\frac{1}{\rho},$$

valendo a igualdade quando $b = 0$.

Portanto

$$\frac{-1}{\rho} \leq k_n(w) \leq 0,$$

ou seja, $\frac{-1}{\rho}$ é o valor mínimo de k_n , que é atingido quando $w = aX_u + 0X_v = aX_u$ e o valor máximo de k_n , que é obtido quando $w = 0X_u + bX_v = bX_v$.

Concluimos assim que a função k_n admite valores máximo e mínimo nas direções dos vetores tangentes às curvas coordenadas.

A próxima proposição generalizará o resultado obtido com o cilindro, para qualquer superfície parametrizada regular.

Proposição 3.6.2 *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função Curvatura Normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então o conjunto imagem da Curvatura Normal em q é o intervalo $[k_1(w), k_2(w)]$. E se $k_1(w) \leq k_2(w)$, então o mínimo e o máximo da função k_n são os autovalores de dN_q .*

Demonstração: Sabemos que dN_q é diagonalizável admitindo uma base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, onde $-k_1(w)$ e $-k_2(w)$ são os autovalores de dN_q associados aos autovetores v_1 e v_2 respectivamente.

Para obtermos o valor máximo e mínimo de k_n , considere $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco contida em \mathbb{S} , onde $q = \alpha(s_0)$ e $w = \alpha'(s_0) =$

$av_1 + bv_2$, assim $\|\alpha'(s)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, logo $k_n(\alpha'(s_0)) = \frac{II_q(\alpha'(s_0))}{I_q(\alpha'(s_0))} = II_q(\alpha'(s_0))$.

Então, pela linearidade de dN_q obtemos que

$$\begin{aligned} k_n(\alpha'(s_0)) &= \langle \alpha'(s_0), -dN_q(\alpha'(s_0)) \rangle = \langle av_1 + bv_2, -dN_q(av_1 + bv_2) \rangle \\ &= \langle av_1 + bv_2, -adN_q(v_1) - bdN_q(v_2) \rangle \\ &= -a^2 \langle v_1, dN_q(v_1) \rangle - ab \langle v_1, dN_q(v_2) \rangle - ba \langle v_2, dN_q(v_1) \rangle - b^2 \langle v_2, dN_q(v_2) \rangle \\ &= -a^2 \langle v_1, -k_1 v_1 \rangle - ab \langle v_1, -k_2 v_2 \rangle - ba \langle v_2, -k_1 v_1 \rangle - b^2 \langle v_2, -k_2 v_2 \rangle \\ &= a^2 k_1 \langle v_1, v_1 \rangle + ab k_2 \langle v_1, v_2 \rangle + ba k_1 \langle v_2, v_1 \rangle + b^2 k_2 \langle v_2, v_2 \rangle \\ &= a^2 k_1 + b^2 k_2. \end{aligned}$$

Logo, supondo $k_1 \leq k_2$ obtemos

$$k_1 = k_1(a^2 + b^2) \leq a^2 k_1 + b^2 k_2 \leq k_2(a^2 + b^2) = k_2,$$

resultando em

$$k_1(\alpha'(s_0)) \leq k_n(\alpha'(s_0)) \leq k_2(\alpha'(s_0)).$$

Ainda, se $k_1 < k_2$ o mínimo só é atingido para $\alpha'(s_0) = \pm v_1$ e o máximo para $\alpha'(s_0) = \pm v_2$, que são os autovetores da diferencial a Aplicação Normal de Gauss. ■

Com o resultado da proposição anterior podemos definir k_1 e k_2 da seguinte forma.

Definição 3.6.3 Os valores máximo e mínimo da função Curvatura Normal, dadas por k_1 e k_2 , respectivamente, são chamados de *Curvaturas Principais* (ou *Curvaturas de Euler*) de X em q . As direções correspondentes, dadas pelos autovetores v_1 e v_2 de dN_q , são chamados de *direções principais*.

Exemplo 3.6.4 Para a esfera do exemplo 3.5.15, a Curvatura Normal é uma função constante dada por $k_n(w) = \frac{1}{\rho}$, acarretando em que os autovalores k_1 e k_2 coincidirão, como verificado no exemplo 3.3.21, onde $k_1 = k_2 = \frac{1}{\rho}$.

Exemplo 3.6.5 Note que, no exemplo 3.3.20, as curvaturas principais do parabolóide hiperbólico em $q = (0, 0)$ são

$$k_1 = -2 < 2 = k_2,$$

e as direções principais são $v_1 = X_u(q)$ e $v_2 = X_v(q)$.

Com as Curvaturas Principais bem definidas, podemos agora introduzir os conceitos de Curvatura de Gauss e Curvatura Média.

Definição 3.6.6 Sejam $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ e $dN_q : \mathbb{T}_q \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{T}_q \mathbb{S}$ a diferencial da Aplicação Normal de Gauss de uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$. O determinante de dN_q é chamado de *Curvatura Gauss* de X , denotada por $K(q)$. O negativo da metade do traço de dN_q é chamado de *Curvatura Média* de X , denotada por $H(q)$.

Como dN_q é diagonalizável, podemos escrever $K(q)$ e $H(q)$ em termos das Curvaturas de Euler, k_1 e k_2 , como

$$K(q) = \det(dN_q) = k_1 k_2 \quad \text{e} \quad H(q) = -\frac{1}{2} \text{tr}(dN_q) = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Note que, de acordo com o Capítulo 2, k_1 e k_2 são soluções da equação

$$\lambda^2 - \text{tr}(-dN_q)\lambda + \det(-dN_q) = \lambda^2 - 2H(q) + K(q) = 0.$$

Observação 3.6.7 *Se $Y = X \circ h$ é uma reparametrização de X por h então segue da observação 3.5.13, que as curvaturas principais permanecem inalteradas ou mudam ambas de sinal, desta forma, uma mudança de parâmetros h pode alterar o sinal da curvatura média, mas o sinal da curvatura de Gauss permanece a mesma, ou seja, $H_Y(p) = \pm H_X(q)$ e $K_Y(p) = K_X(q)$.*

O conhecimento das Curvaturas Principais em q permite calcular facilmente a curvatura normal segundo uma direção qualquer de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, como mostra a próxima proposição.

Proposição 3.6.8 *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, k_1 e k_2 as curvaturas principais de X em $q = (u_0, v_0)$ e $\{v_1, v_2\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, então para todo vetor unitário $w \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$ tem-se que*

$$k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Demonstração: *Suponha $w \in \mathbb{T}_q\mathbb{S}$, com $\|w\| = 1$. Então podemos escrever $w = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta$, onde θ é o ângulo formado entre v_1 e w , e $\{v_1, v_2\}$ é a base ortonormal de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ formada por autovetores de $-dN_q$, associados a k_1 e k_2 .*

A função curvatura normal k_n na direção de w é dada por

$$\begin{aligned} k_n(w) &= \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = \langle w, -dN_q(w) \rangle \\ &= \langle v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, -dN_q(v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \rangle \\ &= \langle v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, k_1 v_1 \cos \theta + k_2 v_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta \langle v_1, v_1 \rangle + k_1 \sin \theta \cos \theta \langle v_1, v_2 \rangle + k_2 \cos \theta \sin \theta \langle v_2, v_1 \rangle + k_2 \sin^2 \theta \langle v_2, v_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

■

Esta última expressão é conhecida classicamente como fórmula de Euler. Em outras palavras, a fórmula de Euler é a expressão da Curvatura Normal (ou da Segunda Forma Fundamental) em uma base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$.

Vamos agora obter as expressões da Curvatura de Gauss e da Curvatura Média a partir da base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, que não é necessariamente ortonormal.

Proposição 3.6.9 *Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$ tal que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ é uma base de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, então a curvatura Média e a curvatura de Gauss são escritas em termos dos coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais como*

$$H(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2Ff + Eg}{EG - F^2} \right)$$

e

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Demonstração: *Suponha que a matriz de $-dN_q$, relativamente à base $\{X_u(q), X_v(q)\}$ de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$ seja dada por*

$$[-dN_q]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

As entradas dessa matriz são determinadas por

$$-N_u = -dN_q(X_u) = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

e

$$-N_v = -dN_q(X_v) = a_{12}X_u + a_{22}X_v.$$

Tomando o produto interno com X_u e com X_v em ambos os lados da primeira igualdade, obtemos

$$\langle X_u, -N_u \rangle = \langle X_{uu}, N \rangle = e = a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_u, X_v \rangle = a_{11}E + a_{21}F$$

e

$$\langle X_v, -N_u \rangle = \langle X_{vu}, N \rangle = f = a_{11}\langle X_v, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G.$$

Procedendo da mesma forma com a segunda igualdade obtemos

$$f = a_{12}E + a_{22}F \quad e \quad g = a_{12}F + a_{22}G.$$

Escrevendo as novas igualdades sob a forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} [-dN_q]_{\beta}^{\beta} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E assim

$$H(q) = \frac{1}{2} \text{tr}(-dN_q) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2Ff + Eg}{EG - F^2} \right)$$

e

$$K(q) = \det(-dN_q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

■

A proposição anterior, permite calcular a curvatura de Gauss $K(u, v)$ e a curvatura Média $H(u, v)$ de uma superfície parametrizada regular a partir dos coeficientes das duas formas fundamentais. Com isso, resolvendo a equação

$$\lambda^2 - 2H(u, v)\lambda + K(u, v) = 0,$$

obtemos as curvaturas principais k_1 e k_2 da superfície, que são dadas por

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad e \quad k_2 = H + \sqrt{H^2 - K},$$

e também são os autovalores de $-dN_q$. Note que $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, pois

$$H^2 - K = \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - k_1 k_2 = \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2 - 4k_1 k_2}{4} = \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Dessa forma, já conhecemos as expressões para a curvatura de Gauss e Média, tanto para uma base ortonormal de $\mathbb{T}_q\mathbb{S}$, quanto para a base $\{X_u, X_v\}$, que se mostram em função dos coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais.

Vamos obter agora as curvaturas de Gauss e Média de algumas superfícies já exemplificadas aqui.

Exemplo 3.6.10 *Considere o plano descrito no exemplo 3.4.2. Então os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais são, respectivamente*

$$E = 1, F = 0, G = 1$$

e

$$e = f = g = 0.$$

Assim,

$$H(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2Ff + Eg}{EG - F^2} \right) = 0 \quad e \quad K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

Como era de se esperar para um plano, as curvaturas de Gauss e Média são ambas nulas. Isto está de acordo com o exemplo 3.5.14, onde vimos que a função curvatura normal é identicamente nula e conseqüentemente suas curvaturas principais, concluindo que as seções normais um plano são sempre retas, que possuem curvatura igual a zero.

Exemplo 3.6.11 *Considere a esfera descrita nos exemplos 3.1.3, 3.3.21 e 3.5.15, então seus coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais são dados por*

$$E = \rho^2 \text{sen}^2 v, \quad F = 0, \quad G = \rho^2$$

e

$$e = \rho \text{sen}^2 v, \quad f = 0, \quad g = \rho.$$

Logo

$$K(q) = \frac{\rho^2 \text{sen}^2 v}{\rho^4 \text{sen}^2 v} = \frac{1}{\rho^2}$$

e

$$\begin{aligned} H(q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^3 \text{sen}^2 v + \rho^3 \text{sen}^2 v}{\rho^4 \text{sen}^2 v} \right) \\ &= \frac{2\rho^3 \text{sen}^2 v}{2\rho^4 \text{sen}^2 v} = \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Ainda, como $H^2 - K = 0$, as curvaturas principais da esfera são $k_1 = k_2 = H = \frac{1}{\rho}$, que mostra mais uma vez que $\frac{1}{\rho}$ é autovalor de $-dN_q$ da esfera, conforme o exemplo 3.3.21.

Exemplo 3.6.12 *Considere o parabolóide hiperbólico descrito por*

$$X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Já vimos pelo exemplo 3.5.6 que os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são

$$e = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \quad f = 0 \quad e \quad g = \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

E os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são obtidos por $X_u = (1, 0, 2u)$ e $X_v = (0, 1, 2v)$, donde

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = -4uv \quad e \quad G = 1 + 4v^2.$$

Aplicando estes coeficientes no ponto $q = (0, 0)$ obtemos

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad e = 2, \quad f = 0 \quad e \quad g = -2,$$

e então pela proposição 3.6.9 obtemos

$$H(0, 0) = 0 \quad e \quad K(0, 0) = -4.$$

Agora, para obtermos as curvaturas de Euler e suas direções, substituímos $H(0, 0)$ e $K(0, 0)$ na equação

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0,$$

o que nos dá $\lambda^2 = 4$ e então $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$, como era de se esperar, pois no exemplo 3.3.20, concluímos que $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$, eram os autovalores de $-dN_q$. Ainda, as direções principais são $v_1 = (1, 0, 0) = X_u$ para $k_1 = -2$ e $v_2 = (0, 1, 0) = X_v$ para $k_2 = 2$.

Exemplo 3.6.13 Vimos que os coeficientes da Primeira e da Segunda Formas Fundamentais do Toro dos exemplos 3.4.12 e 3.5.9, descrito por

$$X(u, v) = (\rho \operatorname{senu}, (c + \rho \cos u) \cos v, (c + \rho \cos u) \operatorname{senv}), \quad \text{onde } u \in (0, 2\pi) \text{ e } 0 < \rho < c,$$

são expressos por

$$E = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = (c + \rho \cos u)^2, \quad e = \rho, \quad f = 0, \quad g = \cos u (c + \rho \cos u).$$

Aplicando os coeficientes em $q = (\frac{\pi}{2}, v)$, para todo $v \in \mathbb{R}$, temos

$$E = \rho^2, \quad e = \rho, \quad G = c^2 \quad e \quad F = f = G = 0.$$

E então as curvaturas de Gauss e média em $q = (\frac{\pi}{2}, v)$ ficam

$$K = 0 \quad e \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho c^2}{\rho^2 c^2} \right) = \frac{1}{2\rho}.$$

Para obtermos k_1 e k_2 , resolvemos a equação

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = \lambda^2 - \frac{\lambda}{\rho} = 0,$$

e obtemos as curvaturas principais, que são $k_1 = 0$ e $k_2 = \frac{1}{\rho}$.

No cálculo das curvaturas principais é necessário que seja utilizada a Aplicação Normal de Gauss (ou sua diferencial), ou simplesmente a Segunda Forma Fundamental, e sabemos que seu produto é $K = k_1 k_2$. Agora enunciaremos o teorema que mostra que

o valor de K é exclusivamente calculado em termos dos coeficientes da Primeira Forma Fundamental.

