

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE CAMACHO ORTHEY JUNIOR

A CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE  
SUPERFÍCIES COMPACTAS DO  $\mathbb{R}^3$

JOINVILLE - SC

2012-06-28

ALEXANDRE CAMACHO ORTHEY JUNIOR

A CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE  
SUPERFÍCIES COMPACTAS DO  $\mathbb{R}^3$

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto

JOINVILLE - SC

2012

O77a

Orthey Junior, Alexandre Camacho

A Classificação Topológica de Superfícies Compactas do  $\mathbb{R}^3$  / Alexandre Camacho Orthey Junior. - 2012.

110 p.: il

Bibliografia: f. 106

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática. Joinville, 2012.

Orientador: José Rafael Santos Furlanetto

1. Geometria diferencial. 2. Topologia. 3. Classificação de superfícies. 4. Teorema de Gauss-Bonnet. I. Furlanetto, José Rafael Santos. II. Universidade do Estado de Santa Catarina - Curso de Licenciatura em Matemática. III. A Classificação Topológica de Superfícies Compactas do  $\mathbb{R}^3$ .

CDD: 516.363

ALEXANDRE CAMACHO ORTHEY JUNIOR

A CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DE  
SUPERFÍCIES COMPACTAS DO  $\mathbb{R}^3$

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

**Banca Examinadora**

Orientador:

Prof. Dr. José Rafael Santos Furlanetto  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Membro:

Prof. Ms. Marnei Luis Mandler  
Universidade do Estado de Santa Catarina

Joinville, 28 de junho de 2012.

Aos meus pais

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, por tudo.

Agradeço aos meus amigos próximos, pelos momentos de alegria e apoio que me deram durante todo este semestre.

Agradeço ao meu orientador pela paciência, por acreditar em mim e por me mostrar a área da matemática pela qual tive maior empatia até hoje.

Agradeço aos meus professores por tudo o que me ensinaram.

E por último, mas não menos importante, agradeço à Maristela, ao Anderson e à Prof. Iva, por me ensinarem aquelas coisas que a gente não encontra nos livros.

Uma geometria não pode ser mais verdadeira  
do que outra; poderá ser apenas mais cômoda.

*J. H. Poincaré*

## RESUMO

ORTHEY JR, Alexandre Camacho. **A Classificação Topológica de Superfícies Compactas do  $\mathbb{R}^3$** . 2012. 110 p.. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

A classificação "topológica" de uma variedade riemanniana compacta de dimensão  $n$  obteve avanço recente e importante com a demonstração da conjectura de Poincaré pelo matemático russo Grigoriy Perelman, em meados de 2002, para variedades de dimensão 3. Em dimensão 2, a mesma pergunta surgiu há muitos anos atrás e foi respondida através da Geometria Diferencial Local por meio do famoso teorema de Gauss-Bonnet (em suas variedades local e global). Por esta razão, foi feito um estudo teórico de todo o instrumental de geometria diferencial necessário para completa compreensão do Teorema de Gauss-Bonnet com o intuito de apresentar a classificação topológica de superfícies compactas do  $\mathbb{R}^3$ . O estudo teve como roteiro base o livro intitulado *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* de Manfredo Perdigão do Carmo.

**Palavras-chave:** Geometria diferencial. Topologia. Classificação de superfícies. Teorema de Gauss-Bonnet.



## ABSTRACT

ORTHEY JR, Alexandre Camacho. **The Topological Classification of Compact Surfaces of  $\mathbb{R}^3$** . 2012. 110 p.. Work of Course Conclusion (Graduate Degree in Mathematics) - Santa Catarina State University, 2012.

The "topological" classification of a n-dimension compact Riemannian manifold obtained important recent advance achieved by demonstrating the Poincare conjecture by the Russian mathematician Grigoriy Perelman, in mid-2002 to 3-manifolds. In dimension 2, the same question came up many years ago and was answered by the Local Differential Geometry by the famous Gauss-Bonnet theorem (in its local and global varieties). For this reason, a theoretical study was made of all the tools of differential geometry necessary for complete understanding of the Gauss-Bonnet theorem in order to present the topological classification of compact surfaces of  $\mathbb{R}^3$ . The study was based on the book entitled Differential Geometry of Curves and Surfaces by Manfredo Perdigao do Carmo.

**Key-words:** Differential geometry. Topology. Classification of surfaces. Gauss-Bonnet theorem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Traço de $\gamma$ , um exemplo de <i>espiral logarítmica</i> . . . . .	16
1.2	Cosseno hiperbólico e vetores tangentes. . . . .	18
1.3	<i>A Cissoide de Diocles</i> . . . . .	18
1.4	Partição de $[a, b]$ em $\alpha$ . . . . .	20
1.5	<i>O Triedro de Frenet</i> . . . . .	22
2.1	Aplicação $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.2	Esfera totalmente coberta por superfícies regulares . . . . .	29
2.3	<i>Hiperboloide de duas folhas</i> (esquerda) e <i>Cone</i> (direita). . . . .	31
2.4	Aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e as vizinhanças $V$ e $W$ . . . . .	32
2.5	Construção do Toro. . . . .	33
2.6	<i>O Toro</i> . . . . .	33
2.7	Difeomorfismo $\pi \circ \mathbf{x} : V_1 \rightarrow V_2$ . . . . .	35
2.8	Mudança de parâmetros $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ . . . . .	37
2.9	Função altura $h(p) = p \cdot v$ . . . . .	38
2.10	<i>Aplicação Diferenciável Entre Superfícies</i> . . . . .	39
2.11	Aplicação $\varphi _S : S \rightarrow E$ . . . . .	40
2.12	A superfície tangente de uma hélice. . . . .	41
2.13	Aplicação $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ . . . . .	44
2.14	<i>Diferencial de Aplicação Entre Superfícies</i> . . . . .	45
2.15	Planos tangentes $T_p S_1$ e $T_p S_2$ na interseção entre $S_1$ e $S_2$ . . . . .	46
2.16	<i>O Helicoide</i> . . . . .	48
2.17	Região de $S$ . . . . .	50
2.18	Área da superfície do Toro. . . . .	51
3.1	Orientação positiva $N$ . . . . .	53
3.2	<i>A faixa de Möbius</i> . . . . .	54
3.3	<i>A Aplicação de Gauss</i> . . . . .	55
3.4	Curva $N \circ \alpha(t) = N(t)$ . . . . .	55
3.5	Plano . . . . .	56
3.6	Esfera. . . . .	56
3.7	Cilindro . . . . .	57
3.8	Paraboloide Hiperbólico . . . . .	57
3.9	$II_p(a'(s)) = k_n(p)$ . . . . .	59
3.10	A Esfera (esquerda) e o Toro (direita) possuem pontos elípticos. . . . .	63
3.11	A Sela (esquerda) e o Toro (direita) possuem pontos hiperbólicos. . . . .	63
3.12	O Cilindro (esquerda) e o Toro (direita) possuem pontos parabólicos. . . . .	64
3.13	Distância de $\mathbf{x}(u, v)$ ao $T_p S$ . . . . .	71
3.14	$p$ elíptico (acima) e $p$ hiperbólico (abaixo). . . . .	73
3.15	Aplicação de Gauss nos casos em que $K = 1$ (acima) e $K > 1$ (abaixo). . . . .	75

4.1	$d(p, q) \geq \ p - q\ $ . . . . .	79
4.2	Isometria entre plano (esquerda) e superfície cilíndrica (direita). . . . .	79
4.3	<i>O Catenóide</i> . . . . .	80
4.4	<i>O Helicóide</i> reparametrizado. . . . .	80
4.5	<i>A derivada covariante</i> . . . . .	85
4.6	Campo de vetores tangentes ao longo de uma curva. . . . .	86
4.7	Campos paralelos $w(t)$ e $v(t)$ ao longo de uma curva planar. . . . .	86
4.8	Transporte paralelo na curva de tangência entre a esfera e o cone. . . . .	88
4.9	Círculos máximos em uma esfera são geodésicas. . . . .	89
4.10	Relação entre as curvaturas geodésica e normal. . . . .	90
4.11	Triângulo geodésico $T$ . . . . .	95
4.12	Ângulos externos. . . . .	96
4.13	Ângulos externos em cúspides. . . . .	96
4.14	Curva $\alpha$ orientada positivamente. . . . .	97
4.15	Triangulação de uma superfície. . . . .	102
4.16	A classificação topológica de superfícies compactas do $\mathbb{R}^3$ . . . . .	104

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1 CURVAS</b>	<b>15</b>
1.1 CURVAS PARAMETRIZADAS . . . . .	15
1.2 COMPRIMENTO DE ARCO . . . . .	18
1.3 TEORIA LOCAL DAS CURVAS . . . . .	21
<b>2 SUPERFÍCIES</b>	<b>26</b>
2.1 SUPERFÍCIES REGULARES . . . . .	26
2.2 MUDANÇA DE PARÂMETROS E FUNÇÕES SOBRE SUPERFÍCIES . . . . .	35
2.3 PLANO TANGENTE E DIFERENCIAL DE UMA APLICAÇÃO . . . . .	42
2.4 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL E ÁREA . . . . .	47
<b>3 A GEOMETRIA DA APLICAÇÃO DE GAUSS</b>	<b>53</b>
3.1 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS . . . . .	53
3.2 A APLICAÇÃO DE GAUSS EM COORDENADAS LOCAIS . . . . .	66
<b>4 A GEOMETRIA INTRÍNSECA DAS SUPERFÍCIES</b>	<b>76</b>
4.1 ISOMETRIAS . . . . .	76
4.2 O TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS . . . . .	81
4.3 TRANSPORTE PARALELO E GEODÉSICAS . . . . .	84
4.4 GAUSS-BONNET E A CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA . . . . .	94
<b>CONCLUSÃO</b>	<b>105</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>106</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>108</b>
APÊNDICE A - Definições e Teoremas Necessários . . . . .	108
APÊNDICE B - Uma conversa sobre variedades . . . . .	109



# INTRODUÇÃO

O estudo de geometria diferencial e topologia ganhou destaque na matemática nos últimos anos após a prova da Conjectura de Poincaré pelo matemático russo Grigoriy Perelman em meados de 2002. Os fatos se tornaram famosos na mídia popular em virtude do fato de que Perelman recusou, após ter sido comprovada a veracidade de sua demonstração, a Medalha Fields e o prêmio de 1 milhão de dólares oferecido pelo Instituto Clay de Matemática (BBC NEWS, 2010).

Segundo o CMI(2010), a Conjectura de Poincaré é um dos sete problemas do milênio, estabelecidos pelo próprio instituto em 2000. A conjectura de Poincaré trata, em termos simplificados, da classificação de superfícies, ou melhor, de *variedades*. Uma definição muito simples e suficiente para essa introdução do que é uma variedade, foi dada por Viana (2008): *Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas. O número de coordenadas que são necessárias é chamado dimensão da variedade* (uma definição precisa de variedade pode ser encontrada no anexo B). Uma variedade de dimensão 1 é chamada de *curva* e uma variedade de dimensão 2 é chamada de *superfície*, nossos objetos de estudo neste trabalho.

O objetivo dos topólogos era então catalogar, classificar, todas as variedades de todas as dimensões, ou seja, criar uma "lista" que contivesse todas as variedades diferentes a menos de uma *equivalência*. Essa equivalência entre variedades pode ser descrita como uma correspondência contínua um-a-um entre pontos de uma variedade e outra (VIANA, 2008). No Capítulo 2, veremos que a essa correspondência (no caso de superfícies) damos o nome de *homeomorfismo*.

Acontece que é impossível classificar todas as variedades de dimensão igual ou maior a 4. A demonstração desse fato se deve ao *teorema da indecidibilidade de Gödel*, que justifica que para dimensões maiores ou iguais a 4 o conjunto das variedades se tornaria "complexo demais" para serem todas classificadas. Existem perguntas que poderiam ser feitas a esse conjunto que jamais teriam respostas, uma vez que se houvesse uma lista de classificação, essas perguntas teriam respostas, então não se pode ter uma lista (VIANA, 2008). Entretanto, isso não significa que algumas classes de variedades de dimensão maior ou igual a 4 não possam ser classificadas. De fato, a conjectura de Poincaré afirma que se uma variedade de dimensão qualquer "parece" ser a esfera então ela "é" a esfera. As palavras "parece" e "é" estão entre aspas por que o enunciado verdadeiro da conjectura

usa definições que não trataremos neste trabalho. Contudo, podemos enunciar a conjectura para variedades de dimensão 3, a qual foi provada por Perelman: *Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão 3 é homeomorfa à esfera 3-dimensional*. Aqui, variedade simplesmente conexa significa, em termos simplificados, que todo laço sobre a variedade pode ser deformado até colapsar num ponto (VIANA, 2008).

Para variedades de dimensão 2, a classificação "topológica" foi resolvida muito tempo antes da conjectura de Poincaré existir. Foi graças ao Teorema de Gauss-Bonnet, apresentado em sua primeira versão por Gauss (1827) e estendido depois por O. Bonnet (CARMO, 2010), que podemos classificar todas as superfícies compactas *orientáveis* do  $\mathbb{R}^3$ . Em verdade, há dois grupos de superfícies, as orientáveis e as não orientáveis. Trataremos apenas das orientáveis, mas é válido acrescentar que superfícies não-orientáveis também podem ser classificadas (VIANA, 2008).

Neste trabalho, então, apresentaremos a classificação topológica de superfícies compactas (orientáveis) do  $\mathbb{R}^3$ . Para fazer esta classificação, é necessário o entendimento completo do Teorema de Gauss-Bonnet em suas versões local e global. Como o referido teorema aborda uma série de conceitos de geometria diferencial, faz-se indispensável um estudo de todo o ferramental de geometria diferencial local que aborda o teorema. Este estudo teórico terá como roteiro básico o livro *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, do autor e pesquisador do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Prof. Dr. Manfredo Perdigão do Carmo.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no Capítulo 1 serão apresentados os conceitos básicos sobre curvas e também uma pequena revisão de geometria analítica, no Capítulo 2, será apresentado um estudo básico porém denso sobre superfícies. No Capítulo 3 introduzimos a aplicação de Gauss e tratamos de sua geometria, e no capítulo 4 apresentamos as definições e proposições necessárias para o entendimento do Teorema de Gauss-Bonnet (Local e Global) e conseqüentemente da classificação topológica de superfícies do  $\mathbb{R}^3$ . Finalmente, no último capítulo, serão apresentadas às conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 1

## CURVAS

### 1.1 CURVAS PARAMETRIZADAS

Uma maneira de definir subconjuntos do  $\mathbb{R}^3$  se faz através de funções diferenciáveis de uma variável real. Entende-se por função *diferenciável* aquela que possui infinitas derivadas contínuas em todo o seu domínio. O primeiro subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  a ser estudado neste capítulo é formado pelas *curvas*. Uma curva é dita *suave* se ela é diferenciável. Carmo (2010) nos dá uma primeira definição de curva:

**Definição 1.1.1** *Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  da reta real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ .*

Aqui, o termo *aplicação* tem um significado bem definido, nos fazendo recorrer a Domingues e Iezzi (2003). Seja  $f$  uma *relação* de um conjunto  $E$  em um conjunto  $F$ . Dizemos que  $f$  é uma *aplicação* de  $E$  em  $F$  se:

- a)  $D(f) = E$
- b) Dado  $x \in D(f)$ , é único o elemento  $y \in F$  de modo que  $(x, y) \in f$

Em outras palavras, para cada  $t \in I$ , e chamamos  $t$  o *parâmetro* da curva, existe um  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são funções diferenciáveis. Vale ressaltar que não são excluídos os casos em que  $\alpha = +\infty$  e  $\alpha = -\infty$ .

Fazendo uso da notação comum encontrada em bibliografias, definimos  $x'(t)$  como a primeira derivada de  $x(t)$  em relação a  $t$ . Analogamente temos  $y'(t)$  e  $z'(t)$ , e assim definimos  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$  como o *vetor tangente*<sup>1</sup> à curva  $\alpha$  em  $t$ . A representação geométrica da imagem  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$  é chamada de *traço* da curva  $\alpha$ .

**Exemplo 1.1.2** *A curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$\gamma(t) = \left( \frac{\cos(t)}{e^{t/6}}, \frac{\sin(t)}{e^{t/6}} \right),$$

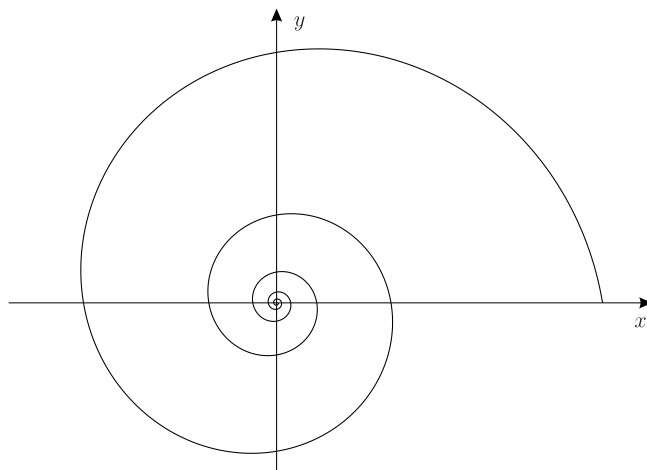
---

<sup>1</sup>Também chamado de *vetor velocidade* em virtude da interpretação física.



com  $t \in \mathbb{R}$  e  $I = (0, 10\pi)$ , é um exemplo de curva diferenciável parametrizada. É conhecida como *espiral logarítmica*, pois tomando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\gamma(t)$  aproxima-se da origem, espiralando em torno dela. O traço de  $\gamma$  pode ser visto na Fig. 1.1.

Figura 1.1: Traço de  $\gamma$ , um exemplo de *espiral logarítmica*.



Fonte: Produção do próprio autor

Algumas propriedades de produto interno, estudadas nas disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, fazem parte do estudo de Geometria Diferencial e faz-se importante citá-las. Seja o vetor  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , definimos a *norma* de  $v$  por

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A norma de um vetor representa o comprimento do vetor e é de valor positivo definido, somente se anulando caso o vetor seja nulo, ou seja,  $|(0, 0, 0)| = 0$ .

Agora, sejam  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  vetores pertencentes ao  $\mathbb{R}^3$ , definimos o produto interno entre  $u$  e  $v$  por<sup>2</sup>

$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta, \tag{1.1.1}$$

onde  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , é o ângulo entre  $u$  e  $v$ .

De Eq. 1.1.1 também decorre que

$$|u| = \sqrt{u \cdot u}. \tag{1.1.2}$$

Para  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  ficam válidas as propriedades:

1.  $u \cdot v = 0 \iff u \perp v$ , para  $u$  e  $v$  não-nulos.

---

<sup>2</sup>O produto interno entre  $u$  e  $v$  também é denotado por  $\langle u, v \rangle$ .

2.  $u \cdot v = v \cdot u$ .
3.  $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$ .
4.  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ .

É possível obter outra expressão para o produto interno da Eq. 1.1.1. Para isso, basta escrever os vetores  $u$  e  $v$  como combinações lineares na base canônica e utilizar as propriedades 3 e 4 do produto interno resultando em

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (1.1.3)$$

Ao tomarmos  $u(t)$  e  $v(t)$ ,  $t \in I$ , como curvas diferenciáveis, o produto delas  $u(t) \cdot v(t)$  será uma função diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t). \quad (1.1.4)$$

Além do produto interno, o *produto vetorial* também se faz presente no estudo da geometria diferencial. Lima (2007) define o produto vetorial entre  $u, v \in \mathbb{R}^3$  (nesta ordem) como o vetor  $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$  de tal forma que

$$(u \wedge v) \cdot w = \det[u, v, w], \quad (1.1.5)$$

para qualquer  $w \in \mathbb{R}^3$ , e definimos  $\det[u, v, w]$  como

$$\det[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

A consequência imediata para  $w$  qualquer fica:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \quad (1.1.6)$$

onde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  são os vetores na base canônica do  $\mathbb{R}^3$ .

O produto vetorial também carrega as seguintes propriedades:

1.  $u \wedge v = -v \wedge u$ .
2.  $u \wedge v = 0$  se e somente se  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes.
3.  $(u \wedge v) \cdot u = 0$ ,  $(u \wedge v) \cdot v = 0$ .

Para os fins deste estudo, tomamos  $u(t)$  e  $v(t)$  como aplicações diferenciáveis do intervalo  $I = (a, b)$  em  $\mathbb{R}^3$ , com  $t \in I$ . A partir da Eq. 1.1.6 obtemos

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge v(t)) = \frac{du}{dt}(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}(t). \quad (1.1.7)$$

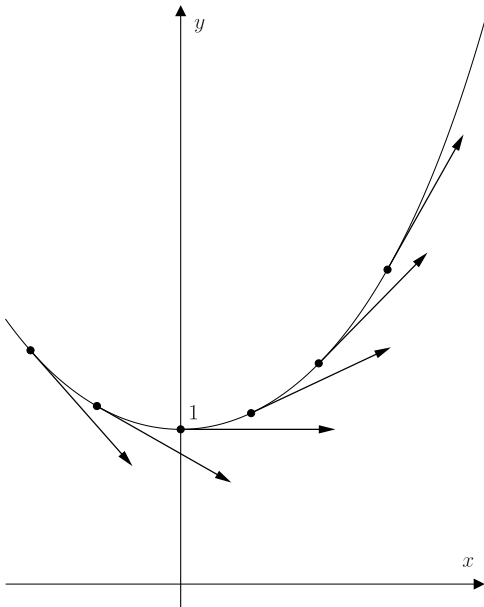
## 1.2 COMPRIMENTO DE ARCO

Considere  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada diferenciável. Assim, para cada  $t \in I$ , com  $\alpha'(t) \neq 0$ , existe uma reta que passa pelo ponto  $\alpha(t)$  e tem como vetor direção  $\alpha'(t)$ . Esta reta é chamada de *reta tangente* a  $\alpha$  em  $t$ . Os pontos da curva que não possuem reta tangente, ou seja, onde  $\alpha'(t) = 0$ , são chamados de *pontos singulares*. Neste estudo serão consideradas apenas curvas que não possuem pontos singulares.

**Definição 1.2.1** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

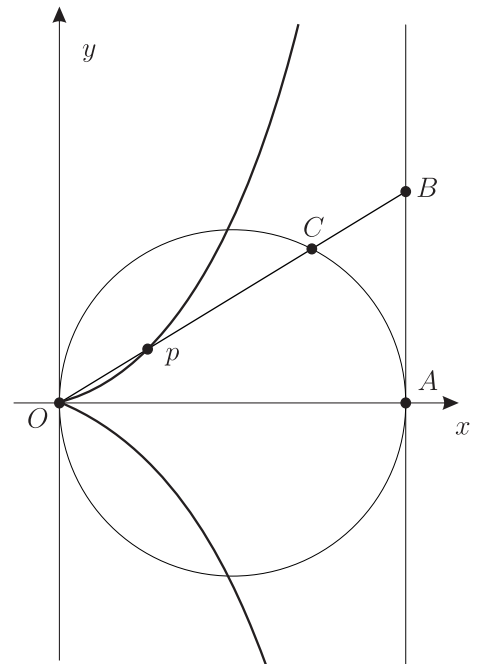
**Exemplo 1.2.2** A curva dada pelo gráfico da função cosseno hiperbólico é um exemplo de curva regular, já que para qualquer valor de seu domínio temos a derivada diferente de zero, em outras palavras, o vetor tangente nunca é nulo (Fig. 1.2).

Figura 1.2: Cosseno hiperbólico e vetores tangentes.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 1.3: A Cissoide de Diocles



Fonte: Produção do próprio autor

Já a cissoide de Diocles (Fig. 1.3), dada por

$$p(t) = \left( \frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

não é regular, uma vez que  $p'(0) = 0$ . A cissoide de Diocles é construída através do traço marcado pelo ponto  $p$ , que pertence ao segmento  $\overline{OB}$  e satisfaz  $|\overline{Op}| = |\overline{CB}|$ .

Consideramos a partir de agora apenas curvas diferenciáveis parametrizadas regulares. Podemos então definir o comprimento de arco de  $\alpha$  de um dado  $\alpha(t_0)$  fixado até um ponto  $\alpha(t)$  qualquer por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt, \quad (1.2.8)$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

é, por definição, a norma do vetor tangente à  $\alpha$ . Temos assim  $ds/dt = |\alpha'(t)|$ .

A definição de comprimento de arco de Eq. 1.2.8 possui uma justificativa geométrica. Tal justificativa é análoga ao Teorema 6 do Cap. II da Seção 4 do livro de Lima (2009a) que trata de *caminhos retificáveis*. Para manter a linha de pensamento, vamos usar as notações de Carmo (2010). Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva diferenciável e seja  $[a, b] \subset I$  um intervalo fechado. Para toda a partição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

de  $[a, b]$ , consideramos a soma

$$\sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = l(\alpha, P),$$

onde  $P$  designa a partição dada. A norma  $|P|$  da partição  $P$  é definida por

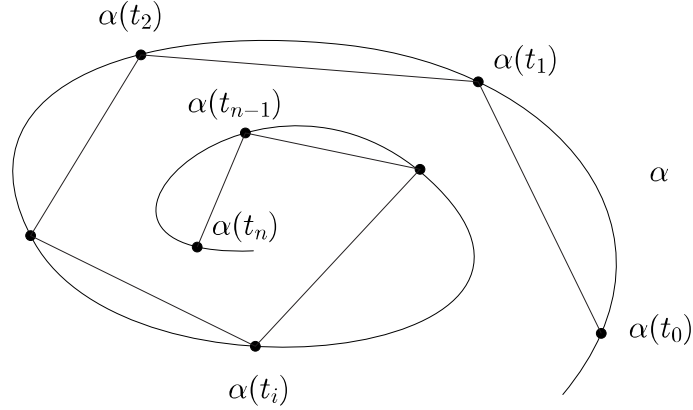
$$|P| = \max(t_i - t_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Geometricamente,  $l(\alpha, P)$  é o comprimento de um polígono inscrito em  $\alpha([a, b])$  com vértices em  $\alpha(t_i)$ , conforme Fig. 1.4.

Podemos mostrar então, que o comprimento de arco de  $\alpha([a, b])$  é, em certo sentido, um limite de comprimentos de polígonos inscritos. Em linguagem matemática, vamos provar que, dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que se  $|P| < \delta$  então

$$\left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \epsilon.$$

Figura 1.4: Partição de  $[a, b]$  em  $\alpha$ .



Fonte: Produção do próprio autor

**Demonstração:** Pela definição de integral (LIMA, 2009a), dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta_1 > 0$  tal que se  $|P| < \delta_1$ , então

$$\left| \left( \int_a^b |\alpha'(t)| dt \right) - \sum (t_i - t_{i-1}) |\alpha'(t_i)| \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como  $\alpha'$  é uniformemente contínua em  $[a, b]$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que se  $t, s \in [a, b]$  com  $|t - s| < \delta_2$ , então

$$|\alpha'(t) - \alpha'(s)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Agora, tome  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então se  $|P| < \delta$ , obtemos, usando o Teorema do Valor Médio para funções vetoriais (LIMA, 2009a),

$$\begin{aligned} & \left| \sum |\alpha'(t_{i-1}) - \alpha'(t_i)| - \sum (t_{i-1} - t_i) |\alpha'(t_i)| \right| \\ & \leq \left| \sum (t_{i-1} - t_i) \sup_{s_i} |\alpha'(s_i)| - \sum (t_{i-1} - t_i) \sup |\alpha'(t_i)| \right| \\ & \leq \left| \sum (t_{i-1} - t_i) \sup_{s_i} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

onde  $t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$ . Isto, junto com o que está acima, fornece a desigualdade desejada. ■

Caso o parâmetro  $t$  da curva seja o próprio comprimento de arco, não haverá variação no comprimento do vetor tangente de  $\alpha$ , ou seja,  $|\alpha'(t)| = 1$ , já que  $ds/dt = 1$ . De fato, tem-se

$$s = \int_{t_0}^t dt = t - t_0.$$

Uma *curva parametrizada pelo comprimento de arco*, então, é uma reparametrização da curva, tal que o novo parâmetro  $t$  é o comprimento de arco  $s$ .

É possível também mudar a orientação de uma curva  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in (a, b)$ . Se tomarmos a orientação  $(-b, -a)$  definiremos uma nova curva  $\beta$ , tal que  $\beta(-s) = \alpha(s)$ . Assim  $\alpha$  e  $\beta$  possuem o mesmo traço, porém dizemos que diferem por uma *mudança de orientação*.

A partir de agora, estudaremos apenas *curvas diferenciáveis regulares parametrizadas pelo comprimento de arco*. Estas serão importante foco de estudo na seção 1.3, que representam, de acordo com Carmo (2010), os resultados principais sobre o estudo de curvas em seu livro.

### 1.3 TEORIA LOCAL DAS CURVAS PARAMETRIZADAS PELO COMPRIMENTO DE ARCO

Nesta seção apresentamos as duas principais definições deste capítulo e um teorema fundamental. Assim sendo, seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . A norma da segunda derivada de  $\alpha(s)$  representa a variação do ângulo que os vetores tangentes, na vizinhança de  $s$ , fazem com  $\alpha'(s)$ . Em outras palavras,  $|\alpha''(s)|$  representa a velocidade com que  $\alpha$  se curva, ou melhor, se afasta de sua reta tangente em  $s$ . Assim, Carmo (2010) define o conceito de *curvatura*:

**Definição 1.3.1** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $|\alpha''(s)| = k(s)$  chama-se curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .*

Nos casos em que  $k(s) \equiv 0$ , temos por simples integração que o vetor tangente é constante e portanto a curva é do tipo  $\alpha(s) = us + v$ , ou seja, uma reta.

Mudando-se o sentido de orientação de uma curva, ou seja,  $\beta(-s) = \alpha(s)$ , há uma mudança de sentido no vetor tangente. Assim,

$$\frac{d\beta}{d(-s)}(-s) = -\frac{d\alpha}{ds}(s), \quad (1.3.9)$$

e portanto a curvatura  $k(s)$  permanece invariante por uma mudança de orientação, como cita Carmo (2010).

