UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

TRANSFORMAÇÕES DE GIVENS E HOUSEHOLDER: ASPECTOS TEÓRICOS, NUMÉRICOS E DIDÁTICOS

JOINVILLE - SC
2012

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

TRANSFORMAÇÕES DE GIVENS E HOUSEHOLDER: ASPECTOS TEÓRICOS, NUMÉRICOS E DIDÁTICOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério de Aguiar

JOINVILLE - SC
2012

P944t

Préve, Cíntia Teixeira

Transformações de Givens e Householder: Aspectos teóricos, didáticos e numéricos / Cíntia Teixeira Préve. - 2012.

118 p.: il

Bibliografia: f. 114-115

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática. Joinville, 2012.

Orientador: Rogério de Aguiar

1. Transformações lineares. 2. Transformações de Givens e Householder. 3. Rotação e reflexão. 4. Ensino de álgebra linear. 5. Recursos didáticos. I. Aguiar, Rogério de. II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Curso de Licenciatura em Matemática. III. Transformações de Givens e Householder: Aspectos teóricos, didáticos e numéricos.

CDD: 512.5

P944t
CDD 512.5

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

TRANFORMAÇÕES DE GIVENS E HOUSEHOLDER: ASPECTOS TEÓRICOS, NUMÉRICOS E DIDÁTICOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador:
Prof. Dr. Rogério de Aguiar
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:
Prof.ª Dr.ª Ivanete Zuchi Siple
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:
Prof. Me. Learcino dos Santos Luiz
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 25 de junho de 2012.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus que esta sempre comigo, guiando-me em todos os momentos. A minha família, pilares fundamentais da minha educação, especialmente meu pai Seu Vanderlei, minha mãe Dona Nilsa e meu irmão Deison. Dedico também aos meus colegas de turma e aos colegas do CCT. Ainda aos amigos que passaram em minha vida durante estes anos. Aos meus ilustres professores, responsáveis por uma grande e importante parcela da minha formação acadêmica. A todos vocês, muito obrigada. Sem esse time eu não estaria aqui e não teria evoluído tanto quanto um dia eu poderia imaginar. Valeu galera!

AGRADECIMENTOS

Não é fácil agradecer a todos que de alguma maneira fizeram-se ou fazem parte da minha vida, por isso primeiramente deixo a todos meus sinceros agradecimentos.

Obrigada ao meu orientador e professor Dr. Rogério de Aguiar, que auxiliou-me e orientou-me ao longo deste trabalho e aos professores: Ivanete Zuchi Siple e Learcino dos Santos Luiz por terem aceitado o convite de compor minha banca. E também a professora Graciela Moro por ter participado e disponibilizado suas aulas de Álgebra Linear para o desenvolvimento desse trabalho. Assim sendo, não poderia deixar de reverenciar a satisfação em ter sido aluna da equipe de professores do CCT, aos quais têm minha admiração e respeito (Ivanete Zuchi, Graciela Moro, Marnei Mandler, Eliane Bihuna, Ângela Dal Piva, Tatiana Comiotto, José Rafael Furlanetto, Elisandra Figueiredo, Regina Munhoz, Paulo Rech, Jorge Cardoso, entre outros, seletos).

Aos meus colegas de curso Maiara Bollauf, Deison Préve (colega e irmão) e Débora Kieckhoefel, que estiveram em algum momento destes últimos anos presentes nessa jornada de estudante. Em especial gostaria de salientar a companhia da Maisa Damazio Franco, que desde o primeiro dia de aula esteve junto comigo, vivendo os mesmos momentos de angústia e serenidade da universidade. Aos colegas Dimítrius Dimopoulos, Aruana do Amaral, José Gregório do Rozário e Ciro Manarin, os meus cumprimentos por confortarem-me com palavras de carinho e motivação e por atuarem como verdadeiros amigos em todas as horas. E aos demais colegas do CCT, obrigada galera, vocês fazem parte da minha história na UDESC.

Aos colegas e vizinhos Rafael Dutra Nunes, João Matheus Hugen, Johnny Lopes e Luis Ceron por serem os melhores vizinhos do mundo no meu período acadêmico. E é claro, que mesmo distantes eu não poderia deixar de citar os que com palavras positivas ou momentos inesquecíveis, fizeram-me acreditar que com perseverança e vontade sempre conseguimos o que almejamos, Maurício Camaroto, Camila Santos, Thayse Martins, João Felipe Vicente e Leandro Batista, vocês são sensacionais, obrigada!

Para fechar com chave de ouro minha gratidão, são eles, meus queridos pais, o casal mais forte, batalhador, persistente, cúmplice e fiel aos seus filhos e sua casa, que eu agradeço pela vida, pelo esforço de vocês em minha criação, pela participação ativa nas atividades da minha faculdade, pela minha educação, por me aturarem e por sempre acreditarem em mim. Eu não chegaria até aqui e não seria o que sou hoje, se não fossem vocês. A toda a minha grande família, obrigada, eu amo a todos!

A educação é um processo social, é desenvolvimento. Não é a preparação para a vida, é a própria vida.

John Dewey

RESUMO

PRÉVE, Cíntia Teixeira. **Transformações de Givens e Householder: Aspectos teóricos, didáticos e numéricos**. 2012. 128 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

Atualmente nas universidades a disciplina de álgebra linear aliada à geometria analítica e o cálculo apresentam grande importância no ensino das ciências exatas e talvez seja uma das mais importantes dentro da Matemática e uma das primeiras matérias abstratas com qual os alunos têm contato. Num curso de graduação não há oportunidade para um aprofundamento teórico nos tópicos da disciplina de álgebra linear, neste sentido apresentaremos neste trabalho um aprofundamento no tópico de transformações lineares, mas especificamente nas transformações lineares de rotação e reflexão em seus aspectos: teóricos, por meio da descrição das transformações de Givens e Householder; numéricos, por meio da construção do arcabouço teórico para utilização destas transformações na resolução de sistemas lineares; didáticos, por meio da proposição de alguns recursos didáticos adequados para o ensino deste tópico em nível de graduação.

Palavras-chave: Transformações lineares. Transformações de Givens e Householder. Rotação e reflexão. Ensino de álgebra linear. Recursos didáticos.

ABSTRACT

PRÉVE, Cíntia Teixeira. Givens and Householder transformations: Theoretical aspects, numerical and teaching. 2012. 128 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

Currently in universities, the subject of linear algebra combined with analytical geometry and calculus are very important in teaching in the field of the exact sciences. Linear algebra is perhaps one of the most important subjects in mathematics, and one of the first abstract subjects to which students come into contact. In an undergraduate degree program, there is no opportunity to take a deeper theoretical look at the topics covered within linear algebra. For this reason, we present here a deeper look at the topic of linear transformations, but specifically at linear transformations of rotation and reflection in the following aspects: theoretical, by the description of Givens and Householder transformations; numerical, by building the framework that uses these transformations in solving linear systems; and didactic, by proposing some educational resources suitable for teaching this topic at the undergraduate level.

Key-words: Linear transformations. Givens and Householder transformations. Rotation and reflection. Teaching linear algebra. Teaching resources.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1 Ponto no plano cartesiano . . . 18
1.2 Segmentos equivalentes . . . 18
1.3 Segmento na origem . . . 19
1.4 Multiplicação por escalar . . . 20
1.5 Adição de vetores no plano . . . 21
1.6 Ponto no espaço . . . 22
1.7 Segmento PQ é levado no segmento P_1Q_1 pela transformação T . . . 26
1.8 Reflexão em torno do eixo x . . . 29
1.9 Reflexão em torno do eixo y . . . 30
1.10 Reflexão na origem . . . 31
1.11 Reflexão em torno da reta $y = x$ . . . 31
1.12 Reflexão em torno da reta $y = -x$ . . . 32
1.13 Projeção ortogonal sobre o eixo x . . . 33
1.14 Projeção ortogonal sobre o eixo y . . . 34
1.15 Projeção ortogonal sobre uma reta no plano . . . 34
1.16 Cisalhamento na direção do eixo x . . . 35
1.17 Cisalhamento na direção do eixo y . . . 36
1.18 Dilatação . . . 37
1.19 Contração . . . 37
1.20 Dilatação . . . 38
1.21 Contração . . . 38
1.22 Dilatação na direção do vetor . . . 39
1.23 Rotação de um ângulo θ . . . 40
1.24 Reflexão em relação ao plano xy . . . 42
1.25 Projeção ortogonal sobre o plano xy . . . 43
1.26 Rotação em torno do eixo x . . . 44
1.27 Rotação em torno do eixo y . . . 45
1.28 Rotação em torno do eixo z . . . 45

2.1 Rotação . . . 51
2.2 Rotação através de um ângulo θ . . . 51
2.3 Vetores Oz e Oz' no plano complexo . . . 53
2.4 Reflexão em torno da linha L . . . 55

3.1 Reflexão através da linha L . . . 63
3.2 Reflexão através da linha L . . . 63

4.1 Projeto inicial . . . 72
4.2 Base . . . 72
4.3 Bloco . . . 72

4.4 Pino de encaixe do bloco . . . 73
4.5 Haste . . . 73
4.6 Professora utilizando o artefato . . . 74
4.7 Rotação no plano . . . 75
4.8 Reflexão através de uma reta no espaço . . . 75
4.9 Rotação no espaço . . . 76
4.10 Artefato final . . . 77
4.11 Artefato final . . . 77
4.12 Haste, bloco e eixo fixo . . . 78
4.13 Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 1 . . . 79
4.14 Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 3 . . . 80
4.15 Comparativo entre a questão 1 e a questão 3 . . . 81
4.16 Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 2 . . . 82
4.17 Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 4 . . . 83
4.18 Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 5 . . . 84
4.19 Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 6 . . . 85
4.20 Desempenho dos alunos de Matemática na questão 1 . . . 86
4.21 Desempenho dos alunos de Matemática na questão 3 . . . 87
4.22 Comparativo entre a questão 1 e a questão 3 . . . 88
4.23 Desempenho dos alunos de Matemática na questão 2 . . . 89
4.24 Desempenho dos alunos de Matemática na questão 4 . . . 90
4.25 Desempenho dos alunos de Matemática na questão 5 . . . 91
4.26 Desempenho dos alunos de Matemática na questão 6 . . . 92
4.27 Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 1 . . . 94
4.28 Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 2 . . . 95
4.29 Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 3 . . . 96
4.30 Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 4 . . . 97
4.31 Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 1 . . . 98
4.32 Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 2 . . . 99
4.33 Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 3 . . . 100
4.34 Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 4 . . . 101
4.35 Reflexão em torno do eixo x . . . 103
4.36 Reflexão em torno do eixo y . . . 104
4.37 Reflexão em torno de uma reta qualquer . . . 105
4.38 Reflexão em torno da origem . . . 105
4.39 Quadrado de lado 3 . . . 106
4.40 $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ . . . 107
4.41 $T(x, y) = (3x + 2y, x + 3y)$ . . . 107
4.42 Transformação nula . . . 108
4.43 Transformação identidade . . . 109
4.44 Projeção em Ox . . . 110
4.45 Cialhamento paralelo a Ox . . . 110
4.46 Cisalhamento paralelo a Oy . . . 111
4.47 Rotação de 4,2 radianos . . . 111
4.48 Rotação de 1,05 radianos . . . 112

LISTA DE TABELAS

4.1 Notas da turma de Eng. Elétrica 93
4.2 Notas da turma de Matemática 93

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **15**

1 PRELIMINARES **17**
1.1 Vetores no plano e no espaço . . . 17
1.1.1 Vetores no plano . . . 17
1.1.2 Operações com vetores no plano . . . 19
1.1.3 Vetores no espaço . . . 21
1.1.4 Operações com vetores no espaço . . . 22
1.2 Espaço Vetorial . . . 23
1.2.1 Propriedades de um espaço vetorial . . . 24
1.2.2 Exemplos de Espaços Vetoriais . . . 24
1.3 Transformações Lineares . . . 25
1.3.1 Exemplos de Transformações Lineares . . . 27
1.3.2 Transformações Lineares no Plano . . . 29
1.3.3 Transformações Lineares no Espaço . . . 40

2 ROTAÇÕES E REFLEXÕES: ASPECTOS TEÓRICOS **47**
2.1 Matrizes ortogonais . . . 47
2.2 Rotações no plano . . . 50
2.3 Rotações e números complexos . . . 52
2.4 Reflexões no plano . . . 54

3 ROTAÇÕES E REFLEXÕES: ASPECTOS NUMÉRICOS **57**
3.1 Transformações de Givens . . . 57
3.2 Transformações de Householder . . . 61
3.3 Breves biografias . . . 65
3.3.1 James Wallace Givens . . . 65
3.3.2 Alston Householder Scott . . . 66

4 TRANSFORMAÇÕES LINEARES: ASPECTOS DIDÁTICOS **67**
4.1 Introdução: O ensino de transformações lineares e os recursos didáticos . . . 67
4.2 Aspectos metodológicos . . . 70
4.3 Material concreto: construção e aplicação do artefato . . . 71
4.3.1 Motivação para a construção do artefato . . . 71
4.3.2 O projeto inicial do artefato . . . 71
4.3.3 Aplicação do artefato nas aulas . . . 73
4.3.4 O artefato final . . . 76
4.4 Teste de sondagem . . . 77
4.4.1 O teste . . . 78

4.4.2 Análise do teste por questão 78
4.4.3 Análise do teste por turma 93
4.5 Análise do artefato e das aulas com a sua aplicação 94
4.6 Recurso computacional 102
4.6.1 Atividades no *Geogebra* 103
4.6.2 Atividades no *Winplot* 106

CONCLUSÃO **113**

REFERÊNCIAS **114**

ANEXOS **116**

ANEXO A - Teste de sondagem **117**

ANEXO B - Questionário **118**

INTRODUÇÃO

O estudo da álgebra linear em níveis superiores tem constantemente apresentado dificuldades com os quais os estudantes de matemática e engenharia se deparam. Segundo Silva (2001), a disciplina de álgebra linear é o curso mais importante dentro e fora das áreas vinculadas à matemática e na própria matemática. Uma das primeiras dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de álgebra linear é o entendimento de conceitos abstratos, teoremas e intuições geométricas. O aluno muitas vezes não tem a facilidade de observar logicamente conceitos que não podem ser visualizados. Da mesma maneira aparece a dificuldade em fazer a demonstração desses conceitos.

Com a intenção de melhorar o ensino-aprendizagem desta matéria, muitas pesquisas nessa área têm sido realizadas com o intuito de buscar recursos tecnológicos e novas metodologias de ensino que deixem um pouco de lado as aulas puramente expositivas, onde o professor transmite o conteúdo e o aluno desempenha o papel de memorizador daquilo, sem ao menos se ater a importância e ao porquê de estar estudando tais conceitos. Segundo Sierspinska (2000), inspirada em Vygotsky, em suas análises dos estudantes em situações experimentais verificou duas tendências de alunos, o de pensamento prático que salientava as dificuldades na aprendizagem e o de pensamento teórico. Como exemplo, ela observou no estudo de transformações lineares que os alunos práticos enxergavam as definições, as formas matriciais e funcionais apenas como um procedimento. Para eles transformações lineares eram rotações, cisalhamentos, dilatações e combinações destes. Dessa forma, acredita-se que a construção de um novo recurso metodológico que alie a teoria e a prática, seja bem-vindo no âmbito da álgebra linear, de modo que facilite o trabalho do professor em suas aulas e a aprendizagem dos alunos. Destacaremos ainda, a importância da utilização de recursos tecnológicos nas aulas de transformações lineares. De forma breve, vamos sugerir possíveis atividades nos softwares *Geogebra*[1] e *Winplot*[2], que podem ser integrados mas aulas de álgebra linear, particularmente no ensino de transformações lineares.

Nos cursos normais de álgebra linear em nível de graduação, os tópicos abordados nesta disciplina não são igualmente aprofundados em um nível que permita ao aluno

[1] O *Geogebra* é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Foi lançado em 2001 para ser utilizado no ambiente de sala de aula.

[2] O *Winplot* foi lançado em 1985, é um aplicativo que permite a plotagem de curvas e superfícies.

utilizá-la em situações práticas. No presente trabalho pretendemos aprofundar o estudo das transformações lineares, mais especificamente as rotações e reflexões. O estudo se dará em três vertentes: aspectos teóricos sobre as transformações de Givens e Householder, aspectos numéricos onde serão mostradas as aplicações práticas dessas transformações e aspectos didáticos onde serão fornecidos recursos didáticos (materiais concretos e recursos computacionais) para o ensino de transformações lineares de reflexão e rotação no plano e no espaço.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 1 serão apresentados os conceitos preliminares os quais embasarão nossos estudos e no Capítulo 2, serão apresentados os aspectos teóricos de rotações e reflexões. Já no capítulo 3 daremos continuidade aos estudos de rotações e reflexões, porém em um contexto numérico, no capítulo 4 desta pesquisa serão abordados os aspectos didáticos de transformações lineares e finalmente serão apresentadas às conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo serão abordados conceitos básicos para o estudo de transformações lineares, objetivo principal de nosso estudo. Serão abordados os conceitos básicos de vetores no plano e no espaço bem como as operações entre eles e também será exposta uma definição de espaço vetorial juntamente com seus axiomas. Por fim, será fornecida a definição de transformação linear entre espaços vetoriais, algumas propriedades e os principais exemplos onde será dado ênfase as transformações lineares no plano e no espaço.

1.1 Vetores no plano e no espaço

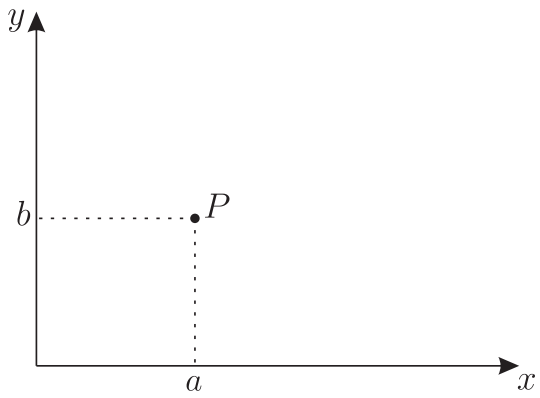
Apresentaremos de forma ampla o conceito de vetores no plano e no espaço e as operações entre vetores, de modo a fornecer uma visão geométrica para em seguida apresentarmos a definição de espaço vetorial. A descrição aqui apresentada não é nova sendo abordada por vários livros didáticos e para situar o leitor utilizaremos a abordagem do livro *"Álgebra Linear"* (BOLDRINI - 1980 - p. 97-103), por entendermos que esta sequência melhor se adapta a nossa linha de pensamento.

1.1.1 Vetores no plano

Inicialmente desenvolveremos a ideia de vetor no plano. Seja o plano cartesiano que consiste de um sistema de coordenadas dado por um par de retas orientadas e ortogonais. Fixe um comprimento, um ponto P do plano será identificado pelo par ordenado (a, b) de números reais, onde a representa sua abscissa e b representa sua ordenada. (Figura 1.1).

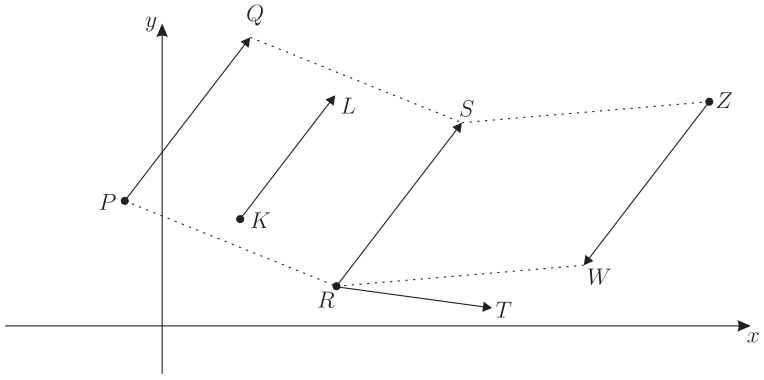
Sejam P e Q dois pontos do plano, pode-se considerar $\overrightarrow{PQ}$ com ponto inicial em P e ponto final em Q, como sendo o segmento de reta orientado. E ainda, $\overrightarrow{PQ}$ é diferente de $\overrightarrow{QP}$ pois, embora o conjunto de pontos seja igual, a orientação é distinta, logo $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$ são segmentos opostos. Agora, sejam dois segmentos orientados de mesmo comprimento e direção, então eles são equivalentes, conforme ilustra a Figura 1.2.

Figura 1.1: Ponto no plano cartesiano



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 1.2: Segmentos equivalentes

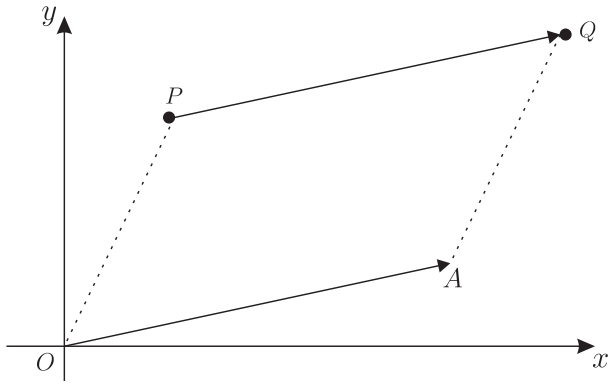


Fonte: Produção do próprio autor

Observe na Figura 1.2 que $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{KL}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção; $\overrightarrow{RT}$ e $\overrightarrow{KL}$ têm o mesmo comprimento; $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ e $\overrightarrow{ZW}$ têm o mesmo comprimento, mas $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ são os únicos segmentos com orientações equivalentes. Além disso, existe um segmento orientado partindo da origem equivalente a qualquer outro segmento orientado no plano, conforme ilustra a Figura 1.3.

Consideraremos os *vetores no plano*, como sendo somente os segmentos orientados com ponto inicial na origem. Ou seja, esses vetores são determinados apenas pelo seu ponto final, pois o ponto inicial é sempre fixo na origem. Dessa forma, temos que para cada ponto do plano $P(a, b)$, tem-se um único vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ e, reciprocamente, dado um vetor tem-se um único ponto do plano, que é o seu ponto final. Como existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do plano, podemos representar um vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ pelas coordenadas do seu ponto final $P(a, b)$. Pode-se usar a notação da matriz-coluna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, ou então $\mathbf{u} = (a, b)$. O oposto do vetor $\mathbf{u} = (a, b)$ é o vetor $\mathbf{v} = (-a, -b)$, tal que $\mathbf{v} = \text{-}\mathbf{u}$.

Figura 1.3: Segmento na origem



Fonte: Produção do próprio autor

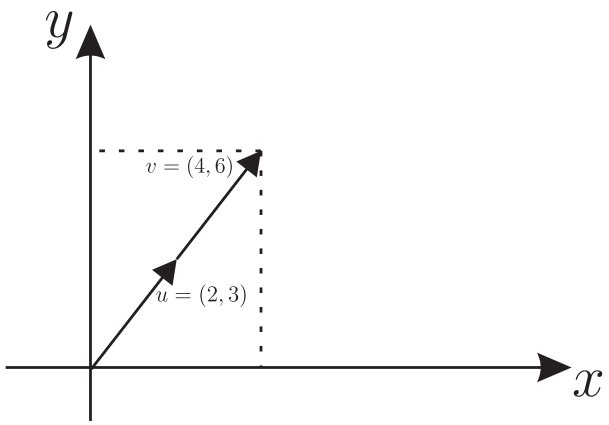
1.1.2 Operações com vetores no plano

a) Multiplicação de um vetor por um escalar.

Multiplicar um vetor $\mathbf{u}$ por um escalar $k > 0$, tal que $k \in \mathbb{R}$, é considerar um novo vetor $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ de mesma direção de $\mathbf{u}$ e de comprimento k vezes o comprimento de $\mathbf{u}$. Se $k < 0$, então $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ será igual ao oposto do vetor $|k|\mathbf{v}$, e será o vetor nulo quando $k = 0$. Por exemplo, se $\mathbf{u} = (2, 3)$ e $\mathbf{v} = k(2, 3)$ tal que $k = 2$, então $\mathbf{v} = (4, 6)$, conforme ilustra

a Figura 1.4.

Figura 1.4: Multiplicação por escalar

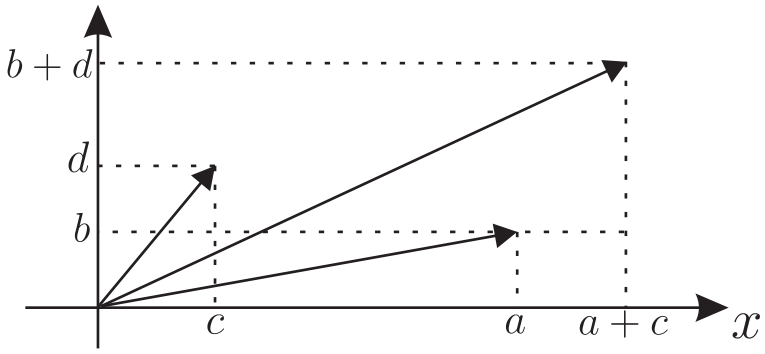


Fonte: Produção do próprio autor

b) Adição de dois vetores

Seja P e Q pontos no plano, onde $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$. Usando a congruência de triângulos, temos que $R = (a + c, b + d)$, onde R é o ponto resultante da soma das coordenadas de outros dois pontos. Assim, temos a definição formal de soma de dois vetores no plano. Se $\mathbf{u} = (a, b)$ e $\mathbf{v} = (c, d)$, então o vetor soma será $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (a + c, b + d)$ conforme ilustra a Figura 1.5. E ainda, a soma de um vetor $\mathbf{u} = (a, b)$ com seu oposto $w = -u = (-a, -b)$ é o valor nulo. Isto é, $u + w = u + (-u) = (a - a, b - b) = (0, 0)$.

Figura 1.5: Adição de vetores no plano



Fonte: Produção do próprio autor

1.1.3 Vetores no espaço

Da mesma maneira que fizemos no plano, podemos considerar vetores no espaço. Teremos um sistema de coordenadas dado por três retas perpendiculares e orientadas. E uma vez fixada uma unidade de comprimento, cada ponto P do espaço estará identificado com a terna de números reais (x, y, z), que dá suas coordenadas, conforme ilustra a Figura 1.6.

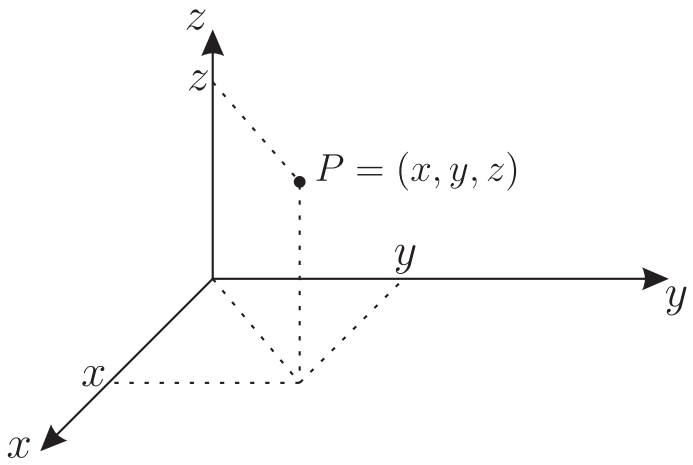
Os vetores são dados por segmentos orientados, com ponto inicial na origem, logo esses vetores são determinados apenas pelo seu ponto final. A cada ponto no espaço $P(a, b, c)$ temos um único vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ e a cada vetor temos um único ponto no espaço, que é seu ponto final. Portanto a correspondência é biunívoca. Deste modo, o vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ costuma ser denotado pelas coordenadas de P.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ ou } \mathbf{u} = (a, b, c)$$

A origem fixada para o espaço é o vetor nulo $(0, 0, 0)$. Assim, se V é o conjunto de vetores no espaço, temos:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

Figura 1.6: Ponto no espaço



Fonte: Produção do próprio autor

1.1.4 Operações com vetores no espaço

As operações de soma de dois vetores e o produto de um vetor por um número (escalar) são definidas no espaço, da mesma maneira que são definidas no plano. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ e $k\mathbf{u} = (kx_1, kx_2, kx_3)$. Por exemplo, se $u = (3, -1, 4)$ e $v = (3, 5, -2)$, temos que $u + v = (6, 4, 2)$ e $3u = (9, -3, 12)$.