Tal teorema é devido a Gauss, que o nomeou como egrégio, e está enunciado a seguir, não entraremos no mérito da demonstração pois não é o objetivo deste trabalho. Já a sua demonstração pode ser vista na íntegra em [1], [3] ou [15].

Teorema 3.6.14 Teorema Egrégio de Gauss *A curvatura de Gauss é invariante por isometrias locais. Mais precisamente, se \mathbb{S}_X e \mathbb{S}_Y são os traços de duas superfícies parametrizadas regulares e $\phi : \mathbb{S}_X \rightarrow \mathbb{S}_Y$ for uma isometria, então para qualquer $p \in \mathbb{S}_X$, a curvatura de Gauss de \mathbb{S}_X em p é igual a curvatura de Gauss de \mathbb{S}_Y em $\phi(p)$.*

Observe que o Teorema Egrégio de Gauss permite concluir que determinadas superfícies não são isométricas. Por exemplo uma esfera de raio ρ cuja curvatura de Gauss é $K = \frac{1}{\rho^2}$, não é isométrica a um plano pois este possui curvatura de Gauss nula, fatos já descritos nos exemplos 3.6.10 e 3.6.11.

E também podemos concluir que as Curvaturas de Gauss do Helicoide e do Cate-noide são sempre iguais, pois são superfícies isométricas, como visto no exemplo 3.4.18.

O Teorema Egrégio de Gauss mostra apenas uma de muitas propriedades que podem ser provadas que dependam exclusivamente da Primeira Forma Fundamental, ou seja, que constituem a Geometria Intrínseca das superfícies, essas outras propriedades juntamente com suas respectivas demonstrações, podem ser encontradas detalhadamente em [1], [3] e [15].

Capítulo 4

Introdução às Superfícies Mínimas

Dentre as superfícies do \mathbb{R}^3 , destacam-se as que possuem a curvatura de Gauss constante e as que possuem a curvatura média nula. Estudaremos agora as superfícies de curvatura média nula que são conhecidas particularmente como Superfícies Mínimas.

4.1 Definição, Exemplos e Propriedades

A ideia intuitiva das Superfícies Mínimas, com base no Cálculo das Variações, são as superfícies de área mínima que possuem uma determinada curva fechada como fronteira. Entretanto, trataremos inicialmente as Superfícies Mínimas com a definição concedida pela Geometria Diferencial, e no teorema 4.2.2 demonstraremos a equivalência entre essas duas definições, e descrevemos à partir de agora a definição baseada na curvatura média de uma superfície.

Definição 4.1.1 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. X é chamada de superfície mínima se a sua Curvatura Média é identicamente nula, ou seja, se*

$$H(u, v) = 0, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{U}.$$

Exemplo 4.1.2 *Como vimos no exemplo 3.5.14, a curvatura normal de um plano é identicamente nula assim, $k_1 = k_2 = 0$, logo*

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0.$$

E então concluímos que o plano é uma Superfície Mínima. Mesma conclusão pode ser obtida à partir do exemplo 3.6.10.

Exemplo 4.1.3 *Considere o Catenoide dado no exemplo 3.1.11. Dos exemplos 3.4.5 e 3.5.8 tiramos, respectivamente, que os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais são*

$$E = \rho^2 \cosh^2 u = G, \quad F = 0, \quad e = -\rho^2 \cosh u = -g \quad e \quad f = 0.$$

Da proposição 3.6.9, a curvatura média é dada por

$$H(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2} \right),$$

então

$$H(q) = \frac{(\rho^2 \cosh^2 u)(-\rho^2 \cosh u) + (\rho^2 \cosh^2 u)(\rho^2 \cosh u)}{\rho^4 \cosh^4 u} = 0.$$

Assim, concluímos que o Catenóide é uma Superfície Mínima.

Exemplo 4.1.4 Considere o Helicóide abordado no exemplo 3.4.3. Sabemos do exemplo 3.5.3, que os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são

$$e = g = 0 \quad e \quad f = -\rho.$$

E como o Helicóide é isométrico ao Catenóide, segue que

$$E = G = \rho^2 \cosh^2 u \quad e \quad F = 0.$$

Então, a sua curvatura média é

$$H(q) = \frac{(\rho^2 \cosh^2 u)0 + 2\rho 0 + (\rho^2 \cosh^2 u)0}{\rho^4 \cosh^4 u} = 0.$$

Logo o Helicóide também é uma superfície mínima.

Exemplo 4.1.5 Sabemos do exemplo 3.6.11, que a curvatura média da Esfera é da forma $H(q) = \frac{1}{\rho}$. Assim, a Esfera não é uma Superfície Mínima.

Exemplo 4.1.6 Do exemplo 3.6.13, tiramos que a curvatura média do Toro é dada por $H(q) = \frac{1}{2\rho} \neq 0$, para todo q . Então conclui-se que o Toro não é uma Superfície Mínima.

A próxima proposição mostra uma propriedade interessante das superfícies mínimas.

Proposição 4.1.7 Se $X : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima, então a sua curvatura de Gauss é sempre não positiva, em todos os pontos $q \in \mathbb{U}$.

Demonstração: Se X é mínima, então

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{U},$$

e assim $k_1 = -k_2$. Logo a curvatura de Gauss é tal que

$$K(q) = k_1 k_2 = k_1 (-k_1) = -(k_1)^2 \leq 0 \quad \forall q \in \mathbb{U}.$$

■

Exemplo 4.1.8 Do exemplo 3.6.10, tiramos que a curvatura de Gauss para um plano é nula.

Exemplo 4.1.9 Os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais do Catenóide são obtidos nos exemplos 3.4.5 e 3.5.8, e como a curvatura de Gauss é dada por

$$K(q) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

então

$$K(q) = \frac{-\rho^4 \cosh^2 u}{\rho^4 \cosh^4 u} = \frac{-1}{\cosh^2 u} \leq 0.$$

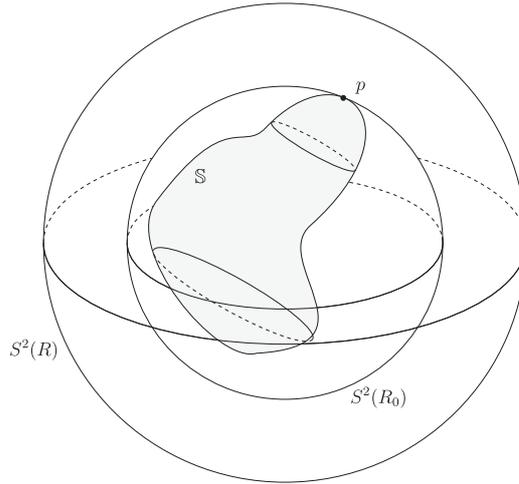
Exemplo 4.1.10 Para o Helicoide, sabemos que $E = G = \rho^2 \cosh^2 u$, $F = 0$, $f = -\rho$ e $e = g = 0$, assim

$$K(q) = \frac{-\rho^2}{\rho^4 \cosh^4 u} = \frac{-1}{\rho^2 \cosh^4 u} \leq 0.$$

Os exemplos 4.1.5 e 4.1.6 mostram que a esfera e o toro, casos particulares de superfícies fechadas, não são mínimas. Na verdade, decorre da proposição 4.1.7 a interessante propriedade de que nenhuma Superfície Mínima pode ser fechada.

De fato, supondo que \mathbb{S} é o traço de uma superfície fechada, podemos obter $R > 0$ suficientemente grande de tal forma que \mathbb{S} esteja inteiramente contida no interior da esfera de raio R , denotada por $S^2(R)$. Diminuindo R continuamente, pode-se obter um primeiro valor $R_0 > 0$ e um ponto $p \in \mathbb{S}$ de forma que a esfera de raio R_0 seja tangente a \mathbb{S} em p , conforme ilustra a figura 4.1.

Figura 4.1: Superfície Fechada



Fonte: Produção do próprio autor

Sabemos do exemplo 3.5.15 que a função curvatura normal da esfera $S^2(R_0)$ é dada por

$$k_n(w) = \frac{1}{R_0} \quad \forall w \in \mathbb{T}_q \mathbb{S}.$$

Como \mathbb{S} e $S^2(R_0)$ são tangentes em p , todas as seções normais de \mathbb{S} em p possuem curvatura maior que às circunferências de raio R_0 , que são as seções normais de $S^2(R_0)$ em p .

Assim, as curvaturas principais de \mathbb{S} em p são tais que

$$k_1 \geq \frac{1}{R_0} > 0$$

e obviamente

$$k_2 \geq \frac{1}{R_0} > 0.$$

Então obtemos que a curvatura de Gauss de \mathbb{S} em p é tal que

$$K = k_1 k_2 \geq \frac{1}{R_0^2} > 0.$$

Portanto, \mathbb{S} não pode ser o traço de uma superfície mínima pois se o fosse, pela proposição 4.1.7, teríamos $K \leq 0$, uma contradição.

Vamos obter agora algumas condições para que uma superfície parametrizada regular dada pela proposição 3.1.6 seja considerada uma superfície mínima.

Teorema 4.1.11 *Seja X uma superfície parametrizada regular dada por $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Então X é mínima se e somente se satisfaz a equação*

$$(1 + [f_u]^2)f_{vv} + (1 + [f_v]^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} = 0.$$

Demonstração: *Da proposição 3.6.9, temos que a curvatura média de uma superfície qualquer é dada por*

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} \right).$$

Da proposição 3.5.4, os coeficientes da Segunda Forma Fundamental de $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ são da forma

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}}, \quad f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}}, \quad e \quad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}}.$$

E os coeficientes da Primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= \langle (1, 0, f_u), (1, 0, f_u) \rangle = 1 + [f_u]^2; \\ G = \langle X_v, X_v \rangle &= \langle (0, 1, f_v), (0, 1, f_v) \rangle = 1 + [f_v]^2; \\ F = \langle X_u, X_v \rangle &= \langle (1, 0, f_u), (0, 1, f_v) \rangle = f_u f_v. \end{aligned}$$

Então a curvatura média de $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{uu}(1 + [f_v]^2) + f_{vv}(1 + [f_u]^2) - 2f_{uv}f_u f_v}{(1 + [f_u]^2 + [f_v]^2 + [f_u f_v]^2)\sqrt{1 + [f_u]^2 + [f_v]^2}} \right).$$

Assim, X é mínima se e somente se $H = 0$, ou seja, se e somente se

$$f_{uu}(1 + [f_v]^2) + f_{vv}(1 + [f_u]^2) - 2f_{uv}f_u f_v = 0.$$

■

Em outras palavras, a proposição anterior nos diz que se $f(u, v)$ satisfizer a equação diferencial da proposição anterior, chamada de equação de Lagrange, então seu gráfico é obrigatoriamente uma superfície mínima.

Note que $f(u, v) = w_1 u + w_2 v + p_0$, onde w_1 e w_2 são vetores de \mathbb{R}^3 e $p_0 \in \mathbb{R}^3$, satisfaz naturalmente a equação diferencial da proposição anterior, mostrando novamente que planos são superfícies mínimas.

Exemplo 4.1.12 *Vamos agora procurar uma superfície mínima que satisfaça a equação*

diferencial da proposição anterior, com $f(u, v) = g(u) + h(v)$, onde g é uma função que depende somente de u e h somente de v .

Substituindo na equação de Lagrange, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= f_{uu}(1 + [f_v]^2) + f_{vv}(1 + [f_u]^2) - 2f_{uv}f_u f_v \\ &= g''(u)(1 + [h'(v)]^2) + h''(v)(1 + [g'(u)]^2), \end{aligned}$$

e usando o método de separação de variáveis, encontramos

$$\frac{g''(u)}{1 + [g'(u)]^2} = -\frac{h''(v)}{1 + [h'(v)]^2} = k,$$

onde k é uma constante.

Resolvendo primeiramente $\frac{g''(u)}{1 + [g'(u)]^2} = k$ temos

$$g''(u) - k[g'(u)]^2 - k = 0,$$

chamando $g'(u) = w(u)$ temos $g''(u) = w'(u)$, e assim obtemos a seguinte equação diferencial

$$w'(u) - k[w(u)]^2 - k = 0,$$

então

$$\frac{w'(u)}{1 + [w(u)]^2} = k,$$

integrando em ambos os lados em relação a u obtemos

$$\operatorname{arctg}w(u) = ku + c_1,$$

logo

$$g'(u) = w(u) = \operatorname{tg}(ku + c_1),$$

integrando novamente em ambos os lados chegamos que

$$\begin{aligned} g(u) &= \int \operatorname{tg}(ku + c_1) du \\ &= -\frac{1}{k} \ln(\cos(ku + c_1)) + c_2, \end{aligned}$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias.

De forma análoga, partindo da equação $k = -\frac{h''(v)}{1 + h'(v)}$ obtemos que

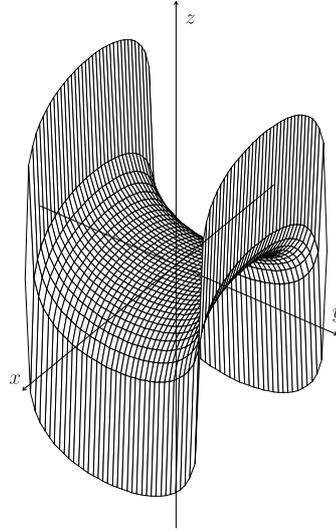
$$h(v) = \frac{1}{k} \ln(\cos(kv + c_3)) + c_4,$$

onde c_3 e c_4 constantes arbitrárias.

E assim concluímos que a superfície mínima é o gráfico da função dada por

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{1}{k} \ln(\cos(kv + c_3)) - \frac{1}{k} \ln(\cos(ku + c_1)) + c \\ &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{\cos(kv + c_3)}{\cos(ku + c_1)}\right) + c. \end{aligned}$$

Figura 4.2: Parte da Superfície de Scherk



Fonte: Produção do próprio autor

Tal superfície mínima é denominada de Superfície de Scherk, e está exibida na figura 4.2. A superfície de Scherk é normalmente conhecida a menos das suas constantes, podendo se escrita na forma

$$X(u, v) = \left(u, v, \ln \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right) \right).$$

Observe que, para $X(u, v)$ acima estar bem definida devemos ter $\cos u \neq 0$, $\cos v \neq 0$ e $\frac{\cos v}{\cos u} > 0$. Logo

$$v \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \frac{\pi}{2} + 2m\pi \right) \quad \text{e} \quad u \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right),$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$. Na figura 4.2 está representada a parte da superfície de Scherk correspondente a $m = n = 0$, que está definida sobre um quadrado aberto de lado π .