Fica evidente então o vetor  $\alpha''(s) = k(s)n(s)$ , onde  $n(s)$  é um versor<sup>3</sup> de  $\alpha''(s)$ . Este vetor unitário  $n(s)$  é chamado *vetor normal* de  $\alpha$  em  $s$ . Isso se deve ao fato de que  $n(s)$  é normal ao vetor tangente de  $\alpha$  em  $s$ , pois, do produto interno definido na Eq. 1.1.1, temos que  $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1$ . Derivando em ambos os lados da igualdade e fazendo as devidas simplificações, obtemos  $\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$ , o que mostra a ortogonalidade entre eles.

---

<sup>3</sup>Steinbruch (1987) define *versor* de um vetor não nulo  $\vec{v}$  como um vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de  $\vec{v}$

Definimos agora o vetor unitário  $t(s) = \alpha'(s)$ , e assim  $t'(s) = k(s)n(s)$ . Dizemos então que  $t(s)$  e  $n(s)$  definem um plano, chamado de *plano osculador* da curva  $\alpha$  em  $s$ . É natural se pensar no vetor normal deste plano, assim definido:

$$b(s) = t(s) \wedge n(s). \quad (1.3.10)$$

Carmo (2010) chama  $b(s)$  de *vetor binormal*, pois juntamente com  $t(s)$  e  $n(s)$  formam um conjunto ortonormal, já que também tem-se  $|b(s)| = 1$ . A norma da derivada de  $b(s)$  nos dá então a taxa de variação do ângulo que o plano osculador faz com os planos osculadores vizinhos de  $\alpha$  em  $s$ . A ideia é análoga à curvatura.

Por definição, obtemos  $b'(s)$  derivando Eq. 1.3.10, e obtemos

$$b'(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s), \quad (1.3.11)$$

pois  $t'(s) \wedge n(s) = 0$ . Isso mostra que  $b'(s)$  é normal a  $n'(s)$ , e portanto, paralelo a  $n(s)$ . Assim podemos escrever

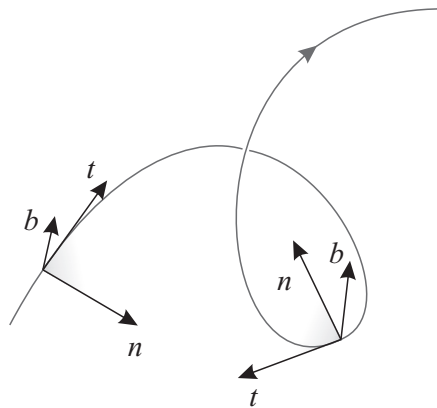
$$b'(s) = \tau(s)n(s), \quad (1.3.12)$$

onde Carmo (2010) define  $\tau(s)$  da seguinte forma:

**Definição 1.3.2** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que  $\alpha''(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ . O número  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é chamado de torção de  $\alpha$  em  $s$ .*

Convém ressaltar que caso a curva seja plana, temos  $\tau \equiv 0$ . Ressaltamos também que, analogamente à curvatura, a torção também permanece invariante por mudança de orientação.

Figura 1.5: O Triedro de Frenet.



Fonte: Produção do próprio autor

O triedro formado pelos vetores ortonormais  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$ , nessa ordem, formam o *triedro de Frenet* (CARMO, 2010). É através destes vetores que obtemos informações

sobre o comportamento de uma curva  $\alpha$  nas proximidades de  $s$ , ou seja, curvatura e torção (Fig. 1.5).

Derivando  $n(s) = b(s) \wedge t(s)$ , temos

$$n'(s) = b'(s) \wedge t(s) + b(s) \wedge t'(s) = -\tau b(s) - kt(s), \quad (1.3.13)$$

que mais uma vez, nos dá curvatura e torção.

Fica importante destacar então as *fórmulas de Frenet* (CARMO, 2010):

$$\begin{aligned} t'(s) &= kn(s) \\ n'(s) &= -\tau b(s) - kt(s) \\ b'(s) &= \tau n(s) \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Definidos os conceitos de curvatura e torção, estamos aptos a enunciar o teorema fundamental citado no início desta seção. Carmo (2010) o enuncia da seguinte maneira:

**Teorema 1.3.3 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas)** *Dadas as funções diferenciáveis  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , existe uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  é o comprimento de arco,  $k(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  é a torção de  $\alpha$ . Além disso, qualquer outra curva  $\tilde{\alpha}$ , satisfazendo as mesmas condições, difere de  $\alpha$  por um movimento rígido; isto é, existe uma transformação linear ortogonal  $\rho$  de  $\mathbb{R}^3$ , com determinante positivo, e um vetor  $c$  tal que  $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$ .*

Para entender o Teorema 1.3.3 é necessário entender o conceito de *movimento rígido*. Assim, seja a *translação* em um vetor  $v$  em  $\mathbb{R}^3$  de uma aplicação  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $A(p) = p + v$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$ . Seja também a aplicação linear  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma *transformação ortogonal* quando  $\rho u \cdot \rho v = u \cdot v$  (ou seja, o produto interno é preservado por  $\rho$ , e portanto  $\rho$  preserva comprimentos) para vetores quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}^3$  (LIMA, 2008). Um *movimento rígido* em  $\mathbb{R}^3$  é então o resultado da composição de uma translação com uma transformação ortogonal com determinante positivo (CARMO, 2010). Em outras palavras, um movimento rígido resume-se em deslocar uma curva no espaço, bem como rotacioná-la em qualquer direção, sem expandi-la, diminui-la, torce-la ou qualquer outra maneira de mudar a sua forma. Sendo assim, ao se aplicar um movimento rígido em uma curva, o Teorema 1.3.3 garante que o comprimento de arco, a curvatura e a torção permanecerão os mesmos.

Por hora, podemos apenas provar a unicidade do Teorema 1.3.3, já que a demonstração completa envolve o teorema sobre existência e unicidade de soluções de sistemas de equações ordinárias. Carmo (2010) faz uma prova sucinta da unicidade:

**Prova da unicidade do Teorema 1.3.3:** Consideramos então um movimento rígido  $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e observamos que o comprimento de arco, a curvatura e a torção de



uma curva  $\alpha = \alpha(t)$  são invariantes perante movimentos rígidos. Assim,

$$\int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{d(M \circ \alpha)}{dt} \right| dt. \quad (1.3.15)$$

Isto é coerente, uma vez que os conceitos de curvatura e torção são construídos através de produtos interno e vetorial de derivadas, pois as derivadas são invariantes perante translações e os produtos também são invariantes perante movimentos rígidos (já que são escritos através de comprimento e ângulo entre vetores, e não a posição deles).

Consideramos agora duas curvas  $\alpha = \alpha(s)$  e  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(s)$ , tal que  $k(s) = \tilde{k}(s)$  e  $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$ ,  $s \in I$ . Sejam, também, os triedros de Frenet de  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$  em  $s = s_0 \in I$ . Assim, existe um movimento rígido que leva  $\tilde{\alpha}(s_0)$  em  $\alpha(s_0)$  e  $\tilde{t}_0, \tilde{n}_0, \tilde{b}_0$  em  $t_0, n_0, b_0$ , respectivamente. Aplicando então o movimento rígido em  $\tilde{\alpha}$ , teremos  $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$  e os triedros de Frenet das duas curvas irão satisfazer as equações de Frenet:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= kn & \frac{d\tilde{t}}{ds} &= k\tilde{n} \\ \frac{dn}{ds} &= -kt - \tau b & \frac{d\tilde{n}}{ds} &= -k\tilde{t} - \tau\tilde{b} \\ \frac{db}{ds} &= \tau n & \frac{d\tilde{b}}{ds} &= \tau\tilde{n}, \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

onde  $t(s_0) = \tilde{t}(s_0)$ ,  $n(s_0) = \tilde{n}(s_0)$ ,  $b(s_0) = \tilde{b}(s_0)$ .

Para alcançar a igualdade  $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s)$ , podemos utilizar as equações de Frenet e mostrar que a função

$$f(s) = |t - \tilde{t}|^2 + |n - \tilde{n}|^2 + |b - \tilde{b}|^2, \quad (1.3.17)$$

seja identicamente igual a 0. Fato que só aconteceria se houvesse igualdade entre os triedros de Frenet.

De fato, podemos expressar Eq. 1.3.17 em termos de produtos internos e tomar a derivada. Tomamos  $1/2$  para ocupar menos espaço.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \{|t - \tilde{t}|^2 + |n - \tilde{n}|^2 + |b - \tilde{b}|^2\} = \\ &= \langle t - \tilde{t}, t' - \tilde{t}' \rangle + \langle b - \tilde{b}, b' - \tilde{b}' \rangle + \langle n - \tilde{n}, n' - \tilde{n}' \rangle \\ &= k \langle t - \tilde{t}, n - \tilde{n} \rangle + \tau \langle b - \tilde{b}, n - \tilde{n} \rangle - k \langle n - \tilde{n}, t - \tilde{t} \rangle - \tau \langle n - \tilde{n}, b - \tilde{b} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Isso mostra que Eq. 1.3.17 é constante. Porém, para  $s = s_0$ , concluímos que Eq. 1.3.17 é identicamente nula. Mostramos assim que  $t(s) = \tilde{t}(s)$ ,  $n(s) = \tilde{n}(s)$ ,  $b(s) = \tilde{b}(s)$  para todo  $s \in I$ . Como temos

$$\frac{d\alpha}{ds} = t = \tilde{t} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds},$$

que resulta em  $\frac{d}{ds}(\alpha - \tilde{\alpha}) = 0$ , chegamos em  $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s) + c$ , onde  $c$  é constante. Por fim, como  $\alpha(s_0) = \tilde{\alpha}(s_0)$ , temos  $c = 0$ , logo  $\alpha(s) = \tilde{\alpha}(s)$ . ■

Este teorema encerra nosso estudo sobre curvas neste trabalho, uma vez que temos o necessário para prosseguir.

# Capítulo 2

## SUPERFÍCIES

### 2.1 SUPERFÍCIES REGULARES

Iniciamos o capítulo, bem como a seção, com a definição de superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  dada por Carmo (2010), e explanaremos sobre ela:

**Definição 2.1.1** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que*

1.  $\mathbf{x}$  é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

*as funções  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ .*

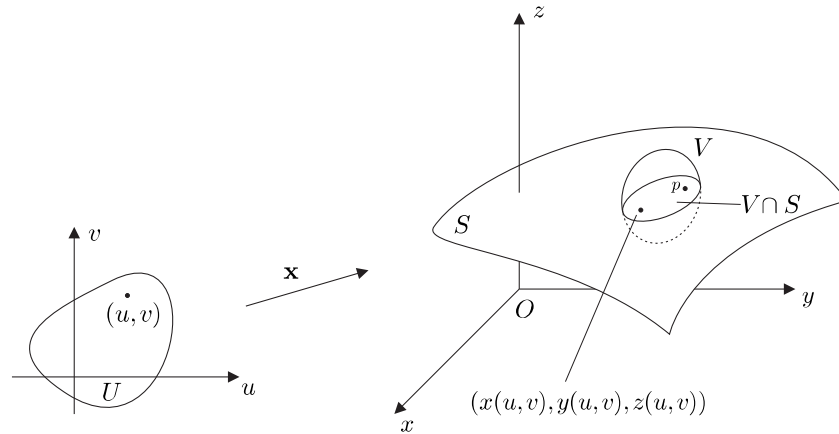
2.  $\mathbf{x}$  é um homeomorfismo. Como  $\mathbf{x}$  é contínua pela condição 1, isto significa que  $\mathbf{x}$  tem inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.
3. (condição de regularidade) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Esta é a principal definição de todo o estudo de geometria diferencial local que será feito neste trabalho, pois é a base na qual é desenvolvido todo o estudo de superfícies regulares.

Alguns conceitos primordiais de topologia se fazem necessário em nosso estudo, mas não convém se aprofundar neles neste trabalho. Primeiramente, podemos notar que uma superfície é definida como um *conjunto de pontos*, diferentemente de uma curva, que era definida como uma *aplicação*. Ao se trabalhar com geometria diferencial local, como o próprio nome sugere, nos atemos aos aspectos locais, como a *vizinhança*. De acordo com Lima (2009b), uma vizinhança de um ponto  $q$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  que contém

o ponto  $q \in \mathbb{R}^n$ . Podemos observar a vizinhança de  $p$ , além é claro, da ideia geral da Definição 2.1.1, na Fig. 2.1.

Figura 2.1: Aplicação  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ .



Fonte: Produção do próprio autor

Para satisfazer a Definição 2.1.1, a aplicação  $\mathbf{x}$  deve satisfazer 3 condições. A condição 1 é trivial, já que estamos em um estudo de geometria *diferencial*. A aplicação  $\mathbf{x}$  é uma parametrização, que toma dois parâmetros e os leva em um ponto do  $\mathbb{R}^3$ , onde as funções dessa parametrização devem ser diferenciáveis.

Para comentar a condição 2, recorreremos ao *Curso de Análise, vol 2* de Lima (2009a). Dizemos que uma aplicação contínua  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o *homeomorfismo* sobre  $F(A)$  se  $F$  é injetiva e a inversa  $F^{-1} : F(A) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua. No caso da Definição 2.1.1, a condição de que a aplicação  $\mathbf{x}$  deve ser injetiva, impede que uma superfície regular tenha interseções ou sobreposições, já que, dados  $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$  teremos  $\mathbf{x}(u_1, v_1) \neq \mathbf{x}(u_2, v_2)$ . A Prop. 2.1.8 deixará mais claro por que  $\mathbf{x}^{-1}$  deve ser contínua, e a Prop. 2.1.9 mostrará que caso as condições 1 e 3 sejam satisfeitas, a condição 2 será consequência.

Por fim, a condição 3 merece uma atenção especial. Vamos traduzir a ideia de  $d\mathbf{x}_q$  ser injetiva por meio de sua matriz de aplicação linear dentro das bases canônicas<sup>1</sup>. No ambiente da Definição 2.1.1, seja  $u \rightarrow (u, v_0)$  uma curva que passa por  $q = (u_0, v_0) \in U$ , cuja imagem é a *curva coordenada* dada por

$$\mathbf{x}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Esta *curva coordenada* pertencente à  $S$  tem vetor tangente

$$\left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u},$$

<sup>1</sup> $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$  para o  $\mathbb{R}^2$ , e  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$  e  $f_3 = (0, 0, 1)$  para o  $\mathbb{R}^3$ .

em  $q$ . Pela Definição de *Diferencial* (apêndice A), temos:

$$d\mathbf{x}_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

Analogamente, para a curva coordenada dada pela imagem de  $v \rightarrow (u_0, v)$ , temos:

$$d\mathbf{x}_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Assim, temos a matriz de aplicação linear  $d\mathbf{x}_q$  na base canônica:

$$d\mathbf{x}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

Portanto, dizer que  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva significa dizer que os vetores coluna dessa matriz são linearmente independentes, em outras palavras,  $\partial \mathbf{x} / \partial u \wedge \partial \mathbf{x} / \partial v \neq 0$ . Mais adiante, veremos que, em todo ponto  $q \in S$  devem haver vetores tangentes às curvas coordenadas, definindo um plano tangente à superfície naquele ponto. Este plano tangente terá vetor normal definido pelo produto vetorial citado à pouco.

Uma terceira forma equivalente de dizer que os vetores coluna da matriz 2.1.1 são linearmente independentes é através da não nulidade simultânea dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

**Exemplo 2.1.2** *É intuitivo se pensar, após ler a Definição 2.1.1, que a esfera unitária é uma superfície regular, e de fato é. Carmo (2010) trata este exemplo de forma similar. Seja a aplicação  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por*

$$\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}),$$

*que nada mais é do que a meia esfera superior de raio unitário, onde  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ . Devemos nos ater ao fato de que  $U$  é aberto, assim exclui-se a borda da meia esfera, ou seja, a circunferência em  $z = 0$ .*

*De fato, a condição 1 é satisfeita, já que as funções da parametrização  $\mathbf{x}_1$  tem derivadas de todas as ordens para  $x^2 + y^2 < 1$ .*

A condição 2 também é satisfeita, basta observar que  $\mathbf{x}_1$  é bijetiva e a inversa  $\mathbf{x}_1^{-1}$  nada mais é do que a projeção contínua de  $\mathbf{x}(U)$ .

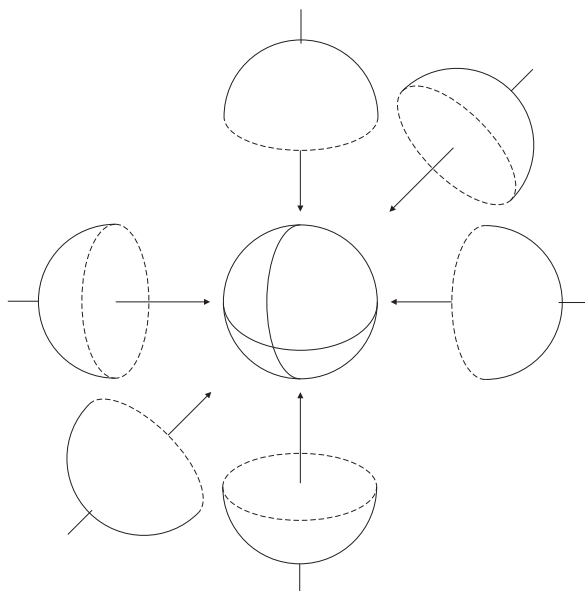
Por fim, para a condição 3, basta calcular os determinantes Jacobianos e observar que ao menos um deles é diferente de zero:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} \equiv 1 \neq 0.$$

Através de  $\mathbf{x}_1$ , conseguimos cobrir uma parte da esfera, mostrando que essa parte é uma superfície regular.

Assim, fica fácil terminar de cobrir a esfera com outras seis parametrizações análogas, mesmo que elas se sobreponham (Fig. 2.2).

Figura 2.2: Esfera totalmente coberta por superfícies regulares



Fonte: Produção do próprio autor

Portanto, a esfera unitária é uma superfície regular.

Fazer uso apenas da Definição 2.1.1 pode se tornar um pouco inviável em certos casos para determinar se uma superfície é regular ou não. As próximas duas proposições facilitarão essa verificação e contribuirão muito com nosso estudo. Carmo (2010) enuncia a primeira da seguinte forma:

**Proposição 2.1.3** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  para  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.*

**Demonstração:** Para mostrar que essa proposição é verdadeira, basta verificar as condições da definição de superfície regular. Seja, então, a aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal

que

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

é uma parametrização do gráfico. Como  $f$  é diferenciável, a condição 1 é satisfeita. Calculando os determinantes Jacobianos encontramos ao menos um que é sempre não nulo:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 1.$$

Isso já satisfaz a condição 3. Temos também, que  $\mathbf{x}$  é bijetiva, já que cada ponto  $(x, y, z)$  é a imagem por  $\mathbf{x}$  de um único  $(u, v)$ . Como  $\mathbf{x}^{-1}$  é a projeção contínua do gráfico de  $f$  em  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ , temos que a inversa  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua. Isso satisfaz a condição 2, e portanto o gráfico de  $f$  é uma superfície regular. ■

Antes de enunciarmos a segunda proposição, precisamos da definição de *ponto crítico*. Carmo (2010) define *ponto crítico* da seguinte forma:

**Definição 2.1.4** *Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definida em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ . Um ponto de  $\mathbb{R}^m$  que não é um valor crítico é chamado um valor regular de  $F$ .*

Para os fins deste estudo, vamos nos restringir ao caso em que  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f$  é diferenciável. Assim, dado um ponto  $p \in U$ , calculamos a diferencial de  $df_p$  aplicada aos vetores da base canônica

$$df_p(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) = f_x, \quad df_p(0, 1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = f_y, \quad df_p(0, 0, 1) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) = f_z.$$

Assim, tem-se

$$df_p = (f_x, f_y, f_z). \tag{2.1.2}$$

Pela Definição 2.1.4,  $p$  é ponto crítico de  $f$  se  $df_p$  não é sobrejetiva, ou seja, se  $df_p$  leva todos os vetores em  $\mathbb{R}^3$  no vetor nulo. Para isso, devemos ter

$$f_x = f_y = f_z = 0,$$

em  $p$ . Se um ponto não é crítico, então sua imagem é um *valor regular*, nesse caso, de  $f$ . Assim, basta tomar a contrária da definição de ponto crítico, ou seja,  $a \in f(U)$  é um *valor regular* de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se ao menos uma das derivadas  $f_x$ ,  $f_y$  ou  $f_z$  não for nula em  $f^{-1}(a)$ . Lemos  $f^{-1}(a)$  como *imagem inversa de  $a$  pela  $f$*  e é definida como

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U; f(x, y, z) = a\}. \tag{2.1.3}$$

A segunda proposição faz uso desta imagem inversa para criar uma superfície regular. Carmo (2010) a enuncia da seguinte maneira:

**Proposição 2.1.5** *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .*

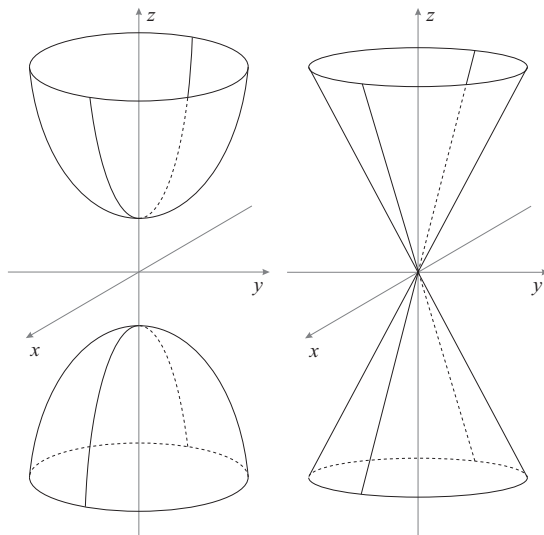
Antes de demonstrar a Prop. 2.1.5, vamos entender o que é uma  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  através de um exemplo.

**Exemplo 2.1.6** *Seja o hiperboloide de duas folhas  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ . Podemos tomar uma função  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$F(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1.$$

Observe que  $F$  não admite um gráfico<sup>2</sup>, pois ela toma um ponto do  $\mathbb{R}^3$  e devolve um valor de  $\mathbb{R}$ . Neste caso, o conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^3$  que retorna o valor 0 é o hiperboloide de duas folhas anterior. De fato, 0 é um valor regular de  $F$ , pois as derivadas parciais de  $F$  não se anulam simultaneamente em qualquer dos pontos do hiperboloide. Pela Prop. 2.1.5,  $F^{-1}(0)$ , é uma superfície regular, que neste caso é o hiperboloide de duas folhas. Já o conjunto de pontos  $F^{-1}(-1)$ , não é uma superfície regular, pois este conjunto possui o ponto  $(0, 0, 0)$  que torna nula todas as derivadas parciais de  $F$ , simultaneamente. Esta superfície é o cone circular, que portanto não é uma superfície regular (Fig. 2.3).

Figura 2.3: Hiperboloide de duas folhas (esquerda) e Cone (direita).



Fonte: Produção do próprio autor

Vamos, agora, à demonstração da Prop. 2.1.5 e comentaremos sobre ela posteriormente.

<sup>2</sup>Em verdade,  $F$  até admite um gráfico, mas ainda não temos a capacidade de ver em 4 dimensões.



**Demonstração:** Seja  $p = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $f^{-1}(a)$ . Como  $a$  é valor regular, sabemos que as derivadas parciais de  $f$  não se anulam simultaneamente em  $p$ . Vamos supor então que  $f_z \neq 0$  em  $p$ .

Vamos definir uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)), \quad (2.1.4)$$

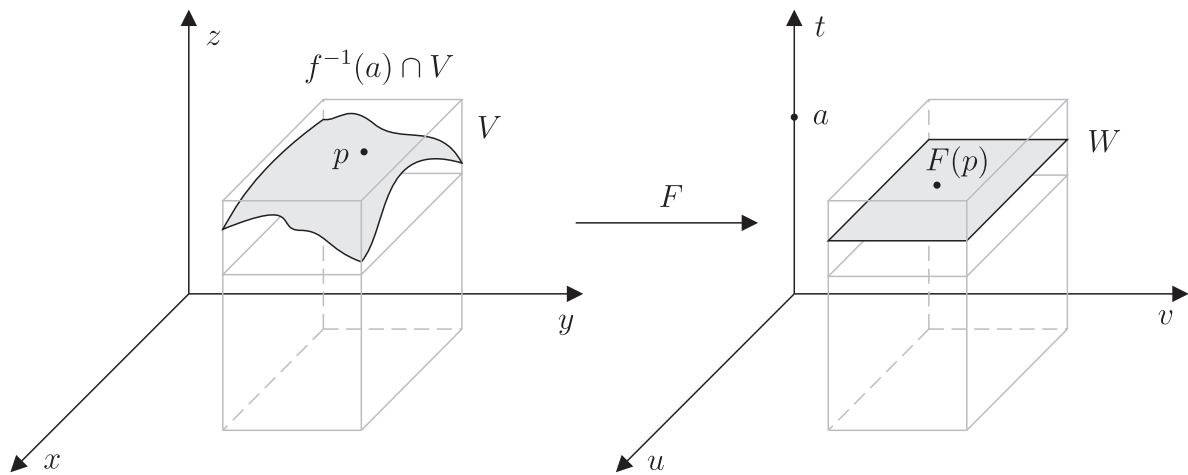
onde a imagem de  $F$  está indicada por  $(u, v, t)$  na Fig. 2.4. Podemos calcular o determinante da matriz de aplicação linear de  $dF_p$ , obtendo

$$\det(dF_p) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = f_z \neq 0.$$

Isso significa que a aplicação linear  $dF_p$  é um *isomorfismo*<sup>3</sup>, já que sua matriz é invertível.

Podemos assim, aplicar o Teorema da Função Inversa (apêndice A), que garante a existência de uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$ , tal que  $F : V \rightarrow W$  tem inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ . Observemos a Fig. 2.4 para visualizar o que está acontecendo geometricamente.

Figura 2.4: Aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e as vizinhanças  $V$  e  $W$



Fonte: Produção do próprio autor

Pela forma como a aplicação  $F$  foi definida, temos que

$$F^{-1}(u, v, t) = (u, v, g(u, v, t)),$$

<sup>3</sup>Seja  $A$  uma transformação linear, e  $E$  e  $F$  espaços vetoriais. Dizemos que  $A : E \rightarrow F$  é um *isomorfismo* quando  $A$  é uma bijeção linear, ou seja, injetiva e sobrejetiva. Dizemos também que  $E$  e  $F$  são isomorfos (LIMA, 2008).

cujas funções coordenadas são diferenciáveis. Para  $t = a$ , temos  $z = g(u, v, a)$ . Como  $a$  é uma constante fixada,  $z$  resume-se em uma função que depende apenas de  $x$  e  $y$ , tal que

$$z = h(x, y).$$

Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, a)\},$$

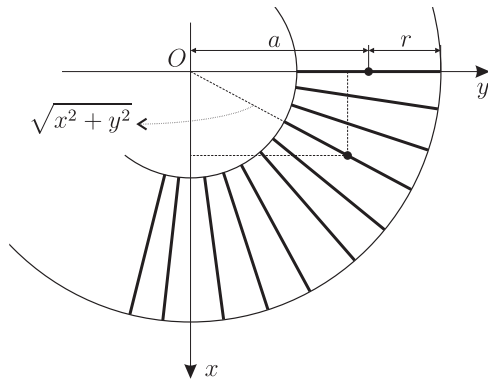
que é consequência das Eq. 2.1.4 e Eq. 2.1.3, temos que de fato o gráfico de  $h$  é  $f^{-1}(a) \cap V$ .

Como  $h$  é diferenciável, pela Prop. 2.1.3,  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular. ■

Supor a aplicação  $F$  na demonstração anterior não é um procedimento trivial. Carmo (2010), em sua ampla experiência matemática, sabendo da existência dessa aplicação  $F$ , faz seu uso para poder recorrer ao Teorema da Função Inversa (apêndice A). O ponto chave da demonstração da Prop. 2.1.5, é a aplicação do Teorema da Função Inversa, que não nos cabe demonstrá-lo. Este teorema será muito importante para demonstrar as próximas proposições desta seção. Antes, vamos a outro exemplo de superfície regular.

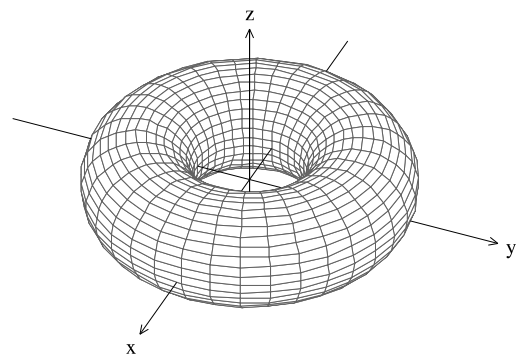
**Exemplo 2.1.7** *O toro é uma das superfícies mais famosas no estudo da topologia. Ele é gerado pela rotação de uma circunferência em torno de um eixo contido no plano da circunferência. Seja a circunferência  $C$  dada por  $(y - a)^2 + z^2 = r^2$  contida no plano  $yz$  de raio  $r$ , centrada em  $(0, a, 0)$ , tal que  $a > r$ .*

Figura 2.5: Construção do Toro.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 2.6: O Toro.



Fonte: Produção do próprio autor

Rotacionando a circunferência em torno do eixo  $z$ , obtemos o toro (Fig. 2.5 e Fig. 2.6):

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$$

Vamos verificar que o toro é uma superfície regular. Se tomarmos o toro em função do raio ao quadrado, teremos

$$f(x, y, z) = r^2 = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2,$$

que possui todas derivadas parciais não nulas simultaneamente em todos os pontos de  $f^{-1}(r^2)$ . De fato, o toro é uma superfície regular.