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^{\not\Vdash}$ e a, b escalares, então são válidas as seguintes propriedades:

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(ii) $u + v = v + u$

(iii) Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $u + \mathbf{0} = u$. ($\mathbf{0}$ é chamado vetor nulo.)

(iv) Existe $-u \in V$ tal que $u = (-u) = 0$.

(v) $a(u + v) = au + av$

(vi) $(a + b)v = av + bv$

(vii) $(ab)v = a(bv)$

(viii) $1u = u$

As propriedades acima caracterizam certos conjuntos que, apesar de terem natureza diferente dos vetores no espaço, comportam-se como tais. Estes conjuntos receberão o nome de *espaços vetoriais*.

1.2 Espaço Vetorial

Definição 1.2.1 *Seja V chamado de espaço vetorial, um conjunto, onde seus elementos são chamados vetores, tem-se duas operações definidas: a adição, que a cada par de vetores $u, v \in V$ faz corresponder um novo vetor $u + v \in V$, chamado a soma de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, e a multiplicação por um número real, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in V$ faz corresponder um vetor αv, chamado o produto de α por v. Então V satisfaz os seguintes axiomas:*

Em relação à adição:

(A_1) Para quaisquer vetores $u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(A_2) Para quaisquer vetores $u, v \in V$, $u + v = v + u$.

(A_3) Existe um vetor em V, chamado 0 ou *vetor zero*, tal que $u + 0 = u$, para qualquer vetor $u \in V$.

(A_4) Para cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, denotado por -u, tal que $u + (-u) = 0$.

Em relação à multiplicação por escalar:

(M_1) Para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer vetores $u, v \in V$, $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

(M_2) Para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e qualquer vetor $u \in V$, $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

(M_3) Para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e qualquer vetor $u \in V$, $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.

(M_4) Para o escalar unitário $1 \in \mathbb{R}$, $1u = u$ para qualquer vetor $u \in V$.

Observações:

1) Independente de sua natureza, os elementos do espaço vetorial V serão chamados de *vetores*. Por exemplo, se V for constituído de polinômios, ou de matrizes, ou de números, em fim, serão chamados de *vetores*. Isso acontece porque as operações de adição e multiplicação por escalar desses elementos comportam-se de forma idêntica, embora eles sejam de natureza distinta.

2) Da maneira como definimos V acima, o chamamos de *espaço vetorial real*. Se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, V seria um espaço vetorial complexo.

1.2.1 Propriedades de um espaço vetorial

Os quatro primeiros axiomas que definem um espaço vetorial dizem respeito somente à estrutura aditiva de V e podem ser resumidos dizendo-se que V é um *grupo abeliano* (ou comutativo) sob a adição. Seguem-se as propriedades:

(i) Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).

(ii) Cada vetor $\mathbf{u} \in V$ admite apenas um simétrico $(-u) \in V$.

(iii) Para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$ (lei do corte).

(vi) Qualquer que seja $\mathbf{v} \in V$, tem-se: $-(-v) = v$, isto é, o oposto de -v é v.

Por outro lado, os quatro axiomas restantes dizem respeito à "ação"de $\mathbb{R}$ sobre V. Seguem-se então as propriedades:

(v) Para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{0} \in V$, $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(vi) Para $0 \in \mathbb{R}$ e qualquer vetor $u \in V$, $0u = \mathbf{0}$.

(vii) Se $\alpha u = 0$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, então $\alpha = 0$ ou $u = \mathbf{0}$.

(viii) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $u \in V$, $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -\alpha u$.

1.2.2 Exemplos de Espaços Vetoriais

1) Espaço $\mathbb{R}^n$

Para todo número natural n, o símbolo $\mathbb{R}^n$ denota o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas $u = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $v = (b_1, b_2, ..., b_n)$ de números reais. Sendo que os números $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ são chamados as *coordenadas* do vetor u e v respectivamente, temos que a adição de vetores e a multiplicação por escalar se definem como

$$u + v = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

e

$$\alpha u = \alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

O vetor zero em $\mathbb{R}^n$ é, por definição: $\mathbf{0} = (0, 0, ...0)$ e o inverso aditivo de u é: $-u = -(a_1, a_2, ..., a_n) = (-a_1, -a_2, ..., -a_n)$.

2) Espaço de matrizes $M_{m,n}$

$M_{m,n}$, conjunto de todas as matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$, é espaço vetorial em relação ás operações usuais de adição de vetores e multiplicação por um escalar.

3) Espaço de polinômios

Seja $P_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n; a_i \in \mathbb{R}$, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leq n$, e o polinômio nulo, são espaços vetoriais em relação às operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.

4) Espaço de funções

Seja $V = f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o conjunto das funções reais definidas em toda a reta. Então se $f, g \in \mathbb{R}$, temos:

$$f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
e
$$\alpha f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

O vetor nulo em V é a função *0*, isto é, $0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. E ainda, para qualquer função $f \in V$, a função $-f$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tal que V é um espaço vetorial.

1.3 Transformações Lineares

Definição 1.3.1 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ é chamada aplicação linear (ou transformação linear, ou homomorfismo de espaços vetoriais) se, para quaisquer vetores $u, v \in \mathbb{R}$ e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ valem:*

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Logo, $T : V \longrightarrow W$ é linear se preserva as duas operações básicas de espaço vetorial, a de adição de vetores e a de multiplicação por um escalar.

Propriedades:

1) Se T é linear então $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$. Em alguns livros didáticos esta propriedade é utilizada como definição de transformação linear.

2) Se $T : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear, então para quaisquer escalares $a_i \in \mathbb{R}$ e quaisquer vetores $v_i \in V$ obtemos a propriedade básica de aplicações lineares:

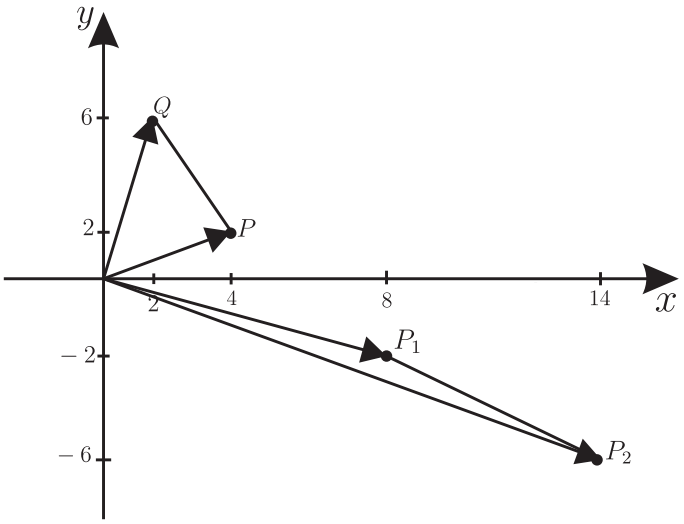
$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)$$

3) Dado um conjunto de vetores $u_1, u_2, ..., u_n \subset V$, e $w_1, w_2, ..., w_n \subset W$tal que V e W são espaços vetoriais. Então existe uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(u_i) = w_i$, onde $i = 1, 2, ..., n$. Se o conjunto $u_1, u_2, ..., u_n$ é base de V existe uma única $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(u_i) = w_i$.

4) Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$ pontos no plano cartesiano. O segmento de reta que une $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ é o conjunto $\overline{PQ} = \{(x, y)/(x, y) = \lambda P + (1-\lambda)Q, \lambda \in [0, 1]\}$. Sejam $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$, os vetores posição de P e Q respectivamente. Portanto cada ponto do segmento $\overline{PQ}$ tem vetor posição $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$, $\lambda \in [0, 1]$. Se $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, então $T(w) = \lambda T(u) + (1 - \lambda)T(v)$, $\lambda \in [0, 1]$. Seja P_1 ponto de vetor posição $T(u)$ e Q_1 ponto de vetor posição $T(v)$, então cada ponto do segmento $\overline{P_1Q_1}$ tem um correspondente vetor posição $T(w)$. Logo se T é linear então $T(\overline{PQ}) = \overline{P_1Q_1}$, ou seja, se T é linear então T leva segmento de reta em segmento de reta no plano.

   Este fato fica mais evidente por meio de um exemplo: sejam $P = (4, 2)$ e $Q = (2, 3)$, $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$. Considere $T(x, y) = (x + 2y, -y)$ (T é claramente linear). Portanto $T(u) = (8, -2)$ e $T(v) = (14, -6)$. Sejam $P_1 = (8, -2)$ e $Q_1 = (14, -6)$. Graficamente podemos observar que o segmento $\overline{PQ}$ é levado no segmento $\overline{P_1Q_1}$ pela transformação linear $T(x, y) = (x + 2y, -y)$. (Veja Figura 1.7)

Figura 1.7: Segmento PQ é levado no segmento P_1Q_1 pela transformação T



Fonte: Produção do próprio autor

Observações:

1) Uma transformação linear de V em V (no caso $V = W$) é chamada de *operador linear* sobre V.

2) Se fizermos $\alpha = 0$ em *(ii)* obtemos $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Isto é, toda aplicação linear leva o vetor nulo no vetor nulo. (A recíproca não é verdadeira).

3) Se uma transformação representar uma reta que não passa pela origem, então ela não é linear.

4) Para cada transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ existe uma matriz associada $A_{m\times n}$ e vice-versa.

1.3.1 Exemplos de Transformações Lineares

1) Seja $I : V \longrightarrow V$ a aplicação identidade. Onde I leva cada $u \in V$ em si mesmo. Então para quaisquer $u, v \in V$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $I(u + v) = u + v = I(u) + I(v)$

(ii) $I(\alpha u) = \alpha u = \alpha I(u)$

Assim, I é linear.

2) Seja $T : V \longrightarrow W$ a aplicação que associa $\mathbf{0} \in W$ a todo $u \in V$. Então, para quaisquer $u, v \in V$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $T(u + v) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = T(u) + T(v)$

(ii) $T(\alpha u) = \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} = \alpha T(u)$

Assim, T é linear e é chamada *transformação nula.*

3) Seja $T : M_2 \longrightarrow M_2$ tal que $T = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}$, temos:

(i)

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & b_1+b_2+c_1+c_2 \\ c_1+c_2+d_1+d_2 & d_1+d_2+a_1+a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ c_1+d_1 & d_1+a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ c_2+d_2 & d_2+a_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

(ii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ então,

$$\begin{aligned} T\left(\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a+\alpha b & \alpha b+\alpha c \\ \alpha c+\alpha d & \alpha d+\alpha a \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix} \\ &= \alpha T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Logo esta aplicação é uma transformação linear.

4) Sejam os espaços vetoriais $V = W = P_n$ dos polinômios de $grau \leq n$ e a aplicação derivada $D : P_n \longrightarrow P_n$, que a cada polinômio f associa sua derivada, a qual também é um polinômio. Então para $f, g \in P_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e pelas regras de derivação temos:

(i) $D(f+g) = D(f) + D(g)$

(ii) $D(\alpha f) = \alpha D(f)$

Portanto, D é uma aplicação linear.

5) Sejam os espaços vetoriais $V = P_n$ e $W = \mathbb{R}$ e $T : P_n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(u) = \int_a^b u(t)dt$, que a cada polinômio $u \in V$ associa sua integral definida $T(u) \in \mathbb{R}$, com $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Temos por meio de teoremas do cálculo que:

(i) $T(u+v) = \int_a^b (u+v)(t)dt = \int_a^b u(t)dt + \int_a^b v(t)dt = T(u) + T(v)$

(ii) $T(\alpha u) = \int_a^b (\alpha u(t))dt = \alpha \int_a^b u(t)dt = \alpha T(u)$

E T é uma transformação linear.

1.3.2 Transformações Lineares no Plano

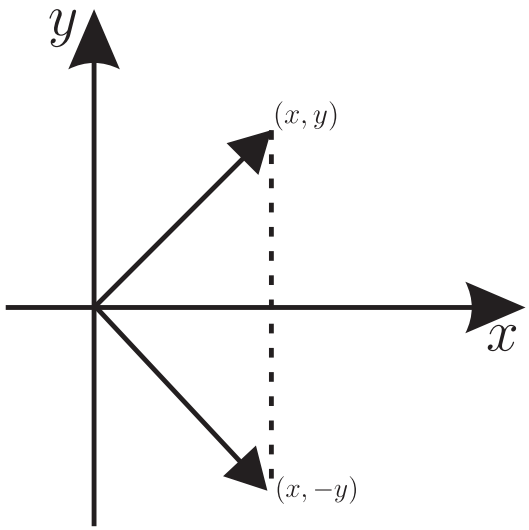
1) **Reflexão**

Reflexões são operadores em $\mathbb{R}^2$ que levam cada vetor em seu simétrico em relação a alguma reta.

a) Reflexão em torno do eixo x

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, -y)$, a transformação é representada geometricamente pela Figura 1.8.

Figura 1.8: Reflexão em torno do eixo x



Fonte: Produção do próprio autor

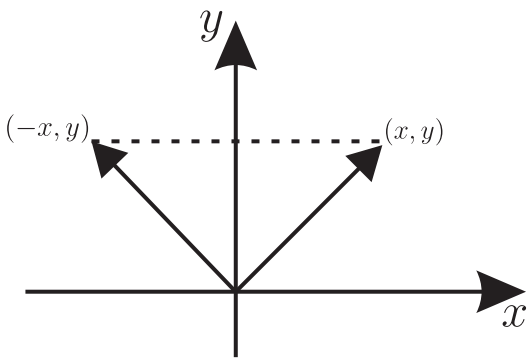
Onde sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) Reflexão em torno do eixo y

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-x, y)$, a transformação é representada geometricamente pela Figura 1.9.

Figura 1.9: Reflexão em torno do eixo y



Fonte: Produção do próprio autor

Onde sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

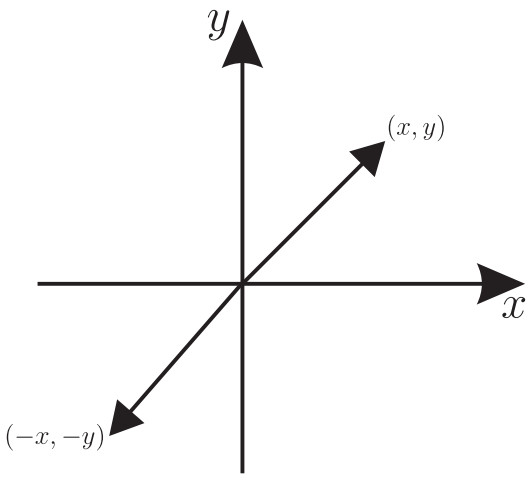
c) Reflexão na origem

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-x, -y)$. Assim, temos que sua transformação é representada geometricamente pela Figura 1.10.

Onde sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Figura 1.10: Reflexão na origem

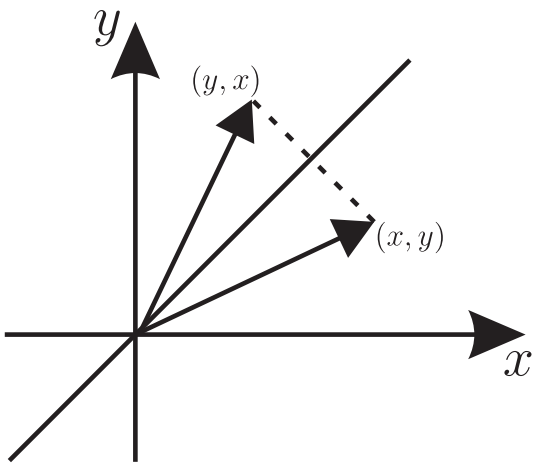


Fonte: Produção do próprio autor

d) Reflexão em torno da reta $y = x$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (y, x)$. A Figura 1.11 representa geometricamente esta transformação.

Figura 1.11: Reflexão em torno da reta $y = x$



Fonte: Produção do próprio autor

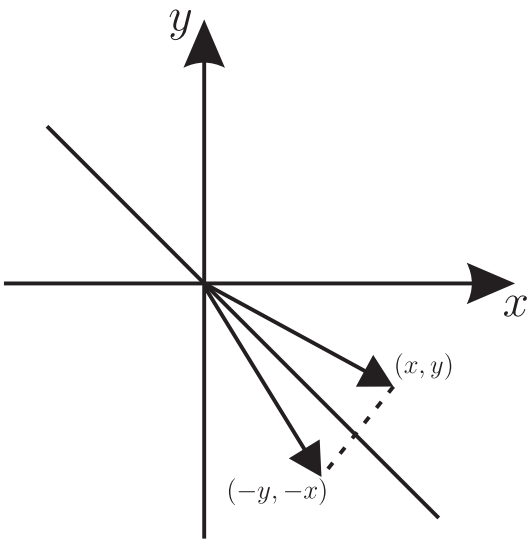
Na qual sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e) Reflexão em torno da reta $y = -x$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-y, -x)$, a transformação é representada geometricamente pela Figura 1.12.

Figura 1.12: Reflexão em torno da reta $y = -x$



Fonte: Produção do próprio autor

Onde sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2) **Projeção**

Uma projeção ou projeção ortogonal de $\mathbb{R}^2$ é qualquer operador que leva cada vetor em sua projeção ortogonal sobre alguma reta na origem.

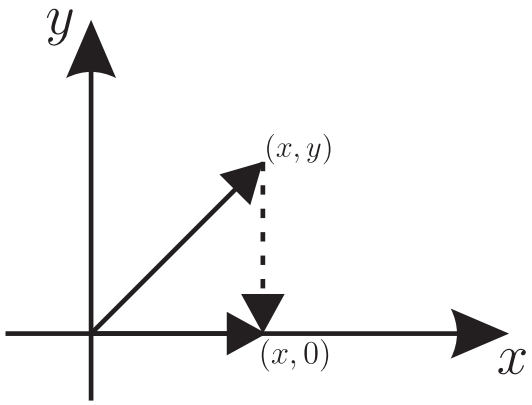
a) Projeção ortogonal sobre o eixo x

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, 0)$, e sua representação geométrica dada pela Figura 1.13.

Matricialmente temos: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Figura 1.13: Projeção ortogonal sobre o eixo x



Fonte: Produção do próprio autor

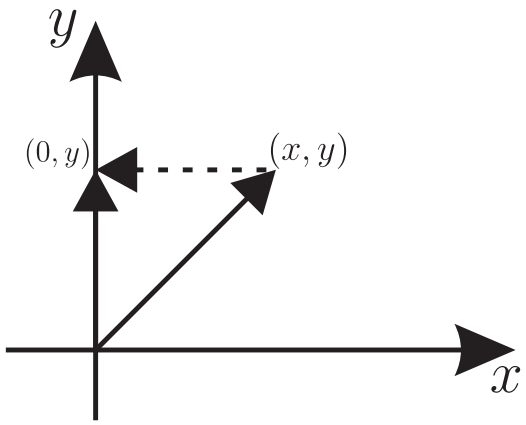
b) Projeção ortogonal sobre o eixo y

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (0, y)$, então sua transformação é representada geometricamente pela Figura 1.14.

Matricialmente temos: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Figura 1.14: Projeção ortogonal sobre o eixo y

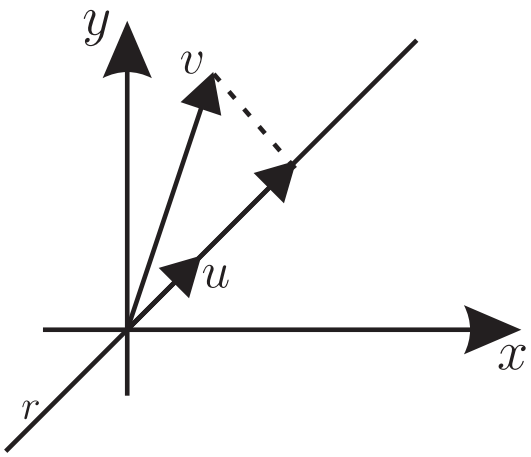


Fonte: Produção do próprio autor

c) Projeção ortogonal sobre uma reta no plano

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = proj_u v$, onde u é o vetor diretor da reta r, a transformação é representada da forma ilustrada na Figura 1.15.

Figura 1.15: Projeção ortogonal sobre uma reta no plano



Fonte: Produção do próprio autor

3) **Cisalhamento**

O efeito do cisalhamento é transformar o retângulo OAPB no paralelogramo OAP'B', de mesma base e mesma altura.

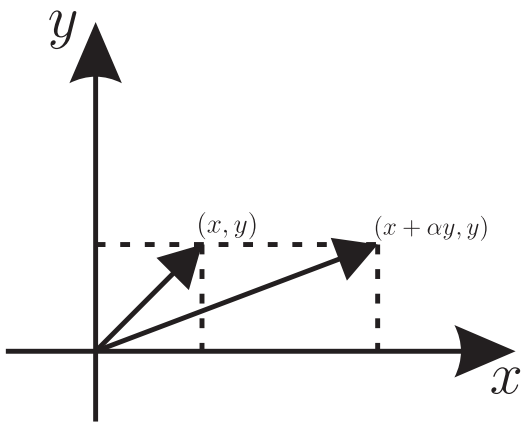
a) Cisalhamento na direção do eixo x

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$. Representamos esse cisalhamento geometricamente como segue na Figura 1.16.

Onde sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Figura 1.16: Cisalhamento na direção do eixo x

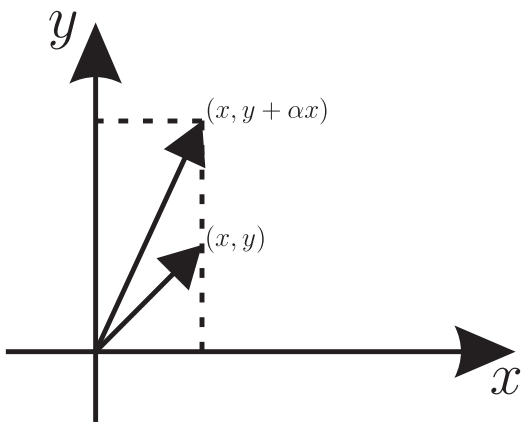


Fonte: Produção do próprio autor

b) Cisalhamento na direção do eixo y

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, y + \alpha x)$, a representação geométrica dessa transformação é dada por:

Figura 1.17: Cisalhamento na direção do eixo y



Fonte: Produção do próprio autor

E sua matriz canônica é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y + \alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

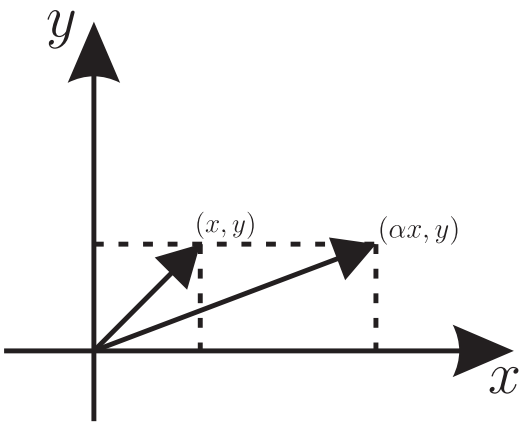
4) **Homotetia: Dilatação e contração**

Seja α é um escalar não-negativo. Se $0 \leq \alpha \leq 1$ então o operador é uma *contração de razão* α e se $\alpha \geq 1$ então é dito uma *dilatação de razão* α.

a) Homotetia na direção do eixo x

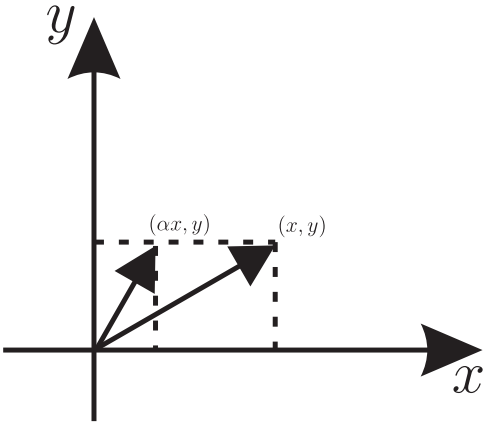
Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (\alpha x, y)$, com $\alpha > 0$. Temos então dois casos: dilatação e contração, conforme ilustram as Figuras 1.18 e 1.19, respectivamente.

Figura 1.18: Dilatação



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 1.19: Contração



Fonte: Produção do próprio autor

Onde a matriz canônica é: $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe que:

se $\alpha > 1$ T dilata o vetor; (Figura 1.18)

se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor. (Figura 1.19)

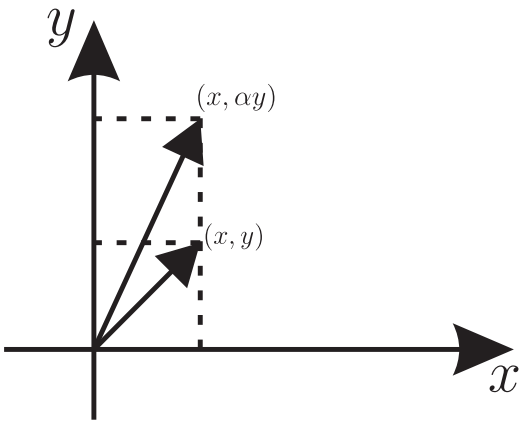
b) Dilatação ou contração na direção do eixo y

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, \alpha y)$, com $\alpha > 0$, a transformação é representada geometricamente como mostram as Figuras 1.20 e 1.21.

E a forma matricial é dada por: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, isto é:

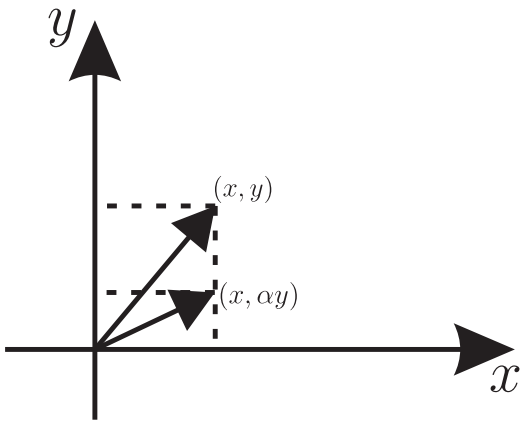
$$\begin{bmatrix} x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Figura 1.20: Dilatação



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 1.21: Contração



Fonte: Produção do próprio autor

Observe que:

se $\alpha > 1$ T dilata o vetor; (Figura 1.20)

se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor. (Figura 1.21)

c) Dilatação ou contração na direção do vetor

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (\alpha(x, y))$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, a transformação é representada geometricamente pela Figura 1.22.

Matricialmente é: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, isto é:

$$\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe que:

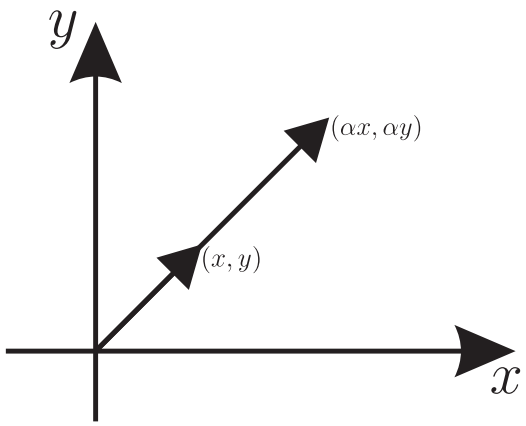
se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor; (Figura 1.22)

se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;

se $\alpha = 1$, T é a identidade I;

se $\alpha < 0$, T troca o sentido do vetor.