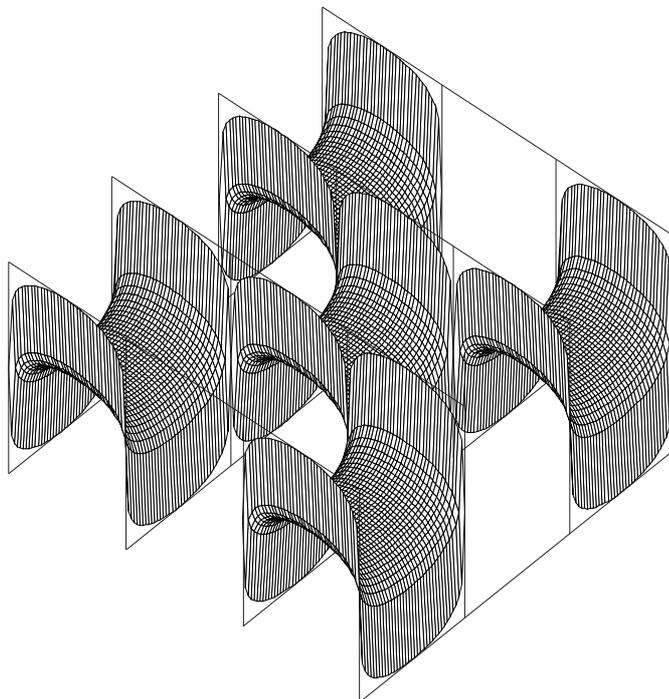
Esta superfície possui retas verticais sobre os vértices deste quadrado, ela se estende de modo a cobrir uma parte do plano constituída por quadrados não consecutivos de lados π , como em um tabuleiro de xadrez, formando o restante da Superfície de Scherk que pode ser observada na figura 4.3.

4.2 Terminologia e as Películas de Sabão

A palavra mínima na nomenclatura de superfícies de curvatura média nula está relacionada com o seguinte problema, proposto por Lagrange em 1760 (ver Capítulo 1): Dada uma curva fechada sem auto-interseções, qual é a superfície de área mínima que possui esta curva como fronteira?

Este problema surgiu como um mero exemplo de um método, desenvolvido por Lagrange, para achar curvas ou superfícies que minimizem determinadas propriedades e que atualmente constituem o chamado Cálculo das Variações. Agora introduziremos o

Figura 4.3: Superfície de Scherk



Fonte: Produção do próprio autor

método de Lagrange para o caso das Superfícies Mínimas, com o intuito de justificar sua nomenclatura.

Definição 4.2.1 *Sejam $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $\mathbb{D} \subset \mathbb{U}$ uma região limitada e fechada, onde $\overline{\mathbb{D}}$ é a união do domínio \mathbb{D} e com sua fronteira $\partial\mathbb{D}$. Considere uma função $h : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Então a variação normal de $X(\overline{\mathbb{D}})$ determinada por h , é a aplicação*

$$\xi : \overline{\mathbb{D}} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

tal que

$$\xi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v),$$

com $(u, v) \in \overline{\mathbb{D}}$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

A figura 4.4 ilustra a definição da variação normal.

Note que, como o próprio nome sugere, a variação normal de X associa, em cada ponto q de \mathbb{S}_X , uma variação de fator $th(u, v)$ na direção do vetor normal à superfície.

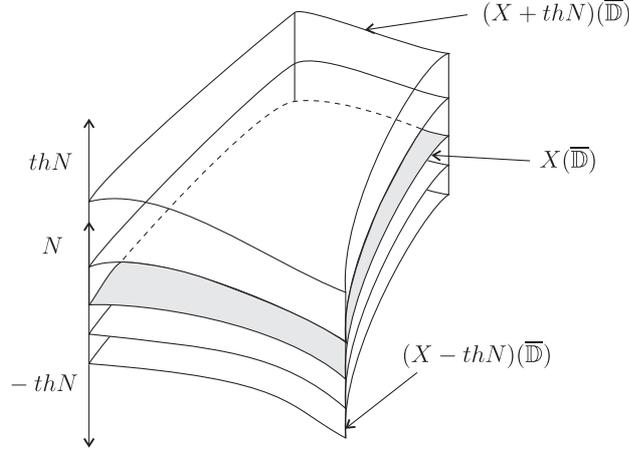
Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixado, a aplicação $X^t : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X^t(u, v) = \xi(u, v, t),$$

é uma superfície parametrizada denominada de superfície da variação, com

$$\begin{aligned} X_u^t &= X_u + thN_u + th_uN, \\ X_v^t &= X_v + thN_v + th_vN, \end{aligned}$$

Figura 4.4: Variação Normal de $X(\overline{\mathbb{D}})$



Fonte: Produção do próprio autor

e se ϵ for suficientemente pequeno, X^t passa a ser uma superfície parametrizada regular, pois

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X_u^{t(\epsilon)} \wedge X_v^{t(\epsilon)} = X_u \wedge X_v.$$

Assim, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de X^t são

$$\begin{aligned} E^t = \langle X_u^t, X_u^t \rangle &= \langle X_u + thN_u + th_uN, X_u + thN_u + th_uN \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle + 2th\langle X_u, N_u \rangle + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + 2t^2hh_u\langle N_u, N \rangle + t^2[h_u]^2\langle N, N \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^t = \langle X_v^t, X_v^t \rangle &= \langle X_v + thN_v + th_vN, X_v + thN_v + th_vN \rangle \\ &= \langle X_v, X_v \rangle + 2th\langle X_v, N_v \rangle + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + 2t^2hh_v\langle N_v, N \rangle + t^2[h_v]^2\langle N, N \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F^t = \langle X_u^t, X_v^t \rangle &= \langle X_u + thN_u + th_uN, X_v + thN_v + th_vN \rangle \\ &= \langle X_u, X_v \rangle + th(\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2[h_uh_v]\langle N, N \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando os fatos de que

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_u \rangle &= E, & \langle X_v, X_v \rangle &= G, & \langle X_u, X_v \rangle &= F, \\ \langle N, N \rangle &= 1, & \langle X_u, N_u \rangle &= -e, & \langle X_v, N_v \rangle &= -g \end{aligned}$$

e

$$\langle X_u, N_v \rangle + \langle X_v, N_u \rangle = -2f,$$

obtemos

$$\begin{aligned} E^t &= E - 2the + t^2h^2\langle N_u, N_u \rangle + t^2[h_u]^2, \\ F^t &= F - 2thf + t^2h^2\langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v, \\ G^t &= G - 2thg + t^2h^2\langle N_v, N_v \rangle + t^2[h_v]^2. \end{aligned}$$

Sabemos da proposição 3.6.9 que a curvatura média é dada por

$$H(q) = \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2},$$

e como

$$\begin{aligned} E^t G^t &= EG - 2thgE + Et^2(h^2\langle N_v, N_v \rangle + [h_v]^2) - 2theG \\ &+ 4t^2h^2eg - 2t^3he(h^2\langle N_v, N_v \rangle + [h_v]^2) + t^2G^t(h^2\langle N_u, N_u \rangle + [h_u]^2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [F^t]^2 &= F^2 - 2thFf + Ft^2(h^2\langle N_u, N_v \rangle + h_u h_v) - 2thfF \\ &+ 4t^2h^2f^2 - 2t^3hf(h^2\langle N_u, N_v \rangle + h_v h_u) - F^t t^2(h^2\langle N_v, N_u \rangle + h_u h_v), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} E^t G^t - [F^t]^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff - Ge) + R(t) \\ &= (EG - F^2) - 2th(2H(EG - F^2)) + R(t) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R(t), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} R(t) &= Et^2(h^2\langle N_v, N_v \rangle + [h_v]^2) - 2theG + 4t^2h^2eg - 2t^3he(h^2\langle N_v, N_v \rangle + [h_v]^2) \\ &+ t^2G^t(h^2\langle N_u, N_u \rangle + [h_u]^2) + Ft^2(h^2\langle N_u, N_v \rangle + h_u h_v) - 2thfF + 4t^2h^2f^2 \\ &- 2t^3hf(h^2\langle N_u, N_v \rangle + h_v h_u) - F^t t^2(h^2\langle N_v, N_u \rangle + h_u h_v), \end{aligned}$$

é tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t} = 0$, e então, pelo teorema 2.2.1, temos que $R'(0) = 0$.

Segue que, se ϵ é suficientemente pequeno então a área $A(t)$ de $X^t(\overline{\mathbb{D}})$ é dada por

$$\begin{aligned} A(t) &= \iint_{\overline{\mathbb{D}}} \sqrt{E^t G^t - [F^t]^2} dudv \\ &= \iint_{\overline{\mathbb{D}}} \sqrt{EG - F^2} \sqrt{1 - 4thH + Q(t)} dudv, \end{aligned}$$

onde $Q(t) = \frac{R(t)}{EG - F^2}$ é tal que $Q'(0) = 0$, pelo teorema 2.2.1.

Dessa forma, $A(t)$ é uma função diferenciável e sua derivada em $t = 0$ é

$$A'(0) = \iint_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{(-2hH + Q'(t))\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{1 - 4thH + Q(t)}} \Big|_{t=0} dudv = - \iint_{\overline{\mathbb{D}}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Como prometido no início deste capítulo, o próximo teorema fará o intermédio entre a variação normal, definida acima, e as superfícies de curvatura média nula, afim de justificar a terminologia e a definição de Superfície Mínima dada por Lagrange, que se resume na superfície que tem a menor área entre todas as superfícies delimitadas por um determinado contorno.

Teorema 4.2.2 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e seja $\mathbb{D} \subset \mathbb{U}$ um domínio limitado em \mathbb{U} . Então X é mínima se e somente se $A'(0) = 0$ para todo \mathbb{D} e toda variação normal de $X(\overline{\mathbb{D}})$.*

Demonstração: *Supondo que X é mínima, então $H = 0$, logo*

$$A'(0) = - \iint_{\overline{\mathbb{D}}} 2Hh \sqrt{EG - F^2} dudv = 0.$$

Reciprocamente, suponha, por absurdo, que $H(q) \neq 0$ para algum $q \in \mathbb{D}$. Tomando uma variação normal determinada por $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(q) = H(q)$, $hH > 0$ e h seja identicamente nula fora de uma vizinhança de q . Então

$$A'(0) = - \iint_{\overline{\mathbb{D}}} 2Hh\sqrt{EG - F^2} dudv < 0,$$

para a variação normal determinada por essa h . Mas por hipótese $A'(0) = 0$, para toda variação normal de $X(\overline{\mathbb{D}})$ e todo \mathbb{D} , o que gera uma contradição. ■

Com essa proposição podemos concluir que qualquer região limitada e fechada $X(\overline{\mathbb{D}})$ de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de $X(\overline{\mathbb{D}})$. Note que este ponto crítico pode não ser necessariamente um mínimo e que isso faz a palavra mínima parecer um pouco estranha, mesmo que tal terminologia esteja consagrada pela história.

Para entendermos melhor, considere o problema de determinar o mínimo de uma função diferenciável, $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se f admitir um ponto de mínimo, digamos t_0 , então este ponto é um ponto crítico de f , ou seja, satisfaz $f'(t_0) = 0$. Se $f''(t_0) > 0$, pode-se afirmar que tal ponto crítico é um mínimo relativo, isto é, mínimo em uma vizinhança de t_0 . Para determinar o mínimo absoluto precisamos saber o comportamento global da função $f(t)$.

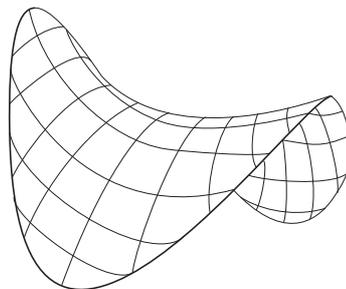
Para padronizar a linguagem, usaremos as seguintes definições.

Definição 4.2.3 *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e seja $\overline{\mathbb{D}}$ a união da região limitada $\mathbb{D} \subset \mathbb{U}$ com sua fronteira $\partial\mathbb{D}$. Diz-se que $\overline{\mathbb{D}}$ é estável se $A''(0) > 0$, para toda variação normal da superfície. Diz-se que $\overline{\mathbb{D}}$ é minimizante se a área $A(X(\overline{\mathbb{D}}))$ é menor ou igual que a área de qualquer outra superfície que tenha a mesma fronteira $\partial\mathbb{D}$.*

Podemos dar um contexto mais intuitivo para as Superfícies Mínimas e ao termo estável da definição 4.2.3.

Suponha que uma curva fechada dê o formato de uma moldura cujo material é um arame fino. Mergulhando este arame em uma solução de água e sabão e retirando-o em seguida, cuidadosamente, aparecerá uma película fina de sabão que tem o arame como fronteira, e que está em equilíbrio sob a ação da tensão superficial do líquido, exemplificado na figura 4.5.

Figura 4.5: Película de sabão à partir de uma arame fino



Fonte: Produção do próprio autor

É possível provar que esta superfície de equilíbrio tem curvatura média nula. Resultado obtido por Laplace, que diz que a pressão em cada ponto exercida pela superfície

sobre o meio que está inserida é orientada na direção da normal à superfície e proporcional à curvatura média. Assim, como a superfície está em equilíbrio, tal pressão e também a curvatura média, se anulam em todos os seus pontos.

As películas de sabão que são superfícies parametrizadas regulares são, portanto, superfícies mínimas. Além disto, tais películas são estáveis no sentido da mecânica, isto é, uma perturbação pequena dá origem a forças que fazem a película voltar à posição inicial.

Convém observar que nem toda película de sabão é uma superfície mínima. Por exemplo, a película de sabão mais simples de ser obtida experimentalmente possui formato esférico, ou seja, uma bolha de sabão, mas não é uma superfície mínima de acordo com a nossa definição que consiste em procurar uma superfície de menor área que seja delimitada por uma curva fechada conhecida. Porém, a esfera é considerada uma "superfície mínima" no sentido em que dado, um determinado volume, ela minimizará a área que recobre este volume.

A ideia de Laplace anteriormente mencionada é descrita na sequência.

Definição 4.2.4 *Seja X uma superfície parametrizada regular e H a sua curvatura média. O vetor curvatura média é definido por*

$$\mathbb{H} = HN.$$

Para entendermos o significado geométrico do vetor curvatura média, considere novamente a expressão

$$A'(0) = - \iint_{\mathbb{D}} 2Hh\sqrt{EG - F^2}dudv,$$

escolhendo $h = H$, temos que, para essa variação particular,

$$\begin{aligned} A'(0) &= -2 \iint_{\mathbb{D}} H^2\sqrt{EG - F^2}dudv \\ &= -2 \iint_{\mathbb{D}} \langle HN, HN \rangle \sqrt{EG - F^2}dudv \\ &= -2 \iint_{\mathbb{D}} \langle \mathbb{H}, \mathbb{H} \rangle \sqrt{EG - F^2}dudv \\ &= -2 \iint_{\mathbb{D}} \|\mathbb{H}\|^2 \sqrt{EG - F^2}dudv \leq 0 \end{aligned}$$

E isto mostra que, se "perturbarmos" o equilíbrio de \mathbb{D} na direção de \mathbb{H} , a área obtida será inicialmente decrescente.