Para usos posteriores, encontraremos uma parametrização para a equação do toro. Para isto, basta rotacionar a circunferência  $C$  em torno do eixo  $z$  para obtermos

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

A verificação da veracidade desta parametrização é direta, bastando substituir as expressões na equação do toro.

Enunciamos agora a recíproca local da Prop. 2.1.3, que nos dá a ideia de que uma superfície regular nada mais é do que pedaços de superfícies regulares geradas por funções diferenciáveis que são "colados". Carmo (2010) a enuncia da seguinte maneira:

**Proposição 2.1.8** *Seja  $S \in \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p \in S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(x, z)$ ,  $x = h(y, z)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização para a superfície  $S$  em  $p$ . Então  $\mathbf{x}$  é da forma

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Como  $\mathbf{x}$  é regular, pela condição 3 da definição de superfície regular, podemos supor ao menos um dos determinantes jacobianos diferentes de 0 em  $\mathbf{x}^{-1}(p) = q$  e escolhemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$$

para chegarmos em  $z = f(x, y)$ . Os outros casos são análogos. Para provar que  $V$  pode ser gerado pela função  $f$  precisamos descobrir onde estão os pontos  $(x, y)$ , e mais do que isso, precisamos saber se o conjunto desses pontos satisfaz a superfície regular. Não há nada mais intuitivo do que se pensar numa projeção  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  e comparar a imagem dessa projeção com o aberto  $U$ . Assim, tomamos a composta  $\pi \circ \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

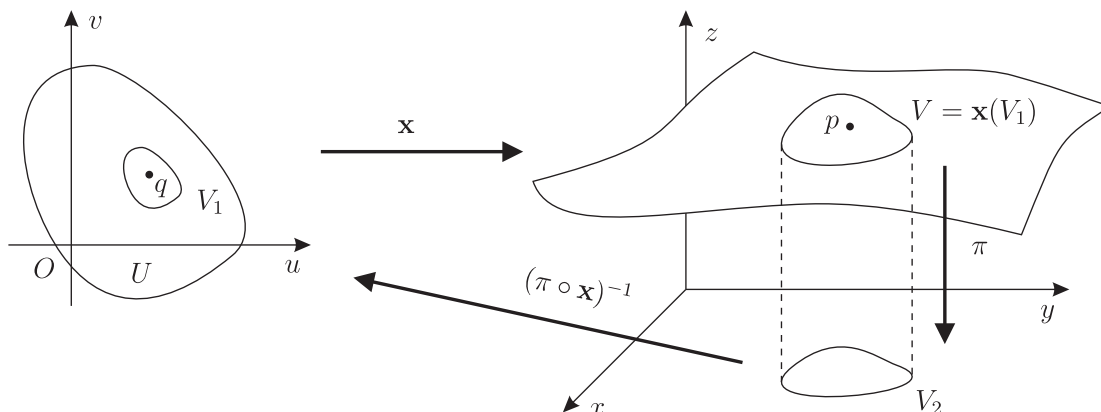
$$\pi \circ \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Como por hipótese o determinante jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  é diferente de zero, analogamente à demonstração da Prop. 2.1.5, podemos aplicar o Teorema da Função Inversa (apêndice A). Este garante a existência de uma vizinhança  $V_1$  de  $q$  em  $U$  e uma vizinhança  $V_2$  de  $\pi \circ \mathbf{x}(q)$  tal que  $\pi \circ \mathbf{x}$  é um difeomorfismo<sup>4</sup> e portanto existe  $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  que é diferenciável (Fig. 2.7).

---

<sup>4</sup>Sejam  $U, V$  abertos do espaço euclidiano. Uma bijeção  $f : U \rightarrow V$  chama-se um *difeomorfismo* de  $U$  sobre  $V$  quando é diferenciável e sua inversa  $f^{-1} : V \rightarrow U$  também o é (LIMA, 2009a).

Figura 2.7: Difeomorfismo  $\pi \circ \mathbf{x} : V_1 \rightarrow V_2$ .



Fonte: Produção do próprio autor

Tomando a composta de  $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  com  $(u, v) \rightarrow z(u, v)$ , tal que esta última é diferenciável pela parametrização  $\mathbf{x}$ , obtemos  $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$  que é diferenciável e portanto  $V$  é seu gráfico. ■

Para encerrarmos a seção, utilizamos novamente o Teorema da Função Inversa (apêndice A) para obter outra proposição. Carmo (2010) nos dá:

**Proposição 2.1.9** *Seja  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação com  $p \in \mathbf{x}(U)$  tal que as condições 1 e 3 da Definição 2.1.1 sejam satisfeitas. Suponha que  $\mathbf{x}$  seja bijetiva. Então  $\mathbf{x}^{-1}$  é contínua.*

Esta proposição garante que se as condições 1 e 3 da definição de superfície regular forem satisfeitas e  $\mathbf{x}$  for bijetiva, então a condição 2 será consequência.

A demonstração dessa proposição é praticamente idêntica à demonstração da proposição anterior e portanto iremos omiti-la, com exceção da parte final, onde usamos a hipótese de  $\mathbf{x}$  ser bijetiva. Assim, construímos a aplicação  $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  nos moldes da Prop. 2.1.8. Tomando a restrição  $\mathbf{x}(V_1)$  e sabendo que  $\mathbf{x}$  é bijetiva, podemos tomar a composição

$$(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi = \mathbf{x}^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi = \mathbf{x}^{-1},$$

que é contínua pela composição de aplicações contínuas.

Encerramos assim nosso estudo em torno das imagens inversas e das proposições referentes à regularidade das superfícies.

## 2.2 MUDANÇA DE PARÂMETROS E FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS SOBRE SUPERFÍCIES

Ao se provar que a esfera unitária no Ex. 2.1.2 era uma superfície regular, cobrimo-la com partes de esferas (vizinhanças coordenadas) que, pela definição, sabíamos que eram

superfícies regulares. A questão é que, certos pontos da esfera eram cobertos com mais de uma vizinhança, cada uma com parametrizações diferentes, obviamente. Isto nos sugere pensar que, para que a ideia utilizada no Ex. 2.1.2 faça sentido, é necessário que a regularidade de uma superfície não dependa do sistema de coordenadas da parametrização escolhida. Em termos práticos, deve haver um difeomorfismo entre os parâmetros  $(u, v)$  e  $(\xi, \eta)$  de um mesmo ponto quando este está em duas vizinhanças coordenadas simultaneamente. Em termos matemáticos, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), & (u, v) \in U, \\ \mathbf{y}(\xi, \eta) &= (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)), & (\xi, \eta) \in V,\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são parametrizações que levam as vizinhanças  $U$  e  $V$  em uma vizinhança  $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$  de uma superfície regular  $S$ , tal que

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{y}^{-1}(W),$$

é dita uma mudança de coordenadas. O difeomorfismo está no fato de  $u$  e  $v$  serem diferenciáveis e possuírem inversas diferenciáveis.

Este difeomorfismo de fato existe, e Carmo (2010) nos dá a seguinte proposição:

**Proposição 2.2.1 (Mudança de Parâmetros)** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$ , e sejam  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ . Então a "mudança" de coordenadas  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  é um difeomorfismo.*

A demonstração da Prop. 2.2.1 faz uso, mais uma vez, do Teorema da Função Inversa (apêndice A). Fato este que já era de se esperar, em se tratando de uma aplicação onde devemos provar seu difeomorfismo. Graficamente temos a situação exibida na Fig. 2.8.

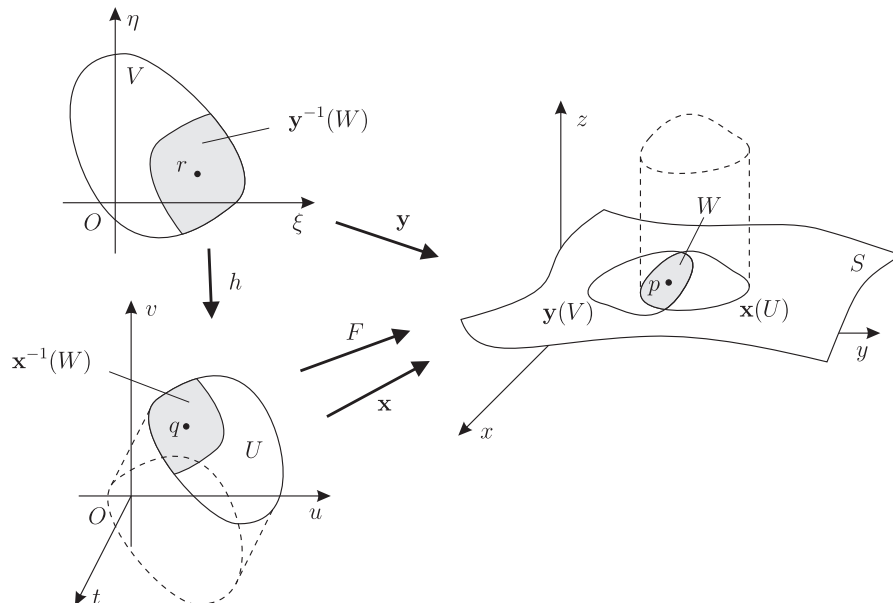
**Demonstração:** Seja  $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$  e definimos  $q = h(r) \in \mathbf{x}^{-1}(W)$ . Como a aplicação  $\mathbf{x}$  é a parametrização de uma superfície regular  $S$ , podemos supor um dos determinantes jacobianos diferentes de zero, e escolhemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Como precisamos que  $\mathbf{x}^{-1}$  seja diferenciável na composição com  $\mathbf{y}$  para gerar  $h$ , devemos construir uma aplicação  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que envolva a vizinhança  $\mathbf{x}(U)$ , e mais do que isso, que tenha matriz de aplicação linear  $dF_q$  quadrada para podermos calcular o determinante jacobiano. Isto nos possibilita fazer uso do Teorema da Função Inversa (apêndice A). Assim, definimos

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, \quad t \in \mathbb{R},$$

Figura 2.8: Mudança de parâmetros  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ .



Fonte: Produção do próprio autor

que nada mais é do que um cilindro de base  $U$  na direção de  $t$  (Atente-se à Fig. 2.8).

Tomando o determinante da matriz de aplicação linear da diferencial  $dF_q$ , temos:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0,$$

que nos permite aplicar o Teorema da Função Inversa (apêndice A), garantindo a existência de uma vizinhança  $M$  de  $\mathbf{x}(q)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F^{-1}$  existe e é diferenciável em  $M$ . Nos atemos ao fato de que  $F|_{U \times \{0\}} = \mathbf{x}$ , ou seja,  $F$  restrita à  $U$  cartesiano  $\{0\}$  é igual a  $\mathbf{x}$ .

Agora nos basta construir a composição. Tomamos um vizinhança  $N$  de  $r$  em  $V$  tal que  $\mathbf{y}(N) \subset M$ . Restrita a  $N$ , a composta  $h|_N = (F^{-1} \circ \mathbf{y})|_N$  é de fato uma aplicação diferenciável em  $r$  pela *regra da cadeia para aplicações*<sup>5</sup> diferenciáveis.

Para provar que  $h^{-1}$  é diferenciável também, basta, analogamente, tomar o caminho inverso. ■

Se quiséssemos provar que a mudança de parâmetros  $h$  era um homomorfismo, bastava tomar a composta de homomorfismos sobre superfícies. Esta mesma ideia não era possível de ser usada na demonstração anterior por que ainda não definimos o que vem a ser uma aplicação diferenciável sobre uma superfície. Carmo (2010), então, enuncia:

<sup>5</sup>De acordo com Lima (2009a), a composta de aplicações diferenciáveis é diferenciável. O enunciado completo para este fato encontra-se no apêndice A.

**Definição 2.2.2 (Aplicação Diferenciável Sobre Superfície)** *Seja  $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em um conjunto aberto  $V$  de uma superfície regular  $S$ . Então  $f$  é diferenciável em  $p \in V$  se, para alguma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$ , a composição  $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ . A função  $f$  é diferenciável em  $V$  se é diferenciável em todos os pontos de  $V$ .*

Esquemáticamente, temos isso:

$$U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{x}} S \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Em outras palavras, para que  $f$  seja diferenciável em  $p$ , a sua composta com  $\mathbf{x}$  deve ser diferenciável na imagem inversa  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ :

$$U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f \circ \mathbf{x}} \mathbb{R}$$

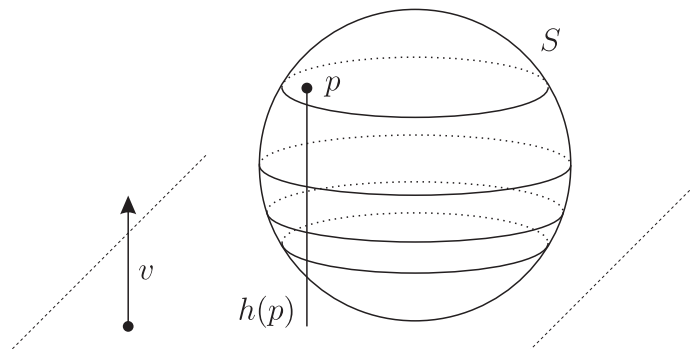
Da Prop. 2.2.1, temos de imediato que uma aplicação diferenciável sobre superfície independe da parametrização escolhida, pois basta tomar uma mudança de coordenadas  $h : \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$  e a composição com  $f$  continuará diferenciável, ou seja

$$f \circ \mathbf{x} \circ h = f \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} = f \circ \mathbf{y}.$$

Um exemplo muito simples de uma aplicação diferenciável sobre superfície é a função *altura relativa a um vetor*:

**Exemplo 2.2.3** *Seja  $S$  uma superfície regular e uma vizinhança  $V$  de  $S$  contida em  $\mathbb{R}^3$ . A função altura relativa a um vetor  $v$  fixado é a aplicação diferenciável sobre superfície  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(p) = p \cdot v$ , onde  $p \in S$ . Assim,  $h(p)$  é a altura de um ponto  $p$  relativa a um plano perpendicular a  $v$  passando pela origem de  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 2.9).*

Figura 2.9: Função altura  $h(p) = p \cdot v$ .

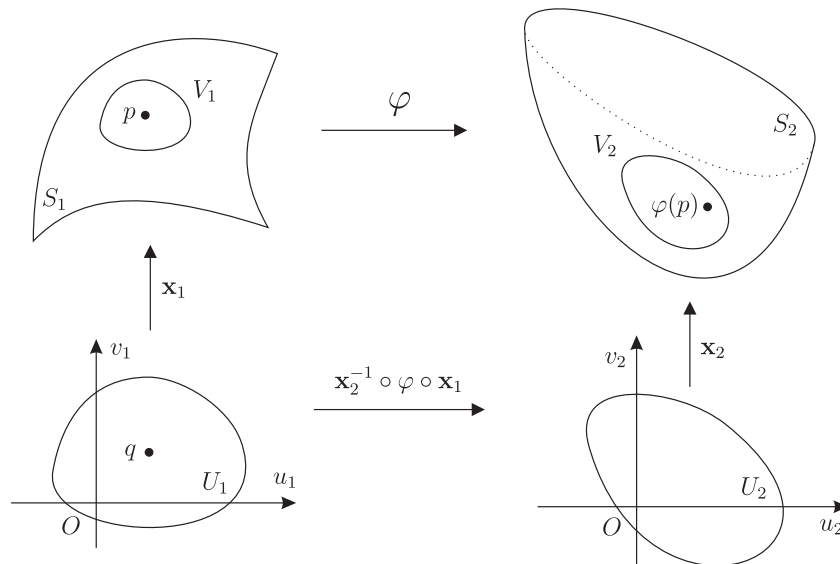


Fonte: Produção do próprio autor

Em decorrência da Prop. 2.2.1 e da Definição 2.2.2, podemos ampliar nosso conceito de aplicação diferenciável *sobre* uma superfície para uma aplicação diferenciável *entre* superfícies. Carmo (2010) não enuncia uma definição, a bem dizer, para isso. Contudo, faz comentários nos dando o necessário e suficiente para fazê-la:

**Definição 2.2.4 (Aplicação Diferenciável Entre Superfícies)** *Sejam  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  e  $\mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  duas parametrizações para as superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Dado  $p \in V_1$ , onde  $V_1$  é uma vizinhança contida em  $S_1$ , chamamos de aplicação diferenciável entre superfícies a aplicação  $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$  se, dados  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$  e  $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$ , a aplicação composta  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$  é diferenciável em  $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$  (Fig: 2.10).*

Figura 2.10: Aplicação Diferenciável Entre Superfícies.



Fonte: Produção do próprio autor

A demonstração de que uma aplicação diferenciável *entre* superfícies independe da parametrização escolhida é semelhante a demonstração para aplicação *sobre* superfícies. Basta supor outras parametrizações  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$  para  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, e tomar a composição com as mudanças de coordenadas  $h = \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1$  e  $g^{-1} = \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2$ . Assim,

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 \circ h &= \mathbf{y}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{y}_1 \\ &= \mathbf{y}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{y}_1, \end{aligned}$$

que é diferenciável pela composição inicial. A inversa é obtida de forma análoga.

O próximo exemplo trata de uma aplicação diferenciável entre superfícies.

**Exemplo 2.2.5** *Seja  $S$  uma superfície diferenciável, e seja  $\varphi$  uma aplicação diferenciável entre superfícies tal que  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $S \subset V \subset \mathbb{R}^3$ . Tomando a restrição  $\varphi|_S$  obtemos uma superfície regular  $E = \varphi(S)$ .*



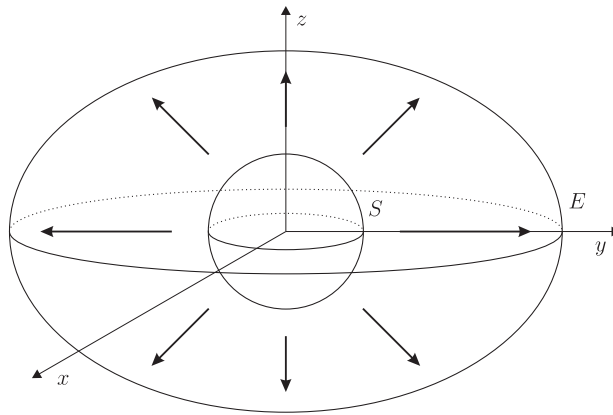
Definimos  $\varphi(x, y, z) = (xa, yb, zc)$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ , e restringimos  $\varphi$  a esfera  $S$  de raio unitário centrada na origem, tal que

$$S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Assim,  $\varphi|_S$  é uma aplicação diferenciável da esfera sobre um elipsoide (Fig. 2.11) de equação

$$E = \left\{ (x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Figura 2.11: Aplicação  $\varphi|_S : S \rightarrow E$ .



Fonte: Produção do próprio autor

Com efeito, podemos concluir que a esfera e o elipsoide são superfícies difeomorfas, pois existe um difeomorfismo que leva uma superfície na outra.

A ideia de *superfícies difeomorfas* citada no exemplo anterior nos dá a noção de equivalência associada a diferenciabilidade de duas superfícies (CARMO, 2010). Uma analogia para o difeomorfismo de superfícies seria o isomorfismo para os espaços vetoriais e a congruência para a geometria euclidiana.

Como nosso estudo se restringe aos aspectos locais da geometria diferencial, podemos refazer nossa definição de superfície regular. No início deste capítulo definimos uma superfície regular como um conjunto de pontos, e não como uma aplicação. De fato, definir uma superfície como um conjunto de pontos é condição necessária para poder se trabalhar com aspectos globais de uma superfície, como a orientação, por exemplo (CARMO, 2010). Como aspectos globais não serão foco de nosso estudo, podemos definir uma superfície regular como uma parametrização diferenciável:

**Definição 2.2.6 (Superfície Parametrizada Regular)** *Uma superfície parametrizada  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\mathbf{x}$  de um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto  $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$  é chamado traço de  $\mathbf{x}$ .  $\mathbf{x}$  é regular se a diferencial  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$*

é injetiva para todo  $q \in U$  (i.e. os vetores  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$  são linearmente independentes para todo  $q \in U$ ). Um ponto de  $p \in U$  onde  $d\mathbf{x}_q$  não é injetiva é chamado um ponto singular de  $\mathbf{x}$ .

Se voltarmos ao capítulo 1, podemos observar semelhanças entre as definições de curva parametrizada e superfície parametrizada. De fato, podemos também definir uma curva regular como um conjunto de pontos e utilizar os conceitos de vizinhança, mas não faremos isto neste trabalho. Nosso foco é o estudo de superfícies.

Apresentamos agora um exemplo interessante de superfície parametrizada regular. Carmo (2010) apresenta apenas um exemplo genérico, portanto incluímos um específico.

**Exemplo 2.2.7** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular e definimos uma superfície da seguinte maneira:*

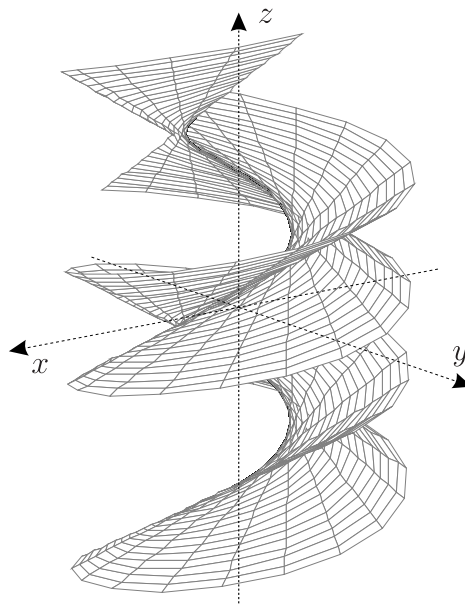
$$\mathbf{x}(t, u) = \alpha(t) + u\alpha'(t), \quad (t, u) \in I \times \mathbb{R}.$$

*Dizemos que  $\mathbf{x}$  é a superfície tangente de  $\alpha$ . Tome a hélice  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$  com  $t \in \mathbb{R}$  e  $a, b$  reais não nulos. A sua superfície tangente será dada por (Fig. 2.12)*

$$\mathbf{x}(t, u) = (a \cos(t) - au \sin(t), a \sin(t) + au \cos(t), bt + bu),$$

*com domínio  $U = \{(t, u) \in I \times \mathbb{R}; u \neq 0\}$ . De fato,  $\mathbf{x}$  é regular por ter derivadas parciais não nulas simultaneamente.*

Figura 2.12: A superfície tangente de uma hélice.



Fonte: Produção do próprio autor

Observe que mesmo tendo auto-interseções (o que não é mostrado na Fig. 2.12 por que limitamos seu domínio) a superfície tangente é regular. Ela é dada por duas

partes conexas, tendo como fronteira comum a hélice. Se olharmos para a forma como a superfície tangente é construída, podemos notar que seu formato é de uma reta: um ponto  $\alpha(t)$  somado ao produto de um parâmetro  $u$  com um vetor direção  $\alpha'(t)$ . Ou seja, a superfície tangente é o rastro deixado por uma reta tangente que caminha sobre  $\alpha$ .

Para finalizar esta seção, enunciamos uma última proposição dada por Carmo (2010).

**Proposição 2.2.8** *Seja  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada e seja  $q \in U$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\mathbf{x}(V) \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular.*

**Demonstração:** Mais uma vez, utilizaremos o Teorema da Função Inversa (apêndice A). Como  $\mathbf{x}$  é uma superfície parametrizada regular, definimos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

e supomos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \quad \text{em } q.$$

Agora definimos uma aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim temos

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \quad \text{em } q.$$

Podemos assim aplicar o Teorema da Função Inversa (apêndice A) que garante a existência de uma vizinhança  $M$  de  $q$  e  $N$  de  $F(q)$ , tal que  $V = M \cap S$ , onde  $F : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo. Assim, tomamos a restrição  $F|_V = \mathbf{x}|_V$  que é um difeomorfismo de  $V$  em  $\mathbf{x}(V)$  e portanto  $\mathbf{x}(V)$  é superfície regular. ■

Este teorema é mais significativo do que parece. Ele nos mostra que podemos estender a vizinhança  $V$ , na medida do possível, de forma a garantir que a superfície gerada continuará sendo regular. Por isso sempre tomamos uma vizinhança  $V$  arbitrária do ponto, pois o que nos interessa é o comportamento local, ou seja, ao redor do ponto. Este "redor" deve satisfazer as condições da definição de superfície, podendo ser infinitesimalmente pequeno ou arbitrariamente grande.

## 2.3 PLANO TANGENTE E DIFERENCIAL DE UMA APLICAÇÃO

Utilizaremos agora o produto vetorial definido pela Eq. 1.1.6 no capítulo 1 para definir o plano tangente a uma superfície. Para isso, precisamos definir o que é um *vetor*

tangente a uma superfície. Carmo (2010) não o enuncia como uma definição, mas nos dá o necessário e suficiente para isso.

**Definição 2.3.1** *Sejam  $S$  uma superfície regular e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  uma curva parametrizada diferenciável. Chama-se vetor tangente a  $S$ , em um dado ponto  $p \in S$ , o vetor  $\alpha'(0)$ , com  $\alpha(0) = p$ .*

Agora temos condições de enunciar a primeira proposição referente a planos tangentes dada por Carmo (2010).

**Proposição 2.3.2** *Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

*coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $\mathbf{x}(q)$ .*

Quando dizemos que o subespaço *coincide* com o conjunto de vetores queremos dizer que eles se equivalem. Sendo assim, dado  $w$  pertencente ao conjunto de vetores tangentes, devemos provar que  $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ , assim como o contrário.

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $w$  um vetor tangente em  $\mathbf{x}(q)$ , ou seja,

$$w = \alpha'(0),$$

onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  é diferenciável e  $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$ . Tomando a composição diferenciável  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  (que é diferenciável por argumentos análogos aos presentes na demonstração da Prop. 2.2.1 sobre mudança de parâmetros), temos que, pela simples Definição de Diferencial (apêndice A),  $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = w$ . Inevitavelmente,  $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$  (Fig. 2.13).

( $\Leftarrow$ ) Seja agora  $w = d\mathbf{x}_q(v)$ , onde  $v \in \mathbb{R}^2$ . Tal  $v$  é o vetor direção de uma outra curva  $\gamma = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , tal que

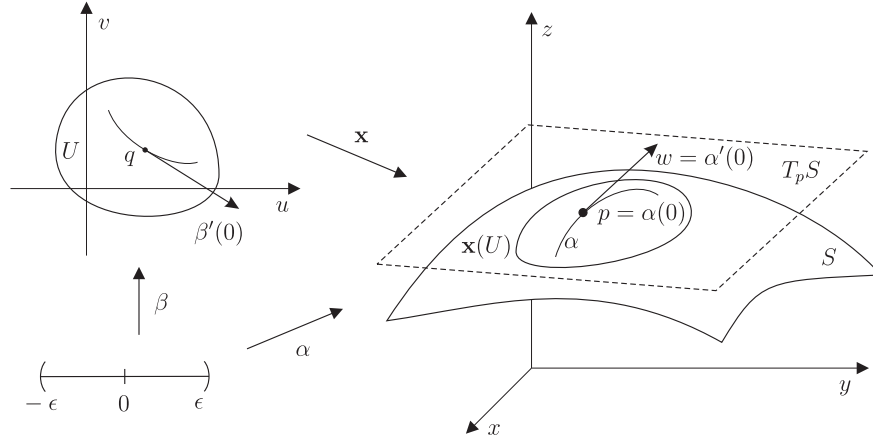
$$\gamma(t) = tv + q, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Mais uma vez, pela Definição de Diferencial (apêndice A), temos que  $w = \alpha'(0)$ , já que  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$ . Portanto,  $w$  é um vetor tangente. ■

A demonstração acima é uma decorrência da Definição de Diferencial (apêndice A), e é por este motivo que as conclusões são tiradas quase que de imediato.

Como consta na Fig. 2.13, chamamos  $T_p S$  o *plano tangente a  $S$  em  $p$* . Podemos perceber pela proposição anterior que o plano tangente independe da aplicação  $\mathbf{x}$ , porém, diferentes parametrizações definirão bases diferentes para o mesmo plano tangente. Esta base é dada pelo conjunto  $\{\partial\mathbf{x}/\partial u(q), \partial\mathbf{x}/\partial v(q)\}$ , já que pela condição 3 da definição de

Figura 2.13: Aplicação  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ .



Fonte: Produção do próprio autor

superfície regular 2.1.1, este conjunto é linearmente independente e gera o plano tangente de  $S$  em  $p = \mathbf{x}(q)$ . Chamamos esta base de *base associada a  $\mathbf{x}$*  (CARMO, 2010). Convém denotar a referida base por  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  por simplificação de notação.

Dada uma base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de um plano  $T_p S$  associada a  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , convém denotar as coordenadas de um vetor tangente  $w$  na base associada. Seja então  $w = \alpha'(0)$  onde  $\alpha = \mathbf{x} \circ \beta$ , tal que  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  é dada por

$$\beta(t) = (u(t), v(t)), \quad \beta(0) = q = \mathbf{x}^{-1}(p).$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \beta)(0) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(u(t), v(t))(0) \\ &= \mathbf{x}_u(q)u'(0) + \mathbf{x}_v(q)v'(0) = w \end{aligned}$$

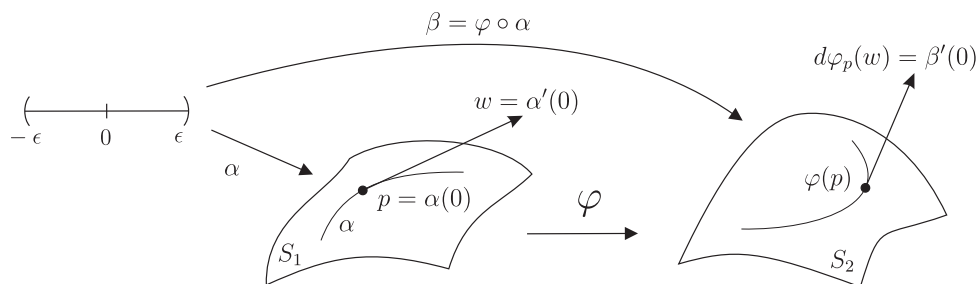
e, de fato,  $w$  é escrito com as coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  na base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ .

Podemos agora falar em *diferencial de uma aplicação*. Carmo (2010) enuncia uma proposição para mostrar que a diferencial de uma aplicação entre superfícies independe da escolha da parametrização  $\alpha$  em  $\beta = \varphi \circ \alpha$  (Fig. 2.14), e mais do que isso, que é uma aplicação linear:

**Proposição 2.3.3** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares, e seja a aplicação diferenciável  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  que leva uma vizinhança  $V \subset S_1$  em  $S_2$ . Tome  $p \in V$  e  $\beta = \varphi \circ \alpha$ , onde  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$  com  $\alpha(0) = p$ . Então, o vetor  $\beta'(0)$  não depende da escolha de  $\alpha$ . Além disso, a aplicação  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$  definida por  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  é linear (Fig. 2.14).*

**Demonstração:** Sejam  $\mathbf{x}(u, v)$  e  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  parametrizações em vizinhanças de  $p \in S_1$  e  $\varphi(p) \in S_2$ , respectivamente. Primeiramente vamos supor que  $\varphi(u, v) =$

Figura 2.14: *Diferencial de Aplicação Entre Superfícies*



Fonte: Produção do próprio autor

$(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$  e  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  com  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Tomando a composta  $\beta = \varphi \circ \alpha$ , obtemos a curva:

$$\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t))).$$

Derivando com relação a  $t$  e avaliando em  $t = 0$  tem-se

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right), \quad (2.3.5)$$

mostrando que  $\beta'(0)$  não depende de  $\alpha$ , mas apenas de  $\varphi$  e das coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ .

Além disso, da Eq. 2.3.5, obtemos

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix},$$

que nos dá a matriz de aplicação *linear* de  $d\varphi_p$ . ■

A ideia de diferencial de uma aplicação entre superfícies vem diretamente da Definição de Diferencial (Apêndice A). É preciso tomar um caminho na superfície  $S_1$ , através de  $\alpha$ , e o seu correspondente na superfície  $S_2$ , ou seja,  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . Como  $\alpha'(0) \in T_p S_1$  é o vetor velocidade em  $\alpha(0) = p$ , temos que  $\beta'(0) \in T_{\varphi(p)} S_2$  é o vetor velocidade em  $\beta(0) = \varphi(p)$ .

Tudo o que viemos estudando até agora é uma extensão do cálculo diferencial em  $\mathbb{R}^2$  para o  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, de curvas para superfícies. Se olharmos uma curva diferenciável muito próxima, ela se parecerá com uma reta, e localmente, a menos de um difeomorfismo, ela é uma reta. Após o breve estudo deste capítulo, estendemos este conceito para as superfícies regulares, que localmente são difeomorfas ao plano. Em outras palavras, para se obter as superfícies regulares, basta tomar abertos conexos de planos, curvâ-los e uni-los de forma que a passagem de um aberto para outro seja feita de forma diferenciável para se obter a superfície desejada. Dessa maneira, o mesmo pode ser feito com uma superfície regular,

ou seja, através de um difeomorfismo, moldar uma superfície regular em outra. Esta ideia sugere que o Teorema da Função Inversa (apêndice A) seja estendido para aplicações entre superfícies.

Para expressar o Teorema da Função Inversa (apêndice A) para superfícies, precisamos do conceito de *difeomorfismo local*. Dizemos que,

uma aplicação diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , é um *difeomorfismo local* quando para cada  $x \in U$ , existe um aberto  $V_x$ , com  $x \in V_x \subset U$ , tal que a restrição de  $f$  a  $V_x$  é um difeomorfismo de um aberto  $W_x \subset \mathbb{R}^n$ . (LIMA, 2009a, p.276).

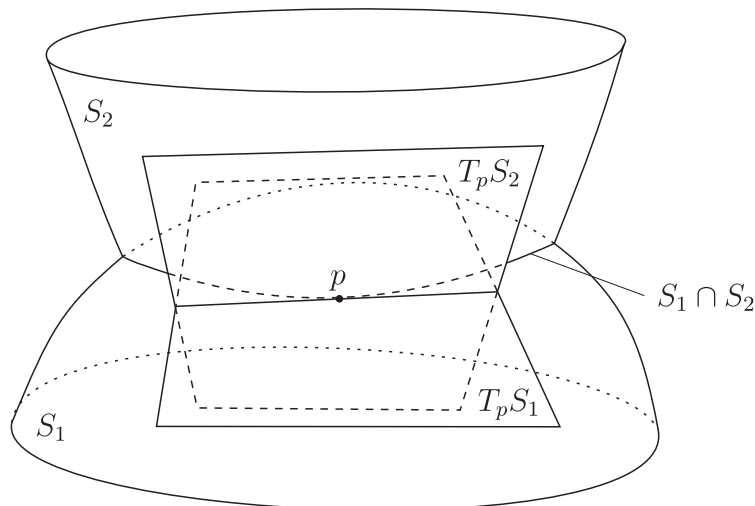
Assim, estamos aptos a enunciar a proposição de Carmo (2010):

**Proposição 2.3.4** *Se  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies regulares e  $\varphi : U \subset S_1 \rightarrow S_2$  é uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto  $U \subset S_1$  tal que a diferencial,  $d\varphi_p$ , de  $\varphi$  em  $p \in U$  é um isomorfismo, então  $\varphi$  é um difeomorfismo local em  $p$ .*

Para demonstrar esta proposição basta tomar duas parametrizações  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  para  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, conforme a Fig. 2.10, e aplicar o Teorema da Função Inversa (apêndice A) para mostrar que  $(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1)^{-1}$  existe e é diferenciável. Em outras palavras, devemos trazer a aplicação  $\varphi$  para um ambiente no qual sabemos trabalhar: o  $\mathbb{R}^2$ . Ambiente este que já sabemos que o Teorema da Função Inversa (apêndice A) pode ser aplicado.

Um último comentário, e não menos importante, sobre o que podemos definir com planos tangentes, antes de dar início a próxima seção, é em relação ao ângulo de interseção entre superfícies.

Figura 2.15: Planos tangentes  $T_p S_1$  e  $T_p S_2$  na interseção entre  $S_1$  e  $S_2$ .



Fonte: Produção do próprio autor

Dada uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , onde  $S$  é uma superfície regular, e dado  $p \in S$ , chamamos de *vetor normal unitário* o vetor dado por

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(p).$$

Assim, o ângulo de interseção entre superfícies em um dado ponto  $p \in S_1 \cap S_2$ , onde  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies regulares, é o ângulo entre os vetores normais unitários de  $S_1$  e  $S_2$  em  $p$ . É evidente que o ângulo entre os vetores normais é o mesmo que o ângulo entre os planos  $T_p S_1$  e  $T_p S_2$  (Fig. 2.15).

A ideia de vetor normal a superfície será mais explorada no próximo capítulo.

## 2.4 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL E ÁREA

Nesta seção descreveremos outras estruturas geométricas associadas a uma superfície. A mais importante delas é definida, nas palavras de Carmo (2010), a seguir.

**Definição 2.4.1 (Primeira Forma Fundamental)** *A forma quadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

onde  $\langle, \rangle$  é uma forma bilinear e simétrica, é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

Em um primeiro momento, a primeira forma fundamental não apresenta um significado muito aparente. Ela é apenas a expressão do produto interno tradicional do  $\mathbb{R}^3$  sobre uma superfície  $S$ . Dizer que  $\langle, \rangle$  é uma forma bilinear e simétrica, significa que dados  $u, v \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ , temos  $\langle u, v \rangle_p = \langle v, u \rangle_p$  e  $\langle u, v \rangle_p$  é linear em  $u$  e  $v$  (LIMA, 2008). Nesta seção, aceitaremos algumas definições como a anterior sem maiores interpretações geométricas. Entretanto, tudo ficará claro nos capítulos seguintes, pois ainda estamos definindo algumas entidades geométricas fundamentais.

Expressaremos agora a primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  associada a uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ . Assim, dado  $w \in T_p S$ , temos que  $w$  é o vetor velocidade de alguma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , tal que  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ . Assim, pela Definição 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_u u', \mathbf{x}_v v' \rangle_p + \langle \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p (u')(v') + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2, \end{aligned}$$



e definimos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p &= E(u_0, v_0), \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p &= F(u_0, v_0), \\ \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p &= G(u_0, v_0).\end{aligned}$$

Portanto, expressamos a segunda forma fundamental em termos de seus coeficientes  $E$ ,  $F$  e  $G$  calculados em  $t = 0$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ :

$$I_p(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \quad (2.4.6)$$

Fazendo  $p$  variar, obtemos funções  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$  que são diferenciáveis na vizinhança de  $p$ .

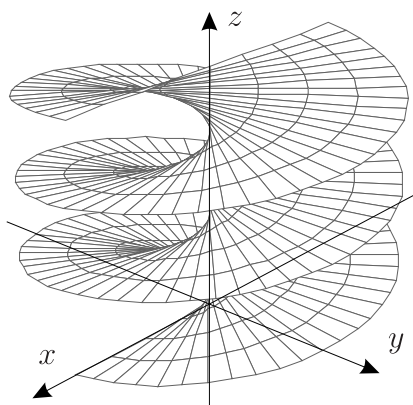
Apenas por questão de comodidade, omitiremos o índice  $p$  de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  e de  $I_p$  quando não houver possibilidade de ambiguidade.

O exemplo a seguir mostra o cálculo dos coeficientes da primeira forma fundamental de um helicóide.

**Exemplo 2.4.2** *Seja  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, at)$  a parametrização de uma hélice. Podemos tomar todas as retas perpendiculares ao eixo  $z$  que interceptam  $z$  e a hélice. A superfície gerada por todas essas retas chama-se helicóide (Fig. 2.16). Segundo Carmo (2010), uma parametrização do helicóide é dada por*

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Figura 2.16: O Helicóide.



Fonte: Produção do próprio autor

De fato, o helicóide é uma superfície regular, pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} &= (-v \sin u, v \cos u, a) \wedge (\cos u, \sin u, 0) \\ &= (-a \sin u, a \cos u, -v) \neq 0,\end{aligned}$$

para todo  $u$  e  $v$  pertencente ao intervalo descrito anteriormente.

Calculamos agora os coeficientes  $E$ ,  $F$  e  $G$ :

$$\begin{aligned} E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (-v \sin u, v \cos u, a) \rangle = v^2 + a^2 \\ F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle (-v \sin u, v \cos u, a), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 0 \\ G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle (\cos u, \sin u, 0), (\cos u, \sin u, 0) \rangle = 1 \end{aligned}$$

Assim, a primeira forma fundamental do helicóide é dada por

$$I_p(w) = (v^2 + a^2)(u')^2 + (v')^2.$$

**Observação 2.4.3** Podemos denotar expressões que estudamos anteriormente em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental. Um exemplo deste fato se dá pelo comprimento de arco  $s$  de uma curva  $\alpha : I \rightarrow S$ , dado anteriormente pela Eq. 1.2.8. Com efeito, pela Definição 2.4.1, obtemos

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Como  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  está contida em uma superfície parametrizada dada por  $\mathbf{x}(u, v)$ , temos que

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt. \quad (2.4.7)$$

Assim como o comprimento de arco, o ângulo  $\varphi$  entre duas curvas coordenadas de uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  também pode ser expresso pelos coeficientes  $E$ ,  $F$  e  $G$ :

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (2.4.8)$$

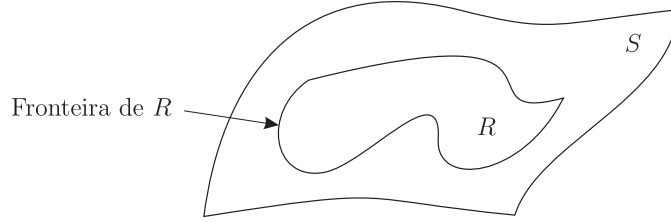
Com isso, as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se,  $F(u, v) = 0$  (CARMO, 2010).

Através da primeira forma fundamental, podemos definir também a área de uma região limitada de uma superfície regular. Tomamos a definição de região dada por Carmo (2010), antes de tratarmos da área.

**Definição 2.4.4** Chamamos de domínio regular um subconjunto aberto e conexo  $U$  de uma superfície regular  $S$ , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável regular, exceto em um número finito de pontos. Chamamos então de região  $R$  de  $S$ , a união de um domínio regular com sua fronteira  $\partial R$  (Fig. 2.17). A região é limitada se está contida em alguma bola de  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos agora, a área de uma região limitada, segundo Carmo (2010).

Figura 2.17: Região de  $S$



Fonte: Produção do próprio autor

**Definição 2.4.5 (Área de Região Limitada)** *Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . O número positivo*

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv = A(R), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R), \quad (2.4.9)$$

é chamado área de  $R$ .

Esta definição de área de região é bem intuitiva quando se parte do fato de que a norma do produto vetorial  $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$  representa a área do paralelogramo<sup>6</sup> formado pelos vetores  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$ .

Uma pergunta a ser feita em relação a definição anterior é se a integral da Eq. 2.4.9 independe da parametrização  $\mathbf{x}$ . De fato, ela independe, pois tomando outra parametrização  $\bar{\mathbf{x}} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $R \subset \bar{\mathbf{x}}(\bar{U})$  e definindo  $\bar{Q} = \bar{\mathbf{x}}^{-1}(R)$ , basta aplicar uma mudança de coordenadas  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \bar{\mathbf{x}}$ , que é um difeomorfismo, como já foi mostrado na seção sobre mudanças de parâmetros (CARMO, 2010).

**Observação 2.4.6** *Podemos expressar o integrando de Eq. 2.4.9 através dos coeficientes da primeira forma fundamental. Primeiro, observamos que*

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|^2 + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 &= (\sin \theta |\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|)^2 + (\cos \theta |\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|)^2 \\ &= \sin^2 \theta |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2 + \cos^2 \theta |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2 \\ &= |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2, \end{aligned}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$ . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| &= \sqrt{|\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Por este motivo podemos escrever  $|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sin \theta |\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  e a altura do paralelogramo é dada por  $\sin \theta |\mathbf{x}_u|$ .

**Exemplo 2.4.7** Vamos calcular a área da superfície do toro apresentado no Ex. 2.1.7. Tomamos uma parametrização para o toro como sendo

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad (2.4.10)$$

onde  $0 < u < 2\pi$  e  $0 < v < 2\pi$ . Assim, calculamos  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_v$  e os coeficientes  $E$ ,  $F$  e  $G$  da parametrização  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u); \\ \mathbf{x}_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0); \end{aligned}$$

e

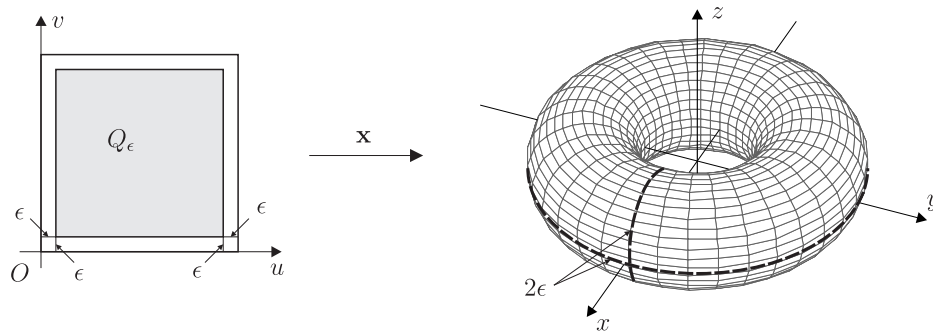
$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2; \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0; \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (r \cos u + a)^2. \end{aligned}$$

Pela observação anterior, temos que

$$|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2} = r(r \cos u + a).$$

Nos atemos ao fato de que, pela variação dos parâmetros, a parametrização cobre uma vizinhança coordenada do toro, e portanto, deixamos de fora a fronteira do domínio, que por ser uma curva, não tem influência na área. A Fig. 2.18 mostra a região  $Q_\epsilon$  sendo levada na região  $R_\epsilon$  do toro.

Figura 2.18: Área da superfície do Toro.



Fonte: Produção do próprio autor

Como  $u$  e  $v$  pertencem a intervalos abertos, obtemos a área total  $A(T)$  do toro pela Eq. 2.4.9, usando os coeficientes da primeira forma fundamental e tomando o limite:

$$\begin{aligned}
A(T) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(R_\epsilon) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_\epsilon} r(r \cos u + a) dudv \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} (r^2 \cos u + ra) dudv \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (r^2(2\pi - 2\epsilon)(\sin(2\pi - \epsilon) - \sin \epsilon) + ra(2\pi - 2\epsilon)^2) \\
&= 4\pi^2 ra
\end{aligned}$$

É interessante perceber quantos conceitos essenciais desenvolvidos ao longo deste capítulo foram usados neste último exemplo, desde a ideia de vizinhança coordenada, região limitada e parametrização de superfície até os coeficientes da primeira forma fundamental e área.

Agora já dispomos do necessário e suficiente para encerrarmos nosso estudo introdutório de superfícies regulares e passaremos agora a tratar da geometria da aplicação de Gauss.

# Capítulo 3

## A GEOMETRIA DA APLICAÇÃO DE GAUSS

### 3.1 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

Ao tratarmos de uma curva, nos deparamos com uma característica elementar deste elemento geométrico que é essencial em seu estudo: a curvatura. Neste capítulo, estudaremos o equivalente da curvatura para superfícies. Para isso, precisamos da noção de *orientação de superfície*.

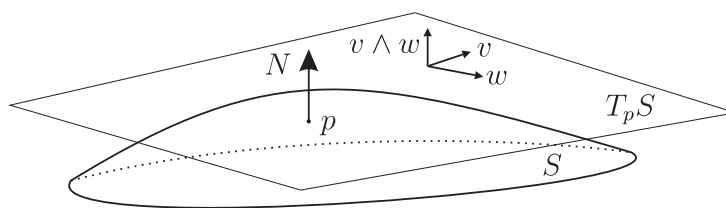
Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  a parametrização de uma superfície regular  $S$ . Portanto, a aplicação diferenciável  $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|},$$

nos dá um campo vetorial normal unitário a  $S$ , onde cada  $q \in \mathbf{x}(U)$  está associado a um vetor normal unitário  $N(q)$ .

Segundo Carmo (2010), diremos que uma superfície regular é *orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definidos sobre toda a superfície. Assim, escolhemos um campo  $N$ , e definimos a *orientação* de  $S$ .

Figura 3.1: Orientação positiva  $N$ .



Fonte: Produção do próprio autor

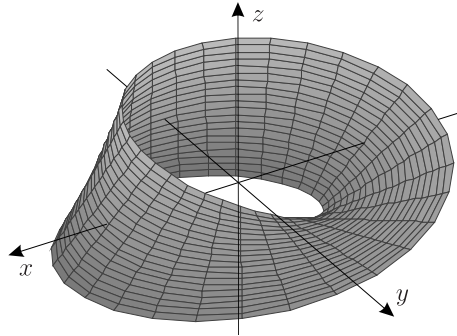
Essa orientação  $N$  em  $S$  induz uma orientação em cada plano tangente  $T_p S$  tal que, dada a base  $\{v, w\} \subset T_p S$  definimos que a orientação é positiva se  $\langle v \wedge w, N \rangle$  é positivo (Fig. 3.1).

**Observação 3.1.1** *Nem toda superfície admite um campo diferenciável de vetores, ou seja, é orientável. Um exemplo disso é a faixa de Möbius<sup>1</sup> (Fig. 3.2) que não possui uma orientação definida, bastando percorrer a faixa em um sentido para verificar tal fato. Uma parametrização para a faixa de Möbius é dada por (CARMO, 2010),*

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \left( 2 - v \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right) \cos u, \left( 2 - v \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right) \sin u, v \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right),$$

onde  $0 < u < 2\pi$  e  $-1 < v < 1$ .

Figura 3.2: A faixa de Möbius



Fonte: Produção do próprio autor

Munidos da noção de orientação, podemos enunciar a definição da *aplicação de Gauss* dada por Carmo (2010):

**Definição 3.1.2 (Aplicação de Gauss)** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$  toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

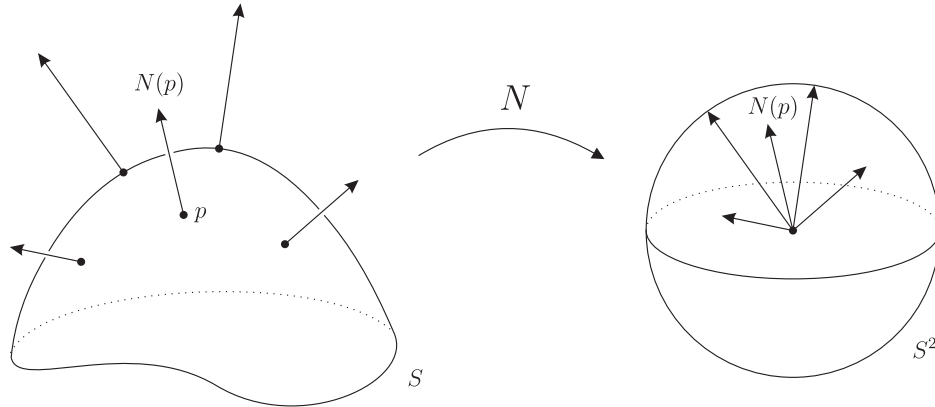
*A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada aplicação de Gauss de  $S$  (Fig. 3.3).*

A aplicação de Gauss será uma das mais importantes aplicações (no sentido de aplicação linear) estudadas neste trabalho. Ela nos dará informações essenciais a respeito do estudo de superfícies, a citar, a curvatura gaussiana, uma importante propriedade local.

Facilmente percebemos que a aplicação de Gauss é um difeomorfismo local, assim como outros citados anteriormente. Assim, a diferencial  $dN$  da aplicação de Gauss, sai

<sup>1</sup>August Ferdinand Möbius foi um matemático e astrônomo alemão do século XIX (EVES, 2004).

Figura 3.3: A Aplicação de Gauss



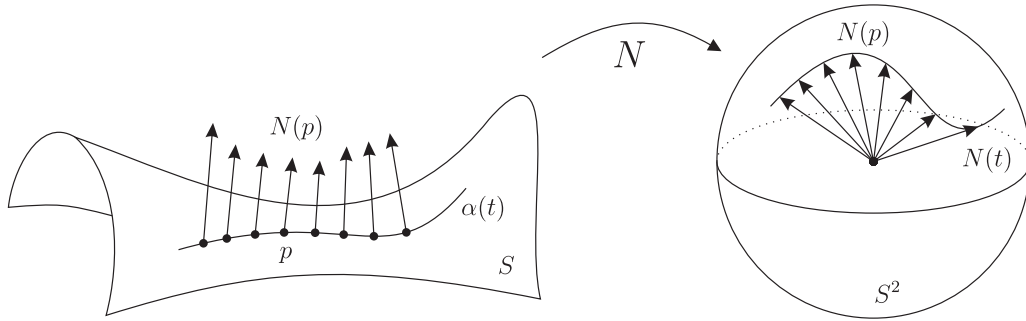
Fonte: Produção do próprio autor

de um plano tangente á superfície  $S$  e vai para um plano tangente á esfera unitária de Gauss, tal que escrevemos

$$dN : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2.$$

Como  $T_p S$  e  $T_{N(p)} S^2$  são os mesmos espaços vetoriais, podemos enxergar a diferencial da aplicação de Gauss como uma *aplicação linear*, observe a figura Fig. 3.4.

Figura 3.4: Curva  $N \circ \alpha(t) = N(t)$ .



Fonte: Produção do próprio autor

Dada uma curva parametrizada  $\alpha(t)$  em  $S$ , com  $\alpha(0) = p \in S$ , tomamos a composta  $N \circ \alpha(t) = N(t)$ , que é a imagem da curva pela aplicação de Gauss na esfera  $S^2$ . Temos assim que, o vetor tangente  $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$  é um vetor de  $T_p S$ . Este vetor  $N'(0)$  mede então a taxa de variação do vetor normal  $N$  na direção da curva  $\alpha(t)$ . Em outras palavras, a  $dN_p$  mede o quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p$ .

Apresentaremos agora quatro exemplos de campos de vetores normais  $N$  de quatro tipos de superfícies diferentes. Esses exemplos serão usados para exemplificar resultados posteriores.



**Exemplo 3.1.3** Seja  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  um plano. É simples calcular que

$$N = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

, ou seja, o campo de vetores normais unitários é constante, portanto  $dN = 0$ . (Fig. 3.5).

**Exemplo 3.1.4** Seja  $S^2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  uma esfera de raio unitário e  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma curva contida em  $S^2$ . Como  $\alpha(t) \in S^2$ , temos  $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1$  e derivando esta equação implicitamente com relação a  $t$  obtemos

$$xx' + yy' + zz' = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 0,$$

que mostra que o vetor  $\alpha(t)$  é perpendicular, ou normal, aos vetores tangentes  $\alpha'(t) \in T_p S^2$ . Assim, podemos escolher uma orientação para a superfície como sendo  $N = \alpha(t)$ , por exemplo. Observe que esta orientação aponta para o lado de fora da esfera. Com efeito, restringindo  $N$  a curva  $\alpha(t)$ , obtemos

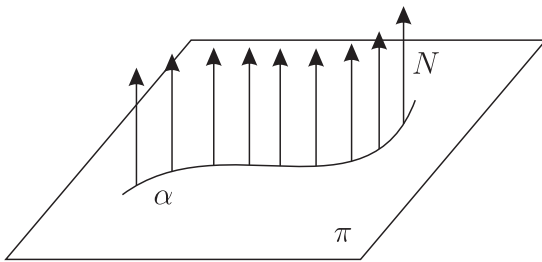
$$N(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

e portanto

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

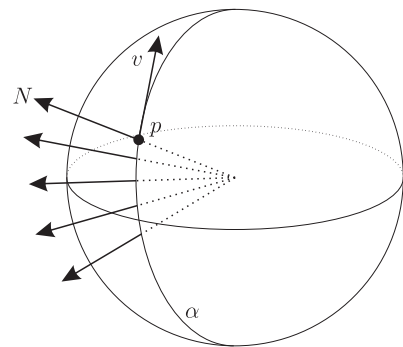
Em suma,  $dN_p(v) = v$  para todo  $p \in S^2$ . (Fig. 3.6)

Figura 3.5: Plano



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 3.6: Esfera.



Fonte: Produção do próprio autor

**Exemplo 3.1.5** Considere o cilindro circular reto de raio unitário  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ . Analogamente ao exemplo anterior, temos

$$xx' + yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle (x, y, 0), (x', y', z') \rangle = 0,$$

e isso mostra que o vetor  $(x, y, 0)$  é normal a superfície do cilindro e aponta para fora. Assim podemos escolher  $N = (x, y, 0)$  como orientação da superfície e calculamos a diferencial  $dN$  do campo normal unitário ao longo da curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (x'(t), y'(t), 0).$$

Isso mostra que se um dado vetor  $v$  tangente a superfície é paralelo ao eixo  $Oz$ , então a variação do campo  $N$  nessa direção é nula, ou seja,

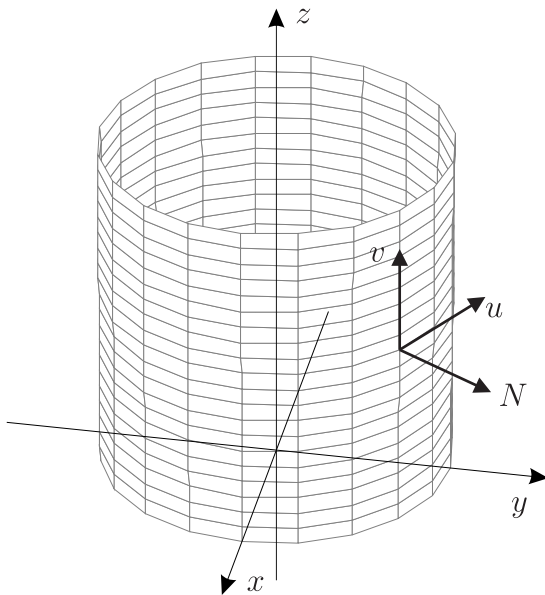
$$dN(v) = 0 = 0v,$$

porém, se dado  $u$  ortogonal ao eixo  $Oz$ , então

$$dN(u) = u = 1u.$$

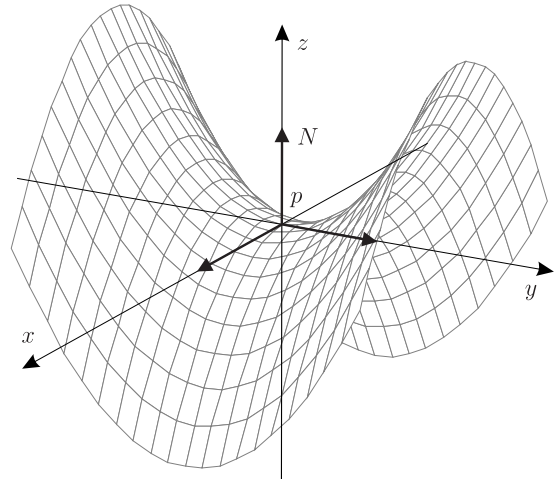
Como  $dN$  é uma aplicação linear, então  $u$  e  $v$  são auto-vetores de  $dN$  e  $1$  e  $0$  são auto-valores associados, respectivamente (LIMA, 2008). Daremos uma atenção especial a estes auto-valores mais à frente (Fig. 3.7).

Figura 3.7: Cilindro



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 3.8: Parabolóide Hiperbólico



Fonte: Produção do próprio autor

**Exemplo 3.1.6** Considere o parabolóide hiperbólico  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = y^2 - x^2\}$ , também conhecido como sela (Fig. 3.8). Para calcularmos a diferencial  $dN$ , é mais eficaz

tomar uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  da sela, tal que

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, v^2 - u^2),$$

e assim obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (1, 0, -2u), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, 2v),\end{aligned}$$

para então,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{1}{4}}} \left( u, -v, \frac{1}{2} \right).$$

Agora, seja  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  uma curva sobre a superfície, tal que  $\alpha(0) = p$ . Vamos analisar o comportamento dos vetores normais na vizinhança de  $p$ . Assim, se  $(u'(0), v'(0), 0)$  é o vetor tangente a superfície no ponto  $p$ , então

$$N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0),$$

consequentemente,

$$dN_p(u'(0), v'(0), 0) = N'(0) = (2u'(0), -2v'(0), 0),$$

ou seja, os auto-vetores de  $dN_p$  são  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$  com respectivos auto-valores associados  $2$  e  $-2$ .