Figura 1.22: Dilatação na direção do vetor



Fonte: Produção do próprio autor

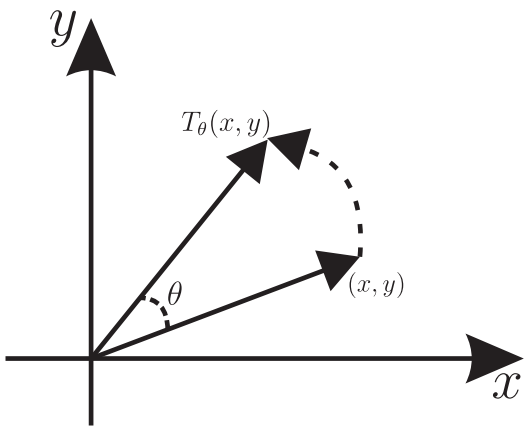
5) **Rotação**

Uma rotação em $\mathbb{R}^2$ é um operador que gira cada vetor por um ângulo fixado θ. Onde esse operador gira cada vetor no sentido anti-horário quando o ângulo for positivo e no sentido horário quando esse ângulo for negativo. Seja $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$, sua representação geométrica é dada pela Figura 1.23.

E sua matriz canônica por:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Figura 1.23: Rotação de um ângulo θ



Fonte: Produção do próprio autor

1.3.3 Transformações Lineares no Espaço

1) **Reflexão**

Análogo ao $\mathbb{R}^2$, os operadores de reflexão em $\mathbb{R}^3$ levam cada vetor em seu simétrico em relação a algum plano.

a) Reflexão em relação aos eixos coordenados

(a_1) Reflexão em relação ao eixo x

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (x, -y, -z)$, cuja matriz canônica é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a_2) Reflexão em relação ao eixo y

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (-x, y, -z)$, cuja matriz canônica é:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a_3) Reflexão em relação ao eixo z

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (-x, y, -z)$,cuja matriz canônica é:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As representações geométricas de reflexão no espaço são triviais.

b) Reflexão em relação aos planos coordenados

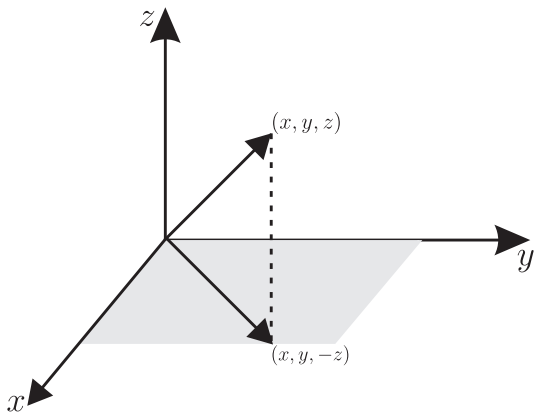
(b_1) Reflexão em relação ao plano xy

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (x, y, -z)$, tal que sua representação geométrica é de acordo com a Figura 1.24.

E cuja matriz canônica é: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Os próximos três itens têm representações geométricas análogas ao item anterior.

Figura 1.24: Reflexão em relação ao plano xy



Fonte: Produção do próprio autor

(b_2) Reflexão em relação ao plano xz

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (x, -y, z)$. Matricialmente representada por: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b_3) Reflexão em relação ao plano yz

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (-x, y, z)$. Onde sua matriz canônica é: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b_4) Reflexão na origem

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, cuja matriz canônica é: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

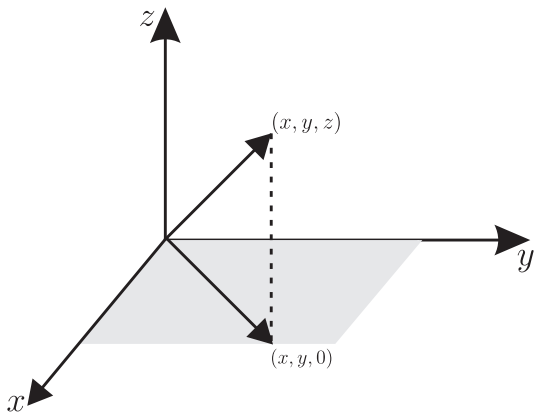
2) **Projeção**

Análogo ao $\mathbb{R}^2$, os operadores de projeção em $\mathbb{R}^3$ levam cada vetor em sua projeção ortogonal sobre algum plano.

a) Projeção ortogonal sobre o plano xy

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, tal que sua representação geométrica é:

Figura 1.25: Projeção ortogonal sobre o plano xy



Fonte: Produção do próprio autor

E cuja matriz canônica é: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

As projeções realizadas sobre o plano xz e yz, são representadas geometricamente de forma análoga a da projeção realizada sobre o plano xy.

b) Projeção ortogonal sobre o plano xz

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (x, 0, z)$, e matricialmente representada por: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) Projeção ortogonal sobre o plano yz

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T(x, y, z) = (0, y, z)$, e matricialmente representada por: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) **Rotação**

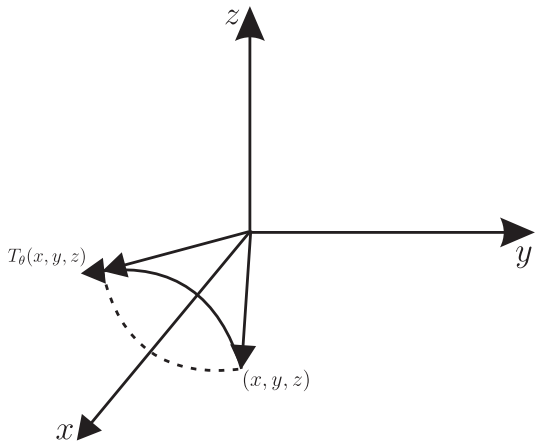
Descrevemos uma rotação de vetores em $\mathbb{R}^3$ em relação a um raio partindo da origem, cujo o eixo é chamado de "eixo de rotação". Análogo ao $\mathbb{R}^2$ o ângulo de rotação é descrito como sendo no sentido horário ou anti-horário.

a) Rotação anti-horária em torno do eixo x positivo

Seja $T_\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T_\theta : (x, y, z) = (x, y\cos\theta - z\sin\theta, y\sin\theta + z\cos\theta)$, tal que sua representação geométrica é dada pela Figura 1.26.

Matricialmente: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Figura 1.26: Rotação em torno do eixo x



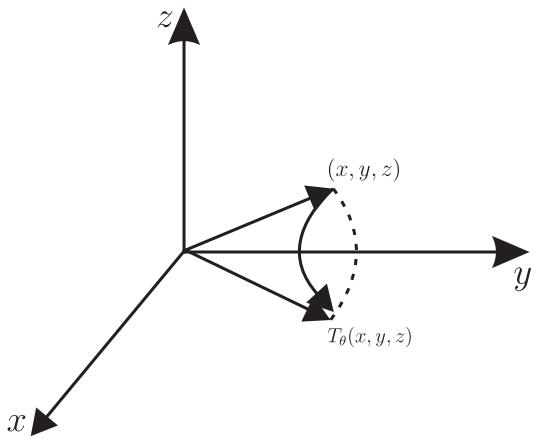
Fonte: Produção do próprio autor

b) Rotação anti-horária em torno do eixo y positivo

Seja $T_\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T_\theta : (x, y, z) = (x\cos\theta + z\sin\theta, y, -x\sin\theta + z\cos\theta)$, tal que sua representação geométrica é dada pela Figura 1.27.

Matricialmente: $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

Figura 1.27: Rotação em torno do eixo y

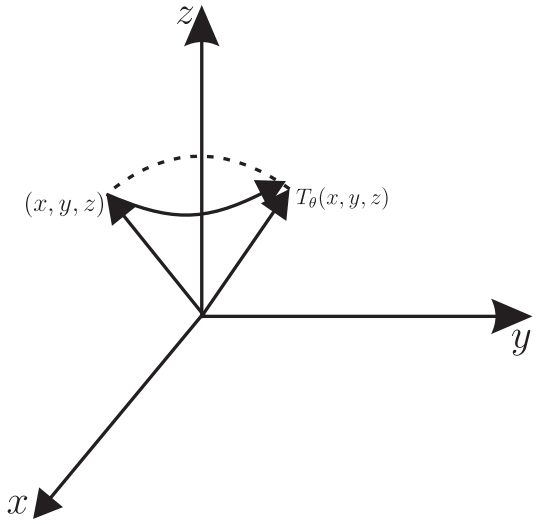


Fonte: Produção do próprio autor

c) Rotação anti-horária em torno do eixo z positivo

Seja $T_\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador definido por $T_\theta : (x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$, tal que sua representação geométrica é ilustrada na Figura 1.28.

Figura 1.28: Rotação em torno do eixo z



Fonte: Produção do próprio autor

Matricialmente: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Após termos feito uma abordagem de alguns conceitos e definições necessárias para o prosseguimento do estudo de rotações e reflexões, no próximo capítulo estamos aptos a iniciarmos tal estudo num contexto teórico dessas duas transformações.

Capítulo 2

ROTAÇÕES E REFLEXÕES: ASPECTOS TEÓRICOS

Neste capítulo abordaremos com ênfase o estudo de duas transformações lineares apresentadas no capítulo anterior, a rotação e a reflexão. A princípio faremos um apanhado de algumas definições ligadas a matrizes ortogonais, uma vez que essas duas transformações têm essa característica. Assim como no capítulo anterior, vamos restringir nossa atenção para vetores e matrizes no conjunto dos reais. No entanto, toda essa teoria pode ser transferida para o conjunto dos números complexos.

2.1 Matrizes ortogonais

Começamos através da introdução de um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Dado dois vetores $u = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, define-se o produto interno de u e v por:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.1.1}$$

A definição de produto interno nos diz que esta é uma operação que a cada dois vetores é associado um número real. O produto interno de u e v pode ser representado também por meio de matrizes, ou seja, seja $[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, isto é, $[u]$ é a matriz das coor-

denadas do vetor u em relação a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Analogamente, seja $[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, assim $\langle u, v\rangle = [u]^T[v]$ que pode ser representado por $\langle u, v\rangle = u^T v$, sem prejuízo de entendimento. Esta última forma é a mais utilizada nos livros didáticos e bastante conveniente para simulações numéricas. Além disso, seja u, v e w vetores em $\mathbb{R}^n$ e α um escalar, então o produto interno tem as seguintes propriedades:

(i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(ii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(iii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$

(iv) $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Observação: A notação $\langle u, v\rangle$ é utilizada para denotar o produto interno arbitrário. Uma vez que a notação $u.v$ denota o produto interno euclidiano de dois vetores do $\mathbb{R}^n$. Onde ambas representam a mesma operação. Seguiremos utilizando a notação $\langle u, v\rangle$para denotar o produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Nota-se também a estreita relação entre o produto interno e a norma euclidiana:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \tag{2.1.2}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser indicada em termos do produto interno e da norma euclidiana com $u, v \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \tag{2.1.3}$$

Quando $n = 2$ ou $n = 3$ o produto interno coincide com o produto escalar da geometria analítica. Tem-se que se u e v são dois vetores diferentes do vetor nulo no plano e θ o ângulo entre eles, então:

$$cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \tag{2.1.4}$$

Podemos utilizar esta fórmula para definir o ângulo entre dois vetores em $\mathbb{R}^n$, com $n > 3$ mas neste caso perdemos a noção geométrica de ângulo. Observa-se que 2.1.3 nos garante que $\dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$ esta sempre entre *-1* e *1*. Para verificar isso, basta dividir 2.1.3 por $\|u\|\|v\|$. Assim defini-se o ângulo entre $u, v \in \mathbb{R}^n$ como sendo:

$$\theta = arccos\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \tag{2.1.5}$$

Se $u = 0$ ou $v = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, então podemos afirmar, sem exceção, que o ângulo entre u e v é $\frac{\pi}{2}$ se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$.

Quando $\langle u, v\rangle = 0$ dizemos que u e v são *ortogonais.*

Definição 2.1.1 (Matriz ortogonal) *Uma matriz $Q \in \mathbb{R}^n$ é dita ser ortogonal se $QQ^T = I$. Esta equação diz que Q admite inversa e $Q^{-1} = Q^T$.*

Observação: $QQ^T = I$, $Q^TQ = I$ e $Q^T = Q^{-1}$ são equivalentes, e qualquer uma delas poderia ser tomada como a definição de uma matriz ortogonal.

Além disso, se $Q \in \mathbb{R}^n$ segue da definição que:

(i) A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.

(ii) Um produto de matrizes ortogonais é ortogonal.

(iii) Se Q é ortogonal, então $det(Q) = 1$ ou $det(Q) = -1$.

Teorema 2.1.1 *Seja $Q \in \mathbb{R}^n$ e quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Q é ortogonal.

(b) $\|Qu\| = \|u\|$.

(c) $Qu.Qv = u.v$

A parte *(b)* do teorema nos diz que Qu e u têm o mesmo comprimento, assim as transformações ortogonais preservam comprimentos. Combinando as partes *(b)* e *(c)*, encontramos facilmente que:

$$arccos\frac{\langle Qu, Qv\rangle}{\|Qu\|\|Qv\|} = arccos\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \tag{2.1.6}$$

Assim, o ângulo entre Qu e Qv é o mesmo ângulo entre u e v. Logo concluímos que as transformações ortogonais também preservam ângulos.

As matrizes ortogonais se caracterizam por terem boas propriedades computacionais, já que preservam o comprimento de vetores. Existem dois tipos de transformações ortogonais que são amplamente usadas em cálculo de matriz: rotadores e refletores. Vamos discutir os rotadores primeiro porque são mais simples.

2.2 Rotações no plano

A princípio definiremos rotações em $\mathbb{R}^2$, no capítulo 3 vamos generalizar com mais detalhes o estudo em $\mathbb{R}^n$. Considere o plano $\mathbb{R}^2$. O operador que rotaciona cada vetor através de um ângulo θ fixo é uma transformação linear, de modo que pode ser representado por uma matriz. Seja

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

tal matriz. Então Q é completamente determinada pela sua ação sobre os dois vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, porque

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix}$$

Uma vez que a ação de Q é rotacionar cada vetor de um ângulo θ (nesse caso no sentido anti-horário), claramente $Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ e $Q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$. (Ver Figura 2.1 e Figura 2.2). Assim $\begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$, isto é,

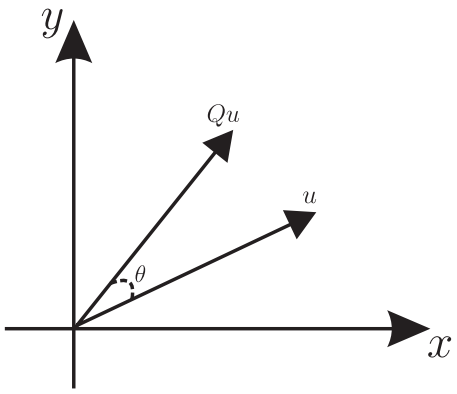
$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Uma matriz desta forma, como havíamos visto no capítulo anterior, é chamada de "Matriz de rotação"(ou matriz de um rotador).

Definição 2.2.1 *Uma transformação linear $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que Q é uma matriz de rotação é chamada* ***Transformação de Givens****.*

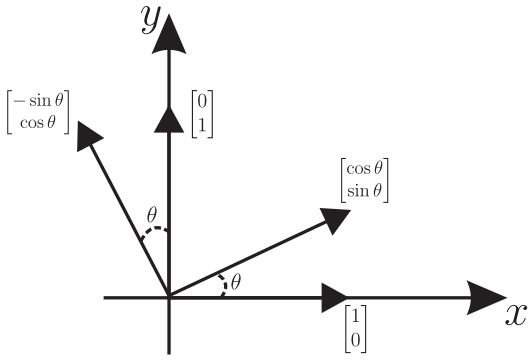
Uma verificação direta nos mostra que $QQ^T = I = Q^TQ$, logo Q é uma matriz ortogonal. Como Q é rotação anti-horária de um ângulo θ e $Q^TQ = I$, vemos que Q^T é uma rotação no sentido horário.

Figura 2.1: Rotação



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 2.2: Rotação através de um ângulo θ



Fonte: Produção do próprio autor

Matrizes de rotação podem ser utilizadas para criar zeros em um vetor ou matriz. Por exemplo, se $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é um vetor com $x_2 \neq 0$, vamos ver como determinar um rotador

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Tal que $Q^T u$ tem um zero como segundo componente: $Q^T u = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ para algum y. Agora

$$Q^T u = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)x_1 + (\sin\theta)x_2 \\ (-\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2 \end{bmatrix}$$

Que tem a forma $\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$ se, e somente se, $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ pois $\|Qu\| = \|u\|$ e:

$$x_1 \sin\theta = x_2 \cos\theta \tag{2.2.7}$$

Assim θ pode ser determinado por $\arctan \dfrac{x_2}{x_1}$ ou qualquer outro ângulo satisfazendo $\tan\theta = \dfrac{x_2}{x_1}$. Mas nota-se que podemos determinar Q sem calcular θ propriamente. É preciso apenas $\cos\theta$ e $\sin\theta$. Vemos que a escolha de $\cos\theta = x_1$ e $\sin\theta = x_2$ iria satisfazer 2.2.7. No entanto, esta escolha viola a identidade trigonométrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, a menos que $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Portanto, tomamos:

$$\cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad \text{e} \qquad \sin\theta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \tag{2.2.8}$$

Obtido dividindo-se a nossa escolha original por $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Agora, a identidade trigonométrica é satisfeita, e não há um único $\theta \in [0, 2\pi)$ para o qual 2.2.8 mantém-se.

Agora vamos ver como podemos usar um rotador para simplificar uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Acabamos de ver que há um rotador Q de tal modo que:

$$Q^T \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde $r_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$. Defini-se r_{12} e r_{22} por:

$$Q^T \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{bmatrix}$$

Logo:

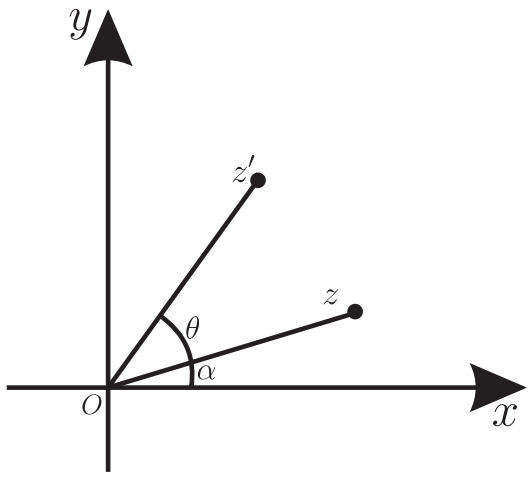
$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

Então $Q^T A = R$. Isso mostra que podemos transformar uma matriz A numa matriz triangular superior multiplicando-se pela matriz ortogonal Q^T. Como veremos no capítulo 3, é possível realizar tal transformação não apenas para matrizes 2×2, mas para toda $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Isto é, para cada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ há uma matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz triangular superior $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de tal modo que $Q^T A = R$.

2.3 Rotações e números complexos

Podemos descrever também, rotações por meio de números complexos, pois os vetores num plano cartesiano podem ser considerados como números complexos no plano complexo, ou seja, para cada vetor $u = (x, y)$ no plano cartesiano tem-se um número complexo da forma $z = x + iy$ no plano complexo. Se $r = \|u\|$ e α é o ângulo que o vetor u faz com o eixo x do plano cartesiano então $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Portanto podemos escrever $z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $r = \|z\|$ é a norma de z. Se rotacionarmos um vetor $u = (x, y)$ de um ângulo θ no sentido anti-horário então vamos obter um vetor $v = (x', y')$. No plano complexo o vetor v corresponderá a um número complexo $z' = x' + iy'$. Os números complexos z e z' têm mesma norma $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, pois $\|z\| = \|u\|$, $\|u\| = \|v\|$ e $\|z'\| = \|v\|$. Podemos então considerar o número (vetor) **Oz'** como uma rotação do vetor **Oz** no plano complexo. Se rotacionarmos o vetor **Oz** de um ângulo θ então o argumento de z' é $\gamma = \alpha + \theta$. Portanto $z' = r(\cos(\alpha + \theta) + i\sin(\theta + \alpha))$. (Veja Figura 2.3)

Figura 2.3: Vetores Oz e Oz' no plano complexo



Fonte: Produção do próprio autor

Usando a fórmula de Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi$, fica fácil obtermos uma relação entre z' e z:

$$z' = re^{i(\alpha+\theta)} = re^{i\alpha}e^{i\theta} = ze^{i\theta} \tag{2.3.9}$$

Assim, por 2.3.9 temos:

$$z' = ze^{i\theta}$$

$$x' + iy' = (x + iy)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$x' + iy' = x\cos\theta + ix\sin\theta + iy\cos\theta - y\sin\theta$$

$$x' + iy' = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Da igualdade acima $z' = ze^{i\theta}$, obtemos:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Onde matricialmente pode ser escrita da forma:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Esta matriz já é conhecida dos estudos anteriores. Concluímos então que no plano complexo a rotação de um vetor **Oz** por um ângulo θ, corresponde a multiplicação deste

vetor pelo número complexo $e^{i\theta}$.

2.4 Reflexões no plano

Começamos com o caso $n = 2$ assim como fizemos para os rotadores anteriormente. Seja L qualquer linha em $\mathbb{R}^2$ que passa através da origem. O operador que reflete cada vetor em $\mathbb{R}^2$ através da linha L é uma transformação linear, de modo que pode ser representado por uma matriz. Vamos determinar esta matriz. Seja v um vetor não nulo deitado em L. Então cada vetor que esta em L é um múltiplo de v. Seja u um vetor ortogonal a L. Em seguida, u,v é uma base de $\mathbb{R}^2$, e cada $x \in \mathbb{R}^2$ pode ser expresso como uma combinação linear de u e v: $x = \alpha u + \beta v$. A reflexão de $\mathbf{x}$ através de L é $-\alpha u + \beta v$ (Figura 2.4), de modo que a matriz Q da reflexão deve satisfazer $Q(\alpha u + \beta v) = -\alpha u + \beta v$ para todo α e β. Para isso é necessário e suficiente que:

$$Qu = -u \qquad \text{e} \qquad Qv = v \tag{2.4.10}$$

Sem perda de generalidade podemos supor que foi escolhido um vetor unitário: $\|u\| = 1$. Considere a matriz $P = uu^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. P não tem as propriedades necessárias e suficientes, na verdade $Pu = (uu^T)u = u(u^Tu) = u\|u\|^2 = u$ e $Pv = (uu^T)v = u(u^Tv) = u(u, v) = 0$ porque u e v são ortogonais. Mas podemos construir uma Q com as propriedades desejadas pela combinação da matriz P e da matriz identidade.

Seja $Q = I - 2P$. Então, $Qu = u - 2Pu = -u$ e $Qv = v - 2Pv = v$. Para resumir: a matriz $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que reflete vetores através da linha L é dada por: $Q = I - 2uu^T$, onde u é um vetor unitário ortogonal à linha. Dessa forma, podemos considerar o caso geral para n.

Teorema 2.4.1 *Seja $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$, e defina $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ por $P = uu^T$. Então:*

(i) $Pu = u$

(ii) $Pv = 0$ *se* $\langle u, v\rangle = 0$

(iii) $P^2 = P$

(iv) $P^T = P$

Teorema 2.4.2 *Seja $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$, e defina $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ por $Q = I - 2uu^T = I - 2P$. Então:*

(i) $Qu = -u$

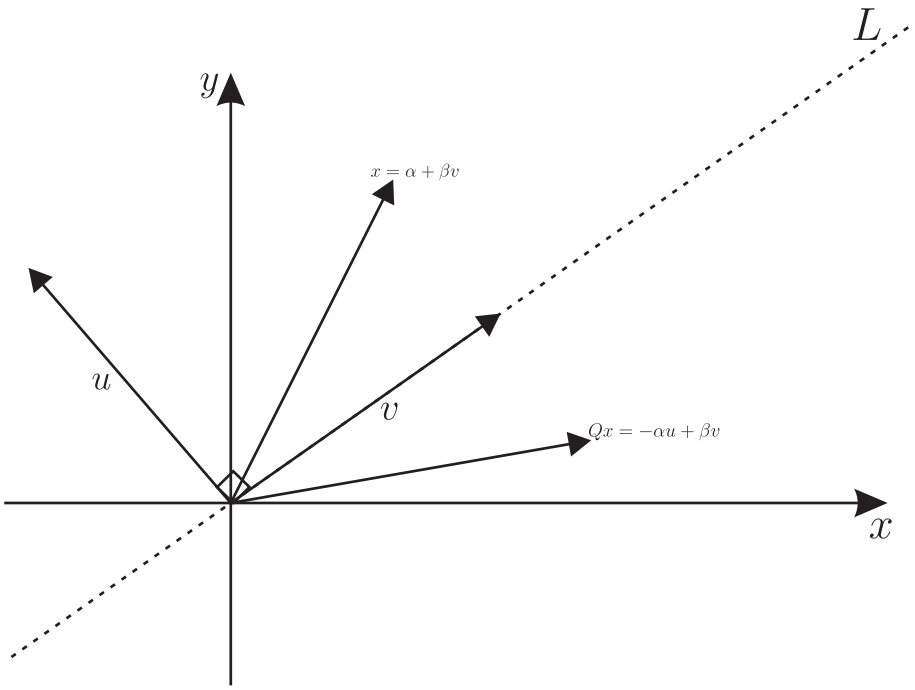
(ii) $Qv = v$ *se* $(u, v) = 0$

(iii) $Q = Q^T$ *(Q é simétrica)*

(iv) $Q^T = Q^{-1}$ *(Q é ortogonal)*

(v) $Q^{-1} = Q$ *(Q é uma involução)*

Figura 2.4: Reflexão em torno da linha L



Fonte: Produção do próprio autor

Nos teoremas 2.4.1 e 2.4.2, u foi tomado como sendo um vetor unitário. Esta é uma escolha conveniente para as demonstrações e provas de tais teoremas, mas em computação geralmente é mais conveniente não normalizar o vetor. Há um teorema que torna possível não efetuar a normalização. Esse teorema será explorado no capítulo 4.

Definição 2.4.1 *Seja* $u \in \mathbb{R}^n$ *fixado com* $\|u\| = 1$. *A transformação linear* $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *dada por* $Q = I - 2uu^T$ *é chamada* ***Transformação de Householder****.*

O capítulo apresentado abordou apenas os aspectos teóricos das Transformações de Givens e Householder. E ainda, definiu estas transformações no plano. No próximo capítulo daremos continuidade ampliando nossos estudos para $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 3

ROTAÇÕES E REFLEXÕES: ASPECTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo daremos continuidade ao estudo de rotações e reflexões, no entanto esse estudo dar-se-á agora, num contexto numérico. Apresentaremos a parte teórica da aplicação de rotação e reflexão na resolução de sistemas lineares por meio da fatoração QR. Não será explorado neste capítulo os aspectos computacionais relativos a algoritmos e implementação computacional por motivo de brevidade. A abordagem utilizada neste capítulo é baseada no livro *"Fundamentals of Matrix Computations"* (WATKINS - 2002), que aborda com detalhes os aspectos numéricos das transformações de Givens e Householder mas aqui apresentaremos apenas uma pequena parte.

3.1 Transformações de Givens

A transformação $Q^TA = R$ obtida no capítulo 2 no estudo de rotações, pode ser usada para resolver um sistema de equações lineares $Ax = b$. Multiplicando-se à esquerda por Q^T, nós transformamos o sistema $Ax = b$ num sistema equivalente $Q^TAx = Q^Tb$, ou $Rx = c$, onde $c = Q^Tb$. É uma questão simples de calcular c, dado b. Em seguida, x pode ser obtido a partir do sistema triangular superior $Rx = c$ por retro-substituição.