Pode ser obtida, com o auxílio da próxima definição, uma outra interpretação para o vetor curvatura média.

Definição 4.2.5 *Sejam X uma superfície parametrizada regular e E , F e G os coeficientes da sua Primeira Forma Fundamental. Se $E = G$ e $F = 0$ então dizemos que X é uma superfície isotérmica.*

Em particular, o Catenoide o Helicoide são superfícies isotérmicas, bem como o plano.

Note também que a parametrização para a superfície de Scherk estudada no exemplo 4.1.12 não é isotérmica, pois uma função dada pela proposição 3.1.6 não é, necessariamente, isotérmica. Para que

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

seja isotérmica, é necessário e suficiente que

$$|f_u| = |f_v| \quad \text{e} \quad f_u f_v = 0,$$

que não é o caso da parametrização da Superfície de Scherk do exemplo 4.1.12.

Proposição 4.2.6 *Seja X uma superfície isotérmica, então*

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbb{H},$$

onde $\lambda^2 = E = G$.

Demonstração: *Como X é isotérmica, então $\langle X_u, X_u \rangle = E = G = \langle X_v, X_v \rangle$ e $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$. Derivando a primeira igualdade em relação a u , obtemos*

$$2\langle X_{uu}, X_u \rangle = 2\langle X_{vu}, X_v \rangle,$$

logo

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle,$$

e derivando a mesma igualdade em relação a v , obtemos

$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle X_{vv}, X_v \rangle.$$

Derivando a igualdade $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ em relação a v , temos que

$$\langle X_u, X_{vv} \rangle + \langle X_{uv}, X_v \rangle = 0.$$

Assim, chegamos na seguinte expressão

$$\langle X_u, X_{vv} \rangle = -\langle X_v, X_{uv} \rangle = -\langle X_u, X_{uu} \rangle.$$

Logo

$$\langle X_u, X_{uu} + X_{vv} \rangle = 0,$$

e da mesma forma

$$\langle X_v, X_{uu} + X_{vv} \rangle = 0.$$

Assim $X_{uu} + X_{vv}$ é simultaneamente ortogonal a X_u e X_v e com isso concluímos que $X_{uu} + X_{vv}$ é paralelo à N e escrevemos $X_{uu} + X_{vv} = \alpha N$.

Por X ser isotérmica, denotando $E = G = \lambda^2$, a sua curvatura média é dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2 g + \lambda^2 e}{\lambda^4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{g + e}{\lambda^2} \right).$$

E então como N é unitário, obtemos

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 H = g + e &= \langle N, X_{uu} \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle \\ &= \langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle = \langle N, \alpha N \rangle = \alpha. \end{aligned}$$

Portanto

$$X_{uu} + X_{vv} = \alpha N = (2\lambda^2 H)N = 2\lambda^2 \mathbb{H}.$$

■

A partir dessa proposição obtemos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.7 *Seja X uma superfície isotérmica. Então X é mínima se e somente se suas funções coordenadas são todas harmônicas.*

Demonstração: *Suponhamos que $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ seja uma superfície isotérmica mínima. Pela proposição anterior, temos que*

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbb{H} = 2\lambda^2 H N = 0,$$

ou seja,

$$(x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}) + (x_{vv}, y_{vv}, z_{vv}) = 0.$$

Portanto o Laplaciano das funções coordenadas de X são harmônicas, pois

$$x_{uu} + x_{vv} = 0, \quad y_{uu} + y_{vv} = 0, \quad e \quad z_{uu} + z_{vv} = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que as funções coordenadas de $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ são harmônicas. Então

$$x_{uu} + x_{vv} = 0, \quad y_{uu} + y_{vv} = 0, \quad e \quad z_{uu} + z_{vv} = 0,$$

logo

$$X_{uu} = (x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}) = -(x_{vv}, y_{vv}, z_{vv}) = -X_{vv}.$$

Assim, como X é isotérmica, obtemos

$$2\lambda^2 N H = X_{uu} + X_{vv} = 0,$$

e concluímos que $H = 0$, pois $\lambda^2 = E = G > 0$.

■

Exemplo 4.2.8 *Considere a superfície de Enneper exibida na figura 4.6 em duas vistas. Ela é uma superfície parametrizada regular dada por*

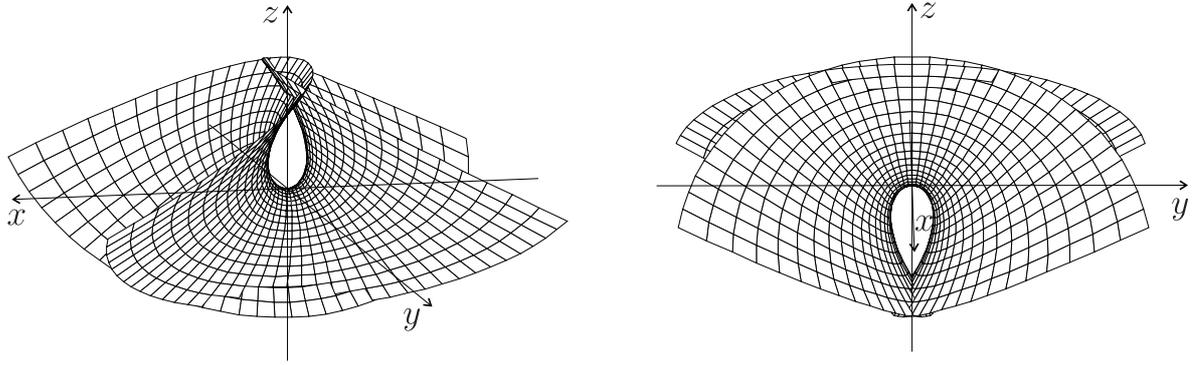
$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right),$$

com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

A superfície de Enneper é mínima. Com efeito, basta verificar que as funções coordenadas de X são harmônicas e que X é isotérmica. Temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \\ X_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v), \end{aligned}$$

Figura 4.6: Superfície de Enneper em duas vistas



Fonte: Produção do próprio autor

logo

$$\begin{aligned}
 E &= 1 - u^2 + v^2 - u^2 + u^4 - u^2v^2 + v^2 - v^2u^2 + v^4 + 4u^2v^2 + 4u^2 \\
 &= 1 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2, \\
 G &= 4u^2v^2 + 1 - v^2 + u^2 - v^2 - v^2 + v^4 - v^2u^2 + u^2 - u^2v^2 + u^4 + 4v^2 \\
 &= 1 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4 + 2v^2 + 2u^2, \\
 F &= 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2vu^3 - 4vu = 0.
 \end{aligned}$$

Assim, X é isotérmica. Ainda

$$X_{uu} = (-2u, 2v, 2)$$

e

$$X_{vv} = (2u, -2v, -2),$$

então

$$X_{uu} + X_{vv} = 0.$$

Portanto X é uma superfície isométrica cujas componentes são harmônicas. E concluímos que a superfície de Enneper é uma superfície mínima.

4.3 Representação de Weierstrass

Apresentaremos agora conceitos que descrevem a Representação de Weierstrass e que trazem respostas às observações abordadas em cima da Superfície de Scherk logo após a definição de uma superfície isotérmica. Mas para isso, introduziremos alguns resultados para superfícies mínimas envolvendo funções holomorfas de uma variável complexa.

Sejam $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ e $\varphi_3(\zeta)$ funções complexas de $\zeta = u + iv$ definidas em um domínio $U \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo, dadas por

$$\varphi_1(\zeta) = x_u - ix_v, \quad \varphi_2(\zeta) = y_u - iy_v \quad \text{e} \quad \varphi_3(\zeta) = z_u - iz_v,$$

onde x, y e z são as funções coordenadas de uma superfície parametrizada regular da forma

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Lema 4.3.1 X é uma superfície isotérmica se e somente se

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$$

e

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 = 2E = 2G > 0.$$

Demonstração: Suponhamos que X seja uma superfície isotérmica, obtemos assim que

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 &= x_u^2 - 2ix_u x_v + x_v^2 + y_u^2 - 2iy_u y_v + y_v^2 + z_u^2 - 2iz_u z_v + z_v^2 \\ &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + 2i(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) - (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \\ &= \langle X_u, X_u \rangle - \langle X_v, X_v \rangle + 2i\langle X_u, X_v \rangle. \\ &= E - G + 2iF. \end{aligned}$$

Como por hipótese $E = G$ e $F = 0$, então

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0.$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned} |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 &= x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 + z_u^2 + z_v^2 \\ &= E + G \\ &= 2E > 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ então

$$\begin{aligned} 0 = 0 + i0 &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \\ &= E - G + 2iF, \end{aligned}$$

logo

$$E = G \quad e \quad F = 0.$$

Portanto X é uma superfície isotérmica. ■

Lema 4.3.2 X é uma superfície mínima isotérmica se e somente se φ_1 , φ_2 e φ_3 são holomorfas.

Demonstração: Como X é uma superfície parametrizada regular o Teorema de Schwarz (teorema 2.2.2) é satisfeito para suas funções coordenadas, assim

$$x_{uv} = -(-x_{vu}), \quad y_{uv} = -(-y_{vu}), \quad z_{uv} = -(-z_{vu}),$$

que correspondem a metade das equações de Cauchy-Riemann para

$$\varphi_1 = x_u - ix_v, \quad \varphi_2 = y_u - iy_v \quad e \quad \varphi_3 = z_u - iz_v.$$

Além disso, pelo Corolário 4.2.7 temos que X é uma superfície mínima isotérmica se e somente se $X_{uu} + X_{vv} = 0$, ou seja, se e somente se

$$x_{uu} = -x_{vv}, \quad y_{uu} = -y_{vv}, \quad z_{uu} = -z_{vv},$$

que correspondem à outra metade das equações de Cauchy-Riemann para φ_1 , φ_2 e φ_3 . ■

Lema 4.3.3 φ_1, φ_2 e φ_3 são funções holomorfas e satisfazem $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$, se e somente se existem uma função holomorfa f e uma função meromorfa g , tais que

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2) \\ \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2) \\ \varphi_3 = fg, \end{cases}$$

onde cada polo de ordem m de g é um zero de ordem k de f , com $k \geq 2m$.

(As definições de funções holomorfas e meromorfas se encontram à partir da página 27.)

Demonstração: Suponhamos que φ_1, φ_2 e φ_3 sejam funções holomorfas, tais que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$, assim podemos reescrever esta equação como

$$-\varphi_3^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2).$$

Se φ_3 for identicamente nula, podemos tomar $g = 0$ (que é meromorfa) e $f = 2\varphi_1$ (que é holomorfa), e assim teremos que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f(1-g^2) = \varphi_1; \\ \frac{i}{2}f(1+g^2) = i\varphi_1 = -i^2\varphi_2 = \varphi_2; \\ fg = 0 = \varphi_3, \end{cases}$$

e como g não admite polos, f pode ou não ter zeros.

Se φ_3 não for nula, temos que

$$\varphi_1 - i\varphi_2 \neq 0,$$

e definindo

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2 \quad e \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2},$$

temos assim que f é holomorfa e g é meromorfa. Além disso,

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = \frac{-\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2},$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{f(1-g^2)}{2} &= \frac{(\varphi_1 - i\varphi_2)}{2} \left(1 - \frac{\varphi_3^2}{(\varphi_1 - i\varphi_2)^2} \right) \\ &= \frac{(\varphi_1 - i\varphi_2)}{2} \left(1 + \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\varphi_1 - i\varphi_2} \right) \\ &= \frac{(\varphi_1 - i\varphi_2)}{2} \left(\frac{2\varphi_1}{\varphi_1 - i\varphi_2} \right) \\ &= \varphi_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{if(1+g^2)}{2} &= \frac{i(\varphi_1 - i\varphi_2)}{2} \left(1 + \frac{\varphi_3^2}{(\varphi_1 - i\varphi_2)^2} \right) \\
&= \frac{i(\varphi_1 - i\varphi_2)}{2} \left(1 - \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\varphi_1 - i\varphi_2} \right) \\
&= \frac{i(\varphi_1 - i\varphi_2)}{2} \left(\frac{-2i\varphi_2}{\varphi_1 - i\varphi_2} \right) \\
&= \varphi_2, \\
fg &= (\varphi_1 - i\varphi_2) \left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} \right) \\
&= \varphi_3.
\end{aligned}$$

Como φ_1 e f são holomorfas, temos que $fg^2 = f - 2\varphi_1$ e $fg = \varphi_3$ também são holomorfas. Ainda, se ζ_0 é polo de ordem m de g então

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^m g(\zeta) \neq 0,$$

e numa vizinhança de ζ_0 podemos escrever

$$(\zeta - \zeta_0)^m g(\zeta) = h(\zeta), \quad \text{com } h(\zeta_0) \neq 0,$$

ou seja

$$g(\zeta) = \frac{h(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m}.$$

Assim,

$$f(\zeta) = \varphi_1 - i\varphi_2 = \frac{\varphi_3}{g(\zeta)} = \frac{\varphi_3(\zeta - \zeta_0)^m}{h(\zeta)},$$

e como

$$\varphi_3 = f(\zeta)g(\zeta) = \frac{\varphi_3(\zeta - \zeta_0)^m g(\zeta)}{h(\zeta)},$$

obtemos

$$f(\zeta) = \frac{\varphi_3(\zeta - \zeta_0)^m g(\zeta)(\zeta - \zeta_0)^m}{h(\zeta)} = \frac{\varphi_3 g(\zeta)(\zeta - \zeta_0)^{2m}}{h(\zeta)},$$

ou seja

$$f(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{2m} p(\zeta), \quad \text{com } p(\zeta_0) \neq 0.$$

Logo ζ_0 é um zero de f de ordem pelo menos $2m$.

Reciprocamente, suponhamos que f é holomorfa e g é meromorfa, e que cada polo (digamos ζ_0) de ordem m de g é um zero de ordem $k \geq 2m$, então temos

$$g(\zeta) = \frac{p(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^m}, \quad \text{com } p(\zeta_0) \neq 0,$$

e

$$f(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^k h(\zeta), \quad \text{com } h(\zeta_0) \neq 0,$$

e assim

$$fg(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{k-m} p(\zeta) h(\zeta),$$

como $k \geq 2m$, então $k - m \geq m \geq 0$, temos que $fg(\zeta)$ é holomorfa. Da mesma forma

$$fg^2(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{k-2m} p^2(\zeta) h(\zeta),$$

também é holomorfa, pois $k - 2m \geq 0$. Portanto, como soma de funções holomorfas é holomorfa, temos que

$$\begin{cases} \varphi_1 &= \frac{f}{2} - \frac{g^2 f}{2} \\ \varphi_2 &= \frac{if}{2} + \frac{ig^2 f}{2} \\ \varphi_3 &= fg, \end{cases}$$

são funções holomorfas.