Para prosseguirmos, precisamos de um importante fato relacionado a diferencial  $dN_p$ . A proposição seguinte é dada por Carmo (2010), a qual será omitida a demonstração.

**Proposição 3.1.7** *A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Em outras palavras, segundo Lima (2008),

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle,$$

onde  $\{w_1, w_2\}$  é uma base de  $T_p S$ . Fica importante salientar que a partir desse fato, derivando  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$  e  $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$  em relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente, concluímos que

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle. \quad (3.1.1)$$

Agora estamos aptos a enunciar a *segunda forma fundamental*, dada por Carmo (2010) da seguinte maneira:

**Definição 3.1.8 (Segunda Forma Fundamental)** *A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .*

Devemos observar que a existência da referida forma quadrática só é possível devido ao fato de que a diferencial da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta (LIMA, 2008). A definição a seguir nos permitirá dar uma interpretação geométrica para  $II_p$ . Segundo Carmo (2010):

**Definição 3.1.9 (Curvatura Normal)** *Sejam  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal unitário a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ .*

Vamos relacionar a curvatura normal com a segunda forma fundamental. Seja  $C$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, neste caso  $\alpha(s)$ , tal que  $\alpha(0) = p \in S$ . Assim, como vimos analogamente no capítulo 1, temos

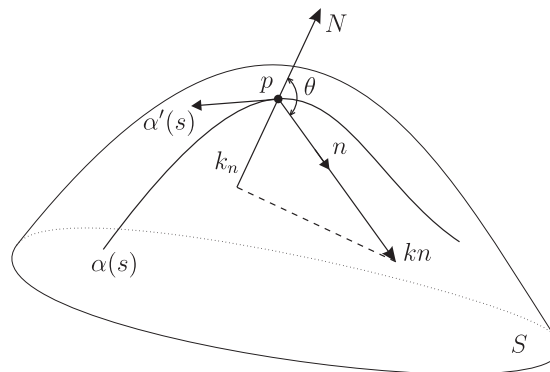
$$\begin{aligned} \langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0 & \Rightarrow \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \\ & \Rightarrow \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle, \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) \\ &= k_n(p). \end{aligned}$$

De fato, a segunda forma fundamental de um vetor tangente unitário  $v \in T_p S$  é, na verdade, igual a curvatura normal de uma curva  $\alpha(s)$  que passa por  $p$  e é tangente a  $v$ . Geometricamente, temos (Fig. 3.9):

Figura 3.9:  $II_p(\alpha'(s)) = k_n(p)$



Fonte: Produção do próprio autor

Como  $\alpha(s)$  é qualquer, então qualquer curva que passe por  $p \in S$  que tenha o mesmo vetor tangente  $v$  tratado anteriormente, terá a mesma curvatura normal, pois esta

será a projeção do vetor curvatura particular da curva sobre o vetor normal unitário da superfície no ponto  $p$ . Esta constatação, devida a implicações anteriores, descrevem o teorema de Meusnier<sup>2</sup>.

**Teorema 3.1.10 (Teorema de Meusnier)** *Todas as curvas de uma superfície  $S$  que têm, em um ponto  $p \in S$ , a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

Este teorema nos traz uma implicação muito interessante. Como a projeção não tem efeito em vetores colineares, então as curvas obtidas pela secção da superfície por qualquer plano paralelo ao vetor normal possuem, em  $p$ , curvatura normal  $k_n$  igual a curvatura  $k$  da curva neste mesmo ponto.

O teorema também nos permite falar em *curvatura normal em uma dada direção* em  $p$ , já que a curvatura normal depende apenas do vetor direção da curva em  $p$ . Em outras palavras, em um dado ponto  $p$  da superfície, podemos encontrar, dependendo do caso, infinitos valores diferentes de curvatura normal dependendo da direção que se escolha. Dependendo do caso, como em uma esfera de raio unitário, por exemplo, a curvatura normal é sempre igual a 1, para qualquer ponto da superfície e em qualquer direção.

Em um cilindro, também de raio unitário, as seções normais resultam em uma circunferência de raio 1, depois uma sequência de elipses, e por fim uma reta. Considere o cilindro do Ex. 3.1.5. É fácil observar que 1 é o máximo da curvatura normal e 0 é o mínimo. Mais do que isso, se observarmos o comportamento da  $dN_p$  nessas direções ( $u$  e  $v$  sendo auto-vetores como havíamos comentado anteriormente) percebemos que a segunda forma fundamental assume seus valores máximo igual a 1 e mínimo igual a 0. Observe:

$$\begin{aligned} II_p(u) &= \langle dN_p(u), u \rangle = \langle u, u \rangle = 1, \\ II_p(v) &= \langle dN_p(v), v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0, \end{aligned}$$

pois  $|u| = 1$ .

Abrimos parênteses agora para enunciar um teorema da álgebra linear<sup>3</sup> citado por Carmo (2010) em seu apêndice. Este teorema nos permitirá prosseguir em nosso estudo sobre a segunda forma fundamental  $II_p$ .

**Teorema 3.1.11** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tais que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$ ,  $A(e_2) = \lambda_2 e_2$  (isto é,  $e_1$  e  $e_2$  são auto-vetores, e  $\lambda_1, \lambda_2$  são auto-valores de  $A$ ). Na base  $\{e_1, e_2\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $V$ .*

<sup>2</sup>Matemático e engenheiro francês do século XVIII (EVES, 2004).

<sup>3</sup>Este teorema é uma restrição do *Teorema de Valores Singulares*, que pode ser encontrado no livro de Lima (2008), na seção que trata de *Operadores Auto-Adjuntos*.

A nossa segunda forma fundamental  $II_p$  se encaixa na forma quadrática citada no teorema anterior. Assim, podemos afirmar que para todo  $p \in S$  existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  tal que  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ . Conforme o teorema,  $k_1$  e  $k_2$ , onde  $k_1 \geq k_2$ , são o máximo e o mínimo de  $II_p$ . Em outras palavras,  $k_1$  e  $k_2$  são o máximo e o mínimo da curvatura normal da superfície  $S$  em  $p$ .

Passemos agora para algumas definições importantes dadas por Carmo (2010). Observe que nesta seção estamos apresentando várias definições. Elas fazem parte da base necessária para tratarmos de resultados maiores na geometria diferencial.

**Definição 3.1.12** *O máximo da curvatura normal  $k_1$  e o mínimo da curvatura normal  $k_2$ , são chamados curvaturas principais em  $p$ ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas direções principais em  $p$ .*

**Definição 3.1.13** *Se uma curva regular e conexa  $C$  em  $S$  é tal que para todo  $p \in C$ , a reta tangente a  $C$  é uma direção principal em  $p$ , então dizemos que  $C$  é uma linha de curvatura de  $S$ .*

No plano do Ex. 3.1.3, qualquer reta contida no plano é uma linha de curvatura e  $k_1 = k_2 = 0$ .

Na esfera do Ex. 3.1.4, qualquer circunferência máxima (obtida pela seção da esfera por um plano que passe pelo centro) é uma linha de curvatura e  $k_1 = k_2 = 1$ .

No cilindro do Ex. 3.1.5, todas as circunferências ortogonais ao eixo do cilindro e todas as geratrizes são linhas de curvatura. Podemos tomar um outra base ortonormal, tal que  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 0$ .

Na sela do Ex. 3.1.6, as parábolas

$$\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = -x^2 \\ y = 0 \end{cases},$$

são linhas de curvatura e  $k_1 = 2$  e  $k_2 = -2$ .

A proposição de Olinde Rodrigues<sup>4</sup> nos dá uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular seja uma linha de curvatura.

**Proposição 3.1.14** *Uma curva conexa e regular  $C$  em  $S$  é uma linha de curvatura de  $S$  se, e somente se,*

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização de  $\alpha(t)$  de  $C$ , onde  $N(t) = N \circ \alpha(t)$  e  $\lambda(t)$  é uma função diferenciável de  $t$ . Nesse caso,  $-\lambda(t)$  é a curvatura (principal) segundo  $\alpha'(t)$ .

---

<sup>4</sup>Banqueiro e matemático francês do século XIX (EVES, 2004).

**Demonstração:** É evidente que se  $\alpha'(t)$  está contido numa direção principal, então  $\alpha'(t)$  é auto-vetor de  $dN$ , e assim

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

A recíproca é imediata pela definição de linha de curvatura. ■

Pelo Teorema 3.1.11, temos que o determinante da matriz de  $dN$  é simplesmente o produto  $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$ , ou seja, o produto das curvaturas principais, e que o traço é  $(-k_1) + (-k_2) = -(k_1 + k_2)$  que é o negativo da soma das curvaturas principais. Observe que o produto  $k_1k_2$  é invariante por mudanças de orientação, afinal quando a orientação de uma superfície muda, as curvaturas trocam de sinal simultaneamente, assim o sinal do produto permanece inalterado. Contudo, o mesmo não ocorre com o traço.

Podemos definir então a *curvatura Gaussiana* e a *curvatura média*<sup>5</sup> de uma superfície em um dado ponto, segundo Carmo (2010).

**Definição 3.1.15** *Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana de  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ , i.e.,*

$$K = k_1k_2 \quad e \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Como em cada ponto  $p \in S$ , existe um valor  $K$  de curvatura Gaussiana, podemos classificar cada  $p$  de  $S$  de acordo com o valor de  $K$ .

**Definição 3.1.16** *Um ponto de uma superfície  $S$  é chamado*

1. *Elíptico, se  $K > 0$ .*
2. *Hiperbólico, se  $K < 0$ .*
3. *Parabólico, se  $K = 0$ , com  $dN_p \neq 0$ .*
4. *Planar, se  $dN_p = 0$ .*

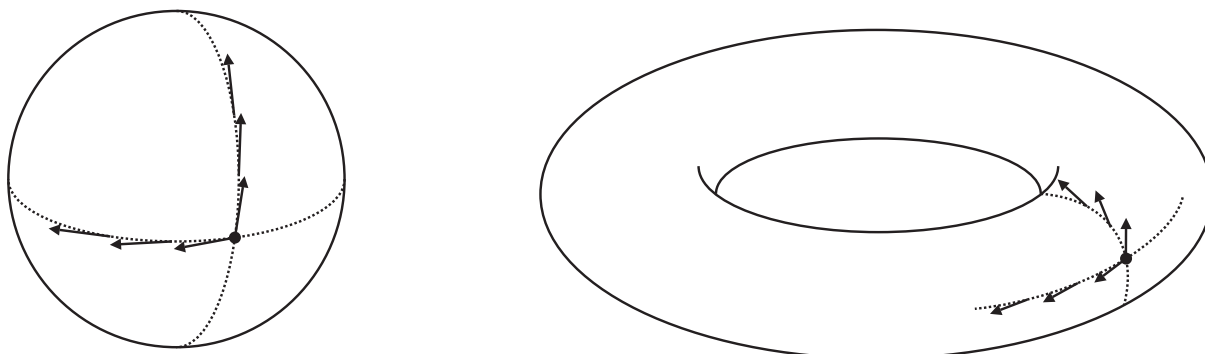
Seguem exemplos de superfícies com diferentes tipos de pontos:

1. **Pontos elípticos:** Toda esfera é formada apenas por pontos elípticos, pois  $k_1 = k_2$  para todo ponto pertencente a esfera. Isso implica que a curvatura Gaussiana sempre será positiva. O toro também possui pontos elípticos, basta tomar  $0 < u < \frac{\pi}{2}$  na parametrização do Ex. 2.4.7, e obtemos pontos com direções principais de curvaturas com mesmos sinais (Fig. 3.10).

---

<sup>5</sup>O conceito de *curvatura média* foi introduzido em 1831 pela matemática e filósofa francesa Sophie Germain. São particularmente importantes as superfícies para as quais a curvatura média é nula em todos os pontos; estas superfícies se denominam *superfícies mínimas* (EVES, 2004).

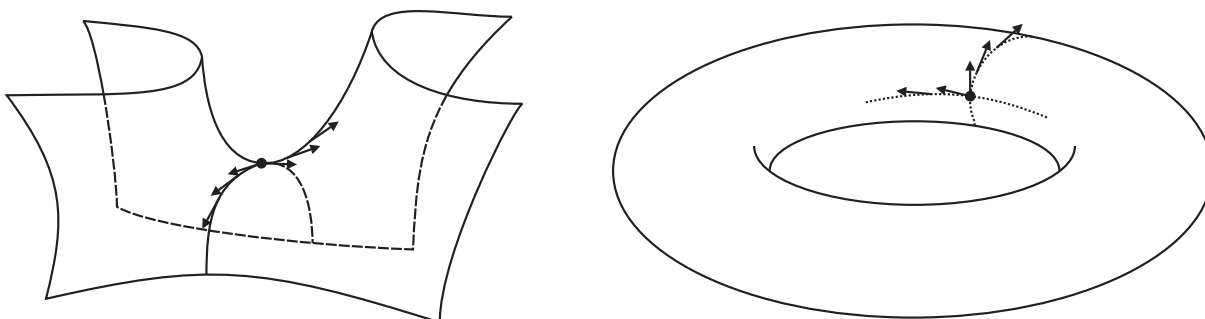
Figura 3.10: A Esfera (esquerda) e o Toro (direita) possuem pontos elípticos.



Fonte: Produção do próprio autor

2. **Pontos hiperbólicos:** Em uma sela centrada na origem, o ponto  $(0, 0, 0)$ , em específico, é um ponto hiperbólico. Basta observar que as direções principais nesse ponto possuem curvaturas de sinais opostos. O toro também possui pontos hiperbólicos, basta tomar  $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$  na parametrização do Ex. 2.4.7, e obtemos pontos com direções principais de curvaturas com sinais diferentes (Fig. 3.11).

Figura 3.11: A Sela (esquerda) e o Toro (direita) possuem pontos hiperbólicos.



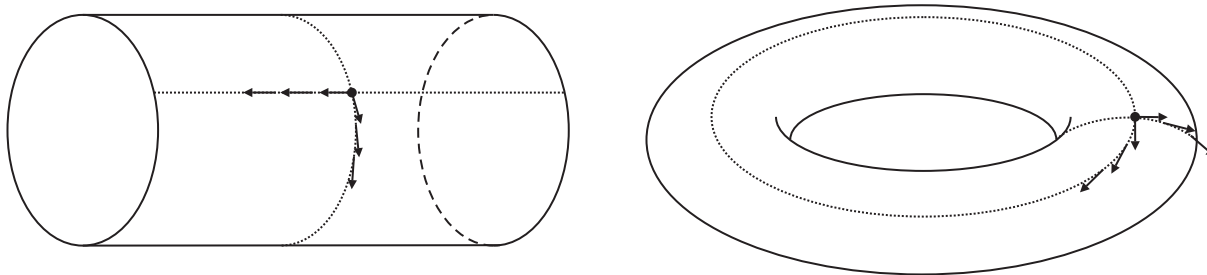
Fonte: Produção do próprio autor

3. **Pontos parabólicos:** Todo ponto de um cilindro é parabólico, pois por todo ponto passa uma circunferência e uma geratriz, que são linhas de curvatura do cilindro. Assim, nas direções dessas linhas temos  $k_1 = 0$  e  $k_2 \neq 0$ , resultando em  $K = 0$  porém com  $dN_p \neq 0$ . No toro do Ex. 2.4.7, tomando  $u = \frac{\pi}{2}$ , obtemos  $K = 0$ . Este fato ficará mais claro na próxima seção (Fig. 3.12).
4. **Pontos planares:** Como o próprio nome sugere, todos os pontos de um plano satisfazem a definição de ponto planar, pois todas as curvaturas principais são nulas.

A seguir, a última definição desta seção se refere aos *pontos umbílicos*. Segundo Carmo (2010):



Figura 3.12: O Cilindro (esquerda) e o Toro (direita) possuem pontos parabólicos.



Fonte: Produção do próprio autor

**Definição 3.1.17** Se em  $p \in S$ ,  $k_1 = k_2$ , então  $p$  é chamado um ponto umbílico de  $S$ .

O caso trivial de pontos umbílicos seriam os pontos planares, pois como em todo ponto planar temos  $dN_p = 0$ , então  $k_1 = k_2 = 0$ . Logo, todo ponto planar é um ponto umbílico. Mais do que isso, qualquer plano é formado apenas por pontos umbílicos.

Uma esfera também é formada apenas por pontos umbílicos, mas neste caso, para todo  $p \in S^2$ , temos  $k_1 = k_2 \neq 0$ .

Uma consequência interessante a cerca da definição de pontos umbílicos é dada a seguir. Segundo Carmo (2010):

**Proposição 3.1.18** Se todos os pontos de um superfície conexa  $S$  são umbílicos, então  $S$  está contida em um plano ou em uma esfera.

**Demonstração:** Seja  $p \in S$  um ponto umbílico e seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização para  $S$  numa vizinhança conexa de  $p$ . Como todo  $p \in S$  é umbílico, então todo vetor  $w \in T_p S$ ,  $w = a_1 \mathbf{x}_u + a_2 \mathbf{x}_v$  é tal que

$$dN(w) = \lambda w,$$

onde  $\lambda = \lambda(q)$  é uma função diferenciável em  $V$ , pois qualquer  $w$  está contido numa direção principal de  $S$ .

De fato, temos que  $\lambda(q)$  é constante em  $V$ , pois substituindo  $w = a_1 \mathbf{x}_u + a_2 \mathbf{x}_v$  na equação anterior, temos

$$a_1 N_u + a_2 N_v = \lambda(a_1 \mathbf{x}_u + a_2 \mathbf{x}_v),$$

e assim, como  $w$  é arbitrário, obtemos

$$\begin{cases} N_u = \lambda \mathbf{x}_u \\ N_v = \lambda \mathbf{x}_v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{uv} = \lambda_v \mathbf{x}_u + \lambda \mathbf{x}_{uv} \\ N_{vu} = \lambda_u \mathbf{x}_v + \lambda \mathbf{x}_{vu} \end{cases} \Rightarrow \lambda_u \mathbf{x}_u - \lambda_v \mathbf{x}_v = 0.$$

Como  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  formam uma base de  $T_p S$ , e portanto são linearmente independentes (LIMA,

2008), temos que

$$\lambda_u = \lambda_v = 0, \quad \forall p \in V.$$

Logo,  $\lambda$  é constante.

Se  $\lambda \equiv 0$ , então  $N_u = N_v = 0$  e assim todo vetor normal a superfície é igual a um vetor constante  $N_0$  na vizinhança de  $p$ . Assim, obtemos que

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}(u, v), N_0 \rangle_u = \mathbf{x}_u N_0 + \mathbf{x}(u, v)(N_0)_u = 0 \\ \langle \mathbf{x}(u, v), N_0 \rangle_v = \mathbf{x}_v N_0 + \mathbf{x}(u, v)(N_0)_v = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle \mathbf{x}(u, v), N_0 \rangle = \text{cte.},$$

e portanto todos os pontos de  $V$  pertencem a um plano.

Se  $\lambda \neq 0$ , então o ponto  $\mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v) = \mathbf{y}(u, v)$  é fixo, pois

$$\begin{cases} (\mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v))_u = 0 \\ (\mathbf{x}(u, v) - \frac{1}{\lambda}N(u, v))_v = 0 \end{cases}.$$

Como  $|N| = 1$  e portanto

$$|\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{y}(u, v)| = \frac{1}{|\lambda|},$$

temos que todos os pontos de  $V$  estão contidos em uma esfera de raio  $\frac{1}{|\lambda|}$  e centro em  $\mathbf{y}(u, v)$ .

Isto nos dá a demonstração da proposição apenas para uma vizinhança de  $p \in S$ , ou seja, localmente. Para completarmos a demonstração, consideremos outro ponto  $r \in S$ . Como  $S$  é conexa, existe uma curva contínua  $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = r$ . Todos os pontos desta curva possuem uma vizinhança  $V_t \subset S$  que está contida em um plano ou em uma esfera, como acabamos de demonstrar. Como a imagem inversa  $\alpha^{-1}(V_t)$  é um intervalo aberto de  $I$ , temos que a união

$$\bigcup_{t \in I} \alpha^{-1}(V_t)$$

cobre  $I$  e, como  $I$  é fechado, pelo teorema de Borel-Lebesgue<sup>6</sup>,  $I$  é coberto por um número finito de elementos da família  $\{\alpha^{-1}(V_t)\}$ . Portanto,  $\alpha(I)$  é coberto por um número finito de vizinhanças  $V_t$ .

Se os pontos de uma vizinhança estão em um plano, então todas as outras vizinhanças estarão no mesmo plano. Como  $r$  é qualquer, então todos os pontos da superfície estão no mesmo plano.

---

<sup>6</sup>O teorema de Borel-Lebesgue afirma que se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto (ou seja, limitado e fechado), então toda cobertura aberta de  $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  admite uma subcobertura finita  $K \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_i}$  (LIMA, 2009a).

O caso da esfera é análogo. ■

## 3.2 A APLICAÇÃO DE GAUSS EM COORDENADAS LOCAIS

Iniciamos agora um estudo sistemático da diferencial da aplicação de Gauss, ao contrário do método intuitivo no qual trabalhamos na seção anterior. Tomaremos agora a diferencial relativa ao sistema de coordenadas locais no qual a superfície está parametrizada.

Para calcularmos a matriz de aplicação linear da diferencial  $dN_p$ , tomamos primeiramente uma superfície parametrizada  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  com orientação  $N$  tal que, em  $\mathbf{x}(U)$ ,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}.$$

Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  a parametrização da superfície em uma vizinhança de  $p \in S$ , e seja  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ . Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções a seguir estão avaliadas no ponto  $p$ , ou seja, em  $t = 0$ .

Como já vimos, o vetor tangente a curva  $\alpha(t)$  em  $p$  pode ser escrito como  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ . Calculando a diferencial  $dN$  nesta direção, obtemos

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Sabemos que  $N_u$  e  $N_v$  pertencem ao plano tangente a  $S$  em  $p$ , assim podemos escrevê-los como combinação linear da base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  tal que,

$$\begin{cases} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{cases}, \quad (3.2.2)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v)u' + (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v)v' \\ &= \mathbf{x}_u(a_{11}u' + a_{12}v') + \mathbf{x}_v(a_{21}u' + a_{22}v'). \end{aligned}$$

Matricialmente,  $dN(\alpha')$  pode ser escrita como

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz  $(a_{ij})$  acima é a matriz de aplicação linear de  $dN$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ .

A grande chave da questão, é que podemos escrever a matriz  $(a_{ij})$  em termos dos coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, que obteremos a seguir. Isto

significa que poderemos escrever a curvatura Gaussiana  $K$  em termos desses coeficientes, já que  $K$  é dada pelo determinante de  $dN$ . Com efeito, temos que, pela definição da segunda forma fundamental, e pela Eq. 3.1.1, obtemos os coeficientes da segunda forma fundamental,

$$\begin{aligned}
II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\
&= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\
&= -\langle N_u u', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_u u', \mathbf{x}_v v' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_u u' \rangle - \langle N_v v', \mathbf{x}_v v' \rangle \\
&= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle (u')^2 - 2\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle u' v' - \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle (v')^2 \\
&= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2,
\end{aligned}$$

e como  $dN_p$  é auto-adjunta, temos que, pela Eq. 3.1.1,

$$\begin{aligned}
e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\
f &= -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle, \\
g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle.
\end{aligned}$$

que são os coeficientes de  $II_p$ .

Agora, a partir da Eq. 3.2.2, escreveremos os coeficientes  $e$ ,  $f$  e  $g$  em termos de  $a_{ij}$  e dos coeficientes da primeira forma fundamental  $E$ ,  $F$  e  $G$ :

$$\begin{aligned}
-f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{21} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11} F + a_{21} G \\
-f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{22} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12} E + a_{22} F \\
-e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{21} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11} E + a_{21} F \\
-g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{22} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12} F + a_{22} G
\end{aligned}$$

As relações acima podem ser escritas na forma matricial

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

bastando isolar a matriz  $(a_{ij})$ , de tal forma que obtemos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

e finalmente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \frac{gF - fG}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

A partir da Eq. 3.2.3, obtemos a curvatura Gaussiana  $K$ , como prometido:

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (3.2.4)$$

É interessante citar que a Eq. 3.2.2 com os coeficientes da Eq. 3.2.3 nos fornecem as equações conhecidas como *equações de Weingarten* (CARMO, 2010):

$$\begin{cases} N_u = \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \mathbf{x}_u + \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \mathbf{x}_v \\ N_v = \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \mathbf{x}_u + \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) \mathbf{x}_v \end{cases} \quad (3.2.5)$$

De modo análogo, podemos representar a curvatura média  $H$  através dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Como a curvatura média  $H$  é o *negativo da metade do traço de  $dN_p$* , temos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (3.2.6)$$

Agora, lembremos que  $-k_1$  e  $-k_2$  são autovalores de  $dN$ . Estes autovalores permitem que a aplicação linear  $dN + kI$ , onde  $I$  é a identidade, seja não invertível, ou melhor, tenha determinante nulo. Assim, temos que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0,$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são as raízes da equação quadrática acima. Com efeito, obtemos

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e portanto,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

De fato,  $H^2 - K \geq 0$  para quaisquer  $k_1$  e  $k_2$ , pois

$$\begin{aligned} H^2 - K &\geq 0 \\ \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - k_1k_2 &\geq 0 \\ (k_1)^2 + (k_2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

que é válido para quaisquer valores reais de  $k_1$  e  $k_2$ .

Observe que, escolhendo  $k_1(q) \geq k_2(q)$ ,  $q \in S$ , as funções  $k_1$  e  $k_2$  são contínuas em  $S$  e também diferenciáveis, com a possível exceção dos pontos umbílicos. No caso

particular dos pontos umbílicos, em que  $k_1 = k_2$ , obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 \\ H + \sqrt{H^2 - K} &= H - \sqrt{H^2 - K} \\ \sqrt{H^2 - K} &= -\sqrt{H^2 - K} \\ 2\sqrt{H^2 - K} &= 0 \\ H^2 - K &= 0 \\ H^2 &= K. \end{aligned}$$

A seguir, um exemplo de cálculo da curvatura Gaussiana e da curvatura média sobre todos os pontos de uma superfície.

**Exemplo 3.2.1** *Tomamos a parametrização do toro do Ex. 2.4.7,*

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

*Assim, para calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, precisamos das derivadas parciais da parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$ . Com efeito,*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, r \cos u), \\ \mathbf{x}_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{uu} &= (-r \cos u \sin v, -r \cos u \cos v, -r \sin u), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

*A partir desses valores, obtemos*

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = r^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (a + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

*Convém agora tomar a seguinte simplificação. Segundo Lima (2007),*

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det[u, v, w],$$

*onde  $\det[u, v, w]$  é o determinante de uma matriz de ordem 3 cuja as linhas são os respectivos vetores  $u, v$  e  $w$ , também conhecido por produto misto. Assim,*

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}, \mathbf{x}_{uu} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle \\ &= \frac{\det[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a + r \cos u)}{r(a + r \cos u)} = r. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f &= \frac{\det[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}]}{r(a + r \cos u)} = 0, \\ g &= \frac{\det[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv}]}{r(a + r \cos u)} = \cos u(a + r \cos u). \end{aligned}$$

E finalmente,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Com a expressão acima, podemos observar o sinal da curvatura  $K$  e classificar os pontos sobre a superfície de toro. Imediatamente vemos que existem duas circunferências na superfície do toro compostas apenas por pontos parabólicos, pois  $K = 0$  quando  $u = \pi/2$  ou  $u = 3\pi/2$ . Podemos dizer que estas duas circunferências dividem a superfície toro em uma parte "interna", onde  $\pi/2 < u < 3\pi/2$ , e uma parte "externa", onde  $0 < u < \pi/2$  ou  $3\pi/2 < u < 2\pi$ . Como o maior valor em módulo que o cosseno atinge é 1 e  $a$  é sempre maior que  $r$ , o denominador é, neste caso, sempre positivo, o que implica que o sinal de  $K$  será dado pelo sinal do numerador. Assim, na parte interna temos  $K < 0$ , portanto composta por pontos hiperbólicos. Na parte externa temos  $K > 0$ , ou seja, pontos elípticos (conforme ilustramos nas figuras 3.10, 3.11 e 3.12).

Podemos, também, calcular a curvatura média do toro

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{a + 2r \cos u}{2r(a + r \cos u)},$$

e conseqüentemente, podemos encontrar as curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  como soluções da equação quadrática abaixo para  $k$ :

$$k^2 - \frac{a + 2r \cos u}{r(a + r \cos u)} k + \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)} = 0.$$

O valor da curvatura Gaussiana de uma superfície  $S$  em um ponto  $p$  nos dá uma ideia da localização dos pontos em uma vizinhança de  $p$  referente ao plano  $T_p S$ , ou seja, se existem pontos acima e/ou abaixo do  $T_p S$  na referida vizinhança. A proposição seguinte, apresentada por Carmo (2010), trata desta ideia.