Outro ponto de vista útil é quando reescrevemos a equação $Q^TA = R$ como:

$$A = QR$$

Isto mostra que A pode ser expressa como um produto QR, onde Q é ortogonal e R é triangular superior. A decomposição QR, como é chamada, pode ser usada em muito da mesma maneira que uma decomposição LU para resolver um sistema linear como $AX = B$. Dada uma decomposição QR de A, podemos reescrever o sistema como $QRX = b$. Fazendo $c = RX$, podemos encontrar c resolvendo $Qc = b$. E ainda, Q é or-

togonal, então $c = Q^T b$. Podemos então, obter x resolvendo $Rx = c$ por retro-substituição.

Exemplo: Usaremos uma decomposição QR, por meio do rotor plano, para resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Primeiro precisamos de Q tal que $Q^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$. Usamos 2.2.8 com $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ para obter $c = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $s = \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Então:

$$Q = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim temos $R = Q^T A$ tal que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $Qc = b$, temos :

$$c = Q^T b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente resolvemos $Rz = c$ por uma retro-substituição e concluímos $z_1 = -1$ e $z_2 = 1$.

Agora voltamos nossa atenção para matrizes $n \times n$. Uma matriz da forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & c & 0 & \dots & 0 & -s & & \\ & & & 0 & 1 & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & 0 & & & 1 & 0 & & \\ & & & s & 0 & \dots & 0 & c & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

Onde $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$ e as todas entradas que não foram preenchidas são zeros, é chamada de rotor de avião. Assim, um rotor de avião se parece com uma matriz

identidade, exceto que um par de linhas e colunas contém um rotor. Rotores de avião são usados extensivamente em cálculos matriciais e são chamados de *Transformações de Givens* ou *Rotações de Givens* em outros contextos. Nós geralmente usamos o adjetivo "plano"para nos referirmos a rotações no plano cartesiano.

Teorema 3.1.1 *Todo rotor plano é ortogonal e tem determinante 1.*

Demonstração:

Ortogonalidade:

Temos que se Q é ortogonal então satisfaz $QQ^T = I$. Seja $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ então:

$$QQ^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Logo Q é ortogonal.

Determinante 1:

Seja $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Calculando o seu determinante temos:

$$det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin^2\theta) = 1$$

Portanto o determinante de Q é igual a 1. ■

Observação: Seja Q o rotor do avião 3.1.1.Então as transformações $x \longrightarrow Qx$ e $x \longrightarrow Q^T x$ alteram apenas a *i-ésima* e *j-ésima* entradas de x e que o efeito sobre estas entradas é a mesma que a dos rotores 2×2, $Q = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ e $Q^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ no vetor $\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}$. A partir desta observação e do teorema 4.1.1, vemos que podemos transformar qualquer vetor x para aquele cuja entrada *j-ésima* é zero, aplicando o rotor Q^T do avião, onde:

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \qquad \text{e} \qquad s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \tag{3.1.2}$$

(Se $x_i = x_j = 0$, tome $c = 1$ e $s = 0$).

É também importante notar o efeito de um rotor em uma matriz. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e considere as transformações $A \longrightarrow QA$ e $A \longrightarrow Q^T A$, onde Q é como 3.1.1. Segue-se facilmente da observação acima que estas transformações alteram apenas a *i-ésima* e *j-ésima* linhas de A. Transpondo estes resultados, vemos que para $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ as transformações $B^T \longrightarrow QB^T$ e $B^T \longrightarrow Q^T B^T$ alteram somente a *i-ésima* e *j-ésima*

colunas de B.Quanto a interpretação geométrica da ação de um rotor plano é clara. Todos os vetores deitados no plano $x_i x_j$ são rotacionados por meio de um ângulo θ. E todos os vetores ortogonais ao plano $x_i x_j$ são fixados.

Teorema 3.1.2 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tal que $A = QR$.*

Demonstração: Vamos esboçar uma prova em que Q é considerado um produto de rotadores. A prova mais detalhada é usando refletores que será dada na próxima seção.

Seja Q_{21} um rotador agindo no plano x_1x_2, de tal modo que Q_{21}^T realiza a transformação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ a_{31} \\ a_{41} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Em seguida, Q_{21}^T tem zero na posição $(2,1)$. Da mesma forma podemos encontrar um rotor de avião Q_{31}, atuando no plano x_1x_3, de modo que $Q_{31}^T(Q_{21}^T A)$ tem zero na posição $(3,1)$. Este rotor não interfere no zero da posição $(2,1)$, porque Q_{31}^T deixa a segunda linha de $Q_{21}^T A$ inalterada. Continuando dessa maneira, criamos rotadores $Q_{41}, Q_{51}, ..., Q_{n1}$ tal que $Q_{n1}^T, Q_{(n-1)1}^T, ..., Q_{21}^T A$ tem zeros em toda primeira coluna com exceção para a posição $(1,1)$.

Agora vamos trabalhar na segunda coluna. Seja Q_{32} um rotor plano agindo no plano x_2x_3 tal que a entrada $(3,2)$ de $Q_{32}^T(Q_{n1}^T, ..., Q_{21}^T A)$ é zero. Este rotor não interfere nos zeros que foram criados anteriormente na primeira coluna.

Em seguida, trabalha-se na terceira coluna, na quarta coluna, e assim por diante. Para todo rotor $Q_{21}, Q_{31}, ..., Q_{n1}, Q_{32}, ..., Q_{n,n-1}$ temos:

$$R = Q_{n,n-1}^T Q_{n,n-2}^T ... Q_{21}^T A$$

Onde R é triangular superior. Seja $Q = Q_{21}Q_{31}...Q_{n,n-1}$, então Q, sendo um produto de matrizes ortogonais, é em si ortogonal, e portanto $R = Q^T A$, isto é, $A = QR$. ∎

A prova do teorema 4.1.2 é construtiva e nos dá uma receita para o cálculo de Qe R. Veremos agora quantas manipulações algébricas esta construção requer. Primeiro, considere o custo para multiplicar um rotor simples por um vetor:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 + sx_2 \\ -sx_1 + cx_2 \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

Claramente quatro multiplicações e duas adições são necessárias. Agora, quantos cálculos requer para converter A em $Q_{21}^T A$? Q_{21}^T funciona apenas nas linhas 1 e 2, e no interior dessas linhas ele converte $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} ca_{1j} + sa_{2j} \\ -sa_{1j} + ca_{2j} \end{bmatrix}$, $j = 1, ..., n$, como em 3.1.3. O custo total de multiplicações é $4n$ e de adições é $2n$. O custo para determinar c e s é de 2 multiplicações, uma raiz quadrada, e duas divisões [cf., 3.1.2 com x_i e x_j substituídos por a_{11} e a_{21}, respectivamente], que é desprezável em comparação com $4n$. O custo de aplicação de cada um $Q_{31}, Q_{41}, ..., Q_{n1}$ é também de $4n$ multiplicações e $2n$ adições. Uma vez que existem $n-1$ destes rotores em todos, o custo total da criação de zeros na primeira coluna de A é de cerca de $4n^2$ multiplicações e de $2n^2$ adições.

O custo para a criação de zeros na segunda coluna é ligeiramente menor, porque não há necessidade de operar sobre os zeros na primeira coluna e há um menor rotador. Com efeito, a tarefa de criar zeros na segunda coluna é a mesma que a de criar zeros na primeira coluna, com exceção de que as operações são realizadas nas $(n-1) \times (n-1)$ submatrizes obtidas mediante a supressão da primeira linha e primeira coluna. Assim, o custo é de cerca de $4(n-1)^2$ multiplicações e de $2(n-1)^2$ adições. Similarmente a tarefa de criar zeros na terceira coluna é de cerca de $4(n-2)^2$ multiplicações e $2(n-2)^2$ adições, e assim por diante.

Assim, o custo total para a transformação de uma forma triangular superior é de cerca de $4n^2 + 4(n-1)^2 + 4(n-2)^2 + ... \approx \frac{4n^3}{3}$ multiplicações e $\frac{2n^3}{3}$ adições. Isso é cerca de três vezes mais caro do que a decomposição LU, que requer $\frac{n^3}{3}$ multiplicações e $\frac{n^3}{3}$ adições.

Como veremos em breve, a decomposição QR pode ser efetuada utilizando refletores com apenas $\frac{2n^3}{3}$ multiplicações e $\frac{2n^3}{3}$ adições. Mesmo assim, o custo é ainda duas vezes mais caro que o da decomposição LU.

Acontece que existe uma maneira inteligente de programar rotadores de modo que o número de multiplicações necessárias é reduzido pela metade. Assim, pode-se calcular com rotores mais ou menos com o mesmo custo quando usa-se refletores. Rotores programados em especial, têm um caminho um pouco mais complicado, são chamados de *Rápidas rotações de Givens*, *Rápidos rotadores em escala* ou simplesmente *Rotadores rápidos*. (O estudo desses rotores não será abordado aqui).

3.2 Transformações de Householder

Definimos no capítulo 2 matrizes chamadas Refletores ou Transformações de Householder. Iniciaremos nossa seção citando importantes teoremas no estudos de desses operadores e finalizaremos relembrando o fato para a escolha de um vetor u não norma-

lizado.

Teorema 3.2.1 *Seja u um vetor diferente do vetor nulo em $\mathbb{R}^n$, e defina $\gamma = \dfrac{2}{\|u\|^2}$ e $Q = I - \gamma uu^T$. Então Q é um refletor.*

Demonstração:
Seja $\hat{u} = \dfrac{u}{\|u\|}$. Então $\|\hat{u}\| = 1$ e podemos verificar que $Q = I - 2\hat{u}\hat{u}^T$.

■

Teorema 3.2.2 *Seja $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq y$ mas $\|x\| = \|y\|$. Então existe um único refletor Q tal que $Qx = y$.*

Demonstração:
Existência de Q:

Temos que encontrar um u tal que $(I - \gamma uu^T)x = y$, onde $\gamma = \dfrac{2}{\|u\|^2}$. Vamos considerar o caso $n = 2$, o qual é representado na Figura 3.1. Vamos denotar L a linha que corta o ângulo entre **x** e **y**. A reflexão de **x** através de L , é **y**.

Assim, é necessário um vetor u que seja ortogonal a L. Parece que $u = x - y$, ou qualquer dos seus múltiplos, é a escolha certa. Seja $u = \dfrac{x-y}{\|(x-y)\|}$ e $Q = I - 2uu^T$. Para provarmos que $Qx = y$, vamos primeiro decompor **x** em uma soma:

$$x = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(x+y)$$

Claramente vemos que $\dfrac{1}{2}(x-y)$ é um múltiplo de u. Portanto pelo Teorema 2.4.2, parte *(i)*, $Q\left(\dfrac{1}{2}(x-y)\right) = -\dfrac{1}{2}(x-y)$. A Figura 3.2 sugere que $\dfrac{1}{2}(x+y)$ é ortogonal a u. Para verificar isto, nós calculamos o produto interno:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2}(x+y), u \right\rangle &= \frac{1}{2}\|(x-y)\|^{-1}(x^2 - y^2) \\ &= \frac{1}{2}\|(x-y)\|^{-1}\langle x+y, x-y\rangle\end{aligned}$$

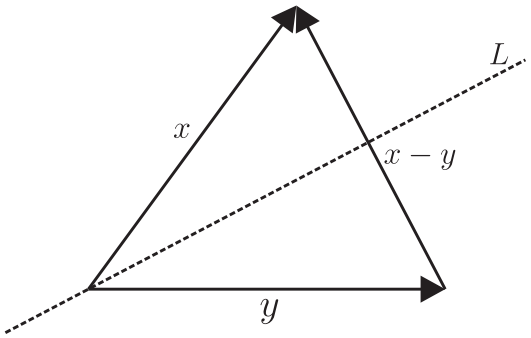
Agora, $\langle x+y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$, porque da hipótese $\|x\| = \|y\|$. E agora segue do Teorema 2.4.2, parte *(ii)*, que $Q\left(\dfrac{1}{2}(x+y)\right) = \dfrac{1}{2}(x+y)$. Finalmente:

$$\begin{aligned}Qx &= Q\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) + Q\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \\ &= -\frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(x+y) \\ &= Qx = y\end{aligned}$$

Portanto existe um refletor Q tal que $Qx = y$.

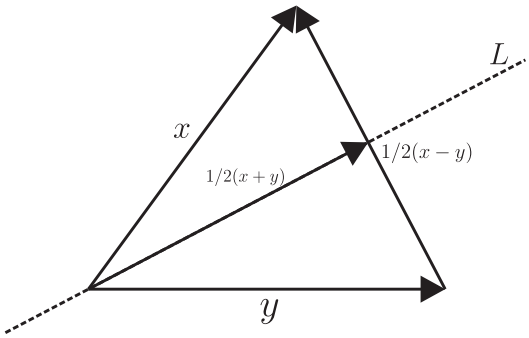
A prova da unicidade não será evidenciada. ■

Figura 3.1: Reflexão através da linha L



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 3.2: Reflexão através da linha L



Fonte: Produção do próprio autor

Do teorema acima resulta facilmente que os refletores podem ser utilizados para criar zeros em vetores e matrizes: Seja $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ um vetor de modo que nem todas as entradas $x_2, x_3, ..., x_n$ são zero, e suponha que queremos transformar $\mathbf{x}$ em um vetor $y = [y_1, y_2, ..., y_n]^T$ tal que $y_2 = y_3 = ... = y_n = 0$.

Seja $\sigma = \pm\|x\|$ e defina $y = [-\sigma, 0, ..., 0]^T$. Então obviamente $\|x\| = \|y\|$ e $y \neq x$, então pelo Teorema 4.2.2, existe um refletor Q tal que $Qx = y$. A partir da prova do Teorema 4.2.2 sabemos que $Q = I - \gamma uu^T$, onde $u = x - y = [x_1 + \sigma, x_2, x_3, ..., x_n]^T$ e $\gamma = \dfrac{2}{\|u\|^2}$. Este é um método simples para calcular u e γ. Nós especificamos que $\sigma = \pm\|x\|$ mas não especificamos o sinal. Em trabalhos teóricos a escolha é qualquer, mas na prática o sinal de σ deve ser escolhido de modo que seja igual a de x_1. Isso nos garante que o cancelamento não pode ocorrer nos cálculos de $x_1 + \sigma$.

Os cálculos de γ são ainda mais fáceis do que parecem. Observe que:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= (x_1 - \sigma)^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1\sigma + \sigma^2 + x_2^2 + ... + x_n \\ &= 2x_1\sigma + \sigma^2 + \|x\|^2 \end{aligned}$$

Mas $\|x\|^2 = \sigma^2$, independentemente do sinal escolhido para σ, de modo que tenhamos $\|u\|^2 = 2x_1\sigma + 2\sigma^2 = 2\sigma(x_1 + \sigma) = 2\sigma u_1$. Ou seja, $\gamma = \dfrac{1}{\sigma u_1}$.

Agora, vamos relembrar o Teorema 4.1.2, o qual prometemos na seção anterior que faríamos sua prova mais detalhada com o uso de refletores. Relembrando o Teorema: *"Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tal que $A = QR$."*

Demonstração: Teorema 4.1.2 usando refletores.

A prova é por indução sobre n. Quando $n = 1$, tomamos $Q = [1]$ e $R = [a_{11}]$ para obtermos $A = QR$.

Agora vamos assumir que o resultado seja válido para matrizes $(n-1)\times(n-1)$ e também para matrizes $n \times n$. Seja $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ um refletor que cria zeros na primeira coluna de A:

$$Q \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

Lembrando que Q_1 é simétrica, podemos ver que $Q_1^T A$ tem a forma:

$$Q_1^T A = Q_1 A = \left[\begin{array}{c|c} -\sigma_1 & \widehat{a}_{12}\ldots\widehat{a}_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \widehat{A}_2 \\ 0 & \end{array}\right] \tag{3.2.5}$$

Pela hipótese de indução $\widehat{A}_2$ tem uma decomposição QR: $\widehat{A}_2 = \widehat{Q}_2\widehat{R}_2$, onde $\widehat{Q}_2$ é ortogonal e $\widehat{R}_2$ é triangular superior. Defina $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ por:

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ldots0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \widehat{Q}_2 \\ 0 & \end{array}\right] \tag{3.2.6}$$

Em seguida, obviamente que Q_2 é ortogonal, e:

$$Q_2^T Q_1^T A = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ldots0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \widehat{Q}_2^T \\ 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} -\sigma_1 & \widehat{a}_{12}\ldots\widehat{a}_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \widehat{A}_2 \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -\sigma_1 & \widehat{a}_{12}\ldots\widehat{a}_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \widehat{R}_2 \\ 0 & \end{array}\right] \tag{3.2.7}$$

Esta matriz é triangular superior. Vamos chamá-la de R. Assim, $Q_2^T Q_1^T A = R$. Seja $Q = Q_1 Q_2$. Onde Q é ortogonal e $Q^T A = R$, portanto $A = QR$. ■

Vamos ver agora como a decomposição QR utilizando refletores, pode ser usada para resolver o sistema de equações lineares $Ax = b$. Esta é uma maneira cara para resolvermos um sistema linear mas é um bom exemplo. Temos que $A = QR$, nossa tarefa é resolver $QRx = b$. Seja $Rx = c$, é preciso primeiro resolver $Rx = c$ para x. Em primeiro lugar $c = Q^T b = Q_{n-1}...Q_2Q_1b$, assim podemos aplicar os refletores $Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}$ sucessivamente para b, para obter c. Aplicando Q_1 o custo é de $2n$ flops[1]. Aplicando Q_2 o custo é apenas de $(n-1)$ flops pois por ser um refletor $(n-1) \times (n-1)$ ele não toca a primeira entrada de Q_1b. Do mesmo modo Q_3 não toca as duas primeiras entradas de Q_2Q_1b, e o custo dessa aplicação é de $2(n-2)$ flops. O custo total de cálculos para obter c é menos de $2n+2(n-1)+2(n-2)+... \approx n^2$ flops. Finalmente $Rx = c$ pode ser resolvido para x por uma retro-substituição a um custo de $\frac{n^2}{2}$ flops. Não esqueçamos que os pivôs são armazenados com $-\sigma_1, ..., -\sigma_n$.

As propriedades numéricas de ambos os rotores e refletores são excelentes. A estabilidade computacional é preservada sob a aplicação repetida de rotores e/ou refletores. Os aspectos técnicos a respeito da construção de algoritmos para implementação computacional não serão vistos neste trabalho por motivo de brevidade e por ser tema para futuros trabalhos.

3.3 Breves biografias

Nesta seção será feita uma breve introdução da biografia dos dois grandes nomes no estudo de rotações e reflexões respectivamente.

3.3.1 James Wallace Givens

Wallace Givens, nasceu em Alberene na Virgínia em 1911. Matemático e pioneiro no campo da ciência da computação conquistou seu diploma de bacharel aos 17 anos (ano de 1927) por Lynchbur College. Realizou seu mestrado na Universidade de Virgínia e seu doutorado em Matemática na Universidade de Princeton. Durante seus estudos em Princeton, Givens trabalhou no Instituto de estudos avançados como assistente, dentre outras universidades, trabalhou também na Argonne National Laboratory. Na década de 1950 apresentou para analistas numéricos as Rotações de Givens, nomeadas desta forma após terem sido apresentadas. Foi nomeado em 1960 como cientista sênior da Argonne National Laboratory e amplamente honrado nos Estados Unidos e na Europa. Wallace Givens teve 3 filhos e 4 netos. Faleceu em 5 de março de 1993 aos 82 anos.

[1] Os flops são uma unidade de medida que serve para mensurar a quantidade de operações de ponto flutuante por segundo.

3.3.2 Alston Householder Scott

Alston Householder, nasceu em 5 de maio de 1904 em Rockford em Illinois. Estudou filosofia na Northwestern University em Evanston em Illinois, conquistando seu título de bacharel em 1925. Já em 1927 conclui seu mestrado em filosofia pela Universidade de Cornell em Ithaca, Nova Iorque. Ensinou matemática em vários lugares diferentes e começou a trabalhar para seu doutorado em matemática. Em 1937 com a sua tese sobre o cálculo das variações, foi premiado com o seu Ph.D pela Universidade de Chicago. No início de sua carreira seus interesses estavam ligados as aplicações da matemática à biologia, mas após seu envolvimento em 1946 na guerra, Householder moveu-se aos estudos em análise numérica que crescia na época devido aos avanços da computação. Em 1950 começou a publicar alguns métodos numéricos para resolver sistemas de equações lineares, vislumbra-se nesses estudos as Reflexões de Householder. Em 1964 publicou um dos seus livros mais importantes, *A teoria de matrizes em análise numérica*. Suas contribuições nessa área foram evidentes e preciosas, no ano de 1969 recebeu o Harry Memorial Award, uma medalha e US$2.000 concedidos pela Sociedade de computação. Householder foi ainda professor de Matemática na Universidade de Tennesse. Morreu em Malibu na Califórnia em 4 de julho de 1993 aos 89 anos.

No próximo e último capítulo teremos a apresentação de um materia concreto como sugestão de aplicação nas aulas de transformações lineares, finalizando o estudo das transformações de Givens e Householder.

Capítulo 4

TRANSFORMAÇÕES LINEARES: ASPECTOS DIDÁTICOS

Neste capítulo abordaremos os aspectos didáticos do ensino de transformações lineares. Apresentaremos uma sugestão de material concreto para tal ensino, assim como sua construção, aplicação e resultados. Aliado a utilização do artefato construído, introduziremos um teste de sondagem em duas turmas de graduação. Além disso, será visto rapidamente algumas atividades com o uso dos softwares *Geogebra* e *Winplot*, para serem aplicadas nas aulas de álgebra linear, particularmente nas aulas de transformações lineares, como mais uma ferramenta aliada ou não ao artefato. Nesta seção designaremos as transformações de Givens e Householder por rotações e reflexões já que esta designação é amplamente utilizada nos livros didáticos onde nos deteremos as transformações lineares no plano e no espaço.

4.1 Introdução: O ensino de transformações lineares e os recursos didáticos

Vários pesquisadores já têm escrito sobre as dificuldades na aprendizagem ds conteúdos de álgebra linear, por exemplo, segundo Sierspinska (1999) uma das dificuldades na aprendizagem é o formalismo utilizado na álgebra linear, esta dificuldade promove nos estudantes um comportamento de automatização através da mecanização da resolução de problemas e de demonstrações em detrimento do entendimento dos conceitos. Outra dificuldade é a demonstração de teoremas onde o desafio é o entendimento da linguagem axiomática-dedutiva usada em matemática e em particular em álgebra linear. Segundo Hillel (1994) a dificuldade em fazer demonstrações, reside no fato de que os estudantes não entendem a necessidade de se fazer a "prova"de um determinado resultado e nem porque existem várias técnicas de se "provar". Este fato é notado com mais frequência nos

cursos de engenharia. Em relação ao conteúdo de transformações lineares observa-se com frequência a dificuldade de entendimento do conceito de uma transformação linear, em particular as transformações geométricas com o uso de transformações lineares (homotetia, rotações, reflexões, projeções), além disso o ensino de transformação linear apresenta outra dificuldade adicional que é a representação de uma transformação linear de duas maneiras diferentes, ora como matriz, ora como aplicação entre espaços vetoriais. Essa diversidade de representação dificulta o entendimento do objeto transformação linear e novamente repete-se a antiga fórmula de mecanização onde sugere-se a resolução de muitos exercícios para que se alcance o entendimento do conceito de transformação linear e suas diversas representações.

O conteúdo de álgebra linear é muito importante para estudantes universitários das áreas de ciências exatas, mas também é consenso, segundo o ponto de vista dos estudantes, que o aprendizado desta matéria é muito difícil. Como ensinar álgebra linear de uma maneira mais efetiva é um problema delicado para os professores. Entre a grande maioria dos professores universitários ainda se mantém a metodologia tradicional, quer seja pelo grau de abstração que a disciplina envolve, quer seja pelo tempo disponível para se desenvolver o conteúdo, ou pela dificuldade de referencial teórico que privilegie o elo entre a teoria e prática no ensino de álgebra linear. Esta metodologia de ensino continua gerando um alto grau de reprovação, mas pior que isto, é o fato dos estudante que são aprovados saírem sem entender o conteúdo que foi ministrado e como aplicá-lo em problemas práticos.

Segundo Mandler (MANDLER et all, 2008) em uma pesquisa feita na UDESC (Universidade do Estado de Santa Catarina), os estudantes apresentam deficiências de aprendizagem no conteúdo de álgebra linear, além de outros, e isso se deve ao fato que os alunos não conseguem estabelecer relações entre os conteúdos da disciplina que estão estudando e não possuem o raciocínio lógico desejado. Outra pesquisa que também aponta o alto índice de reprovação na disciplina de álgebra linear é a dissertação de mestrado de Marcos Roberto Celestino (CELESTINO, 2000) "Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear : as pesquisas brasileiras na década de 90", que aponta os índices de reprovação na UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) nos anos de 1993 a 1997. Neste mesmo trabalho também são apontados altos índices de reprovação na UNESP (Universidade Estadual Paulista) e na USP (Universidade de São Paulo).

Mônica Karrer, em sua tese de doutorado (KARRER, 2006) elaborou um estudo sobre transformações lineares vistas do ponto de vista das representações semióticas e também constatou a dificuldade dos estudantes em transitar entre o registro algébrico e o registro gráfico e a dificuldade de entendimento das diversas representações do objeto transformações lineares. Karrer também efetuou um estudo dos livros didáticos de álgebra linear e constatou que as diversas literaturas consultadas não mencionam o uso de software ou, quando o mencionam "estes não são efetivamente inseridos durante a ex-

posição do conteúdo, sendo normalmente indicados em atividades complementares, com finalidade exclusiva de minimização do trabalho com cálculos"(KARRER, 2006, p. 347). De modo a verificar se a introdução de um software no ensino de transformações lineares poderia melhorar o aprendizado ela elaborou uma série de atividades com o software *Cabri-Géomètre* em várias turmas e concluiu, especificamente em relação a uma turma de Design, onde as atividades foram aplicadas, que:

> Diante do exposto, concluímos que a utilização dos recursos do software como apoio para a construção e resolução das atividades do Design trouxe aos estudantes participantes do experimento grandes benefícios na conceitualização das transformações lineares planas. Isto porque o seu uso permitiu a exploração de situações não usuais no ensino das transformações lineares, o estabelecimento e validação experimental de conjecturas, o trabalho com conversões envolvendo o registro gráfico e a inter-relação dinâmica entre os diferentes registros.
> Além disso, as situações desenvolvidas no ambiente computacional permitiram uma visão aplicada de propriedades relacionadas ao conceito de transformação linear no plano, como por exemplo, a obtenção da aplicação linear que transformava a circunferência na elipse e a construção do programa de composição de transformações lineares. (KARRER, 2006, p.357).

A grande maioria do professores de álgebra linear não utiliza recursos didáticos (materiais concretos ou recursos computacionais) em suas aulas, seja pela falta de livros didáticos que abordam o assunto seja pela falta de familiaridade com o recursos computacional. A metodologia utilizada pela maioria dos professores ainda é a "aula tradicional"onde o conteúdo é exposto apenas na lousa e após isso são solicitados aos estudantes que resolvam inúmeros exercícios. Que fique claro que não somos contra a resolução de exercícios, esta é uma parte importante do processo de aprendizagem, apenas queremos ressaltar o fato que geralmente não são utilizados recursos adicionais é utilizado para o ensino de álgebra linear.