Assim, temos pelo lema 4.3.2 uma superfície parametrizada regular definida como sendo

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

onde x, y e z são tais que

$$\varphi_1(\zeta) = x_u - ix_v, \quad \varphi_2(\zeta) = y_u - iy_v \quad e \quad \varphi_3(\zeta) = z_u - iz_v,$$

X é uma superfície mínima isotérmica, e pelo lema 4.3.1 se X é uma superfície isotérmica então

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0.$$

■

Com os lemas acima esclarecidos, agora enunciaremos e demonstraremos o resultado final de Weierstrass.

Teorema 4.3.4 (Fórmulas de Weierstrass) *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio simplesmente conexo. X é uma superfície mínima isotérmica se e somente se existem uma função holomorfa f e uma função meromorfa g definidas em \mathbb{U} , tais que*

$$\begin{cases} x(u, v) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_1 d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{f(1-g^2)}{2} d\zeta' \right); \\ y(u, v) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_2 d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{if(1+g^2)}{2} d\zeta' \right); \\ z(u, v) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_3 d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} gfd\zeta' \right), \end{cases} \quad (4.3.1)$$

e cada polo de ordem m de g corresponde a um zero de ordem $2m$ de f .

Demonstração: Suponhamos que $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ seja uma superfície mínima isotérmica, então do lema 4.3.2 temos que as funções complexas φ_1, φ_2 e φ_3 , dadas por

$$\varphi_1(\zeta) = x_u - ix_v, \quad \varphi_2(\zeta) = y_u - iy_v \quad e \quad \varphi_3(\zeta) = z_u - iz_v,$$

são holomorfas, e observe que as igualdades do lado esquerdo de 4.3.1 são satisfeitas.

Ainda, como X é isotérmica, pelo lema 4.3.1 vale que $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$, logo, do lema 4.3.3 tiramos que existem f holomorfa e g meromorfa tais que cada polo de ordem m de g corresponde a um zero de ordem $2m$ de f , o que prova as igualdades do lado direito de 4.3.1.

Reciprocamente, se f e g satisfazem as condições requeridas, então, definindo φ_1 , φ_2 e φ_3 como no lema 4.3.3 obtemos que tais funções são holomorfas que satisfazem $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$, o que prova o lado direito das igualdades de 4.3.1.

Como φ_1 , φ_2 e φ_3 são holomorfas, do lema 4.3.2 tiramos que a aplicação X dada por $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde x, y e z satisfazem

$$\varphi_1(\zeta) = x_u - ix_v, \quad \varphi_2(\zeta) = y_u - iy_v \quad e \quad \varphi_3(\zeta) = z_u - iz_v,$$

é uma superfície mínima isotérmica, o que prova as igualdades do lado esquerdo de 4.3.1. ■

As equações vistas no Teorema de Weierstrass são classicamente conhecidas por Representação de Weierstrass. A Representação de Weierstrass permite obter uma infinidade de exemplos de superfícies mínimas.

Retornando ao exemplo 4.1.12 da Superfície de Scherk, podemos obter agora uma parametrização isotérmica a partir da representação de Weierstrass.

Exemplo 4.3.5 Seja $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ o disco unitário $\mathbb{U} = D(0, 1) = \{\zeta \in \mathbb{C} / |\zeta| < 1\}$. Definindo $f, g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ como sendo $g(\zeta) = \zeta$ e $f(\zeta) = \frac{4}{1 - \zeta^4}$, obtemos que

$$\varphi_1 = \frac{2}{1 + \zeta^2}, \quad \varphi_2 = \frac{2i}{1 - \zeta^2}, \quad e \quad \varphi_3 = \frac{4\zeta}{1 - \zeta^4},$$

assim φ_1, φ_2 e φ_3 não possuem polos em \mathbb{U} , obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{2}{1 + \zeta'^2} d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{i}{\zeta' + i} - \frac{i}{\zeta' - i} d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(i \ln \left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right) \right) \\ &= -\arg \left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right), \\ y &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{2i}{1 - \zeta'^2} d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{i}{\zeta' + 1} - \frac{i}{\zeta' - 1} d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(i \ln \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) \right) \\ &= -\arg \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right), \\ z &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{2}{1 - \zeta'^4} d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{2\zeta'}{\zeta'^2 + 1} - \frac{2\zeta'}{\zeta'^2 - 1} d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\ln \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right) \right) \\ &= \ln \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right|. \end{aligned}$$

Ainda, como cosseno é uma função par, temos que

$$\cos x = \cos \left(\arg \left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right) \right) = \frac{\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right)}{\left| \frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right|} = \frac{(|\zeta|^2 - 1) |\zeta - i|}{|\zeta - i|^2 |\zeta + i|} = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta^2 + 1|},$$

e também

$$\cos y = \cos \left(\arg \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) \right) = \frac{\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)}{\left| \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right|} = \frac{(|\zeta|^2 - 1) |\zeta - 1|}{|\zeta - 1|^2 |\zeta + 1|} = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta^2 - 1|}.$$

Assim obtemos que,

$$\frac{\cos y}{\cos x} = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta^2 - 1|} \frac{|\zeta|^2 + 1}{|\zeta^2 - 1|} = \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right|,$$

e portanto

$$z = \ln \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right| = \ln \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right),$$

que corresponde à parte da Superfície de Scherk restrita ao quadrado $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \right) \times \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \right)$, pois $\zeta \in \mathbb{U}$ garante que $|\zeta|^2 - 1 < 0$ e com isso $\cos x < 0$ e $\cos y < 0$.

Exemplo 4.3.6 Tomando o domínio $\mathbb{U} = \mathbb{C}$ e definindo $f, g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ como sendo $g(\zeta) = -e^\zeta$ e $f(\zeta) = -\rho e^{-\zeta}$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\rho}{2}(1 + e^{2\zeta})e^{-\zeta} = \rho \operatorname{senh} \zeta, \\ \varphi_2 &= -\frac{i\rho}{2}(1 - e^{2\zeta})e^{-\zeta} = -i\rho \operatorname{cosh} \zeta, \\ \varphi_3 &= \rho, \end{aligned}$$

que obviamente são holomorfas em \mathbb{C} , e representam assim a forma de Weierstrass para o Catenóide, pois

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \rho \operatorname{senh} \zeta' d\zeta' \right) = \operatorname{Re}(\rho \operatorname{cosh} \zeta - 1) = \rho \cos v \operatorname{cosh} u - 1, \\ y &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta -i\rho \operatorname{cosh} \zeta' d\zeta' \right) = \operatorname{Re}(-i\rho \operatorname{senh} \zeta) = \rho \operatorname{sen} v \operatorname{cosh} u, \\ z &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \rho d\zeta' \right) = \operatorname{Re}(\rho\zeta) = \rho u, \end{aligned}$$

que é somente uma translação em uma unidade do Catenóide, visto no exemplo 3.1.11, na direção negativa do eixo Oz .

Exemplo 4.3.7 Tomando o domínio $\mathbb{U} = \mathbb{C}$ e definindo $f, g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(\zeta) = -ie^\zeta$ e $f(\zeta) = \rho e^{-\zeta}$, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\rho}{2}(1 + e^{2\zeta})e^{-\zeta} = \rho \cosh \zeta, \\ \varphi_2 &= \frac{i\rho}{2}(1 - e^{2\zeta})e^{-\zeta} = -i\rho \operatorname{senh} \zeta, \\ \varphi_3 &= -i\rho,\end{aligned}$$

são holomorfas em \mathbb{C} , e são a representação de Weierstrass para o Helicoide, pois

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \rho \cosh \zeta' d\zeta' \right) = \operatorname{Re}(\rho \operatorname{senh} \zeta - 1) = \rho \cos v \operatorname{senh} u, \\ y &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta -i\rho \operatorname{senh} \zeta' d\zeta' \right) = \operatorname{Re}(-i\rho \cosh \zeta + i) = \rho \operatorname{sen} v \operatorname{senh} u, \\ z &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta -i\rho d\zeta' \right) = \operatorname{Re}(-i\rho \zeta) = \rho v,\end{aligned}$$

que são as funções coordenadas do Helicoide, visto no exemplo 3.4.3.

Exemplo 4.3.8 Considere agora uma escolha mais simples para $g(\zeta)$, $f(\zeta)$ e \mathbb{U} como sendo, $\mathbb{U} = \mathbb{C}$, $g(\zeta) = \zeta$ e $f(\zeta) = 2$, logo obtemos que a representação de Weierstrass é

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta 2(1 - \zeta'^2) d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3} \right) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \\ y &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta 2i(1 + \zeta'^2) d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(i \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3} \right) \right) = -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, \\ z &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta 2\zeta' d\zeta' \right) = \operatorname{Re}(\zeta^2) = u^2 - v^2,\end{aligned}$$

que descreve a superfície de Enneper do exemplo 4.2.8, a menos de uma simetria na coordenada y .

Exemplo 4.3.9 Fazendo a escolha de $\mathbb{U} = \mathbb{C} - \{0\}$, e definindo $f, g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(\zeta) = \zeta$ e $f(\zeta) = 2 \left(1 - \frac{1}{\zeta^4} \right)$, obtemos pela Representação de Weierstrass uma superfície mínima denominada de Superfície de Henneberg.

As funções holomorfas φ_1 , φ_2 e φ_3 são tais que

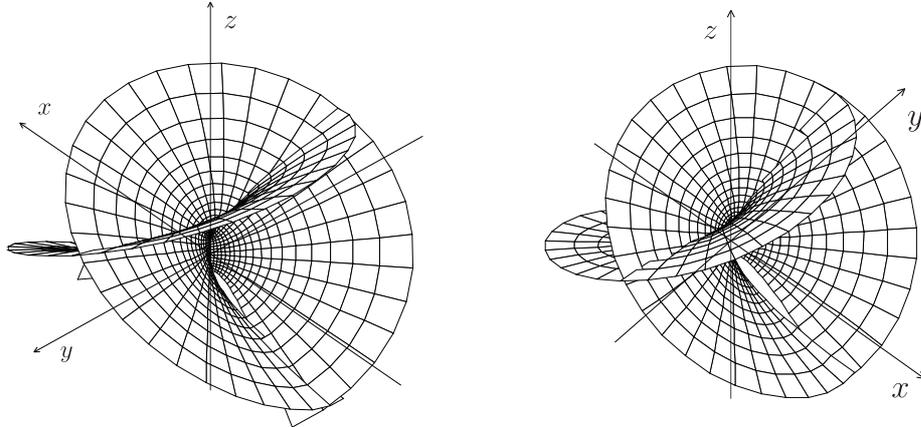
$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \zeta^2) \left(2 - \frac{2}{\zeta^4} \right) = \left(\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^4} - \zeta^2 + 1 \right), \\ \varphi_2 &= \frac{i}{2}(1 + \zeta^2) \left(2 - \frac{2}{\zeta^4} \right) = i \left(\zeta^2 + 1 - \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^4} \right), \\ \varphi_3 &= 2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta^3} \right),\end{aligned}$$

e então as funções coordenadas da superfície de Henneberg são

$$\begin{aligned}
 x &= \operatorname{Re} \left(\int_1^\zeta \varphi_1 d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{3\zeta^3} - \frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{3} + \zeta \right) \\
 &= \frac{u^3(1-u^2-v^2)^3 - 3uv^2(1-u^2-v^2)(1+u^2+v^2)^2}{3(u^2+v^2)^3}, \\
 y &= \operatorname{Re} \left(\int_1^\zeta \varphi_2 d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(i \left(\frac{1}{3\zeta^3} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3}{3} + \zeta \right) \right) \\
 &= \frac{3vu^2(1-u^2-v^2)(1+u^2+v^2)^2 - v^3(1-u^2-v^2)^3}{3(u^2+v^2)^3}, \\
 z &= \operatorname{Re} \left(\int_1^\zeta \varphi_3 d\zeta' \right) = \operatorname{Re} \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) \\
 &= \frac{u^2(1-u^2-v^2)^2 - v^2(1+u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^2}.
 \end{aligned}$$

A Superfície de Henneberg descrita pelas funções coordenadas acima é exibida na figura 4.7.

Figura 4.7: Superfície de Henneberg em duas vistas



Fonte: Produção do próprio autor

4.4 Características de Algumas Superfícies Mínimas

Nesta seção, mostraremos algumas propriedades singulares das Superfícies Mínimas já abordadas.

Definição 4.4.1 *Sejam X e Y parametrizações isotérmicas de superfícies mínimas tais que os pares formados pelas respectivas funções componentes sejam funções harmônicas conjugadas. Diz-se então que X e Y são superfícies mínimas conjugadas.*

Exemplo 4.4.2 *Vamos mostrar que o Helicóide e o Catenoide são superfícies mínimas conjugadas. Sabemos dos exemplos 3.4.3 e 3.4.5 que as parametrizações do Catenoide e*

Helicoide dadas por

$$X(u, v) = (\rho \cosh u \sin v, \rho \cosh u \cos v, -\rho u)$$

e

$$Y(u, v) = (\rho \sinh u \cos v, \rho \sinh u \sin v, \rho v),$$

respectivamente, são isotérmicas. E sabemos que são superfícies mínimas de acordo com os exemplos 4.1.3 e 4.1.4.

Agora, para serem superfícies mínimas conjugadas, os pares de cada componente respectiva devem ser harmônicas, ou seja, devem satisfazer as equações de Cauchy-Riemann. Então, denotando as primeiras componentes por $x^X(u, v) = \rho \cosh u \sin v$ e $x^Y(u, v) = \rho \sinh u \cos v$, temos que

$$\frac{\partial x^X}{\partial v} = \rho \cosh u \cos v = \frac{\partial x^Y}{\partial u}$$

e

$$-\frac{\partial x^X}{\partial u} = -\rho \sinh u \sin v = \frac{\partial x^Y}{\partial v},$$

são harmônicas conjugadas. Denotando as segundas componentes por $y^X(u, v) = \rho \cosh u \cos v$ e $y^Y(u, v) = \rho \sinh u \sin v$, logo

$$-\frac{\partial y^X}{\partial v} = \rho \cosh u \sin v = \frac{\partial y^Y}{\partial u}$$

e

$$\frac{\partial y^X}{\partial u} = \rho \sinh u \cos v = \frac{\partial y^Y}{\partial v},$$

são harmônicas conjugadas. E denotando as terceiras componentes por $z^X(u, v) = -\rho u$ e $z^Y(u, v) = \rho v$, obtemos

$$\frac{\partial z^X}{\partial v} = 0 = \frac{\partial z^Y}{\partial u}$$

e

$$-\frac{\partial z^X}{\partial u} = \rho = \frac{\partial z^Y}{\partial v},$$

que também são harmônicas conjugadas.