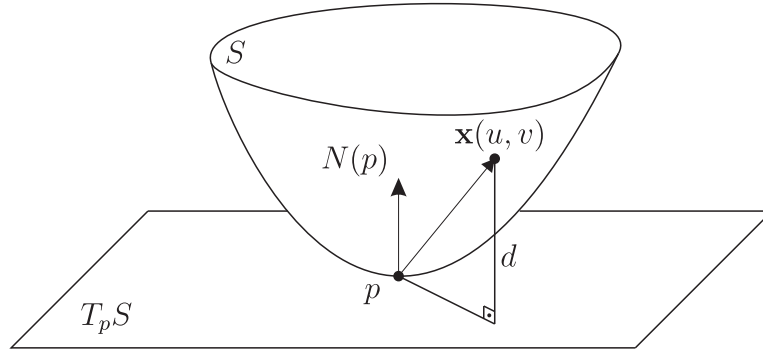
**Proposição 3.2.2** *Seja  $p \in S$  um ponto elíptico de uma superfície  $S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que todos os pontos de  $V$  estão do mesmo lado do plano tangente  $T_p S$ . Seja  $p \in S$  um ponto hiperbólico. Então em cada vizinhança de  $p$  existem pontos de ambos os lados de  $T_p S$ .*

**Demonstração:** Tomamos uma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  para  $S$  em uma vizinhança de  $p$ , onde  $p = \mathbf{x}(0, 0)$  e um outro ponto qualquer  $q \in S$  tal que  $q = \mathbf{x}(u, v)$ . A distância  $d$ , tal que,

$$d = \langle \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(0, 0), N(p) \rangle, \quad (3.2.7)$$

é a distância entre o ponto  $q$  até o plano  $T_p S$  (Fig. 3.13). Neste caso, a distância  $d$  não se refere a uma *métrica* (LIMA, 2009c), já que pode assumir valores negativos dependendo da localização de  $q$  e da orientação  $N$ .

Figura 3.13: Distância de  $\mathbf{x}(u, v)$  ao  $T_p S$ .



Fonte: Produção do próprio autor

Segundo a fórmula de Taylor (LIMA, 2009a), uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , com  $a, a + v \in U$  é tal que,

$$f(a + v) = f(a) + f'(a) \cdot v + \frac{1}{2} f''(a) \cdot v^2 + \dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) \cdot v^p + r_p(v),$$

onde

$$f^p(a) \cdot v^p = \frac{\partial^p f}{\partial v^p} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^{p-1} f}{\partial v^{p-1}} \right) (a),$$

com

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_p(v)}{|v|^p} = 0,$$

se  $f$  for  $p$  vezes diferenciável no ponto  $a$ . Isso nos permite escrever,

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(0, 0) + \mathbf{x}_u u + \mathbf{x}_v v + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{uu} u^2 + 2\mathbf{x}_{uv} uv + \mathbf{x}_{vv} v^2) + \overline{R}, \quad (3.2.8)$$

onde as derivadas são calculadas em  $p$  e o resto  $\overline{R}$  satisfaz

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\overline{R}}{u^2 + v^2} = 0.$$

Substituindo a Eq. 3.2.8 em Eq. 3.2.7, obtemos



$$\begin{aligned}
d &= \langle \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(0, 0), N(p) \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}_u u + \mathbf{x}_v v + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{uu}u^2 + 2\mathbf{x}_{uv}uv + \mathbf{x}_{vv}v^2) + \overline{R}, N(p) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \{ \langle \mathbf{x}_{uu}, N(p) \rangle u^2 + 2 \langle \mathbf{x}_{uv}, N(p) \rangle uv + \langle \mathbf{x}_{vv}, N(p) \rangle v^2 \} + \langle \overline{R}, N(p) \rangle \\
&= \frac{1}{2} (eu^2 + 2fuv + gv^2) + R \\
&= \frac{1}{2} II_p(w) + R,
\end{aligned}$$

onde  $w = \mathbf{x}_u u + \mathbf{x}_v v$ ,  $R = \langle \overline{R}, N(p) \rangle$ ,  $\lim_{w \rightarrow 0} (R/|w|^2) = 0$ . Como em um ponto elíptico  $p$ , a segunda forma fundamental  $II_p(w)$  não muda de sinal, então todos os pontos  $\mathbf{x}(u, v)$  estão em um mesmo lado de  $T_p S$ .

Analogamente, se tivermos  $p$  hiperbólico, então podemos encontrar pontos tais que a segunda forma fundamental tem, nesses pontos, sinais opostos, ou seja, tais pontos se encontram em lados opostos do  $T_p S$ . ■

Tratamos agora das direções principais. Carmo (2010) nos apresenta o necessário e suficiente para formular a proposição abaixo, nos termos da Prop. 3.1.14 sobre linhas de curvatura.

**Proposição 3.2.3** *As curvas coordenadas de uma parametrização são linhas de curvatura se, e somente se,  $F = f = 0$ .*

**Demonstração:** Pela Prop. 3.1.14, uma curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$  é uma linha de curvatura se, e somente se,

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Portanto as funções  $u'(t)$  e  $v'(t)$  satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' = \lambda u' \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' = \lambda v' \end{cases}$$

Eliminando  $\lambda$  do sistema acima, obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura,

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0,$$

que pode ser escrita como o determinante a seguir:

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Como as direções principais são ortogonais temos que  $u'v' = 0$  e a equação acima é satisfeita se, e somente se,  $F = f = 0$ . ■

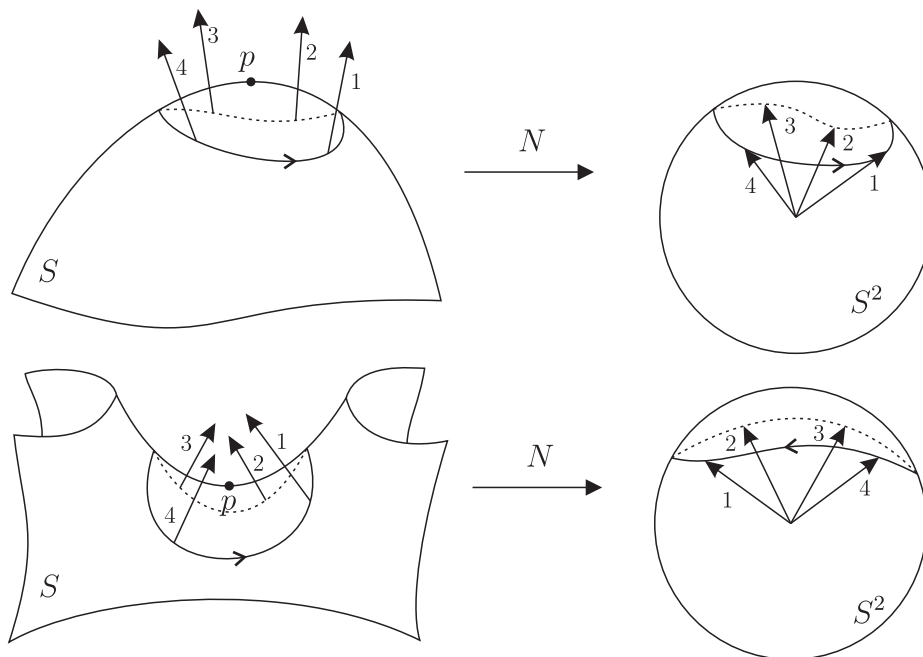
Para encerrar este capítulo, apresentaremos agora uma interpretação geométrica da curvatura Gaussiana  $K$ . Segundo Carmo (2010), esta interpretação foi usada pelo próprio Gauss (1827) para apresentar a curvatura em seu artigo.

Retomando a definição da aplicação de Gauss apresentada no início de deste capítulo, é evidente que a orientação  $N$  em  $S$  induz uma orientação  $N$  em  $S^2$ . Assim, dado  $p \in S$ , tal que  $dN_p$  é não singular, e uma base  $\{w_1, w_2\}$  em  $T_pS$ , temos que,

$$dN_p(w_1) \wedge dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \wedge w_2) = K(w_1 \wedge w_2). \quad (3.2.9)$$

Isso mostra que a orientação de  $S$  é preservada se a curvatura Gaussiana for positiva, ou é revertida caso negativa. Carmo (2010) nos apresenta uma noção bem intuitiva para isso. Tome pequenas curvas fechadas em torno de  $p \in S$ . Assim, a orientação dada por  $T_pS$  na imagem por  $N$  dessas curvas é preservada se  $p$  for elíptico ( $K > 0$ ) ou é revertida caso  $p$  for hiperbólico ( $K < 0$ ). Observe a Fig. 3.14.

Figura 3.14:  $p$  elíptico (acima) e  $p$  hiperbólico (abaixo).



Fonte: Produção do próprio autor

Agora tomamos a seguinte convenção. Diremos que a área da imagem por  $N$  de uma região contida em uma vizinhança conexa  $V \subset S$ , onde  $K \neq 0$ , é *positiva* se  $K > 0$  e *negativa* se  $K < 0$ .

Finalmente, apresentamos a interpretação geométrica, segundo Carmo (2010).

**Proposição 3.2.4** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície  $S$  tal que a curvatura Gaussiana  $K(p) \neq 0$ , e seja  $V$  uma vizinhança conexa de  $p$  onde  $K$  não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

onde  $A$  é a área de uma região  $B \subset V$  contendo  $p$ ,  $A'$  é a área da imagem de  $B$  pela aplicação de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$ , e o limite é tomado através de uma sequência de regiões  $B_n$  que convergem para  $p$ , no sentido em que toda esfera centrada em  $p$  contém todos os pontos de  $B_n$ , para  $n$  suficientemente grande.

**Demonstração:** Sabemos que a área  $A$  de  $B$  é dada por

$$A = \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv,$$

onde  $\mathbf{x}(u, v)$  é uma parametrização de  $S$  em uma vizinhança coordenada de  $p$  que contém  $V$ , e  $R$ , como já vimos, é a região do plano  $uv$  correspondente a  $B$ . Assim, pela definição de  $dN$ , temos que a área  $A'$  de  $N(B)$  é dada por

$$A' = \iint_R |N_u \wedge N_v| dudv.$$

A partir da Eq. 3.2.9, da Eq. 3.2.2 e da definição de  $K$  como  $\det(a_{ij})$ , temos então que

$$A' = \iint_R K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv.$$

Agora, basta tomar o limite (onde indicamos a área da região  $R$  por  $R$ ) e utilizar o teorema do valor médio para integrais duplas (LIMA, 2009a). Com efeito,

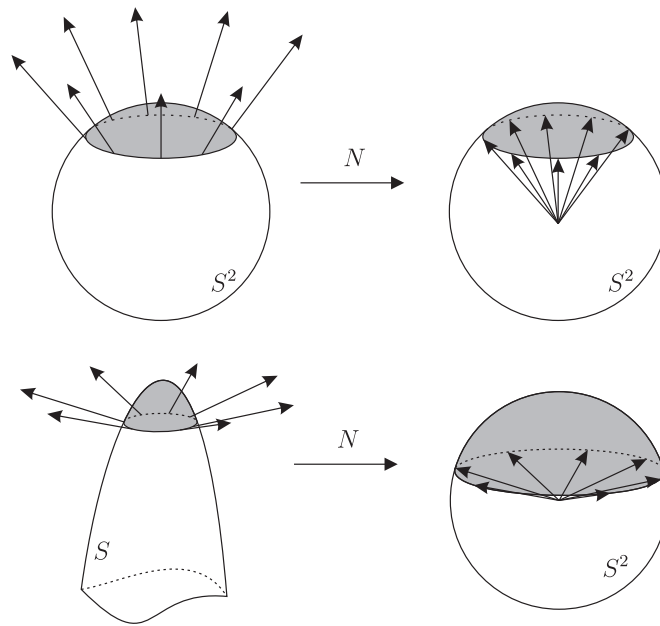
$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} &= \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\frac{A'}{R}}{\frac{A}{R}} = \frac{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv}{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \iint_R |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v| dudv} \\ &= \frac{K |\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|} = K. \end{aligned}$$

■

Em outras palavras, a curvatura Gaussiana mostra a relação entre as áreas de regiões  $B$  em superfícies e a suas correspondentes na esfera unitária, mostrando como

superfícies podem ser mais ou menos "curvadas" que a esfera. Aplique  $N$ , por exemplo, na própria esfera unitária. Veremos que a razão  $A'/A$  será sempre igual a 1, verificando que a curvatura Gaussiana da esfera unitária é 1. Agora tome, por exemplo,  $K > 1$ . Veremos assim que, quando  $A \rightarrow 0$ , temos  $A' > A$ , o que significa que temos uma região  $B$  sendo levada numa região  $N(B)$  de área maior, ou seja, na região  $B$  a superfície é mais curvada que a esfera unitária. Observe a Fig. 3.15.

Figura 3.15: Aplicação de Gauss nos casos em que  $K = 1$  (acima) e  $K > 1$  (abaixo).



Fonte: Produção do próprio autor

# Capítulo 4

## A GEOMETRIA INTRÍNSECA DAS SUPERFÍCIES

### 4.1 ISOMETRIAS

Através da primeira forma fundamental, podemos tratar de conceitos métricos simples de uma superfície (área, comprimento, ângulo, etc.) sem "sair" da superfície, ou seja, sem mencionar o espaço euclidiano no qual a superfície está inserida. Por este motivo, a geometria que estuda estes conceitos é chamada de *geometria intrínseca*.

Iniciamos o capítulo definindo o conceito de *isometria*, que nos permitirá entender qual o significado de duas superfícies terem a mesma primeira forma fundamental. Carmo (2010) define:

**Definição 4.1.1 (Isometria)** *Uma aplicação  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria se  $\varphi$  é um difeomorfismo e para todo  $p \in S$  e todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S$ , temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

*Diz-se então que as superfícies  $S$  e  $\bar{S}$  são isométricas.*

Assim, se  $\varphi$  é uma isometria, então  $d\varphi$  é uma *transformação ortogonal*, já que o produto interno é preservado<sup>1</sup>, assim, podemos escrever

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)),$$

para todo  $w \in T_p S$ . Por outro lado, se  $\varphi$  preserva a primeira forma fundamental, ou seja,

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \quad \forall w \in T_p S,$$

---

<sup>1</sup>Se o produto interno é preservado, então outras sete propriedades relacionadas a aplicação  $d\varphi$  também são satisfeitas, tais como preservação de norma, distância e ortonormalidade de bases de vetores (confira Teorema 14.1 de Lima (2008)).

então temos,

$$\begin{aligned}
2\langle w_1, w_2 \rangle_p &= 2\langle w_1, w_2 \rangle_p + \langle w_1, w_1 \rangle_p - \langle w_1, w_1 \rangle_p + \langle w_2, w_2 \rangle_p - \langle w_2, w_2 \rangle_p \\
&= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle_p - \langle w_1, w_1 \rangle_p - \langle w_2, w_2 \rangle_p \\
&= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\
&= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\
&= 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)},
\end{aligned}$$

e assim,  $\varphi$  é uma isometria.

A seguir, formalizamos o conceito de *isometria local*, segundo Carmo (2010).

**Definição 4.1.2 (Isometria Local)** *Uma aplicação  $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$  de uma vizinhança  $V$  de  $p \in S$  é uma isometria local em  $p$  se existe uma vizinhança  $\bar{V}$  de  $\varphi(p) \in \bar{S}$  tal que  $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$  é uma isometria. Se existir uma isometria local em  $\bar{S}$  para todo ponto  $p \in S$ , diz-se que a superfície  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$ .  $S$  e  $\bar{S}$  são localmente isométricas se  $S$  é localmente isométrica a  $\bar{S}$  e  $\bar{S}$  é localmente isométrica a  $S$ .*

Intuitivamente, pelo fato de o produto interno ser preservado quando saltamos de uma superfície  $S_1$  para outra superfície  $S_2$  isométrica a anterior, temos que a noção de distância é preservada, ou seja, pontos próximos em  $S_1$  correspondem a pontos próximos em  $S_2$ . As duas proposições seguintes formalizam esta ideia. Segundo Carmo (2010),

**Proposição 4.1.3** *Suponha a existência de parametrizações  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  e  $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$  tais que  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$  e  $G = \bar{G}$  em  $U$ . Então a aplicação  $\varphi = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria local.*

**Demonstração:** Tome  $p \in \mathbf{x}(U)$  e  $w \in T_p S$  um vetor tangente. É evidente que  $w$  é o vetor direção de alguma curva  $\mathbf{x}(\alpha(t))$  em  $t = 0$ , onde, no domínio  $U$ , temos  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ . Assim, podemos escrever,

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \quad t = 0.$$

Tomando a composição, temos

$$\varphi \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{x}}(\alpha(t)),$$

logo, pela definição de  $d\varphi_p(w)$ , temos

$$d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v', \quad t = 0.$$

Agora, pela hipótese,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \\ &= \overline{E}(u')^2 + 2\overline{F}u'v' + \overline{G}(v')^2 \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \end{aligned}$$

para todo  $p \in \mathbf{x}(U)$  e todo  $w \in T_pS$ . Portanto,  $\varphi$  é uma isometria local. ■

Vimos no capítulo 1 que podemos calcular a distância entre dois pontos de uma curva fazendo uso apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental. Isso significa que podemos introduzir a noção de *distância intrínseca*  $d(p, q)$  entre dois pontos  $p$  e  $q$  de uma superfície, que nada mais é do que o ínfimo do comprimento de curvas na superfície que ligam os referidos pontos. O Teorema de Hopf-Rinow (cuja demonstração será omitida, mas pode ser encontrada na seção 5.3 do livro de Carmo (2010) que trata de *superfícies completas*, além do referido teorema) afirma que a curva que nos dá este ínfimo do comprimento é uma *geodésica*, um tipo de curva que trataremos na seção 4.3. Por hora, demonstraremos que,

**Proposição 4.1.4** *Um difeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$  é uma isometria se, e somente se, o comprimento de arco de qualquer curva parametrizada em  $S$  é igual ao comprimento de arco da curva imagem por  $\varphi$ .*

**Demonstração:** Seja  $p \in S$  e  $v \in T_pS$ , com  $v \neq 0$ , e seja também  $\alpha : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , uma curva com  $\alpha'(0) = v$ . Suponhamos, por absurdo, que se tenha, por exemplo,

$$|d\varphi_p(\alpha'(0))| > |\alpha'(0)|.$$

Assim, numa vizinhança  $J \subset I$  de zero teremos

$$|d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))| > |\alpha'(t)|, \quad t \in J.$$

Isto implica que o comprimento de arco de  $\varphi \circ \alpha(J)$  é maior do que o comprimento de  $\alpha(J)$ , um absurdo. Portanto,  $|d\varphi_p(\alpha'(0))| = |\alpha'(0)|$ .

A recíproca é imediata pela definição de isometria. ■

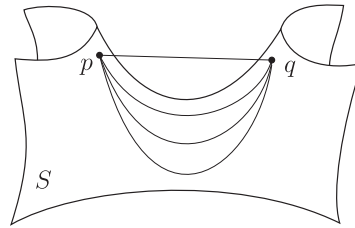
Ao medirmos a distância intrínseca  $d(p, q)$  entre dois pontos  $p, q \in S$  é evidente que teremos

$$d(p, q) \geq \|p - q\|,$$

onde  $\|p - q\|$  é a distância usual entre pontos do  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 4.1).

**Exemplo 4.1.5** *Um exemplo trivial de isometria entre superfícies é a existente entre o plano e o cilindro. Um cálculo direto mostra que os coeficientes das primeiras formas fundamentais do plano e do cilindro são iguais, por isso vamos nos ater a noção intuitiva.*

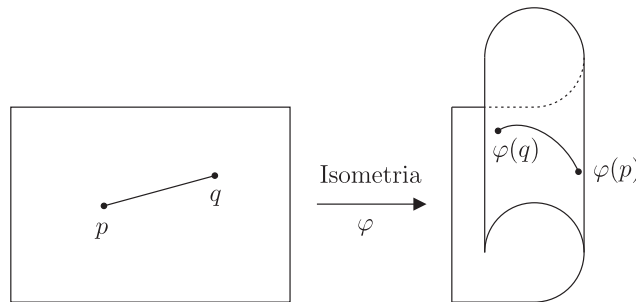
Figura 4.1:  $d(p, q) \geq \|p - q\|$ .



Fonte: Produção do próprio autor

Se tomarmos uma folha de papel como parte de um plano, basta curva-la para obtermos um cilindro sem necessidade de amassar, esticar ou sobrepor partes do papel, ou seja, sem distorcer a distância intrínseca (Fig. 4.2).

Figura 4.2: Isometria entre plano (esquerda) e superfície cilíndrica (direita).



Fonte: Produção do próprio autor

**Exemplo 4.1.6** Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  a parametrizaao do catenoide, dada por Carmo (2010),

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

com os respectivos coeficientes da primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= a^2 \cosh^2 v, \\ F &= 0, \\ G &= a^2 \cosh^2 v. \end{aligned}$$

Mostraremos que o catenoide é isométrico ao helicoides do Ex. 2.4.2. Contudo, se observarmos o Ex. 2.4.2, veremos que com a devida parametrizaao,

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{v}), \quad 0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty,$$

os coeficientes das primeiras formas fundamentais do helicoides e do catenoide não são



iguais. Faremos então uma reparametrização do helicóide. Tome

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u, \\ \bar{v} &= a \sinh v,\end{aligned}$$

com as mesmas variações de  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ . Um cálculo direto do Jacobiano mostra que essa mudança de parâmetros é válida. O helicóide reparametrizado fica então como,

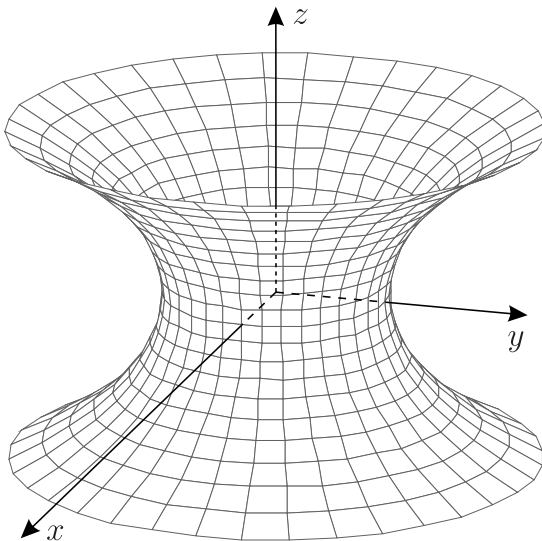
$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au).$$

Consequentemente, os coeficientes da primeira forma fundamental do helicóide reparametrizado são dados por

$$\begin{aligned}E &= a^2 \cosh^2 v, \\ F &= 0, \\ G &= a^2 \cosh^2 v.\end{aligned}$$

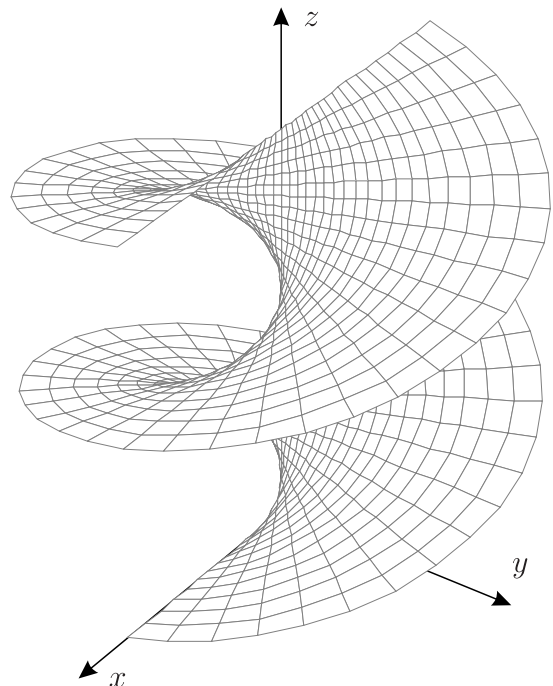
Portanto, pela Prop. 4.1.3, concluímos que o helicóide e o catenoide são localmente isométricos (Fig. 4.3 e Fig. 4.4).

Figura 4.3: O Catenoide.



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 4.4: O Helicóide reparametrizado.



Fonte: Produção do próprio autor

## 4.2 O TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

*Egregium* vem do latim, e significa célebre, notável. De fato, o Teorema Egregium de Gauss faz jus ao título. Segundo Carmo (2010), Gauss(1827) provou que

**Teorema 4.2.1 (Gauss)** *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

**Demonstração:** Sejam  $S$  uma superfície regular orientada, e  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização na orientação de  $S$ . Podemos associar cada ponto de  $\mathbf{x}(U)$  um triedro formado pelos vetores  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_v$  e  $N$ , cujas derivadas são dadas abaixo na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N, \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + \bar{L}_2 N, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$  já foram determinados no capítulo anterior. Quanto aos coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ , que são chamados de *símbolos de Christoffel*<sup>2</sup> de  $S$  na parametrização  $\mathbf{x}$ , estes devem ser determinados. Como  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , temos imediatamente que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  e  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ . Para descobriremos os valores de  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\bar{L}_2$  e  $L_3$ , tomamos o produto interno das quatro primeiras equações de 4.2.1 com  $N$ . Assim obtemos  $L_1$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} e = \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle \mathbf{x}_u, N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle \mathbf{x}_v, N \rangle + L_1 \langle N, N \rangle, \\ &= 0 + 0 + L_1, \end{aligned}$$

e portanto  $L_1 = e$ . Analogamente obtemos  $L_2 = \bar{L}_2 = f$  e  $L_3 = g$ . Quanto aos símbolos de Chistoffel, basta tomar o produto interno das primeiras quatro equações de 4.2.1 com  $\mathbf{x}_u$  e com  $\mathbf{x}_v$ . Antes, devemos notar que,

$$E_u = \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 2 \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle.$$

Agora, obtemos o seguinte sistema, com  $F_u, F_v, G_u$  e  $G_v$  obtidos de maneira análoga:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

<sup>2</sup>Elwin Bruno Christoffel foi um matemático e físico alemão do século XIX (EVES, 2004).

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_v, \end{cases}$$

As equações 4.2.2 foram agrupadas duas a duas de tal forma que cada um dos três sistemas possui determinante igual a  $EG - F^2$  que sabemos ser diferente de zero. Logo, é possível calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , e de suas derivadas. Portanto chegamos a importantíssima consequência: *Todos os conceitos geométricos e propriedades expressas em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias.*

Agora mostramos que podemos escrever a curvatura Gaussiana  $K$  em termos desses símbolos.

Considere a expressão

$$(\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0.$$

Substituindo os valores de 4.2.1 na expressão acima e tomando as derivadas, obtemos

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{x}_v + e_v N \\ & = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u \mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{x}_v + f_u N. \end{aligned}$$

Utilizando 4.2.1 novamente, podemos igualar os coeficientes de  $\mathbf{x}_v$ , já que  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N$  são linearmente independentes, para obter

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Agora, basta utilizar os valores de Eq. 3.2.3 para obtermos

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u \\ & = fa_{21} - ea_{22} \\ & = f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ & = \frac{feF - f^2E - efF + egE}{EG - F^2} \\ & = E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = EK. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

O teorema está essencialmente provado. Terminamos com as formalizações.

Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  é uma parametrização de  $S$  em  $p$  e se  $\varphi : V \subset \bar{S}$ , onde  $V \subset \mathbf{x}(U)$  é uma vizinhança de  $p$ , é uma isometria local em  $p$ , então  $\mathbf{y} = \varphi \circ \mathbf{x}$  é uma parametrização de  $\bar{S}$  em  $\varphi(p)$ . Como  $\varphi$  é uma isometria, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  coincidem em pontos correspondentes  $q$  e  $\varphi(q)$ ,

$q \in V$ . Logo, os símbolos de Christoffel também coincidem. Pela Eq. 4.2.3, conhecida com *Fórmula de Gauss*, podemos calcular  $K$  em dado ponto através dos símbolos de Christoffel e suas derivadas, e assim,  $K(q) = K(\varphi(q))$  para todo  $q \in V$ . ■

O Teorema Egregium tem consequências formidáveis. Tome o Ex. 4.1.6. O teorema implica que em pontos correspondentes do catenoide e do helicoides, o valor da curvatura Gaussiana é o mesmo! Fato este que não é intuitivo ao observar tais superfícies.

O fato de que  $K$  depende apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental mostra que o conceito de curvatura Gaussiana está exclusivamente ligado a estrutura métrica da superfície, e não com a posição que ela ocupa no espaço. Por este motivo falamos em *geometria intrínseca* da superfície, ou como diria Carmo (2010), *geometria da primeira forma fundamental*.

Antes de encerrarmos a seção, apresentamos a Fórmula de Gauss para parametrizações ortogonais, expressão essa que será útil no fim deste trabalho.

**Proposição 4.2.2** *Se  $\mathbf{x}$  é uma parametrização ortogonal, então*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

**Demonstração:** Sabemos que

$$K = \frac{1}{E} (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u). \quad (4.2.4)$$

Se  $\mathbf{x}$  é uma parametrização ortogonal, então temos  $F = 0$ . Utilizando os valores do sistema 4.2.2 com  $F = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E &= \frac{1}{2} E_u, & \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_v, \\ \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2} G_u, & \Gamma_{12}^1 E &= \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{11}^2 G &= -\frac{1}{2} E_v. \end{aligned}$$

Para obtermos os símbolos de Christoffel com derivadas, fazemos

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^2 G)_v &= \left( -\frac{1}{2} E_v \right)_v, \\ (\Gamma_{11}^2)_v G + \Gamma_{11}^2 G_v &= -\frac{1}{2} E_{vv}, \\ (\Gamma_{11}^2)_v &= \frac{G_v E_v}{2G^2} - \frac{E_{vv}}{2G}, \end{aligned}$$

e analogamente,

$$(\Gamma_{12}^2)_u = \frac{G_{uu}}{2G} - \frac{(G_u)^2}{2G^2}.$$

Substituindo os valores encontrados na Eq. 4.2.4, e reorganizando os coeficientes, obtemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{E} \left( \frac{E_u G_u}{4EG} - \frac{E_v G_v}{4G^2} + \frac{G_v E_v}{2G^2} - \frac{E_{vv}}{2G} + \frac{(E_v)^2}{4EG} - \frac{(G_u)^2}{4G^2} - \frac{G_{uu}}{2G} + \frac{(G_u)^2}{2G^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v G_v}{2G\sqrt{EG}} - \frac{(E_v)^2}{2E\sqrt{EG}} + \frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_u G_u}{2E\sqrt{EG}} - \frac{(G_u)^2}{2G\sqrt{EG}} \right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v &= \frac{E_{vv}\sqrt{EG} - (\sqrt{EG})_v E_v}{EG} \\ &= \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v G_v}{2G\sqrt{EG}} - \frac{(E_v)^2}{2E\sqrt{EG}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u &= \frac{G_{uu}\sqrt{EG} - (\sqrt{EG})_u G_u}{EG} \\ &= \frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_u G_u}{2E\sqrt{EG}} - \frac{(G_u)^2}{2G\sqrt{EG}}, \end{aligned}$$

obtemos facilmente que

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

■

### 4.3 TRANSPORTE PARALELO E GEODÉSICAS

Munidos de todas as ferramentas apresentadas até agora, apresentaremos uma série de definições e conceitos que envolvem a geometria intrínseca para que possamos concluir este trabalho.