Com base neste panorama decidimos dedicar esta parte do trabalho para fornecer alguns recursos didáticos para o ensino de reflexões e rotações no plano e no espaço já que devido ao aspecto geométrico destas transformações, a inserção de um recurso didático pode facilitar a aprendizagem do estudante, não só dessas duas transformações mas de outras também. Neste sentido foi desenvolvido um artefato (material concreto) para o ensino de reflexões e rotações de nossa própria autoria e em seguida foi solicitado a Professora Graciela Moro do DMAT (Departamento de Matemática) do CCT da UDESC, que fizesse a utilização deste artefato em suas aulas, sendo registrada a opinião desta

professora sobre a utilização do artefato. Com o objetivo de verificar o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo de transformações lineares foi aplicado em duas turmas um teste de sondagem e também colhida por meio de um questionário a opinião dos alunos a respeito das aulas com a utilização do artefato.

4.2 Aspectos metodológicos

A metodologia a ser utilizada nesta seção foi a pesquisa teórica sobre sobre transformações lineares e recursos didáticos para o ensino de reflexões e rotações no plano e no espaço. Além da pesquisa teórica foi construído um artefato para o ensino de transformações lineares, especificamente as transformações de rotação e reflexão no plano e no espaço e após a construção do artefato verificou-se que o mesmo poderia ser utilizado em outros conteúdos, como por exemplo, produto interno. Também foram selecionados recursos computacionais para o ensino de álgebra linear que são expostos no final desta seção com vistas a sua possível utilização em aulas regulares de transformações lineares. Os recursos computacionais envolvendo a utilização dos softwares *GeoGebra* e *Winplot* não foram aplicados a uma turma regular de álgebra linear em virtude do tempo exíguo. O artefato construído foi aplicado a uma turma regular de álgebra linear por meio de uma experimentação didática de modo a observar se a introdução de um material concreto irá fornecer um melhor entendimento do conceito de transformação linear. O principal objetivo desta experimentação foi verificar o comportamento dos alunos em relação ao material didático e também promover a melhoria do aprendizado de transformações lineares. Temos portanto a seguinte hipótese de pesquisa: "A introdução de um material concreto nas aulas regulares de álgebra linear poderá melhorar o desempenho dos estudantes no aprendizado de transformações lineares?"Para validar nossa hipótese elaboramos dois questionários que foram aplicados após as experimentações com o objetivo de verificar o aprendizado dos alunos e sua opinião sobre a utilização do material nas aulas de álgebra linear. O primeiro teste aplicado, denominado teste de sondagem encontra-se no Anexo B a este trabalho e a partir da análise deste teste foram feitos os gráficos de desempenho (análise quantitativa) e uma análise qualitativa das possíveis dificuldades encontradas na resolução das questões. O segundo questionário aplicado (Anexo E) teve como finalidade obter dos alunos uma opinião sobre a utilização do artefato em sala de aula e a partir das respostas e dos comentários dos alunos foram analisadas as expectativas dos alunos em relação a presença do material concreto e se o mesmo ajudou na compreensão de transformações lineares. Especificamente a questão 1 deste questionário foi analisada com mais detalhes com isso pode-se validar nossa hipótese de pesquisa. Na seção 4.3 descrevemos a construção do artefato e sua utilização em sala de aula, na seção 4.4 é feita a explanação sobre o teste de sondagem incluindo os gráficos de desempenho e a análise dos mesmos, na

seção 4.5 é feita uma análise da metodologia aplicada e na seção 4.6 é feita a apresentação dos softwares *Winplot* e *GeoGebra* e sua utilização no ensino de transformações lineares.

4.3 Material concreto: construção e aplicação do artefato

Nesta seção apresentaremos o artefato construído como um recurso didático para as aulas de álgebra linear no assunto de transformações lineares, bem como sua aplicação e atividades trabalhadas.

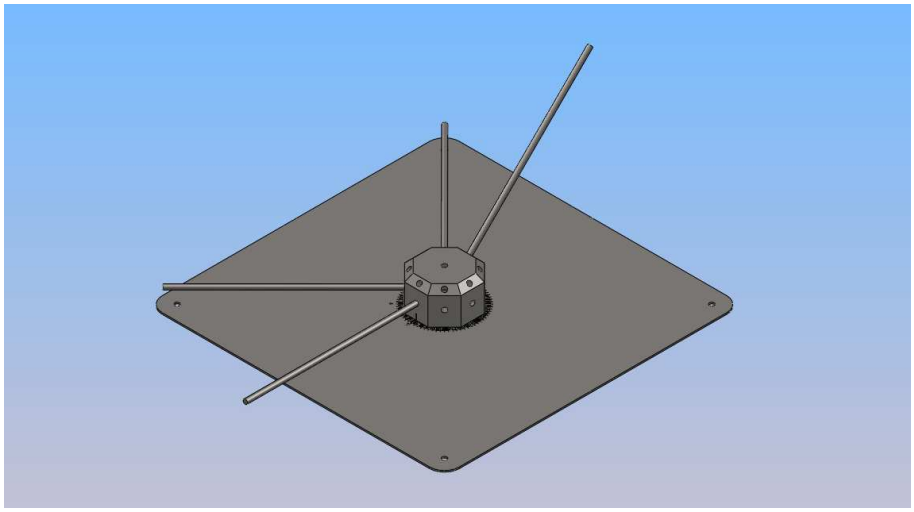
4.3.1 Motivação para a construção do artefato

Como já foi comentado, a matéria de álgebra linear tem como característica o alto grau de abstração. O assunto de transformações lineares não escapa dessa característica. Alguns alunos apresentam uma grande dificuldade em visualizar as transformações geométricas tanto em duas dimensões quanto em três dimensões, é claro que o fato dessa maior dificuldade se atém a visualização em 3 dimensões. Dessa maneira, pensando numa possibilidade de minimizar essa dificuldade e tornar a aula sobre o assunto de transformações lineares menos abstrata, foi elaborado um projeto de artefato para uso nessas aulas, junto com sua construção e aplicação.

4.3.2 O projeto inicial do artefato

A ideia inicial era construir um artefato que tornasse o estudo de reflexão e rotação mais fácil de se visualizar conforme ilustra a Figura 4.1. Pensando nisso, o artefato acabou sendo desenvolvido para tratar todas as outras transformações geométricas, podendo ainda ser utilizado em outras disciplinas adaptando-se as carências que tais disciplinas oferecem quanto a visualização tri-dimensional.

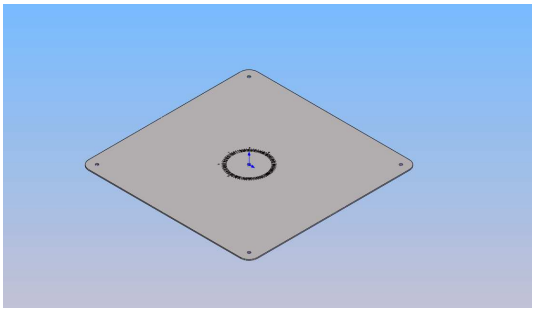
Figura 4.1: Projeto inicial



Fonte: Produção do próprio autor

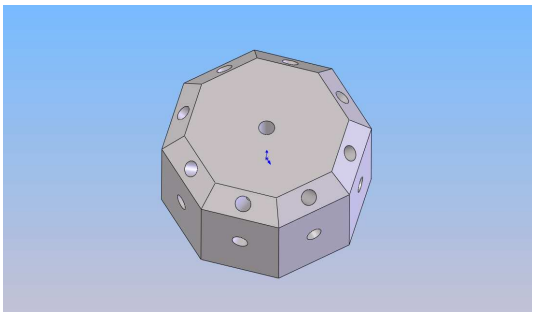
O artefato foi construído em alumínio sendo composto de uma base com uma marcação de 360 graus (Figura 4.2), um bloco (Figura 4.3) encaixado por um pino (Figura 4.4) que possibilita esse bloco a ser removido e girado em qualquer momento e de oito hastes (Figura 4.5) que fazem o papel de "vetores"em nosso estudo, que são encaixadas e desencaixadas a todo momento do bloco. Além disso para o auxílio na explicação de todas as transformações geométricas, foi agregado a esse conjunto de peças do artefato, duas antenas (antenas simples de televisão), que fazem o papel de "vetores"numa contração ou dilatação, por exemplo.

Figura 4.2: Base



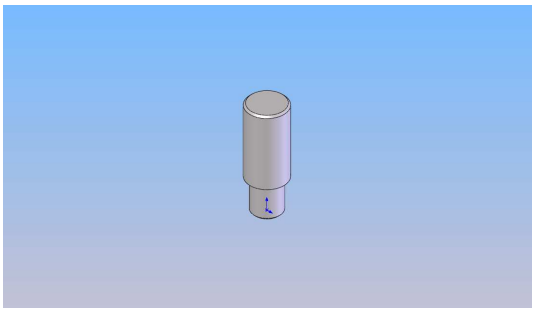
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.3: Bloco



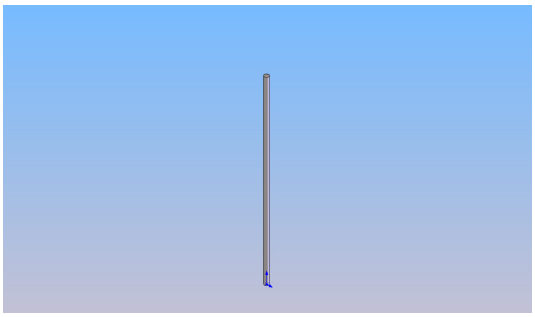
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.4: Pino de encaixe do bloco



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.5: Haste



Fonte: Produção do próprio autor

4.3.3 Aplicação do artefato nas aulas

Conforme já dito, o artefato foi construído com o intuito de auxiliar o professor nas aulas de álgebra linear, particularmente no assunto de transformação linear. Assim, solicitamos a professora Graciela Moro (Figura 4.6) com sua autorização de imagem, que utilizasse o artefato em suas aulas, nas duas turmas que leciona a disciplina de álgebra linear, ou seja, nas turmas de Engenharia Elétrica e Matemática da UDESC. O planejado era que ela trabalhasse com o artefato tanto nas aulas de transformações lineares no plano quanto nas aulas de transformações lineares no espaço. Após essas aulas ministradas com um recurso didático, seria aplicado um teste para sondar o aprendizado dos alunos. Comentaremos isso na próxima seção.

Seguindo seu método e cronograma da disciplina, a professora aliou o artefato e desenhos no quadro nas suas aulas em todos os exemplos de transformações geométricas, primeiro no plano e depois no espaço. Dentre as atividades trabalhadas foram:

1) No plano:

a) Reflexão através do eixo x;

b) Reflexão através do eixo y;

c) Reflexão através da origem;

d) Reflexão através de uma reta qualquer;

e) Dilatação, contração e cisalhamento;

f) Reflexão em torno da reta $y = x$ e da reta $y = -x$;

g) Projeção sobre um reta no plano;

h) Rotação de um ângulo θ; (Figura 4.7)

Figura 4.6: Professora utilizando o artefato

Fonte: Produção do próprio autor

2) No espaço:

a) Reflexão através de uma reta no espaço; (Figura 4.8)

b) Reflexão através dos eixos coordenados;

c) Reflexão em relação aos planos coordenados;

d) Reflexão na origem;

e) Projeção no plano;

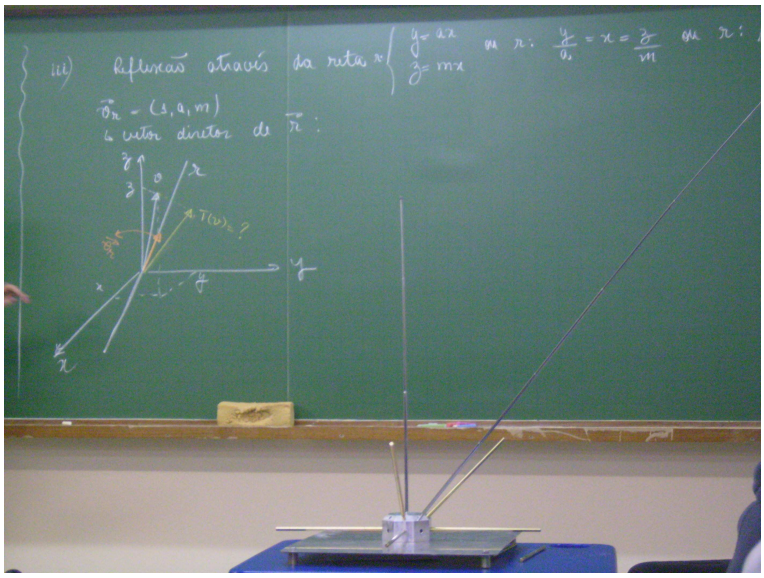
f) Reflexão através do plano;

g) Rotação no espaço; (Figura 4.9)

Figura 4.7: Rotação no plano

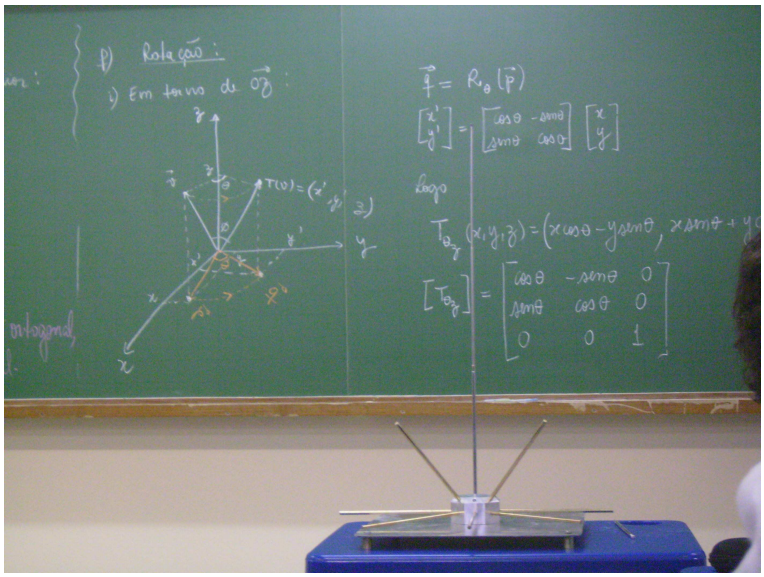
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.8: Reflexão através de uma reta no espaço



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.9: Rotação no espaço



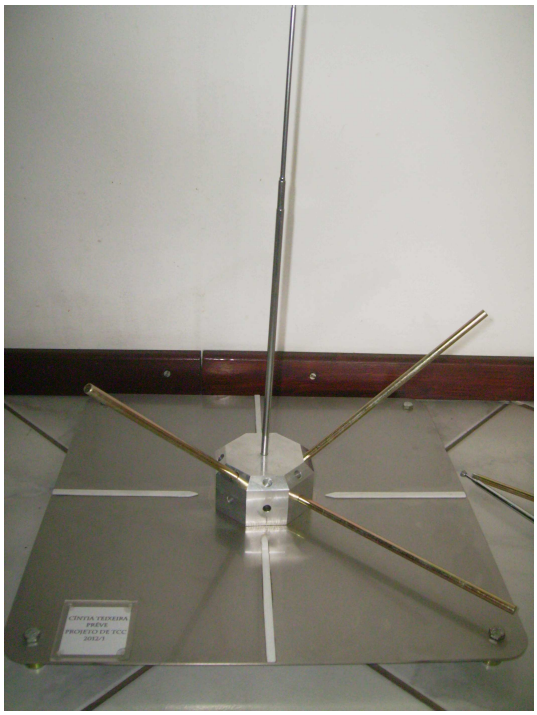
Fonte: Produção do próprio autor

A avaliação do artefato nas aulas será feita posteriormente, tanto pelos alunos quanto pela professora.

4.3.4 O artefato final

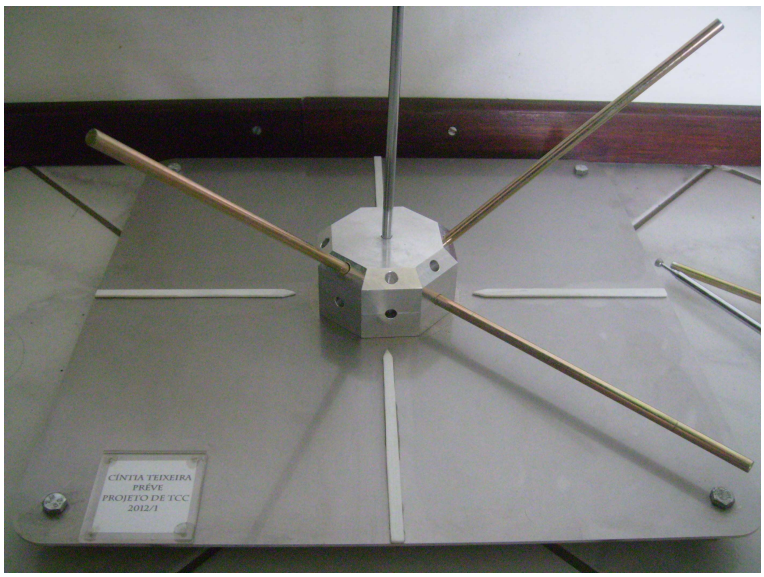
Durante a utilização do artefato observou-se uma deficiência em sua construção, o fato do artefato não possuir os eixos fixos na base fez com que a professora apresentasse dificuldades quando explicava a transformação de rotação no plano e no espaço. Uma vez que os eixos por ela estipulados no início acabavam girando junto com o bloco quando ela rotacionava uma haste (vetor), assim perdia-se o referencial, o que causava uma certa confusão dos alunos. Dessa forma modificou-se a base do artefato (Figura 4.10 e Figura 4.11) fixando os eixos, a fim de tornar o seu uso apropriado na explicação de rotações no plano e no espaço, sem perda do referencial inicial de um vetor. E ainda, a Figura 4.12 mostra com mais detalhes o eixo fixado assim como uma de suas hastes que fazem o papel de vetor e o bloco que rotaciona os "vetores".

Figura 4.10: Artefato final



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.11: Artefato final

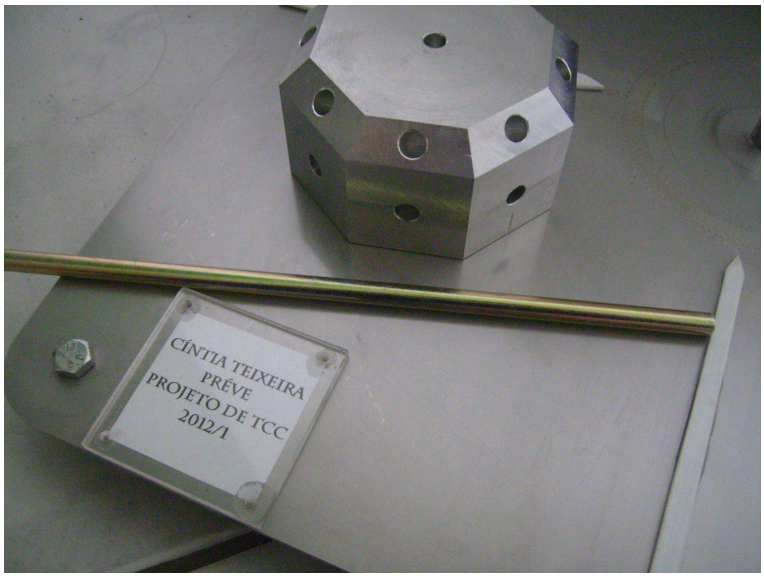


Fonte: Produção do próprio autor

4.4 Teste de sondagem

Conforme dito na seção anterior, agora abordaremos o teste de sondagem aplicado com os alunos das duas turmas de álgebra linear citadas anteriormente, bem como uma análise dos alunos em cada questão do teste e o desempenho geral das duas turmas.

Figura 4.12: Haste, bloco e eixo fixo



Fonte: Produção do próprio autor

4.4.1 O teste

O teste de sondagem (ANEXO B) com a autorização de cada aluno, foi aplicado na turma de Engenharia Elétrica antes da realização da prova de álgebra linear que abordou o assunto de transformações lineares e foi aplicado posteriormente à prova na turma de Matemática. O teste foi composto de 6 questões envolvendo definições e conceitos geométricos das transformações lineares. Foi aplicado com a finalidade de coletar informações sobre o uso do artefato nas aulas sobre transformações lineares, ou seja, se de alguma maneira a utilização desse recurso didático fez-se presente no entendimento dos alunos, principalmente tratando-se das questões geométricas. E ainda, tinha o propósito de auxiliar os alunos nos estudos antes da prova no caso da turma de Eng. Elétrica e assimilar os conceitos já estudados na turma de Matemática.

4.4.2 Análise do teste por questão

Conforme dito acima o teste foi formulado com seis questões as quais citaremos cada uma num âmbito avaliativo e comparativo seguidas de comentários observados nas respostas dos alunos. A análise das questões dar-se-á por turma.

Turma de Engenharia elétrica

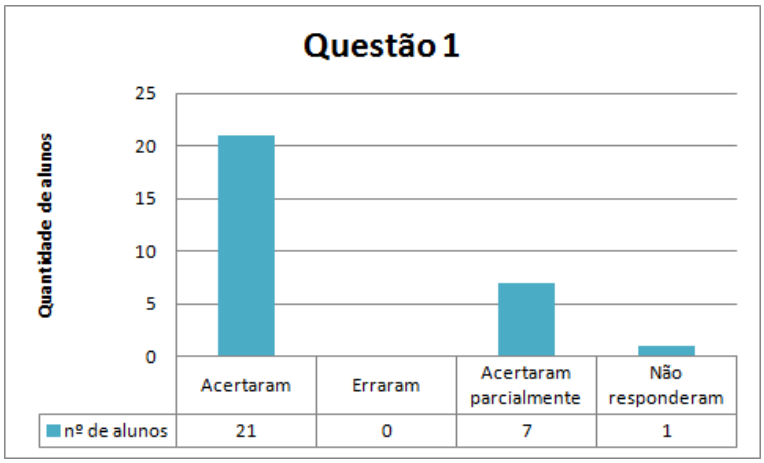
Nesta turma 29 alunos fizeram o teste e foram avaliados.

A questão 1 e a questão 3 serão abordadas a princípio separadamente e juntas e comentadas posteriormente, uma vez que a questão 1 e a questão 3 referem-se a mesma definição dita de forma diferente.

Questão 1. Escreva com suas palavras o que você entende por transformação linear.

A Figura 4.13 mostra o desempenho dos alunos nessa questão.

Figura 4.13: Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 1



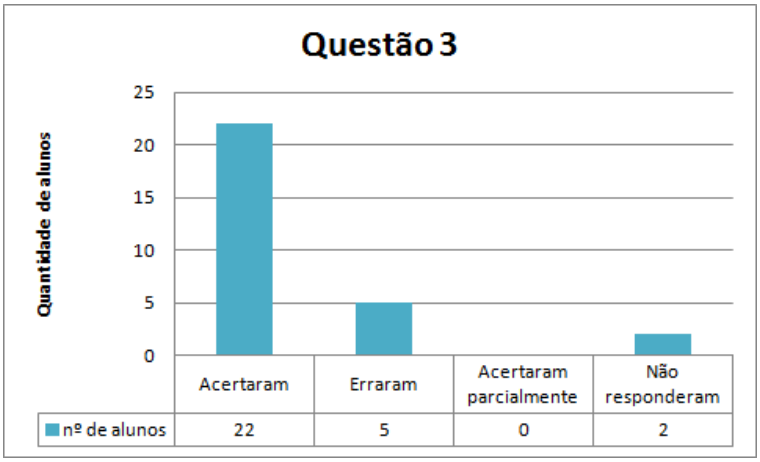
Fonte: Produção do próprio autor

Nota-se que a maioria dos alunos acertaram a questão, e os que acertaram parcialmente, não conseguiram expressar de forma clara o real conceito de uma transformação linear dando respostas vagas.

Questão 3. Considere a seguinte definição de transformação linear: "Uma função $T : V \longrightarrow W$, onde V e W são espaços vetoriais é chamada de transformação linear se $T(ku+v) = kT(u) + T(v)$". Faça uma comparação com a sua definição dada anteriormente e verifique se esta definição está correta ou não. Justifique sua resposta.

A Figura 4.14 mostra o desempenho dos alunos nessa questão.

Figura 4.14: Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 3



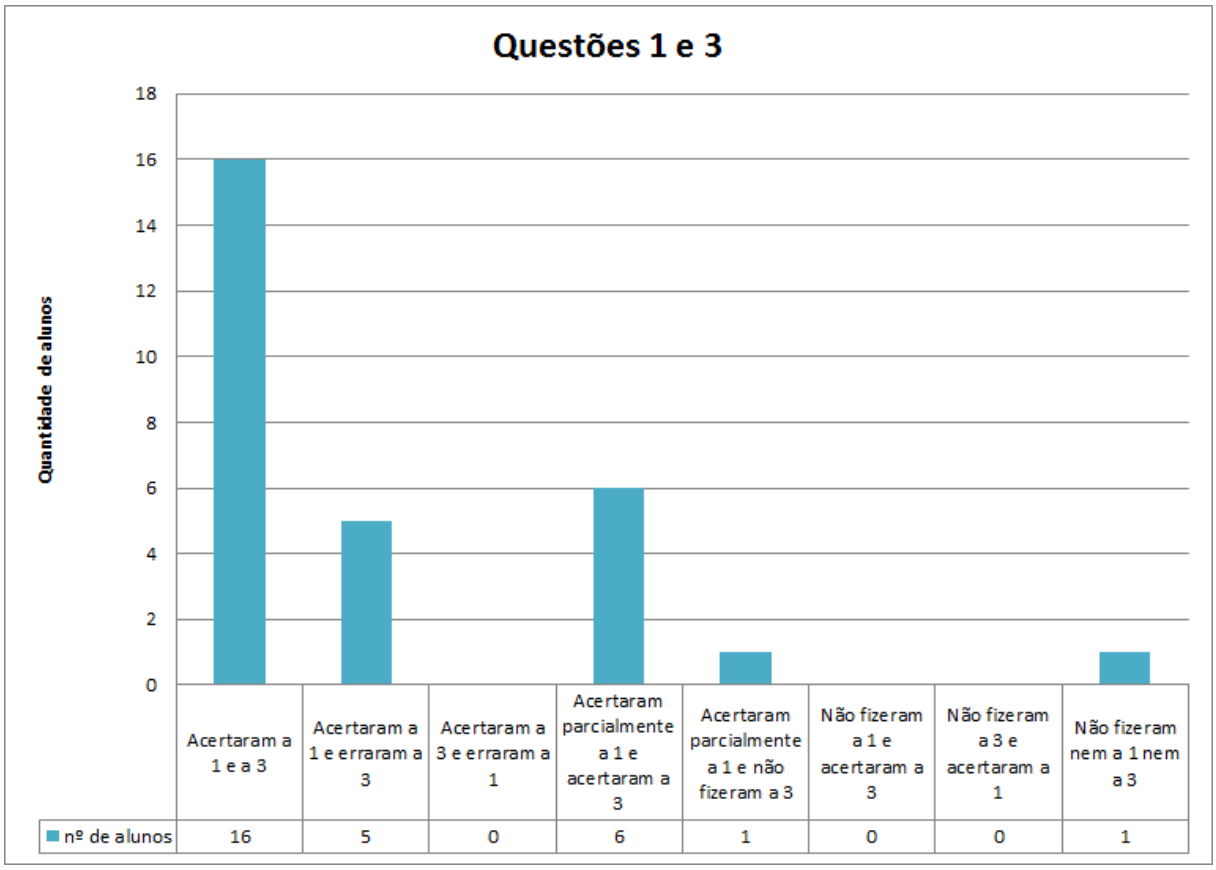
Fonte: Produção do próprio autor

Da mesma maneira que a questão 1 a maioria dos alunos acertaram a questão 3 e por ela depender da questão 1 teve um número de alunos que erraram e de alunos que não responderam.

Um comparativo das duas questões anteriores é apresentado na Figura 4.15.