Logo concluímos que o Catenóide e o Helicoide são superfícies mínimas conjugadas.

Exemplo 4.4.3 Dadas duas superfícies mínimas conjugadas, X e Y , vamos mostrar que a superfície

$$Z(u, v, t) = (\cos t)X(u, v) + (\sin t)Y(u, v),$$

também é mínima para todo $t \in \mathbb{R}$.

Com efeito, suponhamos que

$$X(u, v) = (x^X(u, v), y^X(u, v), z^X(u, v))$$

e

$$Y(u, v) = (x^Y(u, v), y^Y(u, v), z^Y(u, v)),$$

sejam superfícies mínimas conjugadas, ou seja, são isotérmicas e harmônicas conjugadas, assim temos as seguintes igualdades

$$E^X = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = G^X, \quad E^Y = \langle Y_u, Y_u \rangle = \langle Y_v, Y_v \rangle = G^Y,$$

$$F^X = \langle X_u, X_v \rangle = 0 = \langle Y_u, Y_v \rangle = F^Y,$$

e

$$X_u = Y_v, \quad X_v = -Y_u.$$

Seja $Z(u, v, t) = X(u, v)(\cos t) + Y(u, v)(\sin t)$. Para que Z seja uma superfície mínima basta que seja isotérmica e harmônica. Então podemos obter que

$$Z_u = X_u(\cos t) + Y_u(\sin t)$$

e também,

$$Z_v = X_v(\cos t) + Y_v(\sin t).$$

Logo, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de Z são dados por

$$\begin{aligned} E^Z = \langle Z_u, Z_u \rangle &= \langle X_u(\cos t) + Y_u(\sin t), X_u(\cos t) + Y_u(\sin t) \rangle \\ &= \cos^2 t \langle X_u, X_u \rangle + \sin 2t \langle X_u, Y_u \rangle + \sin^2 t \langle Y_u, Y_u \rangle \\ &= E^X \cos^2 t + F^X \sin 2t + E^Y \sin^2 t \\ &= E^X \cos^2 t + E^Y \sin^2 t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^Z = \langle Z_v, Z_v \rangle &= \langle X_v(\cos t) + Y_v(\sin t), X_v(\cos t) + Y_v(\sin t) \rangle \\ &= \cos^2 t \langle X_v, X_v \rangle + \sin 2t \langle X_v, Y_v \rangle + \sin^2 t \langle Y_v, Y_v \rangle \\ &= G^X \cos^2 t + F^Y \sin 2t + G^Y \sin^2 t \\ &= G^X \cos^2 t + G^Y \sin^2 t, \\ &= E^X \cos^2 t + E^Y \sin^2 t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F^Z = \langle Z_u, Z_v \rangle &= \langle X_u(\cos t) + Y_u(\sin t), X_v(\cos t) + Y_v(\sin t) \rangle \\ &= \cos^2 t \langle X_u, X_v \rangle + \cos t \sin t \langle X_u, Y_v \rangle + \sin t \cos t \langle Y_u, X_v \rangle + \sin^2 t \langle Y_u, Y_v \rangle \\ &= F^X \cos^2 t + \cos t \sin t \langle X_u, X_u \rangle - \sin t \cos t \langle X_v, X_v \rangle + F^Y \sin^2 t \\ &= E^X \cos t \sin t - E^X \sin t \cos t \\ &= 0, \end{aligned}$$

dessa forma obtemos que os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de Z são tais que

$$E^Z = G^Z \quad e \quad F^Z = 0,$$

logo Z é isotérmica para todo $t \in \mathbb{R}$.

E como X e Y são harmônicas segue que

$$\begin{aligned} Z_{uu} + Z_{vv} &= X_{uu}(\cos t) + Y_{uu}(\sin t) + X_{vv}(\cos t) + Y_{vv}(\sin t) \\ &= \cos t (X_{uu} + X_{vv}) + \sin t (Y_{uu} + Y_{vv}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e assim Z também é harmônica para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto $Z(u, v, t)$ é uma superfície mínima.

Vamos agora mostrar que o Helicóide é uma superfície regrada, e posteriormente que ele é a única superfície mínima que é regrada, com exceção do plano. Para isso, começamos com a seguinte definição:

Definição 4.4.4 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de classe C^∞ , $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um vetor unitário de classe C^∞ , tais que $\alpha'(v)$ e $w(v)$ são*

linearmente independentes para todo $v \in I$. Então a aplicação $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ da forma

$$X(u, v) = \alpha(v) + uw(v), \quad \text{com } u \in \mathbb{R},$$

é dita superfície regrada, gerada por α e w .

Observação 4.4.5 Note que o fato de $w(v)$ ser um vetor unitário para todo $t \in I$, garante que os vetores $w(v)$ e $w'(v)$ são ortogonais. Com efeito,

$$\|w(v)\| = 1 \Rightarrow \langle w(v), w(v) \rangle = 1 \Rightarrow \langle w'(v), w(v) \rangle = 0,$$

ou seja, $w(v)$ e $w'(v)$ são ortogonais sempre que forem não nulos.

Observação 4.4.6 Como α e w são de classe C^∞ , o mesmo ocorre com a aplicação X e como α' e w são linearmente independentes temos que

$$X_u \wedge X_v = w(v) \wedge (\alpha'(v) + uw'(v)) = w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v),$$

que pode vir a se anular, e assim uma superfície regrada não é, necessariamente, uma superfície parametrizada regular.

Além disso, para cada $v = v_0 \in I$ fixado, temos que

$$X(u, v_0) = \alpha(v_0) + uw(v_0), \quad \text{com } u \in \mathbb{R},$$

descreve uma reta contida na superfície. Por isso, dizemos que uma superfície regrada é descrita por retas que deslizam suavemente ao longo da curva $\alpha(v) = X(0, v)$.

As retas $X(u, v_0)$ são chamadas de geratrizes e a curva $\alpha(v) = X(0, v)$ é dita diretriz da superfície regrada.

Exemplo 4.4.7 O cilindro circular de raio unitário é uma superfície regrada. Pois, tomando a diretriz

$$\alpha(v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0), \quad v \in (0, 2\pi)$$

e o vetor unitário

$$w(v) = (0, 0, 1),$$

obtemos a aplicação

$$X(u, v) = \alpha(v) + uw(v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, u),$$

com $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, que é o cilindro da figura 3.19.

Exemplo 4.4.8 Considere $\alpha(v) = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0)$ a parametrização pelo comprimento de arco da circunferência unitária no plano xy . Tomando o vetor unitário

$$w(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha'(v) + (0, 0, 1)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\operatorname{sen} v, \cos v, 1),$$

obtemos a superfície regrada

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \alpha(v) + \sqrt{2}uw(v) \\ &= (\cos v - u\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} v + u\cos v, u), \end{aligned}$$

com $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$. Observe que o traço de X é tal que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= (\cos v - u \operatorname{sen} v)^2 + (\operatorname{sen} v + u \cos v)^2 - u^2 \\ &= \cos^2 v - 2u \cos v \operatorname{sen} v + u^2 \operatorname{sen}^2 v + \operatorname{sen}^2 v + 2u \cos v \operatorname{sen} v + u^2 \cos^2 v - u^2 \\ &= 1 + u^2 - u^2 = 1, \end{aligned}$$

e isto mostra que o hiperboloide de uma folha, visto na figura 3.22, é uma superfície regrada.

Vamos mostrar que o Helicoide é de fato, uma superfície regrada.

Exemplo 4.4.9 Considere a hélice circular parametrizada pelo comprimento de arco dada por

$$\alpha(s) = (\rho \cos As, \rho \operatorname{sen} As, B\rho s),$$

logo seu vetor tangente é dado por

$$\alpha'(s) = (-A\rho \operatorname{sen} As, A\rho \cos As, B\rho), \quad \text{com} \quad \rho^2(A^2 + B^2) = 1,$$

e conseqüentemente o vetor normal principal à hélice α é dada por

$$n(s) = (-\cos As, -\operatorname{sen} As, 0).$$

Como sabemos que o vetor tangente e o vetor normal principal de α são sempre linearmente independentes, tomamos a superfície regrada $Y(t, s)$ da forma

$$\begin{aligned} Y(t, s) &= \alpha(s) + tn(s) \\ &= ((\rho - t) \cos As, (\rho - t) \operatorname{sen} As, B\rho s). \end{aligned}$$

Tomando agora a mudança de parâmetros dada por $h(u, v) = \left(\rho(1 - \operatorname{sen} hu), \frac{v}{A}\right)$, obtemos que

$$\begin{aligned} X(u, v) &= Y \circ h(u, v) \\ &= (\rho \operatorname{sen} hu \cos v, \rho \operatorname{sen} hu \operatorname{sen} v, \rho v), \end{aligned}$$

que é o Helicoide descrito no exemplo 3.4.3, exibido na figura 3.21, onde é possível observar que as retas que cortam o eixo Oz tem como vetor diretor o normal principal da hélice circular que descreve o Helicoide.

Veremos agora, que o Helicoide é a única superfície mínima regrada, exceto o plano, ou seja, não existe outra superfície que satisfaça essas duas propriedades ao mesmo tempo, além do plano e do Helicoide.

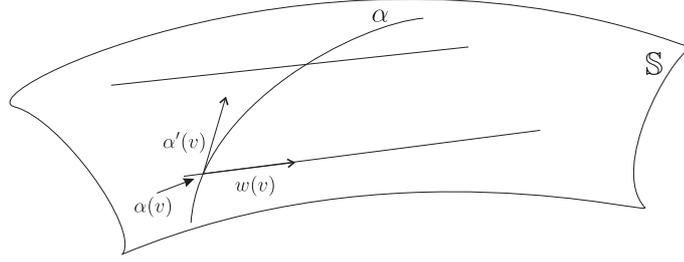
Teorema 4.4.10 Toda superfície regrada mínima é, a menos de movimentos rígidos, parte de um Helicoide ou de um plano.

Demonstração: Seja \mathbb{S} o traço de uma superfície mínima regrada e parametrizada por

$$X(u, v) = \alpha(v) + uw(v),$$

onde $\alpha(v)$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, que é perpendicular às retas de \mathbb{S} e $w(v)$ é um vetor unitário ao longo de α , que aponta na direção da reta de \mathbb{S} que passa por $\alpha(v)$ e é ortogonal a $\alpha'(v)$, conforme ilustra a figura 4.8.

Figura 4.8: Superfície Regrada



Fonte: Produção do próprio autor

Como α está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $\|\alpha'(v)\| = 1$ e os ângulos formados por $\alpha'(v)$ e $w(v)$ e por $w(v)$ e $w'(v)$ são retos. Assim

$$X_u \wedge X_v = w(v) \wedge (\alpha'(v) + uw'(v)) = w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v),$$

é tal que

$$\begin{aligned} \|X_u \wedge X_v\|^2 &= \langle w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v), w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v) \rangle \\ &= \|\alpha'(v) \wedge w(v)\|^2 + u^2 \|w'(v) \wedge w(v)\|^2 + 2u \langle \alpha'(v) \wedge w(v), w'(v) \wedge w(v) \rangle \\ &= \|\alpha'(v)\|^2 \|w(v)\|^2 \text{sen}^2 \frac{\pi}{2} + u^2 \|w'(v)\|^2 \|w(v)\|^2 \text{sen}^2 \frac{\pi}{2} \\ &\quad + 2u \langle \alpha'(v) \wedge w(v), w'(v) \wedge w(v) \rangle \\ &= 1 + u^2 \|w'(v)\|^2 + 2u \langle \alpha'(v) \wedge w(v), w'(v) \wedge w(v) \rangle. \end{aligned}$$

Usando a notação

$$l = \|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{1 + u^2 \|w'(v)\|^2 + 2u \langle \alpha'(v) \wedge w(v), w'(v) \wedge w(v) \rangle},$$

temos que a Aplicação Normal de Gauss de \mathbb{S} é dada por

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{1}{l} (w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v)).$$

Assim os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais de X , respec-

tivamente, são

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle w(v), w(v) \rangle = \|w(v)\|^2 = 1; \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle w(v), \alpha'(v) + uw'(v) \rangle = \langle w(v), \alpha'(v) \rangle + u\langle w(v), w'(v) \rangle = 0; \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle \alpha'(v) + uw'(v), \alpha'(v) + uw'(v) \rangle \\
&= \|\alpha'(v)\|^2 + 2u\langle \alpha'(v), w'(v) \rangle + u^2\|w'(v)\|^2 \\
&= 1 + 2u\langle \alpha'(v), w'(v) \rangle + u^2\|w'(v)\|^2; \\
e &= \langle X_{uu}, N \rangle = 0; \\
f &= \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{1}{l}\langle w'(v), w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v) \rangle; \\
g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{1}{l}\langle \alpha''(v) + uw''(v), w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v) \rangle;
\end{aligned}$$

Como a superfície é mínima, sua curvatura média, dada pela proposição 3.6.9 por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2Ff + Eg}{EG - F^2} \right),$$

deve ser identicamente nula. Portanto devemos ter

$$g = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \alpha''(v) + uw''(v), w(v) \wedge \alpha'(v) + uw(v) \wedge w'(v) \rangle \\
&= \langle \alpha''(v), w(v) \wedge \alpha'(v) \rangle + u(\langle w''(v), w(v) \wedge \alpha'(v) \rangle + \langle \alpha''(v), w(v) \wedge w'(v) \rangle) \\
&+ u^2\langle w''(v), w(v) \wedge w'(v) \rangle.
\end{aligned}$$

Como no lado direito da igualdade acima temos um polinômio, que deve ser identicamente nulo, temos que seus coeficientes são todos nulos, ou seja

$$0 = \langle \alpha''(v), w(v) \wedge \alpha'(v) \rangle; \quad (4.4.2)$$

$$0 = \langle w''(v), w(v) \wedge \alpha'(v) \rangle + \langle \alpha''(v), w(v) \wedge w'(v) \rangle; \quad (4.4.3)$$

$$0 = \langle w''(v), w(v) \wedge w'(v) \rangle. \quad (4.4.4)$$

A equação 4.4.2 indica que $\alpha''(v)$ pertence ao plano gerado por $\alpha'(v)$ e $w(v)$. Mas como a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco, sabemos que $\alpha''(v)$ é ortogonal a $\alpha'(v)$, e portanto $\alpha''(v)$ deve ser paralelo a $w(v)$, ou seja,

$$\alpha''(v) = aw(v),$$

e então

$$\langle \alpha''(v), w(v) \wedge w'(v) \rangle = \langle aw(v), w(v) \wedge w'(v) \rangle = 0,$$

dessa forma a equação 4.4.3 se reduz para

$$\langle w''(v), \alpha'(v) \wedge w(v) \rangle = 0, \quad (4.4.5)$$

onde indica que $w''(v)$ pertence ao plano π_1 gerado por $\alpha'(v)$ e $w(v)$. Da mesma forma, a equação 4.4.4 informa que $w''(v)$ também pertence ao plano π_2 gerado por $w'(v)$ e $w(v)$.