*Campos de vetores* não fazem parte do foco de estudo deste trabalho, por isso, apenas a definição básica dada por Carmo (2010) é suficiente.

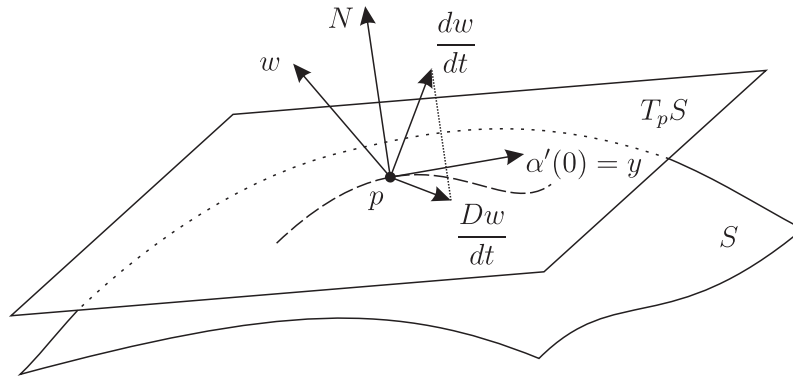
**Definição 4.3.1 (Campo de Vetores)** *Em um conjunto aberto  $U \subset S$  de uma superfície regular  $S$ , uma correspondência  $w$  que associa a cada  $p \in U$  um vetor  $w(p) \in T_p S$  é chamada campo de vetores. O campo de vetores é diferenciável em  $p$  se, para alguma parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  em  $p$ , as componentes  $a$  e  $b$  de  $w = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  são funções diferenciáveis em  $p$ . O campo de vetores  $w$  é diferenciável em  $U$  se é diferenciável para todo  $p \in U$ .*

Agora podemos apresentar a definição de derivada covariante de um campo de vetores. Segundo Carmo (2010),

**Definição 4.3.2 (Derivada Covariante)** *Seja  $w$  um campo diferenciável de vetores em um conjunto aberto  $U \subset S$  e  $p \in U$ . Seja  $y \in T_p S$ . Considere uma curva parametrizada  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = y$ , e seja  $w(t)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , a restrição do campo de vetores  $w$  à curva  $\alpha$ . O vetor obtido pela projeção de  $(dw/dt)(0)$  sobre o plano  $T_p S$  é chamada a derivada covariante em  $p$  do campo de vetores  $w$  em relação ao vetor  $y$ . Esta derivada covariante é denotada por  $(Dw/dt)(0)$  ou  $(D_y w)(p)$  (Fig. 4.5).*

É válido afirmar que o vetor  $y$  do campo de vetores tangentes aponta para qualquer direção, inclusive sua derivada  $(dw/dt)(0)$ . Contudo, a derivada covariante  $(Dw/dt)(0)$  é sempre ortogonal ao normal unitário a superfície em  $p$ .

Figura 4.5: A derivada covariante



Fonte: Produção do próprio autor

Assim como inúmeras outras características geométricas da superfície, a derivada covariante não depende da escolha da curva  $\alpha$ , e sim do vetor tangente  $y$ . Para tanto, tome  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  assim como

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))\mathbf{x}_u + b(u(t), v(t))\mathbf{x}_v, \\ &= a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{dw}{dt} = a(\mathbf{x}_{uu}u' + \mathbf{x}_{uv}v') + b(\mathbf{x}_{vu}u' + \mathbf{x}_{vv}v') + a'\mathbf{x}_u + b'\mathbf{x}_v,$$

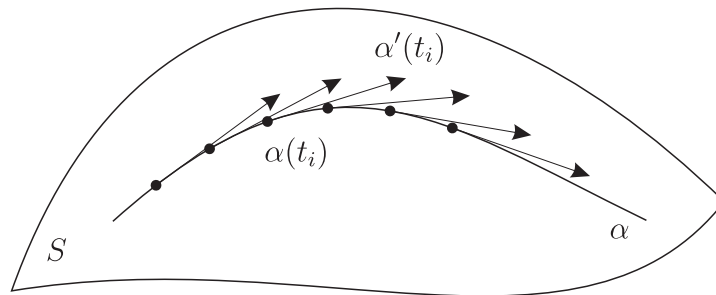
onde  $'$  indica a derivação com relação a  $t$ . Como  $Dw/dt$  é a projeção de  $dw/dt$  no  $T_p S$ , basta usar as expressões de 4.2.1 e descartar a componente normal para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= (a' + \Gamma_{11}^1 a u' + \Gamma_{12}^1 a v' + \Gamma_{12}^1 b u' + \Gamma_{22}^1 b v')\mathbf{x}_u \\ &\quad + (b' + \Gamma_{11}^2 a u' + \Gamma_{12}^2 a v' + \Gamma_{12}^2 b u' + \Gamma_{22}^2 b v')\mathbf{x}_v. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Isso mostra que a derivada covariante depende apenas do vetor  $y = (u', v')$ . A presença dos símbolos de Christoffel mostram que a derivada covariante também é uma característica intrínseca da superfície.

Podemos considerar também a derivada covariante de um campo de vetores tangentes que está definido apenas sobre uma curva parametrizada. Esta ideia é bem intuitiva, e por isso, vamos omitir tais definições, que podem ser encontradas na seção 4.4 do livro de Carmo (2010). Um exemplo de campo de vetores restrito a uma curva é o campo de vetores tangentes da própria curva (Fig. 4.6).

Figura 4.6: Campo de vetores tangentes ao longo de uma curva.

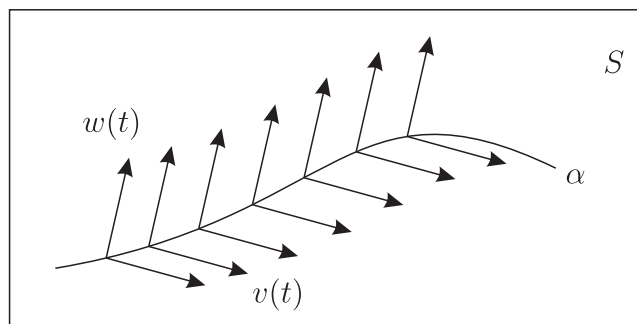


Fonte: Produção do próprio autor

Agora estamos aptos a definir um campo paralelo, parte do tema de estudo desta seção. Segundo Carmo (2010),

**Definição 4.3.3 (Campo Paralelo)** *Um campo de vetores  $w$  ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  é chamado paralelo se  $Dw/dt = 0$  para todo  $t \in I$ .*

Figura 4.7: Campos paralelos  $w(t)$  e  $v(t)$  ao longo de uma curva planar.



Fonte: Produção do próprio autor

A noção de campo de vetores paralelos ao longo de uma curva no plano é a usual (Fig. 4.7). A proposição seguinte, válida para qualquer superfície regular, nos dá um argumento para justificar tal ideia. Segundo Carmo (2010),

**Proposição 4.3.4** *Sejam  $v$  e  $w$  campos de vetores paralelos ao longo de  $\alpha : I \rightarrow S$ . Então  $\langle v(t), w(t) \rangle$  é constante. Em particular,  $|w(t)|$  e  $|v(t)|$  são constantes, e o ângulo entre  $v(t)$  e  $w(t)$  é constante.*

**Demonstração:** Se  $w$  é paralelo ao longo de  $\alpha$ , então, pela definição,  $Dw/dt = 0$ , o que significa que  $dw/dt$  é paralelo a  $N$ , ou seja, ortogonal ao plano tangente à superfície em  $\alpha(t)$ . Como  $v$  pertence ao plano tangente, temos que

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad t \in I.$$

O mesmo vale para  $v(t)$ . Logo, podemos escrever

$$0 = \langle v(t), w'(t) \rangle + \langle v'(t), w(t) \rangle = \langle v(t), w(t) \rangle'.$$

Portanto,  $\langle v(t), w(t) \rangle$  é constante. ■

A noção de campo paralelo sobre uma superfície qualquer não é intuitiva geometricamente como vimos no caso planar. Um exemplo disso segue mais adiante, após definirmos *transporte paralelo*.

A demonstração da proposição abaixo será omitida por envolver o teorema de unicidade de soluções de equações diferenciais, mas pode ser encontrada no fim da seção 4.4 do livro de Carmo (2010).

**Proposição 4.3.5** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada em  $S$  e seja  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ ,  $t_0 \in I$ . Então existe um único campo de vetores paralelo  $w(t)$  ao longo de  $\alpha(t)$ , com  $w(t_0) = w_0$ .*

Esta proposição mostra que, dado um vetor  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ , é único o campo paralelo que o contém, ou seja, é possível determinar um campo paralelo a partir de qualquer vetor no plano tangente, e mais do que isso, o campo paralelo, relativo a  $w_0$ , será único. Para isso, basta fazer um *transporte paralelo* de  $w_0$ . Segundo Carmo (2010),

**Definição 4.3.6 (Transporte Paralelo)** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada e  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ ,  $t_0 \in S$ . Seja  $w$  um campo paralelo ao longo de  $\alpha$ ,  $w(t_0) = w_0$ . O vetor  $w(t_1)$ ,  $t_1 \in I$ , é chamado transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $\alpha$  no ponto  $t_1$ .*

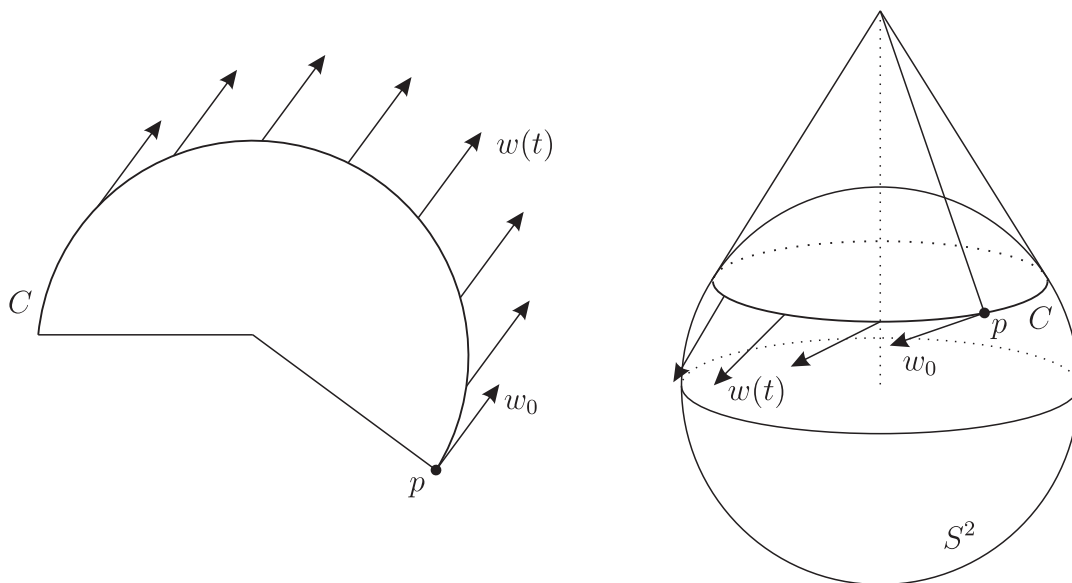
Tome duas superfícies,  $S_1$  e  $S_2$ , tangentes ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha$  e  $w_0$  é um vetor tal que  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S_1 = T_{\alpha(t_0)}S_2$ . Como a derivada covariante  $Dw/dt$  de  $w$  é a mesma para ambas as superfícies, pois os planos tangentes são iguais, então o transporte paralelo  $w(t)$  de  $w_0$  relativo a  $S_1$  é o mesmo relativo a  $S_2$ .

**Exemplo 4.3.7** *Considere o transporte paralelo de  $w_0$  ao longo da curva  $C$  do setor circular da figura Fig. 4.8. Como o cone resultante da isometria do setor circular é tangente a esfera no paralelo latitudinal  $C$ , podemos ter uma ideia geométrica do que seria o transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $C$  na superfície esférica.*

*Este exemplo pode ser encontrado com detalhes calculacionais no livro de Carmo (2010).*



Figura 4.8: Transporte paralelo na curva de tangência entre a esfera e o cone.



Fonte: Produção do próprio autor

Convém agora definir o tema central desta seção, a *geodésica* (CARMO, 2010).

**Definição 4.3.8 (Geodésica)** Uma curva parametrizada, não constante,  $\gamma : I \rightarrow S$  é chamada geodésica em  $t \in I$  se o seu campo de vetores tangentes  $\gamma'(t)$  é paralelo ao longo de  $\gamma$  em  $t$ ; isto é

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

$\gamma$  é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo  $t \in I$ .

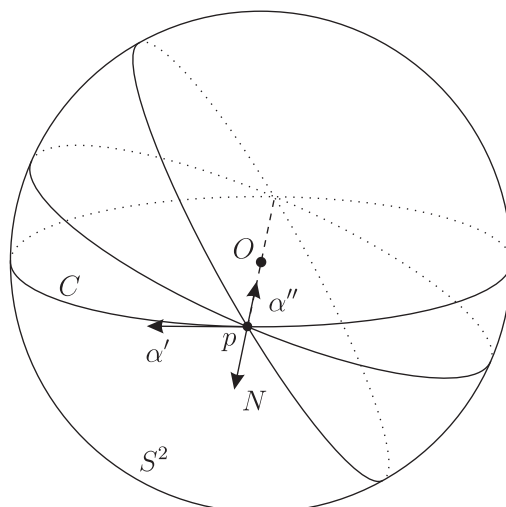
Como a noção de geodésica é um conceito local, a definição anterior nos permite estender este conceito a curvas regulares.

**Definição 4.3.9** Uma curva regular conexa  $C$  em  $S$  é chamada geodésica se, para cada  $p \in C$ , a parametrização  $\alpha(s)$  de uma vizinhança coordenada de  $p$  pelo comprimento de arco  $s$  é uma geodésica parametrizada; isto é,  $\alpha'(s)$  é um campo de vetores paralelo ao longo de  $\alpha(s)$ .

Como a derivada covariante é a projeção da derivada de  $\alpha'(s)$  no plano tangente, então a definição anterior equivale a dizer que  $\alpha'' = kn$  é normal ao plano tangente para que  $\alpha$  seja uma geodésica. Em outras palavras, segundo Carmo (2010), uma curva regular  $C \subset S(k \neq 0)$  é uma geodésica se e somente se sua normal principal em cada  $p \in C$  é paralela a normal de  $C$  em  $p$ . A verificação de tal fato é imediata.

**Exemplo 4.3.10** Os círculos máximos de uma esfera são geodésicas. Para tanto, basta observar que a normal principal de cada círculo máximo  $C$ , em cada ponto  $p \in C \subset S^2$ , tem a mesma direção que o vetor normal a  $S^2$  em  $p$ . Observe a Fig. 4.9.

Figura 4.9: Círculos máximos em uma esfera são geodésicas.



Fonte: Produção do próprio autor

**Exemplo 4.3.11** *É fácil verificar que as geratrizes e as circunferências contidas no cilindro são geodésicas. No caso geral, toda reta contida numa superfície é uma geodésica.*

*Vamos mostrar que as hélices também são geodésicas no cilindro. Tome a isometria entre o plano e o cilindro do Ex. 4.1.5. Podemos tomar a parametrização de um cilindro da seguinte maneira*

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

*Como  $\mathbf{x}$  é uma isometria local que aplica uma região do plano  $uv$  no cilindro e a derivada covariante é invariante por isometrias concluímos que geodésicas no plano são geodésicas no cilindro. Já que qualquer reta no plano*

$$u(s) = as, \quad v(s) = bs, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

*é uma geodésica, basta tomar a imagem dessas retas pela isometria  $\mathbf{x}$ , tal que obtemos*

$$\mathbf{x}(u(s), v(s)) = (\cos(as), \sin(as), bs),$$

*que nada mais são do que hélices.*

A derivada covariante é o análogo a derivada de vetores no plano para curvas em superfícies quaisquer, e assim como a curvatura  $k$ , podemos definir um valor de curvatura associado a derivada covariante. Convém agora introduzir o conceito de *valor algébrico da derivada covariante* e, conseqüentemente, a *curvatura geodésica*, segundo Carmo (2010).

**Definição 4.3.12** *Seja  $w$  um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre uma superfície orientada  $S$ . Como  $w(t)$ ,  $t \in I$  é*

um campo de vetores unitário,  $(dw/dt)(t)$  é normal a  $w(t)$ , e portanto

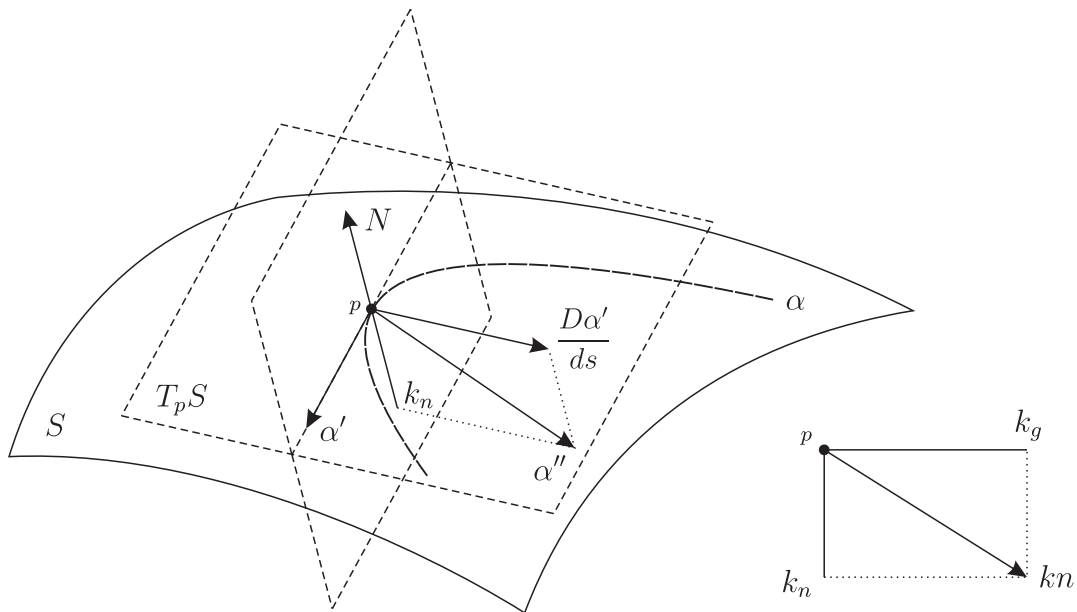
$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \wedge w(t)).$$

O número real  $\lambda = \lambda(t)$ , denotado por  $[Dw/dt]$ , é chamado valor algébrico da derivada covariante de  $w$  em  $t$ .

**Definição 4.3.13 (Curvatura Geodésica)** Seja  $C$  uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada  $S$ , e seja  $\alpha(s)$  uma parametrização de  $C$ , em uma vizinhança de  $p \in S$ , pelo comprimento de arco  $s$ . O valor algébrico  $[D\alpha'(s)/ds] = k_g$  da derivada covariante de  $\alpha'(s)$  é chamado de curvatura geodésica de  $C$  em  $p$ .

Devemos observar que a curvatura geodésica depende da orientação de  $S$ , já que resulta de um produto vetorial que envolve  $N$ . Convém observar também que, uma curva geodésica é então uma curva que tem curvatura geodésica nula.

Figura 4.10: Relação entre as curvaturas geodésica e normal.



Fonte: Produção do próprio autor

Como a curvatura normal  $k_n$  é o valor absoluto da projeção do vetor  $\alpha''(s) = kn$  sobre  $N$ , e a curvatura geodésica  $k_g$  é o valor absoluto da projeção de  $kn$  sobre o plano tangente, temos imediatamente que (Fig. 4.10),

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

Podemos obter uma expressão para o valor algébrico da derivada covariante, e consequentemente para a curvatura geodésica, que envolva os coeficientes da primeira forma fundamental. Para tanto, devemos formalizar algumas ideias.

Primeiramente considere dois campos de vetores  $w$  e  $v$  unitários e diferenciáveis ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$ . Precisamos de uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in I$ , que forneça a determinação diferenciável do ângulo de  $v(t)$  a  $w(t)$  na orientação de  $S$ . Para isto, considere o campo de vetores  $\bar{v}$ , também diferenciável ao longo de  $\alpha$ , tal que  $w(t)$  possa ser escrito na base ortonormal  $\{v(t), \bar{v}(t)\}$ , ou seja,

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t),$$

onde  $a(t)$  e  $b(t)$  são funções diferenciáveis em  $I$  e  $a^2 + b^2 = 1$ .

Para obter a função, basta tomar um ângulo inicial  $\varphi_0$  entre  $w(t_0)$  e  $v(t_0)$ , e estendê-lo diferencialmente em  $I$ , conforme o lema abaixo, segundo Carmo (2010).

**Lema 4.3.14** *Sejam  $a$  e  $b$  funções diferenciáveis em  $I$  com  $a^2 + b^2 = 1$  e  $\varphi_0$  tal que  $a(t_0) = \cos \varphi_0$  e  $b(t_0) = \sin \varphi_0$ .*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt$$

é tal que  $\cos \varphi(t) = a(t)$ ,  $\sin \varphi(t) = b(t)$ ,  $t \in I$ , e  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ .

**Demonstração:** Se mostrarmos que a equação

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = 0$$

é verdadeira, o lema estará provado. Expandindo o primeiro membro da equação acima e lembrando que  $a^2 + b^2 = 1$ , obtemos

$$2 - 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi) = 0,$$

que será válido apenas se  $A = a \cos \varphi + b \sin \varphi$  for igual a 1. Derivando  $a^2 + b^2 = 1$ , obtemos  $aa' = -bb'$ . Unindo esse fato a definição de  $\varphi$ , obtemos

$$\begin{aligned} A' &= -a(\sin \varphi)\varphi' + b(\cos \varphi)\varphi' + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi \\ &= -b'(\sin \varphi)(a^2 + b^2) - a'(\cos \varphi)(a^2 + b^2) + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $A(t) = \text{cte.}$ , e como  $A(t_0) = 1$ , o lema está demonstrado. ■

Agora vamos relacionar as derivadas covariantes de dois campos de vetores com a determinação diferenciável do ângulo entre eles, conforme o lema abaixo apresentado por Carmo (2010).

**Lema 4.3.15** *Sejam  $v$  e  $w$  dois campos diferenciáveis de vetores ao longo da curva  $\alpha : I \rightarrow S$ , com  $|v(t)| = |w(t)| = 1$ ,  $t \in I$ . Então*

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] - \left[ \frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $\varphi$  é uma das determinações diferenciáveis do ângulo de  $v$  a  $w$ , dadas no Lema 4.3.14.

**Demonstração:** Primeiramente provaremos para o caso em que  $\varphi \neq 0$ . Como  $\cos \varphi = \langle v, w \rangle$ , pela caracterização de produto interno, podemos derivar implicitamente com relação a  $t$  para obter

$$\langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle = -\varphi' \sin \varphi,$$

que pode ser escrito como

$$\left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle = -\varphi' \sin \varphi,$$

e pela Definição 4.3.12,

$$\left[ \frac{Dv}{dt} \right] \langle N \wedge v, w \rangle + \left[ \frac{Dw}{dt} \right] \langle v, N \wedge w \rangle = -\varphi' \sin \varphi.$$

Pela caracterização do produto misto  $\langle N \wedge v, w \rangle$  obtemos,

$$\left( \left[ \frac{Dv}{dt} \right] - \left[ \frac{Dw}{dt} \right] \right) \langle N \wedge v, w \rangle = -\varphi' \sin \varphi,$$

e assim

$$\left( \left[ \frac{Dv}{dt} \right] - \left[ \frac{Dw}{dt} \right] \right) \sin \varphi = -\varphi' \sin \varphi.$$

Como  $\varphi \neq 0$ , o lema está provado para este caso.

Se  $\varphi = 0$  em  $p \in \alpha(I)$ , temos, tomando o limite se necessário,  $\varphi' = 0$ , resultando em  $w = v$  e o lema vale trivialmente. ■

Agora, devemos perceber o seguinte. Tome  $v(s)$  um campo paralelo (e portanto com valor algébrico de derivada covariante nulo) e  $w(s) = \alpha'(s)$ , ou seja, um campo de vetores tangentes unitários. Disto resulta

$$k_g(s) = \left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds},$$

ou seja, a curvatura geodésica é a taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva. Mais uma vez percebemos que os conceitos estão todos ligados.

Agora, a expressão para o valor algébrico da derivada covariante, segundo Carmo (2010).

**Proposição 4.3.16** *Sejam  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização ortogonal (isto é,  $F = 0$ ) de uma vizinhança de uma superfície orientada  $S$ , e  $w(t)$  um campo de vetores unitário e*

diferenciável ao longo da curva  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Então

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $\varphi(t)$  é o ângulo de  $\mathbf{x}_u$  a  $w(t)$  na orientação dada.

**Demonstração:** Vemos facilmente que

$$e_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_u|} = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle}} = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}},$$

$$e_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_v|} = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle}} = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}},$$

são os vetores unitários tangentes às curvas coordenadas. Logo,  $e_1 \wedge e_2 = N$ . Pelo Lema 4.3.15, podemos escrever

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \left[ \frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde  $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$  é o campo  $e_1$  restrito à curva  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Mas pela Definição 4.3.12, e pela regra da cadeia, temos que

$$\left[ \frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt}.$$

Utilizando o fato de que  $F = 0$  no sistema 4.2.2, temos que

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\frac{1}{2} E_v,$$

e assim

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \left( \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right) \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}.$$

Analogamente,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

Agora nos basta substituir as duas últimas expressões na equação de  $[De_1/dt]$  para obter

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

e a proposição está demonstrada. ■

Para finalizarmos a seção, apresentaremos agora as equações de uma geodésica em uma vizinhança coordenada, que tem como consequência uma proposição sobre unicidade. Primeiro, vamos às formalizações, segundo Carmo (2010).

Seja  $\gamma : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada de  $S$  e seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em uma vizinhança  $V$  de  $\gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in I$ . Seja  $J \subset I$  um intervalo aberto contendo  $t_0$  tal que  $\gamma(J) \subset V$ . Seja  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in J$ , a expressão de  $\gamma : J \rightarrow S$  na parametrização

x. Então, o campo de vetores tangentes  $\gamma'(t) = w(t)$ ,  $t \in J$ , é dado por

$$w(t) = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v.$$

Como  $w$  é um campo paralelo, então  $[Dw/dt] = 0$ . Logo, utilizando a Eq. 4.3.5, fazendo a substituição  $a = u'$  e  $b = v'$ , e lembrando que  $\mathbf{x}_u$  e  $\mathbf{x}_v$  são linearmente independentes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0 \end{cases}, \quad (4.3.6)$$

que é conhecido como as *equações diferenciais das geodésicas de  $S$* . Tal nome advém do fato de que  $\gamma : I \rightarrow S$  é uma geodésica se, e somente se, o sistema 4.3.6 é satisfeito para todo intervalo  $J \subset I$  tal que  $\gamma(J)$  esteja contido em uma vizinhança coordenada. Essas equações diferenciais mostram que uma geodésica depende apenas da estrutura métrica da superfície no ponto (primeira forma fundamental) e da direção tomada (vetor  $(u', v')$ ).

A consequência imediata do sistema 4.3.6 se dá pela seguinte proposição, a qual omitiremos a demonstração que pode ser encontrada na seção 4.7 do livro de Carmo (2010).

**Proposição 4.3.17** *Dado um ponto  $p \in S$  e um vetor  $w \in T_pS$ ,  $w \neq 0$ , existe um  $\epsilon > 0$  e uma única geodésica parametrizada  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = w$ .*

Em outras palavras, dado um ponto e uma direção em uma superfície regular, é única a geodésica que passa por esse ponto e tem essa direção.

## 4.4 O TEOREMA DE GAUSS-BONNET E A CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA

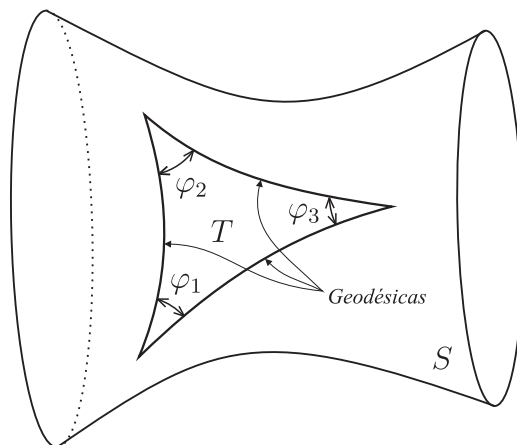
O Teorema de Gauss-Bonnet é o teorema mais profundo e elaborado que abordaremos neste trabalho, ele nos permitirá concluir nosso estudo. A sua primeira versão, segundo Carmo (2010), foi apresentada no famoso artigo de Gauss (1827), e tratava da soma de ângulos internos de um triângulo geodésico, isto é, triângulos cujos lados são arcos de geodésicas. Mais especificamente, Gauss provou que, dado um triângulo geodésico  $T$  (Fig. 4.11), de ângulos internos  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$ , então

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \iint_T K d\sigma.$$

Em particular, se  $K = 0$ , ou seja, o triângulo está numa superfície plana e consequentemente seus lados são retas, temos que  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$ , uma extensão do teorema de

Tales do ensino médio.