Comentário: Os alunos que erraram a questão 3 disseram que a definição dada estava errada pois não respeitava a multiplicação por escalar, logo a definição não representava uma definição de transformação linear. Outros disseram ainda, que não estava correta porque a transformação da soma não era igual a soma das transformações e a transformação de um vetor multiplicado por um escalar não era igual ao escalar multiplicado pela transformação de um vetor.

Figura 4.15: Comparativo entre a questão 1 e a questão 3



Fonte: Produção do próprio autor

Questão 2. Na figura abaixo (ver ANEXO B) estão representados os vetores *u, v, T(u) e T(v)* onde $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear. Determine, geometricamente os vetores:

a) $(u + v)$

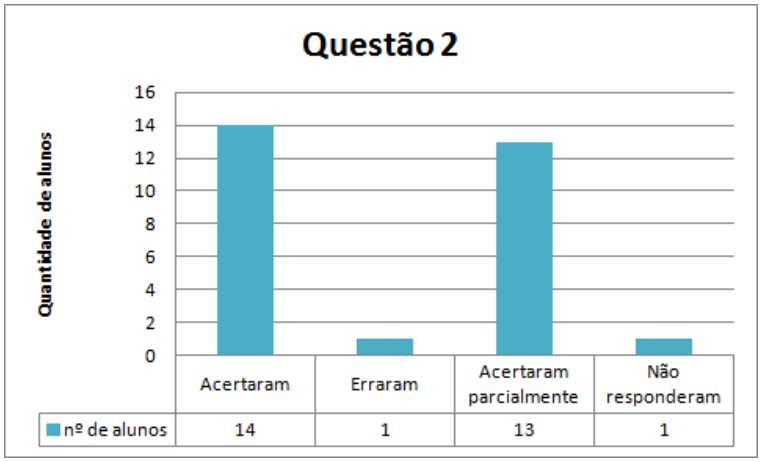
b) $T(u + v)$

c) $(u - v)$

d) $T(u - v)$

A Figura 4.16 reflete o desempenho dos alunos nessa questão.

Figura 4.16: Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 2



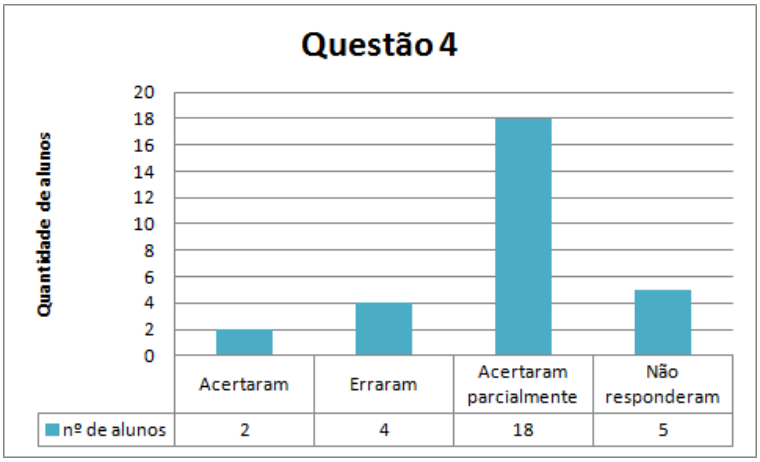
Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: O único aluno que errou a questão, confundiu a soma geométrica de vetores, a resposta dele foi dada pela diagonal menor do paralelogramo formado. E os alunos que acertaram parcialmente, erraram em sua maioria os itens b e d.

Questão 4. Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento? Justifique.

Na Figura 4.17 podemos analisar o desempenho dos alunos na questão 4.

Figura 4.17: Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 4



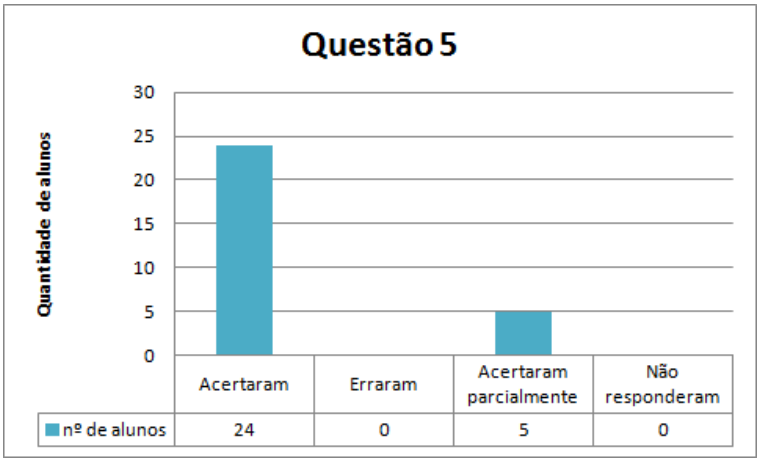
Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: Os alunos que erraram a questão 4 disseram não existir nenhuma transformação linear onde isso pudesse acontecer. Já os alunos que acertaram parcialmente, disseram que existia uma transformação que levasse um quadrado em um segmento, porém erram na justificativa citando outras transformações, o cisalhamento foi a mais citada.

Questão 5. Nos itens de a) a h) são mostradas figuras de transformações geométricas (ANEXO B) no plano. E nos itens de i) a viii) são dadas as expressões de transformações lineares que representam transformações geométricas no plano. Faça a associação de cada transformação geométrica com sua correspondente transformação linear.

A figura a seguir mostra os resultados na questão 5.

Figura 4.18: Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 5



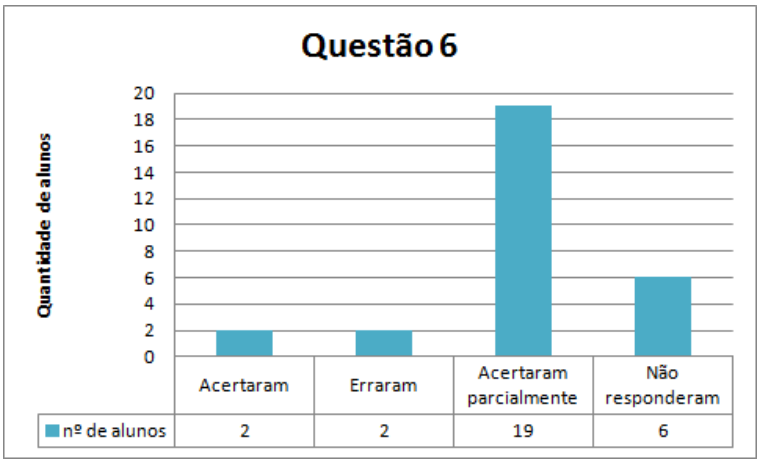
Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: A maioria dos alunos acertaram essa questão, dos que acertaram parcialmente, apenas um aluno acertou um único item, os demais acertaram quatro ou mais dos oito itens.

Questão 6. Algumas das transformações lineares descritas nos itens de i) a viii) acima, têm nomes específicos, cite o item e o respectivo nome da transformação linear.

Na figura 4.19 verifica-se o desempenho dos alunos na última questão do teste de sondagem.

Figura 4.19: Desempenho dos alunos de Eng. Elétrica na questão 6



Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: Dos alunos que acertaram parcialmente essa questão, acertaram 4 ou mais transformações lineares, um único aluno citou apenas o cisalhamento e seis alunos acertaram 3 ou menos das transformações corretas.

Turma de Matemática

Nesta turma 26 alunos fizeram o teste e foram avaliados.

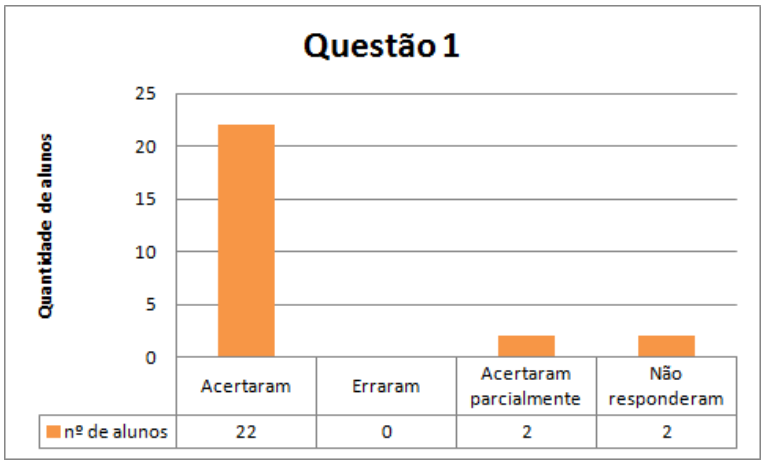
Da mesma maneira utilizada para analisar as questões 1 e 3 da turma de Eng. Elétrica, analisaremos os dados da turma de Matemática. Primeiro as duas questões separadas e logo em seguida ambas num comparativo.

Questão 1. Escreva com suas palavras o que você entende por transformação linear.

A Figura 4.20 mostra o desempenho dos alunos nessa questão.

A maioria dos alunos acertaram a questão, e os que acertaram parcialmente, não conseguiram expressar de forma clara o real conceito de uma transformação linear.

Figura 4.20: Desempenho dos alunos de Matemática na questão 1

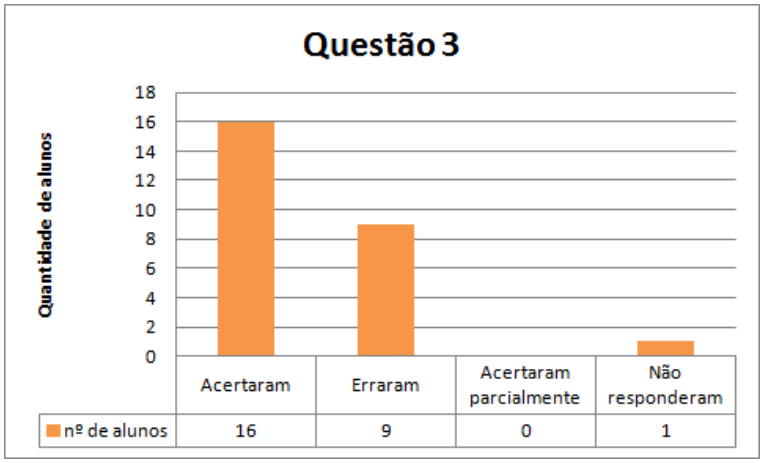


Fonte: Produção do próprio autor

Questão 3. Considere a seguinte definição de transformação linear: "Uma função $T : V \longrightarrow W$, onde V e W são espaços vetoriais é chamada de transformação linear se $T(ku+v) = kT(u) + T(v)$". Faça uma comparação com a sua definição dada anteriormente e verifique se esta definição está correta ou não. Justifique sua resposta.

A Figura 4.21 mostra o desempenho dos alunos na questão 3.

Figura 4.21: Desempenho dos alunos de Matemática na questão 3

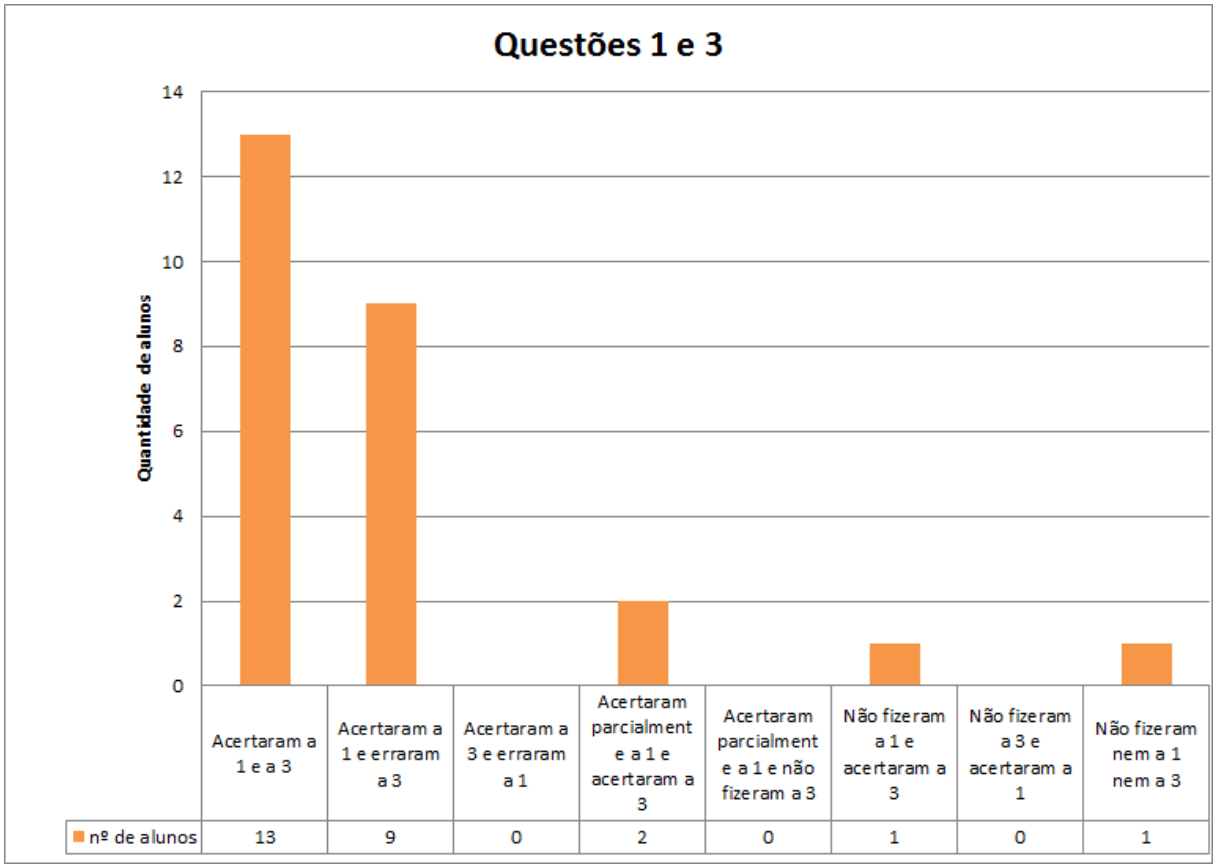


Fonte: Produção do próprio autor

Assim como na questão 1 a maioria dos alunos acertaram a questão 3 e por ela depender da questão 1 teve um número de alunos que erraram, um número de alunos maior se comparado com os números da turma de Eng. Elétrica.

Um comparativo das duas questões anteriores é apresentado na Figura 4.22.

Figura 4.22: Comparativo entre a questão 1 e a questão 3



Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: Um aluno respondeu que a definição que foi citada na questão quebrava a definição de transformação linear citada nos livros. Outros alunos que erraram a questão 3 disseram que a definição dada estava errada pois não respeitava a multiplicação por escalar, logo a definição não representava uma definição de transformação linear. Outros disseram ainda, que não estava correta porque a transformação da soma não era igual a soma das transformações e a transformação de um vetor multiplicado por um escalar não era igual ao escalar multiplicado pela transformação de um vetor. Um aluno afirmou o citado anterior e disse ainda que, a definição dada estava errada porque deveria respeitar separadamente as duas condições e nunca juntas ao mesmo tempo.

Questão 2. Na figura abaixo (ver ANEXO B) estão representados os vetores *u, v, T(u) e T(v)* onde $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear. Determine, geometricamente os vetores:

a) $(u + v)$

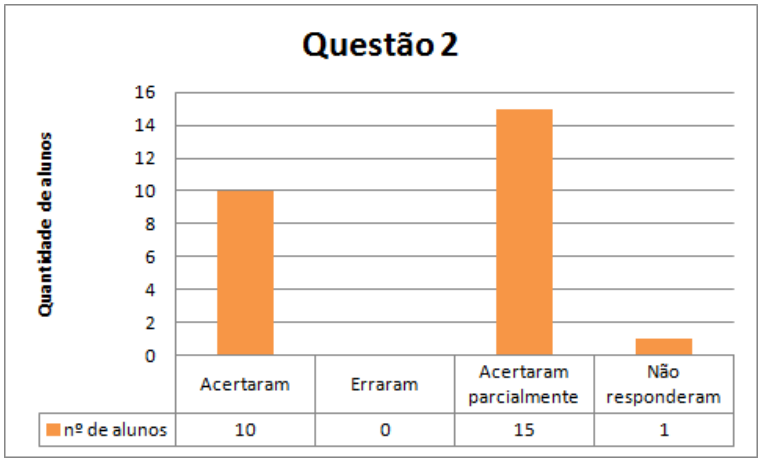
b) $T(u + v)$

c) $(u - v)$

d) $T(u - v)$

A figura a seguir reflete o desempenho dos alunos nessa questão.

Figura 4.23: Desempenho dos alunos de Matemática na questão 2



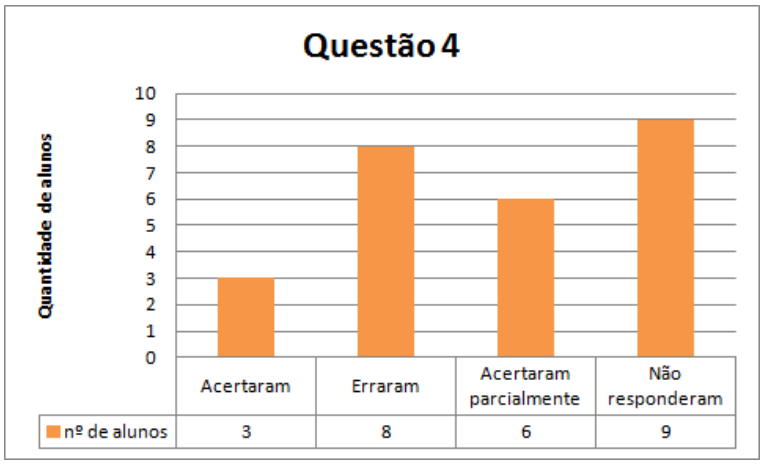
Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: Os alunos que acertaram parcialmente, erraram em sua maioria os itens b) e d) ou apenas o item d).

Questão 4. Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento? Justifique.

Na Figura 4.24 podemos analisar o desempenho dos alunos na questão 4.

Figura 4.24: Desempenho dos alunos de Matemática na questão 4



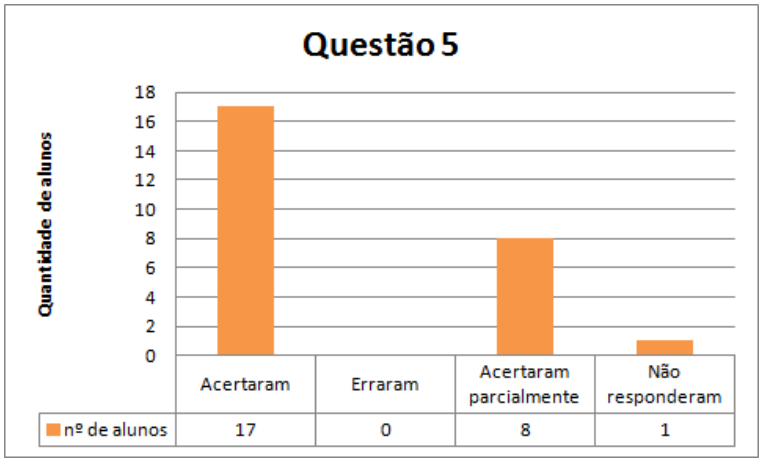
Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: Os alunos que erraram a questão 4 disseram não existir nenhuma transformação linear onde isso pudesse acontecer. Já os alunos que acertaram parcialmente, disseram que existia uma transformação que levasse um quadrado em um segmento, porém não souberam citar qual a transformação ou citaram outras transformações. Em comparação com a turma de Eng. Elétrica apenas um aluno citou o cisalhamento.

Questão 5. Nos itens de a) a h) são mostradas figuras de transformações geométricas (ANEXO B) no plano. E nos itens de i) a viii) são dadas as expressões de transformações lineares que representam transformações geométricas no plano. Faça a associação de cada transformação geométrica com sua correspondente transformação linear.

A Figura 4.25 a seguir mostra os resultados na questão 5.

Figura 4.25: Desempenho dos alunos de Matemática na questão 5



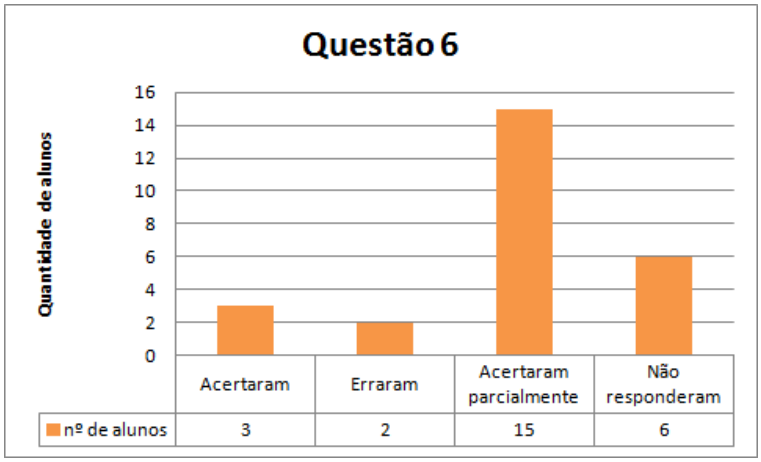
Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: A maioria dos alunos acertaram a questão 5, dos que acertaram parcialmente, dois alunos acertaram um único item, os demais acertaram quatro ou mais dos oito itens.

Questão 6. Algumas das transformações lineares descritas nos itens de i) a viii) acima, têm nomes específicos, cite o item e o respectivo nome da transformação linear.

Na figura abaixo verifica-se o desempenho dos alunos na última questão do teste de sondagem.

Figura 4.26: Desempenho dos alunos de Matemática na questão 6



Fonte: Produção do próprio autor

Comentário: Assim como na outra turma, a maioria dos alunos acertaram parcialmente essa questão,com um número de acertos de 3 ou mais transformações lineares, quatro alunos citaram apenas o cisalhamento.

4.4.3 Análise do teste por turma

De forma breve apresentaremos uma tabela das notas de cada turma onde o teste de sondagem foi aplicado, junto com a média de cada uma delas. Vamos observar que embora os alunos da turma de matemática tenham feito o teste após a realização da prova sobre o assunto de transformações lineares, obtiveram a menor média, e ainda o teste nessa turma foi aplicado após terem se passadas duas semanas das aulas trabalhadas com o artefato. Ao contrário da turma de Eng. elétrica que fez o teste logo na aula posterior a última aula proposta com o recurso didático.

Turma de Engenharia elétrica

Tabela 4.1: Notas da turma de Eng. Elétrica

Notas	8,9	7,4	8,6	8,8	8,7	8,4	8,0	1,8	9,2	8,9	9,1	7,0	8,4
Notas	9,1	8,7	8,4	6,7	7,9	7,7	7,9	5,6	7,6	7,3	8,5	4,6	8,1
Notas	8,1	9,0	8,9										

Fonte: Produção do próprio autor

A mediana da turma de Engenharia Elétrica foi de aproximadamente 8,9.

Turma de Matemática

Tabela 4.2: Notas da turma de Matemática

Notas	6,3	8,5	2,3	8,8	3,8	7,5	7,9	9,0	8,9	4,3	9,5	8,7	2,7
Notas	5,5	8,0	8,1	0,0	9,0	7,5	9,1	7,9	4,9	9,0	8,4	6,8	9,3

Fonte: Produção do próprio autor

A mediana da turma de Matemática foi de 7,8.

4.5 Análise do artefato e das aulas com a sua aplicação

Conforme o proposto pela pesquisa, a metodologia que aliou um recurso didático ao quadro e giz nas aulas de transformações lineares e propôs um teste de sondagem a fim de ressaltar o aprendizado dos alunos neste assunto, foi cumprida. Nesta seção vamos analisar os resultados da aplicação desta metodologia obtidos através de um questionário (ANEXO E) que avaliou a opinião dos alunos segundo a autorização de cada um (ANEXO C e ANEXO D) e de um breve comentário referente a opinião da professora solicitada neste trabalho.

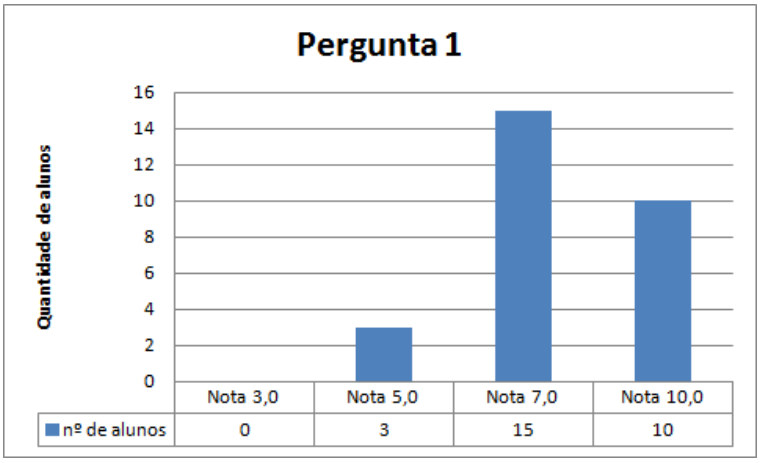
Turma de Engenharia Elétrica

Nesta turma 28 alunos responderam a pesquisa, ou seja, um aluno a menos dos que fizeram o teste.

Pergunta 1. O que você achou da utilização de um artefato nas aulas de transformações lineares? Dê a nota e comente.

A figura abaixo mostra a opinião dos alunos na pergunta 1 do questionário.

Figura 4.27: Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 1



Fonte: Produção do próprio autor

Nos comentários feitos pelos alunos dessa turma, dos que assinalaram a nota 10,0 falaram que o conteúdo de transformações lineares ficou menos abstrato com o uso do artefato facilitando o entendimento da matéria. A maioria dos alunos comentou que o uso deste recurso auxilia na visualização tri-dimensional das transformações, pois esclarece o que não pode ser compreendido no quadro tão facilmente. Outros disseram ser uma ótima ferramenta a ser utilizada, pois ajuda aos alunos que têm dificuldades na percepção espacial. E ainda, um aluno respondeu: "Dentro da álgebra linear foram as aulas mais claras."Tal aluno teve o maior desempenho no teste de sondagem na sua turma.

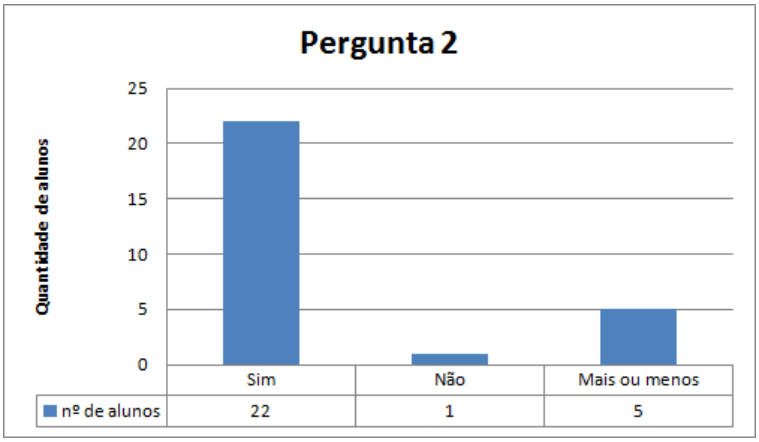
Os alunos que deram nota 7,0 nesta pergunta, em sua maioria disseram que melhora o entendimento e a visualização em $\mathbb{R}^3$, fica mais claro de enxergar o que esta acontecendo. Outros alunos disseram que além do uso deste artefato nas aulas de transformações lineares, deveriam ter outras metodologias diferentes para os demais assuntos da álgebra linear. Nesta turma dois alunos não comentaram sobre a pergunta.

Quanto aos alunos que assinalaram a nota 5,0, disseram que a professora teve dificuldades no manuseio do artefato em certos momentos e um aluno disse que o artefato deveria ser mais flexível.