Como os planos π_1 e π_2 possuem em sua interseção pelo menos o subespaço gerado por $w(v)$, podem ocorrer duas situações, que são:

Caso 1: Se existir um ponto onde $w''(v)$ não é paralelo a $w(v)$, então, numa vizinhança desse ponto os planos π_1 e π_2 devem coincidir e assim $\alpha'(v)$ e $w'(v)$ devem ser paralelos e escrevemos

$$\alpha'(v) = bw'(v).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} (w(v) \wedge \alpha'(v))' &= w(v) \wedge \alpha''(v) + w'(v) \wedge \alpha'(v) \\ &= a(w(v) \wedge w(v)) + b(w'(v) \wedge w'(v)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e o plano gerado por $\alpha'(v)$ e $w(v)$ é constante (já que seu normal não varia) e vemos que $\alpha(v)$ é uma curva plana e sempre coplanar com $w(v)$. Portanto a superfície descrita por X é um plano.

Caso 2: Se $w''(v)$ for sempre paralelo a $w(v)$, e $\alpha'(v)$ não é paralelo a $w'(v)$ em um ponto específico, então o mesmo ocorre em uma vizinhança desse ponto. Nessa situação temos que o quadrado da curvatura $k(v)$ da curva α é dada por

$$[k(v)]^2 = \|\alpha''(v)\|^2 = \langle \alpha''(v), \alpha''(v) \rangle = \langle aw(v), \alpha''(v) \rangle.$$

Mas como $\alpha'(v)$ e $w(v)$ são ortogonais, temos que para todo $v \in \mathbb{R}$,

$$\langle \alpha'(v), aw(v) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha''(v), aw(v) \rangle + \langle \alpha'(v), aw'(v) \rangle = 0,$$

logo

$$\langle \alpha''(v), aw(v) \rangle = -\langle \alpha'(v), aw'(v) \rangle,$$

então a derivada de $[k(v)]^2$ é tal que

$$\begin{aligned} 2k(v)k'(v) &= ([k(v)]^2)' \\ &= (a\langle \alpha''(v), w(v) \rangle)' = (-a\langle \alpha'(v), w'(v) \rangle)' \\ &= -a\langle \alpha''(v), w'(v) \rangle - a\langle \alpha'(v), w''(v) \rangle \\ &= -a^2\langle w(v), w'(v) \rangle - a\langle \alpha'(v), cw(v) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então $k(v) = 0$ ou $k'(v) = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}$. Se $k(v) = 0$ temos que a curva é uma reta, ou seja, a superfície é um plano, novamente como o Caso 1. Então, supondo que $k'(v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$, provamos que a curvatura da curva diretriz de X é constante. Além disso, $w(v)$ pode ser visto como vetor normal principal à curva α . Temos ainda que o vetor binormal à curva é dado por $\alpha'(v) \wedge w(v)$. Logo, a torção de α é dada por

$$\begin{aligned} \tau(v) &= \pm \langle (\alpha'(v) \wedge w(v))', w(v) \rangle \\ &= \pm \langle (\alpha''(v) \wedge w(v) + \alpha'(v) \wedge w'(v)), w(v) \rangle \\ &= \pm \langle (aw(v) \wedge w(v) + \alpha'(v) \wedge w'(v)), w(v) \rangle \\ &= \pm \langle \alpha'(v) \wedge w'(v), w(v) \rangle, \end{aligned}$$

e derivando a torção, obtemos que

$$\begin{aligned}
\tau'(v) &= \pm(\langle \alpha'(v) \wedge w'(v), w(v) \rangle)' \\
&= \pm(\langle \alpha''(v) \wedge w'(v) + \alpha'(v) \wedge w''(v), w(v) \rangle + \langle \alpha'(v) \wedge w'(v), w'(v) \rangle) \\
&= \pm(\langle \alpha''(v) \wedge w'(v), w(v) \rangle + \langle \alpha'(v) \wedge w''(v), w(v) \rangle + \langle \alpha'(v) \wedge w'(v), w'(v) \rangle) \\
&= \pm(\langle aw(v) \wedge w'(v), w(v) \rangle + \langle \alpha'(v) \wedge cw(v), w(v) \rangle) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a torção de α é constante.

Portanto, a torção e a curvatura de α são ambas constantes, o que permite concluir pelo teorema 2.3.2 que α é uma hélice, e prosseguindo como no exemplo 4.4.9 obtemos, a menos de movimentos rígidos, a expressão para o Helicóide como desejado.

Concluimos com isso, que o Helicóide é a única superfície mínima regrada, com exceção do plano e a menos de movimentos rígidos. ■

Vejam agora, que o Catenóide é a única superfície de revolução que é mínima, além do plano. Este fato está descrito no próximo teorema.

Teorema 4.4.11 *Toda superfície mínima de revolução é, a menos de movimentos rígidos, parte de um Catenóide ou de um plano.*

Demonstração: *Seja X uma superfície parametrizada regular de revolução estudada na proposição 3.1.8. Podemos supor, sem perda de generalidade, que X é gerada pela rotação da curva*

$$\alpha(u) = (x(u), 0, z(u)), \quad \text{com } u \in \mathbb{R},$$

em torno do eixo Oz (caso o eixo de revolução seja outro, pode-se utilizar um movimento rígido).

Se $z(u)$ for uma função constante, então a curva α descreve uma reta paralela ao eixo Ox , que quando revolucionado em torno do eixo Oz dá origem a um plano.

Caso contrário, ou seja, se $z(u)$ não for uma função constante, existirá um ponto $u_0 \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$z(u) \neq 0, \quad \text{em uma vizinhança } \mathbb{U} \text{ de } u_0.$$

Dessa forma, o Teorema da Função Inversa (teorema 2.2.4) garante que podemos obter, nessa vizinhança,

$$u(z) = z^{-1}(u).$$

Com isso, podemos reescrever a curva α como

$$\alpha(u) = (x(u(z)), 0, z(u(z))),$$

ou simplesmente

$$\alpha(z) = (x(z), 0, z),$$

logo, a superfície mínima de revolução é parametrizada por

$$X(z, v) = (x(z) \cos v, x(z) \operatorname{sen} v, z), \quad \text{com } z \in \mathbb{U}, v \in (0, 2\pi),$$

e então, das proposições 3.4.4 e 3.5.7 temos que

$$\begin{aligned} E &= [x'(z)]^2 + 1; \\ F &= 0; \\ G &= [x(z)]^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e &= \frac{-x''(z)}{\sqrt{[x'(z)]^2 + 1}}; \\ f &= 0; \\ g &= \frac{x(z)}{\sqrt{[x'(z)]^2 + 1}}, \end{aligned}$$

que são os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais, respectivamente, de X . Portanto, pela proposição 3.6.9, a curvatura média é dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{eG - 2Ff + Eg}{EG - F^2} \right),$$

que deve ser identicamente nula pois X é mínima por hipótese. Logo, obtemos a seguinte equação diferencial

$$[x'(z)]^2 + 1 - x(z)x''(z) = 0.$$

Para resolvermos essa equação diferencial, fazemos a seguinte mudança de variáveis

$$p(x(z)) = x'(z) = \frac{dx}{dz},$$

e como

$$x''(z) = \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dz} = \frac{dp}{dx} p,$$

substituindo na equação diferencial obtida, obtemos

$$-x \frac{dp}{dx} p + p^2 + 1 = 0.$$

Pelo método de separação de variáveis, temos

$$xp \frac{dx}{dx} = p^2 + 1 \Rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} dp = \frac{dx}{x},$$

integrando em ambos os lados

$$\int \frac{p}{p^2 + 1} dp = \int \frac{dx}{x},$$

encontramos que

$$\ln \sqrt{p^2 + 1} + c = \ln x,$$

onde c é uma constante arbitrária, e então

$$x(z) = ae^{\ln \sqrt{p^2 + 1}},$$

onde $a = e^c$, ou

$$x(z) = a\sqrt{p^2 + 1}.$$

Isolando p temos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = p^2 + 1 \Rightarrow p(x) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}.$$

Logo, como $p(x(z)) = x'(z)$, então

$$x'(z) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1},$$

e novamente por separação de variáveis obtemos que

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = dz,$$

e integrando novamente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \int dz,$$

e assim obtemos

$$a \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b = z,$$

onde b é uma constante arbitrária, logo temos que

$$x(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a} + b\right),$$

chamando $z = a(w - b)$, obtemos que a função $f(w)$ a ser revolucionada é dada por

$$x(w) = a \cosh w,$$

que é a catenária descrita no exemplo 3.1.11, e assim quando a curva $\alpha(w)$ for revolucionada em torno do eixo Oz , gera o Catenoide.

Portanto, concluímos que o Catenoide visto nos exemplos 3.1.11, 3.4.5 e 3.5.8 é, a menos de simetrias e translações, a única superfície mínima de revolução, que não seja o plano. ■

Estudemos neste momento, algumas particularidades da Superfície de Enneper, vista na figura 4.6.

Exemplo 4.4.12 Considere a Superfície de Enneper do exemplo 4.2.8, dada por

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Perceba que a mudança de parâmetros $h(w, t) = (-t, w)$ na superfície de Enneper faz a troca de (x, y, z) por $(-y, x, -z)$ De fato,

$$Y(w, t) = X \circ h(w, t) = \left(-t + \frac{t^3}{3} - tw^2, w - \frac{w^3}{3} + wt^2, t^2 - w^2\right), \quad (w, t) \in \mathbb{R}^2,$$

ou seja, a superfície de Enneper é invariante por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno de Oz seguida de uma reflexão em torno do plano xy . Em particular, se a mudança de parâmetros

fosse tal que $h(w, t) = (w, -t)$, obteríamos a troca de (x, y, z) por $(x, -y, z)$, que é a Superfície de Enneper descrita à partir da Representação de Weierstrass do exemplo 4.3.8.

Outra característica desta superfície é que ela possui auto-interseções, fato perceptível ao se ver a figura 4.6. Com efeito, começamos escolhendo a mudança de parâmetros $h(\rho, \theta)$ dada por

$$h(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta), \quad \text{com } \rho > 0,$$

obtemos

$$Y(\rho, \theta) = X \circ h(\rho, \theta) = \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta, \rho \operatorname{sen} \theta + \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} 3\theta, \rho^2 \cos 2\theta \right),$$

pois na primeira coordenada de $Y(\rho, \theta)$ temos que,

$$\begin{aligned} \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos^3 \theta + \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta &= \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} (\cos^3 \theta - 3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta) \\ &= \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} ((\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta (2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta)) \\ &= \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} (\cos 2\theta \cos \theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta) \\ &= \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} (\cos(2\theta + \theta)) \\ &= \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} (\cos 3\theta), \end{aligned}$$

na segunda coordenada temos

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{sen} \theta - \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}^3 \theta + \rho^3 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta &= \rho \operatorname{sen} \theta + \frac{\rho^3}{3} (3 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^3 \theta) \\ &= \rho \operatorname{sen} \theta + \frac{\rho^3}{3} ((2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta) + \operatorname{sen} \theta (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)) \\ &= \rho \operatorname{sen} \theta + \frac{\rho^3}{3} (\operatorname{sen} 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta) \\ &= \rho \operatorname{sen} \theta + \frac{\rho^3}{3} (\operatorname{sen} 3\theta), \end{aligned}$$

e na terceira coordenada temos ainda que

$$u^2 - v^2 = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos 2\theta.$$

Da primeira e segunda coordenada de $Y(\rho, \theta)$ tiramos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} [x(\rho, \theta)]^2 + [y(\rho, \theta)]^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta - \frac{2\rho^4}{3} \cos \theta \cos 3\theta + \frac{\rho^6}{9} \cos^2 3\theta \\ &+ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2\rho^4}{3} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 3\theta + \frac{\rho^6}{9} \operatorname{sen}^2 3\theta \\ &= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \frac{2\rho^4}{3} \cos 4\theta, \end{aligned}$$

e ainda, como

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \Rightarrow \cos 2t = 2 \cos^2 t - 1,$$

tomando $t = 2\theta$ obtemos

$$\cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1,$$

dessa forma conseguimos que

$$\begin{aligned} [x(\rho, \theta)]^2 + [y(\rho, \theta)]^2 &= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \frac{2\rho^4}{3} \cos 4\theta \\ &= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \frac{2\rho^4}{3} (2 \cos^2 2\theta - 1) \\ &= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} + \frac{2\rho^4}{3} - \frac{4\rho^4}{3} \cos^2 2\theta \\ &= \left(\rho + \frac{\rho^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho^2 \cos 2\theta)^2. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Finalmente supondo que a superfície admite auto-interseções, com digamos $Y(\rho_1, \theta_1) = Y(\rho_2, \theta_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\rho_1 \cos \theta_1 - \frac{\rho_1^3}{3} \cos 3\theta_1, \rho_1 \sin \theta_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \sin 3\theta_1, \rho_1^2 \cos 2\theta_1 \right) = \\ \left(\rho_2 \cos \theta_2 - \frac{\rho_2^3}{3} \cos 3\theta_2, \rho_2 \sin \theta_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \sin 3\theta_2, \rho_2^2 \cos 2\theta_2 \right), \end{aligned}$$

e então obtemos as seguintes equações

$$\rho_1^2 \cos 2\theta_1 = \rho_2^2 \cos 2\theta_2 \quad (4.4.7)$$

$$\rho_1 \sin \theta_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \sin 3\theta_1 = \rho_2 \sin \theta_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \sin 3\theta_2 \quad (4.4.8)$$

$$\rho_1 \cos \theta_1 - \frac{\rho_1^3}{3} \cos 3\theta_1 = \rho_2 \cos \theta_2 - \frac{\rho_2^3}{3} \cos 3\theta_2 \quad (4.4.9)$$

e usando 4.4.7 em 4.4.6 obtemos

$$\left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \right)^2 = \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \right)^2.$$