Figura 4.11: Triângulo geodésico  $T$ .



Fonte: Produção do próprio autor

A extensão desse teorema para uma região limitada por curvas simples não geodésicas veio com O. Bonnet. Para estendê-lo ao nosso objetivo, superfícies compactas, algumas considerações topológicas devem ser apresentadas.

Antes de enunciar o Teorema de Gauss-Bonnet, faremos algumas definições ao modelo de Carmo (2010).

**Definição 4.4.1** *Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  uma aplicação contínua de um intervalo fechado  $[0, l]$  sobre uma superfície regular  $S$ . Dizemos que  $\alpha$  é uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes, respectivamente se,*

1.  $\alpha(0) = \alpha(l)$ .
2.  $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [0, l]$ , implica que  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ .
3. Existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l,$$

de  $[0, l]$  tal que  $\alpha$  é diferenciável e regular em cada  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, k$ .

Os pontos  $\alpha(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$ , são chamados vértices de  $\alpha$  e os traços  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  são chamados arcos regulares de  $\alpha$ .

Em outras palavras,  $\alpha$  é uma curva fechada, que não possui auto-interseções, e não tem reta tangente definida em um número finito de pontos.

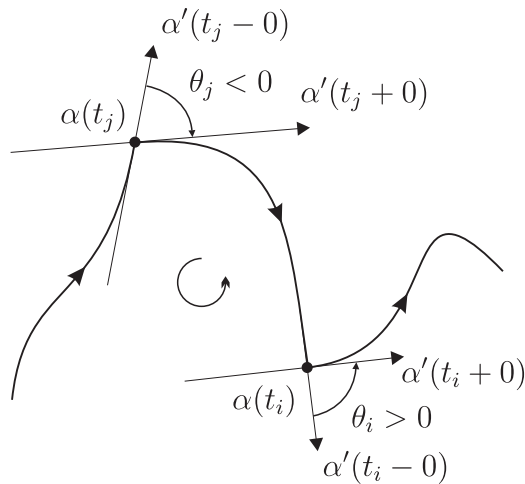
Como  $\alpha$  é uma curva regular, é possível tomar o limite a esquerda e a direita de cada vértice, tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'(t_i + 0) \neq 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'(t_i - 0) \neq 0,$$



e podemos definir o ângulo  $\theta_i$ ,  $0 < |\theta_i| \leq \pi$ , chamado de *ângulo externo*, como sendo a menor determinação do ângulo entre os vetores tangentes em  $\alpha(t_i)$  definidos pelo limite à direita e à esquerda. O sinal de  $\theta_i$  deve satisfazer a orientação  $N$  pela "regra da mão direita" (uma ideia simples, intuitiva e amplamente conhecida, principalmente por suas aplicações na física). A Fig. 4.12 é bem ilustrativa.

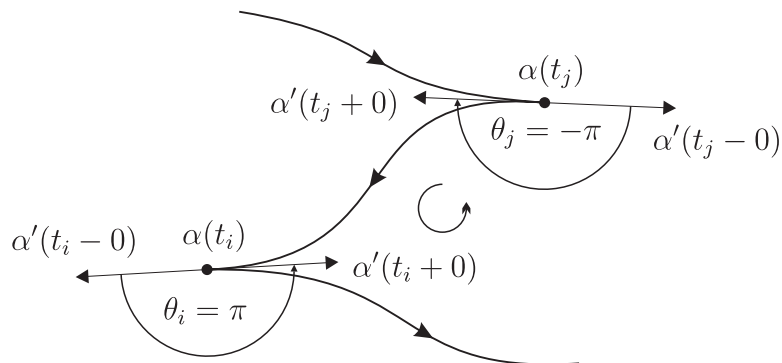
Figura 4.12: Ângulos externos.



Fonte: Produção do próprio autor

No caso de uma cúspide,  $|\theta_i| = \pi$ , o raciocínio é análogo (Fig. 4.13).

Figura 4.13: Ângulos externos em cúspides.



Fonte: Produção do próprio autor

Um teorema importante relacionado aos ângulos externos será o primeiro fato topológico que apresentaremos cuja demonstração será omitida. Primeiramente considere, segundo Carmo (2010),  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização compatível com a orientação de  $S$  tal que  $U$  é homeomorfo a um disco aberto no plano. Considere também  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  uma curva parametriza simples, fechada e regular por partes, com vértices  $\alpha(t_i)$  e ângulos externos  $\theta_i = 0, \dots, k$ . Por último, sejam  $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  funções

diferenciáveis que medem em cada  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  o ângulo positivo de  $\mathbf{x}_u$  a  $\alpha'(t)$ , conforme o Lema 4.3.14. Enunciamos, então o

**Teorema 4.4.2 (Teorema do Índice de Rotação)** *Com a notação acima descrita*

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

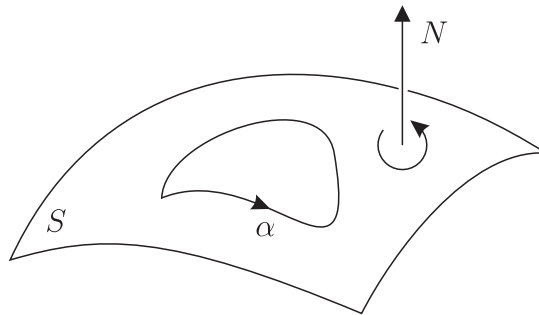
onde o sinal positivo ou negativo depende da orientação de  $\alpha$ .

Uma demonstração deste fato topológico foi apresentada no artigo de Hopf (1935). Para o caso em que  $\alpha$  não tem vértices e limita uma região homeomorfa a um plano, a demonstração de Hopf pode ser encontrada na seção 5.7 do livro de Carmo (2010).

O Teorema do Índice de Rotação afirma que, em outras palavras, a variação total do ângulo do vetor tangente a  $\alpha$  com uma dada direção (neste caso  $\mathbf{x}_u$ ) somado com os "saltos" nos vértices é igual a  $2\pi$ .

Últimas definições antes do Teorema de Gauss-Bonnet. Em uma superfície orientada  $S$ , dizemos que  $R \subset S$  é uma *região simples* se  $R$  é homeomorfa a um disco e a fronteira  $\partial R$  de  $R$  é o traço de uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes  $\alpha : I \rightarrow S$ . Dizemos que  $\alpha$  é orientada positivamente se o parâmetro  $t$  à percorre em sentido anti-horário de acordo com a orientação de  $S$  ("regra da mão direita"). Observe a Fig. 4.14.

Figura 4.14: Curva  $\alpha$  orientada positivamente.



Fonte: Produção do próprio autor

Por fim, seja agora  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  compatível com sua orientação e  $R \subset \mathbf{x}(U)$  uma região limitada de  $S$ . Se  $f$  é uma função diferenciável em  $S$ , temos que a integral dupla

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

não depende da parametrização  $\mathbf{x}$ . A demonstração deste fato segue os moldes da demonstração feita logo após a Definição 2.4.5. Segundo Carmo (2010), esta integral é chamada

integral de  $f$  sobre a região  $R$  e é comumente denotada por

$$\iint_R f d\sigma.$$

Finalmente, podemos enunciar o Teorema de Gauss-Bonnet, segundo Carmo (2010).

**Teorema 4.4.3 (Teorema de Gauss-Bonnet (Local))** *Seja  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  uma parametrização ortogonal (isto é,  $F = 0$ ), de uma superfície orientada  $S$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^2$  é homeomorfo a um disco aberto e  $\mathbf{x}$  é compatível com a orientação de  $S$ . Seja  $R \subset \mathbf{x}(U)$  uma região simples de  $S$  e seja  $\alpha : I \rightarrow S$  tal que  $\partial R = \alpha(I)$ . Suponha que  $\alpha$  é orientada positivamente, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , e sejam  $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$  e  $\theta_0, \dots, \theta_k$ , respectivamente, os vértices e os ângulos externos de  $\alpha$ . Então*

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi, \quad (4.4.7)$$

onde  $k_g(s)$  é a curvatura geodésica dos arcos regulares de  $\alpha$  e  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $S$ .

**Demonstração:** Tome  $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ . Como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, usamos a Prop. 4.3.16 para obter

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds},$$

onde  $\varphi_i = \varphi_i(s)$  é uma função diferenciável que mede o ângulo positivo de  $\mathbf{x}_u$  à  $\alpha'(s)$  em  $[s_i, s_{i+1}]$ . Integrando  $k_g(s)$  em todos os intervalos  $[s_i, s_{i+1}]$  e somando os resultados, obtemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds.$$

Segundo o Teorema de Green (LIMA, 2009a), aplicado ao plano  $uv$ , temos que, se  $P(u, v)$  e  $Q(u, v)$  são funções diferenciáveis em uma região simples  $A \subset \mathbb{R}^2$ , cuja fronteira é dada por  $u = u(s)$ ,  $v = v(s)$ , então

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds} \right) ds = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv.$$

Por este motivo, podemos escrever

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds.$$

A partir da fórmula de Gauss para  $F = 0$  da Prop. 4.2.2 podemos fazer a seguinte simplificação.

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv = - \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\sqrt{EG}dudv = - \iint_R Kd\sigma.$$

Temos também que, pelo Teorema do Índice de Rotação,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i,$$

onde o sinal de  $2\pi$  é positivo pela orientação positiva de  $\alpha$ . Fazendo as substituições evidentes, obtemos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R Kd\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi,$$

e o teorema está provado. ■

**Observação 4.4.4** *Tomamos uma parametrização ortogonal apenas para facilitar os cálculos, caso necessário é possível fazer uma reparametrização. Como veremos a seguir, o Teorema de Gauss-Bonnet permanece válido para qualquer região simples de uma superfície regular.*

Passamos agora a globalização do Teorema de Gauss-Bonnet. Para tanto precisamos de mais algumas definições e alguns fatos topológicos.

Primeiramente, considere uma superfície regular  $S$ . Segundo Carmo (2010), dizemos que uma região conexa  $R \subset S$  é *regular* se  $R$  é compacta e sua fronteira  $\partial R$  é a união finita de curvas regulares por partes fechadas e simples que não se intersectam; e destacamos,

**Definição 4.4.5** *Uma superfície compacta é uma região regular, cuja fronteira é vazia.*

Uma maneira de se trabalhar em cima de superfícies é dividindo-a em triângulos. Em uma superfície arbitrária, definimos *triângulo* como uma região simples que tem apenas três vértices com ângulos externos  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . O processo de divisão da superfície em triângulos é chamado de *triangulação* conforme definição abaixo (CARMO, 2010).

**Definição 4.4.6** *Uma triangulação de uma região regular  $R \subset S$  é uma família finita  $\mathcal{T}$  de triângulos  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que*

1.  $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$ .

2. Se  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ ,  $i \neq j$ , então  $T_i \cap T_j$  é uma aresta comum de  $T_i$  e  $T_j$  ou um vértice comum de  $T_i$  e  $T_j$ .

Assim, dada uma triangulação  $\mathcal{T}$  de uma região regular  $R \subset S$  de uma superfície  $S$ , denotaremos por  $F$  o número de triângulos (faces), por  $E$  o número de lados (arestas), e por  $V$  o número de vértices da triangulação. O número

$$F - E + V = \chi$$

é chamado *característica de Euler-Poincaré* da triangulação (LIMA, 1985).

As quatro proposições topológicas a seguir, necessárias para a globalização do Teorema de Gauss-Bonnet, serão apresentadas sem demonstração. Segundo Carmo (2010), tais demonstrações podem ser encontradas no Cap. 1 de Ahlfors e Sario (1960).

**Proposição 4.4.7** *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

**Proposição 4.4.8** *Seja  $S$  uma superfície orientada e  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ ,  $\alpha \in A$ , uma família de parametrizações compatíveis com a orientação de  $S$ . Seja  $R \subset S$  uma região regular de  $S$ . Então existe uma triangulação  $\mathcal{T}$  de  $R$  tal que todo triângulo  $T \in \mathcal{T}$  está contido em alguma vizinhança coordenada da família  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ . Além disto, se a fronteira de todo triângulo de  $\mathcal{T}$  for orientada positivamente, triângulos adjacentes determinam orientações opostas na aresta comum a eles.*

**Proposição 4.4.9** *Se  $R \subset S$  é uma região regular de uma superfície  $S$ , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de  $R$ . Convém, portanto, denotá-la por  $\chi(R)$ .*

Esta última proposição é de um significado fantástico. O fato de que a triangulação é arbitrária, e de que a característica  $\chi(R)$  é um invariante topológico da região  $R \subset S$  nos permite fazer uma classificação de superfícies de acordo com o valor de  $\chi(R)$ . É imediato observar que  $\chi(R)$  é um número inteiro (pois, além do número de triângulos ser finito na triangulação, os números  $F$ ,  $E$  e  $V$  são naturais), logo o conjunto de todas as características de Euler-Poincaré é enumerável. A proposição seguinte trata desta classificação.

**Proposição 4.4.10** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície compacta e conexa; então um dos valores  $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$  é assumido pela característica de Euler-Poincaré  $\chi(S)$ . Além disto, se  $S' \subset \mathbb{R}^3$  é uma outra superfície compacta e conexa e  $\chi(S) = \chi(S')$ , então  $S$  é homeomorfa a  $S'$ .*

Experimentalmente, é possível encontrar rapidamente o valor de  $\chi(S)$  para superfícies compactas como a esfera e o toro, bastando desenhar triangulações simples em cada um. Porém, o processo torna-se demasiado complexo para outras superfícies compactas. A expansão do Teorema de Gauss-Bonnet para sua versão global sistematiza essa classificação e nos fornece um resultado ainda mais fantástico. Segundo Carmo (2010),

**Teorema 4.4.11 (Teorema de Gauss-Bonnet Global)** *Seja  $R \subset S$  uma região regular de uma superfície orientada e sejam  $C_1, \dots, C_n$  as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira de  $\partial R$  de  $R$ . Suponha que cada  $C_i$  é orientada positivamente e sejam  $\theta_1, \dots, \theta_p$  o conjunto de ângulos externos das curvas  $C_1, \dots, C_n$ . Então*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R), \quad (4.4.8)$$

onde  $s$  denota o comprimento de arco de  $C_i$ , e a integral sobre  $C_i$  significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de  $C_i$ .

**Demonstração:** Considere uma triangulação  $\mathcal{T}$  da região  $R$  tal que qualquer triângulo  $T_j$  esteja contido em uma vizinhança coordenada da família de parametrizações ortogonais compatíveis com a orientação de  $S$ . Tal triangulação existe pela Prop. 4.4.8. Além disto, se a fronteira de cada triângulo de  $\mathcal{T}$  for orientada positivamente, obtemos orientações opostas nas arestas que são comuns a triângulos adjacentes.

Podemos utilizar o fato de que cada aresta "interior" é contada duas vezes com orientações opostas e que a integral dupla de  $K$  não depende da triangulação (CARMO, 2010, p. 328) para aplicar o Teorema de Gauss-Bonnet Local a cada triângulo, somar os resultados e obter

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi F,$$

onde  $F$  denota o número de triângulos de  $\mathcal{T}$  e  $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$  são os ângulos externos do triângulo  $T_j$ . Observe a Fig. 4.15.

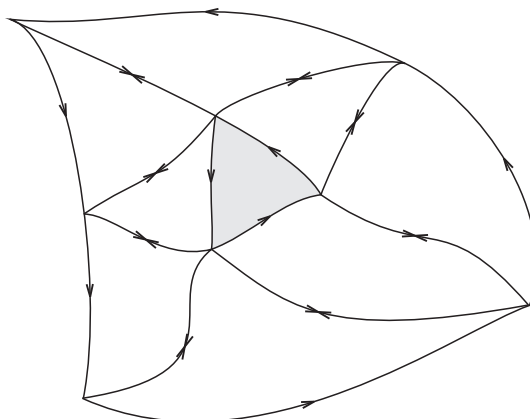
Iremos agora introduzir os ângulos internos de um triângulo  $T_j$ , dados por  $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ . Assim,

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = \sum_{j,k} \pi - \sum_{j,k} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Agora consideremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} E_e &= \text{número de arestas externas de } \mathcal{T}, \\ E_i &= \text{número de arestas internas de } \mathcal{T}, \\ V_e &= \text{número de vértices externos de } \mathcal{T}, \\ V_i &= \text{número de vértices internos de } \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Figura 4.15: Triangulação de uma superfície.



Fonte: Produção do próprio autor

Como as curvas  $C_i$  são fechadas,  $E_e = V_e$ . Além disso, é fácil mostrar por indução que  $3F = 2E_i + E_e$  e, portanto, que

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Observamos agora que os vértices externos podem ser vértices de alguma curva  $C_i$  ou vértices introduzidos pela triangulação. Colocamos  $V_e = V_{ec} + V_{et}$ , onde  $V_{ec}$  é o número de vértices das curvas  $C_i$  e  $V_{et}$  é o número de vértices externos da triangulação que não são vértices de alguma das curvas  $C_i$ . Como a soma dos ângulos em torno de cada vértice interno é  $2\pi$ , obtemos

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_l (\pi - \theta_l).$$

Somando e subtraindo  $\pi E_e$  na expressão acima e levando em conta que  $E_e = V_e$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i + \pi E_e - \pi E_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_l \theta_l \\ &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_e + \sum_l \theta_l \\ &= 2\pi(E_i + E_e) - 2\pi(V_i + V_e) + \sum_l \theta_l \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_l \theta_l. \end{aligned}$$

Juntando estes resultados, obtemos finalmente

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_{jk} = 2\pi(F - E + V) = 2\pi\chi(R).$$

■

Como a característica de Euler-Poincaré de uma região simples é evidentemente igual a 1 (um único triângulo, por exemplo:  $1 - 3 + 3 = 1$ ), obtemos

**Corolário 4.4.12** *Se  $R$  é uma região simples de  $S$ , então*

$$\sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi.$$

E agora a conclusão mais importante. Se podemos considerar uma superfície compacta como uma região regular de fronteira vazia, então o primeiro e o terceiro termo de Eq. 4.4.8 tornam-se nulos e obtemos

**Corolário 4.4.13** *Seja  $S$  uma superfície compacta e orientável; então*

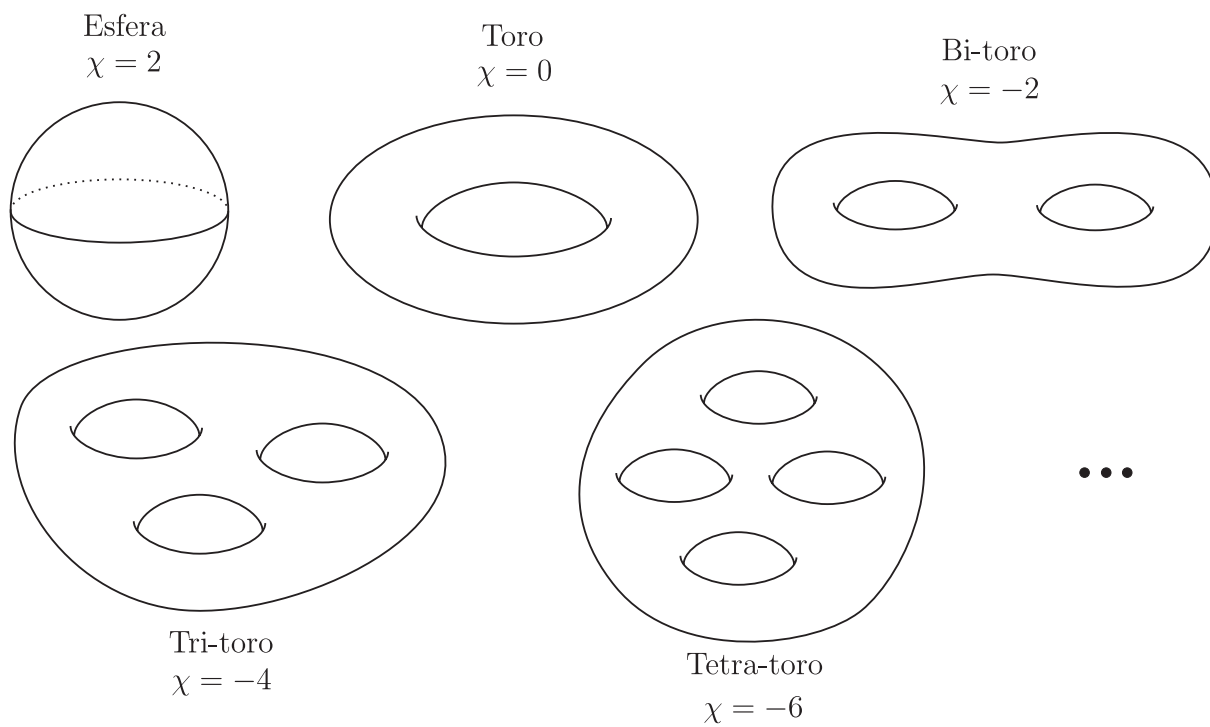
$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S). \tag{4.4.9}$$

Finalmente o resultado que nos possibilita encerrar este trabalho. Este último corolário é surpreendente. Tome uma esfera unitária. A integral dupla a direita da Eq. 4.4.9 é facilmente calculada, pois  $K = 1$  para todos os pontos da esfera unitária. Assim, a característica de Euler-Poincaré da esfera unitária é 2. Por outro lado, pela Prop. 4.4.10, todas as superfícies que são homeomorfas à esfera unitária terão também  $\chi(S) = 2$ . Logo, a curvatura "total", dada pela integral dupla de  $K$  sobre  $S$ , será numericamente igual para **todas as superfícies homeomorfas à esfera**, ou seja, a menos de um homeomorfismo, elas são todas iguais. E o mesmo vale para as superfícies restantes. Para o toro, obtemos  $\chi(S) = 0$ ; bi-toro,  $\chi(S) = -2$ ; tri-toro,  $\chi(S) = -4$ ; ou seja, o  $n$ -toro tem  $\chi(S) = -2(n-1)$ .

Para finalizarmos, a Fig. 4.16 a seguir representa a classificação topológica das superfícies compactas do  $\mathbb{R}^3$ .



Figura 4.16: A classificação topológica de superfícies compactas do  $\mathbb{R}^3$ .



Fonte: Produção do próprio autor

# CONCLUSÃO

O Teorema de Gauss-Bonnet foi de fato o maior resultado que apresentamos neste estudo. Ele nos permitiu apresentar a classificação topológica de todas as superfícies compactas orientáveis do  $\mathbb{R}^3$ . Sua demonstração envolveu essencialmente quatro pontos: a curvatura Gaussiana, a curvatura geodésica, o teorema do Índice de Rotação e a característica de Euler-Poincaré.

É impressionante o fato de como todos esses conceitos estão muito ligados. A Fig. 4.4.9 é um exemplo de como a curvatura geodésica e a curvatura Gaussiana (que seria o produto de curvaturas normais) estão intimamente relacionados, e todas provenientes de simples produtos internos.

Assim como comentaremos no Apêndice B, ficou claro que a presença do  $\mathbb{R}^3$  em todo o nosso estudo é "desnecessária". Faz parte da nossa limitação física que o espaço exterior a superfície se faça presente, apesar de que todos os conceitos e todas as curvaturas são provenientes da própria estrutura métrica da superfície, ou seja, da primeira forma fundamental.

O Teorema Egregium de Gauss também possui um significado imenso. Não importa a modificação que se faça numa superfície (como é o caso do helicóide e do catenoide), se a estrutura métrica da superfície for mantida, a curvatura Gaussiana no ponto permanecerá a mesma. Mais uma vez observamos a independência da superfície perante o ambiente em que ela ocupa.

De fato, todo o estudo teórico que foi feito com base no livro de Carmo (2010) foi necessário para se chegar nos quatro pontos citados anteriormente. Infelizmente, não foi possível acrescentar um estudo teórico sobre topologia para que pudéssemos apresentar as demonstrações dos fatos topológicos apresentados na seção 4.4, em especial, o teorema do Índice de Rotação. Fica então a sugestão para trabalhos futuros.

Geometria Diferencial e Topologia não são disciplinas que estão presentes na grade deste curso de graduação, portanto, realizar esta pesquisa nos mostrou não apenas um caminho futuro de trabalho, mas também que, alunos dessa graduação estão em condições de encarar versões introdutórias dessas disciplinas para que possam se familiarizar melhor com caminhos futuros de pesquisa.

## REFERÊNCIAS

AHLFORS, Lars Valerian e SARIO, Leo. **Riemann Surfaces**. Princeton University Press, N.J. 1960.

BBC NEWS. **Russian maths genius Perelman urged to take \$1m prize**. 2010. Disponível em: <http://news.bbc.co.uk/2/hi/8585407.stm> Acesso em: 6 jun. 2012.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 607 p.

CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria Riemanniana**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 332 p. (Projeto Euclides)

CMI - CLAY MATHEMATICS INSTITUTE. **First Clay Mathematics Institute Millennium Prize Announced Today - Prize for Resolution of the Poincaré Conjecture Awarded to Dr. Grigoriy Perelman**. 2010. Disponível em <<http://www.claymath.org/poincare/>> Acesso em: 28 mai. 2012

DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, c2003. 368 p.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2008. 843 p.

GAUSS, Carl Friedrich. **Disquisitiones generales circa superficies curvas**. Comm. Soc. Göttingen Bd 6, 1823-1827. Disponível em: <[http://books.google.com.br/books?id=bX0AAAAAMAAJ&oe=UTF-8&redir\\_esc=y](http://books.google.com.br/books?id=bX0AAAAAMAAJ&oe=UTF-8&redir_esc=y)> Acesso em: 2 mai. 2012

HOPF, Heinz. **Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven**. Compositio Mathematica, 2 (1935), p. 50-62. Disponível em: <[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1935\\_\\_2\\_\\_50\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__50_0)> Acesso em: 4 jun. 2012.

LIMA, Elon Lages. **A Característica de Euler-Poincaré**. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro: IMPA, v.1, p. 47-62, junho de 1985. Disponível em: [http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n01/n01\\_Artigo02.pdf](http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n01/n01_Artigo02.pdf) Acesso em: 4 jul. 2012.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 357 p. (Matemática universitária)

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no espaço**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 163 p. (Coleção do professor de matemática)

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.2**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009a. (Projeto Euclides)

LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009b. 299 p.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009c. (Projeto Euclides)

STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson Education, 1987. 292 p.

VIANA, Marcelo. **Conjectura de Poincaré - Geometria para entender o universo**. São Paulo. 2008. Palestra realizada no Instituto de Física da USP em 12 de nov. de 2008. Disponível em <<http://www.youtube.com/watch?v=dCplcXM0CVU>> Acesso em: inverno de 2010.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A - Definições e Teoremas Necessários

A *Definição de Diferencial de uma Aplicação* é primordial neste estudo. Alguns autores de livros de análise no  $\mathbb{R}^n$ , como Lima (2009a), trazem a definição de diferencial, porém a definição equivalente que é apresentada com a linguagem mais adequada para este trabalho é a oferecida pelo próprio livro de Carmo (2010):

**Definição 1 (Definição de Diferencial)** *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Associamos a cada  $p \in U$  uma aplicação linear  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que é chamada a diferencial de  $F$  em  $p$ , e é definida da seguinte maneira. Sejam  $w \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ . Pela regra da cadeia, a curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  também é diferenciável. Então*

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

O mesmo vale para os teoremas seguintes, os quais omitiremos as demonstrações que podem ser encontradas no livro de Lima (2009a) e Carmo (2010), respectivamente.

**Teorema 1 (Teorema da Função Inversa)** *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e suponha que em  $p \in U$  a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tem inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .*

**Teorema 2 (Regra da Cadeia para Aplicações)** *Sejam  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  aplicações diferenciáveis, onde  $U$  e  $V$  são conjuntos abertos tais que  $F(U) \subset V$ . Então  $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação diferenciável, e*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \quad p \in U.$$

## APÊNDICE B - Uma conversa sobre variedades

No Capítulo 2 apresentamos a definição de superfície regular. O maior defeito dessa definição é a sua dependência em relação ao  $\mathbb{R}^3$ . A ideia natural de superfície é a de um conjunto que seja bi-dimensional e ao qual se possa aplicar o cálculo diferencial do  $\mathbb{R}^2$ . A presença "desnecessária" do  $\mathbb{R}^3$  é simplesmente uma imposição da nossa natureza física (CARMO, 2008).

Embora Gauss (1827) já tivesse percebido a necessidade de uma ideia abstrata de superfície, isto é, sem envolver um espaço ambiente (neste caso o  $\mathbb{R}^3$ ), foi necessário quase um século para que a ideia atingisse a forma definitiva que comentaremos superficialmente aqui.

Pelo fato de termos comentado sobre variedades e sobre a conjectura de Poincaré na introdução deste trabalho sem que elas fossem objetos de estudo durante o desenvolvimento, apresentaremos aqui a definição formal de *variedade diferenciável* dada por Carmo (2008).

**Definição 2 (Variedade Diferenciável)** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  tais que:*

1.  $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2. Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  são diferenciáveis (de classe  $C^\infty$ ).
3. A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  (ou a aplicação  $\mathbf{x}_\alpha$ ) com  $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de  $M$  em  $p$ ;  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  é então chamada uma *vizinhança coordenada* em  $p$ . Uma família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em  $M$ . O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável (CARMO, 2008).

A principal diferença entre a definição de variedade diferenciável e a definição de superfície regular do Capítulo 2 é, além da generalização da dimensão, a propriedade fundamental da mudança de parâmetros, que antes era uma proposição para superfícies e agora é um axioma na condição (2).

Da mesma maneira que definimos o produto interno sobre as superfícies do  $\mathbb{R}^3$ , que nada mais é do que uma métrica (LIMA, 2009c), podemos definir uma métrica para as variedades. Encerramos este anexo com a definição de *métrica Riemanniana* dada por Carmo (2008).

**Definição 3 (Métrica Riemanniana)** *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle, \rangle_p$  (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, 0),$$

então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em  $U$ .

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.