Pergunta 2. Você conseguiu entender as explicações da professora quando ela utilizava o artefato?

A opinião dos alunos é relatada abaixo.

Figura 4.28: Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 2

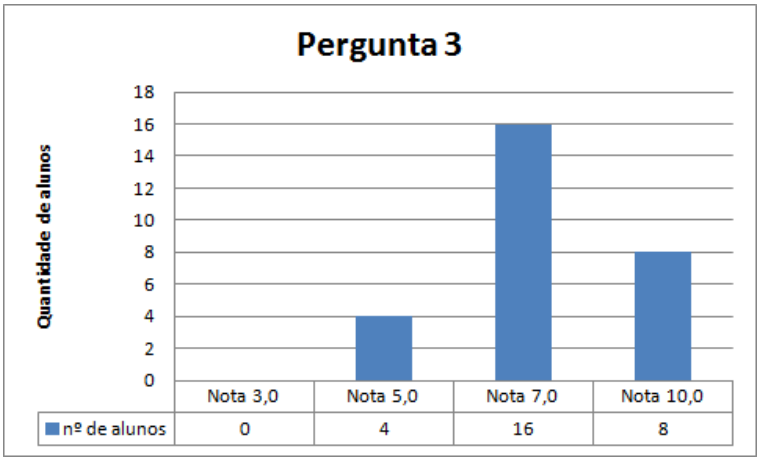


Fonte: Produção do próprio autor

Pergunta 3. Que nota você atribui ao artefato construído para o ensino de transformações lineares?

A opinião dos alunos nessa pergunta é relatada na Figura 4.29.

Figura 4.29: Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 3



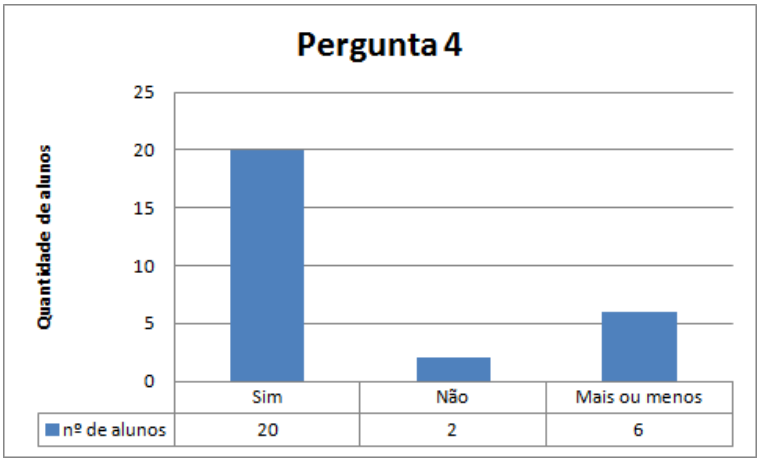
Fonte: Produção do próprio autor

Os alunos responderam ainda uma questão referente ao teste de sondagem aplicado, no caso desta turma, aplicado antes da prova do assunto de transformações lineares.

Pergunta 4. Você acha que o teste aplicado ajudou nos seus estudos da matéria de álgebra linear?

A Figura 4.30 apresenta a opinião dos alunos na pergunta 4.

Figura 4.30: Opinião dos alunos de Eng. Elétrica na pergunta 4



Fonte: Produção do próprio autor

Como pode-se observar, os alunos dessa turma em sua maioria disseram na pergunta 4 que o teste ajudou nos estudos da matéria, uma vez que a prova do assunto de transformações lineares foi anterior a sua aplicação.

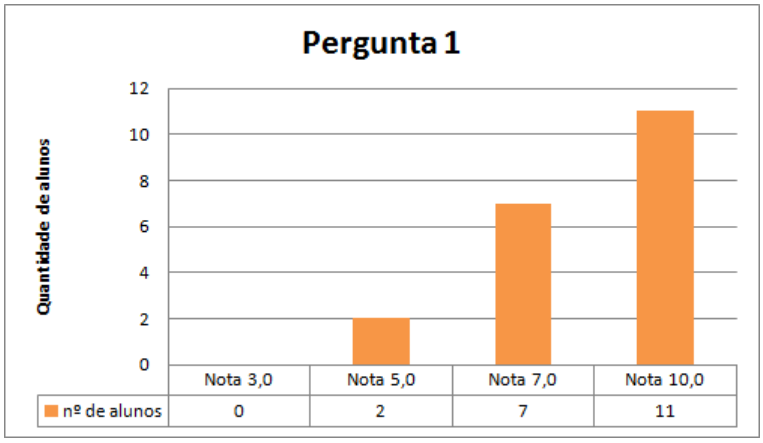
Turma de Matemática

Nesta turma 20 alunos responderam a pesquisa, ou seja, 6 alunos não compareceram no dia que o questionário foi passado.

Pergunta 1. O que você achou da utilização de um artefato nas aulas de transformações lineares? Dê a nota e comente.

A figura abaixo mostra a opinião dos alunos na pergunta 1 do questionário.

Figura 4.31: Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 1



Fonte: Produção do próprio autor

Nos comentários feitos pelos alunos dessa turma, assim como visto na turma anterior, dos que assinalaram a nota 10,0 a maioria dos alunos comentou que o uso deste recurso auxilia na visualização tri-dimensional das transformações, pois torna o assunto mais claro. Outros disseram achar "legal"tornar um assunto tão abstrato para prático com o uso do recurso proposto. E ainda, alguns alunos disseram que com o artefato a visualização fica mais clara para os que têm dificuldades na visão espacial. Um aluno não comentou.

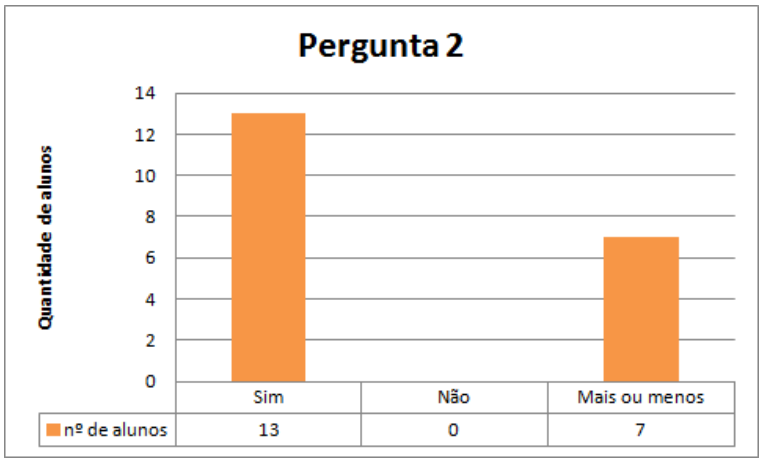
Os alunos que deram nota 7,0 nesta pergunta, na maioria disseram que o uso do artefato facilitou a visualização das transformações lineares. Um outro aluno disse que foi bom pois era algo palpável onde podia-se dispensar o quadro em alguns momentos. Um aluno citou a dificuldade da professora no manuseio do artefato em alguns momentos.

Quanto aos alunos que assinalaram a nota 5,0, um aluno disse que os desenhos no quadro são indispensáveis para ele e um outro concluiu que o assunto é complicado de qualquer maneira .

Pergunta 2. Você conseguiu entender as explicações da professora quando ela utilizava o artefato?

A opinião dos alunos é observada na Figura 4.32.

Figura 4.32: Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 2

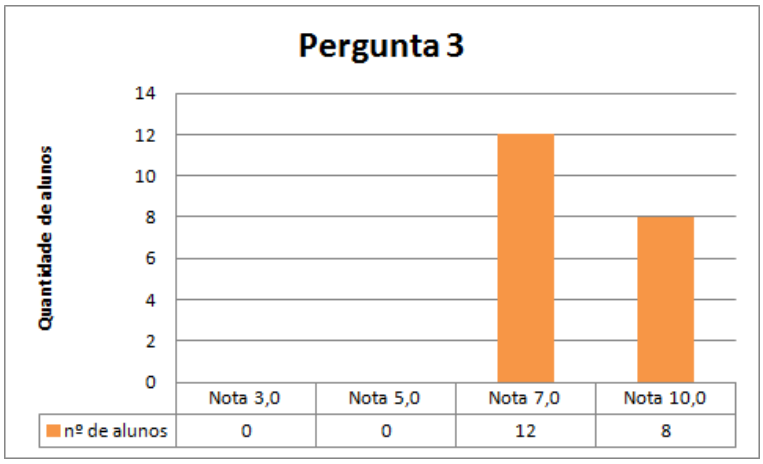


Fonte: Produção do próprio autor

Pergunta 3. Que nota você atribui ao artefato construído para o ensino de transformações lineares?

A opinião dos alunos nessa pergunta é relatada na Figura 4.33.

Figura 4.33: Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 3



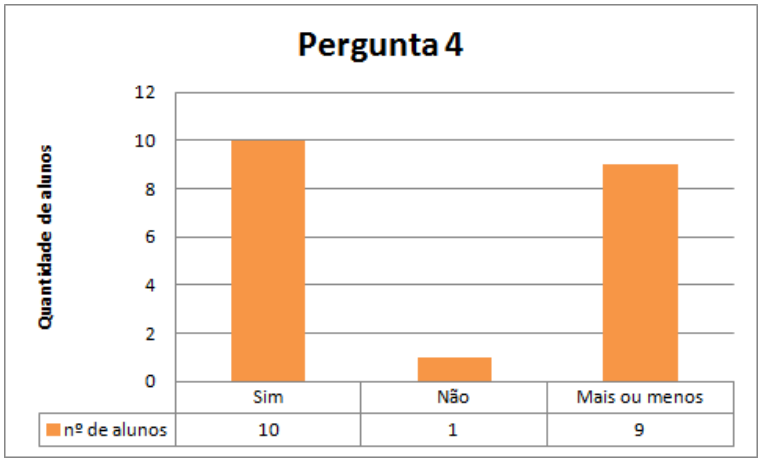
Fonte: Produção do próprio autor

Os alunos responderam ainda uma questão referente ao teste de sondagem aplicado, no caso desta turma, aplicado após a prova do assunto de transformações lineares.

Pergunta 4. Você acha que o teste aplicado ajudou nos seus estudos da matéria de álgebra linear?

A figura abaixo apresenta a opinião dos alunos na pergunta 4.

Figura 4.34: Opinião dos alunos de Matemática na pergunta 4



Fonte: Produção do próprio autor

Como pode-se observar, a opinião dos alunos no que se refere ao auxílio do teste nos estudos de álgebra linear ficou quase igual entre os alunos que responderam "sim"e os alunos que responderam "mais ou menos", sendo que o teste foi aplicado após a prova, logo nesse sentido ajudou apenas a reforçar os conceitos supostamente já estudados para a prova.

Avaliação das aulas e do uso do artefato pela professora

Solicitamos a professora Graciela Moro que desse sua opinião sobre as aulas ministradas com o uso do artefato bem como sua opinião sobre o teste aplicado. A professora disse que em geral os alunos têm dificuldade no assunto de operadores lineares, em particular, em aplicações como cisalhamento, projeções, reflexões e rotações. Disse ainda, que com a utilização do artefato ela pode observar que os alunos compreenderam melhor a visualização geométrica dos operadores lineares, principalmente operadores lineares no $\mathbb{R}^3$ e que também serviu para fazer um elo entre teoria e prática, fazendo com que a aula ficasse mais atrativa.

Conforme visto nas opiniões dos alunos citadas anteriormente, muitos comentaram da dificuldade na visualização tri-dimensional e que o artefato possibilitou essa melhora. A professora por sua vez também observou o fato dessa dificuldade ter ficado menor com o auxílio do artefato. Mas ela comentou também que: "Para alguns alunos o entendimento do conteúdo só aconteceu no momento que foi feito um esboço geométrico na lousa sobre tais operadores".

Sobre as dificuldades apresentadas pela professora, citou o fato de não existirem os eixos fixados, durante a rotação de um vetor por exemplo, perdia-se o referencial. Houve um pouco de dificuldade no manuseio no sentido de que não havia diferença ente eixos e vetores. Segundo a professora, apesar das pequenas dificuldades encontradas, ela percebeu que o uso do artefato foi bastante válido e com certeza facilitou o aprendizado dos alunos neste assunto.

A professora sugeriu ainda que em trabalhos futuros seria interessante aliar o uso do artefato a um recurso computacional. A ideia da professora foi a proposta inicial do nosso trabalho, mas por falta de tempo não foi possível a sua realização. No entanto na próxima seção sugerimos algumas atividades computacionais que podem ser trabalhadas junto com uso do artefato em trabalhos posteriores.

Quanto ao teste de sondagem, a professora comentou que na questão 4 vários alunos confundiram a palavra "quadrado"como sendo "algo elevado ao quadrado", onde na verdade a questão referia-se a um quadrado como figura geométrica. A professora frisou ainda o fato de alguns alunos não saberem o que era um segmento.

4.6 Recurso computacional

Nesta seção serão sugeridas algumas atividades no *Geogebra* e no Winplot que abordam algumas das transformações lineares já vistas nesta pesquisa. Estas atividades podem fazer parte de um trabalho futuro que alie o material concreto e o recurso computacional nas aulas de álgebra linear. E ainda, solucionar algumas deficiências encontradas

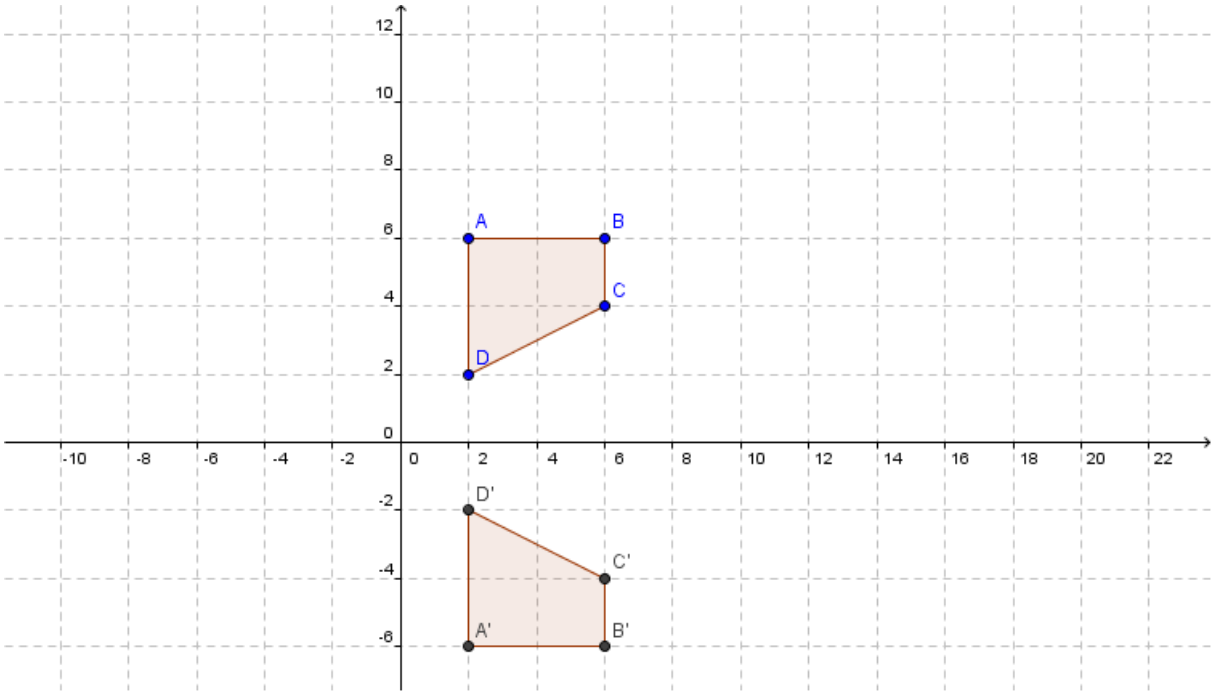
nas respostas dos alunos nas questões do teste de sondagem. Com o auxílio computacional entendemos que o aluno possuirá três vertentes de entendimento do assunto, ou seja, o descrito na lousa pela professora, o explicado com o artefato e o construído e visualizado pelo aluno nestes programas citados. Por falta tempo não possível a realização desta tríade, porém vale a sugestão para trabalhos futuros.

4.6.1 Atividades no *Geogebra*

Dentre as possíveis atividades em transformações lineares no plano que possam ser trabalhadas nesse software, destacaremos aqui algumas que trabalham a reflexão. Ressaltando a importância desta transformação em nossa pesquisa até o momento.

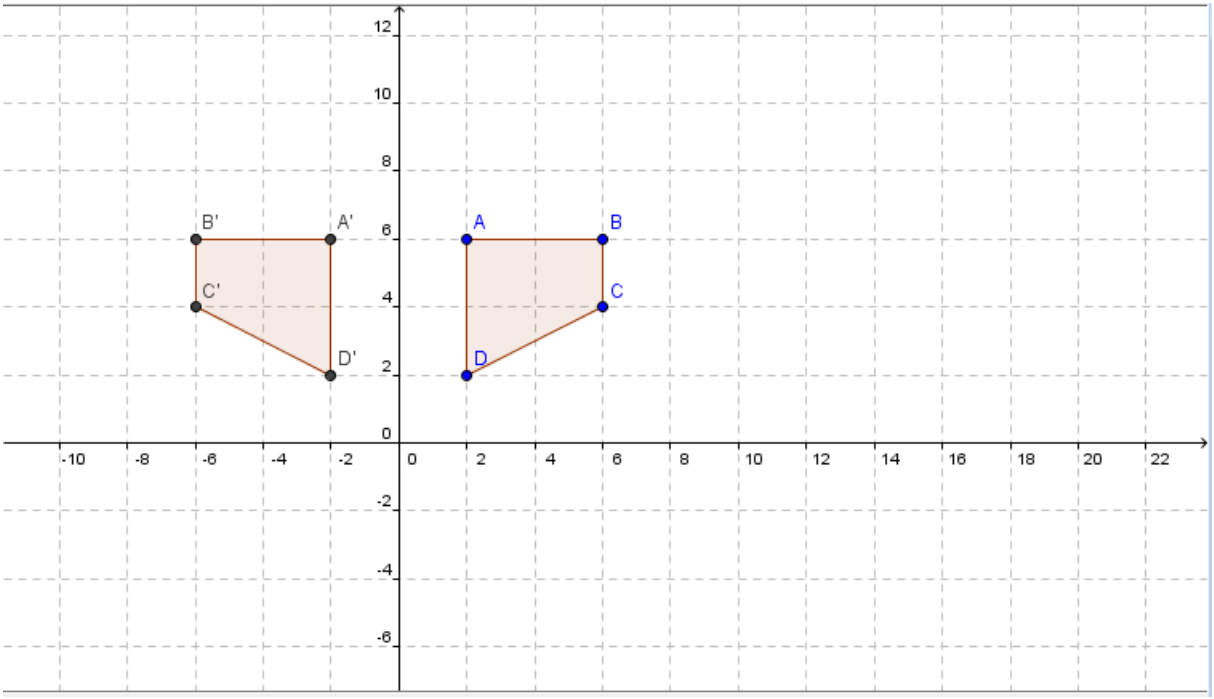
Usando o comando **Reflexão com relação a uma reta** no *Geogebra*, apresentamos na Figura 4.35, na Figura 4.36 e na Figura 4.37 três atividades com reflexão que podem ser exploradas.

Figura 4.35: Reflexão em torno do eixo x



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.36: Reflexão em torno do eixo y

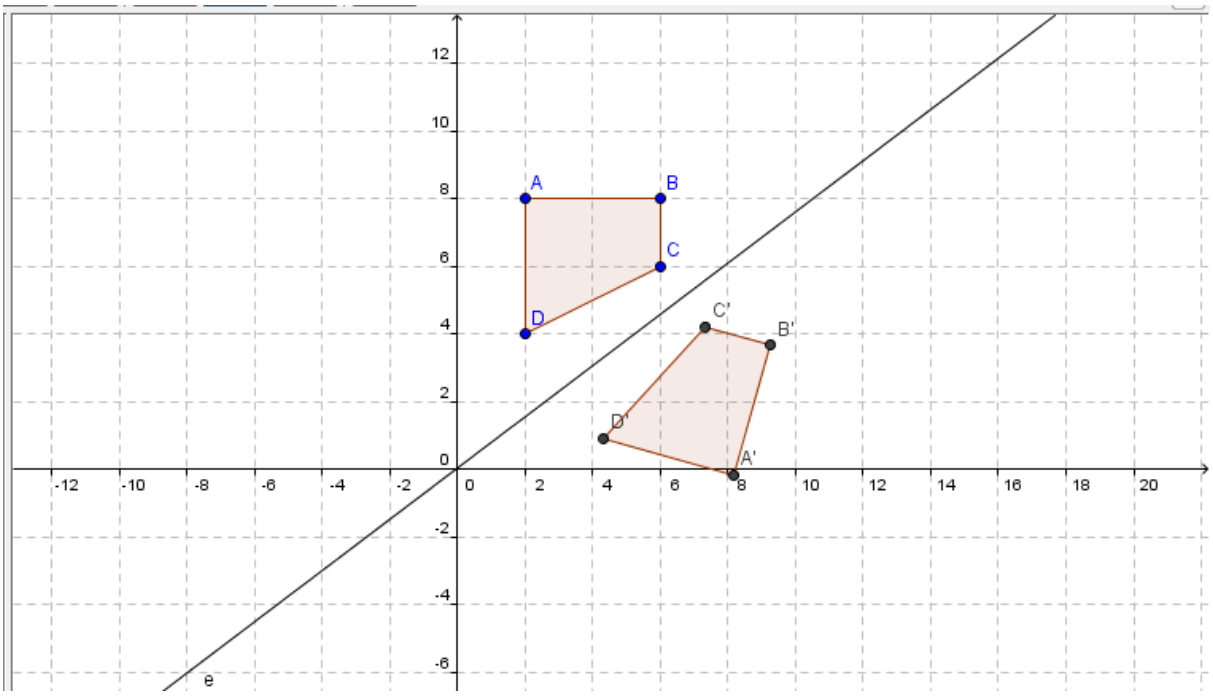


Fonte: Produção do próprio autor

A seguir, a Figura 4.38 mostra a reflexão em torno da origem usando o comando **Reflexão com relação a um ponto** no *Geogebra*.

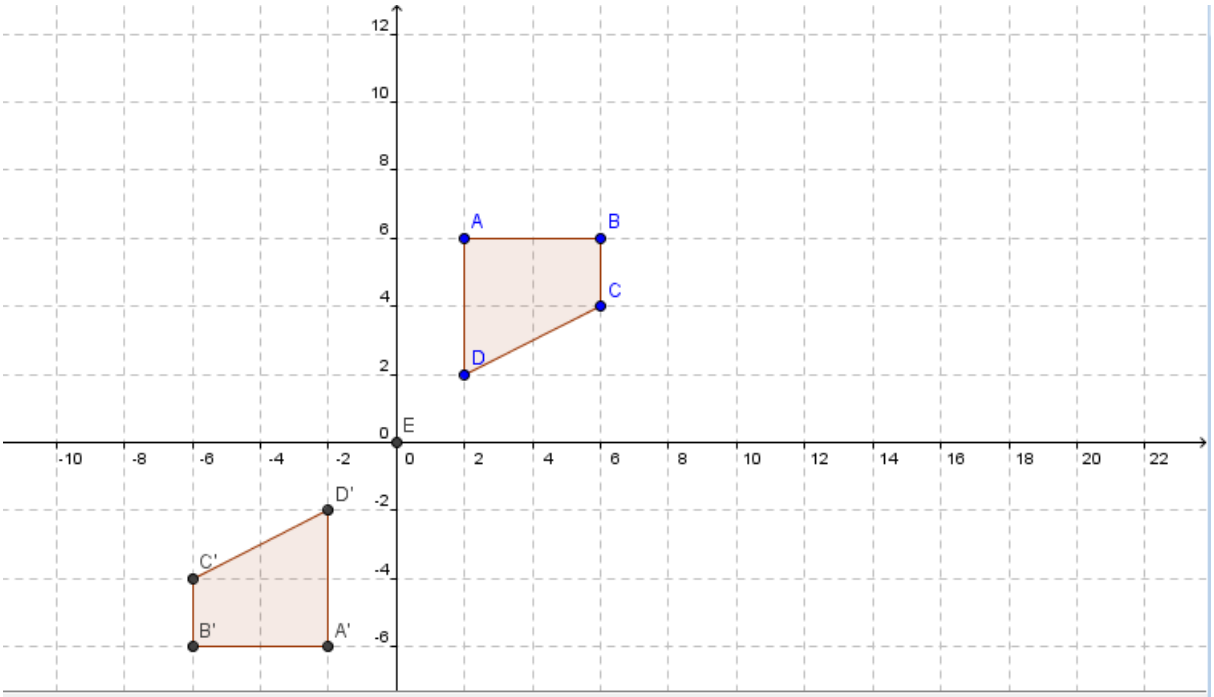
As atividades a serem trabalhadas no *Geogebra* não se resumem a apenas essas sugestões. Deixamos aqui um incentivo de melhoras na exploração deste recurso nas aulas de transformações lineares.

Figura 4.37: Reflexão em torno de uma reta qualquer



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.38: Reflexão em torno da origem



Fonte: Produção do próprio autor

4.6.2 Atividades no *Winplot*

Já no *Winplot* trabalharemos um leque maior de transformações no plano, evidenciando agora a transformação de rotação.

Com o comando **Mapeador - Plano xy** vamos expor 6 transformações geométricas exploradas na sequência que a atividade abaixo propõe.