E então como $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, temos

$$\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3},$$

ou seja

$$(\rho_1 - \rho_2) = \frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2)}{3},$$

logo

$$(\rho_2 - \rho_1)(3 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2) = 0,$$

assim $\rho_1 = \rho_2$ ou $(\rho_2^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2) = -3$, mas como $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, então $\rho_1 = \rho_2$, e

substituindo em 4.4.8 chegamos que

$$\cos 2\theta_1 = \cos 2\theta_2.$$

Se tivermos $\rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$, da equação 4.4.8 obtemos que

$$\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \operatorname{sen}3\theta_1 = \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \operatorname{sen}3\theta_2,$$

que nada mais é que

$$-\rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 - \frac{\rho_2^3}{3} \operatorname{sen}3\theta_2 = \rho_2 \operatorname{sen}\theta_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \operatorname{sen}3\theta_2,$$

ou seja,

$$-y(\rho_2, \theta_2) = y(\rho_2, \theta_2),$$

então

$$\rho \operatorname{sen}\theta - \frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen}3\theta = y(\rho, \theta) = 0.$$

É claro que para cada ponto (ρ, θ) que pertence a igualdade acima, o ponto $(\rho, 2\pi - \theta)$ também pertence a ela, e ainda temos também que

$$x(\rho, \theta) = x(\rho, 2\pi - \theta) \quad e \quad z(\rho, \theta) = z(\rho, 2\pi - \theta),$$

pois

$$x(\rho, 2\pi - \theta) = \rho \cos(2\pi - \theta) - \frac{\rho^3}{3} \cos 3(2\pi - \theta) = \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta = x(\rho, \theta),$$

e

$$z(\rho, 2\pi - \theta) = \rho^2 \cos 2(2\pi - \theta) = \rho^2 \cos 2\theta = z(\rho, \theta).$$

Concluindo assim, que a interseção da superfície de Enneper com o plano $y = 0$, é uma curva de auto-interseção da superfície. Analogamente, pode-se verificar que a interseção da superfície com o plano $x = 0$, também é uma curva de auto-interseção onde, da equação 4.4.7, teremos o caso em que $\rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 = \pi - \theta_2$. E estas auto-interseções são as únicas da superfície de Enneper, que são observadas na figura 4.6.

4.5 Introdução ao Problema de Plateau

Vamos agora introduzir conceitos básicos do problema de Plateau, que se resume em provar que para cada curva fechada contida no \mathbb{R}^3 (ou no \mathbb{R}^n) existe uma superfície de área mínima tendo esta curva como fronteira. Este problema foi criado devido a inúmeras experiências de Plateau envolvendo películas de sabão sob a ação da tensão superficial.

Como uma das conclusões desses experimentos, Plateau mostrou a existência de superfícies que minimizam área para um contorno dado. De fato, a prova de Plateau simplesmente era em tomar o contorno, mergulhar em uma mistura de água e sabão e, então, a superfície desejada é a representada pela película de sabão que aparecer.

A explicação física para esta superfície assim obtida forma a solução proposta por

Douglas e Radó e posteriormente modificada por Courant. Essa solução implica que as partículas de sabão da película irão se dispor sobre a superfície de modo a minimizar a energia.

O resultado de Douglas é descrito da seguinte forma, conforme [4] e [7]: Entre todas as aplicações diferenciáveis $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ do disco aberto $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ em \mathbb{R}^3 que se estendem à fronteira $\partial\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, levando $\partial\mathbb{D}$ homomorficamente à uma curva fechada simples $\alpha(s)$ contida em \mathbb{R}^3 , existe uma que tem área menor ou igual à área de todas as outras.

Definição 4.5.1 *Sejam $f : \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação diferenciável da forma $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, que pode ser considerada como uma superfície parametrizada regular e E, F, G os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de f , definimos a energia $U(f)$ da aplicação f por*

$$U(f) = \iint_{\mathbb{D}} (E + G) dudv.$$

Note que a energia definida acima depende essencialmente da aplicação, ou seja $U(f)$ varia de acordo com a aplicação f dada, mesmo que o conjunto $f(\overline{\mathbb{D}})$ seja o mesmo. De fato, procedendo de maneira análoga à proposição 3.2.2, obtemos com a mudança de parâmetros $Y(w, t) = f \circ h(w, t)$ as seguintes igualdades

$$Y_w = f_u \frac{\partial u}{\partial w} + f_v \frac{\partial v}{\partial w} \quad \text{e} \quad Y_t = f_u \frac{\partial u}{\partial t} + f_v \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Logo, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de $Y(w, t) = f \circ h(w, t)$, são dados por

$$\begin{aligned} E^f &= E \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + 2F \left(\frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial w} \right) + G \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2, \\ G^f &= E \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2F \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + E \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2, \end{aligned}$$

onde E, F e G são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de f . E assim se verifica que as energias $U(f)$ e $U(Y)$ não são necessariamente iguais em pontos correspondentes de $\overline{\mathbb{D}}$.

Agora, se considerarmos f como uma superfície parametrizada regular, sabemos que a área $A(f)$, depende apenas do conjunto $\overline{\mathbb{D}}$, fato visto logo após a definição 3.4.11.

Teorema 4.5.2 *Seja $f : \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação diferenciável da forma $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, se $A(f)$ e $U(f)$ são a área e a energia, respectivamente, da aplicação f em $\overline{\mathbb{D}}$, então*

$$A(f) \leq \frac{1}{2}U(f).$$

E a igualdade é válida se e somente se a parametrização for isotérmica.

Demonstração: *Considere $A(f)$ dada por*

$$A(f) = \iint_{\overline{\mathbb{D}}} \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

e $U(f)$ dada na definição 4.5.1 por

$$U(f) = \iint_{\mathbb{D}} (E + G) dudv.$$

Para provarmos a desigualdade basta considerarmos as funções a serem integradas. Assim, da desigualdade entre a média geométrica e a média aritmética, temos que

$$\sqrt{EG - F^2} \leq \sqrt{EG} \leq \frac{E + G}{2},$$

logo

$$A(f) = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{EG - F^2} dudv \leq \iint_{\mathbb{D}} (E + G) dudv = \frac{1}{2}U(f).$$

Além disso, a igualdade é válida se e somente se

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{E + G}{2},$$

ou seja, se e somente se

$$4(EG - F^2) = E^2 + 2EG + G^2,$$

ou ainda

$$E^2 - 2EG + G^2 + 4F^2 = 0,$$

isto é

$$(E - G)^2 + (2F)^2 = 0,$$

que ocorre se e somente se

$$E = G \quad e \quad F = 0,$$

ou seja, se e somente se a parametrização é isotérmica. ■

Do teorema acima, podemos concluir que quando minimizamos a energia, minimizamos também a área. Em termos práticos, se procurarmos minimizar a energia da película de sabão, estaremos diminuindo a área da mesma. Este método, devido a Douglas e Radó e aperfeiçoado por Courant ao longo do tempo, se estende para resolver o problema de Plateau para o disco, como descrito anteriormente.

CONCLUSÃO

Este trabalho visou explorar de forma introdutória o interessante tema de Superfícies Mínimas. Para que isso fosse possível, deu-se a necessidade de adentrarmos em conceitos de uma disciplina, a Geometria Diferencial, que não se faz presente no currículo do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC (Universidade do Estado de Santa Catarina). Frente a este desafio, iniciamos o trabalho com o estudo local das superfícies, abordando tanto a teoria que se mostrou crucial quanto exemplos variados e propostos didaticamente, para uma melhor compreensão deste texto e de leituras similares por parte dos demais acadêmicos e docentes.

Sistematicamente, estudamos as definições de superfície parametrizada regular, mudança de parâmetros, aplicação normal de Gauss e sua diferencial, Primeira e Segunda Formas Fundamentais, para termos assim o embasamento teórico necessário à inserção dos conceitos de curvatura média e curvatura de Gauss. Neste estágio, obtemos uma definição para as Superfície Mínimas como uma superfície que possui curvatura média nula. Com isso, podemos constatar que algumas superfícies estudadas anteriormente são superfícies mínimas, como o plano, Catenoide e o Helicoide.

Porém, para conseguirmos mostrar que a curvatura média de uma superfície é identicamente nula fomos, *a priori*, obrigados a acharmos os autovalores da diferencial da aplicação normal de Gauss, uma tarefa nem um pouco simples. Pode-se também obtê-los por otimização da função curvatura normal da superfície em questão, e em tal meio alternativo, a dificuldade manual é equivalente a procurar os autovalores da diferencial da aplicação normal de Gauss. Tal desafio foi amenizado com a continuidade dos estudos em Geometria Diferencial, onde conseguimos obter a curvatura média e também a curvatura de Gauss em função dos coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais. Ainda, concluímos que o anulamento da curvatura média, pode ser vista também como a resolução de uma equação diferencial, cuja resolução se mostra de forma complicada.

Possuindo novas expressões para as curvatura média e curvatura de Gauss, podemos estudar algumas propriedades gerais de uma Superfície Mínima, como por exemplo, afirmar que não existe nenhuma Superfície Mínima que seja fechada. Retomando a questão de verificar que determinadas superfícies são Superfícies Mínimas, vimos na prática o demasiado trabalho de obter os coeficientes das Primeira e Segunda Formas Fundamentais. Então verificamos que procurar uma superfície que minimiza a área coberta por uma curva fechada é o mesmo que dizer que a curvatura média se anula em toda a superfície, onde tal objetivo é historicamente conhecido como sendo a primeira definição concebida às Superfícies Mínimas.

Desta equivalência, podemos mostrar breves reflexões sobre as películas de sabão e as superfícies com curvatura média nula, cuja relação podemos indicar como sendo um tema para trabalhos futuros envolvendo este assunto, que pode inclusive ter um foco experimental, estabelecendo desta forma uma forte correlação sobre as Superfícies Mínimas e as películas de sabão. Outra possibilidade seria retomar as teorias aqui ilustradas com

uma visão exclusivamente da Física, e desvendar conceitos como por exemplo, a energia, tensão superficial e a estabilidade das películas de sabão.

Com a teoria de Superfícies Mínimas mais ampla e fortificada, mostramos, com o auxílio da definição de uma superfície isotérmica, que uma superfície será considerada mínima quando sua parametrização for harmônica, ou seja, se a superfície isotérmica satisfizer as equações de Cauchy-Riemann. Neste estágio enfatizamos que a tarefa de obter exemplos de Superfícies Mínimas foi simplificada, não drasticamente, mas com vantagens consideráveis. Para completar a busca no decorrer da história por mais exemplos de Superfície Mínimas, vimos que todas as equivalências provadas anteriormente se resumem em definir e integrar funções complexas com suas devidas especificações e relações conjuntas.

Com base nessas reflexões, concluímos que o assunto de Superfícies Mínimas, é hoje um tópico da matemática extremamente amplo, entretanto com a elegância e ousadia de conter em seu contexto conceitos de diferentes áreas de estudo como Equações Diferenciais, Cálculo de Variações, Geometria Diferencial, Análise Complexa, Topologia e na certeza de que no aprofundamento sobre a teoria de Superfícies Mínimas e películas de sabão, aparecerá muitas outras áreas que descrevem tais assuntos com suas devidas abordagens, desafios e finalidades. Sempre com um objetivo estando bem claro, o de descobrir novos exemplos, no qual se fez necessário a especificação de caminhos entre todas essas áreas já citadas.

Por fim, conseguimos citar características de algumas Superfície Mínimas que foram devidamente demonstradas no decorrer deste trabalho. Verificamos que o Catenóide e o Helicóide são, respectivamente, as únicas Superfícies Mínimas que são de revolução e regrada, exceto o exemplo trivial do plano, que intuitivamente sempre se mostrou de forma a satisfazer as equivalências provadas à uma primeira procura de exemplos. Vimos também que a Superfície de Enneper possui auto-interseções, e devido a isso, ela não pode ser considerada uma Superfície Mínima Mergulhada, definição que pode ser aprofundada em novos trabalhos.

Características gerais das Superfícies Mínimas são intrigantes e belas, consoante com propriedades únicas isoladas das Superfícies Mínimas, formam uma nova opção de trabalho, pois ainda neste trabalho se manteve em aberto a particularidade de que a Superfície de Henneberg é não orientável. Além da abordagem experimental da relação entre Superfícies Mínimas e películas de sabão, anteriormente citada, um prosseguimento adequado a um trabalho teórico de Superfícies Mínimas se dará ao envolver o tratamento de Superfície Mínimas Completas com Curvatura Total Finita Mergulhadas, com a união das definições, separadas, ou um trabalho que envolva exclusivamente uma única definição ou algumas delas.

REFERÊNCIAS

- [1] ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**, Coleção Matemática Universitária. 2ª Ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques; COLARES, Antonio Gervasio. **Exemplos de Superfícies Mínimas no \mathbb{R}^3** . São Paulo, IME-USP, 1984.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro, Coleção Textos Universitários. 4ª Ed. Rio de Janeiro, SBM, 2010.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Superfícies Mínimas**. 2ª Ed. Rio de Janeiro, Publicações Matemáticas. IMPA, 2004.
- [5] CHURCHILL, Ruel Vance. **Variáveis Complexas e suas Aplicações** tradução: Tadao Yoshioka. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1981;
- [6] DIEKERS, Ulrich; HILDEBRANT Stefan; KÜSTER, Albrecht; WOHLRAB, Ortwin. **Minimal Surfaces I: Boundary Value Problems**. Berlin, Springer-Verlag, 1992.
- [7] DOUGLAS, Jesse. **Solution to the problem of Plateau**. Trans. Amer. Math. Soc., **33**, 263-321, 1931.
- [8] EVES, Howard Whitley. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, Editora da Unicamp, 2004.
- [9] GRAY, Alfred. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. 2ª Ed. Boca Raton, CRC Press, 1997.
- [10] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária. 8ª Ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

- [11] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise Vol. 1** Projeto Euclides. 12ª Ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2010.
- [12] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise Vol. 2** Projeto Euclides. 11ª Ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.
- [13] SPIEGEL, Murray Ralph. **Variáveis Complexas** com uma introdução as transformações conformes e suas aplicações. Tradução José R. B. Coelho. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1972;
- [14] STEWART, James. **Cálculo: Volume 2.** 6ª Ed. São Paulo, Cengage Learning, 2009.
- [15] TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial.** 2ª Ed. São Paulo, Editora Blucher, 2008.
- [16] VIANA, Esdriane Cabral. **Superfícies Regradas Mínimas no Espaço Euclidiano e no Espaço de Minkowski.** Bahia: UFBA, 2005. 64 p. Dissertação (Mestrado) Curso de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Bahia, 2005.