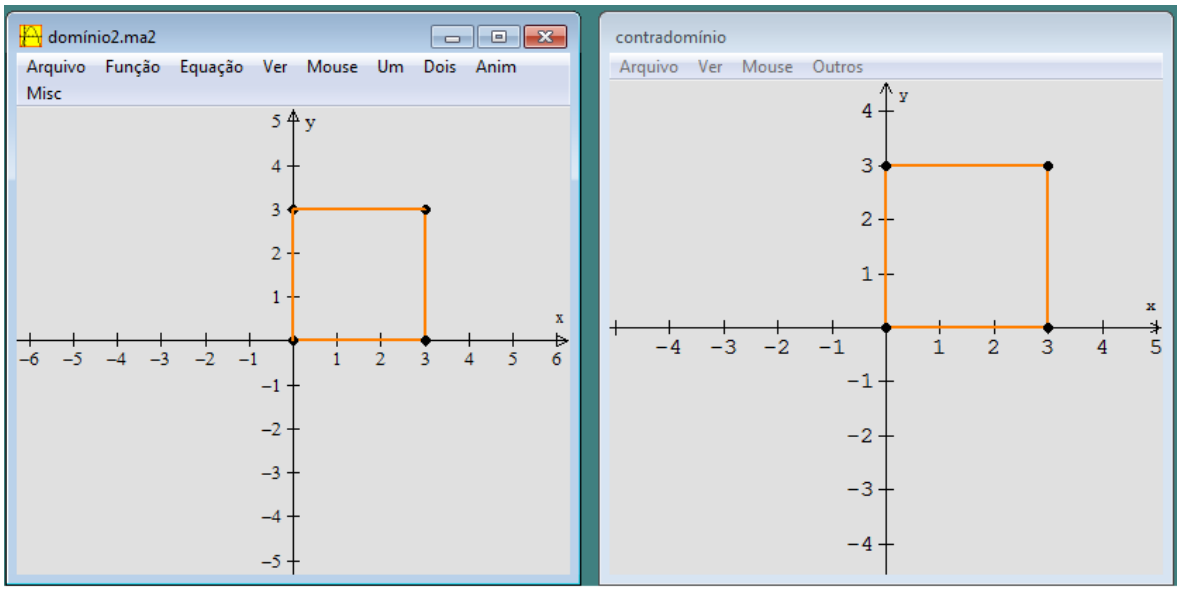
Seja $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ a transformação linear no plano. Ao efetuarmos o produto matricial desta transformação, podemos transformar um determinado vetor no plano em um outro vetor também no plano. O produto matricial é:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Construa no *Winplot* o quadrado de lado 3. (Figura 4.39)

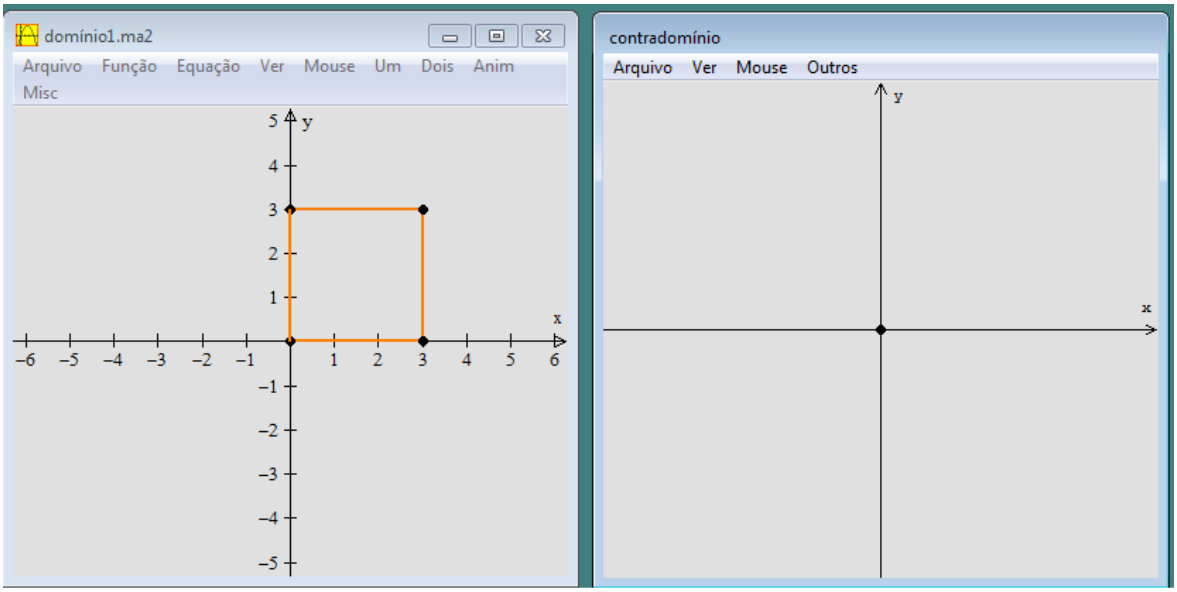
Logo após, insira a função $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ (Figura 4.40). E observe que se variarmos os coeficientes a, b, c e d, percebemos que todos os pontos continuam no plano. (Exemplo: a, b, c e d respectivamente *3*, *2*, *1* e *3*). (Figura 4.41)

Figura 4.39: Quadrado de lado 3



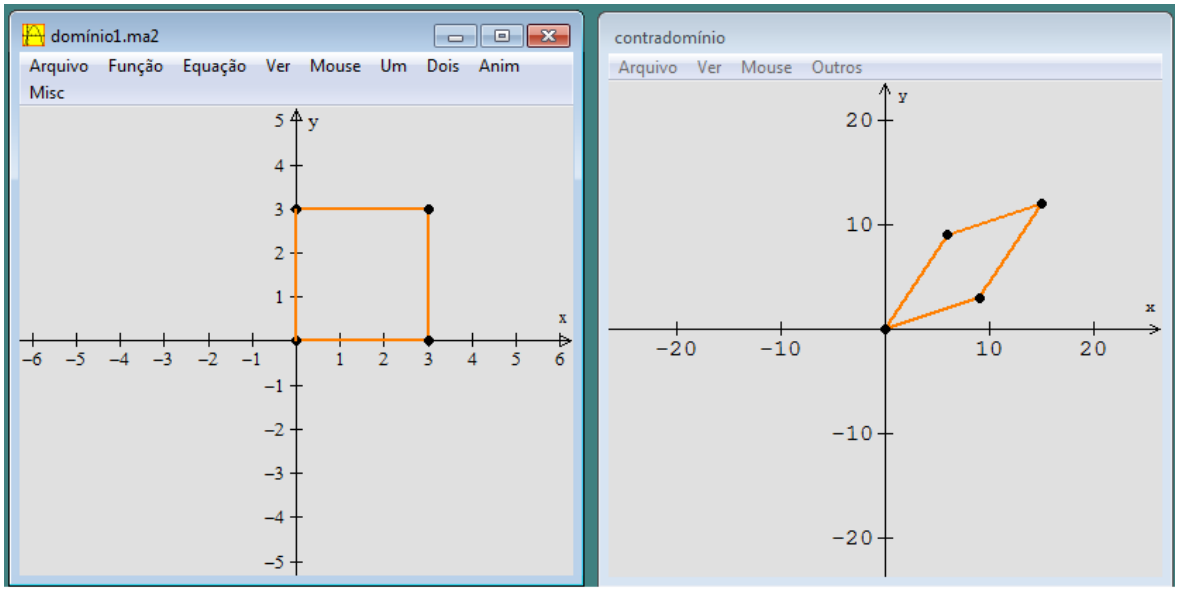
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.40: $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$



Fonte: Produção do próprio autor

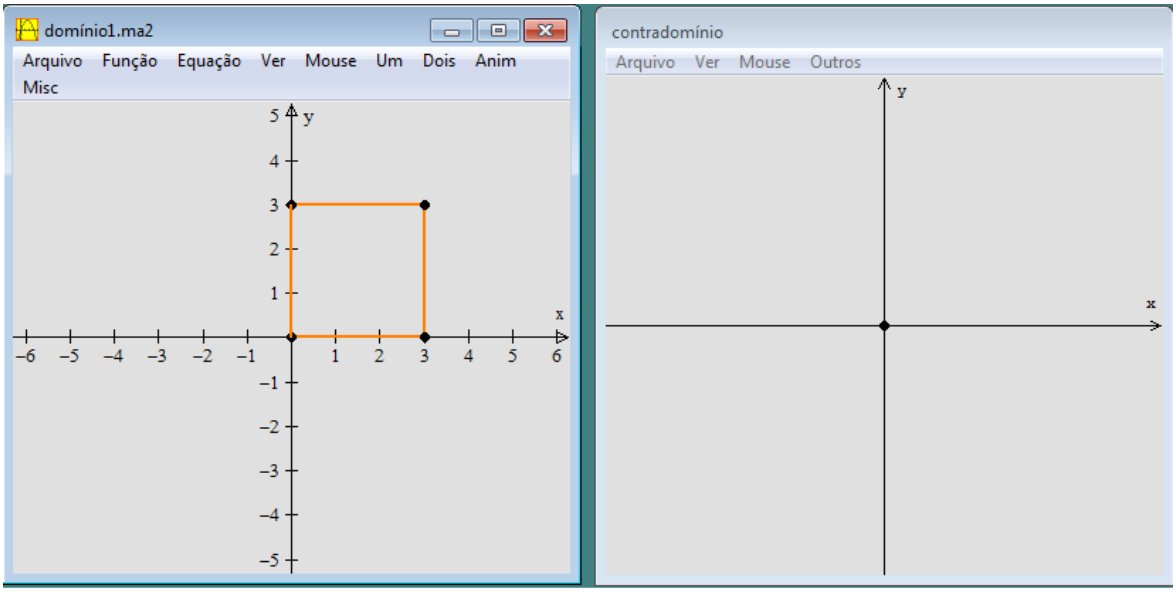
Figura 4.41: $T(x, y) = (3x + 2y, x + 3y)$



Fonte: Produção do próprio autor

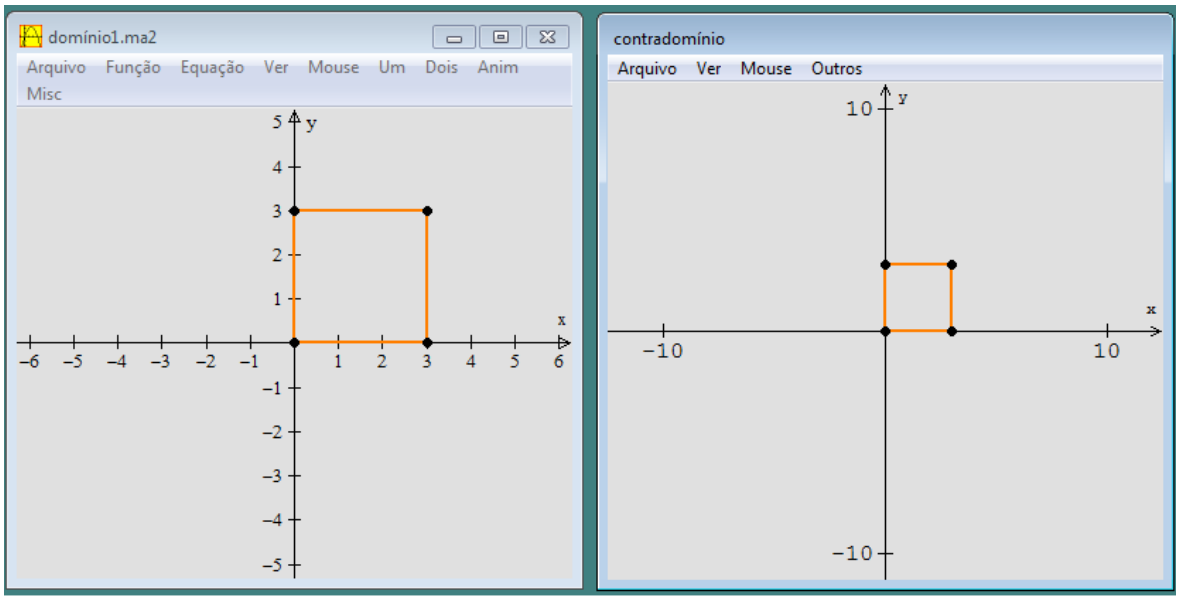
Agora vamos aplicar a transformação nula $T(x, y) = (0x + 0y, 0x + 0y) = (0, 0)$. (Figura 4.42). E a transformação identidade $T(x, y) = (x + 0y, 0x + y) = (x, y)$ (Figura 4.43).

Figura 4.42: Transformação nula



Fonte: Produção do próprio autor

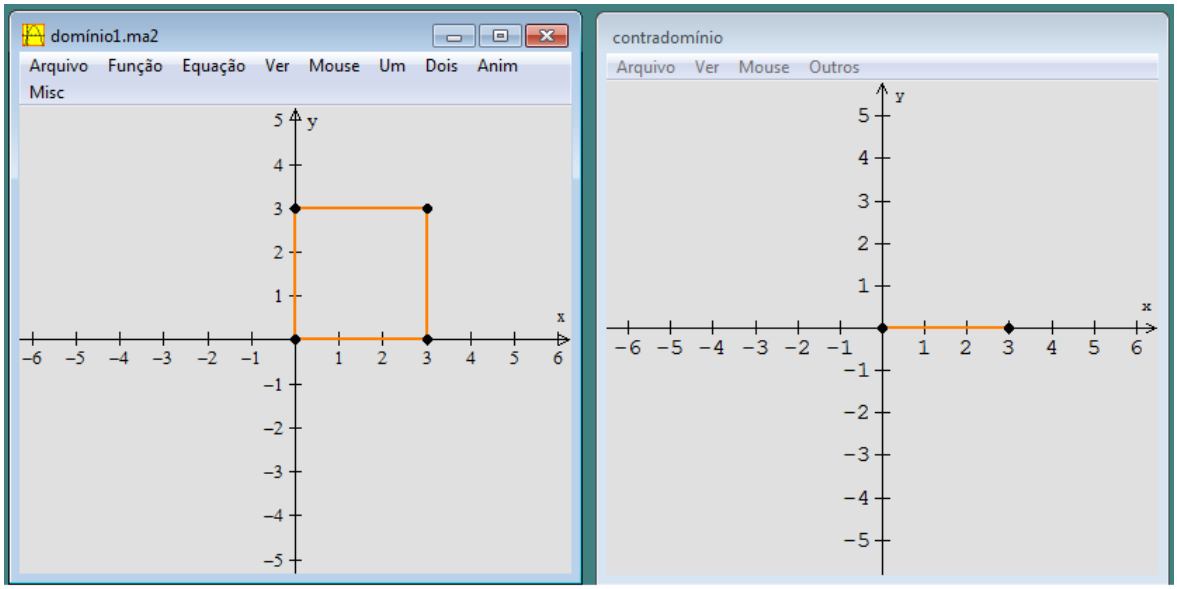
Figura 4.43: Transformação identidade



Fonte: Produção do próprio autor

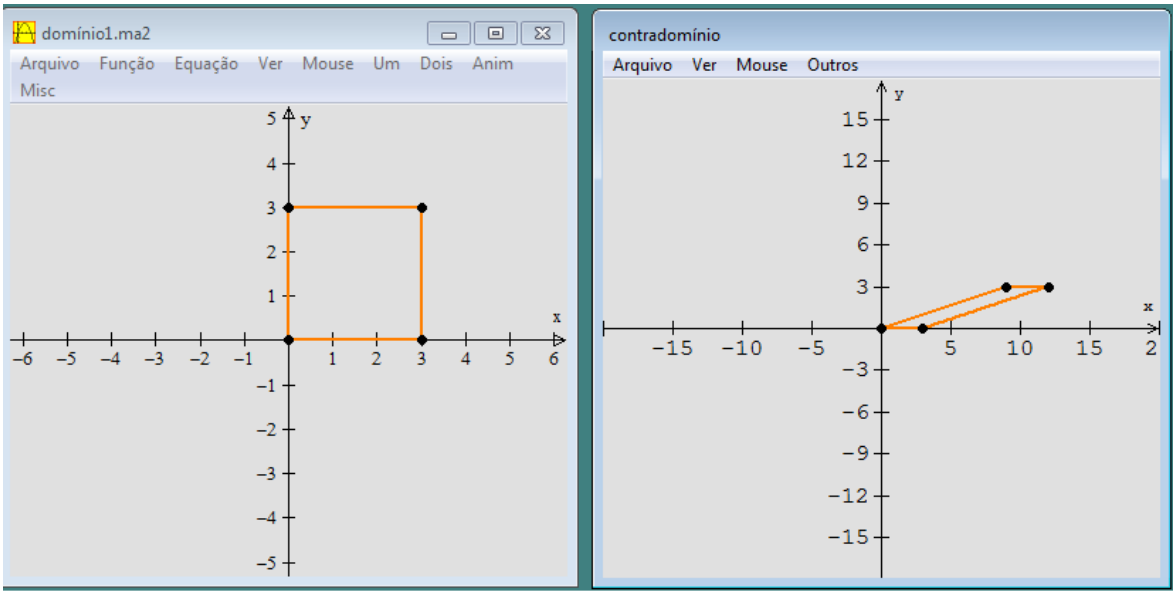
A Figura 4.44 mostra a projeção em Ox, representada pela transformação $T(x, y) = (x + 0y, 0x + 0y) = (x, 0)$. Atenção especial nesta atividade, pois mostra que existe uma transformação linear que leva um quadro em um segmento, questão 4 do teste de sondagem aplicado nas turmas de álgebra linear. Vê-se então a possibilidade de estar esclarecendo esta questão com os alunos, uma vez que a questão 4 foi a questão com o maior índice de erros. Ainda na Figura 4.45 e na Figura 4.46 as transformações $T(x, y) = (x+3y, 0x+y) = (x+3y, y)$ e $T(x, y) = (x+0y, 3x+1y) = (x, 3x+y)$ representam o cisalhamento paralelo a Ox e o cisalhamento paralelo a Oy respectivamente.

Figura 4.44: Projeção em Ox



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.45: Cialhamento paralelo a Ox



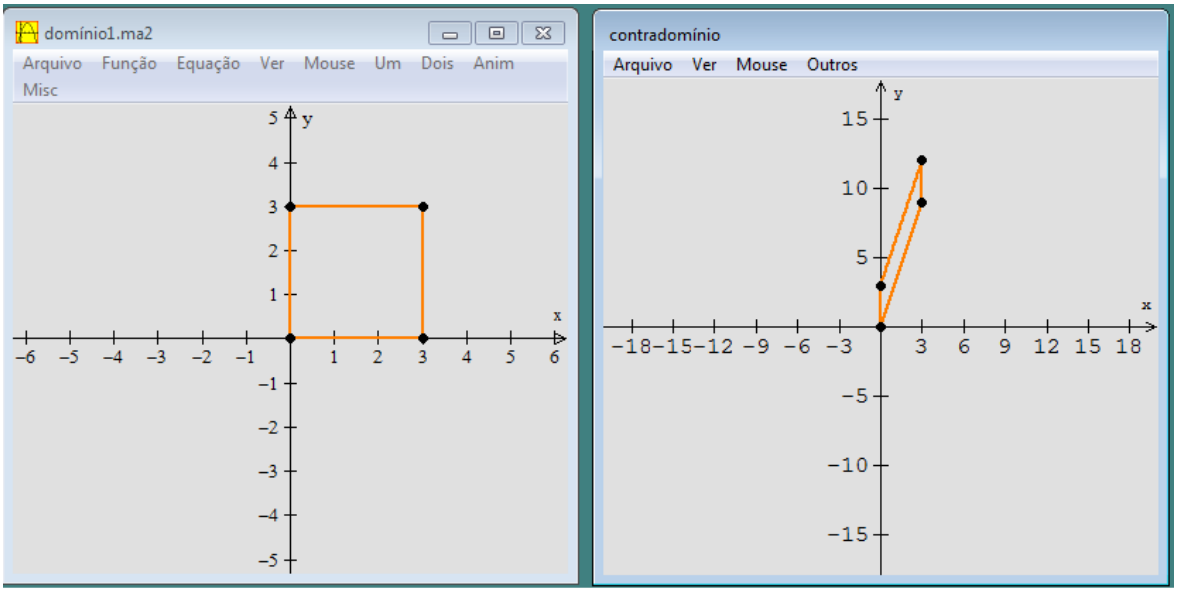
Fonte: Produção do próprio autor

Por fim a rotação no plano. *(Observação: Rotação no sentido anti-horário).* Seja:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

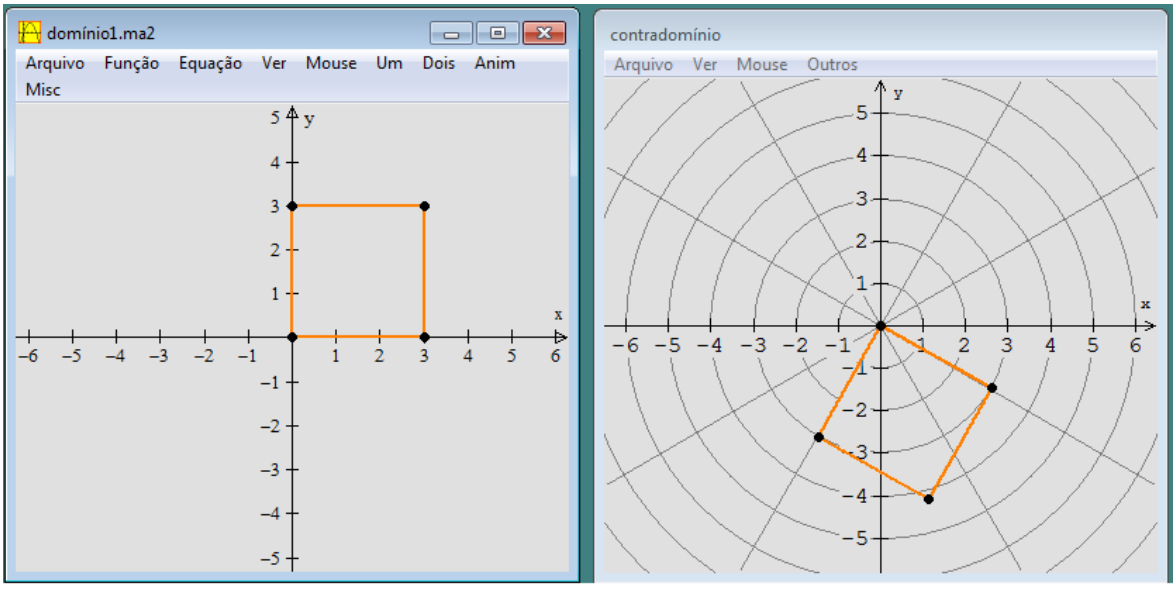
Temos: *(i)* $\theta = 240° = 4,2$ radianos e *(ii)* $\theta = 60° = 1,5$ radianos. Figura 4.47 e Figura 4.48 respectivamente.

Figura 4.46: Cisalhamento paralelo a Oy



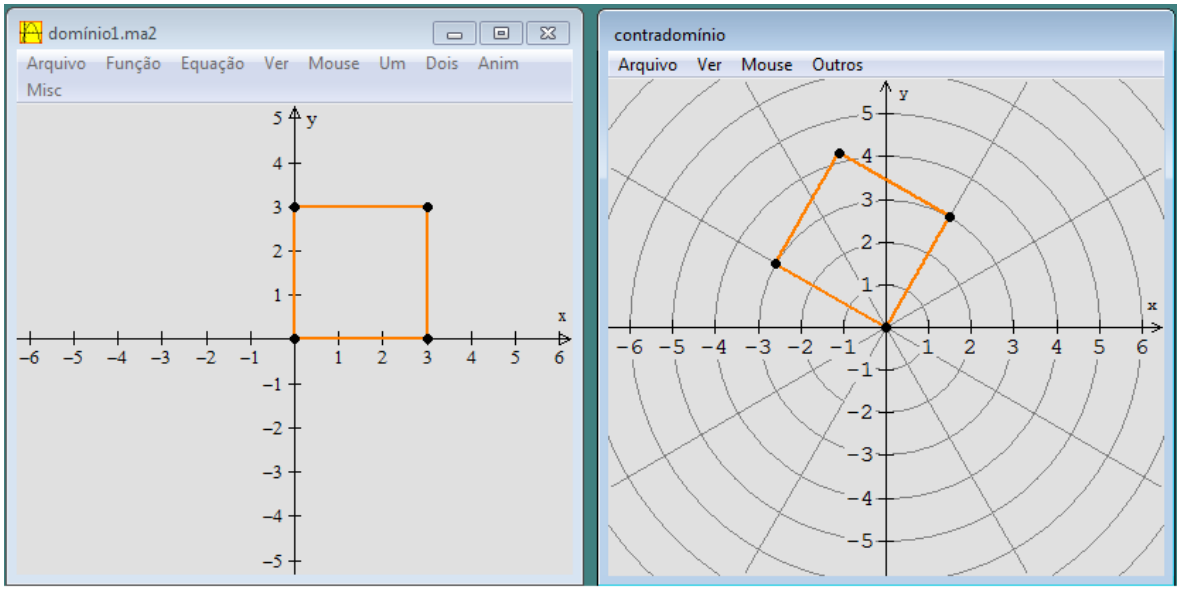
Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.47: Rotação de 4,2 radianos



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.48: Rotação de 1,05 radianos



Fonte: Produção do próprio autor

CONCLUSÃO

Acredita-se que os aspectos teóricos, numéricos e didáticos sobre as Transformações de Givens e Householder foram apresentados sucintamente de forma clara e objetiva. O estudo preliminar propôs um embasamento fundamental para um estudo mais aprofundado das Transformações de Givens e Householder, bem como o estudo posterior que abordou características teóricas e numéricas, fornecendo informações sobre as rotações e as reflexões que não são vistas em cursos de graduação do curso de licenciatura em matemática. E ainda, observou-se a importância dessas duas transformações para a resolução de sistemas lineares pois têm boas propriedades numéricas, tornando tal resolução mais rápida e estável computacionalmente. Mostramos que a fatoração QR pode ser utilizada na resolução de sistemas lineares fazendo-se o uso de rotores e refletores com um sucesso de rapidez nos cálculos se comparada com outros métodos de fatoração como a fatoração LU por exemplo. Por conta do tempo não conseguimos abordar os algoritmos dessas transformações mas fica como sugestão para trabalhos futuros este fato.

No que se refere aos aspectos didáticos do nosso trabalho, pode-se concluir que a aplicação do artefato nas aulas foi de certa forma salutar ao aprendizado dos alunos das duas turmas de álgebra linear, ao passo que após termos em vista o alto grau de abstração da matéria de álgebra linear, a sugestão de criação e aplicação de um material concreto nas aulas de transformações lineares auxiliou na visualização 3D dos alunos, entre outras dificuldades. Confirmando os estudos de vários pesquisadores nessa área, ou seja, a recorrência ao uso de material concreto no ensino de transformações lineares na graduação ou em qualquer outro nível revela resultados positivos no ensino. Além disso, no teste de sondagem pode-se observar em algumas questões as dificuldades dos alunos, tornando o artefato um possível solucionador destes problemas, se usado corretamente. Completando a proposta sugerida, as atividades com a utilização dos recursos computacionais fica como uma sugestão de trabalhos posteriores, observadas as dificuldades dos alunos é possível realizar atividades em ambos os softwares que facilitem a visualização das transformações lineares.

Dessa forma, finalizamos nosso estudo certos de que a aplicação de recursos didáticos nas aulas de transformações lineares pode ser explorada ainda mais. Lembrando dos pontos negativos encontrados vistos pelos alunos no questionário aplicado, assim como os pontos positivos e futuras modificações na sugestão de aplicação.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard. **Álgebra Linear com Aplicações.** 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra Linear.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1984.

CELESTINO, Marcos R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear : as pesquisas brasileiras na década de 90.** São Paulo: PUC-SP, 2000. (Tese de Mestrado). Mestrado em Educação Matemática.

HILLEL, J. e SIERPINSKA, A. - **On one persistent mistake in linear algebra.** In Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, July 1994, Lisbon, Portugal, vol. III, pp. 65-72, 1994.

KARRER, Mônica. **Articulação entre álgebra linear e geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica.** São Paulo: PUC-SP, 2006. (Tese de Doutorado). Doutorado em Educação Matemática.

LEHMANN, Monique S. et al. **Explorando as transformações lineares no plano, através do software WINPLOT.** Rio de Janeiro: USS, 2009. Universidade Severino Sombra.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear.** 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear: teoria e problemas.** 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

MANDLER, M. L. et al. **Deficiências no embasamento matemático como fator de retenção no ciclo profissionalizante.** In: XXXVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - COBENGE 2008, São Paulo.

MEMORIAL. **James Wallace Givens Jr.** 1994. Disponível em: <http://paw.princeton.edu/memorials/60/63/index.xml> Acesso em: 22 maio 2012.

O'CONNOR . J; ROBERTSON E. F. **Alston Scott Householder.** 1999. Disponível em <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Householder.html> Acesso em: 22 maio 2012.

SIERPINSKA, A. et al. - **Evaluation of a teaching design in Linear Algebra:** The case of linear transformations - Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, nº 1, pp. 7 - 40, 1999.

SIERPINSKA, A. et al. - **On some aspects of student's Thinking in linear algebra.** In J-L Dorier (Ed.), On the Teaching of linear algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 209-246, 2000.

SILVA, Guilherme Santos. **Phylos.net: Matemática.** Brasília, UNB, 1998. Disponível em: < http://phylos.net/matematica/algebra-linear/> Acesso em: 06 fev. 2012.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

WATKINS, David S. **Fundamentals of Matrix Computations.** 2. ed. New York: Wiley-Inter-science, 2002.

WIKIPÉDIA. **GeoGebra.** 2012. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> Acesso em: 04 jun. 2012.

WIKIPÉDIA. **Winplot.** 2010. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Winplot> Acesso em: 22 jun. 2012.

ANEXOS

ANEXO A

Teste de sondagem

ANEXO B
Questionário